T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DEDEKİND, GENELLEŞTİRİLMİŞ HARDY VE KLOOSTERMAN TOPLAMLARININ ORTALAMA DEĞER FORMÜLLERİ ÜZERİNE

Hamit SEVER

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DEDEKİND, GENELLEŞTİRİLMİŞ HARDY VE KLOOSTERMAN TOPLAMLARININ ORTALAMA DEĞER FORMÜLLERİ ÜZERİNE

Hamit SEVER

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2022
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DEDEKİND, GENELLEŞTİRİLMİŞ HARDY VE KLOOSTERMAN TOPLAMLARININ ORTALAMA DEĞER FORMÜLLERİ ÜZERİNE

Hamit SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 18/02/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI (Danışman)

Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

Doç. Dr. Ayhan DİL

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ DEDEKİND, GENELLEŞTİRİLMİŞ HARDY VE KLOOSTERMAN TOPLAMLARININ ORTALAMA DEĞER FORMÜLLERİ ÜZERİNE

Hamit SEVER

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

Şubat 2022; 31 sayfa

Bu çalışmada, Gauss toplamının özellikleri ve Dirichlet $L-$fonksiyonunun ortalama değer formülleri yardımıyla, genelleştirilmiş Dedekind toplamları, genelleştirilmiş Hardy toplamlarını ve Kloosterman toplamını içeren ortalama değer formülleri elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dedekind toplamı, Hardy toplamı, Kloosterman toplamı, ortalama değer.

JÜRİ: Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI
Doç. Dr. Ulaş YAMANCI
Doç. Dr. Ayhan DİL

ABSTRACT

ON THE MEAN VALUE OF GENERALIZED DEDEKIND SUM, CERTAIN GENERALIZED HARDY SUMS AND KLOOSTERMAN SUM

Hamit SEVER

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Muhammet Cihat DAĞLI

February 2022; 31 pages

In this work, we consider a mean value problem related to generalized Dedekind sums, certain generalized Hardy sums and Kloosterman sum, and obtain several meaningful conclusions by means of analytic method, the features of Gauss sum and Dirichlet $L-$function.

KEYWORDS: Dedekind sum, Hardy sum, Kloosterman sum, Mean value.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Muhammet Cihat DAĞLI
Assoc.Prof.Dr. Ulaş YAMANCI
Assoc.Prof.Dr. Ayhan DİL

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kaynak Taraması ve Bulgular ve Tartışma olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bulgular ve Tartışma bölümünde kullanılacak olan bazı temel kavramların tanımları ve bazı önemli sonuçları Kaynak Taraması bölümünde verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde ise, Gauss toplamının özellikleri ve Dirichlet $L-$ fonksiyonunun ortalama değer formülleri kullanılarak genelleştirilmiş Dedekind toplamları, genelleştirilmiş Hardy toplamlarını ve Kloosterman toplamını içeren ortalama değer formülleri elde edilmiştir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, hiçbir konuda desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Muhammet Cihat DAĞLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Genelleştirilmiş Dedekind, Genelleştirilmiş Hardy ve Kloosterman Toplamlarının Ortalama Değer Formülleri Üzerine" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

18/02/2022

Hamit SEVER

İmza

SİMGELER

Simgeler:

μ	: Möbiüs fonksiyonu
ϕ	: Euler phi fonksiyonu
χ	: Dirichlet karakteri
$G(n, \chi)$	: Gauss toplamı
χ_1	: İlkel karakter
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$L(s; \chi)$	: Dirichlet L-fonksiyonu
$\zeta(s)$	: Riemann zeta fonksiyonu
$\mathcal{B}_n\left(x\right)$	: n. Bernoulli fonksiyonu
$B_n\left(x\right)$	: n. Bernoulli polinomu
$S\left(u, v, q\right)$	: Kloosterman toplamı

1. GİRİŞ

Dedekind eta-fonksiyonu teorisinde ortaya çıkan $s(d,c)$ Dedekind toplamları 1892 yılında R. Dedekind tarafından $c,d\in\mathbb{Z}$, $c>1$ ve $(c,d)=1$ olmak üzere

$$s(d,c)=\sum_{j \pmod c}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada, $[x]$ herhangi bir x reel sayısının tam değeri olmak üzere $((x))$ fonksiyonu

$$((x))=\begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2}, & x\notin\mathbb{Z} \text{ ise;}\\ 0, & x\in\mathbb{Z} \text{ ise;}\end{cases}$$

şeklindedir. $\mathrm{Im}(z)>0$ olmak üzere, $\eta(z)$ Dedekind eta-fonksiyonu

$$\eta(z)=e^{\pi iz/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi inz}\right)$$

ile tanımlanır. $c>0$ olmak üzere, $V(z)=Vz=(az+b)/(cz+d)$ bir modüler dönüşüm olmak üzere, Dedekind toplamları ilk olarak $\log\eta(z)$ nin aşağıdaki dönüşüm formülünde ortaya çıkmıştır.

$$\log\eta(Vz)=\log\eta(z)+\frac{1}{2}\log(cz+d)-\pi i/4+\pi i(a+d)/12c-\pi is(d,c).$$

Dedekind toplamlarının en önemli özelliği $(c,d)=1$ olmak üzere

$$s(d,c)+s(c,d)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{d}{c}+\frac{c}{d}+\frac{1}{dc}\right)$$

resiprosite bağıntısıdır. Berndt (1978) ve Goldberg (1981), $\frac{az+b}{cz+d}$ modüler dönüşümünün a,b,c,d katsayılarına bağlı olarak $\theta_i(z)$, $i=3,4$ theta fonksiyonları olmak üzere $\log\theta_i(z)$ için altı farklı dönüşüm elde etmişlerdir. Bu dönüşüm formüllerinde, Dedekind toplamına benzer olan, Hardy toplamları ya da Berndt'in aritmetik toplamları olarak adlandırılan ve

$$S(d,c)=\sum_{j=1}^{c-1}(-1)^{j+1+\left[\frac{dj}{c}\right]},\quad s_1(d,c)=\sum_{j=1}^{c}(-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right),$$

$$s_2(d,c)=\sum_{j=1}^{c}(-1)^{j}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right),\qquad s_3(d,c)=\sum_{j=1}^{c-1}(-1)^{j}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)$$

$$s_4(d,c)=\sum_{j=1}^{c-1}(-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]},\qquad s_5(d,c)=\sum_{j=1}^{c}(-1)^{j+\left[\frac{dj}{c}\right]}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)$$

eşitlikleri ile verilen altı farklı toplam görülmektedir. Bu toplamlar, birçok matematikçi tarafından genelleştirilmiş ve bunlara karşılık gelen resiprosite bağıntıları farklı yollardan ispatlanmıştır (Apostol 1950, Berndt 1973a, 1973b, 1975a, 1975d, 1977a, Can vd 2006, Carlitz 1964, Cenkci vd 2007, Dağlı 2016, Dağlı ve Can 2015, 2017a, 2017b, Hamahata 2014, Lim 2009, Meyer 2000, Rademacher ve Grosswald 1972, Sekine 2003, Takacs 1979, Sitaramachandrarao (1987) ve Şimşek (2006)). Analitik ve aritmetik özellikleri ise, Berndt (1978), Goldberg (1981), Berndt ve Goldberg (1984), Pettet ve Sitaramachandrarao (1987), Sitaramachandrarao (1987), Meyer (1997a,1997b), Şimşek (1998) ve Can (2000,2004) tarafından incelenmiştir.

Liu ve Zhang (2006) tarafından, genelleştirilmiş Dedekind ve Hardy toplamları,

$$\begin{aligned}
s(d,m,n,c) &= \sum_{j=1}^{c} \mathcal{B}_m\left(\frac{j}{c}\right)\mathcal{B}_n\left(\frac{dj}{c}\right),\\
s_1(d,m,c) &= \sum_{j=1}^{c} (-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]}\mathcal{B}_m\left(\frac{j}{c}\right),\\
s_2(d,m,n,c) &= \sum_{j=1}^{c} (-1)^{j}\mathcal{B}_m\left(\frac{j}{c}\right)\mathcal{B}_n\left(\frac{dj}{c}\right),\\
s_3(d,n,c) &= \sum_{j=1}^{c} (-1)^{j}\mathcal{B}_n\left(\frac{dj}{c}\right),\\
s_5(d,m,c) &= \sum_{j=1}^{c} (-1)^{j+\left[\frac{dj}{c}\right]}\mathcal{B}_m\left(\frac{j}{c}\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanmıştır. Burada $\mathcal{B}_n(x)$, n. Bernoulli fonksiyonudur. Bu sekilde tanımlanan genelleştirilmiş Hardy toplamlarının genelleştirilmiş Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri ve bazı aritmetik özellikleri verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Gauss toplamının özellikleri ve Dirichlet $L-$fonksiyonunun ortalama değer formülleri yardımıyla, yukarıda tanımı verilen genelleştirilmiş Dedekind toplamları, genelleştirilmiş Hardy toplamlarını ve Kloosterman toplamını içeren ortalama değer formülleri elde edilmeye çalışılacaktır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde tez boyunca sıkça kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılıp bu kavramların sağladıkları önemli özellikleri verilecektir. Diğer kavramlar ve onların özellikleri, tez boyunca uygun yerlerde açıklanacaktır.

