



**LEBESGUE UZAYLARDA MULTİLİNEER
B-RIESZ DÖNÜŞÜMLERİ VE KOMÜTATÖRLERİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Züleyha Açelya ÜÇER

Kütahya - 2022

T.C.
KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

LEBESGUE UZAYLARDA MULTİLİNEER B -RİESZ
DÖNÜŞÜMLERİ VE KOMÜTATÖRLERİ

Danışman:
Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Hazırlayan:
Züleyha Açelya ÜÇER

Kütahya - 2022

KABUL VE ONAY SAYFASI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma, jürimiz tarafından

Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi	İmza	
	Kabul	Red
Prof.Dr. İsmail EKİNCİOĞLU (Danışman)		
Prof.Dr. Elçin YUSUFOĞLU		
Dr. Öğr. Üyesi Cansu KESKİN		

Onay

Prof. Dr. Şahmurat ARIK
Enstitü Müdürü

Bilimsel Etik Bildirimi

Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığım "Lebesgue Uzaylarda Multilineer B -Riesz Dönüşümleri ve Komütatörleri" adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlandığı aşamaya kadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığıma, bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

21/01/2022

Züleyha Açelya ÜÇER

ÖZET
LEBESGUE UZAYLARDA MULTİLİNEER B -RIESZ
DÖNÜŞÜMLERİ VE KOMÜTATÖRLERİ

ÜÇER, Züleyha Açelya

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Ocak, 2022,67 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk olarak giriş kısmına yer verilmiştir. Birinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, Lebesgue ve BMO uzayları takdim edilmiştir. Üçüncü bölüm, genelleştirilmiş öteleme operatörü ve temel özelliklerini içermektedir. Dördüncü bölüm, tezin orijinal sonuçlarını içeren kısımdır. Ayrıca bu bölümde, multilineer B -maksimal operatörü tanıtılarak multilineer B -Riesz dönüşümleri ve komütatörlerinin Lebesgue uzaylarda sınırlılığı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: BMO uzaylar, genelleştirilmiş öteleme operatör, komütatörler, Lebesgue uzaylar, multilineer B -maksimal operatör, multilineer B -Riesz dönüşümler.

ABSTRACT
MULTILINEAR B -RIESZ TRANSFORMS AND ITS
COMMUTATORS ON LEBESGUE SPACES

ÜÇER, Züleyha Açelya

M.Sc. Thesis, Department Of Mathematics

Thesis Supervisor : Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

January,2022,67 pages

This thesis consists of five chapters. The first is devoted to brief introduction to the study. In the first chapter, basic definitions and theorems necessary for our study are given. In second chapter, the definitions of Lebesgue spaces and BMO spaces are presented. The third chapter includes the generalized translation operator and its basic properties. In the final chapter, by defining of B -maximal operators, the boundedness of the multilinear B -Riesz transforms and its commutators are obtained on Lebesgue spaces.

Keywords:BMO spaces, Commutators, generalized shift operator, Lebesgue spaces, multilinear B -maximal operator, multilinear B -Riesz transforms, .

Önsöz

Çalışmalarımın her safhasında, engin bilgi ve tecrübelerini paylaşan, yönlendiren ve akademisyenliği sevdiren değerli hocam sayın Prof. Dr. İsmail EKİNCİ-OĞLU'na, yüksek lisans öğrenimim süresince **119N455** nolu proje kapsamında burs vererek beni destekleyen TÜBİTAK'a, çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen sevgili aileme saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	ix
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanım ve Teoremler	6
-------------------------------------	---

İKİNCİ BÖLÜM

LEBESGUE UZAYLARI

2. Lebesgue Uzayları.....	15
---------------------------	----

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ

3.1. Genelleştirilmiş Öteleme	19
-------------------------------------	----

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

MULTİLİNEER SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER

4.1. Ağırlıklar	24
4.2. Sharp Maksimal Operatörler	26
4.3. Sharp B -Maksimal Operatörler	27
4.4. Multilineer Riesz Bessel Dönüşümler	27
4.5. Multilineer Maksimal Fonksiyon İçin Ağırlıklı Tahminler	33
4.6. Multilineer Riesz Bessel Dönüşümleri İçin Ağırlıklı Tahminler	45
4.7. Zayıf Tip Eşitsizlikler	50
4.8. Multilineer Komütatörler	53
SONUÇ	69
KAYNAKÇA.....	70
DİZİN	74

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
\mathbb{R}^n	n boyutlu öklid uzay
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
\mathcal{S}	Schwartz uzayı
BMO	BMO uzayı
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$Q(x, r)$	Merkezi x ve kenar uzunluğu r olan küp
$L^{loc}(\mathbb{R}^n)$	\mathbb{R}^n 'de lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$\ f\ _p$	f fonksiyonunun L_p normu
T	Calderon-Zygmund operatörü
M	Hardy-Littlewood maksimal operatör
M_γ	B -maksimal operatör
M^\sharp	Sharp maksimal operatör
R_i	Riesz dönüşümü
$R_{\gamma,i}$	m -linear Riesz dönüşümü
RH_∞	Ağırlık sınıfı
A_p	Muckenhoupt sınıfı
$f * g$	Konvolüsyon çarpım
$f \otimes g$	Genelleştirilmiş ötelemeye bağlı konvolüsyon çarpım
ess sup	Esas supremum
ess inf	Esas infimum
supp f	f fonksiyonunun desteği
ω	Ağırlık fonksiyonu
T^y	Genelleştirilmiş öteleme
τ_h	Adi öteleme



TEZ METNİ

GİRİŞ

1950'lerde, Calderon ve Zygmund'un çığır açan (Calderon and Zygmund,1952)'teki çalışmaları, bugün bu bilim adamların adını taşıyan Calderon-Zygmund teorisinin temelini oluşturmaktadır. Bu iki bilim adamı, konvolüsyon tipli singüler integral operatörler ile ilgili çalışmalarına iten neden, potansiyel teori ve eliptik kısmi diferansiyel denklemler teorisi ile olan bağlantıları ve klasik Hilbert dönüşümünün yüksek boyutlu ve genellemesi olan operatörleri inceleme ihtiyacı idi. Böylece, \mathbb{R}^n uzayında bu tür verilen problemlerin üstesinden gelmek için yıllar içinde geliştirilen araçlar, günümüzde kullanılan tekniklerin temelini teşkil etmektedir.

Operatör, yaklaşım ve kısmi diferansiyel denklemler teorisi, hem reel hem de kompleks analizinde birçok problemin çözümünde oldukça başarılı olmuştur. Bu başarının büyük bir kısmı, homojen ve homojen olmayan uzaylar ile çok parametrelili, lineer olmayan ve çok lineer çok değişkenli bağlamlara uygulanan yöntemlerin genişlemesinin bir sonucudur. Coifman-Meyer (Coifman ve Meyer,1978), Christ (Christ,1990), Fefferman (Fefferman ve Stein,1972), Stein (Stein,1969), Grafakos-Torres (Grafakos ve Torres,2002) ve Volberg (Volberg,2003) ile ilgili çalışmalara, ayrıntılar ve konunun farklı yönleri için bakılabilir.

Calderon-Zygmund teorisinin yöntemlerini farklı bağlamlara uyarlamak her zaman mümkün değildir. Beklenen sonuçlar için bir plan sağlayan bu teori, sıkça karşılaşılan her yeni duruma özgü araçların araştırılıp geliştirilmesi gerekliliğini zorunlu kılmaktadır. Özellikle, her uygulamada değişik yollarla birçok operatörü, fonksiyonel nicelikleri ve bunları kontrol eden tüm fonksiyonları tahmin ederek en uygun maksimal fonksiyonları belirlemek mümkündür. Bu çalışma, maksimal fonksiyonları, multilineer Riesz Bessel dönüşümleri ve onların komütatörleri hakkında bize birkaç kesin sınır elde etmenin yolunu gösterecektir.

Calderon-Zygmund teorisinin çok lineer durumu, Coifman ve Meyer 'in 1970'lerdeki eserlerinden doğmuştur (Bakınız (Coifman ve Fefferman,1974),(Coifman ve Meyer,1975)). Calderon komütatörüne doğru yönelen bu çalışmalar, daha sonra Christ ve Journé (Christ ve Journé,1987), Kenig ve Stein

(Kenig ve Stein,1999), ve Grafakos ve Torres (Grafakos ve Torres,2002) dahil olmak üzere pek çok yazar tarafından tekrar ele alınmıştır. Bu son çalışma, (Alvarez ve Perez,1994) tarafından yapılan çalışma bize bu çalışmamızda çok lineer Calderon-Zygmund operatörleri hakkında kapsamlı bir genel yaklaşım sunmaktadır.

Bilindiği gibi, linear Calderon-Zygmund operatörleri $1 < p < \infty$ için, L^p den L^p ye sınırlıdır. Ayrıca $L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$ ve $L^\infty \rightarrow BMO$ dir. Bu durumda, çok lineer Calderon-Zygmund için elde edilen ilk sonuçlar, $1/p + 1/q = 1/r$ Hölder bağıntısı sağlayan $1 < p, q, r < \infty$ için $L^p \times L^q \rightarrow L^r$, şeklinde olması doğaldır. Elde edilen bu olumlu sonuçlar, $r > 1/2$ için de geçerli olduğu gerçeği, Lacey ve Thiele bilinear Hilbert dönüşümü için sınırlılık sonuçlarını elde edene kadar bir şekilde gözden kaçırmıştı (Lacey ve Thiele,1997), (Lacey ve Thiele,1999). Bilinear Hilbert dönüşümü, bilinear Calderon-Zygmund operatörlerinden daha singüler bir operatördür ve yine de $r > 2/3$ için sınırları sağlar (ancak sınırların $r > 1/2$ için de doğru olup olmadığı bilinmemektedir). (Kenig ve Stein,1999) ve (Grafakos ve Torres,2002) çalışmalarında gösterildi ki, bilinear Calderon-Zygmund operatörleri için $r > 1/2$ için $L^1 \times L^1 \rightarrow L^{1/2,\infty}$ dir.Bu çok lineer halde ağırlıklı tahminler ve komütatörler daha sonra (Grafakos ve Torres,2002) ve (Perez ve Torres,2003)'da incelenmiştir. Bu çalışmalar, bu çalışmada elde edeceğimiz bazı yeni sorunların önünü açmaktadır.

Ele aldığımız problem, çok lineer singüler integral operatörler ile ilgilidir. (Grafakos ve Torres,2002)'da görülür ki, eğer R_i bir m -lineer Calderon-Zygmund tipli bir operatör ise $R_i(f_1, \dots, f_m)$, L_p normuna göre $\prod_{j=1}^m M_\gamma f_j$ ile düzenlenmiştir. Burada M_γ B -maksimal operatördür. Sonuç olarak, ω ağırlığının A_{p_0} sınıfına ait ve $1/p_1 + \dots + 1/p_m = 1/p$ ve $p_0 = \min\{p_j\} > 1$ ise $R_i, L_{p_1}(\omega) \times \dots \times L_{p_m}(\omega)$ 'dan $L_p(\omega)$ 'ya sınırlıdır. Yani,

$$R_i : L_{p_1}(\omega) \times \dots \times L_{p_m}(\omega_m) \rightarrow L_p(\nu), \quad (0.1)$$

dir. Burada $\nu = \prod_{j=1}^m \omega_j^{p/p_j}$ ve ω_j, A_{p_j} dir. Bu tür ν ağırlıklar, çok lineer extrapolation sonuçlar elde etmek için (Grafakos ve Martell,2004) 'te kullanılmıştır. Bununla birlikte, çok ağırlıklı teoremin varlığı sorusu (Grafakos ve Torres,2002)'de or-

taya konmuştur. O zamandan beri, R_i 'nin $\prod_{j=1}^m Mf_j$ ile düzenlenmesinin optimal olup olmadığı ve (0.1) için geçerli olan ω_j üzerindeki koşulların uygulanıp uygulanamayacağı açık bir problem haline gelmiştir. (Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres ve Trujillo-González, 2009)'de,

$$\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x) = \sup_{x \in Q} \prod_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i.$$

şeklinde verilen \mathcal{M}_γ çok lineer maksimal fonksiyonu çalışılmış ve yukarıdaki sorulara cevap verilmiştir. Biz bu çalışmada,

$$\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x) = \sup_{x \in Q} \prod_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \int_Q T^y |f_i(x_i)| (y'_i)^\gamma dy_i.$$

\mathcal{M}_γ çok lineer maksimal fonksiyonunu göz önüne alacağız. Burada T^y genelleşmiş öteleme operatörüdür. Bu operatör, \mathcal{M}_γ 'nin m -kat çarpımından kesinlikle daha küçüktür. Biz bu yeni B -maksimal fonksiyonuna karşılık gelen ağırlık teorisini takdim edeceğiz ve bu da m -lineer Riesz Bessel dönüşümleri için çok ağırlıklı sınıfını vereceğiz.

Coifman, Rochberg ve Weiss'in (Coifman, Rochberg ve Weiss, 1976) komütatörlerinin çok lineer versiyonlarıyla ilgili ikinci bir problem grubunu incelemek için bazı benzer araçlar kullanmışlardır. (Coifman, Rochberg ve Weiss, 1976)'te takdim edilen operatörler $[b, T]f = bT(f) - T(bf)$ şeklinde tanımlandığı bilinmektedir. Burada b , \mathbb{R}^n 'de lokal integrallenebilir bir fonksiyondur. Genellikle sembol olarak adlandırılır, ve T Calderon-Zygmund singüler integral operatördür. (Coifman, Rochberg ve Weiss, 1976)'deki çalışmanın esas sonucu, eğer $b \in BMO$ ise, $1 < p < \infty$ iken, $[b, T]$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ 'de sınırlı operatördür. Aslında, b 'nin BMO ye ait olması komütatörün L_p sınırlılığı koşulu için gereklidir. Örneğin, $T = H$ yani T Hilbert dönüşümü olarak alındığında $b \in BMO$ gerek şarttır. İlginç bir gerçek şudur ki, singüler integral operatörle yapılan aksine, komütatörün L_p -sınırlılığının ispatı $(1, 1)$ zayıf tipte eşitsizliğine dayanmaz. Aslında bazı örnekler, $b \in BMO$ olduğunda genel olarak $[b, T]$ 'nin $(1, 1)$ zayıf tipte olamayacağını göstermektedir. (Perez, 1995) de Pérez, bu-

nun yerine bir zayıf- $L - (\log L)$ tipli tahminin geçerli olduğunu kanıtlamıştır ((4.56)'e bakınız).

Calderón-Zygmund tipli singüler integral operatör olarak bilinen klasik Riesz dönüşümleri, ilk defa 1949 yılında F. Riesz tarafından incelenmiştir. Riesz dönüşümleri, singüler integral teori ve potansiyel teoride önemli yer tutmaktadır. Çünkü Riesz dönüşümleri, harmonik fonksiyonlar ile yakından ilgilidir. Ayrıca, Riesz dönüşümleri en basit n -boyutlu singüler integrallerdir. Bu integral operatörün çekirdeği $K_j(x) = \frac{\Omega_j}{|x|^n}$ ve $\Omega_j = c_n \frac{x_j}{|x|}$ dir. Burada $\Omega_j(x)$, sıfıncı mertebeden homojen bir fonksiyondur. Yani, $\lambda > 0$ olmak üzere $\Omega_j(\lambda x) = \Omega_j(x)$ dir. Dolayısıyla, $K_j(x)$ çekirdeği, $x = 0$ noktasında n . mertebeden singülerliğe sahiptir (Stein, 1961; Stein ve Weiss, 1971). Klasik Riesz dönüşümü, konvolüsyon tipli singüler integral olduğundan buradaki $f(x - y)$ adi öteleme olarak düşünülebilir. Dolayısıyla bu öteleme yerine başka bir öteleme alabiliriz. Bu çalışmada adi öteleme yerine \mathbb{R}_+ öteleme veya T^y genelleştirilmiş öteleme operatörü alınacaktır. Böylece elde edilen sonuçlar orijinal ve yeni olacaktır. Bu operatör ile elde edilen dönüşüm, B -Riesz dönüşümü olarak adlandırılacaktır.

Bu çalışmada, Lebesgue uzaylarının m kartezyen çarpımında önemli rol oynayan ve Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun m -kat çarpımından daha küçük olan multilineer B -maksimal operatör ve B -Riesz dönüşümleri çalışılmıştır. Bu operatör, Calderon Zygmund tipli çok lineer B -Riesz dönüşümleri üzerinde kesin bir kontrol elde etmek ve çok lineer duruma uyarlanmış ağırlık teorisini oluşturmak için kullanılmıştır. Daha sonra, BMO fonksiyonları ile elde edilen çok lineer B -Riesz dönüşümlerinin bazı komütatörlerini incelemek için kullanışlı olan bu operatörün, farklı bir çeşidi dikkate alınmıştır. B -Riesz komütatörleri için en uygun güçlü tip tahminler, keskin bir uç nokta tahmini ve aynı zamanda hem klasik Muckenhoupt ağırlıkları hem de yeni çok lineer Muckenhoupt ağırlıkları için ağırlıklı norm eşitsizlikleri elde edilmiştir.



BİRİNCİ BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

1 TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. X bir küme, X 'in alt kümelerinin bir \mathcal{A} sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu \mathcal{A} sınıfı X üzerinde bir σ -cebiri olarak adlandırılır.

- (i) $x \in \mathcal{A}$
- (ii) $\forall E \in \mathcal{A}, {}^cE = X - E \in \mathcal{A}$
- (iii) $\forall n = 1, 2, \dots$ için $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

Bu durumda (X, \mathcal{A}) ikilisi ölçülebilir uzay, \mathcal{A} 'deki her bir küme de ölçülebilir küme olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.2. (X, \mathcal{A}) bir ölçülebilir uzay olsun. Bir $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$,
- (iii) \mathcal{A} 'nın her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerin sağlıyorsa bu fonksiyona \mathcal{A} üzerinde bir ölçü fonksiyonu veya ölçü adı verilir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ölçüsüne sonlu ölçü denir. X kümesi herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü σ -sonlu olarak adlandırılır. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye olasılık ölçüsü denir. Ayrıca (X, \mathcal{A}, μ) ölçü uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.3. (X, \mathcal{A}) bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ oluyorsa f fonksiyonu ölçülebilirdir denir. Ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.4. (X, \mathcal{A}, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir kümenin tümleyeni üzerinde veya kendisi \mathcal{A} 'ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise, o önerme hemen hemen her yerde doğrudur denir.

Tanım 1.1.5. X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Eğer $x \in D(T)$ için,

$$\|Tx\| \leq A\|x\|$$

olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir.

Tanım 1.1.6. Bir T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T), x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.1.7. X bir K cismi üzerinde bir vektör olmak üzere eğer bir

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$(1) \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \iff x = \theta,$$

$$(2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özellikleri gerçekleşsin. Bu durumda $\|\cdot\|$ dönüşümüne X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine, normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ uzayı genel olarak X ile ifade edilir.

