T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Yunus KURAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan

Şubat, 2022

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Yunus KURAL tarafından hazırlanan tez çalışması 07.02.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Özgür Yıldırım, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Dr. Öğr. Üyesi Meltem Uzun, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi ____________________

Danışmanım Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Analitik Çözüm Yöntemleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Yunus KURAL

İmza

Aileme

ve Züleyha ablama İthafen

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında bana daima yol gösterici olan, kıymetli bilgi, tecrübe ve birikimlerini benimle paylaşan, her zaman insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim ve tecrübelerinden yararlanırken hiçbir zaman hoşgörü, sabır ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan'a sonsuz saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle daima yanımda olan ailem ve yakın arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Yunus KURAL

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ÖZET

Kesirli Diferansiyel Denklemler İçin Analitik Çözüm Yöntemleri

Yunus KURAL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde kesirli analiz kavramı, kesirli analizin tarihi, kesirli analiz çeşitleri ve literatürdeki kesirli diferansiyel denklemlere uygulanan çözüm yöntemleriyle ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, beta türevin tanımı verilmiştir ve bazı temel özelliklerine değinilip eliptik fonksiyonlar hakkında bilgilendirme yapılmıştır. Ana bölüm olarak üçüncü bölümde ise uzay-zaman kesirli modifiye edilmiş Benjamin Bona Mahony denkleminin ve lineer olmayan zaman kesirli Schrödinger denkleminin beta türevi ile tam çözümlerini oluşturmak için F-genişleme yöntemini kullanılarak bir analiz verilmiştir. Ayrıca, beta türevi ile kesirli genelleştirilmiş reaksiyon duffing modelin tam çözümünü elde etmek için Kudryashov methoduyla bir çözüm sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Beta türev, kesirli kısmi diferansiyel denklemler, seyahat eden dalga denklemi

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTION METHODS FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yunus KURAL

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan

This thesis study consists of three main chapters. In the first chapter; fractional concept of derivative, history of fractional derivative, types of fractional derivatives and some solution methods applied to fractional differential equations are given . In the second chapter, the definition of beta derivative and some of its basic properties are mentioned then are given information some elliptic functions. As the main part in the third chapter, an analysis is given using the F-expansion method to create exact solutions of the space-time fractional modified Benjamin Bona Mahony equation and the nonlinear time fractional Schrödinger equation with beta derivative. Also, a solution presents with the Kudryashov method to obtain the exact solution of the fractional generalized reaction duffing model with the beta derivative.

Keywords: Beta derivative, fractional partial differential equations, travelling wave solutions.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

Kesirli analiz kavramı, türev ve integral kavramlarının kesirli sayılara genelleştirilmesiyle ortaya çıkmış bir kavramdır. Bilinen standart analizin aksine tek bir tane kesirli türev veya kesirli integral tanımı yoktur. Son zamanlarda kesirli analiz kavramı mühendislikte ve fizikte son derece önemli bir yere sahip olmuştur. Reoloji, olasılık, istatistik, korozyon elektrokimyası, akışkan akışı, dinamik sistemler gibi farklı uygulama sahalarında karşılaşılmaktadır. Bununla birlikte, yakınlarda çok önemli bir konu olsa da kesirli analizin temelleri 17. yüzyılın başlarında görülmektedir. L'Hôpital ve Leibniz'in aralarında geçen mektup haberleşmelerinde konu üzerinde çalışılmıştır. Leibniz'in $t \in N$ için herhangi bir f(x) fonksiyonunda t. mertebeden türev için $\frac{d^t y}{dx^t}$ notasyonunu buluşunun ardından L'Hôpital Leibniz'e "$t = \frac{1}{2}$ olduğunda ne olur?" sorusuyla ilk defa kesirli analiz düşüncesi ele alınmıştır. (Kilbas, Srivastava, Trujillo 2006).

Euler 1738'de x^a kuvvet fonksiyonlu $\frac{d^t x^a}{dx^t}$ türevinin t tamsayı değilken anlamlı olduğunu farketmiştir. Ondan sonra Laplace, $\int T(x)t^{-x}\,dt$ integrali ile gösterilen fonksiyonlar için kesirli analiz düşüncesini tavsiye etmiştir. Lacroix'de 1819 yılında kesirli analiz konusuna 700 sayfalık "Traitédu Calcul Differential et dalcul Integral." kitabının ortalarında yer vermiştir. İlgili kısmın sonunda

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}t}{dt^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

olduğunu göstermiştir. (Kilbas, Srivastava, Trujillo 2006).

Kesirli türevler kullanılarak matematiksel olarak oluşturulabilen ve tanımlanabilen matematiksel problemlerin ve bazı fiziksel olayların analitik, sayısal kesin çözümlerinin elde edilmesi hakkında son zamanlarda birçok makale yayınlanmıştır. Bu denklemlerin çözümünde kullanılan birçok analitik ve nümerik yöntemler ise Laplace dönüşüm yöntemi (Kexue, Jigen 2011) Mellin dönüşüm yöntemi (Butera, Di Paola 2014), Adomian ayrışım yöntemi, (Y. Hu, Luo, Lu 2008; Duan et al. 2013) homotopi pertürbasyon yöntemi (J. Hu, K. Zheng, M. Zheng 2014), üstel fonksiyon yöntemi, modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi (Ege, Misirli 2014), (Guner, Aksoy, et al. 2016; Guner, Bekir 2017; Ellahi, Mohyud-Din, Khan, et al. 2018) F-Genişleme yöntemi'dir (Zhang et al. 2006).

Literatürde Jacobi eliptik fonksiyonları içeren metot kullanımının çok az olduğu görülmektedir. Bu metodun en önemli faydalarından biri çözümler hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyonların genel formunda elde edilir. Üstelik karmaşık değerli çözümler ve soliton çözümleri de bulunur.

Bu çalışmadaki amaç matematik ve fizikte önemli bir yere sahip bazı lineer olmayan uzay-zaman(modifiye edilmiş Benjamin Bona Mahony) ve zaman(Schrödinger denklemi) ve kesirli genelleştirilmiş reaksiyon duffing modeli (Fractional generalized reaction duffing modal) kesirli kısmi diferansiyel denklemler için seyahat eden dalga çözümleri(Travelling wave solutions) elde etmektir. Bunun için F-Genişleme ve Kudryashov metodu kullanılmıştır. Uzay ve zamana veya zamana bağlı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere belirli dönüşümler uygulanarak bu denklemler adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüştür. Elde edilen denklemin belirli formlarda çözümleri aranmak yoluyla cebirsel denklem sistemleri elde edilmiştir. Bu denklem sisteminin çözümüyle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin seyahat eden dalga çözümleri bulunmuştur.

