



T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

OPIAL TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE
UYGULAMALARI

CANDAN CAN BİLİŞİK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA

DÜZCE, 2022

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

OPIAL TIPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE
UYGULAMALARI

Candan CAN BİLİŞİK tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Şahin DANIŞMAN
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet GÜMÜŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Zakir DENİZ
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 11 Şubat 2022

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

11 Şubat 2022

Candan CAN BİLİŞİK

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili eşim ve ailem ile çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

11 Şubat 2022

Candan CAN BİLİŞİK

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
SİMGELER.....	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
EXTENDED ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KAVRAMLAR VE TEMEL EŞİTSİZLİKLER.....	4
3. OPIAL İNTEGRAL EŞİTSİZLİĞİNE DAİR ÇEŞİTLİ İSPATLAR VE GENELLEŞTİRMELER.....	11
4. UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN BAZI OPIAL TİPLİ EŞİTSİZLİKLER.....	37
5. UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN KONVEKSLİK YARDIMIYLA OPIAL TİPLİ EŞİTSİZLİKLER.....	43
6. İKİ DEĞİŞKENLİ UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN OPIAL TİPLİ EŞİTSİZLİKLER.....	51
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	63
8. KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	70

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1. $x(t)$ fonksiyonun ekstremum noktaları [10].	13



SİMGELER

$C^1 [a, b]$	Türevi sürekli fonksiyonları kümesi
D^α	α -mertebeli uyumlu kesirli türev operatörü
$D_\alpha (f) (t)$	α -mertebeli uyumlu kesirli türev
$L_\alpha^1 ([a, b])$	α -mertebeli integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$L_\alpha^1 ([a, b] \times [c, d])$	α -mertebeli çift değişkenli kesirli integrallerin uzayı
\mathbb{N}	Doğal sayılar
\mathbb{R}	Reel sayılar
$\{x_n(t)\}$	Reel sayı dizisi
$x' (t)$	Adi türev
$\int_a^b f(x) d_\alpha x$	α -mertebeli uyumlu kesirli integral

ÖZET

OPIAL TIPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Candan CAN BİLİŞİK

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Şubat 2022, 69 sayfa

Bu tezin başlıca amacı Opial tipli eşitsizlikler yardımıyla uyumlu kesirli integraller için yeni eşitsizlikler ve genelleştirmelerini oluşturmaktır. Bölüm 2' de tezde kullanılan temel kavramlara yer verilmiştir. İntegraller için bazı temel eşitsizliklerden ve tanımlardan yararlanma yoluna gidilmiştir. Üçüncü bölümde Opial eşitsizliğinin temel ispatının yanı sıra farklı matematikçilerin ispatlarına yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde son 50 yılda literatüre sunulan Opial tipli eşitsizliklerin genelleştirmeleri ve uygulamaları detaylı bir şekilde sunulmuştur. Dördüncü bölümde, uyumlu kesirli integraller için bazı yeni Opial tipli eşitsizlikler ve genelleştirmeleri elde edilmiştir. Bölüm 5' te konvekslikten yararlanılarak uyumlu kesirli integraller için faydalı sonuçlara ulaşılmıştır. Son olarak, altıncı bölümde ise uyumlu kesirli integraller için iki bağımsız değişken içeren Opial tipli eşitsizlikler ve uygulamaları ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir. Sonuçlar kısmında ise elde edilen bulgular ile literatüre yapılan katkıya değinilmiştir.

Anahtar sözcükler: Konvekslik, Opial eşitsizliği, Uyumlu kesirli integraller, Uyumlu kesirli türevler.

ABSTRACT

OPIAL TYPE INTEGRAL INEQUALITIES AND APPLICATIONS

Candan CAN BİLİŞİK

Düzce University

Institute of Graduate Studies, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

February 2022, 69 pages

The main purpose of this thesis is generating new inequalities and their generalizations for compatible fractional integrals by the help of Opial type of inequalities. In chapter 2, the basic concepts were given which used in thesis. For integrals, we used some basic inequalities and definition. In the third chapter, it's given the basic proof of Opial Inequality and also its other proofs which was made by different mathematicians. In addition, this chapter it's given in detail, some generalizations and applications of Opial type inequalities in the literature for the last 50 years. In the fourth chapter, some new Opial type inequalities and their generalizations are obtained for conformable fractional integrals. In Chapter 5, some useful results were achieved for conformable fractional integrals by using convexity. Finally in Chapter 6, which given the results of Opial type inequalities which contains two independent variables and their applications for conformable fractional integrals. In the last chapter which given the findings and the contribution to the literature.

Keywords: Conformable fractional derivatives, Conformable fractional integrals, Convexity, Opial inequality.

EXTENDED ABSTRACT

OPIAL TYPE INTEGRAL INEQUALITIES AND APPLICATIONS

Candan CAN BİLİŞİK

Düzce University

Institute of Graduate Studies, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

February 2022, 69 pages

1. INTRODUCTION

The first detailed studies on the theory of inequalities began to appear in the literature in the early 19th century. Today, the theory of inequality is studied systematically and the interest in the subject is increasing day by day. The existence of integral equalities which helps to determine limitations for unknown functions has a very important in differential theory [1], [2].

Inequalities which include derivatives and integrals of functions, have a wide range of application in the theory of mathematical analysis. These inequalities are known as their names Wirtinger, Lyapunov, Landau-Kolmogorov and Hardy types etc. in the literature. The first published inequality was the Wirtinger type inequality found by L. Scheeffer in 1885 (actually before Wirtinger's conclusion) [3].

In 1960, the Polish mathematician Zdzidlaw Opial (1930-1974), published an inequality, known by his name in the literature, which includes the derivative and integral of a function [4]. Although it has been shown that inequalities in this form can be deduced from the Wirtinger and Hardy type, the result of the Opial Inequality is more important because of the formation of the best constant.

Shortly after the publication of the inequality (1960-1965), several proofs which are simple and plain were brought to the literature by different mathematicians (Olech, Beesack, Mallow, Levinson, and Hua) [5]-[9]. Despite Opial's three-page proof in 1960, Olech [5] showed that positivity is not mandatory and continuity is sufficient. The book [10] can be studied to examine the proofs given after the publication of the inequality.

Opial type inequalities, which is one of the inequalities about the actions of integrals coming from the solution of differential equations, is very successful in providing upper limit solutions to initial value problems and in the clarity of the results. On the other hand, many qualitative actions such as non-fluctuation and constraint

are discussed in the light of Opial type inequalities. Thus, Opial inequalities have become a major issue.

Opial inequality and Generalizations of Opial inequality are very important in determining the existence and uniqueness of initial and limit value problems for ordinary and partial differential equations and difference equations [11]-[25].

In the last fifty years, due to the majority of the fields in which the generalizations and applications of Opial type inequalities have been used, it continues to be enriched with the publications made in this line. The beginning of fractional computations began with the question of "whether the meaning of the derivative for an integer of order n — can also be when n is not an integer". This question was posed by L'Hopital on September 30, 1695. One day in the letter to Leibniz, L'Hopital asked that what would be the result when $n = \frac{1}{2}$, and Leibniz replied that "like a paradox, it will one day emerge as a useful result". The n —derivative of the function $f(x) = x$ is denoted by $\frac{D^n x}{Dx^n}$ by Leibniz. This topic has attracted attention of many great mathematicians and studied on, such as Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann, and Liouville.

The foundations of the concepts of fractional derivative and fractional integral were laid in an article which was published by Liouville in 1832. The main source of this idea is the concept of fractional derivative and fractional integral were emerged from the question of "Are derivatives and integrals only for integers?" [26]

The concepts of fractional derivative and fractional integral are concepts that cover and develop n -fold integrals and derivatives of integer order. The most appealing thing about this topic is that the fractional derivative and the fractional integral do not have local (ie point) properties [26], [27].

In the light of the latest developments in mathematics, fractional calculation is very popular in many other fields such as mathematical modeling of the mechanical and electrical properties of objects, fluid theory, control theory, electrical circuits, electro-analytical chemistry, heat conduction, computational analysis, and engineering.

In particular, in the twentieth century, lots of mathematicians have introduced a number of new insights in the literature to provide the best method in fractional calculations using their own notations and approaches. Examples of various fractional derivatives are Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Katugampola, Grunwald, Letnikov, and Riesz [27]- [35].

In this thesis, our aim is to generate many generalized versions for congruent fractional integrals by using Opial type inequalities and to show the sharpness of the power of this inequality in the literature. We hope these inequalities, which were reached, will be read with interest by many readers.

2. MATERIAL AND METHODS

In this section firstly, we will give the general concepts and basic inequalities that we used in our thesis. We use the forms of the fundamental inequalities for integrals. Also, remind the definitions of fractional derivatives and fractional integrals and some of their basic characteristics. Give some information about the history of the Opial inequality and its importance in the literature as it forms the best constant. Give Opial-type inequalities for conformable fractional integrals and their generalizations for conformable fractional integrals via convexity. Generate some new kind of Opial inequalities for double-stage conformable fractional integrals.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

Firstly we will prove some Opial type inequalities for conformable fractional integrals, we will show up the inequalities, which we got, ensure the basic conditions. Also we will find out Opial type inequalities and generalizations for double-stage conformable fractional integrals.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK

Opial inequality for conformable fractional integrals is reinterpreted and generated some of its generalizations. By analyzing the special cases of the generalizations which generated, it has been shown that many studies in the literature give their generalized form. Opial type inequalities are expressed for conformable fractional integrals by using the characteristic of convex functions. In addition, it has been taken for granted that selected special cases of these inequalities are the general form of many studies in the literature. Opial type inequalities are given for conformable fractional integrals with two variables so that the deficiencies in the field are largely completed with their generalizations. Open problems is given starting from the studies done under the fourth, fifth and sixth chapters, which forms the basis of the thesis. Namely more general and different inequalities and even their generalizations by using the derivative formula for conformable fractional integrals with n variables is reached. Similarly, generalized Opial type inequalities can be obtained for conformable fractional integrals by making use of convex function (s -convex, quasi-convex, etc.) types. Moreover, instead of Katugampola derivative definition, it is possible to obtain Opial type inequalities and their applications for conformable fractional integrals with different fractional derivative definitions (Riesz, Caputo etc.). Finally, many different versions have been presented for the Opial type inequalities and their generalizations, which aimed throughout the thesis, and point out the importance of this inequality in the literature.

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler teorisi hakkındaki ilk detaylı çalışmalar 19. yy başlarında literatürde görünmeye başlamıştır. Günümüzde eşitsizlik teorisi sistematik olarak çalışılmakta ve konuya olan ilgi günden güne artmaktadır. Bilinmeyen fonksiyonlarda sınırların belirlenmesine yardımcı olan integral eşitsizliklerinin varlığı diferansiyel teoride göz ardı edilemeyecek bir öneme sahiptir [1], [2].

Fonksiyonların türevlerini ve integrallerini içeren eşitsizlikler matematiksel analiz teorisinde geniş kapsamlı uygulama alanına sahiptir. Bu eşitsizlikler literatürde Wirtinger, Lyapunov, Landau-Kolmogorov ve Hardy türleri vb. isimleriyle bilinmektedir. İlk yayımlanan eşitsizlik ise L. Scheeffer tarafından 1885 yılında (aslında Wirtinger'ın sonucundan önce) bulunan Wirtinger tipli eşitsizliktir [3].

1960 yılında Polonyalı matematikçi Zdzidlaw Opial(1930-1974), bir fonksiyonun türevini ve integralini içeren ve literatürde kendi adıyla bilinen bir eşitsizlik yayımlamıştır [4]. Bu formdaki eşitsizliklerin Wirtinger ve Hardy tipinden çıkarılabileceği gösterilmiş olsa da, Opial eşitsizliğinin sonucu en iyi sabitin oluşmasından dolayı daha önemlidir.

Eşitsizliğin yayımlanmasından kısa bir süre sonra (1960-1965) daha basit ve yalın birkaç ispat farklı matematikçiler tarafından (Olech [5], Beesack [6], Mallow [7], Levinson [8] ve Hua [9]) literatüre kazandırılmıştır. 1960 yılında Opial'ın üç sayfa süren ispatına karşılık Olech [5] tarafından pozitifliğin gerek şart olmadığı ve sürekliliğin yeterli olduğu gösterilmiştir. Eşitsizliğin yayımlanmasından sonra verilen ispatların incelenmesi için R. P. Agarwal ve P. Y. H. Pang [10] kitabı incelenebilir.

Diferansiyel denklemlerin çözümünden gelen integrallerin davranışları ile ilgili ortaya çıkan eşitsizliklerden biri olan Opial tipli eşitsizlikler; başlangıç değer problemlerine üst sınır çözümler sunmada ve sonuçların netliğinde oldukça başarılıdır. Diğer yandan

salımlı olmayan, sınırlılık gibi bir çok nitel davranış Opial tipli eşitsizlikler ışığında tartışılmaktadır. Böylelikle Opial tipli eşitsizlikler başlıca bir konu haline gelmiştir.

Opial eşitsizliği ve Opial eşitsizliğinin genelleştirmeleri adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile fark denklemleri için başlangıç ve sınır değer problemlerinin varlığını ve tekliğini belirlemede oldukça önemlidir [11]- [25].

Son elli yılda Opial tipli eşitsizliklerin genelleştirmelerinin ve uygulamalarının kullanıldığı alanların çokluğu bu çizgide yapılan yayınlar ile sürekli olarak zenginleşmeye devam etmektedir.

Kesirli hesaplamaların başlangıcı $n - inci$ mertebeden bir tamsayı için türevin anlamının " n tamsayı olmadığında da olabilir mi?" sorusunun sorulmasıyla başlamıştır. Bu soru 30 Eylül 1695 de L'Hopital tarafından ortaya atılmıştır. Bir gün L'Hopital Leibniz' e mektubunda $n = \frac{1}{2}$ olduğunda sonucun ne olacağını sormuş ve Leibniz de cevaben "bir paradoks gibi bir gün yararlı bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır" demiştir. $f(x) = x$ fonksiyonun $n - inci$ türevi Leibniz tarafından $\frac{D^n x}{Dx^n}$ şeklinde sembolize edilmiştir. Bu konu birçok büyük matematikçinin ilgisini çekmiş ve Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann ve Liouville gibi matematikçiler tarafından da çalışılmıştır.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramlarının temelleri 1832 yılında Liouville tarafından yayınlanan bir makalede ortaya atıldı. Bu fikrin temel kaynağı; kesirli türev ve kesirli integral kavramı, "türev ve integraller sadece tamsayılar için mi vardır" sorusundan yola çıkılarak ortaya konulmuştur [26].

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları, n -kathı integralleri ve tamsayı mertebeli türevleri kapsayan ve geliştiren kavramlardır. Bu konunun en çekici yanı, kesirli türev ve kesirli integralin yerel (yani nokta) özelliği olmamasıdır [26], [27].

Matematikteki son gelişmeler ışığında, kesirli hesap; nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, kontrol teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya, ısı iletimi, hesaplamalı analiz ve mühendislik gibi diğer birçok alanda oldukça popülerdir [26], [28]. Özellikle, yirminci yüzyılda

sayısız matematikçi kendi notasyonlarını ve yaklaşımlarını kullanarak kesirli analizde en iyi yöntemi sağlamak için literatürde bir takım yeni görüşler sunmuştur. Çeşitli kesirsel türevlere örnek olarak Riemann-Liouville, Katugampola, Hadamard, Caputo, Letnikov, Grunwald ve Riesz verilebilir [27]-[35].

Bu tezde amacımız uyumlu kesirli integraller için Opial tipli eşitsizliklerden yararlanarak birçok genelleştirilmiş versiyonunu oluşturmaktır. Elde edilecek bu eşitsizliklerin birçok okuyucu tarafından ilgiyle okunacağı düşünülmektedir.

Çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm girişe ayrılmış olup Opial eşitsizliği ile kesirli integrallerin çıkışına ve tarihsel gelişimine yer verilmiştir. İkinci bölüm, çalışma boyunca gerekli görülen temel kavramlar ve eşitsizlikler ile açıklayıcı örneklerden oluşmaktadır. Bölüm 3' te, Opial eşitsizliği ve birkaç farklı ispatı ile eşitsizliğin genelleştirilmiş versiyonları aşamalarıyla ve kronolojik sırasıyla sunuldu. Bu bölümde verilen ispatlardan genel kavramlardan verilen temel eşitsizliklerden faydalanılmıştır. Bölüm 4' te, uyumlu kesirli integral eşitsizlikleri için yeni tip Opial eşitsizlikler oluşturulmuştur. Beşinci bölümde, konvekslik tanımından yararlanılarak uyumlu kesirli integral için Opial tipli eşitsizlikler ve uygulamalarına yer verilmiştir. Altıncı bölümde, uyumlu kesirli integraller için iki bağımsız değişken içeren Opial tipli eşitsizlikler üzerine çalışılarak yeni sonuçlar elde edilmiştir. Sonuç bölümünde ise elde edilen yeni Opial tipli eşitsizliklerin güncel bir hesabı sunularak sonuçların ilginçliği ve bu yeni eşitsizliklerin genelleştirmeleri için farklı olasılıklardan bahsedilmiştir.

2. GENEL KAVRAMLAR VE TEMEL EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümün amacı, tez boyunca okumayı anlamlandırmak için gerekli görülen temel kavramlara ve eşitsizliklere yer vererek açıklayıcı örnekler ile alt yapı oluşturmaktır.