Tanım 1.1.8. $\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$ operatörler olsun. \tilde{A} ve \tilde{B} komütatörleri

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A}$$

şeklinde tanımlanır. a, b, \dots sabitler olmak üzere

$$[f(x), x] = 0$$

$$[\tilde{A}, \tilde{A}] = 0$$

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = -[\tilde{B}, \tilde{A}]$$

$$[\tilde{A}, \tilde{B}\tilde{C}] = [\tilde{A}, \tilde{B}]\tilde{C} + \tilde{B}[\tilde{A}, \tilde{C}]$$

$$[\tilde{A}\tilde{B}, \tilde{C}] = [\tilde{A}, \tilde{C}]\tilde{B} + \tilde{A}[\tilde{B}, \tilde{C}]$$

$$[a + \tilde{A}, b + \tilde{B}] = [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

$$[\tilde{A} + \tilde{B}, \tilde{C} + \tilde{D}] = [\tilde{A}, \tilde{C}] + [\tilde{A}, \tilde{D}] + [\tilde{B}, \tilde{C}] + [\tilde{B}, \tilde{D}]$$

özdeşlikleri sağlanır.

Tanım 1.1.9. [Kuvvetli ve Zayıf Tipli Sınırlılık] $1 \leq p, q \leq \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) iki ölçü uzayı ve $T, L_p(X, \mu)$ den tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla Y ve \mathbb{C} olan ölçülebilir fonksiyonlar uzayında bir operatör olsun. Eğer $q < 1$ olmak üzere

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

ise T zayıf p, q tipinden ve eğer $q = \infty$ iken $L_p(X, \mu)$ den $L_\infty(Y, \nu)$ ye sınırlı bir operatör ise zayıf (p, ∞) tipindedir denir.

Eğer $T, L_p(X, \mu)$ den $L_q(Y, \nu)$ ya sınırlı ise kuvvetli (p, q) tiplidir denir. Yani, her $f \in L_p(X, \mu)$ için

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buradan $q = \infty$ olması durumunda zayıf ve kuvvetli tip çakışmaktadır.

Eğer T , kuvvetli (p, q) tipli ise aynı zamanda zayıf (p, q) tiplidir. Gerçekten, eğer

$$E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$$

olarak alırsak bu durumda

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left| \frac{Tf(x)}{\lambda} \right|^q d\nu \leq \frac{\|Tf\|_q^p}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda} \right)^q$$

olur.

Eğer $(X, \mu) = (Y, \nu)$ ve T özdeşlik operatörü olursa zayıf (p, p) klasik Chebyshev eşitsizliği olur.

Tanım 1.1.10. [$(1 \leq p < \infty)$ için A_p ağırlıkları] $\omega(x) \geq 0$ ve $\omega(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $C > 0$ sabiti

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq C \quad (1.1)$$

$1 < p < \infty$ için $\omega \in A_p$ denir. Burada ve aşağıda, $1/p + 1/p' = 1$ dir. $C > 0$ olmak üzere

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \quad (1.2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\omega \in A_1$. (1.1) veya (1.2) de görünen C sabitine ω nın A_p sabiti denir.

1.1.1 Uyarı

$\omega \in A_1$ olması için gerek ve yeter şart $C > 0$ ve herhangi Q küpü için

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq C \inf_{x \in Q} \omega(x) \quad (1.3)$$

olmasıdır. Burada ve aşağıda, *inf* ile temel infimum anlaşılacaktır. Dahası, $1 \leq p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ için, A_p sabiti $C \leq 1$ dir. Aslında, her bir Q küpü için

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1/p} \omega(x)^{-1/p} dx \\ &\leq \left\{ \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.11. [A_p Muckenhoupt Sınıfı] Eğer $1 < p < \infty$ olmak üzere herhangi bir $Q = Q(x, r)$ yuvarı için

$$\begin{aligned} [\omega]_{A_p} &= \sup_Q [\omega]_{A_p(Q)} \\ &= \sup_B \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

ise ω ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfındandır denir. Burada supremum bütün Q yuvarları üzerinden alınmaktadır ve $1/p + 1/p'$ biçimindedir. Burada Hölder eşitsizliğini kullanarak bütün Q yuvarları için

$$[w]_{A_p(Q)}^{1/p} = |Q|^{-1} \|w\|_{L_1(Q)}^{1/p} \|w^{-1/p}\|_{L_{p'}(Q)} \geq 1. \quad (1.5)$$

olur. $p = 1$ iken, hemen hemen her x için

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \quad (1.6)$$

olacak şekilde $C > 1$ varsa $\omega \in A_1$ dir ve (1.6) eşitsizliğini sağlayan C nin infimumu $[\omega]_{A_1}$ ile gösterilir.

p ve p' üsleri ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$1 = \frac{1}{|Q|} \int_Q dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1/p} \omega(x)^{-1/p} dx \leq [\omega]_{A_p}^{1/p}$$

elde edilir.

(1.4) eşitsizliğinde $p \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq C \exp \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \log w(x) dx \right)$$

elde edilir ve eşitsizlik sağlandığında $w \in A_\infty$ denir. Ayrıca, $p = \infty$ iken

$$A_\infty := \bigcup_{1 \leq p < \infty} A_p$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.1.12. [Ağırlıklı L_p Uzayı] $1 \leq p \leq \infty$, ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, $L_p(\omega) \equiv L_p(\mathbb{R}^n, \omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L_p, \omega} \equiv \|f\|_{L_p, \omega(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{(\mathbb{R}^n)} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normuna sahip bütün ölçülebilir f fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır. $p = \infty$ durumunda ise $L_\infty(\omega) \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n, \omega)$ de norm

$$\|f\|_{L_\infty, \omega} \equiv \|f\|_{L_\infty, \omega(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \omega(x)$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.1.13. (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(X) = \left\{ f \in M(X, \Sigma) : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p -inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. $L_p(X)$ uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{L_p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \{ \lambda > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0 \}$$

ile verilir.

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, X 'in her bir kompakt alt kümesinde p -inci kuvveti integrallenebilen tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayı $L_p^{loc}(X)$ ile gösterilir. Bu uzay $p = 1$ için $L_1^{loc}(X) \equiv L^{loc}(X)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfını gösterir. $L^{loc}(X)$ uzayı $1 \leq p \leq \infty$ için bütün $L_p(X)$ uzaylarının birleşimlerini içerir.

Tanım 1.1.14. [Calderon Zygmund Operatör] $K \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ olacak şekilde aşağıdaki koşulları sağlasın;

- (i) $|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}$, $|x| \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- (ii) $\int_{r_1 < |x| < r_2} K(x) dx = 0$, $0 < r_1 < r_2$,
- (iii) $|K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}$, $2|y| \leq |x|$.

Bu durumda K 'ya Calderon-Zygmund çekirdeği denir. Burada C sabiti, x ve y den bağımsızdır.

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} K(x-y)f(y)dy$$

Eşitliği yardımıyla K ile ilintili Calderon- Zygmund singular integrali

$$Tf(x) = (K * f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.1.15. [Fubini Teoremi] $\nu \geq 0$, $v \geq 0$ olmak üzere (X, ν) ve (Y, v) ölçü uzayları ve $\nu \otimes v$, $X \times Y$ üzerinde tanımlı çarpım ölçüsü olsun. Bu durumda $F(x, y)$, $\nu \otimes v$ integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} \int \int_{X \times Y} F(x, y) d\nu \otimes v &= \int_X \left(\int_Y F(x, y) dv \right) d\nu \\ &= \int_Y \left(\int_X F(x, y) d\nu \right) dv \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada $X = Y = \mathbb{R}$ ise $\nu = v$ Lebesgue ölçüsüdür. Bu durumda \mathbb{R}^2 'de $\nu \otimes v = dx_1 dx_2$ 'dir (Sadosky 1979).

Tanım 1.1.16. [Konvolüsyon] f ile g ölçülebilir fonksiyonlar olsun. \mathbb{R}^n 'de f ile g 'nin konvolüsyonu

$$(f * g)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)} f(y)g(x-y)dy$$

biçiminde tanımlanır (Neri 1971).

Tanım 1.1.17. $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ Lebesgue ölçüsüyle verilen \mathbb{R}^n olsun ve \mathcal{F} , \mathbb{R}^n 'de en az bir değişkeni sıfırdan farklı olan küpler ailesini gösterebilir.

Eğer her $x \in E$ ve her $\epsilon > 0$ için \mathcal{F} 'in $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için iyi bir Vitali örteni olduğunu söylüyoruz, burada $x \in Q$ ve çapı $Q < \epsilon$ olacak şekilde bir $Q \in \mathcal{F}$ küpü vardır.

Teorem 1.1.18. [Vitali] E sınırlı, Lebesgue ölçülü \mathbb{R}^n de bir küme olsun ve \mathcal{F} , E için iyi bir Vitali örteni olsun. $Q_n \in \mathcal{F}$ küplerinin ikili ayrık içleri ile sayılabilir $\{Q_n\}$;

$$\mu\left(E - \cup Q_n\right) = 0$$

vardır.



İKİNCİ BÖLÜM
LEBESGUE UZAYLARI

2 LEBESGUE UZAYLARI

Tanım 2.0.1. [L_p Uzayı] $0 < p \leq \infty$ ve f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere Lebesgue uzayı

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \{f - \text{ölçülebilir} : \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty\}$$

ile verilir, burada $0 < p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{(\mathbb{R}^n)} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ durumunda ise

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

biçiminde verilir.

Tanım 2.0.2. [Schwartz Uzayı] \mathbb{R}^n uzayında sonsuz kez diferensiyellenebilir ve istenilen α ve β katlı indisleri için

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfına Schwartz uzayı denir. \mathcal{S} ile gösterilir. Burada

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

ve

$$D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

dir. Eğer $f \in \mathcal{S}$ ise bu durumda f sınırlıdır, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\hat{f}(x) \in \mathcal{S}$ dir.

Tanım 2.0.3. [BMO Uzayı] BMO Uzayı, $BMO = BMO(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{BMO} < \infty\}$,

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{Q \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx,$$

$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$ ile tanımlanır. Burada supremum, \mathbb{R}^n 'nin kenarları koordinat eksenlerine paralel tüm Q küpleri üzerinden alınır. (Grafakos,2009)

Tanım 2.0.4. [Hölder Eşitsizliği] $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$ olsun. Bu durumda

$$\|fg\|_{L_1(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} \|g\|_{L_q(X)}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 2.0.5. [Ters Hölder Eşitsizliği] $1 \leq p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda herhangi bir Q kübü için sadece p 'ye bağlı olan $\varepsilon > 0$ ve C , ω 'nın A_p sabiti olmak üzere

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon} dx \right)^{1/(1+\varepsilon)} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.0.6. [Hardy-Littlewood Maksimal Operatör] $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int_{B(0,r)} |f(x-y)| dy$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.0.7. [Jensen Eşitsizliği] (X, μ) sonlu bir ölçüm uzayı olsun. I , \mathbb{R} 'de bir aralık, $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $f(x) \in I$ olacak şekilde $f \in L^1(X, \mu)$ olduğunu varsayalım ve $\Phi \circ f \in L^1(X, \mu)$ olsun. Bu durumda

$$\Phi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X (\Phi \circ f) d\mu$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 2.0.8. (X, \mathcal{A}, μ) bir ölçü uzayı ve (f_n) 'de $M^+(X, \mathcal{A})$ 'daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$$

dir.

Teorem 2.0.9. (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ (Lebesgue) ölçülebilir fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. Eğer (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise, bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$

dir.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ

3 GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ

1951 yılında, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ üst yarı uzayında bir ötelemenin varlığı, M. Levitan tarafından göstermiştir. Bu ötelemeyi \mathbb{R}_+ olarak adlandırmıştır. Bu ötelemenin Bessel diferensiyel operatörleri ilgili olduğunu araştırmış ve bu ötelemenin $(0, \infty)$ aralığındaki noktaları yine bu aralıktaki noktalara dönüştürdüğünü göstermiştir (Levitan, 1967).

1967 yılında, \mathbb{R}_+^n n -boyutlu yarı uzayda genelleştirilmiş öteleme, I. Kipriyanova tarafından tanımlanmıştır (Kipriyanova, 1967). İ. Ekincioglu (Ekincioglu, 1994), bu ötelemenin $(n - 1)$ değişkene göre adi ve n . değişkene göre \mathbb{R}_+ öteleme olarak ele almış ve sonra Fourier-Bessel operatörü ilgili singüler integral operatörleri çalışmıştır.

Bu bölümde, genelleştirilmiş öteleme operatörü tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir.

3.1 Genelleştirilmiş Öteleme

Tanım 3.1.1. \mathbb{R}_+ öteleme, B_n Bessel operatör olmak üzere, $B_x u = B_y u$, $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = 0$ başlangıç değer probleminin yani,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.1)$$

denkleminin, $u|_{y=0} = f(x)$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$ başlangıç şartlarını sağlayan bir çözümdür. Bu çözüm

$$u(x, y) = T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2}) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha$$

şeklinde tanımlanır. Bu öteleme $(0, \infty)$ aralığında tanımlıdır. Bu ötelemeye \mathbb{R}_+ öteleme denir.

Bu ifade de $T_x^0 f(x) = f(x)$ olduğu açıktır. Ayrıca eğer $f(x)$ fonksiyonunun sürekli

türevi varsa bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial y} T_x^y f(x) \Big|_{y=0} = 0 \quad (3.2)$$

dır ve $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevi varsa bu durumda $T_x^y f(x)$, (3.1) denkleminin çözümüdür ve (3.2) başlangıç şartları elde edilebilir. Ayrıca $x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ ve

$$\Delta_{B_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_n, \quad B_n = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Δ_{B_n} Laplace-Bessel operatör olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \frac{\gamma}{y_n} \frac{\partial u}{\partial y_n}$$

denkleminin yukarıdaki başlangıç şartları altındaki çözümü

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^\pi f(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos \alpha + y_n^2}) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha$$

dir. Bu operatöre genelleştirilmiş öteleme operatörü denir (Levitan, 1973). T^y genelleştirilmiş öteleme operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Lineerlik özelliği: Her a, b skaleri için $T_x^y [af(x) + bg(x)] = aT_x^y f(x) + bT_x^y g(x)$ dir.
2. Pozitiflik özelliği: Eğer $f(x) \geq 0$ ise $T_x^y f(x) \geq 0$ dir.
3. $T_x^y(1) = 1$ dir.

$$\int_0^\pi \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}$$

olduğu yukarıdaki formül kullanıldığında $f(x) = 1$ için,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^\pi \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})} = 1$$

elde edilir.

4. Eğer $x \geq a$ ve $f(x) = 0$ ise bu durumda $|x - y| \geq a$ için $T_x^y f(x) = 0$ dır.
5. T_x^y operatörü süreklidir: $f_n(x)$ sürekli fonksiyonlar dizisi her bir sonlu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar dizisi $T_x^y f_n(x)$ her bir sonlu bölgede $T_x^y f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.
6. T_x^y operatörü sınırlıdır: $f \in L_{p,\gamma}$ olsun. Bu durumda $|T_x^y f(x)| \leq T_x^y |f(x)| \leq \sup_{x \geq 0} |f(x)|$ dir.
7. Değişme özelliği: $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve $T_x^y T_x^z f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$ dir.
8. Birleşme özelliği: $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve $y, z \in \mathbb{R}_+^n$ olsun. Bu durumda $T_y^z T_x^y f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$ dir.
9. Eşlenik özelliği: Eğer sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu, $\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)| x_n^\gamma dx < \infty$ ve her $x > 0$ için $g(x)$ sınırlı bir fonksiyon ise bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} T_x^y f(x) g(y) y_n^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T_x^y g(x) y_n^\gamma dy$$

olur. $g(x) = 1$ için

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} T_x^y f(x) y_n^\gamma dy = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) y_n^\gamma dy$$

dir.

10. $T_x^{-y} f(x) = T_x^y f(x)$ dir.
11. $F_B[T_x^y f(x)] = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_n y_n) F_B[f(x)]$ dir.
12. $B_n[T_x^y f(x)] = T_x^y [B_n f(x)]$ dir.
13. $D_\gamma^\alpha [T_x^y f(x)] = T_x^y [D_\gamma^\alpha f(x)]$ dir.

Tanım 3.1.2. $1 \leq p < \infty$ ve $f, g \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ ölçülebilir iki fonksiyon ve T^y genelleştirilmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda genelleştirilmiş ötelemeyle

ilgili konvolüsyon çarpım

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T^y g(x) y_n^\gamma dy$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.1.3. $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. Bu durumda her $y \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\|T^y f(x)\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)}$$

dır.



DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
MULTİLİNEER SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER

4 MULTİLİNEER SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER

Bu bölümde, multilineer singüler integral operatörler çalışılmıştır. (Ekin-cioglu, 2021) Eğer R_i bir m -lineer Calderon-Zygmund tipli bir operatör ise $R_i(f_1, \dots, f_m)$, L_p normuna göre $\prod_{j=1}^m M_\gamma f_j$ ile ele alınmıştır. Burada M_γ B -maksimal operatördür. Sonuç olarak, ω ağırlığının A_{p_0} sınıfına ait ve $1/p_1 + \dots + 1/p_m = 1/p$ ve $p_0 = \min\{p_j\} > 1$ ise R_i , $L_{p_1}(\omega) \times \dots \times L_{p_m}(\omega)$ 'dan $L_p(\omega)$ 'ya sınırlıdır. Yani,

$$R_i : L_{p_1}(\omega) \times \dots \times L_{p_m}(\omega_m) \rightarrow L_p(\nu), \quad (4.1)$$

dir. Burada $\nu = \prod_{j=1}^m \omega_j^{p/p_j}$ ve ω_j, A_{p_j} dir.

Biz bu çalışmada,

$$\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x) = \sup_{x \in Q} \prod_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \int_Q T^y |f_i(x_i)| (y'_i)^\gamma dy_i.$$

\mathcal{M}_γ çoklineer maksimal fonksiyonunu göz önüne alacağız. Böylece, yukarıdaki sorulara cevap vereceğiz. Burada T^y genelleşmiş öteleme operatörüdür. Bu operatör, \mathcal{M}_γ 'nin m -kat çarpımından kesinlikle daha küçüktür. Biz bu yeni B -maksimal fonksiyonuna karşılık gelen ağırlık teorisini takdim edeceğiz ve bu da m -lineer Riesz Bessel dönüşümleri için çok ağırlıklı sınıfını vereceğiz.

4.1 Ağırlıklar

Negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar yani ağırlık fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda, eğer $1 < p < \infty$ iken

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(y) dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(y)^{1-p'} dy \right)^{p-1} < \infty$$

ise ω ağırlık fonksiyonu A_p sınıfına aittir. Bu sayı ω 'nin A_p sabiti olarak adlandırılır. Eğer

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(y) dy \leq C \inf_Q \omega$$

olacak şekilde bir C sabiti varsa ω ağırlığına A_1 sınıfına aittir denir. Bu C sabitlerinin en küçüğüne ω 'nin A_1 sabiti denir. A_p sınıfları p 'ye göre arttığı için, A_∞ ağırlık sınıfı $A_\infty = \cup_{p>1} A_p$ ile doğal bir şekilde tanımlanır ve $\omega \in A_p$ olacak şekilde $\omega \in A_\infty$ 'nin A_∞ sabiti A_p nin infimumunun en küçüğüdür.

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q T^y |f(x)| dy,$$

B -maksimal fonksiyonunun, $M : L_p(\omega) \rightarrow L_p(\omega)$ olması için gerek ve yeter şart ω , A_p olduğu Muckenhoupt (Muckenhoupt,1972) tarafından elde edildiği bilinmektedir. Ayrıca M için zayıf tipli eşitsizliklerin karakterizasyonu elde edilmiştir. Yani, $M : L_p(\omega) \rightarrow L_{p,\infty}(\nu)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu(y) dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(y)^{1-p'} dy \right)^{p-1} < \infty \quad (4.2)$$

olmasıdır.