2
BETA TÜREV

Kesirli türev operatorü farklı yollarla tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları, Caputo türevi (Podlubny 1998), Riemann-Liouville türevi (Minier, Peirano 2001) , Atangana-Baleanu türevi (Atangana, Baleanu 2016), Caputo-Fabrizro (Caputo 2020), Jumarie'nin modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevidir (Jumarie 2006). Günümüzde Riemann-Liouville ve Caputo tanımları çalışmalarda sık sık kullanılmaktadır. Ancak bu türev tanımlarından Riemann-Liouville türevinde mertebe doğal sayı değilken sabit fonksiyonun türevi "0" olmamaktadır. Çoğu kesirli türev tanımı, fonksiyonların çarpım ve bölüm türevi kuralını, bileşke fonksiyonlarda zincir kuralını gerçeklememektedir. Üstelik, Caputo türevinde bir fonksiyonun türevlenebilir olması koşulu da mevcuttur. Buna benzer durumların var olmasından ve bu tanımların bu tarz zorluklarından dolayı uyumlu türev adı verilen ve Khalil ve diğ. tarafından yeni bir kesirli türev (Khalil et al. 2014) tanımlanmıştır. Daha sonra bu türev kullanılarak zaman-ısı diferansiyel denkleminin tam çözümü elde edilmiştir (Cenesiz, Kurt 2014). Ayrıca Atangana ve arkadaşları uyumlu türev hakkında bazı tanım, teorem ve özellikleri ortaya koymuşlardır (Atangana, Baleanu, Alsaedi 2015). Sonunda, Atangana ve arkadaşları tarafından beta-türevi olarak adlandırılan kesirli bir türevin yeni bir tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$ {}^{A}D_{\omega}^{\beta}\{F(\omega)\} = \lim_{\gamma \to 0} \frac{F[\omega + \gamma(\omega + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}] - F(\omega)}{\gamma} \tag{2.1} $$

Bu türevin bazı önemli özellikleri şu şekildedir (Yepez-Martinez, Gomez-Aguilar, Atangana 2018):

(i) ${}^{A}D_{\omega}^{\beta}(a_0F(\omega) + a_1G(\omega)) = a_0{}^{A}D_{\omega}^{\beta}F(\omega) + a_1{}^{A}D_{\omega}^{\beta}G(\omega), \quad \forall a_0, a_1 \in R$.

(ii) ${}^{A}D_{\omega}^{\beta}(c_0) = 0, \quad \forall c_0 \in R,$

(iii) ${}^{A}D_{\omega}^{\beta}(F(\omega).G(\omega)) = G(\omega){}^{A}D_{\omega}^{\beta}(F(\omega)) + F(\omega){}^{A}D_{\omega}^{\beta}(G(\omega))$

$(iv) \quad {}^{A}D_{\omega}^{\beta}(F(\omega)/G(\omega)) = \frac{G(\omega)^{A}D_{\omega}^{\beta}(F(\omega)) - F(\omega)^{A}D_{\omega}^{\beta}(G(\omega))}{[G(\omega)]^2}, \quad (G \neq 0)$

Burada F ve G iki β diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\beta \in (0,1]$'dir. (2.1) tanımını dikkate alarak ve $\gamma = (\omega + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{\beta-1}.h_0$ ve $h_0 \to 0$, $\gamma \to 0$ hesaba katarak aşağıdaki gibi başka bir özellik bulunabilir (Atangana 2015).

$$ {}^{A}D_{\omega}^{\beta}(F(\omega)) = \left(\omega + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \frac{dF(\omega)}{d\omega} \tag{2.2}$$

Kabul edelim ki F(ω), β-diferansiyellenebilir ve

$$\mu(\omega) = \frac{k_0}{\beta}\left(\omega + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}, \quad k_0 \in R \tag{2.3}$$

olsun. Böylece aşağıdaki bağıntı elde edilebilir,

$$ {}^{A}D_{\omega}^{\beta}(F(\mu)) = k_0 \frac{dF(\mu)}{d\mu} \tag{2.4}$$

2.1 Jacobi Eliptik Fonksiyonlar

Eliptik fonksiyonlar ile elips arasındaki ilişki matematiksel olarak oldukça zayıf olmasına rağmen, elipslerin bu fonksiyonların ortaya çıkmalarına neden olduklarından iki kavram arasında tarihi bir ilişki vardır. İlk defa 1655-1659 yılları arasında John Wallis'in konikleri incelerken bir elipsin çevresini hesaplama isteği sonucunda eliptik integraller denen integraller ortaya çıkmıştır. Euler, 1753 yılında bu integraller için toplam formüllerini ortaya çıkarmıştır. Legendre, uzun yıllar yaptığı çalışmalar sonucunda günümüzde de kullanılmakta olan eliptik fonksiyonların normal formlarını oluşturmuştur. Daha sonra Jacobi tarafından 1828'de eliptik fonksiyonlar eliptik integraller'in tersi olarak tanımlanmıştır.

Bu fonksiyonlar, birinci tür eliptik integrallerin tersinin alınmasıyla oluşurlar. n eliptik modül ve $\alpha = gen(\beta) = gen(\beta, n)$ eliptik genlik olmak üzere, birinci tür eliptik integral

$$\beta = F(\alpha, n) = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 x}} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada α ve β karmaşık değişkenler ve β, $t = \sin\alpha$'nin çok değişkenli fonksiyonudur. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ve n^2 karmaşık sayı olmak üzere,

$A(n) = K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-n^2 sin^2 x}}$

$iA'(n) = iK' = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-(n')^2 \sin^2 x}}$

birinci tür tam eliptik elde edilir ve yukarıdaki gibi gösterilir. Burada A ve A' reel sayı, A reel çeyrek periyot, iA' sanal çeyrek periyot ve $n' = \sqrt{1-n^2}$ ise tamamlayıcı modül olarak isimlendirilir (Erdelyi et al. 1953; Abramowitz, Stegun 1972).
$0 \leq n \leq 1$ için $\alpha = F^{-1}(\beta, n)$ eşitliği kullanılarak aşağıdaki fonksiyonlar elde edilmiştir ve Temel Jacobi eliptik fonksiyonları olarak isimlendirilmiştir.

$$\begin{aligned} sn(\beta) = sn(\beta, n) = \sin\alpha, \\ cn(\beta) = cn(\beta, n) = \cos\alpha, \\ cn(\beta) = cn(\beta, n) = \sqrt{1-n^2\sin\alpha^2} = \sqrt{1-n^2 sn\beta^2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.6) kullanılarak şu değerler bulunabilir:

$$sn(0) = 1,\ cn(0) = 1,\ dn(0) = 1,$$
$$sn(K) = 1,\ cn(K) = 1,\ dn(K) = n' = \sqrt{1-n^2}$$

Arthur Carley 1895 yılında sn'yi sinüs, cn ve dn'yi ise cosinüs fonksiyonunun bir çeşidi olarak ifade etmiştir.
Glaisher, temel eliptik fonksiyonların çarpma işlemine göre terslerini ve oranlarını alıp aşağıdaki fonksiyonları ortaya çıkarmıştır. (Erdelyi et al. 1953).