Tanım 2.1 (Konveks Fonksiyon). I , \mathbb{R} de bir aralık ve $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ ve $t \neq s$ için

$$\omega(\lambda t + (1 - \lambda)s) = \lambda\omega(t) + (1 - \lambda)\omega(s)$$

olacak şekilde ω fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [36].

Tanım 2.2 (Mutlak Süreklilik). I , \mathbb{R} üzerinde bir aralık ve $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere I üzerinde mutlak süreklidir ancak ve ancak $\{(c_i, d_i) : 1 \leq i \leq n\}$, I aralığındaki örtüşmeyen aralıkların sonlu birleşimi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^n |\omega(d_i) - \omega(c_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\sum_{i=1}^n |d_i - c_i| < \delta$ şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır [37].

Örnek 2.3. $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında mutlak süreklidir.

Gerçekten; $\varepsilon > 0$ verilsin. $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$, I daki örtüşmeyen aralıkların sonlu bir koleksiyonu olsun öyle ki $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \varepsilon^2$ dır. $a = \frac{\varepsilon^2}{4}$ olarak alalım. Şimdi $\sum_{i=1}^n |g(d_i) - g(c_i)|$ toplamını $[0, a]$ ve $[a, 1]$ iki parça üzerinde ayıralım. a bir aralığın ortasına düşerse aralık a noktasından kesilir. Parçalanmalara göre, $\sum_{i=1}^n |g(d_i) - g(c_i)|$ toplamı büyüyecektir. O halde, $a = d_m$ alalım.

İlk olarak $[0, a]$ üzerindeki toplama bakalım. \sqrt{x} artan bir fonksiyon olduğundan

$$\sum_{i=1}^m |g(d_i) - g(c_i)| = \sum_{i=1}^m \left| \sqrt{d_i} - \sqrt{c_i} \right| \leq \sqrt{a} = \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Şimdi de $[a, 1]$ deki toplama bakalım:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^n |g(d_i) - g(c_i)| &= \sum_{i=m+1}^n \left| \sqrt{d_i} - \sqrt{c_i} \right| \\
&= \sum_{i=m+1}^n \left| \sqrt{d_i} - \sqrt{c_i} \right| \frac{|\sqrt{d_i} + \sqrt{c_i}|}{|\sqrt{d_i} + \sqrt{c_i}|} \\
&= \sum_{i=m+1}^n \frac{d_i - c_i}{\sqrt{d_i} + \sqrt{c_i}} \leq \sum_{i=m+1}^n \frac{d_i - c_i}{2\sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}} \sum_{i=m+1}^n (d_i - c_i) < \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Bu iki toplam birleştirilirse,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |g(d_i) - g(c_i)| &\leq \sum_{i=1}^m |g(d_i) - g(c_i)| + \sum_{i=m+1}^n |g(d_i) - g(c_i)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu da $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında mutlak sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 2.4 (Fonksiyonun Mertebesi). $\varphi(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları t_0 noktasının herhangi Ω_0 civarında tanımlanmış ve $g(t) \neq 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar olsun. (t_0 noktasında $g(t) = 0$ olabilir. Bu nokta sonlu veya sonsuz olabilir.) O halde,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t)}{g(t)}$$

limiti

$$\varphi(t) = o(g(t)), \quad t \rightarrow t_0$$

şeklinde yazılır ve $t \rightarrow t_0$ da $\varphi(t)$ fonksiyonu $g(t)$ ye göre o -küçüktür diye okunur.

Tanımdan görüldüğü gibi $t \rightarrow t_0$ da $\varphi(t) = o(1)$ yazılışının

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = 0$$

olduğunu, yani t_0 da $\varphi(t)$ fonksiyonunun sonsuz küçülen olduğunu gösterir [38].

Örnek 2.5. Tanımdan da görüldüğü gibi $x \rightarrow x_0$ da $\varphi(x) = o(1)$ yazılışı $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ olduğunu, yani, x_0 noktasında $\varphi(x)$ in sonsuz küçülen olduğunu gösterir. Keyfi $p > 0$ ve m için

$$x^{1+p} = o(x), \quad x \rightarrow 0^+ \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1+p}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0 \text{ olduğundan} \right],$$

$$x^{m+p} = o(x^m), \quad x \rightarrow 0^+ \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{m+p}}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0 \text{ olduğundan} \right],$$

$$x^{m-p} = o(x^m), \quad x \rightarrow \infty \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m-p}}{x^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-p} = 0 \text{ olduğundan} \right]$$

yazılabilir.

Tanım 2.6 (Yakınsama Hızı). t_0 noktasının herhangi Ω_0 civarında tanımlanmış tüm t ler için

$$|\varphi(t)| \leq M |g(t)|, \quad t \in \Omega_0, \quad t \neq t_0$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sayısı varsa o zaman $t \rightarrow t_0$ da $\varphi(t)$ fonksiyonu $g(t)$ fonksiyonuna göre sınırlıdır, denir ve

$$\varphi(t) = O(g(t)), \quad t \rightarrow t_0$$

şeklinde gösterilir. $t \rightarrow t_0$ da $\varphi(t)$ fonksiyonu $g(t)$ ye göre O -büyüktür diye okunur. İlk kez o ve O simgelerini Landau kullandığından bunlara Landau simgeleri denir [38].

Örnek 2.7. Tanımdan görüldüğü gibi, $x \rightarrow x_0$ da $\varphi(x) = O(1)$ yazılışı, x_0 noktasının herhangi bir civarında $\varphi(x)$ in sınırlı olduğunu göstermektedir. Ayrıca $p \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$x^p = O(x), \quad x \in [-a, a] \quad [x^2 \leq a|x| \quad \text{ olduğundan}],$$

$$\sin(x) = O(1), \quad \cos(x) = O(1), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

eşitlikleri de doğrudur.

Teorem 2.8 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği). ω fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ise

$$\left| \int_a^b \omega(t) dt \right| \leq \int_a^b |\omega(t)| dt, \quad a < b$$

dir [39].

Teorem 2.9 (Fubini Teoremi). $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli, her $t \in [a, b]$ için $u(t) \leq v(t)$ ve $B = \{(t, s) : a \leq t \leq b, u(t) \leq s \leq v(t)\}$ olsun. $\omega : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise

$$\int_B \int \omega(t, s) dA = \int_a^b \left(\int_{u(t)}^{v(t)} \omega(t, s) ds \right) dt$$

vardır [38].

Teorem 2.10 (Maroni Eşitsizliği). $\omega(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $\omega(a) = 0$ (veya $\omega(b) = 0$) ile $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\int_a^b \left(\frac{1}{r(t)} \right)^{p-1} dt < \infty$ sınırlı olsun. O halde,

$$\int_a^b |\omega(t) \omega'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b \left(\frac{1}{r(t)} \right)^{p-1} dt \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_a^b r(t) |\omega'(t)|^q dt \right)^{\frac{2}{q}}$$

dir [40].

Teorem 2.11 (Young Eşitsizliği). $\omega, z \geq 0$ ve $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{v} = 1$ olacak şekilde $1 < \mu, v < \infty$ olsun. O halde,

$$\omega z \leq \frac{1}{\mu} \omega^\mu + \frac{1}{v} z^v$$

eşitsizliği vardır [41].

Teorem 2.12. $\omega, g \in C([a, b] \times [c, d])$ olmak üzere $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ile $|\omega|^p, |g|^q$ olsun. İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibidir [42].

$$\int_a^b \int_c^d |\omega(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |\omega(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_c^d |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Uyumlu kesirli integraller için Hölder eşitsizliği aşağıda verilmiştir:

Lemma 2.13. $\omega, g \in C[a, b]$ olmak üzere $p, q > 1$ ile $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \in (0, 1]$ olsun. O halde,

$$\int_a^b |\omega(t)g(t)| d_\alpha t \leq \left(\int_a^b |\omega(t)|^p d_\alpha t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q d_\alpha t \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği vardır [43].

Uyarı 2.14. Yukarıdaki eşitsizlikte $p = q = 2$ alınırsa, uyumlu kesirli integraller için Cauchy- Schwarz eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.15 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği). $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere uyumlu kesirli integraller için Cauchy- Schwarz eşitsizliği

$$\int_a^b |\omega(t)g(t)| d_\alpha t \leq \left(\int_a^b |\omega(t)|^2 d_\alpha t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(t)|^2 d_\alpha t \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir [43].

Tanım 2.16 (Uyumlu Kesirli Türev). $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tüm $t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere α -mertebeden f fonksiyonunun uyumlu kesirli türevi

$$D_\alpha(f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}, \quad D_\alpha(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} D_\alpha(f)(t) \quad (2.1)$$

dir. f fonksiyonu $(0, a)$ aralığı üzerinde $\alpha > 0$ olmak üzere α -diferansiyellenebilir ise $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ var ve tanımlıdır

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

$f^{(\alpha)}(t)$ fonksiyonu, f nin α - mertebeli uyumlu kesirli türevini $D_\alpha(f)(t)$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca, f nin α mertebeli uyumlu kesirli türevi var ise f fonksiyonu α -diferansiyellenebilirdir, denir [43].

Eğer (2.1) limiti var ve sonluysa f fonksiyonu $t \geq 0$ noktasında α -diferansiyellenebilirdir. Bu tanım için aşağıdaki sonuçlar verilir.

Teorem 2.17. $\alpha \in (0, 1]$ ve f, g fonksiyonları $t > 0$ noktasında α -diferansiyellenebilir olsun. O halde,

i. Tüm $a, b \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha (af + bg) = aD_\alpha (f) + bD_\alpha (g)$,

ii. Tüm sabit fonksiyonlar için $f(t) = \lambda$ iken $D_\alpha (\lambda) = 0$,

iii. $D_\alpha (fg) = fD_\alpha (g) + gD_\alpha (f)$,

iv. $D_\alpha \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{gD_\alpha (f) - fD_\alpha (g)}{g^2}$,

v. Tüm $n \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha (t^n) = nt^{n-\alpha}$,

vi. $f, g(t)$ üzerinde diferansiyellenebilir olmak üzere $D_\alpha (f \circ g)(t) = f'(g(t)) D_\alpha (g)(t)$ dir.

Tanım 2.18 (Uyumlu Kesirli İntegral). $\alpha \in (0, 1]$ ve $0 \leq a < b$ olsun. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde α -kesirli integrali olmak üzere,

$$\int_a^b f(x) d_\alpha x := \int_a^b f(x) x^{\alpha-1} dx$$

var ve sonludur. $[a, b]$ üzerindeki α -kesirli integrallerin tümü $L_\alpha^1([a, b])$ ile gösterilir [43].

Uyarı 2.19. $\alpha \in (0, 1]$ için

$$I_\alpha^a (f)(t) = I_1^a (t^{\alpha-1} f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx,$$

integrali genelleştirilmiş Riemann integralidir.

Teorem 2.20 (Kısmi integrasyon). $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı iki fonksiyon ve fg diferansiyellenebilir olsun. O halde,

$$\int_a^b f(x) D_\alpha (g)(x) d_\alpha x = fg|_a^b - \int_a^b g(x) D_\alpha (f)(x) d_\alpha x \quad (2.2)$$

dir [43].

Teorem 2.21 (Jensen Eşitsizliği). $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere $a, b, c, d \in [0, \infty)$ olsun. $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow (c, d)$ negatif olmayan ve sürekli fonksiyonlar olsun. Ayrıca

$\int_a^b p(t) d_\alpha t > 0$ ve $F : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve konveks fonksiyonlar olmak üzere,

$$F \left(\frac{\int_a^b w(t)g(t)d_\alpha t}{\int_a^b w(t)d_\alpha t} \right) \leq \frac{\int_a^b w(t)F(g(t))d_\alpha t}{\int_a^b w(t)d_\alpha t}$$

uyumlu kesirli Jensen eşitsizliği vardır [35].

Teorem 2.22 (Taylor Formülü). $\alpha \in (0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde $n + 1$ kez α - kesirli diferansiyellenebilir ve $s, t \in [0, \infty)$ olsun. O halde,

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha} \right)^k D_\alpha^k f(s) + \frac{1}{n!} \int_s^t \left(\frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right)^n D_\alpha^{n+1} f(\tau) d_\alpha \tau$$

dir. Taylor teoreminden yararlanarak kalan fonksiyon tanımlanır.

$$R_{-1,f}(\cdot, s) := f(s),$$

ve $n > -1$ için

$$\begin{aligned} R_{n,f}(t, s) & : = f(s) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha} \right)^k D_\alpha^k f(s) \\ & = \frac{1}{n!} \int_s^t \left(\frac{t^\alpha - \tau^\alpha}{\alpha} \right)^n D_\alpha^{n+1} f(\tau) d_\alpha \tau \end{aligned}$$

ifadesi vardır [35], [44].

3. OPIAL İNTEGRAL EŞİTSİZLİĞİNE DAİR ÇEŞİTLİ İSPATLAR VE GENELLEŞTİRMELER

Bu bölümde ilk olarak literatürde bilinen Opial eşitsizliği ve bu eşitsizlik ile ilgili olarak verilmiş olan çalışmalardan bazıları ispatlarıyla beraber verilecektir. Burada sunulan teoremlerin birçoğunun genelleştirmelerine diğer bölümlerde yer verilecektir.

Teorem 3.1 (Opial Eşitsizliği). $x(t)$ fonksiyonu $[0, h]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = x(h) = 0$ olsun. O halde,

$$\int_0^h |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{h}{4} \int_0^h |x'(t)|^2 dt \quad (3.1)$$

dır. Burada $\frac{h}{4}$ en iyi sabittir [4].

İspat. Öncelikle ispat için gerekli olan aşağıdaki lemmayı verelim. \square

Lemma 3.2. $p_0 = 0, p_1, p_2, \dots, p_{2i-1}$ negatif olmayan sayılar ve aşağıdaki koşulları sağlıyor olsun

$$p_{2i} \leq p_{2i-1}, \quad p_{2i} \leq p_{2i+1}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.2)$$

O halde,

$$\left[\sum_{i=0}^n (p_{2i+1} - p_{2i}) \right]^2 + \sum_{i=0}^n p_{2i}^2 \geq \sum_{i=0}^n p_{2i+1}^2 \quad (3.3)$$

eşitsizliği vardır.

İspat için tümevarım yönteminden yararlanılacaktır. O halde, $n = 1$ için

$$\begin{aligned} (p_1 + p_3 - p_2)^2 + p_2^2 &= p_1^2 + p_3^2 + 2(p_1 - p_2)(p_3 - p_2) \\ &\geq p_1^2 + p_3^2 \end{aligned}$$

elde edilir ve (3.3) eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan, (3.3) ifadesinin $n - 1$ ($n > 1$) için doğruluğu kabul edelim ve n için de doğru olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

Böylece,

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{i=0}^n (p_{2i+1} - p_{2i}) \right]^2 + \sum_{i=0}^n p_{2i}^2 \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n-1} (p_{2i+1} - p_{2i}) + (p_{2n+1} - p_{2n}) \right]^2 + \sum_{i=0}^n p_{2i}^2 \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n-1} (p_{2i+1} - p_{2i}) \right]^2 + \sum_{i=1}^{n-1} p_{2i}^2 + p_{2n+1}^2 + 2(p_{2n+1} - p_{2n}) \sum_{i=0}^{n-1} (p_{2i+1} - p_{2i+2}) \\
&\geq \left[\sum_{i=0}^{n-1} (p_{2i+1} - p_{2i}) \right]^2 + \sum_{i=1}^{n-1} p_{2i}^2 + p_{2n+1}^2 \\
&\geq \sum_{i=0}^{n-1} p_{2i+1}^2 + p_{2n+1}^2 \\
&= \sum_{i=0}^n p_{2i+1}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.1) eşitsizliğini ispatlayalım. Belirtilen aralıkta

$$y(t) = \int_0^t |x'(s)| ds$$

tanımlanmış olsun. Dolayısıyla

$$y'(t) = |x'(t)|$$

olduğundan

$$\int_0^h y(t) |x'(t)| dt = \int_0^h y(t) y'(t) dt = \frac{1}{2} y^2(h) \quad (3.4)$$

dir. Diğer bir deyişle

$$y(h) = \int_0^h |x'(t)| dt \quad (3.5)$$

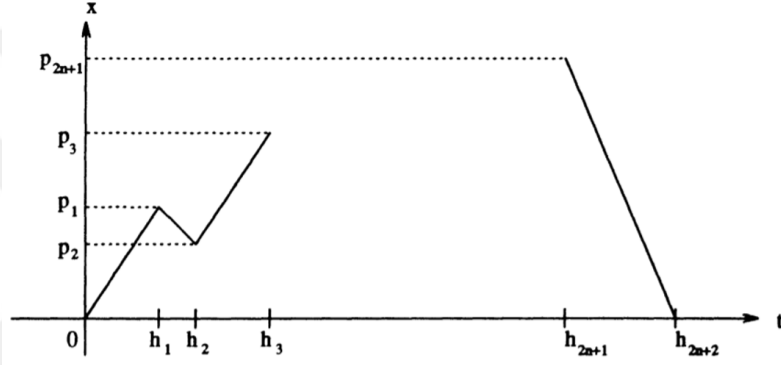
olup bu bize belirtilen aralıkta $|x'(t)|$ nin ortalamasının $\frac{y(h)}{h}$ ifadesine eşit olduğunu gösterir. Bununla birlikte her iki tarafın karesi alınarak Cauchy- Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$y^2(h) \leq h \int_0^h (x'(t))^2 dt \quad (3.6)$$

elde edilir. Yani, belirtilen aralıkta $(x'(t))^2$ nin ortalaması $\frac{y(h)}{h}$ nin karesinden daha büyük veya eşittir. Dolayısıyla ispatı tamamlamak için aşağıdaki eşitsizliği göstermek yeterli olacaktır.

$$4 \int_0^h x(t) |x'(t)| dt \leq 2 \int_0^h y(t) |x'(t)| dt = y^2(t). \quad (3.7)$$

Bunun için $x(t)$ fonksiyonu $[0, h]$ aralığı üzerinde sınırlı sayıda maksimum ve minimuma sahip olsun. Ayrıca, $p_1, p_3, \dots, p_{2n+1}$ sayıları maksimumu ve $p_0 = 0, p_2, \dots, p_{2n}, p_{2n+2} = 0$ şeklindeki gibi olsun. Şekilden açıkça görülüyor ki, (3.2) koşulları sağlanmaktadır.