Tek taraflı ağırlıklarla ilgili bazı sonuçlara ihtiyacımız olacak. $I = [a, b]$ aralığı verildiğinde, $I^+ = [b, 2b - a]$ şeklinde gösterelim. Eğer

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|I^+|} \int_{I^+} \omega(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty$$

ise bu durumda ω ağırlığı A_p^+ aittir.

Eğer ω, A_p^+ koşulunu sağlarsa bu durumda herhangi bir I aralığı için

$$\omega(I) \leq c \omega(I^+) \quad (4.3)$$

olacak şekilde bir c sabitinin mevcut olması tek taraflı ağırlık teorisinde bilinmektedir ((Lerner,2008) 'a bakınız).

4.2 Sharp Maksimal Operatörler:

$\delta > 0$ için, M_δ maksimal fonksiyon olsun. Bu durumda bu fonksiyon

$$M_\delta f(x) = M(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}(x) = \left(\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^\delta dy \right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca (Fefferman ve Stein,1972) 'da Fefferman ve Stein tarafından verilen M^\sharp genel maksimal fonksiyonu

$$M^\sharp(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \inf_c \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - c| dy \approx \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy,$$

dir. Burada $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy$, f in Q üzerinden ortalama değerini gösterir.

Fefferman ve Stein'nin (Fefferman ve Stein,1972) 'deki klasik sonucu, (Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres ve Trujillo-González,2009) deki çalışmada kullanılmıştır ((Journe,1983), (Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres ve Trujillo-González,2009) bakınız). B -maksimal operatör olarak adlandırılan

$$M_\delta f(x) = M(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}(x) = \left(\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^\delta dy \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

operatörü ele alacağız. $0 < p, \delta < \infty$ ve ω, A_∞ 'da bir ağırlık olsun. Bu durumda sol taraftan yaklaşıldığında sonlu olan her f fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\delta f(x))^p \omega(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_\delta^\sharp f(x))^p \omega(x) dx, \quad (4.4)$$

olacak şekilde $C > 0$ vardır (ω 'nin A_∞ sabitine bağlıdır). Sol tarafın sonlu olduğu tüm f fonksiyonları için geçerlidir.

Benzer şekilde, $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ doubling şartını sağlarsa, bu durumda, sol taraftan yaklaşıldığında sonlu olan her f fonksiyonu için

$$\sup_{\lambda > 0} \varphi(\lambda) \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\delta f(y) > \lambda\}) \leq c \sup_{\lambda > 0} \varphi(\lambda) \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\delta^\sharp f(y) > \lambda\}) \quad (4.5)$$

olacak şekilde bir c sabiti vardır (ω 'nin A_∞ sabitinde ve φ doubling koşulunu sağlayan). Bu tahminlerin genellemesi geniş bir uzay sınıfı için (Curbera Garcia-

Cuerva, Martell ve Perez, 2006) 'de bulunabilir.

4.3 Sharp B -Maksimal Operatörler:

$\delta > 0$ için, M_δ , B -maksimal fonksiyon olsun. Bu durumda

$$M_{\gamma, \delta} f(x) = M(|f|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}(x) = \left(\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q T^y |f(x)|^\delta |y'|^\gamma dy \right)^{\frac{1}{\delta}} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, M^\sharp , Fefferman ve Stein (Fefferman ve Stein, 1972) 'da verdiği genel maksimal fonksiyonunu aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} M_\gamma^\sharp(f)(x) &= \sup_{Q \ni x} \inf_c \frac{1}{|Q|} \int_Q T^y |f(x) - c| |y'|^\gamma dy \\ &\approx \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q T^y |f(x) - f_Q| |y'|^\gamma dy, \end{aligned} \quad (4.7)$$

tanımlayalım. Burada T^y genelleşmiş öteleme operatörüdür.

4.4 Multilinear Riesz Bessel dönüşümler

Lokal integrallenebilir $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ fonksiyonlar ailesi verildiğinde, \vec{b} 'nin m -lineer komütatörü ve R_i , m -lineer Riesz Bessel dönüşümü

$$R_{i, \vec{b}}(f_1, \dots, f_m) = \sum_{j=1}^m R_{i, \vec{b}}^j(\vec{f}), \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$R_{i, \vec{b}}^j(\vec{f}) = b_j R_i(f_1, \dots, f_j, \dots, f_m) - R_i(f_1, \dots, b_j f_j, \dots, f_m).$$

dir. Bu tanım, $m = 1$ iken $[b, R_i]$ lineer komütatör ile çakışır. (Perez ve Torres, 2003)'de, m -lineer komütatörler, Pérez ve Torres tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada, $\vec{b} \in (BMO)^m$, $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$ olacak şekilde p_1, p_2, \dots, p_m

ise bu durumda

$$R_{i, \vec{b}} : L_{p_1} \times \cdots \times L_{p_m} \rightarrow L_p$$

olduğu gösterilmiştir. Burada, $p > 1$ şartının olması önemli bir varsayımdır. Lineer durumda (Coifman, Rochberg ve Weiss, 1976)'de olduğu gibi kullanılan yöntem nedeniyle (Perez ve Torres, 2003) 'de ortaya çıkan sınırlama A_p güçlü tahminlerine bağlıdır (bu nedenle yaklaşımı $p > 1$ ile sınırlandırılır). Böylece, lineer komütatörler ve çok lineer B -Riesz dönüşümleri ile ilgili deneyim, uygun aralığın $1/m < p < \infty$ olması gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Bu çalışmada, bu durumun gerçekte de böyle olduğunu göreceğiz.

Elde ettiğimiz sınırlar yeni ve ağırlıklar için de geçerlidir. Bunları B -maksimal fonksiyonları kullanarak yani, $i = 1, \dots, m$ için

$$\mathcal{M}_{\gamma, L(\log L)}^i(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \|f_i\|_{L(\log L), Q} \prod_{j \neq i} \frac{1}{|Q|} \int_Q T^y f_j(y)^\gamma dy$$

ve

$$\mathcal{M}_{\gamma, L(\log L)}(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L(\log L), Q},$$

$\mathcal{M}_{\gamma, L(\log L)}^i$ ve $\mathcal{M}_{\gamma, L(\log L)}$ fonksiyonlarını kullanarak elde ederiz. $\|\cdot\|_{L(\log L), Q}$ normu ile ilgili daha fazla ayrıntı daha sonraki kısımlarda verilecektir.

BMO sembollerinin varlığını belirten $\mathcal{M}_{\gamma, L(\log L)}$ 'nin \mathcal{M}_γ 'den daha büyük olduğu kolayca görülmektedir. $\mathcal{M}_{\gamma, L(\log L)}(\vec{f})$ 'nin noktasal olarak $\prod_{j=1}^m M_\gamma^2 f_j(x)$ 'in katları tarafından kontrol edildiği görülebilir, ancak bu çarpım ilgilendiğimiz komütatörlerin kesin ağırlıklı tahminini elde etmek için çok büyüktür. Bu nedenle, bunun yerine $\mathcal{M}_{\gamma, L(\log L)}$ kullanacağız..

Tanım 4.4.1. $i = 1, \dots, n$ için, m -lineer i -inci Riesz dönüşümü

$$R_i(\vec{f})(x) = \text{p.v.} \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^m (x_i - (y_j)_i)}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|^2)^{\frac{nm+1}{2}}} f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) dy_1 \cdots dy_m,$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(y_j)_i$, y_j 'nin i -inci koordinatını gösterir.

Tanım 4.4.2. Multilinear Riesz Bessel dönüşümü

$$R_{\gamma,i}(\vec{f})(x) = \text{p.v.} \int_{(\mathbb{R}_+^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^m (y_j)_i}{\left(\sum_{j=1}^m |y_j|^2\right)^{\frac{nm+\gamma+1}{2}}} T^{y_1} f_1(x) \dots T^{y_m} f_m(x) (y')^\gamma dy_1 \dots dy_m$$

şeklinde tanımlanır. Burada T^y genelleştirilmiş öteleme operatörüdür.

$R_{\gamma,i}$ tanım kümesi m -katlı Schwartz uzayından Schwartz uzayının sürekli dual uzayı üzerine bir

$$R_{\gamma,i} : S(\mathbb{R}^n) \times \dots \times S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$

multilinear bir operatör olsun. Bazı $1 \leq q_j < \infty$ için $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_m}$ olmak üzere $L_{q_1} \times \dots \times L_{q_m}$ 'den L_q 'ya sınırlı multilinear operatöre genişlerse $R_{\gamma,i}$ dönüşümüne m -linear B -Riesz dönüşümü denir ve

$$R_{\gamma,i}(f_1, \dots, f_m)(x) = \int_{(\mathbb{R}_+^n)^m} K(x, y_1, \dots, y_m) T^{y_1} f_1(y_1) \dots T^{y_m} f_m(y_m) (y')^\gamma dy_1 \dots dy_m$$

ile gösterilir. Burada K , $x = y_1 = \dots = y_m \in (\mathbb{R}_+^n)^{m+1}$, köşegen üzerinde tanımlı ve her $x \notin \cap_{j=1}^m f_j$ için;

$$|K(y_0, y_1, \dots, y_m)| \leq \frac{A}{\left(\sum_{k,l=0}^m |y_k - y_l|\right)^{mn+\gamma+1}}; \quad (4.9)$$

dir ve $|y_j - y'_j| \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq k \leq m} |y_j - y_k|$ iken her $\varepsilon > 0$ ve $0 \leq j \leq m$ için,

$$|K(y_0, \dots, y_j, \dots, y_m) - K(y_0, \dots, y'_j, \dots, y_m)| \leq \frac{A|y_j - y'_j|^\varepsilon}{\left(\sum_{k,l=0}^m |y_k - y_l|\right)^{mn+\varepsilon+\gamma+1}}, \quad (4.10)$$

dir.

(Grafakos ve Torres, 2002)'te görüldüğü gibi; $\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m} = \frac{1}{r}$ ise, $1 < r_j < \infty$

her $j = 1, \dots, m$ için; m -lineer B -Riesz dönüşümü

$$R_{\gamma,i} : L^{r_1} \times \dots \times L^{r_m} \rightarrow L^r \quad (4.11)$$

ve $1 \leq r_j < \infty$ her $j = 1, \dots, m$ en az bir $r_j = 1$ için

$$R_{\gamma,i} : L^{r_1} \times \dots \times L^{r_m} \rightarrow L^{r,\infty}, \quad (4.12)$$

dir. Özellikle,

$$R_{\gamma,i} : L^1 \times \dots \times L^1 \rightarrow L^{1/m,\infty} \quad (4.13)$$

olur.

Tanım 4.4.3. $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ olsun, \mathcal{M} maksimal operatör

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i,$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum, x noktasını içeren tüm Q küpleri üzerinde alınır.

Tanım 4.4.4. $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ olsun, M_γ , B - maksimal operatör

$$M_\gamma(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \int_Q T^y |f_i(x_i)| (y')^\gamma dy_i,$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum, x noktasını içeren tüm Q küpleri üzerinde alınır.

Bazı kullanımlarda, her girişte açıkça M alt lineer olmasına rağmen, M 'ye multilineer maksimal fonksiyon olarak atıfta bulunacaktır. Multilineer Calderon-Zygmund operatörlerini ve bu multilineer maksimal fonksiyonu birbirine bağlayan ana sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.4.5. $R_{\gamma,i}$ multilineer Riesz Bessel dönüşümü ve $\delta < 1/m$ olacak şekilde $\delta > 0$ olsun. Bu durumda, $1 \leq q_j < \infty$ iken herhangi $L^{q_j}(\mathbb{R}_+^n)$ çarpım uzayındaki

her \vec{f} için,

$$M_{\gamma,\delta}^\sharp(R_{\gamma,i}(\vec{f}))(x) \leq C\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x) \quad (4.14)$$

dir.

Kanıt. (Grafakos ve Torres,2002),(Lerner,2004) ve (Perez ve Torres,2003) 'deki elde edilen sonuçları göz önüne alalım. Bu durumda, x , Q küpünde bir nokta olsun. Bilindiği gibi (4.14) 'i elde etmek için $0 < \delta < \frac{1}{m}$ için, bazı c_Q sabiti ile

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q ||R_{\gamma,i}(\vec{f})(z)|^\delta - |c_Q|^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} \leq C\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x), \quad (4.15)$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir. $0 < r < 1$ için $||\alpha|^r - |\beta|^r| \leq |\alpha - \beta|^r$ eşitsizliğini kullanarak

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q ||R_{\gamma,i}(\vec{f})(z) - c_Q|^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} \leq C\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x) \quad (4.16)$$

olduğunu göstereceğiz.

$f_j = f_j^0 + f_j^\infty$ olsun, burada $f_j^0 = f_j \chi_{Q^*}$, $j = 1, \dots, m$ ve $Q^* = 3Q$ 'dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m f_j(y_j) &= \prod_{j=1}^m (f_j^0(y_j) + f_j^\infty(y_j)) \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \{0, \infty\}} f_1^{\alpha_1}(y_1) \dots f_m^{\alpha_m}(y_m) \\ &= \prod_{j=1}^m f_j^0 + \sum' f_1^{\alpha_1}(y_1) \dots f_m^{\alpha_m}(y_m), \end{aligned}$$

elde edilir. Burada her bir \sum' terimi en az bir $\alpha_j \neq 0$ içerir. O halde

$$R_{\gamma,i}(\vec{f})(z) = R_{\gamma,i}(\vec{f}^0)(z) + \sum' R_{\gamma,i}(f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(z) \quad (4.17)$$

yazabiliriz. Kolmogorov eşitsizliğini $p = \delta$ ve $q = \frac{1}{m}$ iken

$$R_{\gamma,i}(\vec{f}^0)(z) = R_{\gamma,i}(f_1^0, \dots, f_m^0)(z)$$

terimine uygulayarak

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma,i}(f^0)(z)|^\delta dz\right)^{\frac{1}{\delta}} &\leq c_{m,\delta} \|R_{\gamma,i}(\vec{f}^0)(z)\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(Q, \frac{dx}{|Q|})} \\
&\leq C \prod_{j=1}^m \frac{1}{3Q} \int_{3Q} T^y |f_j(z)| (y')^\gamma dz \\
&\leq C \prod_{j=1}^m \frac{1}{3Q} \int_{3Q} T^z |f_j(y)| (z')^\gamma dz \\
&\leq C \mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(z),
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $R_{\gamma,i} : L^1 \times \dots \times L^1 \rightarrow L^{1/m}$ olur.

(4.17) 'teki diğer terimleri incelemek için,

$$c = \sum_{i=1}^l R_{\gamma,i}(f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(x),$$

alalım ve herhangi bir $z \in Q$ için

$$\sum_{i=1}^l |R_{\gamma,i}(f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(z) - R_{\gamma,i}(f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(x)| \leq C \mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x) \quad (4.18)$$

formunda bir eşitsizliği de elde edebileceğimizi göstereceğiz. Önce $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \infty$ olduğu durumu göz önüne alalım ve $R_{\gamma,i}(\vec{f}^\infty) = R_{\gamma,i}(f_1^\infty, \dots, f_m^\infty)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda (4.10) regülerlik şartından ve $z \in Q$ için

$$\begin{aligned}
&|R_{\gamma,i}(\vec{f}^\infty)(z) - R_{\gamma,i}(\vec{f}^\infty)(x)| \\
&\leq C \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 3Q)^m} \frac{|y|^\varepsilon}{(|y_1| + \dots + |y_m|)^{nm+\varepsilon+\gamma+1}} \prod_{i=1}^m T^{y_i} |f_i(z_i) - f_i(x_i)| (y')^\gamma d\vec{y} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(3^{k+1}Q)^m (3^kQ)^m} \frac{|y|^\varepsilon}{(|y_1| + \dots + |y_m|)^{nm+\varepsilon+\gamma+1}} \prod_{i=1}^m T^{y_i} |f_i(y_i)| (y')^\gamma d\vec{y} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{(3^k |Q|^{\frac{1}{n}})^{nm+\varepsilon+\gamma+1}} \int_{(3^{k+1}Q)^m} \prod_{i=1}^m T^{y_i} |f_i(y_i)| (y')^\gamma d\vec{y} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k\varepsilon}} \prod_{i=1}^m |f_i|_{(3^{k+1}Q)} \leq C \mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $E^m = E \times \dots \times E$ ve $d\vec{y} = dy_1 \dots dy_m$ dir.

(4.18)'teki terimler, bazı $\{j_1, \dots, j_l\} \subset \{1, \dots, m\}$ ve $1 \leq l < m$ için $\alpha_{j_1} = \dots = \alpha_{j_l} = 0$ olacak şekilde göz önünde bulundurulması gereken terimlerdir. (4.10)'dan

$$\begin{aligned}
& |R_{\gamma,i}(f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(z) - R_{\gamma,i}(f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(x)| \\
& \leq \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_l\}} \int_{3Q} |f_j(y)| dy_j \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 3Q)^{m-l}} \frac{|y|^\varepsilon \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_l\}} T^{y_j} |f_j(z) - f_j(x)| (y')^\gamma dy_j}{(|y_1| + \dots + |y_m|)^{nm+\varepsilon+\gamma+1}} \\
& \leq \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_l\}} \int_{3Q} |f_j(y)| dy_j \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 3Q)^{m-l}} \frac{|y|^\varepsilon \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_l\}} T^{y_j} |f_j(z) - f_j(x)| (y')^\gamma dy_j}{(|y_1| + \dots + |y_m|)^{nm+\varepsilon+\gamma+1}} \\
& \leq \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_l\}} \int_{3Q} |f_j(y)| dy_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{(3^k |Q|^{\frac{1}{n}})^{nm+\varepsilon+\gamma+1}} \int_{(3^{k+1}Q)^{m-l}} \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_l\}} T^{y_j} |f_j| (y')^\gamma dy_j \\
& \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{(3^k |Q|^{\frac{1}{n}})^{nm+\varepsilon+\gamma+1}} \int_{(3^{k+1}Q)^m} \prod_{i=1}^m T^{y_i} |f_i(y_i)| (y')^\gamma d\vec{y},
\end{aligned}$$

elde edilir ve bir önceki durumda ele alınan ifadeye ulaşılır. Bu (4.18)'ü verir ve teoremin ispatını tamamlar. \square

4.5 Multilineer Maksimal Fonksiyon İçin Ağırlıklı Tahminler.

\mathcal{M}_γ 'nin çeşitli ağırlıklı uzaylarda sınırlılık özelliklerini araştırıyoruz.

Teorem 4.5.1. $j = 1, \dots, m$, $1 \leq p_j < \infty$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$ olsun. ν ve ω_j ağırlıklar olmak üzere

$$\|\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(\nu)} \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)} \quad (4.19)$$

eşitsizliğinin herhangi bir \vec{f} ile sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu \right)^{1/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{1-p'_j} \right)^{1/p'_j} < \infty \quad (4.20)$$

olmasıdır. Burada $p_j = 1$ durumunda $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{1-p'_j} \right)^{1/p'_j}$ ve $(\inf_Q \omega_j)^{-1}$ dir.

\mathcal{M}_γ için bu sonucun M_γ için Muckenhoupt'un zayıf tip karakterizasyonunun multilineer durumunun doğal bir uzantısıdır. Çünkü $m = 1$ olduğunda (4.2) değerini

elde ederiz. Ayrıca Lebesgue diferensiyellenebilme teoremi ile (4.20) durumu göz önünde bulundurulursa hemen hemen $\nu(x) \leq c \prod_{j=1}^m \omega_j(x)^{p/p_j}$ dir. Bu, çok ağırlıklar için A_p Muckenhoupt sınıflarının bir analogunu tanımlamanın bir yolunu önerir.