2.1. Möbiüs fonksiyonu

Tanım 2.1. *(Apostol 1976) μ ile gösterilen Möbiüs fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\mu(1) = 1;$$

$n > 1$, $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ *birbirinden farklı asallar ve* $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} ... p_k^{a_k}$ *olmak üzere*

$$\begin{cases} \mu(n) = (-1)^k, & a_1 = a_2 = ... = a_k = 1 \textit{ ise;} \\ \mu(n) = 0, & \textit{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Möbiüs fonksiyonunun ilk birkaç değeri aşağıdaki gibidir:

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n):$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Teorem 2.2. *(Apostol 1976) $n \geq 1$ olmak üzere*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1, & n = 1 \textit{ ise;} \\ 0, & n > 1 \textit{ ise;} \end{cases}$$

dir.

İspat $n = 1$ olması durumunda $d = 1$ dışında d değeri bulunmadığından ve $\mu(1) = 1$ olduğundan $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$ olduğu açıktır. $n > 1$ için $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} ... p_k^{a_k}$ olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} &\sum_{d|n} \mu(d) \\ &= \mu(1) + \mu(p_1) + ... + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + ... + \mu(p_{k-1} p_k) + ... + \mu(p_1 p_2 ... p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \binom{k}{3}(-1)^3 + ... + \binom{k}{k}(-1)^k \\ &= (1-1)^k = 0 \end{aligned}$$

olur. □

2.2. Euler ϕ fonksiyonu

Tanım 2.3. *(Apostol 1976) $n \geq 1$ olmak üzere n sayısından küçük ve n ile aralarında asal sayıların sayısı olarak tanımlanan Euler fonksiyonu , $\phi(n)$ şeklinde gösterilir ve*

$$\phi(n) = \sum_{k=1}^{n}{}'1$$

ile tanımlanır. Burada, $\sum_{k=1}^{n}{}'$ toplamı, $1 \leqslant k \leqslant n$ ve $(k,n) = 1$ olacak şekildeki tüm k lar üzerindendir. Euler ϕ fonksiyonunun bir kaç değeri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{cccccccccccc} n: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \phi(n): & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 4 & 6 & 4 \end{array}$$

$\mu(n)$ fonksiyonunda olduğu gibi $\phi(n)$ fonksiyonunda da bölen toplamları için bir formül vardır.

Teorem 2.4. *(Apostol 1976) $n \geq 1$ olmak üzere,*

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

bağıntısı sağlanır.

Teorem 2.5. *(Apostol 1976) $n \geq 1$ olmak üzere Euler ϕ fonksiyonu ve Möbiüs fonksiyonu arasında*

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$$

eşitliği sağlanır.

2.3. Çarpımsal fonksiyonlar

Tanım 2.6. *f bir aritmetik fonksiyon olmak üzere, eğer*

$$f(mn) = f(m)f(n), \quad (m,n) = 1 \text{ için}$$

oluyorsa f fonksiyonuna çarpımsal fonksiyon denir. Ayrıca,

$$f(mn) = f(m)f(n), \quad \text{her } m,n \text{ için}$$

olması durumunda f fonksiyonuna tam çarpımsal fonksiyon denir.

Örnek 2.7. *$\mu(n)$ Möbiüs fonksiyonu çarpımsaldır ancak tam çarpımsal değildir.*

Örnek 2.8. *$\phi(n)$ Euler ϕ fonksiyonu çarpımsaldır ancak tam çarpımsal değildir.*

2.4. Bernoulli polinomları

Tanım 2.9. *n. mertebeden Bernoulli polinomu $B_n(x)$*

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad (|t| < 2\pi)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Apostol 1950, Kanemitsu ve Tsukada 2007).

Bu tanımda $x = 0$ alınırsa $B_n(0) = B_n$, n. Bernoulli sayısı elde edilir ve $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6, \ldots$ ve her $n \geq 1$ için $B_{2n+1} = B_{2n-1}(1/2) = 0$ dır (Apostol 1976). $B_n(x)$ Bernoulli polinomunun B_n Bernoulli sayıları cinsinden ifadesi

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j x^{n-j}$$

dir (Apostol 1950, Kanemitsu ve Tsukada 2007).

$\mathcal{B}_n(x)$ ile gösterilen n. Bernoulli fonksiyonu

$$\mathcal{B}_n(x) = B_n(x - [x])$$

şeklinde tanımlanır. Bernoulli fonksiyonu periyodu 1 olan bir fonksiyondur ve

$$\mathcal{B}_p(x) = -\frac{p!}{(2\pi i)^p} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^p} \tag{2.1}$$

şeklinde Fourier açılımına sahiptir (Apostol 1950). Bernoulli polinomlarında olduğu gibi $\mathcal{B}_n(x)$ Bernoulli fonksiyonu da, herhangi bir x için,

$$c^{p-1} \sum_{j=0}^{c-1} \mathcal{B}_p\left(x + \frac{j}{c}\right) = \mathcal{B}_p(cx) \tag{2.2}$$

Raabe bağıntısını sağlar (Apostol 1950, Takàcs 1979). Bernoulli polinomu, sayısı ve fonksiyonu ile ilgili daha detaylı özellikler Apostol (1976) da bulunabilir.

2.5. Dedekind Toplamları

Tanım 2.10. *(Rademacher ve Grosswald 1972) $c, d \in \mathbb{Z}$, $c > 1$ olmak üzere $s(d, c)$ ile gösterilen Dedekind toplamı,*

$$s(d, c) = \sum_{j \pmod{c}} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 2.11. *Dedekind toplamları,* $(c,d)=1$ *olmak üzere*

$$s(d,c)+s(c,d)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{d}{c}+\frac{c}{d}+\frac{1}{cd}\right)$$

resiprosite bağıntısını sağlar (Rademacher ve Whitheman 1941, Rademacher ve Grosswald 1972).

Bu toplamlar birçok matematikçi tarafından genelleştirilmiş ve bu toplamlara karşılık gelen resiprosite bağıntıları ispatlanmıştır. (Rademacher ve Whitheman 1941, Apostol 1950, Carlitz 1954, 1964, Rademacher 1964, Rademacher ve Grosswald 1972, Berndt 1975b, Tak‡cs 1979, Kurt 1990, 1991, 1997, Nagasaka vd 2003, Ota 2003, Sekine 2005, Cenkci vd 2007).

Apostol (1950) Dedekind toplamını n,d,c pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$s_n(d,c)=\sum_{j(\operatorname{mod} c)}\frac{j}{c}\mathcal{B}_n\left(\frac{dj}{c}\right)$$

eşitliği ile genelleştirerek, $(d,c)=1$ ve tek n ler için

$$\begin{aligned}&dc^n s_n(d,c)+cd^n s_n(c,d)\\&=\frac{1}{(n+1)}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^j B_j d^j B_{n+1-j}c^{n+1-j}+\frac{nB_{n+1}}{(n+1)}\end{aligned}$$

resiprosite bağıntısını ispatlamıştır. $n=1$ olması durumunda $B_1(x)=((x))$ olduğundan $s_1(d,c)=s(d,c)$ olur.

Bu toplamların bir diğer genelleştirmesi ise,

$q\in\mathbb{Z}^+$ ve h,m,n tam sayıları için,

$$s(h,m,n,q)=\sum_{j=1}^{q}\mathcal{B}_m\left(\frac{j}{q}\right)\mathcal{B}_n\left(\frac{hj}{q}\right)$$

şeklindedir (Liu ve Zhang 2006). Burada, $B_m(x)$ bir Bernoulli polinomu olmak üzere

$$\mathcal{B}_m(x)=\begin{cases}B_m(x-[x]), & x\notin\mathbb{Z}\text{ ise;}\\ 0, & x\in\mathbb{Z}\text{ ise;}\end{cases}$$

ifadesi $n.$ dereceden Bernoulli fonksiyonudur. $m=n=1$ özel durumunda yukarıdaki genelleştirilmiş Dedekind toplamı klasik Dedekind toplamına karşılık gelir.