Şekil 3.1. $x(t)$ fonksiyonunun ekstremum noktaları [10].

$0 \leq i \leq 2n + 2$ aralığında h_i ler koordinat eksenindeki p_i lere karşılık gelmek üzere,

$$\begin{aligned} y(h) &= \sum_{i=0}^{2n+1} \int_{h_i}^{h_{i+1}} |x'(t)| dt \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{h_{2i}}^{h_{2i+1}} x'(t) dt - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{h_{2i-1}}^{h_{2i}} x'(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^n (p_{2i+1} - p_{2i}) - \sum_{i=1}^{n+1} (p_{2i} - p_{2i-1}) \\ &= 2 \sum_{i=0}^n (p_{2i+1} - p_{2i}) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\int_0^h x(t) |x'(t)| dt = \sum_{i=0}^n p_{2i+1}^2 - \sum_{i=1}^n p_{2i}^2$$

eşitliği de gösterilebilir. (3.7) eşitsizliği lemma sayesinde açıkça görülür.

Keyfi bir $x(t)$ fonksiyonu için, Teorem (3.1) in koşullarını sağlayan bir $\{x_n(t)\}$ dizisini alalım. Öyleki, bu dizi sonlu sayıda maksimum ve minimum değerlere sahip ve $[0, h]$ aralığı üzerinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(t) = x'(t)$$

ifadesi sağlanır. Dolayısıyla (3.1) eşitsizliği

$$\int_0^h |x_n(t) x'_n(t)| dt \leq \frac{h}{4} \int_0^h (x'_n(t))^2 dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

integral işareti altında limit alınarak elde edilir.

Uyarı 3.3. $c > 0$ keyfi bir sabit olmak üzere,

$$x_0(t) = \begin{cases} ct, & 0 \leq t \leq \frac{h}{2} \\ c(h-t), & \frac{h}{2} \leq t \leq h \end{cases} \quad (3.8)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Eşitsizliğimiz $[0, h]$ aralığı üzerinde birinci mertebeden sürekli fonksiyonların yardımıyla yaklaşık olarak bulunur. Bu yüzden, (3.1) eşitsizliğindeki $\frac{h}{4}$ sabiti en iyi sabittir.

Bu formdaki eşitsizliklerin Wirtinger ve Hardy tipinden çıkarılabileceği gösterilse dahi, Opial' in sonucu en iyi sabitin elde edilmesinden dolayı çok daha önemlidir. İspatın yayımlanmasından kısa bir süre sonra (1960-1965) daha basit birkaç ispat farklı matematikçiler (Olech, Beesack, Mallows, Levinson ve diğ.) [5], [6], [7], [8] tarafından literatüre sunulmuştur. 1960 yılında Opial' in üç sayfa süren ispatına karşın Olech [5] tarafından pozitifliğin gerek şart olmadığı mutlak sürekliliğin yeterli olduğu gösterilir. Şimdi 1960-1965 yılları arasında verilen ispatları sırasıyla inceleyelim.

Olech ispatı:

$x(t)$ fonksiyonu $[0, h]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = x(h) = 0$ olsun. O halde, (3.1) eşitsizliği sağlanır. Üstelik eşitlik durumu ancak ve ancak

$$x(t) = x_0(t) = \begin{cases} ct, & 0 \leq t \leq \frac{h}{2} \\ c(h-t), & \frac{h}{2} \leq t \leq h \end{cases}$$

olduğunda gerçekleşir ve burada c keyfi bir sabittir [5].

Öncelikle

$$y(t) = \int_0^t |x'(s)| ds$$

ve

$$z(t) = \int_t^h |x'(s)| ds$$

olarak seçelim. Böylece,

$$y'(t) = |x'(t)| = -z'(t) \quad (3.9)$$

ve

$$|x(t)| \leq y(t) \text{ ve } |x(t)| \leq z(t), \quad t \in [0, h] \quad (3.10)$$

olur. (3.9) ve (3.10) ifadelerinin birleşiminden

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{h}{2}} |x(t) x'(t)| dt &\leq \int_0^{\frac{h}{2}} y(t) y'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} y^2 \left(\frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{\frac{h}{2}}^h |x(t) x'(t)| dt &\leq - \int_{\frac{h}{2}}^h z(t) z'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. Son iki ifade taraf tarafa toplanılırsa,

$$\int_0^h |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \left[y^2 \left(\frac{h}{2} \right) + z^2 \left(\frac{h}{2} \right) \right] \quad (3.13)$$

olur. Diğer taraftan Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılarak,

$$y^2 \left(\frac{h}{2} \right) = \left(\int_0^{\frac{h}{2}} |x'(t)| dt \right)^2 \leq \frac{h}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} |x'(t)|^2 dt \quad (3.14)$$

ve

$$z^2 \left(\frac{h}{2} \right) = \left(\int_{\frac{h}{2}}^h |x'(t)| dt \right)^2 \leq \frac{h}{2} \int_{\frac{h}{2}}^h |x'(t)|^2 dt \quad (3.15)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.13)-(3.15) eşitsizlikleri birleştirilerek,

$$\int_0^h |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{h}{4} \int_0^h |x'(t)|^2 dt$$

bulunur ve ispat tamamlanır. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden elden edilen (3.14) ve (3.15) ifadelerindeki eşitlik durumu ancak ve ancak $|x'(t)|$ nin $[0, \frac{h}{2}]$ ve $[\frac{h}{2}, h]$ aralıklarında sabit olmasıyla sağlanır.

Beesack İspatı:

1962 yılında Beesack, Olech tarafından verilen koşullara ek olarak $0 < \varepsilon < \tau < h$ aralığı üzerinde Opial eşitsizliğini aşağıdaki şekilde ispatlanmıştır [6].

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\varepsilon}^{\tau} \left[|x'(t)| - \frac{1}{t} |x(t)| \right]^2 dt \\ &= \int_{\varepsilon}^{\tau} [x'(t)]^2 dt + \int_{\varepsilon}^{\tau} \frac{x^2(t)}{t^2} dt - 2 \int_{\varepsilon}^{\tau} \frac{1}{t} |x'(t) x(t)| dt \end{aligned}$$

ve buradan

$$2 \int_{\varepsilon}^{\tau} \frac{1}{t} |x'(t) x(t)| dt \leq \int_{\varepsilon}^{\tau} [x'(t)]^2 dt + \int_{\varepsilon}^{\tau} \frac{x^2(t)}{t^2} dt \quad (3.16)$$

elde edilir ve burada eşitlik ancak ve ancak $x(t) = ct$ olacak şekilde sağlanır. Şimdi kısmi integrasyon yardımıyla bu eşitsizliği ispatlayalım

$$\begin{aligned}
2 \int_{\epsilon}^{\tau} \frac{1}{t} |x'(t) x(t)| dt &= 2 \left[\frac{1}{t} \int_0^t |x'(s) x(s)| ds \right]_{\epsilon}^{\tau} + \int \frac{1}{t^2} \int_0^t |x'(s) x(s)| ds dt \\
&= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} |x'(s) x(s)| ds - \frac{2}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |x'(s) x(s)| ds \\
&\quad + 2 \int_{\epsilon}^{\tau} \frac{1}{t^2} \left[\int_0^t |x'(s) x(s)| ds \right] dt.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Buradan da, (3.16) ve (3.17) ifadelerinin birleşiminden,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} |x'(t) x(t)| dt &\leq \int_{\epsilon}^{\tau} (x'(t))^2 dt \\
&\quad + \int_{\epsilon}^{\tau} \frac{1}{t^2} \left[x^2(t) - 2 \int_0^t |x'(s) x(s)| ds \right] dt + \frac{2}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |x'(t) x(t)| dt
\end{aligned} \tag{3.18}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$0 \leq x^2(t) = 2 \int_0^t x'(s) x(s) ds \leq 2 \int_0^t |x'(s) x(s)| ds$$

olduğundan

$$0 \geq x^2(t) - 2 \int_0^t |x'(s) x(s)| ds$$

bulduğumuz bu ifadeyi (3.18) eşitsizliğinde yerine koyalım. Böylece,

$$\frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} |x'(t) x(t)| dt \leq \int_{\epsilon}^{\tau} (x'(t))^2 dt + \frac{2}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |x'(t) x(t)| dt \tag{3.19}$$

elde edilir ve burada eşitlik yalnızca $x(t) = ct$ için sağlanır.

$x'(t) \in L_2(0, \tau)$ olduğundan, $t \rightarrow 0^+$ a yaklaşırken

$$x(t) = o\left(t^{\frac{1}{2}}\right)$$

yani,

$$|x(t)| \leq kt^{\frac{1}{2}}$$

dir ve burada $k > 0$ bir sabittir. Dolayısıyla, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\int_0^\epsilon |x'(t)x(t)| dt \leq k \int_0^\epsilon t^{\frac{1}{2}} |x'(t)| dt \leq \frac{k\epsilon}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\epsilon (x'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

bulunur. (3.19) ve (3.20) ifadelerinden,

$$\frac{2}{\tau} \int_0^\tau |x'(t)x(t)| dt \leq \int_\epsilon^\tau (x'(t))^2 dt + \frac{2}{\epsilon} \frac{k\epsilon}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\epsilon (x'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.21) ifadesinde yerine yazılırsa (3.19) eşitsizliği $\epsilon \rightarrow 0^+$ iken,

$$\int_0^\tau |x'(t)x(t)| dt \leq \frac{\tau}{2} \int_0^\tau (x'(t))^2 dt \quad (3.22)$$

elde edilir ki, burada $x(t) = ct$ olması durumunda eşitlik sağlanır. Şimdi (3.22) eşitsizliğinde, $x(t) = x(h-t)$ olsun. Böylece,

$$\int_0^\tau |x'(h-t)x(h-t)| dt \leq \frac{\tau}{2} \int_0^\tau (x'(h-t))^2 dt$$

eşitsizliği elde edilir. $s = h - t$ değişken değiştirme işlemi yapılarak

$$\int_{h-\tau}^h |x'(s)x(s)| ds \leq \frac{\tau}{2} \int_{h-\tau}^h (x'(s))^2 ds \quad (3.23)$$

bulunur. (3.22) ve (3.23) ifadelerinin birleşiminden $\tau = \frac{h}{2}$ için,

$$\int_0^h |x'(t)x(t)| dt \leq \frac{h}{4} \int_0^h (x'(t))^2 dt$$

elde edilir.

Uyarı 3.4. Opial eşitsizliği, $x(t)$ fonksiyonu $t = \frac{h}{2}$ noktasında süreksizliğe sahip olsa bile, $[0, \frac{h}{2}]$ ve $[\frac{h}{2}, h]$ alt aralıklarının her ikisinde de $x(t)$ fonksiyonu mutlak süreklilik ve $x(0) = x(h) = 0$ olması durumunda sağlanır. Yukarıdaki ispattan Opial eşitsizliğini ispatlamak için aşağıdaki teoremin ispatını vermek yeterlidir.

Teorem 3.5. $x(t)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = 0$ olsun. O zaman,

$$\int_0^a |x'(t) x(t)| dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a (x'(t))^2 dt \quad (3.24)$$

eşitsizliği vardır [10]. Dahası burada eşitlik, $x(t) = ct$ olması durumunda sağlanır. 1964 yılında Levinson bu eşitsizliği kompleks değerli fonksiyonlara genişleterek literatüre kazandırmıştır. Bazı genelleştirmelerin kurulmasında bu eşitsizlik önemli bir rol oynamıştır.

Levinson İspatı:

Son teoremin koşulları altında $x(t)$ fonksiyonu kompleks değerli fonksiyonlara genişletilir. Bununla birlikte (3.24) eşitsizliğinin sağ tarafı $\frac{a}{2} \int_0^a |x'(t)|^2 dt$ olarak değiştirilmiş olsun. Böylece, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanılarak,

$$\begin{aligned} \int_0^a |x'(t) x(t)| dt &\leq \int_0^a \left| t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t x'(s) ds \right| \left| t^{\frac{1}{2}} x'(t) \right| dt \\ &\leq \left(\int_0^a \left| t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t x'(s) ds \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^a \left| t^{\frac{1}{2}} x'(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (AB)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$A = \int_0^a t^{-1} \left| \int_0^t x'(s) ds \right|^2 dt$$

ve

$$B = \int_0^a t |x'(t)|^2 dt$$

dir. A ifadesinin mutlak değerli kısmı ele alınırsa,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t x'(s) ds \right|^2 &\leq \left(\int_0^t x'(s) ds \right)^2 \\ &\leq \left[\left(\int_0^t 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |x'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

$$= t \int_0^t |x'(s)|^2 ds$$

elde edilir. Bulunan bu ifade A da yerine yazılır ise,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a t^{-1} \left| \int_0^t x'(s) ds \right|^2 dt \leq \int_0^a t^{-1} \left(t \int_0^t |x'(s)|^2 ds \right) dt \\ &= \int_0^a \left(\int_0^t |x'(s)|^2 ds \right) dt \end{aligned}$$

olur. Burada sınırlar değiştirilerek,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a \int_s^a |x'(s)|^2 dt ds \\ &= \int_0^a (a-s) |x'(s)|^2 ds \end{aligned}$$

olacağından,

$$A \leq \int_0^a (a-t) |x'(t)|^2 dt \quad (3.25)$$

ifadesi bulunur. Elde edilen ifadeler aritmetik geometrik ortalama eşitsizliğinde yerine yazılır ise,

$$\begin{aligned} (AB)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{A+B}{2} \\ (AB)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^a (a-t) |x'(t)|^2 dt \right) + \int_0^a t |x'(t)|^2 dt \right] \\ &\leq \frac{a}{2} \int_0^a |x'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak eşitlik durumu için $x(0) = 0$ şartını sağlayan $x(t) = ct$ fonksiyonu için $x'(t) = c$ olduğu göz önüne alınarak yukarıdaki ispat yöntemiyle tamamlanır [8].

Mallow İspatı:

$t \in [0, a]$ olmak üzere,

$$y(t) = \int_0^t |x'(s)| ds$$

olarak ifade edilirse,

$$|x(t)| \leq y(t)$$

dir. Dolayısıyla,

$$2 \int_0^a |x(t) x'(t)| dt \leq 2 \int_0^a y(t) y'(t) dt \quad (3.26)$$

$$= y^2(a).$$

olur. Burada, Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımı ile,

$$y^2(a) = \left(\int_0^a |x'(t)| dt \right)^2 \leq a \int_0^a (x'(t))^2 dt \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.26) ve (3.27) birleşiminden (3.24) ifadesine ulaşılır. Ayrıca, daha önceki teoremlerde olduğu gibi (3.27) ve (3.24) ifadelerinde de yalnızca $x(t) = ct$ olduğunda eşitlik söz konusudur [7].

Hua ve Pederson İspatı:

$x(t)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = 0$ olmak üzere, $0 \leq s \leq t$ ve $0 \leq t \leq a$ için

$$x(t) = \int_0^t x'(s) ds$$

olsun. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \int_0^a |x(t) x'(t)| dt &= \int_0^a |x'(t)| \left| \int_0^t x'(s) ds \right| dt \\ &\leq \int_0^a \int_0^t |x'(s)| |x'(t)| ds dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

dir. İntegrasyon sırası değişimiyle,

$$\int_0^a \int_0^t |x'(s)| |x'(t)| ds dt = \int_0^a \int_s^a |x'(s)| |x'(t)| dt ds$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\int_0^a \int_0^a |x'(s)| |x'(t)| dt ds = \int_0^a \int_0^s |x'(s)| |x'(t)| dt ds + \int_0^a \int_s^a |x'(s)| |x'(t)| dt ds$$

yukarıdaki eşitlikte sağdaki ikinci integralin integrasyon sırası değiştirildiğinde, $0 \leq s \leq a$ ve $0 \leq t \leq a$ karesi üzerindeki integralin yarısına eşittir. Mallow [7] tarafından verilen ispattaki gibi Cauchy- Schwarz eşitsizliğinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^a |x'(s)| |x'(t)| dt ds &= 2 \int_0^a \int_0^s |x'(s)| |x'(t)| dt ds \\ \int_0^a \int_0^t |x'(s) x'(t)| ds dt &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a |x'(s) x'(t)| ds dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^a |x'(t)| dt \right)^2 \\ &\leq \frac{a}{2} \int_0^a |x'(t)|^2 dt \end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitsizliği bulunur. (3.29) ifadesi (3.28) de yerine yazılır ise,

$$\begin{aligned} \int_0^a |x(t) x'(t)| dt &\leq \int_0^a \int_0^t |x'(s)| |x'(t)| ds dt \\ &\leq \frac{a}{2} \int_0^a |x'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

ispat tamamlanır [9], [45].