Kanıt. İspatı, lineer durumuna benzer şekilde yapacağız (Bakınız (Muckenhoupt,1972)). Yalnızca tüm $j = 1, \dots, m$ için $p_j > 1$ olduğu durumu ele alacağız. Bazı $p_j = 1$ durumu için küçük değişiklikler, aynen lineer durumda olduğu gibi yapılabilir.

Farzedelim ki (4.19) sağlanır. Bu durumda herhangi bir \vec{f} için

$$\left(\int_Q \nu \right)^{1/p} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_Q \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j \chi_Q\|_{L^{p_j}(\omega_j)}. \quad (4.21)$$

elde edilir. Burada $f_j = \omega_j^{-1/(p_j-1)}$ alındığında, (3.4) elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki (4.20) sağlanır. Bu durumda, Hölder eşitsizliğinden (4.21) 'i elde eder ve (4.21) 'den

$$\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x) \leq C \prod_{j=1}^m M_{\nu, \gamma}^c(|f_j|^{p_j} \omega_j / \nu)(x)^{\frac{1}{p_j}},$$

eşitsizliği elde ederiz. Burada $M_{\nu, \gamma}^c$ ağırlıklı ortalanmış maksimal fonksiyonu gösterir. Bundan, $M_{\nu, \gamma}^c$ 'nin ν 'ye göre (1, 1) zayıf tipten olduğu ve Hölder eşitsizliğinden ((Grafakos,2004) s.15 'e bakınız)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})\|_{L^{p, \infty}(\nu)} &\leq C \left\| \prod_{j=1}^m M_{\nu, \gamma}^c(|f_j|^{p_j} \omega_j / \nu)^{1/p_j} \right\|_{L^{p, \infty}(\nu)} \\ &\leq C \left\| \prod_{j=1}^m M_{\nu, \gamma}^c(|f_j|^{p_j} \omega_j / \nu)^{1/p_j} \right\|_{L^{p_j, \infty}(\nu)} \\ &= C \left\| \prod_{j=1}^m M_{\nu, \gamma}^c(|f_j|^{p_j} \omega_j / \nu)^{1/p_j} \right\|_{L^{1, \infty}(\nu)}^{1/p_j} \\ &\leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)}. \end{aligned}$$

bu sonucu elde edip teoremin ispatını yaparız. □

Tanım 4.5.2. p_1, \dots, p_m , m tane üssü için, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$ sayıları ile p 'yi ve $\vec{P} = (p_1, \dots, p_m)$ vektörü için de \vec{P} kullanılacaktır.

Tanım 4.5.3. $1 \leq p_1, \dots, p_m < \infty$ olsun. $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ verildiğinde

$$v_{\vec{\omega}} = \prod_{j=1}^m \omega_j^{p/p_j}$$

olarak alalım. Eğer

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v_{\vec{\omega}} \right)^{1/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{1-p'_j} \right)^{1/p'_j} < \infty \quad (4.22)$$

ise $\vec{\omega}$, $A_{\vec{P}}$ sınıfına aittir denir. $p_j = 1$ iken, $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{1-p'_j} \right)^{1/p'_j}$, $(\inf_Q \omega_j)^{-1}$ 'dir.

(4.22) ifadesine multilineer $A_{\vec{P}}$ şartı denir. Her bir \vec{P} için $A_{(1, \dots, 1)}$, $A_{\vec{P}}$ sınıfına ait olduğu göz önüne alındığında, $A_{\vec{P}}$ sınıfları artan değildir. Remark 4.5.5 'teki örneğe bakınız.

Her bir ω_j 'nin A_{p_j} 'de olduğu göz önüne alındığında, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v_{\vec{\omega}} \right)^{1/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{1-p'_j} \right)^{1/p'_j} \\ & \leq \sup_Q \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j \right)^{\frac{1}{p_j}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{1-p'_j} \right)^{1/p'_j} \leq \infty, \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\prod_{j=1}^m A_{p_j} \subset A_{\vec{P}}$$

dir. Remark 4.5.4'de gösterilmiştir ki, bu kapsama kesindir. Çünkü genelde her j için $\omega_j \in L_{loc}^1$ olduğunda $\vec{\omega} \in A_{\vec{P}}$ sağlanmaz.

Yine Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v_{\vec{\omega}} \right)^{1/mp} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v_{\vec{\omega}}^{-1/mp-1} \right)^{mp-1/mp} \\ & \leq \sup_Q \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j \right)^{1/mp_j} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j}-1} \right)^{(p_j-1)/mp_j} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $m - \frac{1}{p} = \sum p_j - 1/p_j$ kullanılmıştır. $v_{\vec{\omega}}$ 'nin A_{mp} sınıfına ait olduğunu verir.

Uyarı 4.5.4. $\vec{\omega} \in A_{\vec{P}}$ koşulu genel olarak herhangi bir j için $\omega_j \in L_{loc}^1$ anlamına gelmez. Örneğin,

$$\omega_1 = \frac{\chi_{[0,2]}(x)}{|x-1|} + \chi_{\mathbb{R}/[0,2]}(x)$$

alalım ve $j = 2, \dots, m$ için $\omega_j(x) = \frac{1}{x}$ 'dir. O halde tanımı kullanarak $\nu_{\vec{\omega}} \in A_1$ 'i kontrol etmek zor değildir. Ayrıca $\inf_Q \nu_{\vec{\omega}} \sim \prod_{j=1}^m \inf_Q \omega_j^{p/p_j}$ olup bu son iki durum birlikte $\vec{\omega} \in A_{\vec{P}}$ kolayca gösterir.

Uyarı 4.5.5. $A_{\vec{P}}$ sınıfı artan değildir.

$\vec{P} \lesssim \vec{Q}$ her j için $p_j \leq q_j$ ile verilen $\vec{P} = (p_1, \dots, p_m)$ ve $\vec{Q} = (q_1, \dots, q_m)$ vektörler arasındaki kısmi mertebe ilişkisini düşünelim. $\vec{P} \lesssim \vec{Q}$ için,

$$\prod_{j=1}^m A_{p_j} \subseteq \prod_{j=1}^m A_{q_j}$$

vardır ama $A_{\vec{P}}, A_{\vec{Q}}$ 'da yer almamaktadır. Bunu görmek için, $n = 1, m = 2, \vec{P} = (p_1, p_2) = (2, 2)$ olarak alalım. Bu durumda

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2) = (|x|^{-5/3}, 1)$$

$\omega_1^{1/2} \in A_1$ 'den $\vec{\omega} \in A_{\vec{P}}$ olduğunu görebiliriz. Ayrıca, uygun bir büyük kuvvete yükseltilmiş ω lokal olarak integrallenemez, $\vec{Q} = (2, 6)$ ise $\vec{\omega} \notin A_{\vec{Q}}$ olduğunu görmek kolaydır.

Burada daha genel bir şeyin olduğu ve çoklineer $A_{\vec{p}}$ koşulu lineer A_p sınıflarına göre aşağıdaki ilginç karakterizasyona sahip olduğu ortaya çıkar.

Teorem 4.5.6. $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ ve $1 \leq p_1, \dots, p_m < \infty$ olsun. $\omega \in A_{\vec{p}}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \omega_j^{1-p'_j} \in A_{mp'_j}, j = 1, \dots, m \\ \nu_{\vec{\omega}} \in A_{mp}, \end{cases} \quad (4.23)$$

dir. Burada $p_j = 1$ için $\omega_j^{1-p'_j} \in A_{mp'_j}$, koşulu $\omega_j^{(1/m)} \in A_1$ 'dir.

($m = 1$) lineer durumda (4.23) 'da bulunan her iki şart aynı A_p koşulunu temsil eder. Ancak, $m \geq 2$ olduğunda (4.23) 'da yer alan iki koşulun hiçbiri diğerini sağlamaz.

Teorem ayrıca m indisi arttıkça $A_{\vec{p}}$ koşulunun zayıfladığını gösterir. Teorem 4.5.6, tek ağırlıklı \mathcal{M} için kuvvetli tipli eşitsizliğin aşağıdaki karakterizasyonunda önemli bir rol oynar.

Kanıt. İlk önce en az bir $p_j > 1$ olduğunu göz önüne alalım. Genelliği bozmadan kabul edelim ki $j = l + 1, \dots, m$ için $p_1, \dots, p_l = 1, 0 \leq l < m$ ve $p_j > 1$ dir. $\vec{\omega}$ 'nin, multilinear $A_{\vec{p}}$ koşulunu sağladığını kabul edelim. $j \geq l + 1$ alalım ve

$$q_j = p(m - 1 + \frac{1}{p_j}) \text{ ve } q_i = \frac{p_i}{p_i - 1} \frac{q_j}{p}, i \neq j, i \geq l + 1$$

sayılarını tanımlayalım. İlk önce $j \geq l + 1$ için $\omega_j^{1-p_j} \in A_{mp'_j}$ olduğunu kanıtlayalım. Yani,

$$\left(\int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}} \right) \left(\int_Q \omega_j^{\frac{p}{p_j q_j}} \right)^{\frac{q_j p_j}{p(p_j-1)}} \leq c|Q|^{\frac{mp_j}{p_j-1}}. \quad (4.24)$$

dir.

$$\sum_{i=l+1}^m \frac{1}{q_i} = \frac{1}{m-1 + \frac{1}{p_j}} \left(\frac{1}{p} + \sum_{i=l+1, i \neq j}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \right) = 1,$$

olduğundan, Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned} \int_Q \omega_j^{\frac{p}{p_j q_j}} &= \int_Q \left(\prod_{i=l+1}^m \omega_i^{\frac{p}{p_i q_j}} \right) \left(\prod_{i=l+1, i \neq j}^m \omega_i^{-\frac{p}{p_i q_j}} \right) \\ &\leq \left(\int_Q \prod_{i=l+1}^m \omega_i^{\frac{p}{p_i}} \right)^{1/q_j} \prod_{i=l+1, i \neq j}^m \left(\int_Q \omega_i^{-\frac{1}{p_i-1}} \right)^{1/q_i} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik ve $A_{\vec{p}}$ koşulundan (4.24) 'yı kolayca elde ederiz.

Daha sonra, $\nu_{\vec{\omega}} \in A_{mp}$ olduğunu göstereceğiz. $j \geq l+1$ ve $s_j = (m-1/p)p'_j$ olarak alalım. Bu durumda $\sum_{j=l+1}^m \frac{1}{s_j} = 1$ elde edilir ve buradan, Hölder eşitsizliğinden

$$\int_Q \prod_{j=l+1}^m \omega_j^{-\frac{p}{p_j(p_m-1)}} \leq \prod_{j=l+1}^m \left(\int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}} \right)^{1/s_j}. \quad (4.25)$$

elde edilir. Böylece

$$\int_Q (\nu_{\vec{\omega}})^{-\frac{1}{pm-1}} \leq \prod_{j=1}^l (\inf_Q \omega_j)^{-\frac{p}{pm-1}} \prod_{j=l+1}^m \left(\int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}} \right)^{1/s_j}.$$

dir. Bu eşitsizlik ve $A_{\vec{p}}$ koşulu göz önüne alındığında $\nu_{\vec{\omega}} \in A_{mp}$ olur. Şimdi varsayalım ki $l > 0$ 'dir ve $\omega_j^{1/m} \in A_1$ olduğunu gösterelim. $j = 1, \dots, m, 1 \leq i_0 \leq l$ alalım. Hölder eşitsizliği ve (4.25) 'den,

$$\begin{aligned} \int_Q \omega_{i_0}^{1/m} &\leq \left(\int_Q \omega_{i_0}^p \prod_{j=l+1}^m \omega_j^{\frac{p}{p_j}} \right)^{\frac{1}{pm}} \left(\int_Q \omega_{i_0}^p \prod_{j=l+1}^m \omega_j^{-\frac{p}{p_j(p_m-1)}} \right)^{1-\frac{1}{pm}} \\ &\leq \left(\int_Q \omega_{i_0}^p \prod_{j=l+1}^m \omega_j^{\frac{p}{p_j}} \right)^{\frac{1}{pm}} \prod_{j=l+1}^m \left(\int_Q \omega_j^{1-p'_j} \right)^{\frac{1}{mp'_j}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ile $A_{\vec{p}}$ koşulu göz önüne alındığında $\omega_{i_0}^{1/m} \in A_1$ olduğunu gösterilmiş olur. Böylece $\vec{\omega} \in A_{\vec{p}}$ olduğunda (4.23) sağlandığı görülmektedir.

$\vec{\omega} \in A_{\vec{p}}$ ile (4.23) 'nın yeterli olduğunu ispat etmek için, ilk önce herhangi

bir ω_j ağırlığı

$$1 \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^{-\frac{1}{pm-1}} \right)^{m-1/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{\frac{1}{p_j(m-1)+1}} \right)^{m-1+\frac{1}{p_j}} \quad (4.26)$$

olduğunu göz önüne alalım. O halde, $\alpha = \frac{1}{1+pm(m-1)}$ ve $\alpha_j = \frac{1/p+m(m-1)}{1/p_j+m-1}$ olsun. Bu durumda, $\sum_{j=1}^m 1/\alpha_j = 1$ dir ve Hölder eşitsizliğinden

$$\int_Q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^\alpha \leq \prod_{j=1}^m \left(\int_Q \omega_j^{\frac{\alpha p \alpha_j}{p_j}} \right)^{\frac{1}{\alpha_j}} = \prod_{j=1}^m \left(\int_Q \omega_j^{\frac{1}{p_j(m-1)+1}} \right)^{\alpha p(m-1+\frac{1}{p_j})}$$

olur.

Yine Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$1 \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^\alpha \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^{-\frac{1}{pm-1}} \right)^{\alpha(pm-1)} \quad (4.27)$$

elde edilir. Bir öncekiyle birlikte bu eşitsizlik (4.27) sonucunu verir. Sonuç olarak (4.27), (4.23) ile $\vec{\omega} \in A_{\vec{p}}$ elde edilir.

Her $j = 1, \dots, m$ için $p_j = 1$ olduğunu göz önüne alalım. Kabul edelim ki $\vec{\omega} \in A_{(1, \dots, 1)}$, yani

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\prod_{j=1}^m \omega_j \right)^{\frac{1}{m}} \right)^m \leq c \prod_{j=1}^m \inf_Q \omega_j \quad (4.28)$$

dir. Açıktır ki (4.28) şunu gösterir: $j = 1, \dots, m$, $\omega_j^{1/m} \in A_1$ ve $\nu_{\vec{\omega}} \in A_1$ olduğundan (4.28) sağlanır. Tersine, bu son koşulları Hölder'in eşitsizliğiyle ele aldığımızda

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\prod_{j=1}^m \omega_j \right)^{\frac{1}{m}} \right)^m &\leq c \inf_Q \left(\prod_{j=1}^m \omega_j \right) \leq c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\prod_{j=1}^m \omega_j \right)^{\frac{1}{m^2}} \right)^{m^2} \\ &\leq c \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{\frac{1}{m}} \right)^m \leq c \prod_{j=1}^m \inf_Q \omega_j \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $j = 1, \dots, m$ iken $\vec{\omega} \in A_{(1, \dots, 1)}$ 'in $\omega_j^{1/m} \in A_1$ 'e ve $\nu_{\vec{\omega}} \in A_1$ eşdeğer olduğunu kanıtlar.

Böylece teorem ispat edilmiş olur . □

Teorem 4.5.7.

$j = 1, \dots, m, 1 < p_j < \infty$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$ olsun. Bu durumda her \vec{f} için

$$\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^p(v_{\vec{\omega}})} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)} \quad (4.29)$$

eşitsizliğin sağlayan gerek ve yeter şart $\vec{\omega}$ nin $A_{\vec{p}}$ şartını sağlamasıdır.

Kanıt. Gereklilik, Teorem 4.5.1'ten gelir, bu yüzden biz sadece yeterliliğini kanıtlamak zorundayız. Farklı fikirlere dayalı iki kanıt veriyoruz. Onlar bazılarında (Coifman ve Fefferman,1974) ve (Christ ve Fefferman,1983) 'de lineer durumda verilen farklı ispatlara paraleldir.

1. Kanıt

$\vec{\omega} \in A_{\vec{p}}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 4.5.6'dan her $\omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}}$ ters Hölder eşitsizliği sağlar. Yani $r_j > 1$ ve $c > 0$ vardır, her bir $1 \leq r \leq r_j$ için ve herhangi Q küpü için,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-\frac{r}{p_j-1}} \right)^{1/r} \leq c \frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}} \quad (4.30)$$

$$\xi = \min_{1 \leq j \leq m} r_j \text{ ve } q = \max_{1 \leq j \leq m} \frac{pm}{pm + (1 - \frac{1}{\xi})(p_j - 1)},$$

olsun ve herhangi j için $qp_j > 1$ olduğunu kabul edelim.

Aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını iddia edelim:

$$\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})(x) \leq c \prod_{j=1}^m M_{\nu_{\gamma, \vec{\omega}}}^c ((|f_j|^{p_j} \omega_j / \nu_{\gamma, \vec{\omega}})^q)(x)^{1/pq_j}. \quad (4.31)$$

Bu durumda Hölder eşitsizliğinden teoremin kanıtı ve maksimal operatörün sınırlılığı görülür .

İddiayı göstermek için önce Hölder eşitsizliğine göre

$$\int_Q |f_j| \leq \left(\int_Q |f_j|^{p_j q} \omega_j^q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^{1-q} \right)^{1/q p_j} \left(\int_Q (\omega_j^q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^{1-q})^{-\frac{1}{q p_j - 1}} \right)^{1 - \frac{1}{q p_j}} \quad (4.32)$$

$\gamma_j = \frac{q p_j - 1}{(1-q)(p m - 1)}$ olarak alalım. q 'nun tanımından, herhangi j için $\gamma_j > 1$ dir. Hölder eşitsizliğini yeniden uygularsak

$$\int_Q (\omega_j^q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^{1-q})^{-\frac{1}{q p_j - 1}} \leq \left(\int_Q \omega_j^{-\frac{q \gamma_j'}{q p_j - 1}} \right)^{1/\gamma_j'} \left(\int_Q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^{-\frac{1}{p m - 1}} \right)^{1/\gamma_j} \quad (4.33)$$

(4.33) elde edilir. Şimdi herhangi bir j için,

$$\frac{q(p_j - 1)\gamma_j'}{q p_j - 1} = \frac{q(p_j - 1)}{q(p_j - 1) - (1 - q)p m} \leq \xi.$$

olduğunu göz önüne alalım. Bu nedenle, (4.30) 'den

$$\int_Q \omega_j^{-\frac{q \gamma_j'}{q p_j - 1}} = \int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j - 1} \frac{q(p_j - 1)\gamma_j'}{q p_j - 1}} \quad (4.34)$$

$$\leq c |Q|^{1 - \frac{q(p_j - 1)\gamma_j'}{q p_j - 1}} \left(\int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j - 1}} \right)^{\frac{q(p_j - 1)\gamma_j'}{q p_j - 1}}$$

(4.33), (4.34) uygulayarak ve $\nu_{\gamma, \vec{\omega}} \in A_{p m}$ gerçeğini göz önünde bulundurursak, elde ederiz ki

$$\begin{aligned} & \left(\int_Q (\omega_j^q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^{1-q})^{-\frac{1}{q p_j - 1}} \right)^{1 - \frac{1}{q p_j}} \\ & \leq c |Q|^{-\frac{p m (1-q)}{q p_j}} \left(\int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j - 1}} \right)^{1 - \frac{1}{p_j}} \left(\int_Q \nu_{\gamma, \vec{\omega}}^{-\frac{1}{p m - 1}} \right)^{\frac{(1-q)(p m - 1)}{q p_j}} \\ & \leq \frac{c}{\nu_{\gamma, \vec{\omega}}(Q)^{\frac{1-q}{q p_j}}} \left(\int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j - 1}} \right)^{1 - \frac{1}{p_j}}. \end{aligned}$$

Son olarak, (4.32), $A_{\vec{p}}$ ve bu eşitsizlikler göz önüne alındığında

$$\prod_{j=1}^m |f_j|_Q \leq c \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\nu_{\gamma, \vec{\omega}}(Q)} \int_Q (|f_j|^{p_j} \omega_j / \nu_{\gamma, \vec{\omega}})^q \nu_{\gamma, \vec{\omega}} \right)^{1/q p_j}$$

elde edilir. Bu (4.31) verir ve dolayısıyla teorem ispatlanmış olur.