$$\begin{aligned} sd(\beta) = \frac{sn(\beta)}{dn(\beta)}, \quad cd(\beta) = \frac{cn(\beta)}{dn(\beta)}, \quad nd(\beta) = \frac{1}{dn(\beta)} \\ sc(\beta) = \frac{sn(\beta)}{cn(\beta)}, \quad nc(\beta) = \frac{1}{cn(\beta)}, \quad dc(\beta) = \frac{dn(\beta)}{cn(\beta)} \\ ns(\beta) = \frac{1}{sn(\beta)}, \quad cs(\beta) = \frac{cn(\beta)}{sn(\beta)}, \quad ds(\beta) = \frac{dn(\beta)}{sn(\beta)} \end{aligned}$$

Jacobi eliptik fonksiyonları $n = 0$ ve $n = 1$ durumunlarında trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlara dönüşmektedir. $n = 0$ halinde $\alpha = \beta$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} sn(\beta, 0) = \sin\beta, \\ cn(\beta, 0) = \cos\beta \\ dn(\beta, 0) = 1, \\ K(0) = \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

bulunur. $n = 1$ ve $\pi/2 < \alpha < \pi/2$ halinde $\beta = \int_0^\alpha \sec x dx = \ln|\sec\alpha + \tan\alpha|$ olur.

Buradan

$$e^{\beta} = \sec\alpha + \tan\alpha = \frac{1+sin\alpha}{\cos\alpha}$$

elde edilir. Buradan da

$$e^{2\beta} = \frac{1+sin\alpha}{1-sin\alpha}$$

olur. Bu eşitlik $\sin\alpha$ için çözülürse $\sin\alpha = \tanh\beta$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} sn(\beta,1) &= \tanh\beta, \\ dn(\beta,1) &= sech\beta, \\ cn(\beta,1) &= sech\beta, \\ K(1) &= \infty \end{aligned}$$

elde edilir (Armitage, Eberlein 2006).

3
BAZI DOĞRUSAL OLMAYAN KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, beta türevi ile tanımlanan kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri verilecektir. Bunun için F-Genişletme ve modifiye edilmiş Kudryashov yöntemleri tanıtılıp uygulamalar yapılacaktır.

3.1 F-Genişleme Metodu

İki reel değişken x ve t'nin bir fonksiyonu için bir beta türevi ile uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemini şu şekilde ele alalım:

$$H(p, {}^{A}D_{t}^{\beta}p, {}^{A}D_{x}^{\beta}p, {}^{A}D_{t}^{2\beta}p, {}^{A}D_{x}^{2\beta}p, ...) = 0, \quad (0 < \beta \leq 1) \tag{3.1}$$

Adım1: İlk olarak, (3.1) diferansiyel denklemini adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için k ve c keyfi sabitler olmak üzere aşağıdaki seyahat eden dalga dönüşümü uygulanır.

$$p(x,t) = U(\epsilon)$$

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{c}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}, \tag{3.2}$$

(3.2) denklemi yerine konulup, (2.1) ve (3.1)'e uygulanarak, doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denklem şu şekilde elde edilir:

$$N(U, \frac{dU}{d\epsilon}, \frac{d^2U}{d\epsilon^2}, ..) = 0 \tag{3.3}$$

Adım2: a_0 ve a_i,b_i (i=1,2,..,M) belirlenmiş sabitler olmak üzere (3.3) adi diferansiyel denkleminin U(ϵ) çözümünün şu şekilde tanımlanabileceğini kabul edelim:

$$U(\epsilon) = a_0 + \sum_{i=1}^{M} \Big(a_i K^i(\epsilon) + \frac{b_i}{K^i(\epsilon)} \Big) \tag{3.4}$$

f_2, f_1 ve f_0 sabitler olmak üzere K(ϵ) bu adi diferansiyel denklemin çözümüdür.

$$[K'(\epsilon)]^2 = f_2[K(\epsilon)]^4 + f_1[K(\epsilon)]^2 + f_0 \tag{3.5}$$

M, (3.3) denkleminin, en yüksek dereceli lineer olmayan terimlerle en yüksek mertebeli türev terimleri ile belirlenebilen pozitif bir tam sayıdır.

Adım3: (3.4) denklemini (3.5) denklemiyle (3.3) denkleminde yerine koyarak ve $K^j(\epsilon)$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ katsayılarını toplayarak, a_0, a_i, b_i $(i = 1, 2, ..., M)$ 'den oluşan bir dizi belirli cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemleri çözerek, bu parametreler açıkça belirlenebilir.

Adım4: (3.5) denklemi Tablo 3.1'deki m Jacobi eliptik fonksiyon çözümlerine sahip olur.

Tablo 3.1 Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri

Durum	f_0	f_1	f_2	K
1	1	$-(1+m^2)$	m^2	$sn(\mu)$ veya $cd(\mu)$
2	$1-m^2$	$-(1+m^2)$	m^2	cn(μ)
3	m^2-1	$2-m^2$	-1	dn(μ)
4	m^2	$-(1+m^2)$	1	ns(μ) veya dc(μ)
5	$-m^2$	$(2m^2-1)$	$1-m^2$	nc(μ)
6	-1	$2-m^2$	$-(1-m^2)$	nd(μ)
7	1	$2-m^2$	$1-m^2$	sc(μ)
8	1	$2m^2-1$	$1-m^2$	sc(μ)
9	$1-m^2$	$2-m^2$	1	cs(μ)
10	$-m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	ds(μ)
11	$\frac{1-m^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{-1}{4}$	nc(μ)$\pm$ sc(μ) veya $\frac{cn(\mu)}{1\pm sn(\mu)}$
12	$\frac{-(1-m^2)^2}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{-1}{4}$	mcn(μ)$\pm$ dn(μ)
13	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{sn(\mu)}{1\pm cn(\mu)}$
14	$\frac{1}{4}$	$\frac{1+m^2}{2}$	$\frac{(1-m^2)^2}{4}$	$\frac{sn(\mu)}{cn(\mu)\pm dn(\mu)}$

Table (3.1)'de, sn(ϵ)=sn(ϵ,m), cd(ϵ) = cd(ϵ,m), cn(ϵ)=cd(ϵ,m), dn(ϵ)=dn(ϵ), ns(ϵ)=ns(ϵ,m), cs(ϵ)=cs(ϵ,m), ds(ϵ)=ds(ϵ,m), sc(ϵ)=sc(ϵ,m), sd(ϵ)=sd(ϵ,m) $0 \leq m \leq 1$ modulüne göre Jacobi elliptic fonksiyonlarıdır . Bu fonksiyonlar, Tablo (3.2)'de gösterildiği gibi m→0 ve m→1 olduğunda hiperbolik fonksiyonlara dönüşür:

Tablo 3.2 m→0 ve m→1 durumunda dönüştüğü trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar

m→0	m→1
sn(ϵ)=sin(ϵ)	sn(ϵ)=tanh(ϵ)
cd(ϵ)=cos(ϵ)	cn(ϵ)=$sech(\epsilon)$
cn(ϵ)=cos(ϵ)	dn(ϵ)=$sech(\epsilon)$
ns(ϵ)=csc(ϵ)	ns(ϵ)=coth(ϵ)
cs(ϵ)=cot(ϵ)	cs(ϵ)=$csch(\epsilon)$
ds(ϵ)=csc(ϵ)	ds(ϵ)=$csch(\epsilon)$
sc(ϵ)=tan(ϵ)	sc(ϵ)=sinh(ϵ)
sd(ϵ)=sin(ϵ)	sd(ϵ)=sinh(ϵ)
ns(ϵ)=sec(ϵ)	ns(ϵ)=cosh(ϵ)
dn(ϵ)=1	cd(ϵ)=1

Adım 5: 3. adımda bulunan parametreleri ve 4. adımda bilinen değerleri denklem (3.4)'te değiştirerek, (3.1) denkleminin çözümleri bulunur.

3.2 F-Genişleme Metodu'nun Beta Türevli Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Bu bölümde , beta türevli uzay-zaman kesirli değiştirilmiş Benjamin Bona Mahony denkleminin tam çözümleri ve lineer olmayan zaman kesirli Schrödinger denklemi F-Genişletme yöntemi ile incelenip tam çözümleri elde edilecektir.

3.2.1 Uygulama 1

Birçok değişik fiziksel yöntemlerin çözümünde kullanılan uzay-zaman kesirli modifiye edilmiş Benjamin Bona Mahony denklemini ele alalım (Yepez-Martinez, Gomez-Aguilar, Atangana 2018).

$$^{A}D_t^{\beta} p + {}^{A}D_x^{\beta} p - ap^{2A}D_x^{\beta} p + {}^{A}D_x^{3\beta} p = 0, \quad 0 < \beta \leq 1, \tag{3.6}$$

Kabul edelim ki (3.6) denkleminin seyahat eden dalga çözümü şu şekilde bir forma sahip olsun :

$$p(x,t) = U(\epsilon), \quad \epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{c}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}, \tag{3.7}$$

(3.7) denklemi, (3.6) denkleminde yerine konulursa,

$$-c\frac{dU}{d\epsilon}+k\frac{dU}{d\epsilon}-akU^2\frac{dU}{d\epsilon}+k^3\frac{d^3U}{d\epsilon^3}=0 \tag{3.8}$$

adi deferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin integral sabiti göz ardı edilerek ϵ'a göre integrali alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$k^3\frac{d^2U}{d\epsilon^2}+(k-c)U-\frac{ak}{3}U^3=0 \tag{3.9}$$

(3.9) denkleminde $\frac{d^2U}{d\epsilon^2}$ ve $U^3(\epsilon)$ arasında dengeleme ilkesi kullanılarak, yani $3M = M+2$ ile, $M = 1$ bulunur. Böylece, (3.4)'ten (3.9) denkleminin çözümü, a_0,a_1,b_1 belirlenmiş sabitler ve K(ϵ) (3.5)'teki eliptik denklem olmak üzere aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$U(\epsilon)=a_0+a_1K(\epsilon)+\frac{b_1}{K(\epsilon)}, \tag{3.10}$$

(3.10) ve (3.5)'i (3.9)'ta yerine yazılırsa, K(ϵ) içinde altıncı dereceden polinom bulunur. K(ϵ)'nin tüm katsayılarını sıfıra eşitleyerek, aşağıdaki doğrusal olmayan denklem sistemi bulunur.

$$\begin{gathered}
2k^3f_2a_1-\frac{ak}{3}a_1^3=0\\
-aka_0a_1^2=0\\
k^3f_1a_1+(k-c)a_1-aka_0^2a_1-aka_1^2b_1=0\\
(k-c)a_0-\frac{ak}{3}a_0^3-2aka_0a_1b_1=0\\
k^3f_1b_1+(k-c)b_1-aka_0^2b_1-aka_1b_1^2=0\\
-aka_0b_1^2=0\\
2k^3f_0b_1-\frac{ak}{3}b_1^3=0
\end{gathered}$$

Bu sistem Maple yardımıyla çözülerek, bilinmeyen katsayılar için aşağıdaki üç çözüm kümesi elde edilir.

set 1	set 2	set 3
$c=f_1k^3+k$	$c=f_1k^3+k\pm 6k^3\sqrt{f_2f_0}$	$c=f_1k^3+k$
$a_0=0$	$a_0=0$	$a_0=0$
$a_1=\pm\sqrt{6\frac{f_2}{a}}k$	$a_1=\pm\sqrt{6\frac{f_2}{a}}k$	$a_1=0$
$b_1=0$	$b_1=\pm\sqrt{6\frac{f_0}{a}}k$	$b_1=\pm\sqrt{6\frac{f_0}{a}}k$
(*)	(**)	(***)

(*)-(***)'yi (3.10)'da (3.7) ile yerine konulursa, (3.6) denklemi için aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$P_{s_1}(x,t) = \pm\sqrt{6\frac{f_2}{a}}kK(\epsilon); \tag{3.11}$$

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{f_1k^3+k}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}$$

$$P_{s_2}(x,t) = \pm\sqrt{6\frac{f_2}{a}}K(\epsilon) \pm \sqrt{6\frac{f_0}{a}}K^{-1}(\epsilon); \tag{3.12}$$

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{k^3f_1+k\pm 6k^3\sqrt{f_0.f_2}}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}$$

$$P_{s_3}(x,t) = \pm\sqrt{6\frac{f_0}{a}}kK^{-1}(\epsilon); \tag{3.13}$$

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{f_1k^3+k}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}$$

(3.11-3.13)'ü Tablo (3.1) ve Tablo (3.2) ile birleştirerek, (3.6)'nın kesin çözümleri elde edilir. Bunlardan bazılarını set 1 için aşağıda ifade edelim:

<u>Durum 1</u>:

$f_2 = m^2$, $\quad f_1 = -(1+m^2)$, $\quad f_0 = 1$, $\quad K(\epsilon) = sn(\epsilon)$, $\quad U_1(\epsilon) = \pm\sqrt{6\frac{m^2}{a}}ksn(\epsilon)$;

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{k^3(-1+m^2)+k}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} \tag{3.14}$$

$m \to 1$'e giderken, (3.6) denkleminin tam çözümü şu şekildedir.

$$P_1(x,t) = \pm\sqrt{\frac{6}{a}}k\tanh(\epsilon); \quad \epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{k}{\beta}\Big(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} \quad (0<a) \tag{3.15}$$

Durum 2:

$f_2 = -m^2, \quad f_1 = 2m^2 - 1, \quad f_0 = 1 - m^2, \quad K(\epsilon) = cn(\epsilon), \quad U_2(\epsilon) = \pm\sqrt{6\frac{-m^2}{a}}kcn(\epsilon);$

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{k^3(2m^2-1)+k}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} \tag{3.16}$$

$m \to 1$'e giderken ise (3.6) denkleminin tam çözümü şu şekildedir.

$$P_2(x,t) = \pm\sqrt{\frac{-6}{a}}ksech(\epsilon); \quad \epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{k^3+k}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}, \quad (a<0) \tag{3.17}$$

Durum 5:

$f_2 = 1 - m^2, \quad f_1 = 2m^2 - 1, \quad f_0 = -m^2, \quad K(\epsilon) = nc(\epsilon), \quad U_5(\epsilon) = \pm\sqrt{6\frac{1-m^2}{a}}knc(\epsilon);$

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{k^3(2m^2-1)+k}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} \tag{3.18}$$

$m \to 0$'e giderken, (3.6) denkleminin tam çözümü şu şekildedir.

$$P_5(x,t) = \pm\sqrt{\frac{6}{a}}k\sec(\epsilon); \quad \epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{-k^3+k}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} \tag{3.19}$$

Durum 9:

$f_2 = 1, \quad f_1 = 2 - m^2, \quad f_0 = 1 - m^2, \quad K(\epsilon) = cs(\epsilon), \quad U_9(\epsilon) = \pm\sqrt{\frac{6}{a}}kcs(\epsilon);$

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{k^3(2-m^2)+k}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} \tag{3.20}$$

$m \to 1$'e giderken, (3.6) denkleminin tam çözümü şu şekildedir.

$$P_{9a}(x,t) = \pm\sqrt{\frac{6}{a}}kcsch(\epsilon); \quad \epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{k^3+k}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}, \tag{3.21}$$

$m \to 0$'e giderken, (3.6) denkleminin tam çözümü şu şekildedir.

$$P_{9b}(x,t) = \pm\sqrt{\frac{6}{a}}k\cot(\epsilon); \quad \epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{2k^3+k}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} \tag{3.22}$$

Kalan çözümler de benzer şekilde bulunabilir.

3.2.2 Uygulama 2

Doğrusal olmayan zaman kesirli Schrödinger denklemini ele alalım. Bu denklem, zamana göre değişiklik gösteren kuantum hallerinin niteliklerini ifade etmek için bir model olarak kullanılan ve kuantum mekaniğinde türetilen bir evrim denklemidir (Zayed, Al-Nowehy 2018).

$$i^{A}D_t^{\beta}\{p\} + ap_{xx} + b \mid p \mid^2 p = 0, \quad 0 < \beta \leq 1, \tag{3.23}$$

Burada p(x,t) kompleks değerli bir fonksiyonudur. (3.23)'ün seyahat eden dalga çözümü elde edilip aşağıdaki gibi bir dönüşüm uygulanır:

$$p(x,t) = U(\epsilon).e^{i\varphi}, \quad \epsilon = kx - \frac{2cv}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}, \quad \varphi = \omega x + \frac{v}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} \tag{3.24}$$

Burada k, c, v ve ω sabitlerdir. (3.24) denklemi (3.23)'de yerine koyulursa

$$i\Big(-2cv\frac{dU}{d\epsilon} + 2ak\omega\frac{dU}{d\epsilon}\Big) + ak^2\frac{d^2U}{d\epsilon^2} - (v + a\omega^2)U(\epsilon) + bU^3(\epsilon) = 0 \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.25) adi diferansiyel denkleminin sanal kısmının sıfıra eşitlenmesiyle,

$$c = \frac{ak\omega}{v} \tag{3.26}$$

denklemi elde edilir. Reel kısmın sıfıra eşitlenmesiyle de,

$$aK^2\frac{d^2U}{d\epsilon^2} - (v + aw^2)U(\epsilon) + bU^3(\epsilon) = 0 \tag{3.27}$$

$\frac{d^2U}{d\epsilon^2}$ ve $U^3(\epsilon)$ arasında dengeleme prensibi kullanılarak , $M = 1$,($3M = M+2$) bulunur. Bu nedenle çözüm, a_0, a_1, b_1 tanımlanmış sabitler ve K(ϵ) eliptik fonksiyona karşılık gelmek üzere, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U(\epsilon) = a_0 + a_1K(\epsilon) + \frac{b_1}{K(\epsilon)}, \tag{3.28}$$

(3.28) ve (3.5)'i (3.27)'de yerine koyarak, K(ϵ) cinsinden altıncı dereceden polinom elde edilir. Bu polinomda tüm katsayıları sıfıra eşitleyerek aşağıdaki doğrusal olmayan sistem denklemleri elde edilir.

$$
\begin{gathered}
2ak^2a_1f_2 + ba_1^3 = 0 \\
3a_0a_1^2b = 0 \\
ak^2f_1a_1 - ak^2(v + a\omega^2)a_1 + 3a_0^2a_1b + 3a_1^2b_1b = 0 \\
-ak^2(v + aw^2)a_0 + ba_0^3 + 6a_0a_1b_1b = 0 \\
ak^2f_1b_1 - ak^2(v + a\omega^2)b_1 + 3a_0^2b_1b + 3a_1b_1^2b = 0 \\
3a_0b_1^2b = 0 \\
2ak^2f_0b_1 + b_1^3b = 0
\end{gathered}
$$

Bu sistemi Maple yardımıyla çözerek, bilinmeyen katsayılar için aşağıdaki üç çözüm kümesini elde edebiliriz.

set 1	set 2	set 3
$a_0 = 0$	$a_0 = 0$	$a_0 = 0$
$a_1 = \pm\sqrt{\frac{-2f_2}{b}}k$	$a_1 = \pm\sqrt{\frac{-2f_2}{b}}k$	$a_1 = 0$
$b_1 = 0$	$b_1 = \pm\sqrt{\frac{-2f_0}{b}}k$	$\pm\sqrt{6\frac{f_0}{b}}k$
$c = c$	$c = c$	$c = c$
$v - a\omega^2 + f_1$	$v = \pm 6\sqrt{f_0f_2} - a\omega^2 + f_1$	$v = -a\omega^2 + f_0$
(*)	(**)	(***)

(*)-(***) çözüm kümesi, (3.28) denklemine (3.24) denklemi ile yerine konulursa, denklem (3.23) için aşağıdaki tam çözümler elde edilir:

$$P_{s_1}(x,t) = \Big[\pm\sqrt{\frac{-2f_2a}{b}}kK(\epsilon)\Big]e^{i\Big[wx + \frac{a\omega^2+f_1}{\beta}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\Big]}; \tag{3.29}$$

$$\epsilon = kx - 2a\frac{k\omega}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}$$

$$P_{s_2}(x,t) = \Big[\pm\sqrt{2\frac{f_2a}{b}}kK(\epsilon) \pm \sqrt{2\frac{f_0a}{a}}kK^{-1}(\epsilon)\Big]e^{i\Big[wx + \frac{\pm 6\sqrt{f_2f_0} - a\omega^2 + f_1}{\beta}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}\Big]}; \tag{3.30}$$

$$\epsilon = kx - \frac{2ak\omega}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}$$

$$P_{s_3}(x,t)=\Big[\pm\sqrt{2\frac{f_0}{b}kK^{-1}(\epsilon)}\Big]e^{i\Big[wx+\frac{-a\omega^2+f_1}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}\Big]} \tag{3.31}$$

;

$$\epsilon=kx-\frac{2ak\omega}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}$$

(3.29)-(3.31) Tablo (3.1) ve Tablo (3.2) ile birleştirilerek, (3.23) denkleminin tam çözümü bulunur. Set 1 için bazı çözümleri aşağıda tanımlayalım:

Durum 1

$$f_2=m^2,\quad f_1=-(1+m^2),\quad f_0=1,\quad K(\epsilon)=sn(\epsilon),\quad U_2(\epsilon)=\pm\sqrt{-2a\tfrac{m^2}{b}}ksn(\epsilon)$$

$$;\quad \varphi=i\Big[wx-\frac{a\omega^2+1+m^2}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}\Big] \tag{3.32}$$

$m\rightarrow 1$' giderken, (3.23) beta türevli zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü şöyledir:

$$P_2(x,t)=U_2(\epsilon)e^{i\varphi}=\Big[\pm\sqrt{\frac{-2a}{b}}k\tanh(\epsilon)\Big]e^{i\Big[wx-\frac{-a\omega^2+2}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}\Big]}; \tag{3.33}$$

$$\epsilon=kx-\frac{2ak\omega}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta},(ab<0)$$

Durum 4:

$$f_2=1,\quad f_1=-(1+m^2),\quad f_0=m^2,\quad K(\epsilon)=ns(\epsilon),\quad U_4(\epsilon)=\Big[\pm\sqrt{\tfrac{-2a}{b}}kns(\epsilon)\Big]$$

$$;\quad \varphi=i\Big[wx-\frac{a\omega^2+1+m^2}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}\Big] \tag{3.34}$$

$m\rightarrow 0$'a giderken, (3.23) beta türevli zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü şöyledir:

$$P_{4a}(x,t)=U_{5a}(\epsilon)e^{i\varphi}=\Big[\pm\sqrt{\frac{-2a}{b}}k\csc(\epsilon)\Big]e^{i\Big[wx-\frac{-a\omega^2+1}{\beta}\Big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}\Big]} \tag{3.35}$$

$m\rightarrow 1$' giderken, (3.23) beta türevli zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü şöyledir:

$$P_{4b}(x,t) = U_{5b}(\epsilon)e^{i\varphi} = \Big[\pm\sqrt{\frac{-2a}{b}}k\coth(\epsilon)\Big]e^{i\Big[wx - \frac{-a\omega^2+2}{\beta}\big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\big)^{\beta}\Big]} \tag{3.36}$$

Burada, $\epsilon = kx - \frac{2ak\omega}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}$, $(ab < 0)$.

<u>Durum 7</u> :

$f_2 = 1 - m^2$, $f_1 = 2 - m^2$, $f_0 = 1$, $K(\epsilon) = sc(\epsilon)$, $U_7(\epsilon) = \Big[\pm\sqrt{\frac{-2(1-m^2)a}{b}}ksc(\epsilon)\Big]$;

$$\varphi = i\Big[wx - \frac{2 - a\omega^2 - m^2}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}\Big] \tag{3.37}$$

$m \to 0$' giderken, (3.23) beta türevli zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü şöyledir:

$$U_7(x,t) = \Big[\pm\sqrt{\frac{-2a}{b}}k\tan(\epsilon)\Big]e^{i\Big[wx - \frac{2-a\omega^2}{\beta}\big(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\big)^{\beta}\Big]}; \tag{3.38}$$

$$\epsilon = kx - \frac{2ak\omega}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}, \quad (ab < 0)$$

Geriye kalan çözümler benzer şekilde bulunabilir.

3.3 Modifiye Edilmiş Kudryashov Yöntemi

Bu bölümde modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi tanıtılacaktır.

İki reel değişken x ve t'nin bir fonksiyonu için bir beta türevi ile uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyelini ele alalım:

$$H(p, {}^{A}D_t^{\beta}p, {}^{A}D_x^{\beta}p, {}^{A}D_t^{2\beta}p, {}^{A}D_x^{2\beta}p, \ldots), \quad (0 < \beta \leq 1) \tag{3.39}$$

<u>Adım1</u>: İlk olarak, (3.39) denklemini adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için k ve c keyfi sabitler olmak üzere aşağıdaki seyahat eden dalga dönüşümü kullanılmalıdır.

$$p(x,t) = U(\epsilon)$$

$$\epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{c}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}, \tag{3.40}$$

(3.40) denklemi yerine konulursa, (2.1) ve (3.39)'a uygulayarak, doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denklem şu şekilde elde edilebilir:

$$N(U, \frac{dU}{d\epsilon}, \frac{d^2U}{d\epsilon^2}, ..) = 0 \tag{3.41}$$

Adım2: Modifiye edilmiş Kudryashov metoduna göre, (3.41) denkleminin çözümü $a_i(i = 0, 1, ..., M)$ ve $a_M \neq 0$ olacak şekilde sabitler olmak üzere aşağıdaki gibi bir rasyonel formda aranacaktır.

$$u(\epsilon) = \sum_{i=0}^{M} a_i Q^i(\epsilon) \tag{3.42}$$

Ayrıca $Q = Q(\epsilon)$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$\frac{dQ}{d\epsilon} = [Q^2(\epsilon) - Q(\epsilon)] \ln a \tag{3.43}$$

adi diferansiyel denklemini sağlar. Denklem (3.43)'ün çözümü

$$Q(\epsilon) = \frac{1}{1 + Ca^{\epsilon}} \tag{3.44}$$

şeklinde elde edilir. Burada C integral sabitidir. Eğer $a = e$ alınırsa o zaman metot birçok yazar tarafından önerilen genelleştirilmiş Kudryashov metoduna indirgenir (Ryabov, Sinelshchikov, Kochanov 2011; Hubert et al. 2014; Raslan, El-Danaf, Ali 2017).

Adım 3: Denklem (3.42)'deki M , homojen denge yöntemiyle elde edilir. Yani en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimlerin derecelerinin dengelenmesiyle elde edilir.

Adım 4: Denklem (3.43) yardımıyla denklem (3.42), denklem (3.41)'te yerine yazılırsa, Q(ϵ)'da polinomlar elde edilir. Bu denklemin bütün katsayıları sıfıra eşitlenirse, cebirsel denklem sistemi elde edilir. Maple yardımıyla bu denklemin çözümünden $a_i(i = 0, 1, ..., M)$ değerleri bulunur. Denklem (3.43) ve bulunan değerler (3.42) denkleminde yerlerine yazılırsa (3.39) denkleminin (3.40)'daki ϵ ile tam çözümleri bulunur.

3.4 Kudryashov Metodu'nun Beta Türevli Kesirli Diferansiyel Denkleme Uygulaması

Bu bölümde , beta türevli zaman kesirli genelleştirilmiş reaksiyon duffing (Fractional generalized reaction duffing) tam çözümleri Kudryashov yöntemi ile incelenip tam çözümleri elde edilecektir.

3.4.1 Uyguluma

Aşağıdaki kesirli genelleştirilmiş reaksiyon duffing (Fractional generalized reaction duffing) modeli ele alalım (Eslami et al. 2014).

$$ {}^{A}D_{t}^{2\beta} p + m\,{}^{A}D_{x}^{2\beta} p + ap + bp^2 + fp^3 = 0, \quad (0 < \beta \leq 1), t > 0 \tag{3.45} $$

Burada m,a,b ve f sabit değerlerdir. $b = 0$ alınırsa (3.45) denklemi

$$ {}^{A}D_{t}^{2\beta} p + m\,{}^{A}D_{x}^{2\beta} p + ap + fp^3 = 0, \quad (0 < \beta \leq 1), t > 0 \tag{3.46} $$

kesirli lineer olmayan bir diferansiyel denkleme indirgenebilir. (3.47) diferansiyel denklemini adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için k ve c keyfi sabitler olmak üzere aşağıdaki seyahat eden dalga dönüşümü uygulanır.

$$ p(x,t) = U(\epsilon), \quad \epsilon = \frac{k}{\beta}\Big(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta} - \frac{c}{\beta}\Big(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Big)^{\beta}, \tag{3.47} $$

Böylece aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$ (c^2 + mk^2)U'' + aU + fU^3 = 0 \tag{3.48} $$

Buradan genelleştirilmiş Kudrayshov metoduna göre, (3.48) indirgenmiş denkleminde $M = 1$ $(3M = M + 2)$ elde edilir ve çözüm;

$$ U(\epsilon) = a_0 + a_1 Q \quad (a_0, a_1 \neq 0), \tag{3.49} $$

$$ U'(\epsilon) = a_1 \ln A(Q^2 - Q), \tag{3.50} $$

$$ U''(\epsilon) = a_1 (\ln A)^2 (2Q^3 - 3Q^2 + Q) \tag{3.51} $$

şeklinde aranır. Bu denklemlerin (3.48) adi diferansiyel denkleminde yerine yazılmasıyla ve Q'nun aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$
\begin{gathered}
2(c^2+mk^2)a_1(\ln A)^2 + f a_1^3 = 0 \\
-3a_1(c^2+mk^2)(\ln A)^2 + 3f a_0 a_1^2 = 0 \\
a_1(c^2+mk^2)(\ln A)^2 + a a_1 + 3f a_0^2 a_1 = 0 \\
a a_0 + f a_0^3 = 0
\end{gathered}
$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem maple yardımıyla çözülürse aşağıdaki tam çözümler elde edilir.

Durum 1:

$$
a_0 = \frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}}, \quad a_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{f}}, \quad c = \pm\frac{\sqrt{(\ln A)^2 k^2 m + 2a}}{\ln A} \tag{3.52}
$$

Sonuçlar (3.49) denkleminde yerine yazılırsa

$$
U(\epsilon) = \frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}} + 2\sqrt{\frac{-a}{f}}Q \quad (a<0) \tag{3.53}
$$

elde edilir.

Böylece, (3.46) kesirli kısmi beta türevli diferansiyel denkleminin çözümü

$$
P_1(x,t) = \frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}} + 2\sqrt{\frac{-a}{f}}\left(\frac{1}{1+dA^{\frac{k}{\beta}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} \pm \frac{\sqrt{(\ln A)^2 k^2 m+2a}}{\ln A\beta}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}}\right) \tag{3.54}
$$

olarak bulunur.

Durum 2:

$$
a_0 = -\frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}}, \quad a_1 = -2\sqrt{\frac{-a}{f}}, \quad c = \pm\frac{\sqrt{(\ln A)^2 k^2 m + 2a}}{\ln A} \tag{3.55}
$$

3.49 denkleminde yerine yazılırsa,

$$U(\epsilon) = -\frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}} - 2\sqrt{\frac{-a}{f}}Q \quad (a < 0) \tag{3.56}$$

bulunur. (3.46) kesirli kısmi beta türevli diferansiyel denkleminin çözümü

$$P_1(x,t) = -\frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}} - 2\sqrt{\frac{-a}{f}}\left(\frac{1}{1 + dA^{\frac{k}{\beta}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} \pm \frac{\sqrt{(\ln A)^2k^2m+2a}}{\ln A\beta}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}}\right) \tag{3.57}$$

olarak bulunur.

Durum 3:

$$a_0 = -\frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}}, \quad a_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{f}}, \quad c = \pm\frac{\sqrt{(\ln A)^2k^2m + 2a}}{\ln A} \tag{3.58}$$

değerleri (3.49) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U(\epsilon) = -\frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}} + 2\sqrt{\frac{-a}{f}}Q \quad (a < 0) \tag{3.59}$$

elde edilir. (3.46) kesirli kısmi beta türevli diferansiyel denkleminin çözümü

$$P_1(x,t) = -\frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}} + 2\sqrt{\frac{-a}{f}}\left(\frac{1}{1 + dA^{\frac{k}{\beta}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} \pm \frac{\sqrt{(\ln A)^2k^2m+2a}}{\ln A\beta}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}}\right) \tag{3.60}$$

şeklinde elde edilir.

Durum 4:

$$a_0 = \frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}}, \quad a_1 = -2\sqrt{\frac{-a}{f}}, \quad c = \pm\frac{\sqrt{(\ln A)^2k^2m + 2a}}{\ln A} \tag{3.61}$$

(3.49) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U(\epsilon) = \frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}} - 2\sqrt{\frac{-a}{f}}Q \quad (a < 0) \tag{3.62}$$

bulunur. (3.46) kesirli kısmi beta türevli diferansiyel denkleminin çözümü

$$P_1(x,t) = \frac{a}{f\sqrt{\frac{-a}{f}}} - 2\sqrt{\frac{-a}{f}}\left(\frac{1}{1 + dA^{\frac{k}{\beta}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} \pm \frac{\sqrt{(\ln A)^2 k^2 m + 2a}}{\ln A\beta}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}}\right) \tag{3.63}$$

olarak bulunur.

4
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, beta türevli kesirli kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için F-genişletme yöntemi ve Kudryashov methodu kullanılmıştır. Bu yöntemler, uzay-zaman kesirli değiştirilmiş Benjamin-Bona-Mahory denkleminin, doğrusal olmayan zaman kesirli Schrödinger denkleminin ve kesirli genelleştirilmiş reaksiyon duffing modelinin(fractional generalized reaction duffing) kesin çözümlerini bulmak için uygulanmıştır.

Bu çözümler sembolik hesaplama sistemi(Maple) ile doğrulanmıştır. Bu çalışma, bu iki yöntemin yeni kesin çözümler bulmak için etkili, güvenilir ve güçlü bir yol olduğunu göstermiştir. Ayrıca, bu çalışmada bulunan çözümlerin, mühendislik ve matematiksel fizik alanlarında önemli çalışma alanlarına sahip olduğu açıktır.

KAYNAKÇA

Abramowitz, Milton, Irene A Stegun (1972). “Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55. Tenth Printing.” In.

Armitage, John Vernon, William Frederick Eberlein (2006). *Elliptic functions*. Vol. 67. Cambridge University Press.

Atangana, Abdon (2015). “A novel model for the lassa hemorrhagic fever: deathly disease for pregnant women”. In: *Neural Computing and Applications* 26.8, pp. 1895–1903.

Atangana, Abdon, Dumitru Baleanu (2016). “New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model”. In: *arXiv preprint arXiv:1602.03408*.

Atangana, Abdon, Dumitru Baleanu, Ahmed Alsaedi (2015). “New properties of conformable derivative”. In: *Open Mathematics* 13.1.

Butera, Salvatore, Mario Di Paola (2014). “Fractional differential equations solved by using Mellin transform”. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19.7, pp. 2220–2227.

Caputo, Michael R (2020). “Intrinsic Comparative Statics of a Nash Bargaining Solution”. In: *Game Theoretic Analysis*. World Scientific, pp. 487–497.

Cenesiz, YUCEL, A Kurt (2014). “The solution of time fractional heat equation with new fractional derivative definition”. In: *8th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM 2014)*, pp. 195–198.

Duan, Jun-Sheng et al. (2013). “The Adomian decomposition method with convergence acceleration techniques for nonlinear fractional differential equations”. In: *Computers & Mathematics with Applications* 66.5, pp. 728–736.

Ege, Serife Muge, Emine Misirli (2014). “The modified Kudryashov method for solving some fractional-order nonlinear equations”. In: *Advances in Difference Equations* 2014.1, pp. 1–13.

Ellahi, Rahmat, Syed Tauseef Mohyud-Din, Umar Khan, et al. (2018). “Exact traveling wave solutions of fractional order Boussinesq-like equations by applying Exp-function method”. In: *Results in physics* 8, pp. 114–120.

Erdelyi, Arthur et al. (1953). “Bateman manuscript project”. In: *Higher transcendental functions* 2, p. 133.

Eslami, M et al. (2014). “Application of first integral method to fractional partial differential equations”. In: *Indian Journal of Physics* 88.2, pp. 177–184.

Guner, Ozkan, Esin Aksoy, et al. (2016). “Different methods for (3+ 1)-dimensional space–time fractional modified KdV–Zakharov–Kuznetsov equation”. In: *Computers & Mathematics with Applications* 71.6, pp. 1259–1269.

Guner, Ozkan, Ahmet Bekir (2017). “The Exp-function method for solving nonlinear space–time fractional differential equations in mathematical physics”. In: *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences* 24, pp. 277–282.

Hu, Jinsong, Kelong Zheng, Maobo Zheng (2014). “Numerical simulation and convergence analysis of a high-order conservative difference scheme for SRLW equation”. In: *Applied Mathematical Modelling* 38.23, pp. 5573–5581.

Hu, Yizheng, Yong Luo, Zhengyi Lu (2008). “Analytical solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method”. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 215.1, pp. 220–229.

Hubert, Malwe Boudoue et al. (2014). “Soliton wave solutions for the nonlinear transmission line using the Kudryashov method and the (G/G)-expansion method”. In: *Applied Mathematics and Computation* 239, pp. 299–309.

Jumarie, Guy (2006). “Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results”. In: *Computers & Mathematics with Applications* 51.9-10, pp. 1367–1376.

Kexue, Li, Peng Jigen (2011). “Laplace transform and fractional differential equations”. In: *Applied Mathematics Letters* 24.12, pp. 2019–2023.

Khalil, Roshdi et al. (2014). “A new definition of fractional derivative”. In: *Journal of computational and applied mathematics* 264, pp. 65–70.

Kilbas, Anatoli Aleksandrovich, Hari M Srivastava, Juan J Trujillo (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Vol. 204. elsevier.

Minier, Jean-Pierre, Eric Peirano (2001). “The pdf approach to turbulent polydispersed two-phase flows”. In: *Physics reports* 352.1-3, pp. 1–214.

Podlubny, Igor (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.

Raslan, KR, Talaat S El-Danaf, Khalid K Ali (2017). “Exact solution of the space-time fractional coupled EW and coupled MEW equations”. In: *The European Physical Journal Plus* 132.7, pp. 1–11.

Ryabov, Pavel N, Dmitry I Sinelshchikov, Mark B Kochanov (2011). “Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations”. In: *Applied Mathematics and Computation* 218.7, pp. 3965–3972.

Yepez-Martinez, H, JF Gomez-Aguilar, Abdon Atangana (2018). “First integral method for non-linear differential equations with conformable derivative”. In: *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* 13.1, p. 14.

Zayed, Elsayed ME, Abdul-Ghani Al-Nowehy (2018). “The 6-model expansion method for solving the nonlinear conformable time-fractional Schrödinger equation with fourth-order dispersion and parabolic law nonlinearity”. In: *Optical and Quantum Electronics* 50.3, pp. 1–19.

Zhang, Jin-Liang et al. (2006). “The improved F-expansion method and its applications”. In: *Physics Letters A* 350.1-2, pp. 103–109.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. Honory and Advisory Board: Prof. Dr. José Miguel Mateos Roco, Vice Chancellor for Research and Transfer, University of Salamanca, (Spain) Organizing Committee: Prof. Dr. Yusuf Tekin, Rector of Ankara Hacı Bayram Veli University, (Turkey) Araceli Queiruga-Dios, Salamanca University, (Spain) (Conference Chair) Fatih Yılmaz, Ankara Haci Bayram Veli University, (Turkey) (Organizing Chair) Deolinda Rasteiro, Coimbra Engineering Institute-Isec, (Portugal) Emel Karaca, Ankara Haci Bayram Veli University, (Turkey) Jesús Martin-Vaquero, Salamanca University, (Spain) María Jesús Santos Sanchez, Salamanca University, (Spain) Melek Sofyalıoğlu, Ankara Haci Bayram Veli University, (Turkey) Mücahit Akbıyık, Beykent University, (Turkey) Mustafa Özkan, Gazi University, (Turkey) Seda Yamaç Akbıyık, Istanbul Gelisim University, (Turkey) Víctor Gayoso Martinez, Spanish National Research Council, (Spain) *Exact solutions of some important nonlinear fractional partial differential equations by the F-expansion method* II. International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Enginering (Icmase 2021) 1-2 July, 2021, Universidad de Salamanca, Spain