Opial eşitsizliği farklı ölçüler kullanılarak aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Teorem 3.6 (Hua Genelleştirmesi). $x(t)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = 0$ olsun. Ayrıca l pozitif bir tamsayı olsun. O halde,

aşağıdaki eşitsizlik vardır

$$\int_0^a |x^l(t) x'(t)| dt \leq \frac{a^l}{l+1} \int_0^a |x'(t)|^{l+1} dt. \quad (3.30)$$

İspat. Teoremin ispatı için $p = l + 1$ ve $q = \frac{l+1}{l}$ için Hölder eşitsizliğinden yararlanıldığında,

$$\begin{aligned} \int_0^a |x^l(t) x'(t)| dt &= l \int_0^a |x'(t_1)| \left| \int_0^{t_1} x^{l-1}(t) x'(t) dt \right| dt_1 \\ &\leq l \int_0^a |x'(t_1)| \int_0^{t_1} |x^{l-1}(t) x'(t)| dt dt_1 \\ &= l(l-1) \int_0^a |x'(t_1)| dt_1 \int_0^{t_1} |x'(t_2)| dt_2 \left| \int_0^{t_2} |x^{l-2}(t) x'(t)| dt \right| \\ &\quad \vdots \\ &\leq l! \int \dots \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{l+1} \leq a} |x'(t_1) x'(t_2) \dots x'(t_{l+1})| dt_1 dt_2 \dots dt_{l+1} \\ &\leq \frac{a^l}{l+1} \int_0^a |x'(t)|^{l+1} dt \end{aligned}$$

ispat tamamlanır [9]. □

Uyarı 3.7. Hua tarafından verilen genelleştirmenin herhangi bir l pozitif sayısı için ispatı açıktır. Buna rağmen $l \geq 0$ için ispatı başarısızdır. $l \geq 0$ için bu ispat Wong [24] tarafından verilmiştir. Mallow ispatındaki gibi

$$y(t) = \int_0^t |x'(s)| ds, \quad t \in [0, a]$$

olarak alınırsa

$$|x(t)| \leq y(t)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\int_0^a |x^l(t) x'(t)| dt \leq \int_0^a y^l(t) y'(t) dt$$

$$= \frac{1}{l+1} y^{l+1}(a)$$

bulunur. Burada Hölder eşitsizliğinden yararlanılarak $l \geq 0$ için ifade edilir. Benzer bir ispat da $l \geq 1$ için Wong çalışmasından bir yıl önce 1966 yılında Yang [46] tarafından literatüre sunulmuştur.

Uyarı 3.8. 1979 yılında Hou [47] görünüşe göre yapılan ispatlardan habersiz olarak aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır.

$$\int_0^a |x^l(t) x'(t)| dt \leq \frac{a^n}{n+1} \left(1 + \frac{p}{n+1}\right)^n \int_0^a |x^p(t) (x'(t))^{n+1}| dt.$$

Burada $n = [l]$ ve $l - n = p$ dir. $p = 0$ için yani l pozitif bir tamsayı iken yukarıdaki eşitsizlik sağlanır. Buna rağmen tüm $l \geq 0$ için Hua genelleştirmesinin ispatını vermez.

Teorem 3.9 (He ve Wang Genelleştirmesi). $x(t)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = 0$ olsun. Ayrıca l pozitif bir tamsayı ve $0 \leq \alpha \leq \beta \leq a$ keyfi sayılar olsun. O halde,

$$\int_\alpha^\beta |x^l(t) x'(t)| dt \leq \frac{\beta^l}{l+1} \int_0^\beta |x'(t)|^{l+1} dt - \frac{a^l}{l+1} \int_0^a |x'(t)|^{l+1} dt$$

eşitsizliği vardır. Ayrıca bu teoremde yalnızca $x(t) = ct$ olduğunda eşitlik sağlanır [48].

İspat. Kabul edelim ki,

$$f(t) = \frac{t^{l+1}}{l+1} \int_0^t |x'(s)|^{l+1} ds - \int_0^t |x^l(s) x'(s)| ds$$

fonksiyonu $[0, a]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli ve $f'(t)$ hemen hemen her yerde var olsun. O halde,

$$f'(t) = \frac{l}{l+1} t^{l-1} \int_0^t |x'(s)|^{l+1} ds + \frac{t^l}{l+1} |x'(t)|^{l+1} - |x^l(t) x'(t)|$$

dir. Bununla birlikte Hua genelleştirmesi de dikkate alındığında

$$\begin{aligned} \int_0^t |x'(s)|^{l+1} ds &\geq \frac{l+1}{t^l} \left| \int_0^t x^l(s) x'(s) ds \right| \\ &= \frac{1}{t^l} |x(t)|^{l+1}, t > 0 \end{aligned}$$

vardır ve buradan da

$$f'(t) \geq \frac{l}{l+1} \frac{1}{t} |x(t)|^{l+1} + \frac{t^l}{l+1} |x'(t)|^{l+1} - |x^l(t) x'(t)| \quad (3.31)$$

elde edilir. Literatürde iyi bilinen Young eşitsizliğini aşağıdaki gibi verelim.

$$wz^l \leq \frac{w^{l+1}}{l+1} + \frac{(z^l)^{\frac{l+1}{l}}}{\frac{l+1}{l}}, \quad w, z \geq 0, \quad l \geq 0.$$

Burada $w = t |x'(t)|$ ve $z = |x(t)|$ olmak üzere yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} t |x'(t)| |x(t)|^l &\leq \frac{t^{l+1} |x'(t)|^{l+1}}{l+1} + \frac{l |x(t)|^{l+1}}{l+1} \\ |x'(t)| |x(t)|^l &\leq \frac{t^l}{l+1} |x'(t)|^{l+1} + \frac{l}{l+1} \frac{1}{t} |x(t)|^{l+1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

(3.31) ve (3.32) benzer ifadelerinden $f'(t) \geq 0$ ve buradan $\beta > \alpha$ için $f(\beta) \geq f(\alpha)$ olduğu açıktır. Bu teoremden ancak ve ancak $x(t) = ct$ olduğunda eşitlik sağlanır. \square

Teorem 3.10 (Yang Genelleştirmesi). $p(t)$, $r(t)$, $q(t)$ pozitif, sürekli fonksiyonlar ve $q(t)$ fonksiyonu (a, τ) aralığı üzerinde artmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_a^\tau q(t) |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_a^\tau \frac{dt}{p(t)} \int_a^\tau p(t) q(t) (x'(t))^2 dt \quad (3.33)$$

vardır [46]. $x(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = 0$ ve

$$x^2(t) = O\left(\frac{1}{q(t)} \int_a^t \frac{ds}{p(s)}\right), \quad t \rightarrow a^+$$

olsun. Yukarıdaki ifadede eğer $q(t)$ sabit ya da $x(t) = 0$ ise eşitlik vardır.

Teorem 3.11. $p(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon, $\int_a^\tau \frac{dt}{p(t)} < \infty$ sınırlı ve $q(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde pozitif, sınırlı ve artmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $x(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = 0$ olsun. Böylece, Yang'ın genelleştirme teoremi sağlanır. Burada eğer $q(t)$ sabit ya da $x(t) = c \int_a^t \frac{ds}{p(s)}$ ise ancak ve ancak eşitlik durumu vardır.

İspat. Kabul edelim ki,

$$y(t) = \int_a^t \sqrt{q(s)} |x'(s)| ds, \quad t \in [a, \tau]$$

olsun. Böylece

$$y'(t) = \sqrt{q(t)} |x'(t)|$$

dir. $q(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde artmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \int_a^t |x'(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{q(t)}} \int_a^t \sqrt{q(s)} |x'(s)| ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(t)}} y(t) \end{aligned} \tag{3.34}$$

ifadesine ulaşılır. $y'(t)$ tanımından ve (3.34) faydalanıldığında,

$$\begin{aligned} \int_a^\tau q(t) |x(t) x'(t)| dt &\leq \int_a^\tau y(t) y'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} y^2(\tau) \end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir. $y(t)$ fonksiyonunun tanımı ve Cauchy- Schwarz eşitsizliğinin yardımıyla,

$$\begin{aligned} y^2(\tau) &= \left(\int_a^\tau \frac{1}{\sqrt{p(t)}} \sqrt{p(t)q(t)} |x'(t)| dt \right)^2 \\ &\leq \left[\left(\int_a^\tau \left(\frac{1}{\sqrt{p(t)}} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^\tau \left(\sqrt{p(t)q(t)} |x'(t)| \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\leq \int_a^\tau \frac{dt}{p(t)} \int_a^\tau p(t)q(t) (x'(t))^2 dt \quad (3.36)$$

olur. Böylece elde edilen (3.35) ve(3.36) ifadelerinin birleşimiyle

$$\int_a^\tau q(t) |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_a^\tau \frac{dt}{p(t)} \int_a^\tau p(t)q(t) (x'(t))^2 dt$$

eşitsizliğin ispatı tamamlanır. \square

Teorem 3.12. $p(t)$ fonksiyonu $[\tau, \beta]$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon, $\int_\tau^\beta \frac{dt}{p(t)} < \infty$ sınırlı ve $q(t)$ fonksiyonu $[\tau, \beta]$ aralığı üzerinde pozitif, sınırlı ve azalmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $x(t)$ fonksiyonu $[\tau, \beta]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(\beta) = 0$ olsun. O halde,

$$\int_\tau^\beta q(t) |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_\tau^\beta \frac{dt}{p(t)} \int_\tau^\beta p(t)q(t) (x'(t))^2 dt \quad (3.37)$$

dir. Burada eğer $q(t)$ sabit ya da $x(t) = c \int_\tau^\beta \frac{ds}{p(s)}$ ise eşitlik durumu vardır.

Sonuç 3.13. $q(t)$ fonksiyonu $[a, \beta]$ aralığı üzerinde pozitif, sınırlı ve monoton bir fonksiyon olsun. Ayrıca $x(t)$ fonksiyonu $[a, \beta]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = x(\beta) = 0$ olsun. O halde,

$$\int_a^\beta q(t) |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{\beta - a}{2} \int_a^\beta q(t) (x'(t))^2 dt$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğin ispatı için $p(t) = 1$ seçmek ve Teorem 3.11 ve Teorem 3.12 nin ispatlarını takip etmek yeterlidir.

Teorem 3.14. $x(t)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = 0$ olsun. Öyleyse $l, m \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik

$$\int_0^a |x(t)|^l |x'(t)|^m dt \leq \frac{m}{l+m} a^l \int_0^a |x'(t)|^{l+m} dt \quad (3.38)$$

vardır.

İspat. Kabul edelim ki,

$$y(t) = \int_0^t |x'(s)|^m ds, \quad t \in [0, a]$$

olsun. Öyleyse

$$y'(t) = |x'(t)|^m$$

eşitliği vardır. Burada m ve $\frac{m}{m-1}$ indisleri ile integraller için Hölder eşitsizliğinden faydalanıldığında,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \int_0^t |x'(s)| ds \leq \left(\int_0^t ds \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_0^t |x'(s)|^m ds \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq t^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_0^t |x'(s)|^m ds \right)^{\frac{1}{m}}, t \in [0, a] \\ &\leq a^{\frac{m-1}{m}} (y(t))^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \int_0^a |x(t)|^l |x'(t)|^m dt &\leq \int_0^a \left(a^{\frac{m-1}{m}} (y(t))^{\frac{1}{m}} \right)^l y'(t) dt \\ &= \int_0^a a^{\frac{l(m-1)}{m}} (y(t))^{\frac{l}{m}} y'(t) dt \end{aligned}$$

elde edilen ifadeye Hua genelleştirmesi Teorem 3.6 uygulandığında,

$$\begin{aligned} \int_0^a |x(t)|^l |x'(t)|^m dt &\leq a^{\frac{l(m-1)}{m}} \frac{a^{\frac{l}{m}}}{\frac{l}{m} + 1} \int_0^a (y'(t))^{\frac{l}{m}+1} dt \quad (3.39) \\ &\leq \frac{m}{l+m} a^{\frac{l(m-1)}{m}} (y(a))^{\frac{l}{m}+1}, \quad t \in [0, a] \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. $y(a)$ ifadesine $\frac{l+m}{l}$ ve $\frac{l+m}{m}$ indisleri için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y(a)^{\frac{l+m}{m}} &= \left(\int_0^a |x'(s)|^m ds \right)^{\frac{l+m}{m}} \\ &\leq a^{\frac{l}{m}} \int_0^a |x'(s)|^{l+m} ds \quad (3.40) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. O halde, (3.39) ve (3.40) ifadelerinin birleşiminden

$$\int_0^a |x(t)|^l |x'(t)|^m dt \leq \frac{m}{l+m} a^l \int_0^a |x'(t)|^{l+m} dt$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Uyarı 3.15. $x(t)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon ve $x(0) = x(a) = 0$ olsun. Öyleyse $l \geq 0$, $m \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik

$$\int_0^a |x(t)|^l |x'(t)|^m dt \leq \frac{m}{l+m} \left(\frac{a}{2}\right)^l \int_0^a |x'(t)|^{l+m} dt$$

vardır.

Teorem 3.16. $q(t)$ fonksiyonu $[a, \beta]$ aralığı üzerinde pozitif, sınırlı ve monoton bir fonksiyon olsun. Ayrıca $x(t)$ fonksiyonu $[a, \beta]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = x(\beta) = 0$ olsun. Böylece $l \geq 0$, $m \geq 1$ için,

$$\int_a^\beta q(t) |x(t)|^l |x'(t)|^m dt \leq \frac{m}{l+m} (\beta - a)^l \int_a^\beta q(t) |x'(t)|^{l+m} dt$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 3.17 (Maroni Genelleştirmesi). $p(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon, $\int_a^\tau p^{1-\mu}(t) dt < \infty$ sınırlı ve $\mu > 1$ olsun. Ayrıca $x(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = 0$ olsun. O halde,

$$\int_a^\tau |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^\tau p^{1-\mu}(t) dt \right)^{\frac{2}{\mu}} \left(\int_a^\tau p(t) |x'(t)|^v dt \right)^{\frac{2}{v}}$$

eşitsizliği vardır ve burada $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{v} = 1$ dir. Bununla birlikte eşitlik durumu ancak ve ancak $x(t) = c \int_a^t p^{1-\mu}(s) ds$ olduğunda mümkündür [40].

İspat. Kabul edelim ki,

$$y(t) = \int_a^t |x'(s)| ds, \quad t \in [a, \tau]$$

olsun. Öyleyse

$$y'(t) = |x'(t)|$$

eşitliği ve

$$y(t) > |x(t)|$$

ifadesi vardır. Burada μ ve v indisleri ile integraller için Hölder eşitsizliğinden faydalanıldığında,

$$\begin{aligned} \int_a^\tau |x(t) x'(t)| dt &\leq \int_a^\tau y(t) y'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} y^2(t) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^\tau |x'(t)| dt \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^\tau p^{-\frac{1}{v}}(t) p^{\frac{1}{v}}(t) |x'(t)| dt \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_a^\tau p^{1-\mu}(t) dt \right)^{\frac{2}{\mu}} \left(\int_a^\tau p(t) |x'(t)|^v dt \right)^{\frac{2}{v}} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.18. $p(t)$ fonksiyonu $[a, \beta]$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon, $\int_a^\beta p^{1-\mu}(t) dt < \infty$ sınırlı ve $\mu \geq 2$ olsun. Ayrıca $x(t)$ fonksiyonu $[a, \beta]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = x(\beta) = 0$ olmak üzere,

$$\int_a^\beta |x(t) x'(t)| dt \leq \frac{1}{2} K \left(\int_a^\beta p(t) |x'(t)|^v dt \right)^{\frac{2}{v}}$$

eşitsizliği vardır ve burada $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{v} = 1$ ile

$$K = \int_a^\tau p^{1-\mu}(t) dt = \int_\tau^\beta p^{1-\mu}(t) dt$$

dir.

İspat. Teorem 3.17' ün ifadesinden ve

$$a^\lambda + b^\lambda \leq (a + b)^\lambda, \quad ab \geq 0, \quad \lambda \geq 1$$

yukarıdaki eşitsizlik ile $\mu \geq 2$ ve $1 \leq v \leq 2$ koşullarından yararlanılır ise,

$$\begin{aligned}
\int_a^\beta |x(t) x'(t)| dt &\leq \frac{1}{2} \left(\int_a^\tau p^{1-\mu}(t) dt \right)^{\frac{2}{\mu}} \left(\int_a^\tau p(t) |x'(t)|^v dt \right)^{\frac{2}{v}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_\tau^\beta p^{1-\mu}(t) dt \right)^{\frac{2}{\mu}} \left(\int_\tau^\beta p(t) |x'(t)|^v dt \right)^{\frac{2}{v}} \\
&= \frac{1}{2} K \left[\left(\int_a^\tau p(t) |x'(t)|^v dt \right)^{\frac{2}{v}} + \left(\int_\tau^\beta p(t) |x'(t)|^v dt \right)^{\frac{2}{v}} \right] \\
&\leq \frac{1}{2} K \left(\int_a^\beta p(t) |x'(t)|^v dt \right)^{\frac{2}{v}}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.19 (Patchpatte Genelleştirmesi). $p(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon, $\int_a^\tau \frac{dt}{p(t)} < \infty$ sınırlı ve $q(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde pozitif, sınırlı ve artmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $i = 1, 2$ için $x_i(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x_i(a) = 0$, $i = 1, 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\int_a^\tau q(t) [|x_1(t)x_2'(t)| + |x_1'(t)x_2(t)|] dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_a^\tau \frac{dt}{p(t)} \int_a^\tau p(t)q(t) [|x_1'(t)|^2 + |x_2'(t)|^2] dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır [14].