2.6. Hardy Toplamları

$\mathrm{Im}(z) > 0$ olmak üzere, $\theta_3(z)$ ve $\theta_4(z)$ theta fonksiyonları

$$\theta_3(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{\pi i z 2n}\right) \left(1 + e^{\pi i z(2n-1)}\right)^2,$$
$$\theta_4(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{\pi i z 2n}\right) \left(1 - e^{\pi i z(2n-1)}\right)^2$$

şeklinde tanımlanır.

Berndt (1978) ve Goldberg (1981), $\frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün a, b, c, d katsayılarına bağlı olarak $log\theta_i(z)$, $i = 3, 4$ için altı farklı dönüşüm elde etmişlerdir. Bu dönüşüm formüllerinde, Dedekind toplamına benzer olan, Hardy toplamları ya da Berndt'in aritmetik toplamları olarak adlandırılan aşağıdaki toplamlar ortaya çıkmıştır:

$$S(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j+1+\left[\frac{dj}{c}\right]}, \quad s_1(d,c) = \sum_{j=1}^{c} (-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right),$$
$$s_2(d,c) = \sum_{j=1}^{c} (-1)^{j} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right) \left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right), \qquad s_3(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{j} \left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right),$$
$$s_4(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} (-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]}, \qquad s_5(d,c) = \sum_{j=1}^{c} (-1)^{j+\left[\frac{dj}{c}\right]} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right).$$

Dedekind toplamlarında olduğu gibi bu toplamların da sağladığı en önemli özellik resiprosite bağıntılarıdır. Bu resiprosite bağıntıları, aralarında asal ve $d, c > 1$ olacak şekildeki d ve c sayıları için,

$(d + c)$ tek ise

$$S(d,c) + S(c,d) = 1$$

c tek ise

$$2s_3(d,c) - s_4(c,d) = 1 - \frac{d}{c}$$

d ve c pozitif, d çift ve c tek asal olacak biçiminde tamsayılar ise

$$s_1(d,c) - 2s_2(c,d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{dc} + \frac{c}{d}\right)$$

d ve c asal sayı ise

$$s_5(d,c) + s_5(c,d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2dc}$$

eşitlikleri ile verilir (Berndt 1978). Ayrıca, yukarıda verilen Hardy toplamlarının trigonometrik seriler cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.12. *(Berndt ve Goldberg 1984) $d, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$ ve $(d, c) = 1$ olsun. Eğer $(d + c)$ tek ise,*

$$\begin{aligned} S(d,c) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\tan\frac{\pi d\,(2n-1)}{2c} \\ &= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{c}\tan\left(\frac{\pi d\,(2j-1)}{2c}\right)\cot\left(\frac{\pi\,(2j-1)}{2c}\right), \end{aligned}$$

eğer c tek ise

$$\begin{aligned} s_3(d,c) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi dn}{c} \\ &= \frac{1}{2c}\sum_{j=1}^{k-1}\tan\left(\frac{\pi dj}{c}\right)\cot\left(\frac{\pi j}{c}\right), \end{aligned}$$

eğer d tek ise

$$\begin{aligned} s_4(d,c) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cot\frac{\pi d\,(2n-1)}{2c} \\ &= \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{c}\cot\left(\frac{\pi d\,(2j-1)}{2c}\right)\cot\left(\frac{\pi\,(2j-1)}{2c}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Hardy toplamlarının Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri ise aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.13. *(Sitaramachandrarao 1987) $d, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$ ve $(d, c) = 1$ olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} S(d,c) &= 8s(d,2c) + 8s(2d,c) - 20s(d,c), && (d + c \text{ tek}) \\ s_1(d,c) &= 2s(d,c) - 4s(d,2c), && (d \text{ çift}) \\ s_2(d,c) &= -s(d,c) + 2s(2d,c), && (c \text{ çift}) \\ s_3(d,c) &= 2s(d,c) - 4s(2d,c), && (c \text{ tek}) \\ s_4(d,c) &= -4s(d,c) + 8s(d,2c), && (d \text{ tek}) \\ s_5(d,c) &= 2s(d,c) - 4s(d,2c), && (d + c \text{ çift}) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $d + c$ çift ise $S(d,c) = 0$, c çift ise $s_3(d,c) = 0$ ve d çift ise $s_4(d,c) = 0$ dır (Sitaramachandrarao 1987).

Bu toplamların bazı özellikleri Berndt (1978), Goldberg (1981), Berndt ve Goldberg (1984), Pettet ve Sitaramachandrarao (1987), Sitaramachandrarao (1987), Meyer (1997a, 1997b), Şimşek (1998) ve Can (2004) tarafından incelenmiştir.

Dedekind toplamlarının genelleştirilmesine benzer olarak Hardy toplamlarının genelleştirmeleri şu şekildedir:

Tanım 2.14. *Genelleştirilmiş Hardy toplamları*

$$\begin{aligned} s_1(d,m,c) &= \sum_{j=1}^{c} (-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]} \mathcal{B}_m\left(\frac{j}{c}\right), \\ s_2(d,m,n,c) &= \sum_{j=1}^{c} (-1)^{j} \mathcal{B}_m\left(\frac{j}{c}\right) \mathcal{B}_n\left(\frac{dj}{c}\right), \\ s_3(d,n,c) &= \sum_{j=1}^{c} (-1)^{j} \mathcal{B}_n\left(\frac{dj}{c}\right), \\ s_5(d,m,c) &= \sum_{j=1}^{c} (-1)^{j+\left[\frac{dj}{c}\right]} \mathcal{B}_m\left(\frac{j}{c}\right) \end{aligned}$$

ile tanımlanır (Liu ve Zhang 2006). $m = n = 1$ *özel durumunda bu toplamlar klasik Hardy toplamlarına dönüşür.*

Ayrıca klasik Dedekind toplamları ve klasik Hardy toplamları arasında olduğu gibi genelleştirilmiş Dedekind toplamları ve genelleştirilmiş Hardy toplamları arasındaki ilişki aşağıdaki formüllerle ifade edilebilir.

Teorem 2.15. *(Liu ve Zhang 2006)* d, c *birer pozitif tam sayı ve* $(d,c) = 1$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} s_1(d,m,c) &= 2s(d,m,1,c) - 4s\left(\frac{c}{2}, m, 1, c\right), \qquad (d \text{ çift}) \\ s_2(d,m,n,c) &= 2^m s(2d,m,n,c) - s\left(d,m,n,c\right), \qquad (c \text{ çift}) \\ s_3(d,n,c) &= 2s(d,1,n,c) - 4s\left(2d,1,n,c\right), \qquad (c \text{ ve } n \text{ tek}) \\ s_5(d,m,c) &= 2^{m+1} s(2d,m,1,c) + 2^{m+1} s\left(d,m,1,2c\right) \\ &\quad - (2+2^{m+2}) s(d,m,1,c), \qquad (d+c \text{ çift}) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

2.7. Dirichlet L-fonksiyonu ve Gauss toplamları

Tanım 2.16. *(Apostol 1976)* $n \in \mathbb{N}$ *için*

1) $\chi\,(a+n) = \chi\,(a)$, $a \in \mathbb{Z}$,

2) $\chi\,(a) = 0 \iff (a,n) \neq 1$

koşullarını sağlayan $\mathbb{Z}$ *den* $\mathbb{C}$ *ye tanımlı* χ *çarpımsal fonksiyonuna bir* n *modül Dirichlet karakteri denir.* χ *fonksiyonunun tersi,* χ *nin değerlerinin karmaşık eşleniği olan* $\chi^{-1} = \overline{\chi}$ *dönüşümüdür.*

Tanım 2.17. *(Apostol 1976) Herhangi bir Dirichlet karakteri* $\chi \bmod k$ *için Gauss toplamı*

$$G(n,\chi) = \sum_{m=1}^{k} \chi(m) e^{2\pi imn/k}$$

şeklinde tanımlanır.

$\chi = \chi_1 \pmod k$ için temel karakter, yani $(m,k) = 1$ iken $\chi_1(m) = 1$ aksi halde $\chi_1(m) = 0$ olduğunda Gauss toplamı, $c_k(n)$ ile gösterilen

$$G(n,\chi_1) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m,k)=1}}^{k} e^{2\pi imn/k} = c_k(n)$$

şeklinde tanımlanan Ramanujan toplamına dönüşür. Dolayısıyla, $G(n,\chi)$ Gauss toplamları, Ramanujan toplamının bir genelleştirmesidir.