2. Kanıt

Önce \mathcal{M}_γ 'nin diyadik versiyonunun ispatını verelim.

$$\mathcal{M}_\gamma^d(\vec{f})(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{D}} \prod_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \int_Q T^{y_i} |f_i(x_i)| (y')^\gamma dy_i,$$

\mathcal{D} , \mathbb{R}^n 'deki tüm diyadik küplerin ailesidir.

$$\|\mathcal{M}_\gamma^d(\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})} \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)}$$

göz önüne alalım

$$\|\mathcal{M}_\gamma^d(\vec{f}_\sigma)\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})} \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\sigma_j)}, \quad (4.35)$$

$\sigma_j = \omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}}$ ve $\vec{f}_\sigma = (f_1 \sigma_1, \dots, f_m \sigma_m)$. $a > 2^{mn}$ alalım. Her bir k tamsayısı için

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_\gamma^d(\vec{f})(x) > a^k\}.$$

olsun. Klasik Calderon-Zygmund dağılımının $\mathcal{M}_\gamma^d(\vec{f})$ sağlayan tam bir benzerinin olduğunu görmek kolaydır. Bu nedenle

$$a^k < \prod_{i=1}^m \frac{1}{|Q_{k,j}|} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i(y_i)| dy_i \leq 2^{nm} a^k \quad (4.36)$$

olacak şekilde çakışmayan maksimal diyadik $\Omega_k = \cup_j Q_{k,j}$ ve $\{Q_{k,j}\}$ küpler ailesi vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \int_{(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}_\gamma^d(\vec{f}_\sigma)^p \nu_{\gamma, \vec{\omega}} dx = \sum_k \int_{\Omega_k / \Omega_{k+1}} \mathcal{M}_\gamma^d(\vec{f}_\sigma)^p \nu_{\gamma, \vec{\omega}} dx \\
& \leq a^p \sum_k a^{kp} \nu_{\gamma, \vec{\omega}}(\Omega_k) = a^p \sum_{k,j} a^{kp} \nu_{\gamma, \vec{\omega}}(Q_{k,j}) \\
& \leq a^p \sum_{k,j} \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{|Q_{k,j}|} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i(y_i)| dy_i \right)^p \nu_{\gamma, \vec{\omega}}(Q_{k,j}) \\
& = a^p \sum_{k,j} \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i(Q_{k,j})} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i(y_i)| dy_i \right)^p \left(\prod_{i=1}^m \frac{\sigma_i(Q_{k,j})}{|Q_{k,j}|} \right)^p \nu_{\gamma, \vec{\omega}}(Q_{k,j}) \\
& \leq c \sum_{k,j} \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i(Q_{k,j})} \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i(y_i)| dy_i \right)^p \prod_{i=1}^m \sigma_i(Q_{k,j})^{p/p_i}
\end{aligned}$$

olur. Burada, son tahminde $A_{\vec{p}}$ koşulu kullanılmıştır. $E_{k,j} = Q_{k,j} \setminus Q_{k,j} \cap \Omega_{k+1}$ olsun. Her bir k, j için

$$|Q_{k,j}| < \beta |E_{k,j}| \quad (4.37)$$

olacak şekilde bir $\beta > 0$ sabiti vardır. Böylece, (4.36) ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
|Q_{k,j} \cap \Omega_{k+1}| &= \sum_{Q_{k+1,l} \subset Q_{k,j}} |Q_{k+1,l}| \\
&< \frac{1}{a^{k+1/m}} \sum_{Q_{k+1,l} \subset Q_{k,j}} \left(\prod_{i=1}^m \int_{Q_{k+1,l}} |f_i \sigma_i| \right)^{1/m} \\
&\leq \left(\frac{1}{a^{k+1}} \prod_{i=1}^m \int_{Q_{k,j}} |f_i \sigma_i| \right)^{1/m} \frac{2^n}{a^{1/m}} |Q_{k,j}|,
\end{aligned}$$

elde edilip, uygun $q_i > 1$ ve her bir σ_i için Teorem 4.5.6'dan, dolayı A_{q_i} koşulunu sağlar. A_p şartından ve Hölder eşitsizliğinden dolayı herhangi bir Q küpü ve ölçülebilir herhangi bir $E \subset Q$ alt kümesi için,

$$\left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{q_i} \leq c \frac{\sigma_i(E)}{\sigma_i(Q)}.$$

olacak şekilde sabit bir c vardır. Bu eşitsizlik ile (4.37) göze alındığında, her bir $i = 1, \dots, m$ ve her bir k, j için

$$\sigma_i(Q_{k,j}) \leq \gamma_i \sigma_i(E_{k,j})$$

elde edilir. Buradan, Hölder eşitsizliği ve $E_{k,j}$ kümeleri ayrık olduğu için ($\gamma = \max_i \gamma_i$ ile)

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}_\gamma^d(\vec{f}_\sigma)^p \nu_{\vec{\omega}} dx \\ & \leq c \sum_{k,j} \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i(Q_{k,j})} \int_{Q_{k,j}} T^{y_i} |f_i \sigma_i(x_i)| (y')^\gamma dy_i \right)^p \prod_{i=1}^m \sigma_i(E_{k,j})^{p/p_i} \\ & \leq c \prod_{i=1}^m \left(\sum_{k,j} \left(\frac{1}{\sigma_i(Q_{k,j})} \int_{Q_{k,j}} T^{y_i} |f_i \sigma_i(x_i)| (y')^\gamma dy_i \right)^{p_i} \sigma_i(E_{k,j}) \right)^{p/p_i} \\ & \leq c \prod_{i=1}^m \left(\sum_{k,j} \int_{E_{k,j}} M_{\gamma, \sigma_i}(f_i)^{p_i} \sigma_i \right)^{p/p_i} \leq c \gamma \prod_{i=1}^m \left(\int_{(\mathbb{R}^n)} M_{\gamma, \sigma_i}(f_i)^{p_i} \sigma_i \right)^{p/p_i} \\ & \leq c \prod_{i=1}^m \left(\int_{(\mathbb{R}^n)} |f_i|^{p_i} \sigma_i \right)^{p/p_i}, \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte M_{σ_i} 'nin $L^{p_i}(\sigma_i)$ üzerindeki sınırlılığı kullanılmıştır. Diyadik durumda kanıt tamamlanmıştır. Yalnızca diyadik küpler için $\vec{\omega}$ ağırlığının $A_{\vec{P}}$ koşulunu sağladığını kabul etmek yeterlidir.

Diyadik durumdan genel duruma geçmek için elimizde bulunan araçları kullanırız. Fefferman-Stein (Fefferman ve Stein, 1971) sonucunun aşağıdaki kolay versiyonunu kullanacağız [22, s.431].

Lemma 4.5.8. Her bir k tam sayısı, \vec{f} , tüm \mathbb{R}^n deki x 'ler ve $p > 0$ için

$$\mathcal{M}_\gamma^k(\vec{f})(x)^p \leq \frac{c}{|Q_k|} \int_{Q_k} (\tau_{-t} \circ \mathcal{M}_\gamma^d \circ \tau_t)(\vec{f})(x)^p dt$$

olacak şekilde c sabiti vardır. Burada, c , n , m ve p 'ye bağlıdır, $\tau_t g(x) = g(x-t)$, Q_k , kenar uzunluğu $2k+2$ ve orijin merkezli bir küptür, ve \mathcal{M}_γ^k , \mathcal{M}_γ olarak tanımlanan operatördür, fakat küpler $2k$ 'den küçük kenarlı olan küplerdir.

Açıkça, (4.29) 'nin sol tarafını tahmin etmek için $\|\mathcal{M}_\gamma^k(\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\gamma, \vec{\omega}})}$ 'yi tahmin

etmek yeterlidir. Yukarıdaki eşitsizlikten ve Fubini teoreminden

$$\|\mathcal{M}_\gamma^k(\vec{f})\|_{L^p(\nu_\gamma, \vec{\omega})} \leq c \sup_t \|\tau_{-t} \circ \mathcal{M}_\gamma^d \circ \tau_t\|_{L^p(\nu_\gamma, \vec{\omega})}$$

elde edilir. Şimdi t sabitinden bağımsız $\|\tau_{-t} \circ \mathcal{M}_\gamma^d \circ \tau_t\|_{L^p(\nu_\gamma, \vec{\omega})}$ tahminini elde edelim.

$$\tau_{-t} \circ \mathcal{M}_\gamma^d \circ \tau_t : L^{p_1}(\omega_1) \times \cdots \times L^{p_m}(\omega_m) \rightarrow L^p(\vec{\omega})$$

t 'den bağımsız sabitli sınır eşdeğerdir

$$\mathcal{M}_\gamma^d : L^{p_1}(\tau_t \omega_1) \times \cdots \times L^{p_m}(\tau_t \omega_m) \rightarrow L^p(\tau_t(\vec{\omega}))$$

t 'den bağımsız sınırına denktir. Ancak $\tau_t(\vec{\omega})$, t 'den bağımsız sabitli $A_{\vec{p}}$ şartını sağlar. Çünkü $A_{\vec{p}}$ öteleme altında değişmezdir. Böylece, ispatın ilk kısmını uygulayabiliriz.

□

4.6 Multilinear Riesz Bessel Dönüşümleri İçin Ağırlıklı Tahminler.

$A_{\vec{p}}$ multilinear sınıflarının aynı zamanda multilinear Calderon-Zygmund operatörleri sınıfı olduğunu gösterdik. İlk olarak Teorem 4.4.5'ü kullanarak, Coifman-Fefferman teoreminin multilinear durumun genişlemesi olarak aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz (Coifman ve Fefferman,1974).

Sonuç 4.6.1. $R_{\gamma,i}$ bir m -lineer Calderon-Zygmund operatörü, ω , A_∞ 'da bir ağırlık ve $p > 0$ olsun. Kompakt desteğe sahip tüm sınırlı \vec{f} fonksiyonu için

$$\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \leq C \|\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \quad (4.38)$$

ve

$$\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma,\infty}(\omega)} \leq C \|\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma,\infty}(\omega)} \quad (4.39)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde bir C pozitif sabiti vardır Burada C , ω 'nin A_∞ sabitine bağlıdır.

İspat. Sağ taraf sonlu olduğundan (4.38) 'i ispatlamak yeterlidir. (4.4) ve (4.14)'i kullanarak

$$\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \leq \|M_{\gamma,\delta}(T(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \leq C\|M_{\gamma,\delta}^{\#}(T(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \leq C\|\mathcal{M}_{\gamma}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)}$$

elde edilir. Bu ise $\|M_{\gamma,\delta}(R_{\gamma,i}(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)}$ 'nin sonlu olduğunu gösterebilmemiz koşuluyla istenen sonucu verir. ω , A_{∞} 'da olduğundan, ω 'nin $0 < \max(1, pm) < p_0 < \infty$ için A_{p_0} 'da da olduğu görülmektedir. Böylece $\delta < p/p_0 < 1/m$ için yukarıdaki eşitsizliklerin yanı sıra,

$$\begin{aligned} \|M_{\gamma,\delta}(R_{\gamma,i}(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} &\leq \|M_{\gamma,p/p_0}(R_{\gamma,i}(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} = C\|M(R_{\gamma,i}(\vec{f})^{p/p_0})\|_{L^{p_0/p}(\omega)}^{p_0/p} \\ &\leq C\|(R_{\gamma,i}(\vec{f})^{p/p_0})\|_{L^{p_0/p}(\omega)}^{p_0/p} \leq C\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\|\mathcal{M}_{\gamma}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)}$ 'nin sonlu olan kompakt destekli her bir \vec{f} fonksiyonlar ailesi için $\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)}$ 'nin sonlu olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Bunun her zaman böyle olduğunu göreceğiz. Standart argümanlar aşağıdaki gibidir.

Yeterince 1'e yakın ve duali $q', pq' > 1/m$ olan q için ω ağırlığı da, L_{loc}^q aittir.

O halde, $\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L^p(B,\omega)}$ başlangıç noktasındaki herhangi bir B noktası; Hölder eşitsizliği ve $R_{\gamma,i}$ 'nin ağırlıksız teorisi tarafından sonludur. Öte yandan, bir yeterince büyük B noktası,

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) \geq C_1|x|^{-mn} \geq C_2|R_{\gamma,i}f(x)| \quad (4.40)$$

(elbette \vec{f} 'ye bağlı sabitlerle). Varsayımdan sonlu $\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)}$ ve (4.40)'dan, aşağıdaki sonuca varıyoruz

$$\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L^p(R^n \setminus B,\omega)} \leq \infty.$$

Benzer argümanlar (4.39) zayıf tip tahmini verir.

Sonuç 4.6.2. R_i bir m -lineer Riesz Bessel dönüşümü, ω , A_{∞} 'da bir ağırlık ve $p > 0$ olsun. Kompakt desteğe sahip her sınırlı \vec{f} fonksiyonu için

$$\|R_i(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \leq C\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \quad (4.41)$$

ve

$$\|R_i(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \leq C \|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \quad (4.42)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $C > 0$ vardır. Burada C , ω 'nin A_∞ sabitine bağlıdır.

Teorem 4.5.1, 4.5.6, 4.5.7 ve yukarıdaki Sonuç 4.6.1'den aşağıdaki ağırlıklı tahminleri elde ederiz.

Sonuç 4.6.3. $R_{\gamma,i}$, m -lineer Riesz Bessel dönüşümü, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$, ve $\vec{\omega}, A_{\vec{p}}$ koşulunu sağlasın. Bu durumda

(i) $1 < p_j < \infty, j = 1, \dots, m$ ise

$$\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)} \quad (4.43)$$

dir.

(ii) $1 \leq p_j < \infty, j = 1, \dots, m$ ve en az bir $p_j = 1$ ise

$$\|R_{\gamma,i}(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(\nu_{\vec{\omega}})} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)} \quad (4.44)$$

dir.

Kanıt. $\nu_{\vec{\omega}}, A_\infty$ 'da olduğundan ve $L_{p,\gamma}(\omega)$ uzayı ile basit fonksiyonlar uzayının kesişimi herhangi bir ω ağırlığı için $L_{p,\gamma}(\omega)$ uzayında yoğundur. Sonuç hemen öncekinden ve ağırlıklı uzaylarda \mathcal{M} 'in sınırlılık özelliklerinden görülebilir. \square

Sonuç 4.6.4. R_i , m -lineer B -Riesz dönüşümü, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$ ve $\vec{\omega}, A_{\vec{p}}$ koşulunu sağlasın.

(i) Eğer $1 < p_j < \infty, j = 1, \dots, m$ ise bu durumda

$$\|R_i(\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)} \quad (4.45)$$

dir.

(ii) Eğer $1 \leq p_j < \infty, j = 1, \dots, m$ ve en az bir $p_j = 1$ ise, bu durumda

$$\|R_i(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(\nu_{\vec{\omega}})} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)} \quad (4.46)$$

dir.

Daha önce ifade ettiğimiz gibi, \mathcal{M}_γ , (4.29) 'de verilen M_γ 'nin m -katlı çarpımı ile değiştirilemez. Bu nedenle Sonuç 4.6.3, daha önce bilinen tahminlerden elde edilemez. Burada $R_{\gamma,i}(\vec{f}), \prod_{j=1}^m M_\gamma f_j$ tarafından sınırlandırılır.

$A_{\vec{p}}$ sınıfları aynı zamanda belirli multilineer singüler integral operatörlerin sınırlılığı ile karakterize edilir.

Tanım 4.6.5. $i = 1, \dots, n$ için, m - lineer i -inci Riesz dönüşümü şu şekilde tanımlanır

$$R_{\gamma,i}(\vec{f})(x) = \text{p.v.} \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^m (x_i - (y_j)_i)}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|^2)^{\frac{nm+1}{2}}} f_1(y_1) \dots f_m(y_m) dy_1 \dots dy_m,$$

burada $(y_j)_i, y_j$ 'nin i -inci koordinatını gösterir.

Tanım 4.6.6. $i = 1, \dots, n$ için, m - lineer i -inci Riesz dönüşümü şu şekilde tanımlanır

$$R_{\gamma,i}(\vec{f})(x) = \text{p.v.} \int_{(\mathbb{R}_+^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^m (x_i - (y_j)_i)}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|^2)^{\frac{nm+1}{2}}} f_1(y_1) \dots f_m(y_m)(y')^\gamma dy_1 \dots dy_m,$$

burada $(y_j)_i, y_j$ 'nin i -inci koordinatını gösterir. Buradan multilineer Riesz-Bessel dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} (R_{\gamma,i} \vec{f})(x) &= \text{p.v.} \int_{(\mathbb{R}_+^n)^m} \frac{(x_i - y_i)}{(|x - y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y) dy \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^m (x_i - (y_j)_i)}{(\sum_{j=1}^m |x - y_j|^2)^{\frac{mn+1}{2}}} \prod_{j=1}^m f_j(y_j)(y')^\gamma dy_1 \dots dy_m \\ (R_{\gamma,i} \vec{f})(x) &= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{j=1}^m (y_j)_i}{(\sum_{j=1}^m |y_j|^2)^{\frac{mn+1}{2}}} f_1(x - y_1) f_2(x - y_2) \dots f_m(x - y_m)(y')^\gamma dy_1 \dots dy_m \end{aligned}$$

$x - y_j = t_j$ dönüşümünü kullanacağız, bu durumda

$$(R_{\gamma,i} \vec{f})(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{\sum_{j=1}^m (t_j)^i}{\left(\sum_{j=1}^m |t_j|^2\right)^{\frac{nm+1}{2}}} f_1(x - t_1) \dots f_m(x - t_m) (t')^\gamma dt_1 \dots dt_m$$

$$f_j(x - t_j) = T^{t_j} f_j(x) \text{ iken}$$

$$R_{\gamma,i}(\vec{f})(x) = \text{p.v.} \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^m (t_j)^i}{\left(\sum_{j=1}^m |t_j|^2\right)^{\frac{nm+1}{2}}} T^{t_1} f_1(x) \dots T^{t_m} f_m(x) (t')^\gamma dt_1 \dots dt_m$$

Teorem 4.6.7. m -lineer $R_{\gamma,i}(\vec{f})$ Riesz dönüşümlerinin her biri için (4.45) veya (4.46) sağlanırsa, $\vec{\omega}$, $A_{\vec{p}}$ sınıfına aittir.