İspat. $i = 1, 2$ için

$$y_i(t) = \int_a^t \sqrt{q(s)} |x_i'(s)| ds, \quad t \in [a, \tau]$$

olmak üzere

$$y_i'(t) = \sqrt{q(t)} |x_i'(t)|$$

dir ve

$$|x_i(t)| \leq \int_a^t |x_i'(s)| ds$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{q(t)}} \int_a^t \sqrt{q(s)} |x'_i(s)| ds$$

$$|x_i(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{q(t)}} y_i(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & \int_a^\tau q(t) [|x_1(t)x'_2(t)| + |x'_1(t)x_2(t)|] dt \\ & \leq \int_a^\tau q(t) \left[\frac{1}{\sqrt{q(t)}} y_1(t) \sqrt{q(t)} y'_2(t) + \frac{1}{\sqrt{q(t)}} y_2(t) \sqrt{q(t)} y'_1(t) \right] \\ & = \int_a^\tau (y_1(t) y'_2(t) + y'_1(t) y_2(t)) dt \\ & = \int_a^\tau (y_1(t) y_2(t))' dt \\ & = y_1(\tau) y_2(\tau) \\ & \leq \frac{1}{2} [y_1^2(\tau) + y_2^2(\tau)] \end{aligned} \tag{3.41}$$

olup son adımda $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ temel eşitsizliğinden faydalanılmıştır. $i = 1, 2$ için $y_i(\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$y_i^2(\tau) = \left(\int_a^\tau \frac{1}{\sqrt{p(t)}} \sqrt{p(t)q(t)} |x'_i(t)|^2 dt \right)^2.$$

Elde edilen ifadeye Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$y_i^2(\tau) = \int_a^\tau \frac{1}{p(t)} \int_a^\tau p(t)q(t) |x'_i(t)|^2 dt$$

dir. $i = 1, 2$ için $y_i(\tau)$ fonksiyonları hesaplanıp (3.41) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\int_a^\tau q(t) [|x_1(t)x'_2(t)| + |x'_1(t)x_2(t)|] dt$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_a^\tau \frac{dt}{p(t)} \int_a^\tau p(t)q(t) \left[|x_1'(t)|^2 + |x_2'(t)|^2 \right] dt$$

ispat tamamlanır. □

Teorem 3.20 (Godunova ve Levin Genelleştirmesi). $f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks ve artan bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Ayrıca $x(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = 0$ olsun. O halde,

$$\int_a^\tau f'(|x(t)|) |x'(t)| dt \leq f \left(\int_a^\tau |x'(t)| dt \right) \quad (3.42)$$

eşitsizliği vardır [49].

İspat. Kabul edelim ki,

$$y(t) = \int_a^t |x'(s)| ds, \quad t \in [a, \tau]$$

olsun. Öyleyse,

$$y'(t) = |x'(t)|$$

dir ve

$$y(t) \geq |x(t)|$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \int_a^\tau f'(|x(t)|) |x'(t)| dt &\leq \int_a^\tau f'(y(t)) y'(t) dt \\ &= \int_a^\tau \frac{d}{dt} f(y(t)) dt \\ &= f(y(\tau)) \\ &= f \left(\int_a^\tau |x'(t)| dt \right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Uyarı 3.21. Teorem 3.20 ifadesinde $l \geq 0$ için $f(t) = t^{l+1}$ seçildiğinde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\int_a^\tau |x(t)|^l |x'(t)| dt \leq \frac{1}{l+1} \left(\int_a^\tau |x'(t)| dt \right)^{l+1}. \quad (3.43)$$

Burada (3.43) eşitsizliğinin sağ tarafına $l+1$ ve $\frac{l+1}{l}$ indislerine göre integraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa Hua genelleştirmesi (3.30) elde edilir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.20 in ilginç bir sonucudur.

Teorem 3.22. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks ve artan fonksiyonlar olmak üzere, $f(0) = 0$ olsun. Bununla birlikte $p(t)$ fonksiyonu $[a, \beta]$ aralığı üzerinde pozitif ve $\int_a^\beta p(t) = 1$ olsun. Burada $x(t)$ fonksiyonu $[a, \beta]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = x(\beta) = 0$ olmak üzere,

$$\int_a^\beta f'(|x(t)|) |x'(t)| dt \leq 2f \left(g^{-1} \left(\int_a^\beta p(t) g \left(\frac{|x'(t)|}{2p(t)} \right) dt \right) \right) \quad (3.44)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $\phi(t)$, $[c, d]$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ve tüm $t \in [a, b]$ için $c \leq \psi(t) \leq d$ olmak üzere $r(t)$ kesin pozitif bir fonksiyon ise

$$\phi \left(\frac{\int_a^b \psi(t) r(t) dt}{\int_a^b r(t) dt} \right) \leq \frac{\int_a^b \phi(\psi(t)) r(t) dt}{\int_a^b r(t) dt}$$

integraller için Jensen eşitsizliği vardır.

$\tau \in [a, \beta]$ olmak üzere $x(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde Teorem 3.20 hipotezlerini sağlar. Dolayısıyla eşitsizlik (3.42) sağlanır. $[\tau, \beta]$ aralığı için $x(t)$ mutlak sürekli fonksiyon ve $x(\beta) = 0$ olduğundan,

$$y(t) = \int_t^\beta |x'(s)| ds, \quad t \in [\tau, \beta]$$

tanımlanır. Böylece Teorem 3.20 benzer şekilde ispatlanabilir. O halde,

$$\int_\tau^\beta f'(|x(t)|) |x'(t)| dt \leq f \left(\int_\tau^\beta |x'(t)| dt \right) \quad (3.45)$$

dir. $\tau \in [a, \beta]$ için aşağıdaki gibi seçilir ise,

$$\int_a^\tau |x'(t)| dt = \int_\tau^\beta |x'(t)| dt = \frac{1}{2} \int_a^\beta |x'(t)| dt$$

(3.42) ve (3.45) eşitsizliklerinin birleşimiyle

$$\int_a^\beta f'(|x(t)|) |x'(t)| dt \leq 2f \left(\frac{1}{2} \int_a^\beta |x'(t)| dt \right) \quad (3.46)$$

elde edilir. Daha sonra $g(t)$ fonksiyonunun konveksliğinden ve Jensen eşitsizliğinden

$$g \left(\frac{\int_a^\beta \frac{|x'(t)|}{2p(t)} p(t) dt}{\int_a^\beta p(t) dt} \right) \leq \frac{\int_a^\beta g \left(\frac{|x'(t)|}{2p(t)} p(t) \right) dt}{\int_a^\beta p(t) dt}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\int_a^\beta p(t) dt = 1$ olduğu ve $g(t)$ fonksiyonun artanlığı göz önüne alınır

$$\frac{1}{2} \int_a^\beta |x'(t)| dt \leq g^{-1} \left(\int_a^\beta g \left(\frac{|x'(t)|}{2p(t)} \right) p(t) dt \right) \quad (3.47)$$

bulunur. Son olarak (3.46) eşitsizliğinde (3.47) eşitsizliği ve f fonksiyonunun artanlığından faydalanılırsa ispat tamamlanır

$$\int_a^\beta f'(|x(t)|) |x'(t)| dt \leq 2f \left(g^{-1} \left(\int_a^\beta p(t) g \left(\frac{|x'(t)|}{2p(t)} \right) dt \right) \right).$$

□

Teorem 3.23 (Roanova Genelleştirmesi). $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks ve artan fonksiyonlar olmak üzere, $f(0) = 0$ olsun. $p(t) \geq 0$ ve $p'(t) > 0$, $t \in [a, \tau]$ olmak üzere $p(a) = 0$ olsun. $x(t)$ fonksiyonu $[a, \tau]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyon, $x(a) = 0$ olsun. O halde,

$$\int_a^\tau p'(t) g \left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)} \right) f' \left(p(t) g \left(\frac{|x(t)|}{p(t)} \right) \right) dt \leq f \left(\int_a^\tau p'(t) g \left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)} \right) dt \right) \quad (3.48)$$

vardır. Eşitlik durumu yalnızca $x(t) = cp(t)$ koşuluyla sağlanır [10].

İspat. Varsayalım ki,

$$y(t) = \int_a^t |x'(s)| ds, \quad t \in [a, \tau]$$

olsun. Öyleyse,

$$y'(t) = |x'(t)|$$

dir ve

$$y(t) \geq |x(t)|$$

olur. İntegraller için Jensen eşitsizliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right) &\leq g\left(\frac{y(t)}{p(t)}\right) \\ &\leq g\left(\frac{\int_a^t p'(s) \left(\frac{|x'(s)|}{p'(s)}\right) ds}{\int_a^t p'(s) ds}\right) \\ &\leq \frac{1}{p(t)} \int_a^t p'(s) g'\left(\frac{y'(s)}{p'(s)}\right) ds \end{aligned} \quad (3.49)$$

elde edilir. Elde edilen (3.49) ifadesi eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\int_a^\tau p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t) g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \\ &\leq \int_a^\tau p'(t) g\left(\frac{y'(t)}{p'(t)}\right) f'\left(p(t) \frac{1}{p(t)} \int_a^t p'(s) g'\left(\frac{y'(s)}{p'(s)}\right) ds\right) dt \\ &= \int_a^\tau \frac{d}{dt} \left[f\left(\int_a^t p'(s) g\left(\frac{y'(s)}{p'(s)}\right) ds\right) \right] dt \\ &= f\left(\int_a^\tau p'(t) g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) dt\right) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur ve ispat tamamlanılır. \square

4. UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN BAZI OPİAL TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, uyumlu kesirli integral - türev kavramları incelenerek Opial tipli yeni eşitsizlikler elde edilecektir. Aşağıda verilen uyumlu kesirli türev ve integraller için detaylı şekilde [23], [50]- [53] referansları bakılabilir.

Tanım 4.1. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere $t > 0$ için

$$D_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad D_{\alpha}(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} D_{\alpha}(f)(t),$$

limiti sağlanıyorsa f ye α -diferansiyellenebilir, denir [29].

f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise,

$$D_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$$

dir.

Teorem 4.2. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O halde tüm $t > a$ için

$$I_{\alpha}^{\alpha} D_{\alpha} f(t) = f(t) - f(a)$$

dir.

Teorem 4.3. Kabul edelim ki $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. O zaman, tüm $t > a$ için

$$D_{\alpha} I_{\alpha}^{\alpha} f(t) = f(t)$$

vardır.

Uyumlu kesirli integraller için Opial eşitsizliği, aşağıdaki gibi ifade edilir [54].

Teorem 4.4. $\alpha \in (0, 1]$ ve u fonksiyonu $(0, h)$ aralığı üzerinde α -kesirli diferansiyellenebilir ve $u(0) = u(h) = 0$ olsun. O halde, uyumlu kesirli integraller için Opial eşitsizliği,

$$\int_0^h |u(t)D_\alpha(u)(t)| d_\alpha t \leq \frac{h^\alpha}{4\alpha} \int_0^h |D_\alpha(u)(t)|^2 d_\alpha t \quad (4.1)$$

şeklindedir.

Teorem 4.5. $\alpha \in (0, 1]$, $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ α -kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $u(a) = 0$ olsun. Böylece, aşağıdaki eşitsizlik

$$\int_a^b |u(x)| |D_\alpha u(x)| d_\alpha x \leq \frac{b^\alpha - a^\alpha}{2\alpha} \int_a^b (|D_\alpha u(x)|)^2 d_\alpha x$$

vardır.

İspat. Genelliği kaybetmeden, $a = 0$ olduğunu varsayalım. O halde $[0, x]$ üzerinde

$$F(x) = \frac{x^\alpha}{2\alpha} \int_0^x (D_\alpha u(t))^2 d_\alpha t - \int_0^x |u(t)D_\alpha u(t)| d_\alpha t$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece her $x \geq 0$, için $F(x)$ in uyumlu kesirli türevi alınırsa

$$D_\alpha F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (D_\alpha u(t))^2 d_\alpha t + \frac{x^\alpha}{2\alpha} (D_\alpha u(x))^2 - |u(x)D_\alpha u(x)| \quad (4.2)$$

dir. Uyumlu kesirli integral için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x D_\alpha u(t) d_\alpha t \right| \leq \int_0^x |D_\alpha u(t)| d_\alpha t \\ &\leq \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x |D_\alpha u(t)|^2 d_\alpha t \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ve böylece

$$\frac{\alpha}{x^\alpha} |u(x)|^2 \leq \int_0^x |D_\alpha u(t)|^2 d_\alpha t \quad (4.3)$$

dir. (4.2) de (4.3) eşitsizliğini yerine yazalım ve $A^2 + B^2 - 2AB \geq 0$ temel eşitsizliğini kullanarak,

$$A = |u(x)|, \quad B = \left| \frac{x^\alpha}{\alpha} D_\alpha u(x) \right|$$

olarak seçelim. O halde, (4.2) ifadesi

$$\begin{aligned} D_\alpha F(x) &\geq \frac{\alpha}{2x^\alpha} |u(x)|^2 + \frac{x^\alpha}{2\alpha} |D_\alpha u(x)|^2 - |u(x)D_\alpha u(x)| \\ &= \frac{\alpha}{2x^\alpha} \left[|u(x)|^2 + \left| \frac{x^\alpha}{\alpha} D_\alpha u(x) \right|^2 - 2 \left| \frac{x^\alpha}{\alpha} u(x) D_\alpha u(x) \right| \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

şeklini alır. Buradan da, $D_\alpha F(x) \geq 0$ olduğundan ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.6. $\alpha \in (0, 1]$, $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, α -kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $u(a) = 0$ olsun. O halde, $p \geq 0$, $q \geq 1$ için

$$\int_a^b |u(x)|^p |D_\alpha u(x)|^q d_\alpha x \leq \frac{q}{p+q} \left(\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^p \int_a^b (|D_\alpha u(x)|)^{p+q} d_\alpha x$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Genelliği bozmadan, $p > 0$ ve $a = 0$ olduğunu kabul edelim. $[0, x]$ üzerinde

$$F(x) = \frac{qx^{\alpha p}}{\alpha^p(p+q)} \int_0^x |D_\alpha u(t)|^{p+q} d_\alpha t - \int_0^x |u(t)|^p |D_\alpha u(t)|^q d_\alpha t$$

olsun. Hemen hemen her $x \geq 0$ için

$$\begin{aligned} D_\alpha F(x) &= \frac{qp}{p+q} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right)^{p-1} \int_0^x |D_\alpha u(t)|^{p+q} d_\alpha t \\ &\quad + \frac{q}{p+q} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right)^p |D_\alpha u(x)|^{p+q} - |u(x)|^p |D_\alpha u(x)|^q \end{aligned} \quad (4.4)$$

dir. r ve $p+q$ indislerine göre uyumlu kesirli integraller için Hölder eşitsizliğinden faydalanılarak,

$$|u(x)| = \left| \int_0^x D_\alpha u(t) d_\alpha t \right| \leq \int_0^x |D_\alpha u(t)| d_\alpha t$$

$$\leq \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^x (D_\alpha u(t))^{p+q} d_\alpha t\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

bulunur. Böylece,

$$\left(\frac{\alpha}{x^\alpha}\right)^{p+q-1} |u(x)|^{p+q} \leq \int_0^x (D_\alpha u(t))^{p+q} d_\alpha t \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu nedenle (4.5) in (4.4) de yerine konulması ve $q \geq 1$ durumu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned} D_\alpha F(x) &\geq \frac{qp}{p+q} \left(\frac{\alpha}{x^\alpha}\right)^q |u(x)|^{p+q} + \frac{q}{p+q} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^p |D_\alpha u(x)|^{p+q} - |u(x)|^p |D_\alpha u(x)|^q \\ &\geq \frac{p}{p+q} \left(\frac{\alpha}{x^\alpha}\right)^q |u(x)|^{p+q} + \frac{q}{p+q} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)^p |D_\alpha u(x)|^{p+q} - |u(x)|^p |D_\alpha u(x)|^q \\ &\geq \left(\frac{\alpha}{x^\alpha}\right)^q \left[\frac{p}{p+q} |u(x)|^{p+q} + \frac{q}{p+q} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} D_\alpha u(x)\right)^{p+q} - |u(x)|^p \left|\frac{x^\alpha}{\alpha} D_\alpha u(x)\right|^q \right]. \end{aligned}$$

Burada $S_1 = \frac{p}{p+q}$, $S_2 = \frac{q}{p+q}$, $A = |u(x)|^{p+q}$ ve $B = \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} D_\alpha u(x)\right)^{p+q}$ olarak seçilmesiyle,

$$S_1 A + S_2 B - A^{S_1} B^{S_2} \geq 0$$

ve

$$S_1 + S_2 = 1$$

olduğundan aritmetik geometrik ortalama eşitsizliği sıfırdan büyük eşittir. Dolayısıyla, $F(b) = \int_0^b D_\alpha F(t) d_\alpha t \geq 0$ dir ve ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.7. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, n -defa α - kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $u(a) = D_\alpha u(a) = \dots = D_\alpha^{n-1} u(a) = 0$ olsun. O halde, $p \geq 0$, $q \geq 1$ için

$$\int_a^b |u(x)|^p |D_\alpha^n u(x)|^q d_\alpha x \leq \frac{q}{p+1} \left(\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha}\right)^{np} \int_a^b (D_\alpha^n u(x))^{p+q} d_\alpha x \quad (4.6)$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki,

$$g(t) = \int_a^t \int_a^{t_{n-1}} \dots \int_a^{t_1} |D_\alpha^n u(x)| d_\alpha t_1 \dots d_\alpha t_{n-1} d_\alpha x$$

olsun. Bu durumda,

$$D_\alpha g(t), \dots, D_\alpha^{n-1} g(t) \geq 0$$

ve

$$D_\alpha^n g(t) = |D_\alpha^n u(t)| \geq 0,$$

$$g(t) \geq |u(t)|,$$

eşitsizlikleri vardır. Burada

$$\begin{aligned} D_\alpha^i g(t) &= \int_a^t D_\alpha^{i+1} g(x) d_\alpha x \\ &\leq D_\alpha^{i+1} g(t) \int_a^t 1. d_\alpha x \\ &= \frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} D_\alpha^{i+1} g(t) \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \end{aligned}$$

ifadesinden

$$D_\alpha g(t) = \frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} D_\alpha^2 g(t)$$

elde edilir. Dahası,

$$\begin{aligned} &\int_a^b |u(x)|^p |D_\alpha^n u(x)|^q d_\alpha x \\ &\leq \int_a^b (g(x))^p |D_\alpha^n u(x)|^q d_\alpha x \\ &\leq \int_a^b \left(\frac{x^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^p (D_\alpha g(x))^p (D_\alpha^n g(x))^q d_\alpha x \\ &\leq \int_a^b \left[\left(\frac{x^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^2 \right]^p (D_\alpha^2 g(x))^p (D_\alpha^n g(x))^q d_\alpha x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \leq \int_a^b \left[\left(\frac{x^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \right]^p (D_\alpha^{n-1}g(x))^p (D_\alpha^n g(x))^q d_\alpha x \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Buradan da, Teorem 4.6 dan faydalanılarak,

$$\begin{aligned} & \int_a^b |u(x)|^p |D_\alpha^n u(x)|^q d_\alpha x \\ & \leq \left[\left(\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \right]^p \int_a^b (D_\alpha^{n-1}g(x))^p (D_\alpha^n g(x))^q d_\alpha x \\ & \leq \left(\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{(n-1)p} \frac{q}{p+1} \left(\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^p \int_a^b (D_\alpha^n g(x))^{p+q} d_\alpha x \\ & = \frac{q}{p+1} \left(\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{np} \int_a^b (D_\alpha^n g(x))^{p+q} d_\alpha x \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

5. UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN KONVEKSLİK YARDIMIYLA OPIAL TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, Uyumlu kesirli integraller ve türevler için önemli olan ve ispatlarımızda da kullanacağımız aşağıdaki lemmayı vererek başlayalım.