Ayrıca, herhangi bir Dirichlet karakteri $\chi \bmod k$ ve $(n,k) = 1$ olmak üzere,

$$G(n,\chi) = \overline{\chi}(n) G(1,\chi)$$

eşitliği sağlanır (Apostol 1976).

Tanım 2.18. *(Apostol 1976)* $s \in \mathbb{C}$ *ve* $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$ *olmak üzere,* $L(s,\chi)$ *ile gösterilen Dirichlet* $L-$*fonksiyonu*

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

ile tanımlanır.

Ayrıca, $s \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$, $n = qk + j$ ve $1 \leq j \leq k$, $q = 0, 1, 2, ...$ ise

$$L(s,\chi) = k^{-s} \sum_{j=1}^{k} \chi(j) \zeta\left(s, \frac{j}{k}\right)$$

bağıntısı sağlanır. Burada, $\zeta(s,a)$ ifadesi $\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$ ile verilen Hurwitz-zeta fonksiyonudur (Apostol 1976).

Teorem 2.19. *(Zhang 1996) $q>2$ bir tamsayı olmak üzere, $(h,q)=1$ olacak şekildeki tüm h tamsayıları için,*

$$s(h,q)=\frac{1}{\pi^2 q}\sum_{d|q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h)\,|L(1,\chi)|^2 \tag{2.3}$$

dir. Burada $L(1,\chi)$, $\chi(\bmod d)$ karakterli Dirichlet $L-$fonksiyonudur.

Teorem 2.20. *(Zhang ve Zhang 2014) p tek asal olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{12}\frac{(p-1)^2(p-2)}{p^2}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2)\,|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{24}\frac{(p-1)^2(p-5)}{p^2}, \tag{2.5}$$

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=1}}\chi(4)\,|L(1,\chi)|^2=\begin{cases}\frac{\pi^2}{48}\frac{(p-1)^2(p-17)}{p^2}, & p\equiv 1(\bmod 4)\ \textit{ise;}\\ \frac{\pi^2}{48}\frac{(p-1)(p^2-6P+17)}{p^2}, & p\equiv 3(\bmod 4)\ \textit{ise.}\end{cases} \tag{2.6}$$

İspat (2.3) eşitliği p asal sayısı için

$$s(h,p)=\frac{1}{\pi^2}\frac{p}{p-1}\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h)\,|L(1,\chi)|^2 \tag{2.7}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca Dedekind toplamı tanımından,

$$s(1,c)=\sum_{a=1}^{c-1}\left(\frac{a}{c}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{(c-1)(c-2)}{12c} \tag{2.8}$$

olduğu görülür. Şimdi, $p\equiv 1(\bmod c)$ olsun, Dedekind toplamları için resiprosite formülü ve (2.8) ifadesinden,

$$\begin{aligned} s(c,p)&=\frac{p^2+c^2+1}{12pc}-\frac{1}{4}-s(p,c)\\ &=\frac{p^2+c^2+1}{12pc}-\frac{1}{4}-s(1,c)\\ &=\frac{p^2+c^2+1}{12pc}-\frac{1}{4}-\frac{(c-1)(c-2)}{12c}\\ &=\frac{(p-1)(p-1-c^2)}{12pc} \end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde $p \equiv 3(\bmod 4)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} s(4,p) &= \frac{p^2+16+1}{48p} - \frac{1}{4} - s(p,4) \\ &= \frac{p^2+17}{48p} - \frac{1}{4} - s(3,4) \\ &= \frac{p^2+17}{48p} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{p^2-6p+17}{48p} \end{aligned} \tag{2.10}$$

olur. Şimdi $c=1$ için (2.9) ve (2.7) formülleri birleştirilirse

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} |L(1,\chi)|^2 = \frac{\pi^2}{12}\frac{(p-1)^2(p-2)}{p^2} \tag{2.11}$$

olur. Aynı şekilde $c=2$ için (2.9) ve (2.7) formülleri birleştirilirse

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \chi(2)\,|L(1,\chi)|^2 = \frac{\pi^2}{24}\frac{(p-1)^2(p-5)}{p^2} \tag{2.12}$$

olur. Benzer şekilde $c=4$ için önce (2.9) ve (2.7) ve daha sonra (2.10) ve (2.7) formülleri birleştirilirse,

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \chi(4)\,|L(1,\chi)|^2 = \frac{\pi^2}{48}\frac{(p-1)^2(p-17)}{p^2} \tag{2.13}$$

ve

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi(-1)=-1}} \chi(2)\,|L(1,\chi)|^2 = \frac{\pi^2}{48}\frac{(p-1)(p-6p+17)}{p^2} \tag{2.14}$$

formülleri elde edilir ki böylece kanıt tamamlanır. □

2.8. Kloosterman toplamları

Tanım 2.21. *$e(y)=e^{2\pi i y}$ ve $\bar{a}$, a nın $\bmod p$ ye göre çarpımsal tersi olmak üzere $S(u,v,q)$ ile gösterilen Kloosterman toplamları*

$$S(u,v,q) = \sum_{a=1}^{q}{}' e\left(\frac{ua+v\bar{a}}{q}\right)$$

ile tanımlanır. Burada, $\sum_{a=1}^{q}{}'$ toplamı, $1 \leqslant a \leqslant q$ ve $(a,q)=1$ olacak şekildeki tüm a lar üzerindendir.

$v = 1$ özel durumu alınarak

$$S\,(u, 1, q) := K(n, q)$$

toplamları için çeşitli ortalama değer formülleri çalışılmıştır (Chowla 1967, Malyshev 1960). Örnek olarak, aşağıdaki eşitlik verilebilir.

Teorem 2.22. *(Zhang ve Zhang 2014) p tek asal olmak üzere,*

$$\sum_{n=1}^{p-1} \chi(n)\, |K(n,p)|^2 = \overline{\chi}(-1)\frac{G^3(\chi)G(\overline{\chi}^2)}{G(\overline{\chi})}$$

bağıntısı sağlanır. Burada, $G(\chi) = G(1, \chi)$ dir.

Ayrıca, başka bir önemli bağıntı olarak, hibrid ortalama değer formülleri denilen Kloosterman toplamları ve Dedekind veya Hardy toplamlarını içeren aşağıdaki formüller geçerlidir.

Teorem 2.23. *(Zhang ve Zhang 2014) p tek asal olmak üzere,*

$$\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p-1} K(m,p)K(n,p)S(2m\overline{n},p) = \begin{cases} 2p^2, & p \equiv 3 (\operatorname{mod} 4) \text{ ise;} \\ 0, & p \equiv 1 (\operatorname{mod} 4) \text{ ise;} \end{cases}$$

dir.

Teorem 2.24. *(Zhang ve Zhang 2014) p tek asal olmak üzere,*

$$\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p-1} |K(m,p)|^2\,|K(n,p)|^2\, S(2m\overline{n},p)$$
$$= \begin{cases} 2p^3 + 4p^2h_p^2, & p \equiv 7 (\operatorname{mod} 8) \text{ ise;} \\ 2p^3 - 36p^2h_p^2, & p \equiv 3 (\operatorname{mod} 8) \text{ ise;} \\ 0, & p \equiv 1 (\operatorname{mod} 4) \text{ ise;} \end{cases}$$

dir. Burada h_p, $Q(\sqrt{-p})$ kuadratik denkleminin sınıf sayısıdır.

Teorem 2.25. *(Peng ve Zhang 2016) p tek asal sayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki formül sağlanır:*

$$\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p-1} K(m,p)K(n,p)s_5(m\overline{n},p) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Teorem 2.26. *(Peng ve Zhang 2016) p tek asal sayı olsun. Bu durumda aşağıdaki formül sağlanır:*

$$\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p-1}|K(m,p)|^2\,|K(n,p)|^2\,s_5(m\overline{n},p)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{p^2(p-1)}{2}, & p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \textit{ ise;}\\ \dfrac{p^2(p-1)}{2}-6p^2h_p^2, & p\equiv 3(\mathrm{mod}\,8) \textit{ ise;}\\ \dfrac{p^2(p-1)}{2}+2p^2h_p^2, & p\equiv 7(\mathrm{mod}\,8) \textit{ ise.}\end{cases}$$

Burada h_p, $Q(\sqrt{-p})$ kuadratik denkleminin sınıf sayısıdır.

