

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ CESARO FARK DİZİLERİNİN BANACH UZAYININ
KÖTHER-TOEPLITZ DUALERİNDE ASİMTOTİK GENİŞLEMİYEN
FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA ÖZELLİĞİ

Muhammed OYMAK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Veysel NEZİR

Şubat-2022
KARS



T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**GENELLEŞTİRİLMİŞ CESARO FARK DİZİLERİNİN BANACH UZAYININ
KÖTHE-TOEPLITZ DUALLERİNDE ASİMTOTİK GENİŞLEMİYEN
FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA ÖZELLİĞİ**

Muhammed OYMAK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Veysel NEZİR

Şubat-2022
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Muhammed OYMAK'ın Doç. Dr. Veysel NEZİR danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı “Genelleştirilmiş Cesaro fark dizilerinin Banach uzayının Köthe-Toeplitz dualerinde asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ile kabul edilmiştir.

04 / 02 / 2022

Adı ve Soyadı

İmza

Başkan : Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

Üye : Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR

Üye : Doç. Dr. Veysel NEZİR

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . / . . / 20. . gün ve . . .
. . . / sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Muhammed OYMAK

04.02.2022

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

GENELLEŞTİRİLMİŞ CESARO FARK DİZİLERİNİN BANACH UZAYININ KÖTHE-TOEPLITZ DUALLERİNDE ASİMTOTİK GENİŞLEMİYEN FONKSİYONLAR İÇİN SABİT NOKTA ÖZELLİĞİ

Muhammed OYMAK

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Veysel NEZİR

1970 yılında Cesàro Dizi Uzayları, Shue tarafından tanıtıldı. 1981'de Kızmaz ℓ^∞ , c_0 ve c için fark dizi uzaylarını tanımladı ve ardından, 1983'te Orhan, Cesàro Fark Dizi Uzaylarını tanıttı. Sonrasında Orhan tarafından tanıtılan bu uzay Et tarafından 1996'da ve Tripathy ile arkadaşları tarafından 2005'de her $m \in \mathbb{N}$ için genelleştirilip duali ve geometrik özellikleri incelenmiştir. Bu tez çalışmasında öncelikle bu uzaylar için sabit nokta özelliği ele alınıyor. Daha sonra, Goebel ve Kuczumow'un, genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip, mutlak olarak toplanabilir skaler dizilerin Banach uzayında çok geniş bir kapalı, sınırlı, konveks altkümeler sınıfının var olduğunu gösterdiklerini hatırlatıyoruz. 2004'te ise Kaczor ve Prus'ın, asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip, mutlak olarak toplanabilir skaler dizilerin Banach uzayında çok geniş bir kapalı, sınırlı, konveks altkümeler sınıfının var olduğunu gösterdiklerini hatırlatıyoruz. Bu çalışmada ise benzer şekilde bir Cesàro fark dizi uzayının bir Köthe-Toeplitz duali için analog bir sonuç üzerine çalışıyoruz. Bu uzaylarda afin asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan sınıfın var olduğunu gösteriyoruz. Bu tez

çalışmasında ise Kaczor ve Prus'ın ℓ^1 'de yaptığına benzer şekilde Et ve Tripathy ile arkadaşları tarafından çalışılmış genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzayının bir Köthe-Toeplitz duali için analog bir sonuç üzerine çalışılıyor. Yani, bu uzaylarda afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan sınıfın var olduğunu gösteriliyor. Bununla beraber ikinci çalışma olarak ise yayınlanmış çalışmamız ile bu genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerine karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzaylarında Kaczor ve Prus çalışmasının ilham aldığı Goebel ve Kuczumow analoğu bir sonuç üzerine çalışıyoruz. Not ediyoruz ki bu uzay öncelikle $L_1[0,1]$ Lebesgue uzayını içerir ve tezimizde bu uzaylarda genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan sınıfın var olduğunu gösteriyoruz. Son olarak ise yani üçüncü çalışma olarak yine aynı uzayda; yani genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerine karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzaylarında Kaczor ve Prus analoğu çalışılarak afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan sınıfın var olduğu gösteriliyor.

Anahtar Kelimeler: genişlemeyen fonksiyon, asimtotik genişlemeyen fonksiyon, sabit nokta özelliği, kapalı sınırlı konveks küme, Cesàro Dizi Uzayları, Köthe-Toeplitz dual

2022, 41 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

FIXED-POINT PROPERTY FOR ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS IN KÖTHE-TOEPLITZ DUALS OF BANACH SPACE OF GENERALIZED CESARO DIFFERENCE SEQUENCES

Muhammed OYMAK

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Veysel NEZİR

In 1970, Cesàro Sequence Spaces was introduced by Shiue. In 1981, Kızmaz defined difference sequence spaces for ℓ^∞ , c_0 and c . Then, in 1983, Orhan introduced Cesàro Difference Sequence Spaces. Later, this space was generalized by Mikail Et in 1996 and by Tripathy et al in 2005 for each $m \in \mathbb{N}$ and its dual and geometric properties were examined. In this thesis study, first we discuss the fixed point property for these spaces. Then, we recall that Goebel and Kuczumow showed that there exists a very large class of closed, bounded, convex subsets in Banach space of absolutely summable scalar sequences, ℓ^1 with fixed point property for nonexpansive mappings. In 2004, Kaczor and Prus investigated if similar result could be done for asymptotically nonexpansive mappings and they saw that there exists a large class of closed, bounded, convex subsets in ℓ^1 with fixed point property for affine asymptotically nonexpansive mappings. So we consider an analogue result for a Köthe-Toeplitz dual of this generalized Cesàro difference sequence space which has been studied by Et and Tripathy et al. We show that there exists a large class of closed, bounded and convex subsets of these spaces with fixed point property for affine asymptotically nonexpansive mappings. Next, as our second result which was published, we consider a Goebel and Kuczumow study, the

inspiration of Kaczor and Prus study, analogue result for the corresponding function space of a Köthe-Toeplitz dual of a generalized Cesàro difference sequence space which contains Lebesgue space $L_1[0,1]$. We show that there exists a large class of closed, bounded and convex subsets of these spaces with fixed point property for nonexpansive mappings. Then as our the third and the last result, we study Kaczor and Prus analogy for the same Lebesgue like space; that is, we study in the corresponding function space of a Köthe-Toeplitz dual of a generalized Cesàro difference sequence space which contains Lebesgue space $L_1[0,1]$ and show that there exists a large class of closed, bounded and convex subsets of these spaces with fixed point property for affine asymptotically nonexpansive mappings.

Key Words: nonexpansive mapping, asymptotically nonexpansive mapping, fixed point property, closed bounded convex subset, Cesàro Sequence Spaces, Köthe-Toeplitz dual

2022, 41 pages

ÖNSÖZ

Öncelikle danışmanım Doç. Dr. Veysel NEZİR'e yüksek lisans tez çalışmamda değerli destekleri için teşekkür ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tez sürecinde benden desteğini esirgemeyen sevgili eşim Eda Pelin OYMAK'a ve bu süreçte beni mutlu eden sevgili babam Faruk OYMAK ve annem Ağca OYMAK ile maddi manevi emeği geçen herkese teşekkür ederim.



Muhammed OYMAK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	IV
ABSTRACT	VI
ÖNSÖZ.....	VIII
İÇİNDEKİLER	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1 Giriş	1
1.2 Kuramsal temeller	6
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	10
2.1 Kaczor ve Prus çalışması ve ℓ^1 'de afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğini sağlayan bazı geniş sınıflar	10
2.2 Cesàro Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualinde Bazı Geniş Sınıfların Afin Asimtotik Fonksiyonlar için Sabit Nokta Özelliği	15
3. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	21
3.1 Cesàro Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualinde Bazı Geniş Sınıfların Afin Asimtotik Fonksiyonlar için Sabit Nokta Özelliği	21
3.2 Cesàro Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualine Karşılık Gelen Lebesgue-benzeri Fonksiyon Uzaylarında Genişlemeyen Fonksiyonlar için Sabit Nokta Özelliğine Sahip Geniş Sınıflar	27
3.3 Cesàro Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualine Karşılık Gelen Lebesgue-benzeri Fonksiyon Uzaylarında Afin Asimtotik Genişlemeyen Fonksiyonlar için Sabit Nokta Özelliğine Sahip Geniş Sınıflar	31
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ.....	42

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ℓ^1	: Mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayı
SNÖ-GF	: Genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği
SNÖ-AGF	: Asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği
$S(C_p)^\beta$	: X uzayının Köthe-Toeplitz β –duali
$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$	: n. terimi 1, diğerleri 0 olan l^1 ve c_0 ’ın kanonik bazı



1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Bir $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının herhangi boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinde tanımlanan herhangi bir genişlemeyen fonksiyonunun sabit bir noktası olduğunda, bu uzaya genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir (SNÖ-GF) denilir. Yukarıdaki ifade her asimtotik genişlemeyen fonksiyonu için geçerliyse, Banach uzayına asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir (SNÖ-AGF) denilir. Dolayısıyla, ele alınan Banach uzayında en az bir kapalı, sınırlı ve konveks bir altküme ve bu küme üzerinde tanımlanan en az bir sabit noktasız asimtotik genişlemeyen fonksiyon bulunabiliyorsa, uzayımıza snö-agf'yi sağlamaz deriz.

Banach uzayın snö-gf'ye sahip olması ile yansılmalı olabilmesi arasında kuvvetli bir bağ bulunur. Mesela yansılmalı her Banach uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip olabilecek şekilde yeniden normlanabildiği ilk olarak Day ve arkadaşları tarafından [5] çalışmasında gösterilmiştir. Ayrıca yansılmalı olmanın genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip olmaya denk olup olmadığı araştırmacılar tarafından yıllarca sorgulanmış ve bunun doğruluğu sadece Lebesgue integrallenebilir Banach uzaylarının alt uzayları için geçerli olduğu Dowling ve Lennard [6] gösterilmiştir. Bu konu ile bağlantılı olarak ise en azından yansılmalı olmayan ve sabit nokta özelliğine sahip olmayan bir Banach uzayı sabit nokta özelliğine sahip olacak şekilde yeniden normlanabilir mi sorusu yıllarca çözülmeye çalışılmış ve bunun için Banach uzaylarda araştırmaların yapıldığı klasik uzaylardan yansılmalı olmayan mutlak toplanabilen dizilerin Banach uzayının sabit nokta özelliğine sahip olabilecek şekilde yeniden normlanabileceği Lin [16] çalışması ile gösterilmiştir. Diğer önemli klasik uzayımız olan sıfıra yakınsak skaler dizilerin Banach uzayının genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip olacak şekilde yeniden normlanabilip normlanamayacağı çözülememiş bir başka açık sorudur fakat ek bir hipotez ile bir başka klasik Banach uzayı için Maria ile Hernandes Lineares [18] çalışması ile $[0,1]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların Banach uzayı $L_1[0,1]$ 'in afin genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip olacak şekilde yeniden normlanabileceği gösterilmiştir.