Lemma 5.1. D^α uyumlu diferansiyel operatör (2.1) de olduğu gibi verilsin, burada $\alpha \in (0, 1]$ ve $t \geq 0$, ve f ve g fonksiyonlarının α -diferansiyellenebilir olduğunu varsayalım. O halde,

- i. $D_\alpha (\ln t) = t^{-\alpha}$,
- ii. $D_\alpha \left[\int_a^t f(t, s) d_\alpha s \right] = f(t, t) + \int_a^t D_\alpha [f(t, s)] d_\alpha s$
- iii. $\int_a^b f(x) D_\alpha (g)(x) d_\alpha x = fg|_a^b - \int_a^b g(x) D_\alpha (f)(x) d_\alpha x$

dir [29], [55]- [57].

Teorem 5.2. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere p fonksiyonu sürekli ve pozitif $D^\alpha (p(t)) > 0$ olsun. Ayrıca g, F fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks ve artan fonksiyonlar olsun. Eğer $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ α -kesirli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $u(a) = 0$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} & \int_a^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)} \right) F' \left(p(t) g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) \right) d_\alpha t \\ & \leq F \left(\int_a^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)} \right) d_\alpha t \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

eşitsizliği vardır. Eğer F konkav ise o zaman (5.1) eşitsizliğinin tersi geçerlidir.

İspat. $y(t) = \int_a^t |D_\alpha u(s)| d_\alpha s$ fonksiyonunu göz önüne alalım, yani

$$D_\alpha y(t) = |D_\alpha u(t)|$$

dir ve

$$y(t) \geq |u(t)|$$

eşitsizliğini sağlar. g fonksiyonunun artanlığından ve uyumlu kesirli integraller için Jensen eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} g\left(\frac{|u(t)|}{p(t)}\right) &\leq g\left(\frac{y(t)}{p(t)}\right) \\ &= g\left(\frac{\int_a^t D_\alpha p(s) \frac{|D_\alpha u(s)|}{D_\alpha p(s)} d_\alpha s}{\int_a^t D_\alpha p(s) d_\alpha s}\right) \\ &\leq \frac{1}{p(t)} \int_a^t D_\alpha p(s) g\left(\frac{|D_\alpha u(s)|}{D_\alpha p(s)}\right) d_\alpha s \\ &= \frac{1}{p(t)} \int_a^t D_\alpha p(s) g\left(\frac{D_\alpha y(s)}{D_\alpha p(s)}\right) d_\alpha s \end{aligned} \quad (5.2)$$

elde edilir. Böylece, F nin konveksliğinden (5.2) eşitsizliği ile Teorem 2.17 deki (vi) özelliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} &\int_a^b D_\alpha p(t) g\left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)}\right) F'\left(p(t) g\left(\frac{|u(t)|}{p(t)}\right)\right) d_\alpha t \\ &\leq \int_a^b D_\alpha p(t) g\left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)}\right) F'\left(\int_a^t D_\alpha p(s) g\left(\frac{D_\alpha y(s)}{D_\alpha p(s)}\right) d_\alpha s\right) d_\alpha t \\ &\leq \int_a^b D_\alpha F\left(\int_a^t D_\alpha p(s) g\left(\frac{D_\alpha y(s)}{D_\alpha p(s)}\right) d_\alpha s\right) d_\alpha t \\ &= F\left(\int_a^b D_\alpha p(s) g\left(\frac{D_\alpha y(s)}{D_\alpha p(s)}\right) d_\alpha s\right) \\ &= F\left(\int_a^b D_\alpha p(t) g\left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)}\right) d_\alpha t\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Sonuç 5.3. Teorem 5.2' nin hipotezleri altında eğer $g(s) = s$ seçilirse,

$$\int_a^b |D_\alpha u(t)| F'(|u(t)|) d_\alpha t \leq F\left(\int_a^b |D_\alpha u(t)| d_\alpha t\right) \quad (5.3)$$

elde edilir.

Uyarı 5.4. Eğer Sonuç 5.3' de $F(s) = \frac{s^2}{2}$ seçilirse (5.3) eşitsizliği

$$\int_a^b |u(t)| |D_\alpha u(t)| d_\alpha t \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b |D_\alpha u(t)| d_\alpha t \right)^2$$

yukarıdaki ifadeyi sağlar. Uyumlu kesirli integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(t)| |D_\alpha u(t)| d_\alpha t &\leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b |D_\alpha u(t)| d_\alpha t \right)^2 \\ &\leq \frac{b^\alpha - a^\alpha}{2\alpha} \int_a^b (|D_\alpha u(t)|)^2 d_\alpha t \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizlik Sarikaya ve Bilisik tarafından [54] de ispatlanmıştır.

Sonuç 5.5. Eğer $F(s) = \frac{s^{n+1}}{n+1}$, $n \geq 0$ ve $g(s) = s$ seçilirse, Teorem 5.2 hipotezleri altında

$$\int_a^b |D_\alpha u(t)| F'(|u(t)|) d_\alpha t \leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^n}{\alpha(n+1)} \int_a^b |D_\alpha u(t)|^{n+1} d_\alpha t$$

elde edilir.

İspat. $\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1$ için n ve $\frac{n+1}{n}$ indisleri ile uyumlu kesirli integraller için Hölder eşitsizliği uygulanır ise,

$$\begin{aligned} \int_a^b |D_\alpha u(t)| F'(|u(t)|) d_\alpha t &\leq \frac{1}{n+1} \left(\int_a^b |D_\alpha u(t)| d_\alpha t \right)^{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left(\int_a^b d_\alpha t \right)^n \left(\int_a^b |D_\alpha u(t)|^{n+1} d_\alpha t \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 5.6. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere p pozitif, sürekli bir fonksiyon ve $p(0) = 0$ olsun. ϕ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks, artan ve $\phi(0) = 0$ olsun. Ayrıca g, F fonksiyonlarının $[0, \infty)$ üzerinde konveks, artan fonksiyonlar ve

$$D_\alpha (F \circ z)(t) \phi \left(\frac{1}{D_\alpha z(t)} \right) \leq \frac{F(z(b))}{z(b)} \phi' \left(\frac{t}{z(b)} \right) \quad (5.4)$$

olmak üzere

$$z(t) = \int_0^t D_\alpha p(s) g \left(\frac{|D_\alpha u(s)|}{D_\alpha p(s)} \right) d_\alpha s$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ α -kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $u(0) = 0$ ise o zaman,

$$\begin{aligned} & \int_0^b \psi \left(D_\alpha p(t) g \left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)} \right) \right) F' \left(p(t) g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) \right) d_\alpha t \\ & \leq \Phi \left(\int_0^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)} \right) d_\alpha t \right) \end{aligned}$$

olur, burada h fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde konkav ve artan olmak üzere $\psi(r) = rh \left(\phi \left(\frac{1}{r} \right) \right)$ ve $\Phi(r) = F(r)h \left(\phi \left(\frac{b}{r} \right) \right)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki,

$$y(t) = \int_a^t |D_\alpha u(s)| d_\alpha s$$

olsun. O halde,

$$D_\alpha y(t) = |D_\alpha u(t)|$$

ve

$$y(t) \geq |u(t)|$$

ifadeleri vardır. g fonksiyonunun artanlığından ve uyumlu kesirli integraller için Jensen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} p(t) g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) & \leq p(t) g \left(\frac{y(t)}{p(t)} \right) = p(t) g \left(\frac{\int_0^t D_\alpha p(s) \frac{|D_\alpha u(s)|}{D_\alpha p(s)} d_\alpha s}{\int_0^t D_\alpha p(s) d_\alpha s} \right) \\ & \leq \int_0^t D_\alpha p(s) g \left(\frac{|D_\alpha u(s)|}{D_\alpha p(s)} \right) d_\alpha s = z(t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde edilir. O halde, F konveks fonksiyon olduğundan (5.5) eşitsizliğinden ve Teorem 2.17 nin (vi) özelliğinden yararlanılarak,

$$\int_0^b \psi \left(D_\alpha p(t) g \left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)} \right) \right) F' \left(p(t) g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) \right) d_\alpha t$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^b \psi(D_\alpha z(t)) F'(z(t)) d_\alpha t \\
&= \int_0^b D_\alpha z(t) h\left(\phi\left(\frac{1}{D_\alpha z(t)}\right)\right) F'(z(t)) d_\alpha t \\
&= \frac{\int_0^b D_\alpha(F \circ z)(t) h\left(\phi\left(\frac{1}{D_\alpha z(t)}\right)\right) d_\alpha t}{\int_0^b D_\alpha(F \circ z)(t) d_\alpha t} \int_0^b D_\alpha(F \circ z)(t) d_\alpha t \\
&\leq h\left(\frac{\int_0^b D_\alpha(F \circ z)(t) \phi\left(\frac{1}{D_\alpha z(t)}\right) d_\alpha t}{\int_0^b D_\alpha(F \circ z)(t) d_\alpha t}\right) F(z(b)) \\
&\leq h\left(\frac{\int_0^b \frac{F(z(b))}{z(b)} \phi'\left(\frac{t}{z(b)}\right) d_\alpha t}{F(z(b))}\right) F(z(b))
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca ϕ fonksiyonunun konveks oluşundan, (5.1) eşitsizliğini uygulayarak ve h fonksiyonunun artanlığı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^b \psi\left(D_\alpha p(t) g\left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)}\right)\right) F'\left(p(t) g\left(\frac{|u(t)|}{p(t)}\right)\right) d_\alpha t \\
&\leq h\left(\frac{\int_0^b \frac{F(z(b))}{z(b)} \phi'\left(\frac{t}{z(b)}\right) d_\alpha t}{F(z(b))}\right) F(z(b)) \\
&\leq F(z(b)) h\left(\phi\left(\frac{b}{z(b)}\right)\right) = \Phi(z(b)) \\
&= \Phi\left(\int_0^b D_\alpha p(t) g\left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)}\right) d_\alpha t\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Teorem 5.7. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere p pozitif ve sürekli bir fonksiyon, $D^\alpha(p(t)) > 0$ ve g, F fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks ve artan fonksiyonlar olsun. Eğer $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n -kez α -kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $u(a) = D_\alpha u(a) =$

... = $D_\alpha^{n-1}u(a) = 0$ ise o halde,

$$\begin{aligned} & \int_a^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{|D_\alpha^n u(t)|}{D_\alpha p(s)} \right) F' \left(p(t) g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) \right) d_\alpha t \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b F \left[(b-a) D_\alpha p(t) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{|D_\alpha^n u(t)|}{D_\alpha p(t)} \right) \right] d_\alpha t \quad (5.6) \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Varsayalım ki,

$$y(t) = \int_a^t \int_a^{t_{n-1}} \dots \int_a^{t_1} |D_\alpha^n u(x)| d_\alpha t_1 \dots d_\alpha t_{n-1} d_\alpha x$$

olsun. Bu durumda,

$$D_\alpha y(t), \dots, D_\alpha^{n-1} y(t) \geq 0$$

ve

$$D_\alpha^n y(t) = |D_\alpha^n u(t)| \geq 0,$$

$$y(t) \geq |u(t)|$$

ifadeleri vardır. Taylor formülünden

$$\begin{aligned} y(t) & \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} D_\alpha^n y(s) d_\alpha s \\ & \leq \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \int_a^t D_\alpha^n y(s) d_\alpha s \end{aligned}$$

dir. g fonksiyonunun artanlığından ve uyumlu kesirli integraller için Jensen eşitsizliğinden,

$$g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) \leq g \left(\frac{y(t)}{p(t)} \right) = g \left(\frac{\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \int_a^t D_\alpha p(s) \frac{D_\alpha^n y(s)}{D_\alpha p(s)} d_\alpha s}{\int_a^t D_\alpha p(s) d_\alpha s} \right)$$

$$\leq \frac{1}{p(t)} \int_a^t D_\alpha p(s) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{D_\alpha^n y(s)}{D_\alpha p(s)} \right) d_\alpha s \quad (5.7)$$

bulunur. Dolayısıyla, F nin konveks fonksiyon oluşundan eşitsizlik (5.7) ile Teorem 2.17 nin (vi) özelliğinden

$$\begin{aligned} & \int_a^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{|D_\alpha^n u(t)|}{D_\alpha p(s)} \right) F' \left(p(t) g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) \right) d_\alpha t \\ & \leq \int_a^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{|D_\alpha^n u(t)|}{D_\alpha p(s)} \right) \\ & \quad \times F' \left(\int_a^t D_\alpha p(s) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{D_\alpha^n y(s)}{D_\alpha p(s)} \right) d_\alpha s \right) d_\alpha t \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da, (5.1) eşitsizliğini uygulayarak ve Jensen eşitsizliğinden faydalanarak,

$$\begin{aligned} & \int_a^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{|D_\alpha^n u(t)|}{D_\alpha p(s)} \right) F' \left(p(t) g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) \right) d_\alpha t \\ & \leq \int_a^b D^\alpha \left[F \circ \left(\int_a^t D_\alpha p(s) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{D_\alpha^n y(s)}{D_\alpha p(s)} \right) d_\alpha s \right) \right] d_\alpha t \\ & = F \circ \left(\int_a^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{D_\alpha^n y(t)}{D_\alpha p(t)} \right) d_\alpha t \right) \\ & = F \circ \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b (b-a) D_\alpha p(t) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{D_\alpha^n y(t)}{D_\alpha p(t)} \right) d_\alpha t \right) \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b F \left[(b-a) D_\alpha p(t) g \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{n-1} \frac{D_\alpha^n y(t)}{D_\alpha p(t)} \right) \right] d_\alpha t \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eşitsizlik (5.6) ispatı tamamlanır. \square

Teorem 5.8. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere p pozitif ve sürekli bir fonksiyon ve $D_\alpha(p(t)) > 0$ olsun. g, F fonksiyonları $[0, \infty)$ üzerinde konveks ve artan fonksiyonlar olmak üzere

eğer $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ α -kesirli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $u(a) = 0$ ise o zaman

$$\begin{aligned} & \int_a^b D_\alpha p(t) g \left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)} \right) F' \left(p(t) g \left(\frac{|u(t)|}{p(t)} \right) \right) d_\alpha t \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b F \left((b-a) D_\alpha p(t) g \left(\frac{|D_\alpha u(t)|}{D_\alpha p(t)} \right) \right) d_\alpha t \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Teoremin kanıtı, (5.1) eşitsizliğine Jensen eşitsizliği uygulanarak elde edilir.

□



6. İKİ DEĞİŞKENLİ UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN OPİAL TIPLI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, tanımlanan bölgelerde tüm fonksiyonların ve integrallerinin reel değerli olduğunu kabul edelim. İlk olarak, çok değişkenli bir fonksiyon için türevin limit tanımının genelleştirmesi olan aşağıdaki tanımla başlayalım [55].

Tanım 6.1. f fonksiyonu n değişkenli t_1, \dots, t_n bir fonksiyon ve f nin $\alpha \in (0, 1]$ mertebeli uyumlu kısmi türevi x_i aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t_i^\alpha} f(t_1, \dots, t_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i e^{\varepsilon t_i^{-\alpha}}, \dots, t_n) - f(t_1, \dots, t_n)}{\varepsilon}. \quad (6.1)$$

Yukarıdaki tanımın genelleştirilmiş hali detaylı olarak Sarıkaya [23] tarafından verilmiştir.