Ayrıca, bir diğer Hardy toplamı olan $s_4\left(h,p\right)$ için benzer hibrid ortalama değer formülleri Dağlı (2021) tarafından çalışılmış ve aşağıdaki bağıntılar elde edilmiştir.

Teorem 2.27. *(Dağlı 2021) p tek asal sayı olsun. Bu durumda*

$$\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p-1}K\left(m,p\right)K\left(n,p\right)s_4\left(m\bar{n},p\right)=p^2\left(p-1\right)$$

dir.

Teorem 2.28. *(Dağlı 2021) p tek asal sayı olsun. Bu durumda*

$$\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p-1}\left|K\left(m,p\right)\right|^2\left|K\left(n,p\right)\right|^2 s_4\left(m\bar{n},p\right)$$
$$=\begin{cases}p^3\left(p-1\right), & p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4) \textit{ ise;}\\ p^3\left(p-1\right)-36p^2h_p^2, & p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,8) \textit{ ise;}\\ p^3\left(p-1\right)-4p^2h_p^2, & p\equiv 7\ (\mathrm{mod}\,8) \textit{ ise;}\end{cases}$$

dir.

Dedekind veya Hardy toplamları ile Kloosterman toplamı arasındaki çeşitli bağıntılar birçok matematikçi tarafından çalışılmakta ve ilginç formüller elde edilmektedir. Örneğin, Liu ve Zhang 2011 çalışmasında Dedekind ve Kloosterman toplamlarının bir ortalama değeri üzerine çalışılmış ve aşağıdaki bağıntı elde edilmiştir:

$$\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'S\left(u,a,q\right)\overline{S\left(u,b,q\right)}s\left(a\bar{b},q\right)=\frac{1}{12}q\phi^2\left(q\right)\prod_{p|q}\left(1+\frac{1}{p}\right). \tag{2.15}$$

Burada, ϕ notasyonu Euler ϕ fonksiyonu, $e(y) = e^{2\pi iy}$, $\bar{a}$, a nın $\bmod p$ ye göre çarpımsal tersi ve $\overline{f\,(n)}$ ifadesi $f\,(n)$ nin karmaşık eşleniğidir.

Bu tez çalışmasında, Gauss toplamının özellikleri ve Dirichlet $L-$fonksiyonunun özellikleri kullanılarak, (2.15) eşitliği ile verilen formülde klasik Dedekind toplamı yerine genelleştirilmiş Dedekind toplamları alınarak daha genel bir ortalama değer formül elde edilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Hardy toplamlarını ve Kloosterman toplamını içeren bir çeşit ortalama değer formülleri de elde edilmeye çalışılacaktır.

3. MATERYAL VE METOT

Kaynak Taraması bölümünde yer alan Möbiüs fonksiyonu, Euler ϕ fonksiyonu, Dirichlet $L-$fonksiyonu, Gauss toplamı ve Kloosterman toplamı için sağlanan bazı özellikler bu tezde Materyal ve Metot olarak kullanılacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Dirichlet $L-$fonksiyonunun ortalama değer formülleri yardımıyla genelleştirilmiş Dedekind toplamları, genelleştirilmiş Hardy toplamları ve Kloosterman toplamı için ortalama değer formülleri elde edilecektir.

Lemma 4.1. *(Liu ve Zhang 2006) $q \geq 2$ bir tam sayı ve $m \equiv n \equiv 1$ olsun.*

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} L(m,\chi)L(n,\overline{\chi})$$
$$= -\frac{(2\pi i)^{m+n}\phi(q)}{4m!n!}\left(\sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l}\phi_l(q)q^{l-m-n} - \frac{B_m B_n \phi_{m+n-1}(q)}{q}\right).$$

Burada, B_m Bernoulli sayısı ve

$$r_{m,n,l} = B_{m+n-l}\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=0}^{n} B_{m-a}B_{n-b}\frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{m+n-l}}{a+b+1}$$

şeklindedir.

Lemma 4.2. *$q \geq 3,$ h,q pozitif tamsayı ve $(h,q) = 1$ olsun. Bu durumda $m \equiv n \equiv 1$ $(\bmod 2)$ olsun.*

$$s(h,m,n,q) = \frac{-4m!n!}{(2\pi i)^{m+n} q^{m+n-1}}\sum_{d|q}\frac{d^{m+n}}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi(-1)=-1}}\overline{\chi}(h)L(m,\chi)L(n,\overline{\chi})$$

dir. Burada $L(m,\chi)$ Dirichlet $L-$fonksiyonu, $\sum_{d|q}$ toplamı, $\chi \bmod d$ karakterine karşılık gelen q nun tüm bölenlerini belirtir ve $\phi(q)$ Euler fonksiyonudur.

İspat *Bernoulli fonksiyonun Fourier seri açılımı kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa*

$$s(h,m,n,q)$$
$$= \sum_{j=1}^{q}\mathcal{B}_m\left(\frac{j}{q}\right)\mathcal{B}_n\left(\frac{hj}{q}\right)$$
$$= \frac{m!n!}{(2\pi i)^{m+n}}\sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0}}^{+\infty}\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{r^m s^n}\sum_{j=1}^{q-1} e\left(\frac{j(r+sh)}{q}\right)$$
$$= \frac{m!n!}{(2\pi i)^{m+n}}\left[q\sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0 \\ r+sh\equiv 0}}^{+\infty}\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0 \\ \bmod q}}^{+\infty}\frac{1}{r^m s^n} - \sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0}}^{+\infty}\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{r^m s^n}\right]$$

$$= \frac{m!n!q}{(2\pi i)^{m+n}} \sum_{d|q} \sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0 \\ r+sh\equiv 0 \\ (r,d)=1}}^{+\infty} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0 \\ \bmod d}}^{+\infty} \frac{1}{\left(r.\frac{q}{d}\right)^m \left(s.\frac{q}{d}\right)^n}$$

$$- \frac{m!n!}{(2\pi i)^{m+n}} (1+(-1)^m)(1+(-1)^n)\zeta(m)\zeta(n)$$

$$= \frac{m!n!}{(2\pi i)^{m+n} q^{m+n-1}} \sum_{d|q} \frac{d^{m+n}}{\phi(d)} \sum_{\chi \bmod d} \left(\sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0}}^{+\infty} \frac{\chi(r)}{r^m} \right) \left(\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{+\infty} \frac{\overline{\chi}(-sh)}{s^n} \right)$$

$$- \frac{m!n!}{(2\pi i)^{m+n}} (1+(-1)^m)(1+(-1)^n)\zeta(m)\zeta(n)$$

$$= \frac{4m!n!}{(2\pi i)^{m+n} q^{m+n-1}} \sum_{d|q} \frac{d^{m+n}}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi(-1)=(-1)^m=(-1)^n}} \overline{\chi}(-h) L(m,\chi) L(n,\overline{\chi})$$

$$- \frac{m!n!}{(2\pi i)^{m+n}} (1+(-1)^m)(1+(-1)^n)\zeta(m)\zeta(n)$$

olur. Burada $m \equiv n \equiv 1 (\bmod 2)$ *alınırsa lemmanın kanıtı tamamlanır.* □

Lemma 4.3. *(Tian 2018)* $q \geq 3$ *tek sayı olsun.* $(h,q) = 1$ *olacak şekildeki* h, q *tek sayıları için,*

$$s_5(h,m,q) = 2s(h,m,1,q) - 4s(\overline{2}h,m,1,q)$$

dur.