Tüm bu çalışmaların başlangıç noktasının ise çözümlemesi daha kolay denilebilecek bir soruya cevap vermeleri ile Goebel ve Kuczumow'un [12] çalışmasından doğduğu söylenebilir. Goebel ve Kuczumow, genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip ℓ^1 'in zayıf* topolojisine göre zayıf kompakt olmayan kompakt, kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerin çok geniş bir sınıfının var olduğunu gösterdi. Daha sonra, Kaczor ve Prus [13] benzer sonucun asimptotik olarak genişlemeyen fonksiyonlar için yapılabileceğini araştırdı ve afin asimptotik olarak genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı, konveks altkümeler sınıfının olduğunu gördüler. Yakın zamanda, Chris Lennard'ın danışmanlığında yazılmış olan Everest'in, doktora tez [9] çalışmasında, Kaczor ve Prus'un çalışmaları genelleştirilerek afin asimptotik olarak genişlemeyen fonksiyonlar için ℓ^1 'de sabit nokta özelliğine sahip geniş sınıflar olduğu gösterildi.

Bu tez çalışmasında öncelikle, ℓ^1 'in kapsadığı bir uzay olan ve genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzayının bir Köthe-Toeplitz duali olan bir Banach uzayı için Kaczor ve Prus analojisi üzerinde çalışılmaktadır. Yani, bu uzaylarda afinlik koşulu altında asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği ile uzayın çok geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin var olduğu gösterilmektedir. Sonrasında ise yayınlanmış çalışmamız ile bu uzaylara karşılık gelen Lebesgue uzayı benzeri fonksiyon uzayları için Kaczor ve Prus çalışmasının ilham aldığı Goebel ve Kuczumow çalışmasının analoğu olarak genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği ile uzayın çok geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin var olduğu gösterilmektedir. En son olarak ise yine aynı Lebesgue benzeri uzaylarda; yani genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzayının bir Köthe-Toeplitz dualine karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzaylarında afinlik koşulu altında asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği ile uzayın çok geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin var olduğu gösterilmektedir.

Şimdi Cesàro dizi uzayı tanımını aşağıdaki haliyle hatırlayalım: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$ces_p = \left\{ y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k| \right)^p \right)^{1/p} < \infty \right. \right\}$$

ve

$$ces_{\infty} = \left\{ y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k| < \infty \right\}$$

olup 1970’de, Shiue [25] tarafından tanımlanmıştır. $1 < p \leq \infty$ için $\ell^p \subset ces_p$ olduğu ve $1 < p < \infty$ için Cesàro dizi uzayları ces_p nin ayrılabilir yansılmalı Banach uzayları olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Cui ile Hudzik [2], Cui, Hudzik ve Li [3] ile Cui, Meng ve Pluciennik [4] çalışmaları tarafından $1 < p < \infty$ için Cesàro dizi uzayları ces_p nin sabit nokta özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Bu sonucu farklı yöntemlerle ispatlarlar. Bir yöntem Garcia-Falset katsayısını hesaplamaktır. Bir Banach uzayı için Garcia-Falset katsayısı 2’den küçükse, genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip olduğu bilinmektedir [10]. Bu gerçeği kullanarak, bu katsayıyı ces_p için ℓ^p için $2^{1/p}$ olduğuna benzer şekilde hesapladıklarından, $2^{1/p}$ için geçerli sonucu Cesàro dizi uzayları için gösterirler. Diğer bir gerçek ise, uzayın normal yapıya sahip olduğunu görmeleridir. Daha sonra, normal yapıya sahip yansılmalı Banach uzaylarının sabit nokta özelliğine sahip olduğunu gösteren Kirk [15] çalışmasını kullanarak, uzayın sabit nokta özelliğine sahip olduğunu kolaylıkla söylerler. Cesàro dizi uzayları bir derleme çalışması olarak tüm ayrıntıları ile [1]’de görülebilir.

Daha sonra 1981 yılında Kızmaz [14] ℓ^{∞} , c ve c_0 için fark dizi uzaylarını tanıtmıştır ve bunlar sırasıyla sınırlı, yakınsak ve 0’yakınsak $y = (y_n)_n$ dizilerin Banach uzaylarıdır. Aşağıda görüldüğü gibi, bu uzaylar için tanımları x dizisine uygulanan fark operatörü $\Delta y = (y_k - y_{k+1})_k$ tanımı kullanılarak verilmiştir.

$$\ell^{\infty}(\Delta) = \{y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \Delta y \in \ell^{\infty}\},$$

$$c(\Delta) = \{y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \Delta y \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \Delta y \in c_0\}.$$

Kızmaz, Köthe-Toeplitz duallerini ve bu uzayların bazı özelliklerini araştırmıştır.

Ayrıca, mutlak olmayan tipteki Cesàro dizi uzayları, 1977’de Ng ve Lee [16] tarafından şu şekilde tanımlanmıştır: $1 \leq p < \infty$ için

$$X^p = \left\{ y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

ve

$$X^\infty = \left\{ y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right| < \infty \right\},$$

Ayrıca bu uzayların $1 \leq p \leq \infty$ için ℓ^p 'ye lineer olarak izomorfik ve izometrik olduğunu ispatlarlar. Böylece, sabit nokta teorisi açısından benzer özelliklere sahip oldukları kolayca çıkarılabilir. Yani, genişlemeyen fonksiyonlar için $1 < p < \infty$ koşulunda sabit nokta özelliğine sahiptirler, ancak diğer iki durumda başarısız olurlar.

Daha sonra, 1983'te Orhan [23] Cesàro Fark Dizisi Uzaylarını aşağıdaki tanımlarla vermiştir: $1 \leq p < \infty$ için

$$C_p = \left\{ y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta y_k \right|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

ve

$$C_\infty = \left\{ y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta y_k \right| < \infty \right\},$$

Normlarının ise herhangi bir $y = (y_n)_n$ noktasında sırasıyla aşağıdaki gibi verildiğini ifade etmiştir:

$$\|y\|_p^* = |y_1| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta y_k \right|^p \right)^{1/p} \quad \text{ve} \quad \|y\|_\infty^* = |y_1| + \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta y_k \right|$$

Orhan, [23] çalışmasında $1 \leq p \leq \infty$ için lineer sınırlı bir operatör $S: C_p \rightarrow C_p$ nin var olduğunu göstermiş ve bu operatör vasıtasıyla bu uzayların Köthe-Toeplitz β –duallerinin sırasıyla aşağıdaki gibi verileceğini söylemiştir:

$$S(C_p)^\beta = \{t = (t_n)_n \subset \mathbb{R} \mid (nt_n)_n \in \ell^q\} \text{ ki burada } 1 < p < \infty \text{ ve } q = \frac{p}{p-1},$$

$$S(C_1)^\beta = \{t = (t_n)_n \subset \mathbb{R} \mid (nt_n)_n \in \ell^\infty\} \text{ ve}$$

$$S(C_\infty)^\beta = \{t = (t_n)_n \subset \mathbb{R} \mid (nt_n)_n \in \ell^1\} \text{ dir.}$$

Fark dizi uzaylarını da ele aldığımız ve çalışmalarda genel olarak benzer tip notasyon kullanıldığı için $1 \leq p \leq \infty$ iken C_p yerine $X^p(\Delta)$ notasyonu kullanmak daha iyi olabilir.

Not edilmelidir ki Orhan $1 \leq p \leq \infty$ için $X^p \subset X^p(\Delta)$ olduğunu göstermiştir. Kolayca görülebilir ki $1 \leq p \leq \infty$ için $X^p(\Delta)$ lineer olarak ℓ^p 'ye izomorfik ve izometriktir. Böylece, sabit nokta teorisi açısından benzer özelliklere sahip oldukları kolayca çıkarılabilir. Yani, genişlemeyen fonksiyonlar için $1 < p < \infty$ koşulunda sabit nokta özelliğine sahiptirler, ancak diğer iki durumda başarısız olurlar.

Ayrıca $p = \infty$ için Köthe-Toeplitz duallerin Orhan'ın çalışmasında ve Kızmaz'ın çalışmasındaki ℓ^∞ durumu için çakıştıkları gözlemlenmektedir.

Ayrıca Et ve Çolak [7] Kızmaz'ın çalışmasında [14] tanıtılan uzayları her $m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir:

$$\begin{aligned}\ell^\infty(\Delta^m) &= \{y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \Delta^m y \in \ell^\infty\}, \\ c(\Delta^m) &= \{y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \Delta^m y \in c\}, \\ c_0(\Delta^m) &= \{y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \Delta^m y \in c_0\}\end{aligned}$$

ki burada $\Delta y = (\Delta y_k) = (y_k - y_{k+1})_k$, $\Delta^0 y = (y_k)_k$, $\Delta^m y = (\Delta^m y_k) = (\Delta^{m-1} y_k - \Delta^{m-1} y_{k+1})_k$ and $\Delta^m y_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} y_{k+i}$.

Ayrıca Et [8] ve Tripathy et. al. [26] çalışmaları birbirlerinden bağımsız olarak Orhan [23] çalışmasında tanıtılan uzayı her $m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir: $1 \leq p < \infty$ için

$$X^p(\Delta^m) = \left\{ y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m y_k \right|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

ve

$$X^\infty(\Delta^m) = \left\{ y = (y_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta^m y_k \right| < \infty \right\}$$

dir. Görüldüğü üzere Et'in [8] çalışmasında $p = \infty$ durumu ve Et ve Çolak'ın [7] çalışmasında ℓ^∞ durumu için Köthe-Toeplitz dualleri çakışmaktadır ve aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned}D_m &:= \{t = (t_n)_n \subset \mathbb{R} \mid (n^m t_n)_n \in \ell^1\} \\ &= \left\{ t = (t_k)_k \subset \mathbb{R} : \|t\| = \sum_{k=1}^{\infty} k^m |t_k| < \infty \right\}.\end{aligned}$$

Not edilebilir ki her $m \in \mathbb{N}$ için $D_m \subset \ell^1$.