Kabul edelim ki, $D \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde $f(t, s)$ fonksiyonu $\partial_t^\alpha [\partial_s^\beta f(t, s)]$ ve $\partial_s^\beta [\partial_t^\alpha f(t, s)]$ var ve sürekli olsunlar. O halde,

$$\partial_t^\alpha [\partial_s^\beta f(t, s)] = \partial_s^\beta [\partial_t^\alpha f(t, s)]$$

dir.

Tanım 6.2 (İki Katlı Uyumlu Kesirli İntegral). $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere $0 \leq a < b$ ve $0 \leq c < d$ olsun. $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon $[a, b] \times [c, d]$ üzerinde iki katlı α -kesirli integrali var olmak üzere

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) d_\alpha y d_\alpha x := \int_a^b \int_c^d f(x, y) y^{\alpha-1} x^{\alpha-1} dy dx$$

eşitliği var ve sonludur. $[a, b] \times [c, d]$ aralığında tüm iki katlı α -kesirli integraller sınıfı $L_\alpha^1([a, b] \times [c, d])$ ile gösterilir.

Bu bölüm boyunca, iki bağımsız değişkenli $f(t, s)$ fonksiyonunun kısmi uyumlu türevleri aşağıdaki formlarda verilmiştir,

$$D_1^\alpha f(t, s) = \frac{\partial^\alpha f(t, s)}{\partial t^\alpha}, \quad D_2^\alpha f(t, s) = \frac{\partial^\alpha f(t, s)}{\partial s^\alpha}, \quad D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s) = \frac{\partial^{2\alpha} f(t, s)}{\partial s^\alpha \partial t^\alpha}.$$

Teorem 6.3. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere $f(t, s)$, $D_1^\alpha f(t, s)$, $D_2^\alpha f(t, s)$ ve $D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)$ fonksiyonları $[a, b] \times [c, d]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Tüm $(t, s) \in [a, b] \times [c, d]$ için

$$f(a, s) = f(b, s) = D_1^\alpha f(t, c) = D_1^\alpha f(t, d) = 0$$

dir. O halde, $X \in [a, b]$ ve $Y \in [c, d]$ için

$$\begin{aligned} & \int_a^X \int_c^Y |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \tag{6.2} \\ & + \int_a^X \int_Y^d |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \\ & + \int_X^b \int_c^Y |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t + \int_X^b \int_Y^d |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \\ & \leq \frac{1}{2\alpha^3} \left[(X^\alpha - a^\alpha) (Y^\alpha - c^\alpha) \left(\int_a^X \int_c^Y |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right) \right. \\ & \quad + (b^\alpha - X^\alpha) (Y^\alpha - c^\alpha) \left(\int_X^b \int_c^Y |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right) \\ & \quad + (X^\alpha - a^\alpha) (d^\alpha - Y^\alpha) \left(\int_a^X \int_Y^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right) \\ & \quad \left. + (b^\alpha - X^\alpha) (d^\alpha - Y^\alpha) \left(\int_X^b \int_Y^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Teorem dört durumda ispatlanır.

Durum I. Hipotezden, $(t, s) \in [a, X] \times [c, Y]$ ve

$$z(t, s) = \int_a^t \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u, \quad z(a, s) = 0 \quad (6.3)$$

tanımlı olsun. O zaman,

$$D_1^\alpha z(t, s) = \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)| d_\alpha v, \quad D_2^\alpha z(t, s) = \int_a^t |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s)| d_\alpha u \quad (6.4)$$

dir. Buradan her bir sabit t için $z(t, s)'$ nin $[c, Y]$ de t için azaldığı gözlemlenir. $(t, s) \in [a, X] \times [c, Y]$ için $f(a, s) = 0$ ve $D_1^\alpha f(t, c) = 0$ olduğundan

$$|f(t, s)| \leq \int_a^t D_1^\alpha f(u, s) d_\alpha u \quad (6.5)$$

ve

$$|D_1^\alpha f(t, s)| \leq \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)| d_\alpha v = D_1^\alpha z(t, s) \quad (6.6)$$

dir. Dolayısıyla, (6.5) ve (6.6) kullanılarak,

$$|f(t, s)| \leq \int_a^t D_1^\alpha z(u, s) d_\alpha u = z(t, s) \quad (6.7)$$

elde edilir. (6.3)-(6.7) sayesinde,

$$\begin{aligned} & \int_a^X \int_c^Y |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \\ & \leq \int_a^X \int_c^Y z(t, s) |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \\ & \leq \int_a^X z(t, Y) \left(\int_c^Y |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s \right) d_\alpha t \\ & = \int_a^X z(t, Y) D_1^\alpha z(t, Y) d_\alpha t = \frac{[z(X, Y)]^2}{2\alpha} \end{aligned} \quad (6.8)$$

yazabiliriz. (6.8) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integral hesaplanır ve buradan uyumlu kesirli integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla,

$$\frac{[z(X, Y)]^2}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \left[\int_a^X \int_c^Y D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v) d_\alpha v d_\alpha u \right]^2$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha} \frac{(X^\alpha - a^\alpha)(Y^\alpha - c^\alpha)}{\alpha^2} \left(\int_a^X \int_c^Y |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right) \quad (6.9)$$

elde edilir. (6.8) eşitsizliğinde (6.9) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^X \int_c^Y |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \quad (6.10) \\ & \leq \frac{1}{2\alpha} \frac{(X^\alpha - a^\alpha)(Y^\alpha - c^\alpha)}{\alpha^2} \left(\int_a^X \int_c^Y |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla birinci durum için ispat tamamlanır.

Durum II. Hipotezden, $(t, s) \in [a, X] \times [Y, d]$ ve

$$z(t, s) = \int_a^t \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u, \quad z(a, s) = 0 \quad (6.11)$$

tanımlı olsun. O halde,

$$D_1^\alpha z(t, s) = \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)| d_\alpha v, \quad D_2^\alpha z(t, s) = - \int_a^t |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s)| d_\alpha u. \quad (6.12)$$

Buradan, her sabit t için $z(t, s)$ nin $[Y, d]$ de t için artmadığı görülür. $(t, s) \in [a, X] \times [Y, d]$ için $f(a, s) = 0$ ve $D_1^\alpha f(t, d) = 0$ olduğundan

$$|f(t, s)| \leq \int_a^t D_1^\alpha f(u, s) d_\alpha u \quad (6.13)$$

dir ve

$$|D_1^\alpha f(t, s)| \leq \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)| d_\alpha v = D_1^\alpha z(t, s) \quad (6.14)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (6.13) ve (6.14) kullanılarak,

$$|f(t, s)| \leq \int_a^t D_1^\alpha z(u, s) d_\alpha u = z(t, s) \quad (6.15)$$

olur. (6.11)-(6.15) ifadeleri kullanılır ve Durum I deki benzer adımlar ile ispat tamamlanır.

$$\int_a^X \int_Y^d |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \leq \frac{[z(X, Y)]^2}{2\alpha}$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha} \frac{(X^\alpha - a^\alpha)(d^\alpha - Y^\alpha)}{\alpha^2} \left(\int_a^X \int_Y^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right). \quad (6.16)$$

Durum III. Hipotezden, $(t, s) \in [X, b] \times [c, Y]$ ve

$$z(t, s) = \int_t^b \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u, \quad z(b, s) = 0$$

tanımlı olsun. Durum I deki benzer adımlar ile

$$\begin{aligned} & \int_X^b \int_c^Y |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \leq \frac{[z(X, Y)]^2}{2\alpha} \\ & \leq \frac{1}{2\alpha} \frac{(b^\alpha - X^\alpha)(Y^\alpha - c^\alpha)}{\alpha^2} \left(\int_X^b \int_c^Y |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Durum VI. Hipotezden, $(t, s) \in [X, b] \times [Y, d]$ ve

$$z(t, s) = \int_t^b \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u, \quad z(b, s) = 0$$

tanımlı olsun. Durum I deki benzer adımlar ile

$$\begin{aligned} & \int_X^b \int_Y^d |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \leq \frac{[z(X, Y)]^2}{2\alpha} \\ & \leq \frac{1}{2\alpha} \frac{(b^\alpha - X^\alpha)(d^\alpha - Y^\alpha)}{\alpha^2} \left(\int_X^b \int_Y^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

elde edilir. (6.10), (6.16), (6.17), (6.18) taraf tarafa toplanılırsa (6.2) eşitsizliğine ulaşılır. \square

Sonuç 6.4. Teorem 6.3 in hipotezleri altında, $\alpha \in (0, 1]$ için $X = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \in [a, b]$ ve $Y = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \in [c, d]$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d |f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \\ & \leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha)(d^\alpha - c^\alpha)}{8\alpha^3} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^2 d_\alpha s d_\alpha t \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

eşitsizliği vardır.

Uyarı 6.5. Sonuç 6.4' de $\alpha = 1$ alınır, (6.19) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğine indirgenir.

$$\int_a^b \int_c^d |f(t, s)| |D_2 D_1 f(t, s)| ds dt \leq \frac{(b-a)(d-c)}{8} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2 D_1 f(t, s)|^2 ds dt \right).$$

Burada $D_1 f(t, s) = \frac{\partial f(t, s)}{\partial t}$, $D_2 f(t, s) = \frac{\partial f(t, s)}{\partial s}$, $D_2 D_1 f(t, s) = \frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial s \partial t}$ dir. Bu eşitsizlik Yang [46] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 6.6. Teorem 6.3' ün hipotezleri altında, $i = 1, 2, 3, 4$ için $1 \leq q_i < \infty$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d |f(t, s)|^{q_1} |D_1^\alpha f(t, s)|^{q_2} |D_2^\alpha f(t, s)|^{q_3} |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^{q_4} d_\alpha s d_\alpha t \quad (6.20) \\ & \leq K \prod_{i=1}^4 \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^{2q_i} d_\alpha s d_\alpha t \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır ve burada $K = \frac{1}{2^{2q_1+q_2+q_3}} \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^{q_1+q_3-1} (d^\alpha - c^\alpha)^{q_1+q_2-1}}{\alpha^{2q_1+q_2+q_3-2}}$ dir.

İspat. Hipotezden ve $f(t, s)$ nin varsayımları ışığında,

$$f(t, s) = \int_a^t \int_c^s D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s) d_\alpha v d_\alpha u, \quad (6.21)$$

$$f(t, s) = - \int_a^t \int_s^d D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s) d_\alpha v d_\alpha u, \quad (6.22)$$

$$f(t, s) = - \int_t^b \int_c^s D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s) d_\alpha v d_\alpha u, \quad (6.23)$$

$$f(t, s) = \int_t^b \int_s^d D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s) d_\alpha v d_\alpha u, \quad (6.24)$$

$$D_1^\alpha f(t, s) = \int_c^s D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v) d_\alpha v, \quad D_1^\alpha f(t, s) = - \int_s^d D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v) d_\alpha v, \quad (6.25)$$

$$D_2^\alpha f(t, s) = \int_a^t D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s) d_\alpha u, \quad D_2^\alpha f(t, s) = - \int_t^b D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s) d_\alpha u \quad (6.26)$$

dir. Dolayısıyla, (6.21)-(6.26) dan, $(t, s) \in [a, b] \times [c, d]$ için sırasıyla

$$|f(t, s)| \leq \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u$$

$$|D_1^\alpha f(t, s)| \leq \frac{1}{2} \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)| d_\alpha v$$

$$|D_2^\alpha f(t, s)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s)| d_\alpha u$$

elde edilir. $(t, s) \in [a, b] \times [c, d]$ için sırasıyla q_1 ve $\frac{q_1}{q_1-1}$, q_2 ve $\frac{q_2}{q_2-1}$, q_3 ve $\frac{q_3}{q_3-1}$ indisleri yardımıyla uyumlu kesirli integraller için Hölder eşitsizliğinden yararlanarak,

$$|f(t, s)|^{q_1} \tag{6.27}$$

$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{q_1} \left(\int_a^b \int_c^d d_\alpha v d_\alpha u\right)^{q_1-1} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^{q_1} d_\alpha v d_\alpha u\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2q_1}} \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^{q_1-1} (d^\alpha - c^\alpha)^{q_1-1}}{\alpha^{2q_1-2}} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^{q_1} d_\alpha v d_\alpha u\right),$$

$$|D_1^\alpha f(t, s)|^{q_2} \leq \frac{1}{2^{q_2}} \frac{(d^\alpha - c^\alpha)^{q_2-1}}{\alpha^{q_2-1}} \left(\int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)|^{q_2} d_\alpha v\right), \tag{6.28}$$

ve

$$|D_2^\alpha f(t, s)|^{q_3} \leq \frac{1}{2^{q_3}} \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^{q_3-1}}{\alpha^{q_3-1}} \left(\int_a^b |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s)|^{q_3} d_\alpha u\right) \tag{6.29}$$

elde edilir. (6.27)-(6.29) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılır ise,

$$|f(t, s)|^{q_1} |D_1^\alpha f(t, s)|^{q_2} |D_2^\alpha f(t, s)|^{q_3} \tag{6.30}$$

$$\leq \frac{1}{2^{2q_1+q_2+q_3}} \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^{q_1-1} (d^\alpha - c^\alpha)^{q_1-1}}{\alpha^{2q_1+q_2+q_3-4}} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^{q_1} d_\alpha v d_\alpha u\right)$$

$$\times \left(\int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)|^{q_2} d_\alpha v\right) \left(\int_a^b |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s)|^{q_3} d_\alpha u\right)$$

elde edilir. $|D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^{q_4}$ ile (6.30) eşitsizliğinin her iki tarafı çarpılır ve bu eşitsizliğin her iki tarafı da $(t, s) \in [a, b] \times [c, d]$ ile integre edilir.

Daha sonra, uyumlu kesirli integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla ve sonrasında Fubini Teoremi kullanılarak,

$$\int_a^b \int_c^d |f(t, s)|^{q_1} |D_1^\alpha f(t, s)|^{q_2} |D_2^\alpha f(t, s)|^{q_3} |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^{q_4} d_\alpha s d_\alpha t$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_0 \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^{q_1} d_\alpha v d_\alpha u \right) \\
&\quad \times \left[\int_a^b \int_c^d \left(\int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)|^{q_2} d_\alpha v \right)^2 \left(\int_a^b |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s)|^{q_3} d_\alpha u \right)^2 d_\alpha s d_\alpha t \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^{2q_4} d_\alpha s d_\alpha t \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_0 \left(\int_a^b \int_c^d d_\alpha v d_\alpha u \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^{2q_1} d_\alpha v d_\alpha u \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[\int_a^b \int_c^d \left(\int_c^d d_\alpha v \right) \left(\int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, v)|^{2q_2} d_\alpha v \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_a^b d_\alpha u \right) \left(\int_a^b |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, s)|^{2q_3} d_\alpha u \right) d_\alpha s d_\alpha t \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^{2q_4} d_\alpha s d_\alpha t \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= K_0 \frac{(b^\alpha - a^\alpha)(d^\alpha - c^\alpha)}{\alpha^2} \prod_{i=1}^4 \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^{2q_i} d_\alpha s d_\alpha t \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada,

$$K_0 = \frac{1}{2^{2q_1+q_2+q_3}} \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^{q_1-1} (d^\alpha - c^\alpha)^{q_1-1}}{\alpha^{2q_1+q_2+q_3-4}}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Uyarı 6.7. Teorem 6.6 eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa, (6.20) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe indirgenir.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d |f(t, s)|^{q_1} |D_1 f(t, s)|^{q_2} |D_2 f(t, s)|^{q_3} |D_2 D_1 f(t, s)|^{q_4} ds dt \\
&\leq K \prod_{i=1}^4 \left(\int_a^b \int_c^d |D_2 D_1 f(t, s)|^{2q_i} ds dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Burada

$$K = \frac{(b-a)^{q_1+q_3-1} (d-c)^{q_1+q_2-1}}{2^{2q_1+q_2+q_3}}$$

ve $D_1 f(t, s) = \frac{\partial f(t, s)}{\partial t}$, $D_2 f(t, s) = \frac{\partial f(t, s)}{\partial s}$, $D_2 D_1 f(t, s) = \frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial s \partial t}$ dir. Bu eşitsizlik Pachpatte [18] tarafından ispatlanmıştır.

Sonuç 6.8. Teorem 6.6' nin hipotezleri altında, $i = 1, 2, 3, 4$ için $q_i = 1$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d |f(t, s)| |D_1^\alpha f(t, s)| |D_2^\alpha f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \\ & \leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha)^2 (d^\alpha - c^\alpha)^2}{16\alpha^4} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^4 d_\alpha s d_\alpha t \right) \end{aligned}$$

dir.

İspat. Teorem 6.6' da, $i = 1, 2, 3, 4$ için $q_i = 1$ seçilir ve,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d |f(t, s)| |D_1^\alpha f(t, s)| |D_2^\alpha f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \\ & \leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha) (d^\alpha - c^\alpha)}{16\alpha^2} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^2 d_\alpha s d_\alpha t \right)^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Uyumlu kesirli integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_c^d |f(t, s)| |D_1^\alpha f(t, s)| |D_2^\alpha f(t, s)| |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)| d_\alpha s d_\alpha t \\ & \leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha) (d^\alpha - c^\alpha)}{16\alpha^2} \left(\int_a^b \int_c^d d_\alpha s d_\alpha t \right) \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^4 d_\alpha s d_\alpha t \right) \end{aligned}$$

ispat tamamlanır. □

Teorem 6.9. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere $f(t, s)$, $D_1^\alpha f(t, s)$, $D_2^\alpha f(t, s)$ ve $D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)$ fonksiyonları $[a, b] \times [c, d]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Tüm $(t, s) \in [a, b] \times [c, d]$ için $f(a, s) = f(b, s) = D_1^\alpha f(t, c) = D_1^\alpha f(t, d) = 0$ olmak üzere,

$$\int_a^b \int_c^d |f(t, s)|^\lambda |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^\delta d_\alpha s d_\alpha t \tag{6.31}$$

$$\leq \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d S(t, s) |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^\delta \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right) d_\alpha s d_\alpha t$$

yazılır ve burada $\lambda, \delta \geq 1$ için

$$S(t, s) = \left(\frac{(t^\alpha - a^\alpha)^2 (b^\alpha - t^\alpha)^2 (s^\alpha - c^\alpha)^2 (d^\alpha - s^\alpha)^2}{\alpha^8} \right)^{\frac{\lambda-1}{4}}$$

dir.