Kanıt. Tek boyutlu durumu göz önüne alalım. Yüksek boyutlu olan işaret açısından daha karmaşıktır. m -lineer B -Riesz dönüşümlerinin toplamı

$$R_{\gamma,i}(\vec{f})(x) = \text{p.v.} \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^m (y_j)^i}{\left(\sum_{j=1}^m |y_j|^2\right)^{\frac{nm+1}{2}}} T^{y_1} f_1(x) \dots T^{y_m} f_m(x) (y')^\gamma dy_1 \dots dy_m$$

olsun. Açıkça, eğer (4.46) geçerliyse $\vec{\omega} \in A_{\vec{p}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Lineer durumda kullanılan bazı değişikliklerle benzer bir argümanı ele alabiliriz (bkz. [(Garcia-Cuerva ve Rubio de Francia, 1985), s. 417]).

Her $f_i \geq 0$ ve $\text{supp}(f_j) \subset I$ olduğunda, $x \in I^+$ ve her j için $y_j \in I$ ise, aşağıdaki

$$\frac{\sum_{j=1}^m (y_j)}{\left(\sum_{j=1}^m |y_j|\right)^{m+1}} = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m |y_j|\right)^m} \geq \frac{c^m}{|I|^m}$$

elde edilir. Buradan, $x \in I^+$ ise

$$R_{\gamma,i}(\vec{f})(x) \geq c_m \prod_{j=1}^m T^{y_j} |f_j(x)|_I$$

eşitsizliğini elde eder ve $0 < \lambda < c_m \prod_{j=1}^m T^{y_j} |f_j|_I$ iken

$$I^+ \subset \{x : |R_{\gamma,i}(\vec{f})(x)| > \lambda\},$$

buluruz. Tam olarak Teorem 4.5.1'teki gibi tartışarak, bundan şunu elde ederiz;

herhangi bir I aralığı için,

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_{I^+} \nu_{\vec{\omega}}\right)^{1/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|I|} \int_I \omega_j^{-1/p_j-1}\right)^{1-1/p_j} \leq c \quad (4.47)$$

dir. Benzer şekilde, (4.46) 'un herhangi bir I aralığı için,

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \nu_{\vec{\omega}}\right)^{1/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|I|} \int_{I^+} \omega_j^{-1/p_j-1}\right)^{1-1/p_j} \leq c. \quad (4.48)$$

(4.48) 'den, (4.5.6)' daki ikinci koşulun ispatının aynı argümanını kullanarak, bunu herhangi bir I aralığı için alır,

$$\left(\int_I \nu_{\vec{\omega}}\right) \left(\int_{I^+} \nu_{\vec{\omega}}^{-\frac{1}{pm-1}}\right)^{pm-1} \leq c|I|^{pm}.$$

'dır. Buradan, $\nu_{\vec{\omega}} \in A_{pm}^+$ olur. Son olarak, (4.3) ve (4.46) 'u birleştirir $\vec{\omega} \in A_{\vec{p}}$ olduğunu görebiliriz ve bu kanıtı tamamlar. \square

4.7 Zayıf tip eşitsizlikler.

$\prod_{j=1}^m Mf_j$ ile tanımlanan multilineer operatör, kısım 4.6 'te elde edilen ağırlıklı tahminleri elde etmek için oldukça büyüktür. Bu kısımda, (Cruz-Uribe, Martell ve Perez,2005) 'te elde edilen karışık zayıf tipli eşitsizlikler yardımıyla sharp ağırlıklı zayıf tip tahminlerin sağlandığını göstereceğiz.

Aşağıdaki Klasik Fefferman-Stein eşitsizliğinden,

$$\|Mf\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \leq C\|f\|_{L^p(M\omega)} \quad (1 < p < \infty)$$

her j için $p_j > 1$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$ ise

$$\left\| \prod_{j=1}^m Mf_j \right\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(M\omega_j)} \quad (4.49)$$

olur. Bununla birlikte, eğer en az bir $p_j = 1$ ise, bu durumda keyfi ω_j ağırlıkları için (4.46) 'un bir zayıf tip benzeri bile doğru değildir; aşağıdaki açıklamaya bakınız.

Uyarı 4.7.1. (4.49) 'nin zayıf tip bir benzeri, en az bir $p_j = 1$ ise keyfi ω_j ağırlıklar için doğru değildir.

$n = 1$ ve $m = 2$ alalım. $1 \leq p_1 < \infty$ ve $p_2 = 1$ olsun. $k \geq 4$ için $J_k = \left(k + \frac{1}{4k}, k + \frac{1}{2k}\right)$. Şimdi $\omega_1(x) = \sum_{k=4}^{\infty} k \chi_{J_k}(x)$ ve $\omega_2(x) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{J_k}(x)$ alalım.

$$\|Mf_1 Mf_2\|_{L^{p,\infty}(\nu_{\vec{\omega}})} \leq c \|f_1\|_{L^{p_1}(M\omega_1)} \|f_2\|_{L^1(M\omega_2)} \quad (4.50)$$

eşitsizliğinin f_1 ve f_2 'den bağımsız olarak sabit bir c ile sağlandığını varsayalım. $f_1 = \chi_{(0,1)}$ ve $f_2 = \sum_{k=1}^N \delta_k$, burada δ_k , k noktasındaki Dirac kütesidir.

$$\bigcup_{k=4}^N J_k \subset \{x : Mf_1(x)Mf_2(x) > 1\}$$

olduğu basit hesaplamalarla görülür. $\|f_1\|_{L^{p_1}(M\omega_1)} \leq c$ ve $M\omega_2(k) \leq c/k$ 'dir. Buradan, (4.50) gösterir ki; $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq c$ açıkça bir çelişkidir.

Diğer taraftan, her $p_j = 1$ ve her ω_j ağırlıklarının A_1 'de olduğunu varsayarak, aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.7.2. Kabul edelim ki ω_i her $i = 1, 2, \dots, m$ için, A_1 sınıfında bir ağırlık ve $\nu = (\prod_{j=1}^m \omega_j)^{1/m}$ 'dir.

$$\left\| \prod_{j=1}^m M_{\gamma} f_j \right\|_{L^{\frac{1}{m}, \infty}(\nu)} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^1(\omega_j)}. \quad (4.51)$$

'dir.

Bu teoremi ispat etmek için karışık zayıf tip eşitsizliklerle ilgili Cruz-Urbe, Martell ve Pérez 'in elde ettikleri bir sonuç kullanılacaktır (Cruz-Urbe, Martell ve Pérez, 2005).

Teorem 4.7.2'yi ispatlamadan önce, birkaç yardımcı bilgiye ihtiyaç vardır. RH_{∞} ile,

$$\sup_Q w \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q w$$

eşitsizliğini sağlayan w ağırlıklarının sınıfını gösterelim. [(Cruz-Uribe ve Neugebauer,1995), Th. 4.8]'de gösterildi ki, $f, g \in RH_\infty$ ise, bu durumda $fg \in RH_\infty$ 'dır. Özellikle, herhangi bir f için $(Mf)^{-1} \in RH_\infty$ olduğundan ,

$$v = \frac{1}{Mf_1 Mf_2 \dots Mf_s} \in RH_\infty \quad (4.52)$$

elde edilir. (Cruz-Uribe, Martell ve Perez,2005) çalışmada ispat edilmiştir ki eğer $u \in A_1$ ve $v \in RH_\infty$ ise, bu durumda her $f \in L_u^1$ için,

$$\|Mf/v\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c\|f\|_{L^1(u)} \quad (4.53)$$

'dir.

Kanıt.

$$\mu_\nu(\lambda) = \nu\{x : \prod_{j=1}^m M_\gamma f_j(x) > \lambda\}$$

olsun.

$$\mu_\nu(x) \leq \frac{c}{\lambda^{\frac{1}{m}}} \left(\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^1(\omega_j)} \right)^{\frac{1}{m}} + \mu_\nu(2\lambda). \quad (4.54)$$

olduğunu gösterelim. Gerçekten (4.54) tekrarlanarak (4.51) zayıf tipteki tahmini kolayca görülür.

$$E = \{x : \lambda < \prod_{j=1}^m M_\gamma f_j \leq 2\lambda\} \text{ ve } \nu_i = \prod_{j=1, j \neq i}^m (M_\gamma f_j)^{-1}$$

tanımlayalım. Hölder'in eşitsizliğini (4.52) ve (4.53) ile birlikte kullanarak,

$$\begin{aligned}
\mu_\nu(\lambda) - \mu_\nu(2\lambda) &= \nu(E) \leq \lambda^{-1/m} \int_E \left(\prod_{j=1}^m M_\gamma f_j \omega_j \right)^{1/m} \\
&\leq \lambda^{-1/m} \prod_{j=1}^m \left(\int_E M_\gamma f_j \omega_j \right)^{1/m} \\
&\leq 2\lambda^{1-1/m} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\{M_\gamma f_j > \lambda \nu_j\}} \nu_j \omega_j \right)^{1/m} \\
&\leq c\lambda^{-\frac{1}{m}} \left(\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^1(\omega_j)} \right)^{1/m}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da (4.54)'yi ve teoremi kanıtlıyor. \square

Sonuç olarak aşağıdaki basit önerme $\prod_{j=1}^m M_\gamma f_j$ çarpımının yerine $\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})$ alınarak elde edilen (4.49) 'nin zayıf tipli benzerinin olduğunu gösterecektir.

Önerme 4.7.3. $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$ olsun. $1 \leq p_j < \infty$ ise,

$$\|\mathcal{M}_\gamma(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(\nu_{\vec{\omega}})} \leq C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(M\omega_j)} \quad (4.55)$$

'dir.

Gerçekten de, eğer oraya $\nu = \nu_{\vec{\omega}}$ ve $\omega_j = M_\gamma \omega_j$ koyarsak, eşitsizlik (4.55), Teorem 4.5.1'ten gelir. Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olarak (4.20) koşulunun geçerli olduğunu görmek kolaydır.

4.8 Multilinear Komütatörler.

Son nokta tahmini lineer durumlar için (Perez,1995) 'de her $\lambda > 0$ için

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |[b, R_{\gamma,i}]f(y)| > \lambda\}| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\right) dy \quad (4.56)$$

olarak elde edilmiştir. Burada C , b 'nin BMO normuna bağlıdır. Ana sonuçlardan birisi bu tezde, (4.56) 'un multilinear bir versiyonu olan Teorem 4.8.3'dir.

İlk önce multilineer komütatörler ile ve giriş kısmında verilen maksimal operatörler ile ilgili noktasal bir kestirim elde edeceğiz.

Tanım 4.8.1. $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{M}_{L(\log L)}^i(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \|f_i\|_{L(\log L), Q} \prod_{j \neq i} \frac{1}{|Q|} \int_Q f_j dx$$

ve

$$\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L(\log L), Q}$$

operatörlerine maksimal operatörler denir. Burada supremum, x 'i içeren tüm Q küpleri üzerinde alınır.

Lineer durumda, komütatörleri sharp maksimal operatörlerle ilişkilendirme fikri onu kuvvetli tipli tahminleri elde etmek için kullanan Strömberg'e (cf. (Janson,1978)) kadar gider. Son nokta tahmini (4.56) elde etmek için (Perez,1995) 'de ve daha sonra (Perez ve Pradolini,2001) 'de farklı yöntemler kullanılmıştır. Multilineer durumda, M_δ^\sharp içeren aşağıdaki tahmini elde ederiz.

Aşağıdaki notasyonları kullanacağız. $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$, BMO^m 'de ise, o zaman $\|\vec{b}\|_{BMO^m} = \sup_{i=1, \dots, m} \|b_i\|_{BMO}$ olarak göstereceğiz.

Teorem 4.8.2. $T_{\vec{b}}, \vec{b} \in BMO^m$ iken bir multilineer komütatör ve $0 < \delta < 1/m, 0 < \delta < \varepsilon$ olsun. Bu durumda kompakt desteğe sahip m katlı $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar için

$$M_\delta^\sharp(T_{\vec{b}}(\vec{f}))(x) \leq C \|\vec{b}\|_{BMO^m} \left(\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f}) + M_\varepsilon(R_{\gamma, i}(\vec{f}))(x) \right) \quad (4.57)$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır. Burada C, δ ve ε ile bağlantılıdır.

Bu teoremin ispatının aslında, (4.57) 'in sağ tarafındaki $\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})$ operatörünü biraz daha küçük operatörle değiştirebileceğimizi gösterdiğini ifade edelim.

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{M}_{L(\log L)}^i(\vec{f})$$

Elbette, (4.57) tahmini, aynı zamanda $\prod_{j=1}^m M^2(f_j)$ ile yer değiştirilen $\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})$ için de geçerlidir. Fakat, yine, $\mathcal{M}_{L(\log L)}$ küçük operatörü, daha genel ve daha keskin sonuçlar elde etmemizi sağlar.

Herhangi bir Q küpü için,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{\omega}} \leq A \prod_{j=1}^m \inf_Q \omega_j^{1/m},$$

olacak şekilde eğer bir C sabiti varsa katlı ağırlığının $A_{(1,\dots,1)}$ koşulunu sağladığını hatırlayalım. Burada $\nu_{\vec{\omega}} = \prod_{j=1}^m \omega_j^{1/m}$ 'dir.

Kanıt. Lineerlikten, operatörü sadece bir sembol olarak düşünmek yeterlidir. $b \in BMO$ ve aşağıdaki operatörü göz önüne alalım

$$R_{i,b}(\vec{f})(x) = b(x)R_{\gamma,i}(f_1, \dots, f_m) - R_{\gamma,i}(bf_1, \dots, f_m). \quad (4.58)$$

Herhangi bir sabit λ için

$$R_{i,b}(\vec{f})(x) = (b(x) - \lambda)R_{\gamma,i}(\vec{f})(x) - R_{\gamma,i}((b - \lambda)f_1, \dots, f_m)(x)$$

elde edilir. $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $0 < \delta < 1$ 'den, herhangi bir c sayısı ve x merkezli herhangi bir Q küpü için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| |R_{i,b}(\vec{f})(z)|^\delta - |c|^\delta \right| dz \right)^{1/\delta} \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_{i,b}(\vec{f})(z) - c|^\delta dz \right)^{1/\delta} \\ & \leq \left(\frac{c}{|Q|} \int_Q |(b(z) - \lambda)R_{\gamma,i}(\vec{f})(z)|^\delta dz \right)^{1/\delta} + \left(\frac{c}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma,i}((b - \lambda)f_1, \dots, f_m)(z) - c|^\delta dz \right)^{1/\delta} \\ & = I + II \end{aligned}$$

elde edilebilir. Her terimi ayrı ayrı inceleyeceğiz. $Q^* = 3Q$ olduğundan, $\lambda = (b)_{Q^*}$, b 'nin Q^* üzerinde ortalamasını gösterebiliriz. Herhangi $1 < q < \varepsilon/\lambda$ için Hölder ve

Jensen eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
I &\leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(z) - \lambda|^{\delta q'} dz \right)^{1/\delta q'} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma,i}(\vec{f})(z)|^{\delta q} dz \right)^{1/\delta q} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} M_{\delta q}(R_{\gamma,i}(\vec{f}))(x) \\
&\leq C \|b\|_{BMO} M_{\varepsilon}(R_{\gamma,i}(\vec{f}))(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. II 'yi kestirimi için her bir $f_i, f_i = f_i^0 + f_i^\infty$ olarak alalım. Burada $f_i^0 = f \chi_{Q^*}$ ve $f_i^\infty = f_i - f_i^0$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^m f_j(y_j) &= \sum_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \{0, \infty\}} f_1^{\alpha_1}(y_1) \dots f_m^{\alpha_m}(y_m) \\
&= \prod_{j=1}^m f_j^0(y_j) + \sum' f_1^{\alpha_1}(y_1) \dots f_m^{\alpha_m}(y_m)
\end{aligned}$$

olur, \sum' da her terim en az bir tane $\alpha_j \neq 0$ içerir. $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = T((b - \lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(x)$ ile $c = \sum' c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ alalım ve

$$\begin{aligned}
II &\leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma,i}((b - \lambda)f_1^0, \dots, f_m^0)(z)|^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\quad + \sum' \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma,i}((b - \lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(\xi) - c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}|^\delta dz \right)^{1/\delta} \\
&= II_0 + \sum' II_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar $\delta < 1/m$ kullanarak,

$$\begin{aligned}
II_0 &= C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma,i}((b - \lambda)f_1^0, \dots, f_m^0)(z)|^\delta dz \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq C \|R_{\gamma,i}((b - \lambda)f_1^0, \dots, f_m^0)\|_{L^{1/m, \infty}(Q, \frac{dx}{|Q|})} \\
&\leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q |(b(z) - \lambda)f_1^0(z)| dz \prod_{j=2}^m \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_j^0(z)| dz \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|f_1\|_{L(\log L), Q} \prod_{j=2}^m \|f_j\|_{Q^*} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \mathcal{M}_{L(\log L)}(f_1, \dots, f_m)(x)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $II_{\infty, \dots, \infty}$ terimini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma, i}((b - \lambda)f_1^\infty, \dots, f_m^\infty)(z) - R_{\gamma, i}((b - \lambda)f_1^\infty, \dots, f_m^\infty)(x)|^\delta dz \right)^{1/\delta} \\
& \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma, i}((b - \lambda)f_1^\infty, \dots, f_m^\infty)(z) - R_{\gamma, i}((b - \lambda)f_1^\infty, \dots, f_m^\infty)(x)| dz \\
& \leq C \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 3Q)^m} \frac{|(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| \prod_{i=2}^m |f_i(y_i)| |x - z|^\varepsilon}{(|z - y_1| + \dots + |z - y_m|)^{nm + \varepsilon}} d\vec{y} dz \\
& \frac{c}{|Q|} \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(3^{k+1}Q)^m (3^kQ)^m} \frac{|(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| \prod_{i=2}^m |f_i(y_i)| |x - z|^\varepsilon}{(|z - y_1| + \dots + |z - y_m|)^{nm + \varepsilon}} d\vec{y} dz \\
& \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{(3^k |Q|^{1/n})^{nm + \varepsilon}} \int_{(3^{k+1}Q)^m} |(b(y_1) - \lambda)f_1(y_1)| \prod_{i=2}^m |f_i(y_i)| d\vec{y} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^{k\varepsilon}} \|f_1\|_{L(\log L), 3^{k+1}Q} \prod_{j=2}^m \|f_j\|_{3^{k+1}Q} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \mathcal{M}_{L(\log L)}(f_1, \dots, f_m)(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi $II_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ terimlerini düşünelim öyle ki bazı $\{j_1, \dots, j_l\} \subset \{1, \dots, m\}$ için $\alpha_{j_1} = \dots = \alpha_{j_l}$ 'dir, burada $1 \leq l < m$ 'dir. Diğer durumlar benzer şekilde gösteridiğinden sadece $\alpha_1 = \infty$ durumunu göz önüne alalım. (4.10)'dan,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma, i}((b - \lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(z) - R_{\gamma, i}((b - \lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(x)|^\delta dz \right)^{1/\delta} \\
& \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q |R_{\gamma, i}((b - \lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(z) - R_{\gamma, i}((b - \lambda)f_1^{\alpha_1}, \dots, f_m^{\alpha_m})(x)| dz \\
& \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_l\}} \int_{3Q} |f_j| dy_j \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 3Q)^{m-l}} \frac{|x - z|^\varepsilon |b(y_1) - c| \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_l\}} |f_j| dy_j}{(|z - y_1| + \dots + |z - y_m|)^{nm + \varepsilon}} dz \\
& \leq C \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_l\}} \int_{3Q} |f_j| dy_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{(3^k |Q|^{1/n})^{nm + \varepsilon}} \int_{(3^{k+1}Q)^{m-l}} |b(y_1) - c| \prod_{j \notin \{j_1, \dots, j_l\}} |f_j| dy_j \\
& \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|Q|^{\varepsilon/n}}{(3^k |Q|^{1/n})^{nm + \varepsilon}} \int_{(3^{k+1}Q)^m} |b(y_1) - c| \prod_{i=1}^m |f_i(y_i)| d\vec{y} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^{k\varepsilon}} \|f_1\|_{L(\log L), 3^{k+1}Q} \prod_{j=2}^m \|f_j\|_{3^{k+1}Q} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \mathcal{M}_{L(\log L)}(f_1, \dots, f_m)(x)
\end{aligned}$$

elde edilerek teoremin kanıtı tamamlanmış olur. \square

Teorem 4.8.3. $\vec{\omega} \in A_{(1,\dots,1)}$ ve $\vec{b} \in BMO^m$ olsun.

$$\nu_{\vec{\omega}}\{x \in \mathbb{R}^n : |R_{i,\vec{b}}(\vec{f})(x)| > t^m\} \leq C \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f_j(x)|}{t}\right) \omega_j(x) dx \right)^{1/m} \quad (4.59)$$

olacak şekilde $\|\vec{b}\|_{BMO}$ 'ya bağıl bir C sabiti vardır.