Bu dualler için karşılık gelen fonksiyon uzayının her $m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki gibi verilebileceğini görebiliriz:

$$U_m := \left\{ f \text{ fonksiyonu } I = [0,1] \text{ üzerinde ölçülebilir: } \|f\| = \int_0^1 t^m |f(t)| dt < \infty \right\}.$$

Burada her $m \in \mathbb{N}$ için $L_1[0,1] \subset U_m$, $U_1 \subset U_m$ olduğu ve sayma ölçüsü kullanıldığında U_m 'in D_m uzayına karşılık geldiği görülecektir.

Daha önce de belirttiğimiz gibi, bu çalışmada, bir Cesàro fark dizisi uzayının bir Köthe-Toeplitz duali için Kaczor ve Prus [13] analojisini ele alıyoruz. Yani, bu uzaylarda afinlik koşulu altında asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği ile uzayın çok geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin var olduğu gösterilmektedir. Sonrasında ise yayınlanmış çalışmamız ile bu uzaylara karşılık gelen Lebesgue uzayı benzeri fonksiyon uzayları için genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği ile uzayın çok geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin var olduğu gösterilmektedir. En son olarak ise yine aynı Lebesgue benzeri uzaylarda; yani genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzayının bir Köthe-Toeplitz dualine karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzaylarında afinlik koşulu altında asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği ile uzayın çok geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin var olduğu gösterilmektedir.

Şimdi ana sonuçlarımızı vermeden önce bazı ön bilgiler veriyoruz.

1.2 Kuramsal temeller

Bu bölümde ön bilgiler olarak tez çalışması için ihtiyaç duyulan temel tanım, lemma ve teoremler sunulmaktadır. Bu temel kavramlar için Goebel ve Kirk'ün [11] çalışmasından yararlanılmıştır.

Tez süresince skaler cismimiz Reel sayılar $\mathbb{R}$ kullanılırken c_0 sıfıra yakınsak reel dizilerin Banach uzayını ve ℓ^1 ise mutlak toplanabilen reel dizilerin Banach uzayını ifade etmektedir.

Yani,

$$c_0 := \left\{ y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \text{her } y_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \right\}$$

öyle ki standard norm her $x = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ için $\|y\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n|$ ile tanımlıdır ve

$$\ell^1 := \left\{ y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \text{her } y_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \|y\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\}.$$

Tanım 1.1 [11] $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun ve C boş olmayan kapalı, sınırlı, konveks bir altküme olsun. Eğer bir $T: C \rightarrow C$ fonksiyonu öyle bir fonksiyon ki her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x, y \in C$ için $T((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)T(x) + \lambda T(y)$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon ise o zaman T 'ye bir afin fonksiyondur denir.

Tanım 1.2 [11] $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun ve C boş olmayan kapalı, sınırlı, konveks bir altküme olsun. Eğer bir $T: C \rightarrow C$ fonksiyonu öyle bir fonksiyon ki her $x, y \in C$ için $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ise o zaman T 'ye bir genişlemeyen fonksiyondur denir.

Tanım 1.3 [11] $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun ve C boş olmayan kapalı, sınırlı, konveks bir altküme olsun. Eğer her genişlemeyen $T: C \rightarrow C$ fonksiyonu için, $T(z) = z$ olacak şekilde en az bir $z \in C$ bulunabiliyorsa, C' 'ye genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir denir [SNÖ-GF].

Tanım 1.4 [11] $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun ve C boş olmayan kapalı, sınırlı, konveks bir altküme olsun. Eğer bir $T: C \rightarrow C$ fonksiyonu öyle bir fonksiyon ki birer azalarak yakınsayan en az bir skaler $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bulunabiliyor ve bu durumda $\|T^n(x) - T^n(y)\| \leq k_n \|x - y\|$ koşulu her $x, y \in C$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için sağlanıyorsa T fonksiyonuna asimtotik genişlemeyen fonksiyon denir.

Tanım 1.5 [11] $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun ve C boş olmayan kapalı, sınırlı, konveks bir altküme olsun. Eğer her asimtotik genişlemeyen $T: C \rightarrow C$ fonksiyonu için, $T(z) = z$ olacak şekilde en az bir $z \in C$ bulunabiliyorsa, C' 'ye asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir denir [SNÖ- AGF].

1979'da Goebel ve Kuczumow [12], elde ettikleri bir anahtar lemmayı kullanarak ℓ^1 'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın olduğunu gösterdiler. Bu anahtar lemmaya göre, eğer $\{x_n\}$ dizisi ℓ^1 'de zayıf yıldız topolojisinde bir x noktasına yakınsayan bir dizi ise, o zaman $r(y) = \limsup_n \|x_n - y\|_1$ olmak üzere herhangi bir $y \in \ell^1$ için

$$r(y) = r(x) + \|y - x\|_1$$

dir. Bu gerçek Goebel ve Kuczumow [12] çalışmasında Lemma 1'de ispatı ile yer almaktadır. $X^\infty(\Delta)$ 'nin Köthe-Toeplitz duali ℓ^1 'in içinde bulunduğundan ve hatta izometrik olarak ℓ^1 'e izomorfik olduğundan, Goebel ve Kuczumow'un yukarıdaki önermesi ([12]'daki Lemma 1) $X^\infty(\Delta)$ 'nin Köthe-Toeplitz duali için de geçerlidir. Bu gerçeği aşağıdaki lemma ile isimlendireceğiz.

Lemma 1.6 [20] $m \in \mathbb{N}$ keyfi bir doğal sayı olmak üzere $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi D_m 'de bir x noktasına zayıf* yakınsak bir dizisi olsun. Sonra her $y \in D_m$ için $S(y) = \limsup_n \|x_n - y\|$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $y \in D_m$ için

$$S(y) = S(x) + \|x - y\|$$

dir.

Bu lemmanın $L_1[0,1]$ Lebesgue uzayındaki analogu, Brezis ve Lieb [1]'deki sonuç aracılığıyla gözlemlenir. Maria Japon Pineda'nın danışmanlığında yazılan Hernández-Linares'in doktora tezi [17]'de bu gerçeğe işaret ettiğini aşağıdaki lemma ile gözlemleriz. Şimdi, Hernández-Linares'in doktora tezi [17]'sonuçlarından çıkarılan ve bu bölümdeki sonuçlarımız için anahtar olacak olan lemmayı (Lemma 1.8'i) sunuyoruz.

Lemma 1.7 [17] $m \in \mathbb{N}$ keyfi bir doğal sayı olsun. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $L_1[0,1]$ 'de düzgün sınırlı, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. f_n dizisinin hemen hemen her yerde bir $f \in L_1[0,1]$ noktasına yakınsadığını varsayalım (hh). Sonra her

$g \in L_1[0,1]$ için $S(g) = \limsup_n \|f_n - g\|_1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $g \in L_1[0,1]$ için

$$S(g) = S(f) + \|f - g\|_1$$

dir.

Ele aldığımız fonksiyon uzayı bir Cesàro fark dizisi uzayının bir Köthe-Toeplitz dualine karşılık gelen fonksiyon uzayı olup $L_1[0,1]$ Lebesgue uzayını içerdiğinden ve aslında $L_1[0,1]$ 'e izometrik olarak izomorfik olduğundan aşağıdaki lemma doğrudan çabuk bir sonuç olarak verilebilir.

Lemma 1.8 [21] $m \in \mathbb{N}$ keyfi bir doğal sayı olmak üzere $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ U_m 'de düzgün sınırlı, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. f_n dizisinin hemen hemen her yerde bir $f \in U_1$ noktasına yakınsadığını varsayalım (hh). Sonra her $g \in U_m$ için $S(g) = \limsup_n \|f_n - g\|$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $g \in U_m$ için

$$S(g) = S(f) + \|f - g\|$$

dir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde iki alt başlık sunulmaktadır. İlk başlıkta Kaczor ve Prus [13] çalışmasının genel bir halini [9] doktora tezinde mutlak toplanabilir dizilerin Banach uzayı için sunmuş olan Everest'in teoremi anlatılmaktadır. İkinci başlıkta ise Nezir ve İlgar [20] çalışması anlatılmaktadır ki bahsi geçen çalışmada genelleştirilmiş Cesàro fark dizisi uzayının Köthe-Toeplitz dualinin en basit hali olan $n = 1$ durumu için; yani genel hali ile araştırma bulgularında çalışılmış, genelleştirmesi yapılmış Cesàro fark dizisi uzayının bir Köthe-Toeplitz dualinde Kaczor ve Prus analojisi afin asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için çalışılmaktadır. Şimdi öncelikle araştırma bulgularına ilham kaynağı olan Kaczor ve Prus [13] çalışmasının bir genel hali olan [9] doktora tezinde elde edilmiş sonuçlar alınacaktır.

2.1 Kaczor ve Prus çalışması ve ℓ^1 'de afin asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğini sağlayan bazı geniş sınıflar

Daha önce de bahsedildiği gibi Goebel ve Kuczumow [12] çalışması ile ℓ^1 'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğini sağlayan zayıf* kopmak olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks kümelerden oluşan çok geniş bir sınıfın varlığı gösterilmiştir. Tez danışmanı Nezir'in doktora tez danışmanı Chris Lennard'ın yine danışmanlığı altında tamamlanmış olan Everest [9] doktora tez çalışmasında ise Goebel ve Kuczumow'un çalışması genelleştirilerek daha geniş sınıfların snö-gf'yi sağladığı gösterilmiştir. Goebel ve Kuczumow'un çalışması sonrasında, Kaczor ve Prus [13] benzer sonucun asimptotik olarak genişlemeyen fonksiyonlar için yapılp yapılmayacağını araştırdı ve afin asimptotik olarak genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı, konveks altkümeler sınıfının olduğunu gördüler. Yakın zamanda, Chris Lennard'ın danışmanlığında yazılmış olan Everest'in, doktora tez [9] çalışmasında, Kaczor ve Prus'un çalışmaları genelleştirilerek afin asimptotik olarak genişlemeyen fonksiyonlar için ℓ^1 'de sabit nokta özelliğine sahip geniş sınıflar olduğu gösterildi. Aşağıdaki teorem ile bu sonuç verilmiştir.