İspat. Tüm $(t, s) \in [a, b] \times [c, d]$ için Teorem 6.6' daki (6.21)-(6.24) ifadelerini alalım.

O halde,

$$|f(t, s)|^{\frac{\lambda}{4}} \leq \left[\int_a^t \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right]^{\frac{\lambda}{4}}$$

$$|f(t, s)|^{\frac{\lambda}{4}} \leq \left[\int_a^t \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right]^{\frac{\lambda}{4}}$$

$$|f(t, s)|^{\frac{\lambda}{4}} \leq \left[\int_t^b \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right]^{\frac{\lambda}{4}}$$

$$|f(t, s)|^{\frac{\lambda}{4}} \leq \left[\int_t^b \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)| d_\alpha v d_\alpha u \right]^{\frac{\lambda}{4}}$$

olur. Daha sonra λ ve $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ indisleriyle uyumlu kesirli integraller için Hölder eşitsizliğinden faydalanılırsa,

$$\begin{aligned} |f(t, s)|^{\frac{\lambda}{4}} &\leq \left[\left(\int_a^t \int_c^s d_\alpha v d_\alpha u \right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \left(\int_a^t \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right]^{\frac{\lambda}{4}} \\ &= \left(\frac{(t^\alpha - a^\alpha)(s^\alpha - c^\alpha)}{\alpha^2} \right)^{\frac{\lambda-1}{4}} \left(\int_a^t \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

$$|f(t, s)|^{\frac{\lambda}{4}} \leq \left(\frac{(t^\alpha - a^\alpha)(d^\alpha - s^\alpha)}{\alpha^2} \right)^{\frac{\lambda-1}{4}} \left(\int_a^t \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$|f(t, s)|^{\frac{\lambda}{4}} \leq \left(\frac{(b^\alpha - t^\alpha)(s^\alpha - c^\alpha)}{\alpha^2} \right)^{\frac{\lambda-1}{4}} \left(\int_t^b \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$|f(t, s)|^{\frac{\lambda}{4}} \leq \left(\frac{(b^\alpha - t^\alpha)(d^\alpha - s^\alpha)}{\alpha^2} \right)^{\frac{\lambda-1}{4}} \left(\int_t^b \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right)^{\frac{1}{4}},$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıdaki dört eşitsizlik taraf tarafa çarpılır ve düzenlenirse,

$$|f(t, s)|^\lambda \leq S(t, s) \left[\left(\int_a^t \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right) \left(\int_a^t \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right) \right. \\ \left. \times \left(\int_t^b \int_c^s |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right) \left(\int_t^b \int_s^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right) \right]^{\frac{1}{4}}$$

bulunur. Burada

$$S(t, s) = \left(\frac{(t^\alpha - a^\alpha)^2 (b^\alpha - t^\alpha)^2 (s^\alpha - c^\alpha)^2 (d^\alpha - s^\alpha)^2}{\alpha^8} \right)^{\frac{\lambda-1}{4}}$$

dir. $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere $x_i \geq 0$ için

$$4\sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

temel eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$|f(t, s)|^\lambda \leq \frac{S(t, s)}{4} \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right) \quad (6.32)$$

elde edilir. $|D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^\delta$ ile (6.32) eşitsizliğinin her iki tarafı çarpılır ve $(t, s) \in [a, b] \times [c, d]$ üzerinde her iki tarafı da integre edilirse,

$$\int_a^b \int_c^d |f(t, s)|^\lambda |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^\delta d_\alpha s d_\alpha t$$

$$\leq \frac{1}{4} \int_a^b \int_c^d S(t, s) |D_2^\alpha D_1^\alpha f(t, s)|^\delta \left(\int_a^b \int_c^d |D_2^\alpha D_1^\alpha f(u, v)|^\lambda d_\alpha v d_\alpha u \right) d_\alpha s d_\alpha t$$

ispat tamamlanır.

□



7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezden elde edilen sonuçlar bilimsel kongrelerde sunulmuş ve makale haline getirilerek alan indeksli dergilerde yayınlanmıştır [54], [56]. Bölüm 4' de, uyumlu kesirli integraller için Opial eşitsizliği yeniden yorumlanmış ve üzerine bazı yeni Opial tipli eşitsizlikler ve genelleştirmeleri elde edilmiştir. Elde edilen genelleştirmelerin bazı özel durumları incelenerek literatürdeki birçok çalışmanın genel halini verdiği gösterilmiştir. Bölüm 5' de konveks fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak uyumlu kesirli integraller için Opial tipli eşitsizlikler ifade edilmiştir. Ayrıca bu eşitsizliklerin özel durumlarının literatürdeki birçok çalışmanın genel hali olduğu ifade edilmiştir. Son olarak, uyumlu kesirli integraller için iki bağımsız değişken içeren Opial tipli eşitsizlikler üzerine çalışılmıştır.

Tezin esasını oluşturan dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerin altında yapılan çalışmalardan yola çıkılarak açık problemler verilebilir. Örneğin, n -değişkenli uyumlu kesirli integraller için verilen türev formülünden yararlanılarak daha genel ve farklı eşitsizliklere hatta bunların genelleştirmelerine ulaşılabilir. Benzer şekilde, konveks fonksiyon (s - konveks, j - konveks, quasi- konveks vb.) türlerinden faydalanılarak uyumlu kesirli integraller için genelleştirilmiş Opial tipli eşitsizlikler elde edilebilir. Son olarak tez boyunca hedeflenen Opial tipli eşitsizlikler ve genelleştirmeler için kullanılan ispat yöntemlerinden yararlanılarak Katugampola, Caputo vb. kesirli türev ve integraller için de yeni sonuçlar elde edilebilir.

8. KAYNAKLAR

- [1] E. F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1965.
- [2] D. Bainov ve P. Simeonov, *Integral Inequalities and Applications*, Dordrecht, Holland: Kluwer Academic, 1992.
- [3] C. F. Lee, C. C. Yeh, C. H. Hong ve R. P. Agarwal, "Lyapunov and Wirtinger inequalities", *Applied Mathematics Letters*, c. 17, ss. 847-853, 2004.
- [4] Z. Opial, "Sur une inegaliti", *Annales Polonici Mathematici*, c. 8, ss. 29-32, 1960.
- [5] C. Olech , "A simple proof of a certain result of Z. Opial", *Annales Polonici Mathematici*, c. 8, sayı 4, ss. 61-63, 1960.
- [6] P. R. Beesack, "On an integral inequality of Z. Opial", *Transactions of the American Mathematical Society*, c. 104, ss. 470-475, 1962.
- [7] C. L. Mallows, "An even simpler proof of Opial's inequality", *Proceedings of the American Mathematical Society*, c. 16, ss. 173, 1965.
- [8] N. Levinson, "On an inequality of Opial and Beesack", *Proceedings of the American Mathematical Society*, c. 15, ss. 565-566, 1964.
- [9] L. K. Hua, "On an inequality of Opial", *Scientia Sinica*, c. 14, ss. 789-790, 1965.
- [10] R. P. Agarwal ve P. Y. H. Pang, *Opial inequalities with applications in differential and difference equations*, Mathematics and its Applications, Dordrecht, Holland: 320. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [11] G. Anastassiou, "Opial type inequalities for vector valued functions", *Bulletin of Greek Mathematical Society*, c. 55, ss. 1-8, 2008.

- [12] W. S. Cheung, "Some new Opial-type inequalities", *Mathematika*, c. 37, ss. 136-142, 1990.
- [13] W. S. Cheung, "Some generalized Opial-type inequalities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 162, ss. 317- 321, 1991.
- [14] B. G. Pachpatte, "On Opial-type integral inequalities" , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 120, ss. 547-556, 1986.
- [15] B. G. Pachpatte, "Some inequalities similar to Opial's inequality" , *Demonstratio Mathematica*, c. 26, ss. 643-647, 1993.
- [16] B. G. Pachpatte, "A note on some new Opial type integral inequalities", *Octagon Mathematical*, c. 7, ss. 80-84, 1999.
- [17] B. G. Pachpatte, " On some inequalities of the Weyl type", *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University of Iași Mathematics*, c. 40, ss. 89-95, 1994 .
- [18] B. G. Pachpatte, "On an inequality of Opial type in two independent variables", *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 23, sayı 9, ss. 657-661, 1992.
- [19] B. G. Pachpatte, "On two inequalities similar to Opial's inequality in two independent variables", *Periodica Mathematica Hungarica*, c. 18, ss. 137, 1987.
- [20] B. G. Pachpatte, "On some new integral inequalities in two independent variables", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 129, sayı 2, ss. 375-382, 1988.
- [21] B. G. Pachpatte, "A note on an inequality ascribed to Wirtinger", *Tamkang Journal Mathematics*, c. 17, ss. 69-73, 1986.
- [22] J. Traple, "On a boundary value problem for systems of ordinary differential equations of second order", *Zeszyty Naukowe University Jagiellonian Prace Mathematics*, c. 15, ss. 159-168, 1971.
- [23] M. Z. Sarikaya ve H. Budak, "Opial Type inequalities for conformable fractional integrals", *Proceedings of the American Mathematical Society*, c. 145, sayı 4, ss. 1527-1538, 2017.

- [24] J. S. W. Wong ve D.W. Boyd, "An extension of Opial's inequality", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 19, ss. 100-102, 1967.
- [25] C. J. Zhao ve W. S. Cheung, "On Opial-type integral inequalities and applications", *Mathematical Inequalities and Applications*, c. 17, sayı 1, ss. 223-232, 2014.
- [26] S. G. Samko, A. A. Kilbas ve O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science publishers, c. 1, 1993.
- [27] A. Atangana, D. Baleanu ve A. Alsaedi, "New properties of conformable derivative", *Open Mathematics*, c. 13, ss. 889-898, 2015 .
- [28] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava ve J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam, Netherlands: Elsevier, c. 204, 2006.
- [29] U. Katugampola, "A new fractional derivative with classical properties", *ArXiv:1410.6535*, 2014.
- [30] R. Khalil, M. Al horani, A. Yousef ve M. Sababheh, "A new definition of fractional derivative", *Journal of Computational Applied Mathematics*, c. 264, ss. 65-70, 2014.
- [31] T. Abdeljawad, "On conformable fractional calculus", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 279, ss. 57-66, 2015.
- [32] O. S. Iyiola ve E. R. Nwaeze, "Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alambert approach", *Progress in Fractional Differentiation and Applications An International Journal*, c. 2, sayı 2, ss. 115-122, 2016.
- [33] A. Zheng, Y. Feng ve W. Wang, "The Hyers-Ulam stability of the conformable fractional differential equation", *Mathematica Aeterna*, c. 5, sayı 3, ss. 485-492, 2015.

- [34] M. Z. Sarikaya, "Gronwall type inequality for conformable fractional integrals" , *Konuralp Journal of Mathematics*, c. 4, sayı 2, ss. 217-222, 2016.
- [35] D. R. Anderson ve D. J. Ulness, "Results for conformable differential equations", *preprint*, 2016.
- [36] J. E. Pevcarić , F. Proschan ve Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Boston, USA: Academic Press, 1992.
- [37] R. A. Gordon, *Real Analysis: A First Course*, 2. Baskı, Boston, USA: Pearson, 2002.
- [38] H. Halilov, A. Hasanoglu ve M. Can, *Yüksek Matematik 1; Tek değişkenli fonksiyonların Analizi*, 2. Baskı, Ankara, Türkiye: Literatür Yayıncılık, 2001.
- [39] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, 1. Baskı, Berlin, Germany: Springer Verlag, 1970, ss. 27-196.
- [40] P. M. Maroni, "Sur l'inegalite d'Opial-Beesack", *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances Del Academie Des Sciences Serie A* , c. 264, ss. 62-64, 1967.
- [41] W. H. Young, " On classes of summable functions and their Fourier series", *Proceedings of the Royal Society of London*, c. 87, ss. 225-229, 1912.
- [42] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić ve A. M. Fink, *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*, Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [43] T. Abdeljawad, "On conformable fractional calculus", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 279, ss. 57-66, 2015.
- [44] D. R. Anderson, *Taylor's formula and integral inequalities for conformable fractional derivatives*, Contributions in Mathematics and Engineering, Springer, Cham, ss. 25-43, 2016.
- [45] R. N. Pederson, "On an inequality of Opial, Beesack and Levinson", *Proceedings of the American Mathematical Society*, c. 16, ss. 17, 1965.

- [46] G. S. Yang, "Inequality of Opial-type in two variables", *Tamkang Journal of Mathematics.*, c. 13, ss. 255-259, 1982.
- [47] M. S. Hou, "An inequality of Z. Opial", *Chinese Science Bulletin*, c. 24, ss. 247-248, 1979.
- [48] X. G. He, " A short of a generalization on Opial' s inequalilty", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 182, ss. 299-300, 1994.
- [49] E. K. Godunova ve V. I. Levin, "On an inequality of Maroni (Russian)", *Matematicheskie Zametki*, c. 2, ss. 221-224, 1967.
- [50] K. M. Das, "An inequality similar to Opial's inequality", *Proceedings of the American Mathematical Society*, c. 22, ss. 258-261, 1969.
- [51] S. S. Dragomir, "Generalizations of Opial's inequalities for two functions and applications", *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications Research Report Collection*, c. 21, sayı 64, ss. 13, 2018.
- [52] M. A. Hammad ve R. Khalil, "Conformable fractional heat differential equations", *International Journal of Differential Equations and Applications*, c. 13, sayı 3, ss. 177-183, 2014.
- [53] M. A. Hammad ve R. Khalil, "Abel's formula and wronskian for conformable fractional differential equations", *International Journal of Differential Equations and Applications*, c. 13, sayı 3, ss. 177-183, 2014.
- [54] M. Z. Sarikaya ve C. C. Bilisik, "Some Opial type inequalities for conformable fractional integrals", *American Institute of Physics Conference Proceedings*, c. 1991, sayı 1, ss. 020013, 2018.
- [55] M. Z. Sarikaya ve H. Budak, "New inequalities of Opial type for conformable fractional integrals", *Turkish Journal of Mathematics*, c. 41, ss. 1164 - 1173, 2017.
- [56] M. Z. Sarikaya ve C. Can Bilişik, " Opial type inequalities for conformable fractional integrals via convexity", *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, c. 11, sayı 1-2, ss. 163-170, 2019.

- [57] S. H. Saker, M. D. Abdou ve I. Kubiacyk, "Opial and Polya type inequalities via convexity", *Fasciculi Mathematici*, c. 60, sayı 1, ss. 145-159, 2018.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Candan CAN BİLİŞİK

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2022
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2018
Lisans	Matematik	Ege Üniversitesi	2011
Lise		Şemikler Lisesi	2006

A. Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler :

A1. M. Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik ve T. Tunç, "On Hardy Type İnequalities via k -fractional integrals", *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, c. 10, sayı 2, ss. 443 - 451, 2020.

A2. M. Z. Sarıkaya ve C. Can Bilişik, "Some Opial type inequalities for conformable fractional integrals," *American Institute of Physics Conference Proceedings*, c. 1991, sayı 1, s. 020013, 2018.

A3. N. Alp, C. Can Bilişik ve M. Z. Sarıkaya, "On q -Opial type inequality for quantum integral", *Filomat*, c. 33, sayı 13, ss. 4175-4184, 2019.

A4. M. Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik ve P. O. Mohammed, "Some generalizations of Opial type inequalities", *Applied Mathematics & Information Sciences*, c. 14, sayı 5, ss. 809-816, 2020.

- A5. M. Z. Sarıkaya ve C. Can Bilişik, "Some generalizations of Opial type inequalities for conformable fractional integrals", *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, c. 6, sayı 2, ss. 137-142, 2020.
- A6. M. Z. Sarıkaya ve C. Can Bilişik, "Wirtinger type inequalities for conformable fractional integrals", *Mathematica (Cluj)*, c. 61 (84), sayı 1, ss. 79-84, 2019.
- A7. M. Z. Sarıkaya ve C. Can Bilişik, " Opial type inequalities for conformable fractional integrals via convexity", *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, c. 11, sayı 1-2, ss. 163-170, 2019.

B. Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Tam Metin Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler :

- B1. M. Z. Sarıkaya ve C. Can Bilişik, "On a new Hardy type inequalities involving fractional integrals via Opial type inequalities", *Xth International Statistics Days Conference*, Giresun, Turkey, 2016.

C. Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Özet Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler :

- C1. M. Z. Sarıkaya, C. Can Bilişik ve T. Tunç, "On Hardy Type İnequalities via k -fractional integrals", *2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS2017)*, Antalya, Turkey, 2017.
- C2. M. Z. Sarıkaya ve C. Can Bilişik, "Some Opial type inequalities for conformable fractional integrals", *1st International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS2018)*, Antalya, Turkey, 2018.