Teorem 4.8.3'nin ispatı aşağıdaki sonuca dayanacaktır.

Kanıt. Teorem 4.8.3'in ispatında olduğu gibi, lineerlik ile operatörü sadece bir sembole dikkate almak yeterlidir. Homojenlik ile $t = 1$ varsaymak yeterlidir ve bu nedenle

$$\nu_{\vec{\omega}}\{x \in \mathbb{R}^n : |R_{i,b}(\vec{f})(x)| > 1\}^m \leq C \prod_{j=1}^m \int_{(\mathbb{R}^n)} \Phi(|f_j(x)|) \omega_j(x) dx.$$

'i kanıtlamamız gerekir. Şimdi, Φ altçarpımsalından, Teorem 4.8.8 ve Teorem 4.8.5 tarafından kanıtlamak istediğimiz gibi

$$\begin{aligned} \nu_{\vec{\omega}}\{x \in \mathbb{R}^n : |R_{i,b}(\vec{f})(x)| > 1\}^m &\leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)^m} \nu_{\vec{\omega}}\{x \in \mathbb{R}^n : |R_{i,b}(\vec{f})(x)| > t^m\}^m \\ &\leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)^m} \nu_{\vec{\omega}}\{y \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}_{L(\log L)}^1(\vec{f})(x)| > t^m\}^m \\ &\leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)^m} \prod_{j=1}^m \int_{(\mathbb{R}^n)} \Phi\left(\frac{|f_j(x)|}{t}\right) \omega_j(x) dx \\ &\leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)^m} \prod_{j=1}^m \int_{(\mathbb{R}^n)} \Phi(|f_j(x)|) \Phi\left(\frac{1}{t}\right) \omega_j(x) dx \\ &\leq C \prod_{j=1}^m \int_{(\mathbb{R}^n)} \Phi(|f_j(x)|) \omega_j(x) dx \end{aligned}$$

elde ederiz. □

Ayrıca bu zayıf tip tahmin genel anlamda kesindir. Aslında, eğer biz (4.59)'nın sağ tarafını m fonksiyonlarının çarpımı ile yer değiştirirsek, bunlardan biri bir norm veya λ' da homojen ise, ortaya çıkan tahmin aralıkların karakteristik fonksiyonları için bile geçerli değildir. Remark 4.8.4 'deki karşıt örneğe bakın. Özellikle $R_{i,\vec{b}}$, karakteristik aralıkların fonksiyonları içeren Banach uzayından

$L^{\frac{1}{m},\infty}$ 'a sınırsızdır. $R_{i,\vec{b}}^j$ 'nin herhangi birini dikkate alırsak uygulanabilir. Φ altçarpımsalı gösterir ki, C sabiti $\Phi(\|\vec{b}\|_{BMO})^{\frac{1}{m}}$ 'nin çarpımları olarak göz önüne alındığında homojenlik argümanı ortaya çıkar.

Uyarı 4.8.4. Formundaki bir tahmin

$$|\{x : |R_{i,b}(\vec{f})| > \lambda^m\}| \leq C_{(\|b\|_{BMO})} \left(\left\| \frac{f_i}{\lambda} \right\| \prod_{j \neq i} \left\| \Phi\left(\frac{f_j}{\lambda}\right) \right\|_{L^1} \right)^{1/m} \quad (4.60)$$

$\|\cdot\|$ karakteristik fonksiyonlar üzerinde sonlu ve $\|\lambda f\| = \lambda\|f\|$ şartını sağlarsa aralığın karakteristik fonksiyonları için sağlanmaz. Özellikle (sınırlı) eşleme özelliği

$$R_{i,\vec{b}} : L^1 \times \dots \times L^1 \rightarrow L^{1/m,\infty}$$

formu sağlamaz.

$m = 1$ için bu zaten (Perez,1995)'de gösterildi. Argümanları multilineer duruma uyarlarız. Basitlik için $n = 1$, $m = 2$ durumunu göz önüne alıyoruz. Varsayalım ki (4.60)'ün gerekli özelliklere sahip bazı $\|\cdot\|$ için, bilineer Riesz dönüşümü gibi bazı T Calderon-Zygmund operatörü ve $b(x) = \log|1+x|$ için geçerli olduğunu kabul edelim. $f_1 = f_2 = \chi_{(0,1)}$ olsun. Eğer (4.60) geçerli olsaydı, multilineerlik ve homojenliği

$$|\{x \in \mathbb{R} : |R_{i,b}(\vec{f})(x)| > \lambda^2\}| \leq C \left(\left\| \frac{f_1}{\lambda^2} \right\| \left\| \Phi(f_2) \right\|_{L^1} \right)^{1/2},$$

elde ederdik ve böylece

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R} : |R_{i,b}(\vec{f})(x)| > \lambda\}|^2 \leq C \|f_1\| \|\Phi(f_2)\|_{L^1} \leq C \quad (4.61)$$

'dir. Ancak, 4.61 'ün sol tarafı bir çelişkiye varan

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x > e : \frac{\log(x)}{x^2} > \lambda\}|^2 = \infty \quad (4.62)$$

denkleminin bir katından daha küçük değildir.

4.62'i görmek için, $\phi(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$ olsun ve basit bir gözlem için, diyelim ki pozitif k tamsayıları için

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda>0} \lambda |\{x > e : \varphi(x) > \lambda\}|^2 &\geq \sup_k \varphi(e^k) |\{x > e : \varphi(x) > \varphi(e^k)\}|^2 \geq \\ &\sup_k \frac{k}{e^{2k}} (e^k - e)^2 = \infty \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.8.5. $\vec{\omega} \in A_{(1,\dots,1)}$ olsun. Bu durumda

$$\nu_{\vec{\omega}} \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{(L/\log L)}^i(\vec{f})(x) > t^m\} \leq C \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f_j(x)|}{t}\right) \omega_j(x) dx \right)^{1/m}.$$

olacak şekilde C sabiti vardır.

Kanıt. Genelliği bozmadan $i = 1$ alabiliriz. Aynı zamanda, homojenlikten, $t = 1$ olduğunu varsayalım. $\vec{f} \geq 0$ alarak

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L(\log L)}^1(\vec{f})(x) > 1\}$$

kümesini tanımlayalım ve boş olmadığını kabul edelim. Ω 'nın boyutunu tahmin etmek için, Ω 'da bulunan kompakt F kümesinin boyutunu tahmin etmek yeterlidir. Böyle bir F 'i sonlu bir $\{Q_j\}$ küp ailesi ile örtebiliriz bunun için

$$1 < \|f_1\|_{\Phi, Q_j} \prod_{j=2}^m (f_j)_{Q_j} \quad (4.63)$$

Vitali'nin örten lemmasını kullanarak,

$$F \subset \cup_i 3Q_i \quad (4.64)$$

olacak şekilde $\{Q_i\}$ ayrık küplerin bir alt ailesini çıkarabiliriz. Homojenlikten,

$$1 < \left\| \prod_{j=2}^m (f_j)_{Q_i} \right\|_{\Phi, Q_i}$$

ve norm $\|\cdot\|_{\Phi, Q_i}$ 'nın özelliklerinden,

$$1 < \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} \Phi(f_1(y)) \prod_{j=2}^m (f_j)_{Q_i} dy,$$

ile aynıdır. Şimdi Φ 'nin altçarpımsal olduğunu ve Jensen'in eşitsizliğini kullanarak

$$1 < \frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} \Phi(f_j(y)).$$

elde ederiz. Son olarak, ayrık düzeyde ağırlıklar ve Hölder eşitsizliği koşuluna göre,

$$\begin{aligned} \nu_{\vec{\omega}}(F)^m &\approx \sum_i \nu_{\vec{\omega}}(Q_i)^m \leq \left(\sum_i \prod_{j=1}^m \inf_Q \omega_j^{1/m} |Q_i|^{1/m} \left(\frac{1}{|Q_i|} \int_{Q_i} \Phi(f_j(y)) dy \right)^{1/m} \right)^m \\ &\leq \left(\sum_i \prod_{j=1}^m \left(\int_{Q_i} \Phi(f_j(y)) \omega_j(y) dy \right)^{1/m} \right)^m \leq \prod_{j=1}^m \int_{(\mathbb{R}^n)} \Phi(|f_j(y)|) \omega_j(y) dy, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. \square

Lineer durumda, (4.56) ile güçlü bir L^{p_0} , $1 < p < p_0$ olan tüm L^p 'ler için tahmin edilen güçlü tip sonuçlar elde etmeyi, arasında interpolasyon yapmak mümkündür. m-lineer durumda $1/m < p \leq 1$ için güçlü tip sonuçlar elde etmek daha sonra denenebilir. Yukarıdaki son nokta sonuçları ile (Perez ve Torres, 2003) 'da $p > 1$ için sonuçlar arasında interpolasyon yapın. Biz bu tür çok doğrusal interpolasyon biçimi için bir referans bulamadık ve biz yaklaşımın gerçekten uygulanabilir olup olmadığını bilmiyoruz. Bununla birlikte, biz doğrudan güçlü tip tahminler elde edebiliyoruz. Noktasal sonuçtan onları tekrar elde edeceğiz. Bu yaklaşım, ağırlıklı bağlamda da kullanılabilir avantaaja sahiptir.

Aşağıdaki ön lemmaya ihtiyacımız var.

Lemma 4.8.6. Kabul edelim ki $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $A_{\vec{p}}$ koşulunu sağlasın. Sonlu sabit $r > 1$ vardır öyle ki $\vec{\omega} \in A_{\vec{p}/r}$ 'dir.

Kanıt. Teorem 4.5.6'dan, her bir $\sigma_j = \omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}}$, A_∞ 'a aittir ve buradan, herhangi Q

küpü için

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-\frac{t_j}{p_j-1}} \right)^{1/t_j} \leq \frac{c_j}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}}.$$

σ_j 'nin A_∞ sabitine bağlı olarak, $c_j, t_j > 1$ sabitleri vardır.

$$\frac{t_j}{p_j - 1} = \frac{1}{\frac{p_j}{r_j} - 1}$$

$r_j > 1$ olacak şekilde seçelim. Sonra, $r = \min\{r_1, \dots, r_m\}$ ve $c = \max\{c_1, \dots, c_m\}$ ise

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{\omega}} \right)^{1/p/r} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-1/\frac{p_j}{r}-1} \right)^{1-\frac{1}{p_j/r}}, \\ &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{\omega}} \right)^{r/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-1/\frac{p_j}{r}-1} \right)^{\left(\frac{p_j}{r}-1\right)\frac{r}{p_j}} \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{\omega}} \right)^{r/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-1/\frac{p_j}{r}-1} \right)^{\left(\frac{p_j}{r}-1\right)\frac{r}{p_j}} \\ &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{\omega}} \right)^{r/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{\frac{t_j}{p_j-1}} \right)^{\left(\frac{p_j}{r}-1\right)\frac{r}{p_j}}, \\ &\leq c^{rm} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{\omega}} \right)^{r/p} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega_j^{-\frac{1}{p_j-1}} \right)^{(p_j-1)\frac{r}{p_j}} \leq c^{rm} [\omega]_{A_{\vec{p}}}^r. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m) A_{\vec{p}}$ koşulunu sağlar, lemmanın kanıtı bitmiş olur. \square

Teorem 4.8.7. $\vec{\omega} \in A_{\vec{p}, \frac{1}{p}} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$ ve $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$, $\vec{b} \in BMO^m$ olsun.

$$\|R_{i, \vec{b}}(\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})} \leq C \|\vec{b}\|_{BMO^m} \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)} \quad (4.65)$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

Bu sonuçlar, $\mathcal{M}_{(L/\log L)}$ ile değiştirilen \mathcal{M} komütatörler için (4.38) 'in analogunun bir sonucu olacaktır.

Kanıt. Şimdi, Teorem 4.8.8 yardımıyla ve $\nu_{\vec{\omega}}$ 'de A_∞ 'da olduğundan,

$$\int_{(\mathbb{R}^n)} |R_{i, \vec{b}}(\vec{f})(x)|^p \nu_{\vec{\omega}}(x) dx \leq C \int_{(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})(x)^p \nu_{\vec{\omega}}(x) dx$$

olur. İspatı bitirmek için $\mathcal{M}_{L(\log L)}$ 'den daha büyük bir operatör kullanırız ki bu bizim amaçlarımız için yeterli olur. Aslında, $r > 1$ ise ve $\Phi(t) = t(1 + \log^+(t)) \leq t^r, t > 1$ genelleştirilmiş Jensen eşitsizliğinden

$$\|f\|_{L(\log L), Q} \leq c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}},$$

elde ederiz ve bu nedenle,

$$\mathcal{M}_r(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

olması için $\mathcal{M}_{L(\log L)}$ 'i daha büyük olanı ile sınırlayabiliriz

$$\|R_{i, \vec{b}}(\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})} \leq c \|\mathcal{M}_r(\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})}.$$

Şimdi bunu ispat etmek için

$$\|\mathcal{M}_r(\vec{f})\|_{L^p(\nu_{\vec{\omega}})} \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(\omega_j)}$$

kanıtlamaya eşdeğerdir

$$\|\mathcal{M}_r(\vec{f})\|_{L^{p/r}(\nu_{\vec{\omega}})} \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j/r}(\omega_j)}$$

Teorem 4.5.7'e göre, bu $\vec{\omega} \in A_{\vec{p}/r}$ göstermeye eşdeğerdir ve biliyoruz ki bu Lemma 4.8.6 nedeniyle bazı küçük $r > 1$ için geçerlidir. \square

Teorem 4.8.8. $p > 0$ ve ω, A_∞ 'da bir ağırlık olsun. Varsayalım ki $\vec{b} \in BMO^m$ ve $\|\vec{b}\|_{BMO^m} = 1$ 'dir. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |R_{i, \vec{b}}(\vec{f})(x)|^p \omega(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})(x)^p \omega(x) dx, \quad (4.66)$$

olacak şekilde ω 'nin A_∞ sabitine bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır ve her kompakt desteğe sahip sınırlı $\vec{f} = f_1, \dots, f_m$ için

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : |T_{\vec{b}}(\vec{f})(y)| > t^m\}) \\ & \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})(y) > t^m\}), \end{aligned} \quad (4.67)$$

'dir.

Kanıt. $\|\vec{b}\|_{BMO^m} = 1$ ile $\vec{b} \in BMO^m$ olduğunu hatırlayalım. Sonucu kanıtlamak için

$$T_{\vec{b}}(\vec{f}) = bT(f_1, \dots, f_m) - R_{\gamma,i}(bf_1, \dots, f_m).$$

alalım. (4.66) 'un sağ tarafının sonlu olduğunu kabul edebiliriz çünkü aksi durumda ispatlanacak hiçbir şey yoktur.

$0 < \delta < \varepsilon < 1/m$ olmak üzere Teorem 4.8.2 ve Teorem 4.4.5 kullanarak,

$$\begin{aligned} \|R_{i,\vec{b}}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} & \leq \|M_{\gamma,\delta}(R_{i,\vec{b}}(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \\ & \leq C \|M_{\gamma,\delta}^\sharp(R_{i,\vec{b}}(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \\ & \leq C \|b\|_{BMO} \left(\|\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} + \|M_\varepsilon(R_{\gamma,i}(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \right) \\ & \leq C \left(\|\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} + \|M_\varepsilon^\sharp(R_{\gamma,i}(\vec{f}))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \right) \\ & \leq C \left(\|\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} + \|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \right) \\ & \leq C \|\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.4) eşitsizliğini uygulamak için, yukarıdaki işlemlerde $\|M_{\gamma,\delta}(R_{i,\vec{b}}(f_1, \dots, f_m))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)}$ 'nin sonlu olduğunu ve $\|M_\varepsilon(R_{\gamma,i}(f_1, \dots, f_m))\|_{L_{p,\gamma}(\omega)}$ 'nin sonlu olduğunu kontrol etmemiz gerekir. Sonuncusu Sonuç 4.6.1'in ispatında kontrol edilmiştir çünkü

$$\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} \leq \|\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})\|_{L_{p,\gamma}(\omega)} < \infty.$$

olduğunu kabulümüzü. Önceki durumu kontrol etmek için benzer argümanları da

kullanabiliriz.

Sonuç 3.8'in ispatında olduğu gibi, ancak R_i ile $R_{i, \vec{b}}$ yer değiştirildiğinde, sonucu $\|(R_{i, \vec{b}}(f_1, \dots, f_m))\|_{L_{p, \gamma}(\omega)}$ 'nin sonlu olduğunu gösterecek şekilde indirgeyebiliriz. Eğer b 'nin sınırlı olduğunu varsayarsak, bu son koşul, (Perez ve Torres, 2003)'de $p > 1$ için $R_{i, \vec{b}}$ için ağırlıksız teorisinden görülür. Gerçekten, Sonuç 4.6.1'de kullanılan argümanların lokal kısmında $pq' > 1$ olacak şekilde q' alacağımız görülmektedir. Diğer taraftan sonsuzda, b için sınırlı ve yeterince büyük B yuvarının dışındaki x için

$$\begin{aligned} |R_{i, \vec{b}}f(x)| &\leq C \int \frac{|b_1(x) - b_1(y)|}{|x - y_1|^n \dots |x - y_m|^n} |f_1(y_1)| \dots |f_m(y_m)| dy_1 \dots dy_m \\ &\leq C \frac{1}{|x|^n} \int_{B(0, |x|)} |f_1(y)| dy \dots \frac{1}{|x|^n} \int_{B(0, |x|)} |f_m(y)| dy \\ &\leq C \mathcal{M}(\vec{f})(x) \leq C \mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})(x), \end{aligned}$$

elde edilir. Ki bu sınırlıdır çünkü $\|\mathcal{M}_{L(\log L)}(\vec{f})\|_{L_{p, \gamma}(\omega)}$ 'nin sonlu olduğunu kabul ediyoruz. Bu, b 'nin sınırlı olması koşuluyla (4.66) 'u kanıtlar.