Teorem 2.1 [9] $b \in (0,1)$ olsun. $f_1 := be_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} := e_{n+1}$ ile tanımlı $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Daha sonra ise ℓ^1 'de aşağıdaki şekilde tanımlanan kapalı, sınırlı ve konveks E alt kümesi ele alınsın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{her } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin asimtotik $\|\cdot\|_1$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğini sağlar.

İspat. $T: E \rightarrow E$ bir afin asimtotik genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda, T afin olduğundan Everest [9] doktora tezinde yer alan Lemma 1.1.2 gereğince en az bir $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ dizisi vardır öyle ki $\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\|_1 \xrightarrow{n} 0$ dir. Genelliği bozmadan gerekirse bir alt diziye geçilerek bir $x \in \ell^1$ bulunabilir öyle ki $x^{(n)}$ dizisi zayıf* toplolojide x noktasına yakınsar. Bu durumda, Goebel ve Kuczumow [12] çalışmasının Lemma 1'i gereğince, $\forall y \in \ell^1$ için $s(y) = \limsup_n \|x^{(n)} - y\|_1$ şeklinde tanımlı bir $s: \ell^1 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\forall y \in \ell^1$ için $s(y) = s(x) + \|y - x\|_1$ dir. T asimtotik genişlemeyen olduğundan 1 e azalarak yakınsayan $[1, \infty)$ aralığında en az bir $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\forall x, y \in E$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^n x - T^n y\|_1 \leq k_n \|x - y\|_1$$

dir. Buradan ele alınan kümenin zayıf* kapanışını

$$W := \overline{E}^{w*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{her } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanır ve iki ayrı durum ele alınır.

Durum 1: $x \in E$ olsun.

$m \in \mathbb{N}$ sabit tutulsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s(T^m x) = s(x) + \|T^m x - x\|_1$ ve

$$\begin{aligned} s(T^m x) &= \limsup_n \|T^m x - x^{(n)}\|_1 \\ &\leq \limsup_n \|T^m x - T^m(x^{(n)})\|_1 + \limsup_n \|x^{(n)} - T^m(x^{(n)})\|_1 \\ &\leq k_m \limsup_n \|x - x^{(n)}\|_1 + \limsup_n \|x^{(n)} - T^m(x^{(n)})\|_1 \\ &\leq k_m \limsup_n \|x - x^{(n)}\|_1 + \limsup_n \sum_{j=1}^m \|T^{j-1}(x^{(n)}) - T^j(x^{(n)})\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k_m \limsup_n \|x - x^{(n)}\|_1 + \limsup_n \sum_{j=1}^m k_{j-1} \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\|_1 \\
&= k_m s(x) \text{ dir.}
\end{aligned} \tag{1}$$

Bu sebeple, $\|T^m x - x\|_1 \leq (k_m - 1)s(x)$ olup $m \rightarrow \infty$ yaklaşımında limit alınırsa $\lim_m \|T^m x - x\|_1 = 0$ elde edilecektir fakat $\lim_m \|TT^m x - Tx\|_1 \leq \lim_m k_1 \|T^m x - x\|_1 = 0$ ve $\lim_m \|T^{m+1} x - Tx\|_1 = 0$ olduğundan $T^m x$ dizisi x ve Tx 'e yakınsayacaktır. Dolayısıyla, limitlerin tekliği gereğince $Tx = x$ dir.

Durum 2: $x \in W \setminus E$ olsun.

Bu durumda W 'nın tanımından x noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \geq 0$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$h := (\gamma_1 + \delta)f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\|h - x\|_1 = \|b\delta e_1\|_1 = b\delta \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$\begin{aligned}
\|y - x\|_1 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_1 = b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= b|t_1 - \gamma_1| + b \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&\geq b \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k - \gamma_k \right| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= b \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= b|1 - (1 - \delta)| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k|
\end{aligned}$$

Öyleyse,

$$\|y - x\|_1 \geq b\delta + (1 - b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \|h - x\|_1$$

elde edilir.

O halde, her $y \in E$ ve her $x \in W \setminus E$ için $\|y - x\|_1 \geq \|h - x\|_1$ (2)

dir.

Daha sonra ise aşağıdaki eşitsizlikler gözönüne alınır.

$$\begin{aligned} s(h) &= s(x) + \|h - x\|_1 \leq s(x) + \|T^m h - x\|_1 = s(T^m h) \\ &= \limsup_n \|T^m h - x^{(n)}\|_1 \text{ bu durumda (1) eşitsizliğinde olduğu gibi} \\ &\leq \limsup_n \|T^m h - T^m(x^{(n)})\|_1 + \limsup_n \|x^{(n)} - T^m(x^{(n)})\|_1 \\ &\leq k_m \limsup_n \|h - x^{(n)}\|_1 + \limsup_n \|x^{(n)} - T^m(x^{(n)})\|_1 \\ &\leq k_m \limsup_n \|h - x^{(n)}\|_1 + \limsup_n \sum_{j=1}^m \|T^{j-1}(x^{(n)}) - T^j(x^{(n)})\|_1 \\ &\leq k_m \limsup_n \|h - x^{(n)}\|_1 + \limsup_n \sum_{j=1}^m k_{j-1} \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\|_1 \\ &= k_m s(h) \end{aligned}$$

dir.

Bu durumda, $s(h) \leq s(T^m h) \leq k_m s(h)$ olup $m \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa ve

$\lim_m k_m = 1$ olduğu göz önüne alınarak $\lim_m s(T^m h) = s(h)$ olduğu görülür. Yani,

$\lim_m s(x) + \|T^m h - x\|_1 = s(x) + \|h - x\|_1$ olacaktır ki bu

$\lim_m \|T^m h - x\|_1 = \|h - x\|_1$ (3) olduğu anlamına gelir. Ayrıca, her $y \in E$ için

$$\begin{aligned} \|y - h\|_1 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - (\gamma_1 + \delta) f_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|_1 \\ &= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (t_k - \gamma_k) f_k - (\gamma_1 + \delta - t_1) f_1 \right\|_1 \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b|\gamma_1 + \delta - t_1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \left| \gamma_1 + 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k - 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t_k \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= (1+b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= \frac{1+b}{1-b} (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b\delta - b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b(1 - (1-\delta)) - b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b(1 - (1-\delta)) + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right) + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] \\
&\leq \frac{1+b}{1-b} \left[b \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right]
\end{aligned}$$

Bu sebeple,

$$\|y - h\|_1 \leq \frac{1+b}{1-b} \left[b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] = \frac{1+b}{1-b} [\|y - x\|_1 - \|h - x\|_1]$$

dir.

(4)

$$\begin{aligned}
\|y - x\|_1 - \|h - x\|_1 &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right| - b\delta \\
&\geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \right| - b\delta = |1 - (1-\delta)| - b\delta = (1-b)\delta
\end{aligned}$$

dir. Şimdi, $\varepsilon > 0$ keyfi alınsın ve $b \in (0,1)$ olduğu hatırlanılsın. Bu durumda $\mu(\varepsilon) :=$

$\frac{1-b}{1+b} \varepsilon \in (0, \infty)$ olarak seçilsin öyle ki her $y = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k \in E$ için

$$|\|y - x\|_1 - \|h - x\|_1| = \|y - x\| - \|h - x\| < \mu$$

olsun. Bu durumda, (4) gereğince $\|y - h\|_1 < \frac{1+b}{1-b}\mu = \varepsilon$ dir. Öyleyse, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\mu = \mu(\varepsilon)$ bulunabilir öyle ki $|\|y - x\|_1 - \|h - x\|_1| < \mu$ ise $\|y - h\| < \varepsilon$ dir yani burada E kümesinde $\lim_n \|z_n - x\|_1 = \|h - x\|_1$ olacak şekilde her $(z_n)_n$ dizisi için $\lim_n \|z_n - h\|_1 = 0$ olacağı sonucu verilmektedir. Bu ise yukarıdaki (3) ifadesi gereğince $\lim_m \|T^m h - x\|_1 = \|h - x\|_1$ olduğundan, $\lim_m \|T^m h - h\|_1 = 0$ sonucunun elde edileceğini söylemektedir.

O halde,

$$\begin{aligned} \|h - Th\|_1 &\leq \lim_m \|T^m h - h\|_1 + \lim_m \|T^m h - Th\|_1 \\ &\leq k_1 \lim_m \|T^{m-1} h - h\|_1 = 0 \end{aligned}$$

elde edilecektir.

Öyleyse yukarıdaki iki durumda da $Th = h$ olacak şekilde bir nokta mevcuttur ve dolayısıyla E afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir.

2.2 Cesàro Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualinde Bazı Geniş Sınıfların Afin Asimtotik Fonksiyonlar için Sabit Nokta Özelliği

Bu bölümde, Nezir ve İlgar çalışması [20]'da yer alan bir Cesàro fark dizisi uzayının bir Köthe-Toeplitz duali için Kaczor ve Prus analojisini ele alıyoruz. ℓ^1 içinde bulunan bu Banach uzayında afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği ile uzayın çok geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin var olduğunu gösteriyoruz.

Teorem 2.2 $b \in (0,1)$ olsun. c_0 ve ℓ^1 'in kanonik bazı $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ yardımıyla bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $f_1 := b e_1$ ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için $f_n := \frac{1}{n} e_n$ kuralı ile tanımlansın. Sonrasında ise bu dizi yardımı ile $S(C_\infty)^\beta$ Köthe-Toeplitz dual uzayında aşağıdaki şekilde tanımlı bir $E = E_b$ kümesi ele alınsın.

$$E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda E kümesi afin asimtotik $\|\cdot\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğini sağlar.

İspat. $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. $T: E \rightarrow E$ bir afin asimtotik genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda, T afin olduğundan Everest [9] doktora tezinde yer alan Lemma 1.1.2 gereğince en az bir $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ dizisi vardır öyle ki $\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\| \xrightarrow{n} 0$ dir. Genelliği bozmadan gerekirse bir alt diziye geçilerek bir $x \in S(C_{\infty})^{\beta}$ bulunabilir öyle ki $x^{(n)}$ dizisi zayıf* toplolojide x noktasına yakınsar. Bu durumda, Kuramsal Temeller bölümünde tanıttığımız Lemma 1.6 gereğince, $\forall y \in S(C_{\infty})^{\beta}$ için $s(y) = \limsup_n \|x^{(n)} - y\|$ şeklinde tanımlı bir $s: S(C_{\infty})^{\beta} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\forall y \in S(C_{\infty})^{\beta}$ için $s(y) = s(x) + \|y - x\|$ dir.