İspat Genelleştirilmiş Hardy toplamlarının, genelleştirilmiş Dedekind toplamları cinsinden ifadesi olan

$$s_5(h,m,q) = 2^{m+1}s(2h,m,1,q) + 2^{m+1}s(h,m,1,2q) - \left(2+2^{m+2}\right)s(h,m,1,q) \quad (4.1)$$

eşitliği bilinmektedir. Şimdi (4.1) düzenlensin. İlk olarak $s(d,m,1,2q)$ ifadesine Lemma 4.2 uygulanırsa,

$$s(h,m,1,2q)$$

$$= -\frac{4m!}{(2\pi i)^{m+1} (2q)^m} \sum_{d|2q} \frac{d^{m+1}}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi(-1)=-1}} \overline{\chi}(h) L(m,\chi) L(1,\overline{\chi})$$

$$= -\frac{4m!}{(2\pi i)^{m+1} (2q)^m} \left(\sum_{d|q} \frac{(2d)^{m+1}}{\phi(2d)} \sum_{\substack{\chi \bmod 2d \\ \chi(-1)=-1}} \overline{\chi}(h) L(m,\chi) L(1,\overline{\chi}) \right.$$

$$+\sum_{d|q}\frac{d^{m+1}}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\overline{\chi}(h)\,L(m,\chi)\,L(1,\overline{\chi})\Bigg)$$

$$=-\frac{4m!}{(2\pi i)^{m+1}(2q)^m}\Bigg(2^{m+1}\sum_{d|q}\frac{d^{m+1}}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\overline{\chi}\chi_2^0(h)\,L\left(m,\chi\chi_2^0\right)L\left(1,\overline{\chi}\chi_2^0\right)$$

$$+\sum_{d|k}\frac{d^{m+1}}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\overline{\chi}(h)\,L(m,\chi)\,L(1,\overline{\chi})\Bigg)$$

elde edilir. Burada χ_2^0 , mod 2 de temel karakterdir. Euler sonsuz çarpım formülünden,

$$L\left(m,\chi\chi_2^0\right)=\prod_{p_1}\left(1-\frac{\chi(p_1)\chi_2^0(p_1)}{p_1^m}\right)^{-1}=\prod_{p_1>2}\left(1-\frac{\chi(p_1)}{p_1^m}\right)^{-1}$$
$$=\left(1-\frac{\chi(2)}{2^m}\right)\prod_{p_1}\left(1-\frac{\chi(p_1)}{p_1^m}\right)^{-1}=\left(1-\frac{\chi(2)}{2^m}\right)L(m,\chi)$$
$$L\left(1,\overline{\chi}\chi_2^0\right)=\prod_{p_2}\left(1-\frac{\overline{\chi}(p_2)\chi_2^0(p_2)}{p_2}\right)^{-1}=\left(1-\frac{\overline{\chi}(2)}{2}\right)L(1,\overline{\chi})$$

yazılabilir. Burada, $\prod_p$ tüm p asalları üzerinden çarpımdır. Böylece,

$s(h,m,1,2q)$

$$=-\frac{4m!}{(2\pi i)^{m+1}q^m}\frac{1}{2^m}\Bigg(2^{m+1}.\sum_{d|q}\frac{d^{m+1}}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\left(1-\frac{\chi(2)}{2^m}\right)\left(1-\frac{\overline{\chi}(2)}{2}\right)\overline{\chi}(h)\,L(m,\chi)\,L(1,\overline{\chi})$$

$$+\sum_{d|q}\frac{d^{m+1}}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\overline{\chi}(h)\,L(m,\chi)\,L(1,\overline{\chi})\Bigg)$$

$$=-\frac{4m!}{(2\pi i)^{m+1}q^m}\sum_{d|q}\frac{d^{m+1}}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\left(2+\frac{1}{2^{m-1}}-\overline{\chi}(2)-\frac{\chi(2)}{2^{m-1}}\right)\overline{\chi}(h)\,L(m,\chi)\,L(1,\overline{\chi})$$

$$=\left(2+\frac{1}{2^{m-1}}\right)S(h,m,1,q)-S(2h,m,1,q)-\frac{1}{2^{m-1}}S(\overline{2}h,m,1,q) \tag{4.2}$$

yazılır. (4.1) ve (4.2) özdeşlikleri birleştirilirse

$$s_5(h,m,q)=2s(h,m,1,q)-4s(\overline{2}h,m,1,q)$$

elde edilir ki bu da lemmanın kanıtını tamamlar. □

Lemma 4.4. *(Tian 2018) q bir kare barındıran (square-full sayı) olsun. Bu durumda,*

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*} L(m,\chi) L(n,\overline{\chi})$$
$$= -\frac{(2\pi i)^{m+n}}{4m!n!} \sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l} . q^{l-m-n+1} \prod_{p|q} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l-m-n+1}}\right) \quad (4.3)$$

dir. Ayrıca q bir kare barındıran tek sayı ise,

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*} \overline{\chi}(2) L(m,\chi) L(n,\overline{\chi})$$
$$= -\frac{(2\pi i)^{m+n}}{4m!n!} \sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l} . q^{l-m-n+1} \left(\frac{2^{l}-2^{m+n}-2}{2^{m}+2^{n}}\right)$$
$$\times \prod_{p|q} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l-m-n+1}}\right) \quad (4.4)$$

dir. Burada

$$r_{m,n,l} = B_{m+n-l} \sum_{a=0}^{m} \sum_{b=0}^{n} B_{m-a} B_{n-b} \frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{m+n-l}}{a+b+1}$$

şeklindedir ve B_m Bernoulli sayısıdır. Ayrıca, $\sum\limits_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*}$, $\chi \bmod q$ tüm tek karakterlerin toplamını belirtir. $\prod\limits_{p|q}$ çarpımı ise q'nun tüm farklı asal bölenleri üzerinden çarpım gösterir.

İspat İlk olarak birinci özdeşlik kanıtlansın. q nun kare barındıran sayı olduğu ve

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*} L(m,\chi) L(n,\overline{\chi}) = \sum_{d|q} \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*} L\left(m,\chi\chi_q^0\right) L\left(n,\overline{\chi}\chi_q^0\right),$$

eşitliği göz önüne alınarak Möbiüs fonksiyonu kullanılırsa,

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*} L(m,\chi) L(n,\overline{\chi}) = \sum_{d|q} \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*} L\left(m,\chi\chi_q^0\right) L\left(n,\overline{\chi}\chi_q^0\right)$$
$$= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{\chi \bmod \frac{q}{d} \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*} L(m,\chi) L(n,\overline{\chi}) .$$

olur. Lemma 4.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*}L\left(m,\chi\right)L\left(n,\overline{\chi}\right) \\
&= -\frac{(2\pi i)^{m+n}}{4m!n!}\sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l}\left(\sum_{d|q}\phi(d)\phi(\frac{q}{d})\phi_l(\frac{q}{d})\left(\frac{q}{d}\right)^{l-m-n}\right. \\
&\left. +B_mB_n\sum_{d|q}\mu(d)\phi(\frac{q}{d})\frac{\phi_{m+n-1}(\frac{q}{d})}{\frac{q}{d}}\right)
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. Burada, $\mu(n)$, $\phi(n)$ ve $\phi_l(n)$ çarpımsal fonksiyonlar olduklarından,

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|q}\phi(d)\phi(\frac{q}{d})\phi_l(\frac{q}{d})\left(\frac{q}{d}\right)^{l-m-n} \\
&= \prod_{p|q}\sum_{d|p^{\alpha}}\mu(d)\phi(\frac{p^{\alpha}}{d})\phi_l(\frac{p^{\alpha}}{d})\left(\frac{p^{\alpha}}{d}\right)^{l-m-n} \\
&= q^{l-m-n+1}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^l}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l-m-n+1}}\right)
\end{aligned}$$

yazılır. Aynı yöntemler kullanılarak,

$$\sum_{d|q}\mu(d)\phi(\frac{q}{d})\phi_{m+n-1}(\frac{q}{d})\left(\frac{d}{q}\right) = 0$$

elde edilir. Bu sonuçlar birleştirilirse aşağıdaki özdeşlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*}L\left(m,\chi\right)L\left(n,\overline{\chi}\right) \\
&= -\frac{(2\pi i)^{m+n}}{4m!n!}\sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l}.q^{l-m-n+1}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^l}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l-m-n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla ilk özdeşlik kanıtlanmış olur. Şimdi ikinci formül kanıtlansın. Öncelikle kolaylıkla

$$\begin{aligned}
&L\left(m,\chi\chi_2^0\right)L\left(n,\overline{\chi}\chi_2^0\right) \\
&= L(m,\chi)L(n,\overline{\chi})\left(1-\frac{\chi(2)}{2^m}\right)\left(1-\frac{\overline{\chi}(2)}{2^n}\right) \\
&= L(m,\chi)L(n,\overline{\chi})\left[1+\frac{1}{2^{m+n}}-\left(\frac{\chi(2)}{2^m}+\frac{\overline{\chi}(2)}{2^n}\right)\right]
\end{aligned}$$

olduğu gözlemlenebilir. Ayrıca, $\sum\limits_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*}\chi(2) = \sum\limits_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*}\overline{\chi}(2)$ dir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*}\overline{\chi}(2) L(m,\chi)\, L(n,\overline{\chi}) \\
&= \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}} {}^{*} \left(\frac{1}{2^{n}} + \frac{1}{2^{m}}\right)^{-1} \left(L\left(m,\chi\chi_2^0\right) L\left(n,\overline{\chi}\chi_2^0\right) - \left(1+\frac{1}{2^{m+n}}\right) L(m,\chi)\, L(n,\overline{\chi})\right) \\
&= -\frac{(2\pi i)^{m+n}}{4m!n!} \sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l} q^{l-m-n+1} \left(\frac{2^{l}-2^{m+n}-2}{2^{m}+2^{n}}\right) \prod_{p|q} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l-m-n+1}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da lemmadaki ikinci eşitliği kanıtlar. □