BMO 'da genel bir b için sonucu elde etmek için (Perez, 1995)'deki gibi sınırlılığı kullanacağız. $\{b_j\}$ ile verilen

$$b_j(x) = \begin{cases} j, & g(x) > j \\ b(x), & |b(x)| \leq j \\ -j, & g(x) < -j \end{cases}$$

fonksiyonlar dizini göz önüne alalım. Dizinin b 'ye noktasal olarak yakınsadığını ve $\|b_j\|_{BMO} \leq c\|b\|_{BMO} = c$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Kompakt desteğe sahip \vec{f} ailesi ve R_i sınırlı olduğundan her $1 < p < \infty$ için L^p 'de $\{R_i(b_j f_1, \dots, f_m)\}$ yakınsak olduğu görülür. $\{b_{j'}\}$ alt dizisi için, $R_{i, b_{j'}}(\vec{f})$ 'nin hemen hemen her yerde $R_i(\vec{f})$ 'ye yakınsak olduğu görülür. R_i için gerekli tahmin şimdi $R_{i, b_{j'}}$ ve Fatou lemmasından görülür.

Şimdi (4.67)'i kanıtlayalım. Kabul edelim ki ω sınırlıdır. Gerçekten de, $\omega_r = \min\{\omega, r\}$ 'nin sınırlı olduğuna ve ω 'nin A_p sabitinin iki katı ile sınırlı olduğu görülmektedir. Genel bir ω için sonuç, Monoton Yakınsaklık Teoremini uygulayarak elde edilecektir.

Her zamanki gibi (4.67) 'ın sağ tarafının sonlu olduğunu kabul edebiliriz çünkü aksi

takdirde ispat edilecek bir şey yoktur.

Şimdi, Lebesgue diferansiyellenebilme teoreminden

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : |R_{i,b}(\vec{f})(y)| > t^m\}) \\ & \leq \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_{\gamma,\delta}(R_{i,b}(\vec{f}))(y) > t^m\}). \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda eğer son terimin sonlu olduğunu kabul edersek (4.5) genel-
leşmiş zayıf tipli Fefferman-Stein eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_{\gamma,\delta}^\#(R_{i,b} \vec{f})(y) > t^m\}) \\ & \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : [\mathcal{M}_{L(\log L)}^1(\vec{f})(y) + M_\varepsilon(R_i(\vec{f}))(y)] > t^m\}) \\ & \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L(\log L)}^1(\vec{f})(y) > t^m\}) \\ & + C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\varepsilon(R_i(\vec{f}))(y) > t^m\}) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir(burada doubling şartı ve $\frac{1}{\Phi(1/t)}$ ve $\|b\|_{BMO} = 1$ kullanacağız).Yine kabul edelim ki son terim sonludur, (4.5) tekrar kullanılığında

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L(\log L)}^1(\vec{f})(y) > t^m\}) \\ & + \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\varepsilon^\#(R_i(\vec{f}))(y) > t^m\}) \\ & \sup_{t>0} \frac{C}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L(\log L)}^1(\vec{f})(y) > t^m\}) \\ & + \sup_{t>0} \frac{C}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(\vec{f})(y) > t^m\}) \\ & \sup_{t>0} \frac{C}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_{L(\log L)}^1(\vec{f})(y) > t^m\}) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$\sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_{\gamma,\delta}(R_{i,b}(\vec{f}))(y) > t^m\}) < \infty \quad (4.68)$$

ve

$$\sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\varepsilon(R_i(\vec{f}))(y) > t^m\}) < \infty. \quad (4.69)$$

olduğunu gösterelim. Sadece (4.68) 'i göstereceğiz çünkü (4.69)' nin ispatı da benzerdir.

ω 'nin sınırlı olduğu kabulünü göz önüne alalım, böylece

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} \omega(\{y \in \mathbb{R}^n : M_{\gamma,\delta}(R_{i,b}(\vec{f}))(y) > t^m\}) \\ & \leq \|\omega\|_{L^\infty} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} |\{y \in \mathbb{R}^n : M_{m\delta}(|R_{i,b} \vec{f}|^{\frac{1}{m}})(y) > t\}| \end{aligned}$$

'dir. Şimdi, $\Phi(t) \geq t, m\delta < 1$ kullanarak

$$\eta < 1 \rightarrow M_\eta : L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

olduğundan (bu, $M : L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{r,\infty}, r > 1$ 'in bir sonucudur),

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(1/t)} |\{y \in \mathbb{R}^n : M_{m\delta}(|R_{i,b} \vec{f}|^{\frac{1}{m}})(y) > t\}| \\ & \leq \sup_{t>0} t |\{y \in \mathbb{R}^n : M_{m\delta}(|R_{i,b} \vec{f}|^{\frac{1}{m}})(y) > t\}| \\ & \leq C \sup_{t>0} t |\{y \in \mathbb{R}^n : M_{m\delta}(|R_{i,b} \vec{f}|^{\frac{1}{m}})(y) > t\}|. \end{aligned}$$

olarak elde edilir. \vec{f} 'nin kompakt bir desteğe sahip olduğundan, $R > 0$ için $\text{supp } \vec{f} \subset B(0, R)$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} t |\{y \in \mathbb{R}^n : |R_{i,b} \vec{f}(y)|^{\frac{1}{m}} > t\}| \\ & \leq \sup_{t>0} t |\{y \in B_{2R} : |R_{i,b} \vec{f}(y)|^{\frac{1}{m}} > t\}| \\ & + \sup_{t>0} t |\{y \notin B_{2R} : |R_{i,b} \vec{f}(y)|^{\frac{1}{m}} > t\}| \\ & = I + II. \end{aligned}$$

yazılır. Bunun yerine I için L^1 normunu göz önüne alalım. Bu durumda Hölder

eşitsizliğinden

$$I \leq \int_{B_{2R}} |R_{i,b}f(y)|^{1/m} dy \leq CR^{(1-\frac{1}{p})n} \left(\int_{(\mathbb{R}^n)} (|R_{i,b} \vec{f}|^{\frac{p}{m}} dy)^{\frac{1}{p}} \right)$$

elde edilir. p 'yi yeterince büyük seçersek, bu son terim kuvvetli sınırlıdır.

II için, b 'nin sınırlı olduğunu kabul edilerek $T_b(\vec{f})(x)$ 'in önceki gibi $\mathcal{M}(\vec{f})(x)$ ile sınırlandırılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} II^m &\leq C \sup_{t>0} t^m |\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(\vec{f})(y)^{1/m} > t\}|^m \\ &= C \|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^{1/m,\infty}} \leq C \prod_{i=1}^m \int_{(\mathbb{R}^n)} |f_i| dx < \infty. \end{aligned}$$

elde edilebilir.

$$\sup_{t>0} |\{y \in \mathbb{R}^n : |R_{i,b} \vec{f}(y)|^{1/m} > t\}| < \infty, \quad (4.70)$$

olduğunu gösterelim. ω ve b 'nin sınırlı olması koşuluyla (4.68)'ü verir. Daha önce açıklandığı gibi, monoton yakınsaklık kullanılarak A_∞ 'da genel bir ω 'ye geçebiliriz ve bu şekilde b 'nin BMO normuna bağlı olarak (4.67)'de sabit ile A_∞ 'da keyfi ω ve L_∞ 'da b için sonuçlar elde edilir.

Şimdi b 'nin sınırlı olmadığını kabul edelim. İlk olarak $\{y \in \mathbb{R}^n : |R_{i,\vec{b}}(\vec{f})(y)| > t^m\}$ kümesi yerine keyfi $N > 0$ için $\{y \in B(0, N) : |R_{i,\vec{b}}(\vec{f})(y)| > t^m\}$ kümesi alınarak (4.67)'i ispat etmek yeterlidir. Bu durumda b 'yi önceden olduğu gibi $\{b_j\}$ dizisi ile tahmin edebiliriz ve her bir kompakt küme için uygun bir $\{|R_{i,b_j} \vec{f}|\}$ alt dizisini $|R_{i,b} \vec{f}|$ 'e yakınsamasını kullanabiliriz. j 'ye limit alınarak N 'den bağımsız bir sabite sahip BMO 'da keyfi b için gerekli olan tahmini verir. Son olarak N 'de sup'i alınarak teorem ispatı tamamlanır. \square

SONUÇ

Çalışmamızda Calderon-Zygmund tipli singüler integral operatör olarak bilinen klasik Riesz dönüşümlerinin ve multilineer Riesz-Bessel dönüşümü ve komütatörlerinin Lebesgue uzayında sınırlılıklarını inceledik. Klasik Riesz dönüşümü, konvolüsyon tipli singüler integral olduğundan buradaki $f(x - y)$ adi öteleme olarak düşünülebilir. Dolayısıyla bu öteleme yerine başka bir öteleme olarak bu çalışmada adi öteleme yerine \mathbb{R}_+ öteleme veya T^y genelleştirilmiş öteleme operatörü alınmıştır. Böylece elde edilen sonuçlar orijinal ve yeni olmuştur. Bu operatör ile elde edilen dönüşüm, B -Riesz dönüşümü olarak adlandırılmıştır.

Bu çalışmada, Lebesgue uzaylarının m kartezyen çarpımında önemli rol oynayan ve Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun m -kat çarpımından daha küçük olan çok lineer B -maksimal operatör ve B -Riesz dönüşümleri ile çalışılmıştır. Bu operatör, Calderon Zygmund tipli çok lineer B -Riesz dönüşümleri üzerinde kesin bir kontrol elde etmek ve çok lineer duruma uyarlanmış ağırlık teorisini oluşturmak için kullanılmıştır. Daha sonra, BMO fonksiyonları ile elde edilen çok lineer B -Riesz dönüşümlerinin bazı komütatörlerini incelemek için kullanışlı olan bu operatörün, farklı bir çeşidi dikkate alınmıştır. B -Riesz komütatörleri için en uygun güçlü tip tahminler, keskin bir uç nokta tahmini ve aynı zamanda hem klasik Muckenhoupt ağırlıkları hem de yeni çok lineer Muckenhoupt ağırlıkları için ağırlıklı norm eşitsizlikleri elde edilmiştir.

KAYNAKÇA

- Alvarez, J. & Pérez, C. (1994). Estimates with A_∞ weights for various singular integral operators. *Bollettino dell'unione matematica italiana*, 8(1), 123-133.
- Bennett, C. & Sharpley, R. (1988). *Interpolation of operators*. Inc., Boston, MA: Academic Press.
- Calderon, A.P. & Zygmund, A. (1952). Selected Papers of Antoni Zygmund. *On the existence of certain singular integrals*, in (s.19-73). Springer, Dordrecht.
- Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P. (1991). Interior $W^{2,p}$ estimates for non divergence elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ricerche Mat.*, 40(1) , 149-168.
- Chiarenza, F., Frasca, M., and Longo, P. (1993). $W^{2,p}$ -solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients. *Transactions American Mathematical Society*, 336(2) , 841-853.
- Christ, F. M.(Ed.). (1991). *Lectures on singular integral operators*. Providence, RI: American Mathematic Society.
- Christ, M. & Fefferman, R. (1983). A note on weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 87(3), 447-448.
- Christ, M. & Journé, J.L. (1987). Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators. *Acta Mathematica* 159(1), 51-80.
- Coifman, R.R. & Fefferman, C. (1974). Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Mathehametica*, 51(3) , 241-250.
- Coifman, R.R. & Meyer, Y. (1975). On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals, *Transactions American Mathematical Society*, 212(2) , 315-331.
- Coifman, R.R. & Meyer, Y. (1978). Commutateurs integrales singulieres et operateurs multilineaires. *Annales de Institut Fourier (Grenoble)*, 28(3), 177-202.
- Coifman, R. R. & Meyer, Y. (2016). Non-linear harmonic analysis, operator theory and PDE. In *Beijing Lectures in Harmonic Analysis*. (s. 1-46). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Coifman, R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976). Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Annals of Mathematics*, 103(3), 611-635.
- Cruz-Uribe, D., Martell, J.M. and Pérez, C. (2005). Weighted weak-type inequalities and a conjecture of Sawyer. *International Mathematics Research Notices*, 2005(30), 1849-1871.

- Cruz-Uribe, D. & Neugebauer, C.J. (1995). The structure of the reverse Hölder classes. *Transactions of American Mathematical Society*, 347(8), 2941-2960.
- Curbera, G.P., García-Cuerva, J., Martell, J. M., and Pérez, C. (2006). Extrapolation with weights to Rearrangement Invariant Function Spaces and modular inequalities, with applications to Singular Integrals. *Advances in Mathematics*, 203(1), 256-318.
- Di Fazio, G. & Ragusa, M. A. (1993). Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients. *Journal of Functional Analysis*, 112(2), 241-256.
- Ekincioglu, İ.(1994). *Genelleştirilmiş öteleme operatörü ile elde edilen Riesz dönüşümleri*, (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- Ekincioglu, İ. & Serbetci, A. (2005). On weighted estimates of high-order Riesz-Bessel transformations generated by the generalized shift operator. *Acta Mathematica Sinica*, 21(1), 53-64.
- Ekincioglu, İ. (2010). The Boundedness of High Order Riesz-Bessel Transformations Generated by the Generalized Shift Operator in Weighted $L_{p,\omega,\gamma}$ -spaces with General Weights. *Acta Applicandae Mathematicae*, 109(2), 591.
- Fefferman, C. & Stein, E.M. (1971). Some maximal inequalities. *American Journal of Mathematics*, 93(1), 107-115.
- Fefferman, C. & Stein, E.M. (1972). H^p spaces of several variables. *Acta Mathematica*, 129(1), 137-193.
- Fefferman, R.A. (1999). Multiparameter Calderon-Zygmund theory. In *Harmonic analysis and partial differential equations* (s. 207-221). Chicago, IL: Chicago Press.
- Ferguson, S.H. & Lacey, M.T. (2002). A characterization of product BMO by commutators. *Acta Mathematica*, 189(2), 143-160.
- Garcia-Cuerva, J. & Rubio de Francia, J.L. (1985). *Weighted norm inequalities and related topics*. Amsterdam,N: Elsevier.
- Grafakos, L. (2008). *Classical and modern Fourier analysis*. New York: Springer.
- Grafakos, L. & Martell, J. M. (2004). Extrapolation of weighted norm inequalities for multivariable operators and applications. *The Journal of Geometric Analysis*, 14(1), 19-46.

- Grafakos, L. & Torres, R.H. (2002). Multilinear Calderon-Zygmund theory. *Advances in Mathematics*, 165(1), 124-164.
- Grafakos, L. & Torres, R.H. (2002). Maximal operator and weighted norm inequalities for multilinear singular integrals. *Indiana University Mathematics Journal*, 51(5), 1261-1276.
- Grafakos, L. & Torres, R.H. (2002). *On multilinear singular integrals of Calderon-Zygmund type*. Proceedings of the 6th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial, Spain.
- Iwaniec, T. & Sbordone, C. (1994). Weak minima of variational integrals. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 454(1994), 143-161.
- Janson, S. (1978). Mean oscillation and commutators of singular integral operators. *Arkive för Matematik*, 16(1), 263-270.
- Jawerth, B. & Torchinsky, A. (1985). Local sharp maximal functions. *Journal of Approximation Theory*, 43(3), 231-270.
- John, F. & Nirenberg, L. (1961). On functions of bounded mean oscillation. *Communications on pure and applied Mathematics*, 14(3), 415-426.
- Journe, J-L.(1983). *Calderon-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderon*. Verlag, Berlin: Springer.
- Kenig, C.E. & Stein, E.M.(1999). Multilinear estimates and fractional integration. *Mathematical Research Letters*, 6(1), 1-15.
- Rutickii, M. K. S. Y. B. (1961). *Convex functions and Orlicz spaces*. Noordhoff, Gröningen: U. S. Atomic Energy Commission.
- Lacey, M. vd. (2009). Multiparameter Riesz Commutators. *American journal of mathematics*, 131(3), 731-769.
- Lacey, M. & Thiele, C. (1997). L^p estimates on the bilinear Hilbert transform for $2 < p < \infty$. *Ann. of Math.*, 146(3), 693-724.
- Lacey, M. & Thiele, C. (1999). On Calderon's conjecture. *Ann. of Math.*, 149(2), 475-496.
- Lerner, A. (2004). On some pointwise inequalities. *Journal of mathematical analysis and applications*, 289(1), 248-259.
- Lerner, A. (2008). An elementary approach to several results on the Hardy-Littlewood maximal operator. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(8), 2829-2833.

- Lerner, A. K., Ombrosi, S., Pérez, C., Torres, R. H., and Trujillo-González, R. (2009). New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón- Zygmund theory. *Advances in Mathematics*, 220(4), 1222-1264.
- Martín-Reyes, F. J. (1995). *On the one-sided Hardy-Littlewood maximal function in the real line and in dimensions greater than one*. Spain: CRC Press.
- Muckenhoupt, B. (1972). Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 165(1972), 207-226.
- Pérez, C. (1995). Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. *Journal of functional analysis*, 128(1), 163-185.
- Pérez, C. (1995). On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p -spaces with different weights. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1) ,135-157.
- Pérez, C. (1994). Weighted norm inequalities for singular integral operators. *Journal of the London mathematical society*, 49(2), 296-308.
- Perez, C. & Pradolini, G. (2001). Sharp weighted endpoint estimates for commutators of singular integral operators. *Michigan Mathematical Journal*, 49(1), 23-37.
- Pérez, C. & Torres, R. H. (2003). Sharp maximal function estimates. In *Harmonic Analysis at Mount Holyoke: Proceedings of an AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Harmonic Analysis*. Mount Holyoke College, South Hadley: American Mathematical Soc..
- Rao, M.M. & Ren, Z.D. (2002). *Applications of Orlicz Spaces*, Abingdon: CRC Press.
- Stein, E.M. (1969). Note on the class $L \log L$, *Studia Math.*, 31(1969), 305-310.
- Stein, E.M. (1998). Singular integrals: the roles of Calderon and Zygmund. *Notices of the AMS*. 45(9), 1130-1140.
- Volberg, A. (2003). *Calderon-Zygmund capacities and operators on nonhomogeneous spaces* U.S.A: American Mathematical Soc..
- Wilson, M. (2008). *Littlewood-Paley Theory and Exponential-Square Integrability*. Verlag, Berlin, Heidelberg: Springer.

DİZİN

- A-**
Ağırlık, 24
- B-**
 B maksimal operatör, 30
 BMO Uzayı, 16
- C-**
Calderon-Zygmund operatör, 11
- G-**
Genelleştirilmiş öteleme, 19
- H-**
Hölder Eşitsizliği, 16
- K-**
Komütatör, 8
Konvolüsyon, 12
Kovolüsyon çarpım, 21
- L-**
Lebesgue Uzayı, 15
- M-**
Monoton Yakınsaklık, 17
- Muckenhoupt sınıfı, 10
Multilineer Komütatör, 54
Multilineer Riesz-Bessel Dönüşümü, 29
- N-**
Norm, 7
Normlu vektör uzayı, 7
- Ö-**
Ölçülebilir uzay, 6
- R-**
Riesz dönüşümü, 28
- S-**
Schwartz uzayı, 15
Sharp B -maksimal operatör, 27
Sharp maksimal operatör, 26
Sınırlılık, 7
- T-**
Ters Hölder eşitsizliği, 16
- Z-**
Zayıf tip sınırlılık, 50

ÖZGEÇMİŞ

Adı, Soyadı : Züleyha Açelya ÜÇER

2015 yılında Bolvadin Mustafa Hüsnü Gemici Anadolu Öğretmen Lisesi başarılı bir şekilde tamamlandı. 2015 yılında girilen Anadolu Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi bölümünün Matematik Eğitimi bölümünden 2019 yılında mezun olundu. 2020 yılında başlanan Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Matematik bölümünde yüksek lisansa devam edilmektedir. Yabancı dil puanı 50'dir.