T asimtotik genişlemeyen olduğundan 1 e azalarak yakınsayan $[1, \infty)$ aralığında en az bir $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\forall x, y \in E$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$$

dir. Buradan ele alınan kümenin zayıf* kapanışını

$$W := \overline{E}^{w*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{her } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanır ve iki ayrı durum ele alınır.

Durum 1: $x \in E$ olsun.

$m \in \mathbb{N}$ sabit tutulsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s(T^m x) = s(x) + \|T^m x - x\|$ ve

$$\begin{aligned} s(T^m x) &= \limsup_n \|T^m x - x^{(n)}\| \\ &\leq \limsup_n \|T^m x - T^m(x^{(n)})\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^m(x^{(n)})\| \\ &\leq k_m \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^m(x^{(n)})\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k_m \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^m \|T^{j-1}(x^{(n)}) - T^j(x^{(n)})\| \\
&\leq k_m \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^m k_{j-1} \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \\
&= k_m s(x) \text{ dir.} \tag{5}
\end{aligned}$$

Bu sebeple, $\|T^m x - x\| \leq (k_m - 1)s(x)$ olup $m \rightarrow \infty$ yaklaşımında limit alınırsa $\lim_m \|T^m x - x\| = 0$ elde edilecektir fakat $\lim_m \|TT^m x - Tx\| \leq \lim_m k_1 \|T^m x - x\| = 0$ ve $\lim_m \|T^{m+1} x - Tx\| = 0$ olduğundan $T^m x$ dizisi x ve Tx 'e yakınsayacaktır. Dolayısıyla, limitlerin tekliği gereğince $Tx = x$ dir.

Durum 2: $x \in W \setminus E$ olsun.

Bu durumda W 'nın tanımından x noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \geq 0$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$h := (\gamma_1 + \delta)f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\|h - x\| = \|b\delta e_1\| = b\delta \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$\begin{aligned}
\|y - x\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\| = b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= b|t_1 - \gamma_1| + b \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&\geq b \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k - \gamma_k \right| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= b \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k|
\end{aligned}$$

$$= b|1 - (1 - \delta)| + (1 - b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

Öyleyse,

$$\|y - x\| \geq b\delta + (1 - b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \|h - x\|$$

elde edilir.

O halde, her $y \in E$ ve her $x \in W \setminus E$ için $\|y - x\|_1 \geq \|h - x\|_1$ (6)

dir.

Daha sonra ise aşağıdaki eşitsizlikler gözönüne alınır.

$$\begin{aligned} s(h) &= s(x) + \|h - x\| \leq s(x) + \|T^m h - x\| = s(T^m h) \\ &= \limsup_n \|T^m h - x^{(n)}\| \text{ bu durumda (1) eşitsizliğinde olduğu gibi} \\ &\leq \limsup_n \|T^m h - T^m(x^{(n)})\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^m(x^{(n)})\| \\ &\leq k_m \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^m(x^{(n)})\| \\ &\leq k_m \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^m \|T^{j-1}(x^{(n)}) - T^j(x^{(n)})\| \\ &\leq k_m \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^m k_{j-1} \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \\ &= k_m s(h) \end{aligned}$$

dir.

Bu durumda, $s(h) \leq s(T^m h) \leq k_m s(h)$ olup $m \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa ve

$\lim_m k_m = 1$ olduğu göz önüne alınarak $\lim_m s(T^m h) = s(h)$ olduğu görülür. Yani,

$\lim_m s(x) + \|T^m h - x\| = s(x) + \|h - x\|$ olacaktır ki bu $\lim_m \|T^m h - x\| = \|h - x\|$

(7) olduğu anlamına gelir. Ayrıca, her $y \in E$ için

$$\begin{aligned} \|y - h\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - (\gamma_1 + \delta) f_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k f_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (t_k - \gamma_k) f_k - (\gamma_1 + \delta - t_1) f_1 \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b|\gamma_1 + \delta - t_1| \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \left| \gamma_1 + 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k - 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t_k \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= (1+b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= \frac{1+b}{1-b} (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b\delta - b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b(1 - (1-\delta)) - b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b(1 - (1-\delta)) + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right) + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] \\
&\leq \frac{1+b}{1-b} \left[b \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right]
\end{aligned}$$

Bu sebeple,

$$\|y - h\| \leq \frac{1+b}{1-b} \left[b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] = \frac{1+b}{1-b} [\|y - x\| - \|h - x\|]$$

dir.

(8)

Ayrıca,

$$\|y - x\| - \|h - x\| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right| - b\delta$$

$$\geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \right| - b\delta = |1 - (1 - \delta)| - b\delta = (1 - b)\delta$$

dir. Şimdi, $\varepsilon > 0$ keyfi alınsın ve $b \in (0,1)$ olduğu hatırlanılsın. Bu durumda $\mu(\varepsilon) := \frac{1-b}{1+b} \varepsilon \in (0, \infty)$ olarak seçilsin öyle ki her $y = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k \in E$ için

$$|\|y - x\| - \|h - x\|| \leq \|y - x\| - \|h - x\| < \mu$$

olsun. Bu durumda, (8) gereğince $\|y - h\|_1 < \frac{1+b}{1-b} \mu = \varepsilon$ dir. Öyleyse, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\mu = \mu(\varepsilon)$ bulunabilir öyle ki $|\|y - x\| - \|h - x\|| < \mu$ ise $\|y - h\| < \varepsilon$ dir yani burada E kümesinde $\lim_n \|z_n - x\| = \|h - x\|$ olacak şekilde her $(z_n)_n$ dizisi için $\lim_n \|z_n - h\| = 0$ olacağı sonucu verilmektedir. Bu ise yukarıdaki (7) ifadesi gereğince $\lim_m \|T^m h - x\| = \|h - x\|$ olduğundan, $\lim_m \|T^m h - h\| = 0$ sonucunun elde edileceğini söylemektedir.

O halde,

$$\begin{aligned} \|h - Th\| &\leq \lim_m \|T^m h - h\| + \lim_m \|T^m h - Th\| \\ &\leq k_1 \lim_m \|T^{m-1} h - h\| = 0 \end{aligned}$$

elde edilecektir.

Öyleyse yukarıdaki iki durumda da $Th = h$ olacak şekilde bir nokta mevcuttur ve dolayısıyla E afın asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Araştırma bulgularımız üç alt başlıktan oluşmaktadır. İlk başlıkta öncelikle Nezir ve İlgar [20] çalışmasını genelleştiren, Nezir ve Güven [19] çalışmasında sunulan, keyfi $m \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş bir Cesàro fark dizileri uzayı $X^\infty(\Delta^m)$ 'nin Köthe-Toeplitz duali D_m içinde afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks bazı kümelerden oluşan geniş sınıfların varlığı gösterilmektedir. İkinci başlıkta ise Nezir ve Oymak [21] çalışmamızda gösterilmiş olan sonuç olarak keyfi $m \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş bir Cesàro fark dizileri uzayı $X^\infty(\Delta^m)$ 'nin Köthe-Toeplitz duali D_m 'ye karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzayı U_m 'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks bazı kümelerden oluşan geniş sınıfların varlığı gösterilmektedir. Son başlıkta ise danışman hocamız Nezir ile hazırlamakta olduğumuz çalışmamızda anlatılan ve araştıma konumuzun bulguları olarak ikinci başlıkta çalışmış olduğumuz Lebesgue benzeri fonksiyon uzayı U_m için Kaczor ve Prus analogisi ele alınmaktadır. Yani keyfi $m \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş bir Cesàro fark dizileri uzayı $X^\infty(\Delta^m)$ 'nin Köthe-Toeplitz duali D_m 'ye karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzayı U_m 'de afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks bazı kümelerden oluşan geniş sınıfların varlığı gösterilmektedir.

Not edilebilirki tezin 1.2 kuramsal temeller alt başlığında belirtildiği gibi her $m \in \mathbb{N}$ için $L_1[0,1] \subset U_m$, $U_1 \subset U_m$ olduğu ve sayma ölçüsü kullanıldığında U_m 'in D_m uzayına karşılık geldiği U_m 'nin tanımından kolaylıkla anlaşılabilmektedir.

Şimdi sırasıyla bu alt başlıklar ele alınmaktadır.

3.1 Cesàro Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualinde Bazı Geniş Sınıfların Afin Asimtotik Fonksiyonlar için Sabit Nokta Özelliği

Bu bölümde, Nezir ve Güven çalışması [19]'da yer alan bir Cesàro fark dizisi uzayının bir Köthe-Toeplitz duali için Kaczor ve Prus analogisini ele alıyoruz. ℓ^1 içinde bulunan

bu Banach uzayında afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliği ile uzayın çok geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinin var olduğunu gösteriyoruz.

Teorem 3.1 $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. c_0 ve ℓ^1 'in kanonik bazı $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ yardımıyla bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $f_1 := b e_1$ ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için $f_n := \frac{1}{n^m} e_n$ kuralı ile tanımlansın. Sonrasında ise bu dizi yardımı ile $D_m = X^\infty(\Delta^m)$ Köthe-Toeplitz dual uzayında aşağıdaki şekilde tanımlı bir $E^{(m)} = E_b^{(m)}$ kümesi ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}.$$

Bu durumda $E^{(m)} \subset D_m$ kümesi afin asimtotik $\|\cdot\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğini sağlar.

İspat. $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. $T: E^{(m)} \rightarrow E^{(m)}$ bir afin asimtotik genişlemeyen fonksiyon olsun. Bu durumda, T afin olduğundan Everest [9] doktora tezinde yer alan Lemma 1.1.2 gereğince en az bir $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset E^{(m)}$ dizisi vardır öyle ki $\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\| \xrightarrow{n} 0$ dir. Genelliği bozmadan gerekirse bir alt diziye geçilerek bir $x \in D_m$ bulunabilir öyle ki $x^{(n)}$ dizisi zayıf* toplolojide x noktasına yakınsar. Bu durumda, Kuramsal Temeller bölümünde tanıttığımız Lemma 1.6 gereğince, $\forall y \in D_m$ için $s(y) = \limsup_n \|x^{(n)} - y\|$ şeklinde tanımlı bir $s: D_m \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\forall y \in D_m$ için $s(y) = s(x) + \|y - x\|$ dir.

T asimtotik genişlemeyen olduğundan 1 e azalarak yakınsayan $[1, \infty)$ aralığında en az bir $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki $\forall x, y \in E^{(m)}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$$

dir. Buradan ele alınan kümenin zayıf* kapanışı

$$W := \overline{E^{(m)}}^{w*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n : \text{her } t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanır ve iki ayrı durum ele alınır.

Durum 1: $x \in E^{(m)}$ olsun.

$p \in \mathbb{N}$ sabit tutulsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s(T^p x) = s(x) + \|T^p x - x\|$ ve

$$\begin{aligned}
s(T^p x) &= \limsup_n \|T^p x - x^{(n)}\| \\
&\leq \limsup_n \|T^p x - T^p(x^{(n)})\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^p(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^p(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^p \|T^{j-1}(x^{(n)}) - T^j(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^p k_{j-1} \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \\
&= k_p s(x) \text{ dir.} \tag{9}
\end{aligned}$$

Bu sebeple, $\|T^p x - x\| \leq (k_p - 1)s(x)$ olup $p \rightarrow \infty$ yaklaşımında limit alınırsa $\lim_m \|T^p x - x\| = 0$ elde edilecektir fakat $\lim_p \|TT^p x - Tx\| \leq \lim_p k_1 \|T^p x - x\| = 0$ ve $\lim_p \|T^{p+1}x - Tx\| = 0$ olduğundan $T^p x$ dizisi x ve Tx 'e yakınsayacaktır. Dolayısıyla, limitlerin tekliği gereğince $Tx = x$ dir.

Durum 2: $x \in W \setminus E^{(m)}$ olsun.

Bu durumda W 'nın tanımından x noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \geq 0$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$h := (\gamma_1 + \delta)f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\|h - x\| = \|b\delta e_1\| = b\delta \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, $y \in E^{(m)}$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. O halde,

$$\|y - x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\| = b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k|$$

$$\begin{aligned}
&= b|t_1 - \gamma_1| + b \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&\geq b \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k - \gamma_k \right| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= b \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= b|1 - (1 - \delta)| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k|
\end{aligned}$$

Öyleyse,

$$\|y - x\| \geq b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \geq \|h - x\|$$

elde edilir.

O halde, her $y \in E^{(m)}$ ve her $x \in W \setminus E^{(m)}$ için $\|y - x\| \geq \|h - x\|$ (10) dir.

Daha sonra ise aşağıdaki eşitsizlikler gözönüne alınır.

$$\begin{aligned}
s(h) &= s(x) + \|h - x\| \leq s(x) + \|T^p h - x\| = s(T^p h) \\
&= \limsup_n \|T^p h - x^{(n)}\| \text{ bu durumda (9) eşitsizliğinde olduğu gibi} \\
&\leq \limsup_n \|T^p h - T^p(x^{(n)})\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^p(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^p(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^p \|T^{j-1}(x^{(n)}) - T^j(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^p k_{j-1} \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \\
&= k_p s(h)
\end{aligned}$$

dir.

Bu durumda, $s(h) \leq s(T^p h) \leq k_p s(h)$ olup $p \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa ve

$\lim_p k_p = 1$ olduğu göz önüne alınarak $\lim_p s(T^p h) = s(h)$ olduğu görülür. Yani, $\lim_p s(x) + \|T^p h - x\| = s(x) + \|h - x\|$ olacaktır ki bu $\lim_p \|T^p h - x\| = \|h - x\|$

(11) olduğu anlamına gelir. Ayrıca, her $y \in E^{(m)}$ için

$$\begin{aligned}
\|y - h\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - (\gamma_1 + \delta) f_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k f_k \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (t_k - \gamma_k) f_k - (\gamma_1 + \delta - t_1) f_1 \right\| \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b |\gamma_1 + \delta - t_1| \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \left| \gamma_1 + 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k - 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t_k \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= (1 + b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= \frac{1+b}{1-b} (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b\delta - b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b(1 - (1 - \delta)) - b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b(1 - (1 - \delta)) + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right) + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] \\
&\leq \frac{1+b}{1-b} \left[b \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right]
\end{aligned}$$

Bu sebeple,

$$\|y - h\| \leq \frac{1+b}{1-b} \left[b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] = \frac{1+b}{1-b} [\|y - x\| - \|h - x\|]$$

dir. (12)

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|y - x\| - \|h - x\| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right| - b\delta \\ &\geq \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \right| - b\delta = |1 - (1 - \delta)| - b\delta = (1 - b)\delta \end{aligned}$$

dir. Şimdi, $\varepsilon > 0$ keyfi alınsın ve $b \in (0,1)$ olduğu hatırlanılsın. Bu durumda $\mu(\varepsilon) := \frac{1-b}{1+b} \varepsilon \in (0, \infty)$ olarak seçilsin öyle ki her $y = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k \in E^{(m)}$ için

$$|\|y - x\| - \|h - x\|| \leq \|y - x\| - \|h - x\| < \mu$$

olsun. Bu durumda, (12) gereğince $\|y - h\|_1 < \frac{1+b}{1-b} \mu = \varepsilon$ dir. Öyleyse, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\mu = \mu(\varepsilon)$ bulunabilir öyle ki $|\|y - x\| - \|h - x\|| < \mu$ ise $\|y - h\| < \varepsilon$ dir yani burada $E^{(m)}$ kümesinde $\lim_n \|z_n - x\| = \|h - x\|$ olacak şekildeki her $(z_n)_n$ dizisi için $\lim_n \|z_n - h\| = 0$ olacağı sonucu verilmektedir. Bu ise yukarıdaki (11) ifadesi gereğince $\lim_p \|T^p h - x\| = \|h - x\|$ olduğundan, $\lim_p \|T^p h - h\| = 0$ sonucunun elde edileceğini söylemektedir.

O halde,

$$\begin{aligned} \|h - Th\| &\leq \lim_p \|T^p h - h\| + \lim_p \|T^p h - Th\| \\ &\leq k_1 \lim_p \|T^{p-1} h - h\| = 0 \end{aligned}$$

elde edilecektir.

Öyleyse yukarıdaki iki durumda da $Th = h$ olacak şekilde bir nokta mevcuttur ve dolayısıyla $E^{(m)}$ afın asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir.

3.2 Cesàro Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualine Karşılık Gelen Lebesgue-benzeri Fonksiyon Uzaylarında Genişlemeyen Fonksiyonlar için Sabit Nokta Özelliğine Sahip Geniş Sınıflar

Bu bölümde, Nezir ve Oymak [21] çalışmamızda gösterilmiş olan sonuç olarak keyfi $m \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş bir Cesàro fark dizileri uzayı $X^\infty(\Delta^m)$ 'nin Köthe-Toeplitz duali D_m 'ye karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzayı U_m 'de genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks bazı kümelerden oluşan geniş sınıfların varlığı gösterilmektedir.

Burada bu geniş sınıflara örnek olan kümeler aşağıdaki örneklerle sunulmakta ve sonrasında bu kümelerin her biri için geçerli olan tek bir teorem verilmektedir.

Örnek 3.2 [21] $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := (n+1)t^{n-m}$ formülü ile verilmek üzere $f_1 := b e_1, f_2 := b e_2$ ve $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ kuralı ile tanımlanan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla oluşturulmuş aşağıdaki şekilde görülen U_m 'nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi $E^{(m)}$ ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.3 [21] $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{ne^{nt}}{t^m(e^n-1)}$ formülü ile verilmek üzere $f_1 := b e_1, f_2 := b e_2$ ve $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ kuralı ile tanımlanan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla oluşturulmuş aşağıdaki şekilde görülen U_m 'nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi $E^{(m)}$ ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.4 [21] $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{ne^{nt}}{t^m(e^n-1)} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ formülü ile verilmek üzere $f_1 := b e_1, f_2 := b e_2$ ve $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ kuralı ile tanımlanan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla oluşturulmuş aşağıdaki şekilde görülen U_m 'nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi $E^{(m)}$ ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.5 [21] $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{4n}{\pi t^m(1+n^2 t^2)} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ formülü ile verilmek üzere $f_1 := b e_1, f_2 := b e_2$ ve $n \geq 3$ için $f_n := e_n$ kuralı ile tanımlanan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla oluşturulmuş aşağıdaki şekilde görülen U_m 'nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi $E^{(m)}$ ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.6 [21] Her $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ için yukarıdaki örneklerde yer alan her bir $E^{(m)}$ kümesi $\|\cdot\|$ -genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir.

İspat. $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $T: E^{(m)} \rightarrow E^{(m)}$ genişlemeyen fonksiyon ise $\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\|_n \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan en az bir yaklaşık sabit nokta dizisi $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in E^{(m)}$ vardır. O halde genelliği bozmadan gerekirse bir alt diziye geçiş yapılarak en az bir $x \in U_m$ bulunabilir öyle ki $x^{(n)}$ dizisi bu x noktasına zayıf* topolojide yakınsaktır. Öyleyse, Lemma 1.8 ile verilen Goebel ve Kuczumow analog gerçekliği gereğince $\forall y \in U_m$ için $s(y) = \limsup_n \|x^{(n)} - y\|$ şeklinde tanımlı bir $s: U_m \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\forall y \in U_m$ için $s(y) = s(x) + \|y - x\|$ dir.

Buradan ele alınan kümenin zayıf* kapanışı

$$W := \overline{E^{(m)}}^{w^*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \text{her } \beta_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanır ve iki ayrı durum ele alınır.

Durum 1: $x \in E^{(m)}$ olsun.

Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s(Tx) = s(x) + \|Tx - x\|$ ve

$$\begin{aligned} s(Tx) &= \limsup_n \|Tx - x^{(n)}\| \\ &\leq \limsup_n \|Tx - T(x^{(n)})\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \end{aligned}$$

$$\leq \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + 0 = s(x) \text{ dir.} \quad (13)$$

Bu sebeple, $s(Tx) = s(x) + \|Tx - x\| \leq s(x)$ ve dolayısıyla $\|Tx - x\| = 0$ dır. O halde, $Tx = x$ dir.

Durum 2: $x \in W \setminus E^{(m)}$.

Bu durumda, x noktası $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ koşulunu sağlayan katsayılar vasıtasıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılır.

Buradan $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve $\alpha \in \left[\frac{-\gamma_1}{\delta}, \frac{\gamma_2}{\delta} + 1 \right]$ için

$$h_\alpha := (\gamma_1 + \alpha\delta)f_1 + (\gamma_2 + (1 - \alpha)\delta)f_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \gamma_n f_n$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\|h_\alpha - x\| = \|\alpha b \delta e_1 + (1 - \alpha)\delta e_2\| \leq b|\alpha|\delta + b|1 - \alpha|\delta = b\delta$$

dir. Bu sebeple $\|h_\alpha - x\|$ fonksiyonu $\alpha \in [0,1]$ iken minimum değerine ulaşır ve bu minimum değeri $b\delta$ sayısını aşamaz.

Şimdi $y \in E^{(m)}$ noktası $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \geq 0$ eşitsizliğini ve $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$ denklemini sağlayan skaler katsayılar yardımıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n$ formunda yazılır ise

$$\begin{aligned} \|y - x\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \gamma_k) f_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \gamma_k) f_k \right\| \\ &= \int_0^1 t \left| \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \gamma_k) f_k \right| dm = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \gamma_k) t f_k \right| dm \\ &\geq \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \gamma_k) t f_k dm \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \gamma_k) \right| \\ &= \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| \\ &= \delta \end{aligned}$$

olacaktır; öyleyse,

$$\|y - x\| \geq b\delta \geq \|h_\alpha - x\|$$

dir.

Şimdi $\Lambda := \{h_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ olarak tanımlansın. Açıkça görülebilir ki, Λ kümesi tanımı gereğince kompakt bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında görüntüsü olduğundan $E^{(m)}$ kümesinin kompakt bir alt kümesi olacaktır. Konveksliği ise kolayca tanımından anlaşılmaktadır.

Şimdi $\|y - x\|$ ifadesinin minimum değerine $y = h_\alpha$ noktasında ulaştığı da göz önüne alındığında, her $h \in \Lambda$ için öncelikle elimizde aşağıdaki eşitsizlik olacaktır.

$$\begin{aligned} s(h) &= s(x) + \|h - x\| \leq s(x) + \|Th - x\| = s(Th) \text{ fakat buradan} \\ &= \limsup_n \|Th - x^{(n)}\| \text{ elde edilir ve aynı şekilde (13) eşitsizliği gereğince} \\ &\leq \limsup_n \|Th - T(x^{(n)})\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \\ &\leq \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \\ &\leq \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + 0 \\ &= s(h) \text{ olacaktır.} \end{aligned}$$

Bu sebeple $s(h) \leq s(Th) \leq s(h)$ ve dolayısıyla $s(Th) = s(h)$ dir. Öyleyse, $s(x) + \|Th - x\| = s(x) + \|h - x\|$ olup $\|Th - x\| = \|h - x\|$ elde edilir. Yani, $Th \in \Lambda$ dir fakat bu $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$ olduğunu söyleyecektir. Buradan ise T sürekli fonksiyon olduğundan, Schauder'in Sabit Nokta Teoremi [24] gereğince T fonksiyonunun bir sabit noktası olduğu ve bu noktanın $\|y - x\| : y \in E^{(m)}$ ifadesinin tek minimize eden değeri olan h olduğunu yani $Th = h$ olduğunu söyleyecektir.

Bu sebeplerle, $E^{(m)} \subset U_m$ arzu edildiği gibi SNÖ-GF'ye sahiptir.

3.3 Cesàro Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualine Karşılık Gelen Lebesgue-benzeri Fonksiyon Uzaylarında Afin Asimtotik Genişlemeyen Fonksiyonlar için Sabit Nokta Özelliğine Sahip Geniş Sınıflar

Araştırma bulgularımızın son alt başlığı olan bu bölümümüzde danışman hocamız Nezir ile hazırlamakta olduğumuz çalışmada anlatılan ve araştıma konumuzun bulguları olarak ikinci başlıkta çalışmış olduğumuz Lebesgue benzeri fonksiyon uzayı U_m için Kaczor ve Prus analojisi ele alınmaktadır. Yani keyfi $m \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş bir Cesàro fark dizileri uzayı $X^\infty(\Delta^m)$ 'nin Köthe-Toeplitz duali D_m 'ye karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzayı U_m 'de afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip zayıf kompakt olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks bazı kümelerden oluşan geniş sınıfların varlığı gösterilmektedir.

Burada bu geniş sınıflara örnek olan kümeler aşağıdaki örneklerle sunulmakta ve sonrasında bu kümelerin her biri için geçerli olan tek bir teorem verilmektedir.

Örnek 3.7 $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := (n+1)t^{n-m}$ formülü ile verilmek üzere $f_1 := b e_1$ ve $n \geq 2$ için $f_n := e_n$ kuralı ile tanımlanan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla oluşturulmuş aşağıdaki şekilde görülen U_m 'nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi $E^{(m)}$ ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.8 $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{ne^{nt}}{t^m(e^n - 1)}$ formülü ile verilmek üzere $f_1 := b e_1$ ve $n \geq 2$ için $f_n := e_n$ kuralı ile tanımlanan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla oluşturulmuş aşağıdaki şekilde görülen U_m 'nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi $E^{(m)}$ ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.9 $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{ne^{nt}}{t^m(e^n - 1)} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ formülü ile verilmek üzere $f_1 := b e_1$ ve $n \geq 2$ için $f_n := e_n$ kuralı ile tanımlanan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla oluşturulmuş aşağıdaki şekilde görülen U_m 'nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi $E^{(m)}$ ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1 \right\}.$$

Örnek 3.10 $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi olsun. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $e_n := \frac{4n}{\pi t^m(1+n^2 t^2)} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ formülü ile verilmek üzere $f_1 := b e_1$ ve $n \geq 2$ için $f_n := e_n$ kuralı ile tanımlanan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yardımıyla oluşturulmuş aşağıdaki şekilde görülen U_m 'nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi $E^{(m)}$ ele alınsın.

$$E^{(m)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1 \right\}.$$

Teorem 3.11 Her $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ için yukarıdaki örneklerde yer alan her bir $E^{(m)}$ kümesi afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir.

İspat. $m \in \mathbb{N}$ ve $b \in (0,1)$ keyfi seçilsin. $T: E^{(m)} \rightarrow E^{(m)}$ genişlemeyen fonksiyon ise $\|Tx^{(n)} - x^{(n)}\|_n \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan en az bir yaklaşık sabit nokta dizisi $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in E^{(m)}$ vardır. O halde genelliği bozmadan gerekirse bir alt diziye geçiş yapılarak en az bir $x \in U_m$ bulunabilir öyle ki $x^{(n)}$ dizisi bu x noktasına zayıf* topolojide yakınsaktır. Öyleyse, Lemma 1.4 ile verilen Goebel ve Kuczumow analog gerçeği gereğince $\forall y \in U_m$ için $s(y) = \limsup_n \|x^{(n)} - y\|$ şeklinde tanımlı bir $s: U_m \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\forall y \in U_m$ için $s(y) = s(x) + \|y - x\|$ dir.

Buradan ele alınan kümenin zayıf* kapanışı

$$W := \overline{E^{(m)}}^{w*} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n : \text{her } \beta_n \geq 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlanır ve iki ayrı durum ele alınır.

Durum 1: $x \in E^{(m)}$ olsun.

$p \in \mathbb{N}$ sabit tutulsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s(T^p x) = s(x) + \|T^p x - x\|$ ve

$$\begin{aligned}
s(T^p x) &= \limsup_n \|T^p x - x^{(n)}\| \\
&\leq \limsup_n \|T^p x - T^p(x^{(n)})\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^p(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^p(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^p \|T^{j-1}(x^{(n)}) - T^j(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|x - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^p k_{j-1} \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \\
&= k_p s(x) \text{ dir.} \tag{14}
\end{aligned}$$

Bu sebeple, $\|T^p x - x\| \leq (k_p - 1)s(x)$ olup $p \rightarrow \infty$ yaklaşımında limit alınırsa $\lim_m \|T^p x - x\| = 0$ elde edilecektir fakat $\lim_m \|TT^p x - Tx\| \leq \lim_m k_1 \|T^p x - x\| = 0$ ve $\lim_m \|T^{p+1} x - Tx\| = 0$ olduğundan $T^p x$ dizisi x ve Tx 'e yakınsayacaktır. Dolayısıyla, limitlerin tekliği gereğince $Tx = x$ dir.

Durum 2: $x \in W \setminus E^{(m)}$ olsun.

Bu durumda W 'nın tanımından x noktasının $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \geq 0$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur. Bu skalerler vasıtasıyla $\delta := 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ ve

$$h := (\gamma_1 + \delta)f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n f_n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\|h - x\| = \|b\delta e_1\| = b\delta \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, $y \in E$ keyfi bir nokta olduğunda $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f_n$ formunda yazılacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ koşullarını sağlayan skalerler mevcuttur.

O halde,

$$\|y - x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k f_k \right| dm \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) f_k \right\| \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) f_k \right| dm = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) f_k \right| dm \\
&\geq \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) f_k dm \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - \gamma_k) \right| \\
&= \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right| \\
&= \delta
\end{aligned}$$

Öyleyse,

$$\|y - x\| \geq b\delta \geq \|h - x\|$$

elde edilir.

O halde, her $y \in E^{(m)}$ ve her $x \in W \setminus E$ için $\|y - x\| \geq \|y - x\|$ (15)

dir.

Daha sonra ise aşağıdaki eşitsizlikler gözönüne alınır.

$$\begin{aligned}
s(h) &= s(x) + \|h - x\| \leq s(x) + \|T^p h - x\| = s(T^p h) \\
&= \limsup_n \|T^p h - x^{(n)}\| \text{ bu durumda (10) eşitsizliğinde olduğu gibi} \\
&\leq \limsup_n \|T^p h - T^p(x^{(n)})\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^p(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \|x^{(n)} - T^p(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^p \|T^{j-1}(x^{(n)}) - T^j(x^{(n)})\| \\
&\leq k_p \limsup_n \|h - x^{(n)}\| + \limsup_n \sum_{j=1}^p k_{j-1} \|x^{(n)} - T(x^{(n)})\| \\
&= k_p s(h)
\end{aligned}$$

dir.

Bu durumda, $s(h) \leq s(T^p h) \leq k_p s(h)$ olup $p \rightarrow \infty$ iken limit alınır ve $\lim_p k_p = 1$ olduğu göz önüne alınarak $\lim_p s(T^p h) = s(h)$ olduğu görülür. Yani, $\lim_p s(x) + \|T^p h - x\| = s(x) + \|h - x\|$ olacaktır ki bu $\lim_p \|T^p h - x\| = \|h - x\|$ (16) olduğu anlamına gelir. Ayrıca, her $y \in E^{(m)}$ için

$$\begin{aligned}
\|y - h\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k - (\gamma_1 + \delta) f_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k f_k \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (t_k - \gamma_k) f_k - (\gamma_1 + \delta - t_1) f_1 \right\| \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{k=2}^{\infty} t_k e_k - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k e_k - b(\delta + \gamma_1 - t_1) e_1 \right| dm \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^1 |t_k - \gamma_k| e_k dm + b|\delta + \gamma_1 - t_1| \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b|\gamma_1 + \delta - t_1| \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \left| \gamma_1 + 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k - 1 + \sum_{k=2}^{\infty} t_k \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + b \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= (1 + b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= \frac{1+b}{1-b} (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b\delta - b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b(1 - (1 - \delta)) - b\delta + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| \right] \\
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b(1 - (1 - \delta)) + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1+b}{1-b} \left[b \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \right) + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] \\
&\leq \frac{1+b}{1-b} \left[b \sum_{k=1}^{\infty} |t_k - \gamma_k| + (1-b) \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right]
\end{aligned}$$

Bu sebeple,

$$\|y - h\| \leq \frac{1+b}{1-b} \left[b|t_1 - \gamma_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |t_k - \gamma_k| - b\delta \right] = \frac{1+b}{1-b} [\|y - x\| - \|h - x\|]$$

dir.

(17)

Ayrıca,

$$\|y - x\| - \|h - x\| \geq |1 - (1 - \delta)| - b\delta = (1 - b)\delta$$

dir. Şimdi, $\varepsilon > 0$ keyfi alınsın ve $b \in (0,1)$ olduğu hatırlanılsın. Bu durumda $\mu(\varepsilon) := \frac{1-b}{1+b} \varepsilon \in (0, \infty)$ olarak seçilsin öyle ki her $y = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k \in E^{(m)}$ için

$$|\|y - x\| - \|h - x\|| \leq \|y - x\| - \|h - x\| < \mu$$

olsun. Bu durumda, (17) gereğince $\|y - h\|_1 < \frac{1+b}{1-b} \mu = \varepsilon$ dir. Öyleyse, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\mu = \mu(\varepsilon)$ bulunabilir öyle ki $|\|y - x\| - \|h - x\|| < \mu$ ise $\|y - h\| < \varepsilon$ dir yani burada $E^{(m)}$ kümesinde $\lim_n \|z_n - x\| = \|h - x\|$ olacak şekildeki her $(z_n)_n$ dizisi için $\lim_n \|z_n - h\| = 0$ olacağı sonucu verilmektedir. Bu ise yukarıdaki (16) ifadesi gereğince $\lim_p \|T^p h - x\| = \|h - x\|$ olduğundan, $\lim_p \|T^p h - h\| = 0$ sonucunun elde edileceğini söylemektedir.

O halde,

$$\begin{aligned}
\|h - Th\| &\leq \lim_p \|T^p h - h\| + \lim_p \|T^p h - Th\| \\
&\leq k_1 \lim_p \|T^{p-1} h - h\| = 0
\end{aligned}$$

elde edilecektir.

Öyleyse yukarıdaki iki durumda da $Th = h$ olacak şekilde bir nokta mevcuttur ve dolayısıyla $E^{(m)}$ afin asimtotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahiptir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında Goebel ve Kuczumow'un, genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip, mutlak olarak toplanabilir skaler dizilerin Banach uzayında çok geniş bir kapalı, sınırlı, konveks altkümeler sınıfının var olduğunu gösterdiklerini hatırlatıyoruz. 2004'te ise Kaczor ve Prus'ın, asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip, mutlak olarak toplanabilir skaler dizilerin Banach uzayında çok geniş bir kapalı, sınırlı, konveks altkümeler sınıfının var olduğunu gösterdiklerini hatırlatıyoruz. Bu çalışmada ise benzer şekilde bir Cesàro fark dizi uzayının bir Köthe-Toeplitz duali için analog bir sonuç üzerine çalışıyoruz. Bu uzaylarda afin asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan sınıfın var olduğunu gösteriyoruz. Bu tez çalışmasında ise Kaczor ve Prus'ın ℓ^1 'de yaptığına benzer şekilde Et ve Tripathy ile arkadaşları tarafından çalışılmış genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzayının bir Köthe-Toeplitz duali için analog bir sonuç üzerine çalışılıyor. Yani, bu uzaylarda afin asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan sınıfın var olduğu gösteriliyor. Bununla beraber ikinci çalışma olarak ise yayınlanmış çalışmamız ile bu genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerine karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzaylarında Kaczor ve Prus çalışmasının ilham aldığı Goebel ve Kuczumow analoğu olan bir sonuç üzerine çalışıyoruz. Not ediyoruz ki bu uzay öncelikle $L_1[0,1]$ Lebesgue uzayını içerir ve tezimizde bu uzaylarda genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan sınıfın var olduğunu gösteriyoruz. Son olarak ise yani üçüncü çalışma olarak yine aynı uzayda; yani genelleştirilmiş Cesàro fark dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerine karşılık gelen Lebesgue benzeri fonksiyon uzaylarında Kaczor ve Prus analoğu çalışılarak afin asimptotik genişlemeyen fonksiyonlar için sabit nokta özelliğine sahip geniş bir kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerden oluşan sınıfın var olduğu gösteriliyor.

KAYNAKLAR

- [1] Chen, S., Cui, Y., Hudzik, H., & Sims, B. (2001). Geometric properties related to fixed point theory in some Banach function lattices. In *Handbook of metric fixed point theory*. Springer, Dordrecht, 339-389.
- [2] Cui, Y. (1999). Some geometric properties related to fixed point theory in Cesàro spaces. *Collectanea Mathematica*, 277-288.
- [3] Cui, Y., Hudzik, H., & Li, Y. (2000). On the Garkfal's Coefficient in Some Banach Sequence Spaces. In *Function Spaces*. CRC Press, 163-170.
- [4] Cui, Y., Meng, C., & Pluciennik, R. (2000). Banach—Saks Property and Property (β) in Cesàro Sequence Spaces. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 24(2), 201-210.
- [5] Day, M. M., James, R. C., & Swaminathan, S. (1971). Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction. *Canadian Journal of Mathematics*, 23(6), 1051-1059.
- [6] Dowling, P., & Lennard, C. (1997). Every nonreflexive subspace of $L_1 [0, 1]$ fails the fixed point property. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(2), 443-446.
- [7] Et, M., & Çolak, R. (1995). On some generalized difference sequence spaces. *Soochow journal of mathematics*, 21(4), 377-386.
- [8] Et, M. (1996). On some generalized Cesàro difference sequence spaces. *İstanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy*, 55, 221-229.

- [9] Everest, T. M. (2013). *Fixed points of nonexpansive maps on closed, bounded, convex sets in l^1* (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh).
- [10] Falset, J. G. (1997). The fixed point property in Banach spaces with the NUS-property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 215(2), 532-542.
- [11] Goebel, K., & Kirk, W. A. (1990). *Topics in metric fixed point theory* (No. 28). Cambridge university press.
- [12] Goebel, K., & Kuczumow, T. (1979). Irregular convex sets with fixed-point property for nonexpansive mappings. In *Colloquium Mathematicum* 2(40), 259-264.
- [13] Kaczor, W., & Prus, S. (2004). Fixed point properties of some sets in l^1 . In *Proceedings of the International Conference on Fixed Point Theory and Applications*, 11p.
- [14] Kızmaz, H. (1981). On certain sequence spaces. *Canadian mathematical bulletin*, 24(2), 169-176.
- [15] Kirk, W. A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. *The American mathematical monthly*, 72(9), 1004-1006.
- [16] Lin, P. K. (2008). There is an equivalent norm on ℓ^1 that has the fixed point property. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 68(8), 2303-2308.
- [17] Linares, C. A. H. (2011). *Propiedad de punto fijo, normas equivalentes y espacios de funciones no-conmutativos* (Doctoral dissertation, Universidad de Sevilla).

- [18] Hernández-Linares, C. A., & Japón, M. A. (2012). Renormings and fixed point property in non-commutative L_1 -spaces II: Affine mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(13), 5357-5361.
- [19] Nezir, V., & Güven, A. (2021). A Large Class in Köthe-Toeplitz Duals of Generalized Cesàro Difference Sequence Spaces with Fixed Point Property for Affine Asymptotically Nonexpansive Mappings, submitted.
- [20] Nezir, V., & İlgar, S. (2021). A Large Class in Köthe-Toeplitz Duals of Cesàro Difference Sequence Spaces with Fixed Point Property for Asymptotically Nonexpansive Mappings. *Journal of Scientific and Engineering Research*, 8(10), 117-124.
- [21] Nezir, V., & Oymak, M. (2021). On Lebesgue-like Corresponding Function Space of a Köthe-Toeplitz Dual of a Generalized Cesàro Difference Sequence Space and Fixed Point Property. *Journal of Scientific and Engineering Research*, 8(11), 75-81.
- [22] NgPeng-Nung, N. N., & LeePeng-Yee, L. Y. (1978). Cesàro sequence spaces of nonabsolute type. *Commentationes mathematicae*, 20(2), 429–433.
- [23] Orhan, C. (1983). Casaro Difference Sequence Spaces and Related Matrix Transformations. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 32, 55-63.
- [24] Schauder, J. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktional-raumen. *Studia math.*, 2, 171-180.
- [25] Shiue, J. S. (1970). On the Cesaro sequence spaces. *Tamkang J. Math*, 1(1), 19-25.

- [26] Tripathy, B. C., Esi, A., & Tripathy, B. (2005). On new types of generalized difference Cesaro sequence spaces. *Soochow Journal of Mathematics*, 31(3), 333-340.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Muhammed OYMAK
Yabancı Dili : Orta derece İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kars Anadolu Lisesi-2003
Lisans : İstanbul Üniversitesi-2008
Yüksek Lisans : Kafkas Üniversitesi-2022

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : İstanbul Avcılar Final Dershanesi 2009-2010
Kars Alparslan Lisesi 2010-2013
Kars Harakani Anadolu Lisesi 2013-güncel