Teorem 4.5. *q bir kare barındıran sayı, $m \equiv n \equiv 1 \pmod 2$ olsun ve $(u,q)=1$ koşulunu sağlayan u tamsayısı verilsin. Bu durumda,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q)\, \overline{S(u,b,q)} s(a\overline{b},m,n,q) \\
&= \frac{q^{3}}{\phi(q)} \sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l} \cdot q^{l-m-n+1} \prod_{p|q} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l-m-n+1}}\right)
\end{aligned}$$

dir. Burada $\sum\limits_{a=1}^{q}{}'$, tüm $(a,q)=1$ olmak üzere $1 \le a \le q$ üzerindeki toplamı gösterir, $\prod\limits_{p|q}$ çarpımı q 'nun tüm farklı asal bölenleri üzerindedir. $\phi(q)$ Euler fonksiyonu, $\overline{f(n)}$ ise $f(n)$ fonksiyonunun karmaşık eşleniğidir, B_m Bernoulli sayısı,

$$r_{m,n,l} = B_{m+n-l} \sum_{a=0}^{m} \sum_{b=0}^{n} B_{m-a} B_{n-b} \frac{\binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{a+b+1}{m+n-l}}{a+b+1}$$

dir.

İspat Daha önce elde edilen aşağıdaki özdeşlikle başlayalım,

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{q}{}' \chi(a)\, S(u,a,q) \\
&= \sum_{a=1}^{q}{}' \chi(a) \sum_{b=1}^{q}{}' e\left(\frac{ub+a\overline{b}}{q}\right) = \sum_{b=1}^{q}{}' e\left(\frac{ub}{q}\right) \sum_{a=1}^{q}{}' \chi(a)\, e\left(\frac{a\overline{b}}{q}\right) \\
&= \tau(\chi) \sum_{b=1}^{q}{}' \chi(b)\, e\left(\frac{ub}{q}\right) = \overline{\chi}(u)\, \tau^{2}(\chi). \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Burada, $\tau(\chi) = G(1,\chi)$ dir. Lemma 4.2 ve (4.5) özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q)\,\overline{S(u,b,q)}s(a\bar{b},m,n,q) \\
&= \frac{-4m!n!}{(2\pi i)^{m+n} q^{m+n-1}} \sum_{d|q} \frac{d^{m+n}}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi(-1)=-1}} \sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q)\,\overline{S(u,b,q)}\chi\left(a\bar{b}\right) L(m,\chi) L(n,\overline{\chi}) \\
&= \frac{-4m!n!}{(2\pi i)^{m+n} q^{m+n-1}} \sum_{d|q} \frac{d^{m+n}}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi(-1)=-1}} \left|\tau\left(\chi\chi_q^0\right)\right|^4 L(m,\chi) L(n,\overline{\chi})
\end{aligned}$$

yazılabilir. Tek bir kare barındıran sayı olan q ve ilkel olmayan karakter $\chi (\bmod\, q)$ için,

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{q} \chi(a)\, e\left(\frac{a}{q}\right) = 0$$

ifadesi ve Gauss toplamları özelliklerinden $d|q$ ve $d \neq q$ olursa $\tau\left(\chi\chi_q^0\right) = 0$ olur. $d = q$ ve χ bir ilkel karakter $\bmod\, q$ olursa $\left|\tau\left(\chi\chi_q^0\right)\right| = \sqrt{q}$ elde edilir. Böylece bu bilgiler ve (4.3) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q)\,\overline{S(u,b,q)}s(a\bar{b},m,n,q) \\
&= \frac{-4m!n!}{(2\pi i)^{m+n}} \frac{q^3}{\phi(q)} \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=-1}}{}^{*} L(m,\chi) L(n,\overline{\chi}) \\
&= \frac{q^3}{\phi(q)} \sum_{l=0}^{m+n} r_{m,n,l} q^{l-m-n+1} \prod_{p|q} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^l}\right)\left(1-\frac{1}{p^{l-m-n+1}}\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu da kanıtı tamamlar. □

Açıklama 4.6. *Teorem 4.5'te $m = n = 1$ alarak, Bernoulli sayılarının $B_1 = -1/2$, $B_0 = 1$ değerlerini ve $q \geq 1$ için*

$$\phi(q) = q \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

özdeşliğini kullanarak Liu ve Zhang (2011) çalışmasındaki Teorem 3.1 elde edilir.

Teorem 4.7. *q bir kare barındıran sayı olsun. O zaman $m \equiv 1 \pmod 2$ için ve herhangi bir $(u,q) = 1$ koşulunu sağlayan u tamsayısı için aşağıdaki özdeşlik sağlanır:*

$$\sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q)\,\overline{S(u,b,q)}s_5(2a\bar{b},m,q)$$

$$= \frac{q^3}{\phi(q)} \sum_{l=0}^{m+1} r_{m,1,l} q^{l-m} \left(\frac{-2^{m+2} - 6 + 2^l}{2^{m-1} + 1} \right) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^l}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{l-m}}\right).$$

Burada $\sum_{a=1}^{q}{}'$ *, tüm* $1 \leq a \leq q$ *üzerindeki toplamı gösterir öyle ki* $(a,q) = 1$*,* $\prod_{p|q}$ *çarpımı* q *'nun tüm farklı asal bölenleri üzerindendir.* ϕ *Euler fonksiyonu,* $\overline{f(n)}$ *ise* $f(n)$ *fonksiyonunun karmaşık eşleniğidir.*

İspat Lemma 4.3 'den

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q) \overline{S(u,b,q)} s_5(2a\bar{b}, m, q) \\
&= \sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q) \overline{S(u,b,q)} \left\{ 2s\left(2a\bar{b}, m, 1, q\right) - 4s\left(a\bar{b}, m, 1, q\right) \right\} \\
&= 2 \sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q) \overline{S(u,b,q)} s\left(2a\bar{b}, m, 1, q\right) \\
&- 4 \sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q) \overline{S(u,b,q)} s\left(a\bar{b}, m, 1, q\right) \\
&= 2W_1 - 4W_2 \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

olur. W_2 'nin Teorem 4.5 in $n = 1$ özel haline eşit olduğu gözlemlenebilir. O halde W_1 hesaplansın. (4.4) ve (4.5) denklemleri ve Teorem 4.5 'te verilen benzer eşitlikler yardımıyla görülür ki,

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{-4m!}{(2\pi i)^{m+1} q^m} \sum_{d|q} \frac{d^{m+1}}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi(-1)=-1}} \sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q) \overline{S(u,b,q)} \chi\left(2a\bar{b}\right) L(m,\chi) L(1,\overline{\chi}) \\
&= \frac{-4m!}{(2\pi i)^{m+1} q^m} \sum_{d|q} \frac{d^{m+1}}{\phi(d)} \sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi(-1)=-1}} \left|\tau\left(\chi\chi_q^0\right)\right|^4 \chi(2) L(m,\chi) L(1,\overline{\chi}) \\
&= \frac{q^3}{\phi(q)} \sum_{l=0}^{m+1} r_{m,1,l} \cdot q^{l-m} \left(\frac{2^l - 2^{m+1} - 2}{2^m + 2} \right) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^l}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{l-m}}\right)
\end{aligned}$$

dir. W_1 ve W_2 ifadeleri (4.6) 'da yerine konulursa kanıt tamamlanır. □

Teorem 4.8. *q bir kare barındıran sayı olsun. O halde* $n \equiv 1 \pmod 2$ *ve* $(u,q) = 1$ *koşulunu sağlayan* u *tamsayısı için,*

$$\sum_{a=1}^{q}{}' \sum_{b=1}^{q}{}' S(u,a,q) \overline{S(u,b,q)} s_3(a\bar{b}, n, q)$$

$$= \frac{q^3}{\phi(q)} \sum_{l=0}^{n+1} r_{1,n,l}.q^{l-n} \left(\frac{5.2^n + 6 - 2^{l+1}}{2^{n-1}+1} \right) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^l}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{l-n}}\right).$$

İspat Genelleştirilmiş Hardy toplam $s_3(h,n,q)$ ile genelleştirilmiş Dedekind toplamları arasındaki ilişki, Tian (2018) deki çalışmada şu şekilde verilir:

$$s_3(h,n,q) = 2s(h,1,n,q) - 4s(2h,1,n,q), \quad (q \text{ ve } n \text{ tek sayı ise}).$$

Bu ifade kullanılarak ve Teorem 4.7'nin kanıtındaki adımlar takip edilerek istenen formül elde edilir. □

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Gauss toplamının özellikleri ve Dirichlet $L-$fonksiyonunun ortalama değer formülleri kullanılarak, ilk olarak genelleştirilmiş Dedekind toplamları ve Kloosterman toplamını içeren ortalama değer formül elde edildi. Ayrıca, genelleştirilmiş Hardy toplamlarının genelleştirilmiş Dedekind toplamları cinsinden ifadeleri yardımıyla genelleştirilmiş Hardy toplamları ve Kloosterman toplamları için de benzer formüller verildi.

6. KAYNAKLAR

Apostol, T. M. 1950. Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series. *Duke Math. J.*, 17: 147-157.

Apostol, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

Berndt, B. C. 1973a. Generalized Dedekind Eta-function and generalized Dedekind sums. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 178: 495-508.

Berndt, B. C. 1975a. Character analogues of Poisson and Euler - MacLaurin summation formulas with applications, *J. Number Theory*, 7: 413-445.

Berndt, B.C. 1975d. On Eisenstein series with characters and the values of Dirichlet L-functions. *Acta Arith.*, XXVIII: 299-320.

Berndt, B.C. 1977a. Reciprocity theorems for Dedekind sums and generalizations. *Adv. Math.*, 23: 285-316.

Berndt, B. C. 1978. Analytic Eisenstein series, theta functions and series relations in the spirit of Ramanujan, *J. Reine Angew. Math.* 303/304: 332-365.

Berndt, B. C. and Goldberg, L. A. 1984. Analytic properties of arithmetic sums arising in the theory of the classical theta functions. *Siam J. Math. Anal.*, 15 (1): 143-150.

Can, M. 2000. Hardy Toplamları Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 35 ss.

Can, M. 2004. Some arithmetic on the Hardy sums $s_2(h,k)$ and $s_3(h,k)$. *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 20 (2): 193-200.

Can, M. 2006. Genelleştirilmiş Hardy Toplamları, Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 54 ss.

Can, M., Cenkci, M. and Kurt, V. 2006. Generalized Hardy - Berndt sums, *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, 9 (1): 19-38.

Carlitz, L. 1954. Dedekind sums and Lambert series. Proc. Amer. Math. Soc., 5 (4): 580-584.

Carlitz, L. 1964. Generalized Dedekind sums. *Math. Zeithschr.*, 85: 83-90.

Cenkci, M., Can, M. and Kurt, V. 2007. Degenerate and character Dedekind sums. *J. Number Theory*, 124: 346-363.

Chowla, S. 1967. On Kloosterman's sum. *Nor. Vidensk. Selsk. Fak. Frondheim*, 40: 70-72.

Conrey, J. B., Fransen, E., Klein, R, and Scott, C. 1996. Mean values of Dedekind sums, *J. Number Theory*, 56: 214-226.

Dagli, M. C. 2016. Dedekind Toplamının Benzerleri, Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 63 ss.

Dagli, M. C. 2021. On some identities involving certain Hardy sums and a Kloosterman sum. *Ukr. Math. J.*, 72 (11): 1724-1732.

Dagli, M. C. and Can, M. 2015. On reciprocity formula of character Dedekind sums and the integral of products of Bernoulli polynomials. *J. Number Theory*, 156: 105-124.

Dagli, M. C. and Can, M. 2017a. Periodic analogues of Dedekind sums and transformation formulas of Eisenstein series. *Ramanujan J.*, 44: 301-341.

Dagli, M. C. and Can, M. 2017b. On generalized Eisenstein series and Ramanujan's formula for periodic zeta-functions. *Monatsh. Math.*, 184: 77-103.

Estermann T. 1961. On Kloostermann's sum. *Mathematica*, 8: 83-86.

Goldberg, L. A. 1981. Transformations of theta-functions and analogues of Dedekind sums, Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana.

Hamahata, Y. 2014. Dedekind sums with a parameter in finite fields. *Finite Fields Appl.*, 28: 57-66.

Huan, L., Wang, J. and Wang, T. 2012. An identity involving Dedekind sums and generalized Kloosterman sums. *Czech. Math. J.*, 62 (4): 991-1001.

Kanemitsu, S. and Tsukada, H. 2007. Vistas of special functions, World Scientific, Singapore.

Kurt, V. 1990. On Dedekind sums. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 21 (10): 893-896.

Kurt, V. 1991. Remarks on Dedekind sums. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 83 (6): 581-586.

Kurt, V. 1997. Remarks on Higher Dimensional Dedekind sums. *Math. Japonica*, 45 (2): 297-301.

Lim, S. G. 2009. Generalized Eisenstein series and several modular transformation formulae. *Ramanujan J.*, 19: 121-136.

Liu, H. and Zhang, W. 2006. Generalized Dedekind sums and Generalized Hardy sums. *Acta Math Sinica, Chinese Series*, 49: 999-1008.

Liu, Y. N. and Zhang, W. 2011. A hybrid mean value related to the Dedekind sums and Kloosterman sums. *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 27 (3): 435-440.

Malyshev, A. V. 1960. A generalization of Kloosterman sums and their estimates. *Vestn. Leningr. Univ.*, 15: 59-75.

Meyer, J. L. 1997a. Properties of certain integer-valued analogues of Dedekind sums. *Acta Arith.*, LXXXII (3): 229-242.

Meyer, J. L. 1997b. Analogues of Dedekind sums. Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana, 1997.

Meyer, J.L. 2000. Character analogues of Dedekind sums and transformations of analytic Eisenstein series. *Pacific J. Math.*, 194: 137-164.

Nagasaka, Y., Ota, K. and Sekine, C. 2003. Generalizations of Dedekind sums and their reciprocity laws. *Acta Arith.*, 106 (4): 355-378.

Ota, K. 2003. Derivatives of Dedekind sums and their reciprocity laws. *J. Number Theory*, 98: 280-309.

Peng, W. and Zhang, T. 2016. Some identities involving certain Hardy sum and Kloosterman sum. *J. Number Theory*, 165: 355-362.

Pettet, M. R. and Sitaramachandrarao, R. 1987. Three-term relations for Hardy sums. *J. Number Theory*, 25 (3): 328-339.

Rademacher, H. 1964. Some remarks on certain generalized Dedekind sums. *Acta Arith.*, IX: 97-105.

Rademacher, H. and Grosswald, E. 1972. Dedekind Sums, Math. Assoc. of America (USA: Washington, D.C.).

Rademacher, H. and Whitheman, A. 1941. Theorems on Dedekind sums. *Amer.J. Math.*, 63: 377-407.

Sekine, C. 2003. Dedekind Sums with roots of unity and their reciprocity laws. *Tokyo J. Math.*, 26: 485-494.

Sekine, C. 2005. On Eisenstein series with characters and Dedekind sums. *Acta Arith.*, 116 (1): 1-11.

Sitaramachandrarao, R. 1987. Dedekind and Hardy sums. *Acta Arith.*, XLIII: 325-340.

Şimşek, Y. 2006. Remarks on reciprocity laws of the Dedekind and Hardy sums. *Advan. Stud. Contemp. Math.*, 12 (2): 237-246.

Şimşek, Y. 1998. Theorems on three-term relations for Hardy sums. *Turkish J. Math.*, 22: 153-162.

Takacs, L. 1979. On generalized Dedekind sums. *J. Number Theory*, 11: 264-272.

Tian, Q. On the hybrid mean value of generalized Dedekind sums, generalized Hardy sums and Kloosterman sums, http://arxiv.org/abs/1809.07538.

Walum, H. 1982. An exact formula for an average of L-series. *Ill. J. Math.*, 26: 1-3.

Wang, W. and Han, D. 2013. An identity involving certain Hardy sums and Ramanujan's sum. *Adv. Difference Equ.*, 261: 8 pp.

Wenpeng, Z. and Yanni, L. 2010. A hybrid mean value related to the Dedekind sums and Kloosterman sums. *Sci. China, Math.*, 53: 2543-2550.

Zhang, W. 1996. On the mean values of Dedekind sums. *J. Theor. Nombres Bordeaux*, 8: 429-442.

Zhang, H. and Zhang, W. 2014. On the identity involving certain Hardy sums and Kloosterman sums. *J. Inequal. Appl.*, 52: 9 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Hamit SEVER

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans: 2018-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans: 2014-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara