



ORLICZ UZAYLARINDA KANTOROVICH GENELLEŞTİRİLMİŞ
ÖRNEKLEME OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Serkan AYAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Serkan AYAN

20.04.2022

ORLICZ UZAYLARINDA KANTOROVICH GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖRNEKLEME
OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Serkan AYAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2022

ÖZET

Bu tezde, özel durumları yaklaşım teoride iyi bilinen, ayrık operatörlerin Kantorovich versiyonlarını içeren, örnekleme Kantorovich serilerin genel bir sınıfı ile ilgileniyoruz. Tezin ilk kısmında genelleştirilmiş örnekleme Kantorovich tip serilerin iki değişkenli fonksiyonlara yaklaşım dereceleri kısmi ve tam süreklilik modülleri yardımıyla elde edildi. Ayrıca iki değişkenli genelleştirilmiş örnekleme Kantorovich tip serilerin Genelleştirilmiş Boolean Toplam (GBS) operatörleri tanımlanarak Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında yaklaşım teoremleri verildi. Tezin son bölümünde, genelleştirilmiş örnekleme Kantorovich tipi seriler için Lebesgue uzaylarının genel bir durumu olan Orlicz uzaylarında modüler norm cinsinden yakınsama teoremleri elde edildi.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Orlicz uzayı, Kantorovich operatörü, örnekleme serileri, yaklaşım derecesi

Sayfa Adedi : 57

Danışman : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

APPROXIMATION BY KANTOROVICH GENERALIZED SAMPLING OPERATORS
IN ORLICZ SPACES

(M. Sc. Thesis)

Serkan AYAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2022

ABSTRACT

In this thesis, we are concerned with a general class of sampling Kantorovich type series, whose special cases include Kantorovich versions of discrete operators are well-known in the approximation theory. In the first part of the thesis, the approximation degrees of generalized sampling Kantorovich series to bivariate functions are obtained with the help of partial and full continuity modules. In addition, generalized Boolean sum (GBS) operators of bivariate generalized sampling Kantorovich type series are defined and approximation theorems are given in the space of Bögel continuous functions. In the last part of the thesis, for generalized sampling Kantorovich type series, the convergence theorems are obtained in terms of modular norm in Orlicz spaces, which are a general case of Lebesgue spaces.

Science Code : 20404

Key Words : Orlicz space, Kantorovich operators, sampling series, order of approximation

Page Number : 57

Supervisor : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında desteğini benden esirgemeyen, çalışma motivasyonumu her zaman artıran ve karşılaştığım her problemde deneyimlerinden tereddütsüz faydalanabilme imkanını bana gösteren değerli hocam Prof. Dr. Nurhayat İSPİR'e ve maddi, manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, daima yanımda olan sevgili aileme ve arkadaşlarıma saygı ve teşekkürlerimi borç bilirim.

Ayrıca, bu tezin hazırlanma aşamasında mali desteği olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	7
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	7
2.1.1. Bazı Küme Sınıfları	7
2.1.2. Ölçü	8
2.1.3. Lebesgue Dış Ölçüsü ve Lebesgue Ölçüsü	8
2.1.4. Ölçülebilir Fonksiyonlar	10
2.1.5. \mathcal{L}^p Uzayları	11
2.1.6. \mathcal{L}^∞ Uzayları	12
3. İKİ DEĞİŞKENLİ KANTOROVICH GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖRNEKLEME OPERATÖRÜ	17
3.1. Tek Değişkenli Kantorovich Genelleştirilmiş Örneklem Operatörleri	17
3.2. İki değişkenli Kantorovich Genelleştirilmiş Örneklem Operatörleri ile Yaklaşım Derecesi	21
3.2.1. Tam ve kısmi süreklilik modülleri	24
3.2.2. Lipschitz sınıfından fonksiyonlar	28
4. $\mathcal{S}_{n,m}$ OPERATÖRÜNÜN GBS TİPİ İLE BÖGEL SÜREKLİ FONKSİYONLARA YAKLAŞIM	31
4.1. $\mathcal{S}_{n,m}$ Operatörlerinin Genelleştirilmiş Boolean Toplamı	32

4.2. $L_{n,m}$ GBS Operatörlerinin Karma Süreklilik Modülü Cinsinden Yaklaşım Derecesi	33
4.2.1. Karma süreklilik modülü	33
4.2.2. B-Süreklilik fonksiyonların lipschitz sınıfı	35
4.3. $L_{n,m}$ GBS Operatörlerinin Bögel Diferansiyellenebilir Fonksiyonlara Karma Süreklilik Modülü Cinsinden Yaklaşım Derecesi	37
5. ORLICZ UZAYLARINDA ÖRNEKLEME KANTOROVICH TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM	39
5.1. Modüler Uzaylar ve Modüler Yakınsama	39
5.1.1. Modüler yakınsama	41
5.2. Orlicz Uzaylarında Yakınsaklık Teoremleri	42
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$M(\mathbb{R})$	\mathbb{R} de Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların uzayı
\mathcal{I}	Reel sayıların sınırlı ya da sınırlı olmayan bir alt aralığı
$v_{n,k}$	örnekleme değerlerinin dizisi
$K_{n,k}$	\mathcal{I} üzerindeki genişletilmiş reel değerli çekirdek fonksiyonları
$m_\ell(K_{n,k})(t)$	Cebirsel moment
$M_\ell(K_{n,k})(t)$	Mutlak moment
$C^*(\mathbb{R}^2)$	\mathbb{R}^2 üzerindeki tüm düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı
$S_{n,m}f$	İki değişkenli Kantorovich tip örnekleme operatörü
$L_{n,m}f$	İki değişkenli GBS Kantorovich tip örnekleme operatörü
$C_b(\mathbb{R}^2)$	\mathbb{R}^2 de Bölge sürekli fonksiyonların uzayı
$B_b(\mathbb{R}^2)$	\mathbb{R}^2 de Bölge sınırlı fonksiyonların uzayı
$D_b(\mathbb{R}^2)$	\mathbb{R}^2 de Bölge diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayı
$\omega_B(f)$	$f \in C_b(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonunun karma düzgünlük modülü
$\omega_B(D_b f)$	$f \in D_b(\mathbb{R}^2)$ nin karma düzgünlük modülü
ρ	Genişletilmiş reel değerli pseudomodüler.
(X_ρ, ρ)	Modüler uzay
$L^\varphi(\mathbb{R})$	Orlicz Uzayı
I^φ	Orlicz Uzayında tanımlı konveks modüler fonksiyonel
$C_c(\mathbb{R})$	Kompakt desteklenen ve desteklendikleri aralıkta sürekli olan fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Son yıllarda, genelleştirilmiş örnekleme seriler teorisi, özellikle sinyal ve görüntü işlemedeki geniş uygulama yelpazesi nedeniyle, yaklaşım teorisinde güncel ve ilgi çeken konulardan biri haline gelmiştir.

Genelleştirilmiş örnekleme seri teorisi ilk olarak P.L. Butzer ve okulu tarafından başlatıldı [21–23] ve sonrasında birçok araştırmacı bu yönde çalışarak bu operatörlerin yakınsama özelliklerini elde ettiler (Bkz. [24–26]).

Bilindiği gibi

$$(B_n f)(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad t \in [0, 1] \quad (1.1)$$

Bernstein polinomları $C[0, 1]$ uzayında cebirsel polinomlar için Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatını verirken, fonksiyonların sürekli olması gerekmediği durumlarda

$$(K_n f)(t) = n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \quad (1.2)$$

Kantorovich operatörleri $\mathcal{L}^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ uzayında \mathcal{L}^p normunda $K_n f$ nin f fonksiyonuna yakınsaklığını verir. Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmanın bir yöntemi olan Kantorovich tip operatörler yaklaşım teoride önemli bir yer teşkil etmektedir.

Weierstrass yaklaşım teoremi, $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$ düğümlerinde alınan örnekleme ($f(k/n)_{k=0}^\infty$) değerleri cinsinden, $n \rightarrow \infty$ iken $B_n(f; t)$ nin limiti olarak $f \in C[0, 1]$ fonksiyonunun yeniden yapılandırılmasını verir. Reel eksenin tamamında sürekli olan $f \in C(\mathbb{R})$ yaklaşım fonksiyonlarının bir karşılığı; uygun bir $\chi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ çekirdek fonksiyonu le birlikte

$$L_\omega^\chi(f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\omega}\right) \chi(\omega t - k) \quad (1.3)$$

genelleştirilmiş örnekleme serileridir. Burada $(f(k/\omega)_{k=-\infty}^\infty)$ örnekleme değerleri, k/ω düğümlerinde alınmıştır.

Genelleştirilmiş örnekleme serilerinin Kantorovich tipi genellemeleri, yine P.L. Butzer

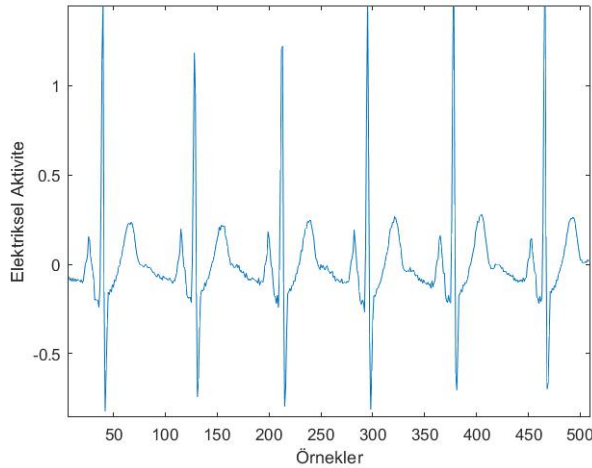
ve okulu tarafından tanıtıldı ve yaklaşım özellikleri çalışıldı (Bkz. [23]).

Bu operatörler

$$(\mathcal{K}_\omega f)(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \omega \int_{\frac{k}{\omega}}^{\frac{k+1}{\omega}} f(u) du \right\} \chi(\omega t - k), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

biçiminde tanımlanır ve Örneklemeye Kantorovich Operatörleri veya Örneklemeye Kantorovich Serileri olarak isimlendirilir. Bu operatörler, sürekli olması gerekmeyen fonksiyonlar için yakınsama sonuçlarını incelemek amacıyla tanıtıldı ve ayrıca yapılan çalışmalar bu operatörlerin dijital görüntü işlemenin bazı problemlerini incelemek için çok uygun olduğunu ortaya çıkardı ([11, 12, 27, 28]).

Sinyallerle günlük hayatta hemen hemen her yerde karşılaşırız. Telefon kullanırken, akustik bir sinyal olan sesimiz, bir sistem olan mikrofon tarafından elektrik sinyaline dönüştürülür. O elektrik sinyali, belki bir çift bakır kablo veya dünyanın etrafında dolaşan bir uydu aracılığıyla karşı tarafa iletilir ve daha sonra bir hoparlör tarafından sesimize dönüştürülür. İletişimdeki rollerine ek olarak, sinyaller tıbbi teşhislerde ve uçak veya denizaltı gibi bir nesnenin tespitinde de kullanılır. Örneğin, Şekil 1.1'de gösterilen elektrokardiyogram (EKG) de gösterilen dalga sinyalleri ile hastanın kalp sağlığı ile ilgili çıkarımlarda bulunulabilir.

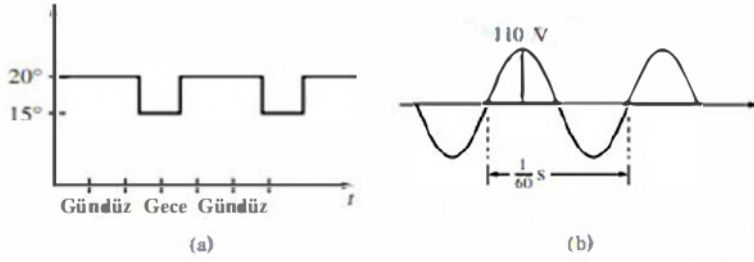


Şekil 1.1. 100 Hzdeki EKG sinyal verileri

Ayrıca çevremizi kontrol etmek için ve enerjiyi aktarmak için de sinyalleri kullanırız. Bir evin sıcaklığını kontrol etmek için termostatı gündüz 20 °C olarak ve enerji tasarrufu için akşamları 15 °C olarak ayarlayabiliriz. Böyle bir kontrol sinyali Şekil

1.2(a)'da gösterilmektedir ve elektrik Şekil 1.2(b)'de 110 volt tepe büyüklüğüne ve 60 hertz (Hz, devir/saniye) frekansına sahip olan sinüsoidal dalga biçiminde evimize iletilir.

Yukarıda bahsedilen tüm sinyaller tek bir bağımsız değişkene, yani zamana bağlıdır ve tek boyutlu sinyaller olarak adlandırılır. Resimler, iki bağımsız değişkenli sinyallerdir; yatay ve dikey konumlara bağlıdır ve iki boyutlu sinyaller olarak adlandırılırlar. Sıcaklık, rüzgar hızı ve hava basıncı, coğrafi konuma (enlem ve boylam), rakıma ve zamana bağlı olduklarından dört boyutlu sinyallerdir. Gerçek dünyada karmaşık değerli sinyaller ortaya çıkmaz, bu nedenle sadece reel değerli sinyalleri inceliyoruz. Bir sinyal, ilgilenilen bir zaman aralığındaki her an için tanımlanmışsa ve genliği



Şekil 1.2. (a) Kontrol Sinyali. (b) Ev Elektrik Voltajı

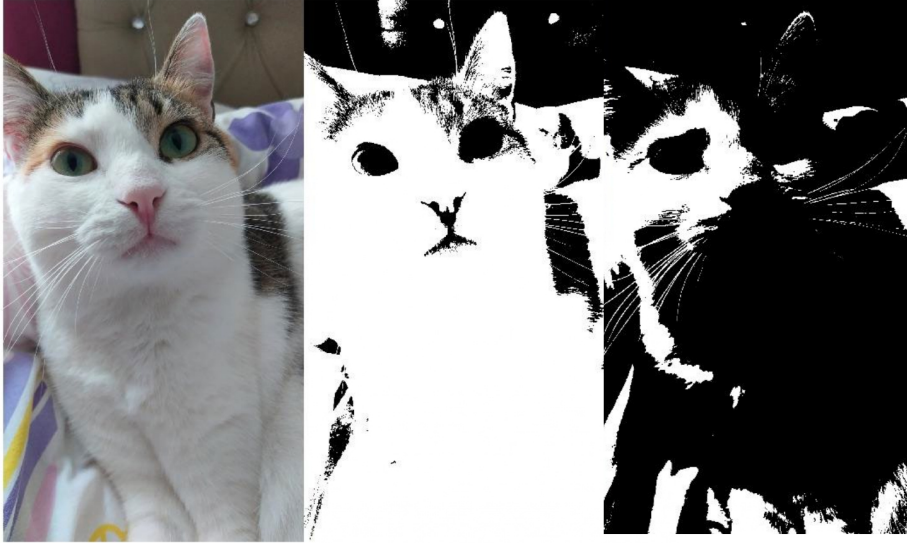
sürekli olarak herhangi bir değeri alabiliyorsa, sürekli-zaman sinyali (continuous-time signal) olarak adlandırılır. Şekil 1.1 ve Şekil 1.2'deki sinyaller sürekli-zaman sinyalidir. Bir sürekli zaman sinyaline analog sinyal de denir, çünkü dalga biçimi genellikle fiziksel değişkeninkine benzerdir.

Bir sinyal, yalnızca ayrık zaman anlarında tanımlanmışsa bu sinyale ayrık-zaman sinyali (discrete-time signal) denir ve genliği sürekli bir aralıkta herhangi bir değeri alabilir. Genliği yalnızca belirli bir sonlu kümeden değer alabiliyorsa, buna dijital sinyal denir. Bazı sinyaller doğal olarak dijital olsa da çoğu ayrık-zaman sinyalidir ve dijital sinyal, zaman içinde örnekleme yoluyla sürekli-zaman sinyallerinden elde edilir. Sinyalin değeri zaman içinde belirli aralıklarla ölçülür ve her ölçüm bir örnek olarak adlandırılır [29].

Örnekleme değerleri uzayda, zamanda veya herhangi bir boyutta değişen bir fonksiyonun aldığı değerler olarak düşünülebilir ve aynı zamanda benzer sonuçlar iki veya daha fazla boyutta da elde edilebilir. Zamana bağlı olarak değişen fonksiyonlar için, örneklenecek sürekli bir $s(t)$ fonksiyonu (veya "sinyal"), örnekleme aralığında

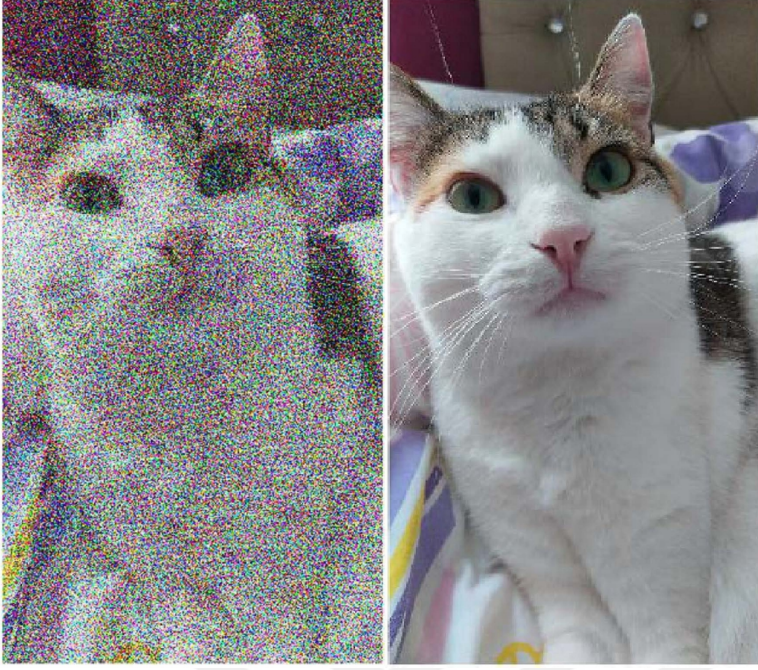
geçen her bir t saniyede karşımıza çıkan örnekleme değerlerini temsil etmektedir. (1.2) ile verilen operatörde ele alınan fonksiyonların $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ örnekleme aralığında alınan örnekleme değerlerinin oluşturduğu polinomlar olduğu düşünülecek olursa, Bernstein operatöründe olduğu gibi tek bir $f(k/n)$ değeri üzerine odaklanmaktan ziyade, Kantorovich polinomları $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ aralığındaki her t saniyede örnekleme değerlerinin bir ortalama değeri alınarak oluşturulan polinomlar olarak karşımıza çıkmaktadır. (1.2) de yapılan değişim, Elektrik-Elektronik mühendisliğinin bir uygulama alanı olan sinyal ve görüntü işleme teorisinde karşımıza çıkan zamana bağlı titreşim hata değerlerini (time-jitter errors) azaltmaktadır.

Bir görüntü üzerinde bazı işlemler uygulayarak daha gelişmiş görüntülerin elde edilmesi veya o görüntüden bazı önemli bilgileri elde etmenin bir yöntemi olan görüntü işleme teorisi, esasında sinyal işlemenin görüntülerle ilişkili bir alanıdır.



Şekil 1.3. Görüntü Segmentasyonu Uygulanmış Resim

Buna örnek oluşturması açısından Şekil 1.3 de en soldaki orijinal görüntü üzerine görüntü segmentasyonu denilen işlem uygulanmıştır. Daha fazla veriye sahip orijinal görüntü üzerindeki nesnelere izole edilmesini sağlayan bu süreç sonunda görüntünün oluşmasını sağlayan sinyaller incelenerek istatistiksel veriler elde edilmektedir [37]. Bununla birlikte, Şekil 1.4 de bulanık nicelenmiş bir görüntünün iyileştirilmesi görüntü işleme teorisi sayesinde yapılmıştır.



Şekil 1.4. Bulanık Nicelenmiş bir Görüntünün Restorasyonu

Bu tipteki sinyallerin yeniden oluşturulmasını sağlayan örnekleme değerleri ile elde edilen Kantorovich operatörlerinin, \mathcal{L}^p Lebesgue uzayının genel bir durumu olan Orlicz uzaylarındaki yaklaşım sonuçları, bir çok çalışmada ele alındı. [4]'de yazarlar genel bir örnekleme Kantorovich operatörünü tanıttılar ve Orlicz uzayında yakınsama oranlarını incelediler. [9, 10]'de Lipschitz sınıflarına ait düzgün sürekli sınırlı fonksiyonlar ve Orlicz uzaylarındaki fonksiyonlar için düzgün normda örnekleme Kantorovich operatörleri ailesi için yakınsaklık oranı elde edildi. İki veya daha fazla değişkene sahip fonksiyonlarla oluşturulan örnekleme serileri [2] ve [3] de çalışıldı. Ayrıca lineer olmayan örnekleme Kantorovich operatörleri [8] ve [30] da incelenmiştir. Ayrıca [8, 11, 14] da, tanımlanan bu tip operatörlerin sinyal ve görüntü işleme teorisindeki bazı önemli uygulamaları D. Costarelli, G. Vinti ve ekibi tarafından gösterildi.

Bu tez çalışması aşağıdaki biçimde düzenlenen 6 bölümden oluşur.

1. Bölüm; örnekleme teorisinin yaklaşım teorisindeki yeri ve bazı literatür çalışmalarının tanıtıldığı aynı zamanda tezde izlenecek bazı çalışmaların açıklandığı giriş bölümüdür.
2. Bölüm'de bu çalışmada kullanılan bazı önemli temel tanım, teoremler ve eşitsizliklere yer verilmiştir.
3. Bölüm'de ayırık operatörlerin genel sınıfı olan Kantorovich tip örnekleme serilerinin

iki değişkenli yapısı tanımlanarak yaklaşım derecelerine ilişkin sonuçlar açıklanmıştır.

4. Bölüm; 3. Bölüm’de tanımlanan iki değişkenli operatörlerin Genelleştirilmiş Boolean Toplam (GBS) operatörünün tanımlandığı ve Bögel sürekli fonksiyonlara yaklaşımının incelendiği bölümdür.

5. Bölüm; bu çalışmanın merkezini oluşturan tek değişkenli ayırık operatörlerin genel sınıfı olan Kantorovich tip örnekleme operatörleri için Orlicz uzaylarında modüler yakınsama teoreminin verildiği bölümdür.

6. Bölüm; sonuç ve önerilerin verildiği bölümdür.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde verilen tanım ve teoremlere ilişkin ayrıntılı bilgi kaynak [36] da görülebilir.

2.1.1. Bazı Küme Sınıfları

2.1.1.1. Tanım

Ω bir küme olsun. Ω 'nın bir \mathcal{A} sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu \mathcal{A} sınıfına Ω üzerinde bir cebirdir denir.

$$\Omega \in \mathcal{A} \tag{2.1}$$

$$\text{Her } E \in \Omega \text{ için } E^c = \Omega \setminus E \in \mathcal{A} \tag{2.2}$$

$$k = 1, 2, \dots, n \text{ için } E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A} \tag{2.3}$$

Eğer (2.3) yerine

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \tag{2.4}$$

şartı sağlanırsa \mathcal{A} cebirine bir σ -**cebiri** adı verilir.

2.1.2. Tanım

Bir \mathcal{K} sınıfını kapsayan σ -cebirlerin en küçüğüne \mathcal{K} nin ürettiği σ -cebiri denir ve $D(\mathcal{K})$ ile gösterilir.

\mathbb{R}^n deki bütün açık aralıkların ürettiği σ cebirine Borel cebiri denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir.

2.1.3. Tanım

\mathcal{X} bir küme ve \mathcal{A} da \mathcal{X} üzerinde bir σ -cebiri olsun. $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay, \mathcal{A} σ -cebirine ait her kümeye de \mathcal{A} -ölçülebilir küme (veya sadece ölçülebilir küme) denir.

2.1.2. Ölçü

2.1.4. Tanım

$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. \mathcal{A} üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir ψ fonksiyonu

$$(1) \psi(\emptyset) = 0$$

$$(2) \text{ Her } A \in \mathcal{A} \text{ için } \psi(A) \geq 0$$

$$(3) \text{ Her ayrık } (A_n) \text{ dizisi için } \psi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(A_n)$$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü adı verilir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\psi(A) < \infty$ ise ψ ye bir sonlu ölçü adı verilir. \mathcal{X} kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa ψ ölçüsü σ -sonludur denir. Bu ölçü fonksiyonuyla birlikte $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsüne ölçü uzayı adı verilir.

2.1.3. Lebesgue Dış Ölçüsü ve Lebesgue Ölçüsü

2.1.5. Tanım

\mathcal{X} bir küme ve $P(\mathcal{X})$ de \mathcal{X} in kuvvet kümesi olsun. $P(\mathcal{X})$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş

reel değerli bir ψ^* fonksiyonu

$$(1) \psi^*(\emptyset) = 0$$

$$(2) \text{ Her } E \in P(\mathcal{X}) \text{ için } \psi^*(E) \geq 0$$

$$(3) A \subseteq B \subseteq \mathcal{X} \text{ için } \psi^*(A) \leq \psi^*(B)$$

$$(4) \text{ Her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } A_n \in P(\mathcal{X}) \text{ ise } \psi^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi^*(A_n)$$

şartlarını sağlarsa ψ^* fonksiyonuna \mathcal{X} üzerinde bir dış ölçüdür denir.

2.1.6. Tanım

$(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$, \mathbb{R} nin sınırlı ve açık alt aralıklarından oluşan bir dizi ve

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçü olup bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir.

Burada $\ell(I_k)$ her $k \in \mathbb{N}$ için $(I_k) \in \tau_A$ aralıklarının uzunluğu, yani uç noktaların farkı olarak tanımlanmaktadır.

2.1.7. Tanım

\mathcal{X} bir küme, ψ^* da $P(\mathcal{X})$ üzerinde bir dış ölçü olsun. Eğer \mathcal{X} in her bir A alt kümesi için

$$\psi^*(A) = \psi^*(A \cap \mathcal{X}) = \psi^*(A \cap E) + \psi^*(A \cap E^c)$$

oluyorsa, $E \subseteq \mathcal{X}$ kümesine ψ^* -ölçülebilirdir (ψ^* a göre ölçülebilir) denir.

Bir ψ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen kümelerin sınıfı $\mathcal{M}(\mathcal{X}, E)$ ile gösterilir.

Lebesgue dış ölçüsü olan λ^* dış ölçüsünün $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sınıfına kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir ve Lebesgue ölçüsüne göre ölçülebilen kümelerin sınıfı $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ ile gösterilir.

2.1.4. Ölçülebilir Fonksiyonlar

2.1.8. Lemma

$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir.

- i) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $E_\alpha = \{x \in \mathcal{X} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$
- ii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $F_\alpha = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$
- iii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $G_\alpha = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$
- iv) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $H_\alpha = \{x \in \mathcal{X} : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

2.1.9. Tanım

$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. Bu durumda eğer Lemma 2.1.8 ile verilen önermelerden herhangi bir tanesi sağlanırsa $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ (veya genişletilmiş reel değerli) fonksiyonuna ölçülebilirdir denir.

2.1.10. Teorem

f ve g ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$cf, f^2, f + g, f \cdot g, |f|$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir.

2.1.11. Tanım

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona *Borel ölçülebilir fonksiyon* veya *Borel fonksiyonu* denir.

$\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ σ -cebirine göre ölçülebilir fonksiyona Lebesgue ölçülebilir fonksiyon adı verilir.

2.1.12. Tanım

$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \psi)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan bir küme veya kendisi \mathcal{A} 'ya ait olmadığı zaman, ölçüsü sıfır olan bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise o önerme hemen hemen her yerde doğrudur denir.

2.1.5. \mathcal{L}^p Uzayları

2.1.13. Tanım

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların sınıfına Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı denir ve $f \in L^p(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ayrıca bu uzay, fonksiyonlarda ki bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında bir vektör uzayı teşkil etmektedir. $\|\cdot\|_p : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, her $f \in L^p(\mathbb{R})$ için

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon L_p üzerinde bir yarı (normdur). L_p üzerinde

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{hemen hemen her yerde } f = g$$

biçiminde tanımlanan \sim bağıntısı bir denklik bağıntısı olup L_p uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi \mathcal{L}^p ile gösterilir. Şu halde \mathcal{L}^p 'nin elemanları $[f]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. \mathcal{L}^p uzayı,

$$[f] + [g] = [f + g], \quad \lambda[f] = [\lambda f]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. $p \geq 1$ olmak üzere, $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx \right)^{1/p}$ biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu \mathcal{L}^p üzerinde bir normdur.

2.1.6. \mathcal{L}^∞ Uzayları

2.1.14. Tanım

$(\Omega, \mathcal{A}, \psi)$ bir ölçü uzayı ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti varsa, f fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Bu şekilde tanımlanan M sabitlerinin en büyük alt sınırına $|f|$ 'nin Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı f fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ olup, bu uzay

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} := |f|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

normu altında Banach uzayı olur.

Şimdi bu çalışmada kullanılacak bazı önemli eşitsizlikler ve teoremleri verelim.

2.1.15. Tanım (Hölder Eşitsizliği)

p ve q , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan, negatif olmayan genişletilmiş reel sayıları olsun. Eğer $f \in \mathcal{L}^p$ ve $g \in \mathcal{L}^q$ ise bu durumda $f.g \in \mathcal{L}^1$ ve

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Eşitlik durumunun olması için gerek yeter koşul ikisi birden sıfır olmayan bazı α, β sabitleri için hemen hemen her yerde $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ olmasıdır.

2.1.16. Tanım (Jensen Eşitsizliği)

f , $[0, 1]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve φ konveks bir fonksiyon olsun. Bu

durumda

$$\varphi \left(\int f(x) dx \right) \leq \int \varphi(f(x)) dx$$

eşitsizliği sağlar.

2.1.17. Teorem (Fubini Teoremi)

(X, \mathcal{A}, μ) ve (Y, \mathcal{M}, ψ) tam ölçü uzayları ve f , $X \times Y$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Şu durumda

1. Hemen hemen her x için $f_x(y) = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan f_x fonksiyonu Y üzerinde integrallenebilirdir.
2. Hemen hemen her y için $f^y(x) = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan f^y fonksiyonu X üzerinde integrallenebilirdir.
3. $\int_Y f(x, y) d\psi(y)$ X üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur.
4. $\int_X f(x, y) d\mu(x)$ Y üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur.
5. $\int_X \left[\int_Y f d\psi \right] d\mu = \int_Y \left[\int_X f d\mu \right] d\psi = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \psi)$.

Fubini teoremini uygulayabilmek için f fonksiyonunun $\mu \times \psi$ ölçüsüne göre integrallenebilir olması gerekir yani; f fonksiyonunun $X \times Y$ üzerinde ölçülebilir ve $\int |f| d(\mu \times \psi) < \infty$ sağlanmalıdır. Şu durumda μ ve ψ ölçülerinin σ -sonlu olması durumunda iki katlı integral aşağıdaki teorem ile hesaplanır.

2.1.18. Teorem (Tonelli Teoremi)

(X, \mathcal{A}, μ) ve (Y, \mathcal{M}, ψ) sonlu ölçüye sahip uzaylar ve f , $X \times Y$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Şu durumda

1. Hemen hemen her x için $f_x(y) = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan f_x fonksiyonu Y üzerinde integrallenebilirdir.
2. Hemen hemen her y için $f^y(x) = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan f^y fonksiyonu X

üzerinde integrallenebilir.

3. $\int_Y f(x, y) d\psi(y)$ X üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur.
4. $\int_X f(x, y) d\mu(x)$ Y üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur.
5. $\int_X \left[\int_Y f d\psi \right] d\mu = \int_Y \left[\int_X f d\mu \right] d\psi = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \psi)$.

2.1.19. Teorem

Bir E kümesi üzerinde negatif olmayan integrallenebilir bir f fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\gamma > 0$ vardır öyle ki $\psi(A) < \gamma$ şartını sağlayan her $A \subseteq E$ kümesi için

$$\int_A f d\psi < \varepsilon$$

dur.

2.1.20. Teorem (Monoton Yakınsaklık Teoremi)

$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \psi)$ bir sonlu ölçü uzayı ve (f_n) negatif olmayan fonksiyonların monoton artan bir dizisi olmak üzere $f = \lim_n f_n$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathcal{X}} f d\psi = \lim \int_{\mathcal{X}} f_n d\psi.$$

2.1.21. Tanım

\mathcal{F} bir E üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların bir ailesi olsun. Şu durumda verilen her bir $\varepsilon > 0$ için en az bir $\gamma > 0$ bulunabilir öyle ki her bir $f \in \mathcal{F}$ için $A \subseteq E$ ve $\psi(A) < \gamma$ iken $\int_A |f| d\psi < \varepsilon$ ise \mathcal{F} ailesi eş-mutlak sürekli integrallere (equi-absolutely continuous integrals) sahiptir denir.

2.1.22. Teorem (Vitali Yakınsaklık Teoremi)

Sonlu ölçüye sahip bir E kümesini ele alalım ve $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi E üzerinde eş-mutlak

sürekli integrallere sahip fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer E üzerinde hemen hemen her yerde $\{f_n\} \rightarrow f$ ise o zaman f fonksiyonu E üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E f_n \right) = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_E f.$$





3. İKİ DEĞİŞKENLİ KANTOROVICH GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖRNEKLEME OPERATÖRÜ

Bilinen en klasik ayırık operatörler (1.1) ile verilen Weierstrass yaklaşım teoreminin önemli ispatlarından birinin verildiği Bernstein operatörleridir. Burada bu ayırık operatörlerin (1.2) de verilen Kantorovich halinin, tüm reel eksenin örnekleme ile elde edilen en genel hali tanımlanmıştır. Uzayda ve zamanda bir noktanın komşuluğundaki değerlerin kümesinde incelenen örnekleme tip Kantorovich operatörleri düzenli olmayan sinyallere yaklaşılması konusunda oldukça önemli bir yer teşkil ettiği için tanımlanan bu genel yapı Sinyal ve Görüntü İşleme Teorisinde direkt olarak kullanılmaktadır. Tek değişkenli sinyallere yaklaşım Sinyal İşleme Teorisinde incelenirken iki veya daha büyük boyutlu reel sayı aralıklarından alınan sinyallere yaklaşım, Görüntü İşleme Teorisinde kullanılmaktadır [2,8]. Bizim buradaki amacımız öncelikle bu ayırık operatörlerin iki değişkenli halini tanımlamak için gerekli olan motivasyonu, yani tek değişkenli halini vermek olacaktır.

3.1. Tek Değişkenli Kantorovich Genelleştirilmiş Örnekleme Operatörleri

\mathcal{I} kümesi reel sayıların sınırlı ya da sınırsız bir alt aralığı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için \mathcal{I} aralığının örnekleme değerlerinin bir dizisi $(v_{n,k})_{k \in \mathbb{K}} \subseteq \mathcal{I}$ ve $0 < v_{n,k+1} - v_{n,k} = \lambda_{n,k} \leq \lambda_n$ öyle ki $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n \rightarrow 0$ olsun. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{K}$ ve $\ell \in \mathbb{N}_0$ için $K_{n,k} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonlarının bir ailesini göz önüne alalım. Burada \mathbb{K} ya \mathbb{N}_0 ya da \mathbb{Z} 'dir. Bu çalışmada $\mathbb{K} = \mathbb{N}_0$ olarak alınmıştır. Ancak benzer işlemler $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ için de geçerlidir [1]. Şu durumda

$$m_\ell(K_n(t)) := \sum_{k=0}^{\infty} K_{n,k}(t)(v_{n,k} - t)^\ell \quad (3.1)$$

ve

$$M_\ell(K_n(t)) := \sum_{k=0}^{\infty} |K_{n,k}(t)| |(v_{n,k} - t)|^\ell \quad (3.2)$$

sırasıyla cebirsel ve mutlak momentler olmak üzere, $\{K_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0}$ çekirdek fonksiyonlarının ailesi aşağıdaki koşulları sağlar:

$$K_{n,k}.1) \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ ve } t \in \mathcal{I} \text{ için } m_0(K_n(t)) = 1, \quad (3.3)$$

$$K_{n,k}.2) \text{ Her } t \in \mathcal{I} \text{ ve } n \in \mathbb{N} \text{ için öyle bir } M_0 > 0 \text{ vardır ki } M_0(K_n(t)) \leq M_0 \quad (3.4)$$

ve her $\delta > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|v_{n,k}-t| \geq \delta} |K_{n,k}(t)| = 0.$$

[6] ile verilen makalede reel sayılar uzayının tamamı üzerinde işlem yapılacak şekilde alınan $(v_{n,k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ örnekleme değerler dizisi ile birlikte her $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in I$ için

$$(S_n f)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} K_n(t, v_{n,k}) f(v_{n,k}) \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanan (3.5) ayrık operatörlerin genel hali kullanılarak Voronovskaya tip teorem incelenmiştir.

Yukarıda verilen bilgilerle birlikte tek değişkenli ayrık operatörlerin Kantorovich örnekleme hali, her $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathcal{I}$ için

$$(\mathcal{S}_n f)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{n,k}(t) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} f(u) du, \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $f \in \text{Dom} \mathcal{S} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom} \mathcal{S}_n$ ve $\text{Dom} \mathcal{S}_n$ kümeleri; (3.6) ile verilen seriyi iyi tanımlı yapan tüm $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesidir. Bundan sonraki bölümlerde ele alınan fonksiyonların aynı zamanda (3.6) ile verilen seriyi iyi tanımlı yapan fonksiyonlar olduğu düşünülecektir. Verilen hipotezler ile birlikte

$$\mathcal{L}^\infty(\mathcal{I}) \subseteq \text{Dom} \mathcal{S} \quad (3.7)$$

şartının sağlandığı dikkate alınmaktadır [1].

3.1.1. Teorem

$f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{I})$ olsun. Eğer her $t \in \mathcal{I}$ için f sürekli ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{S}_n(f))(t) = f(t)$$

dir. f, \mathcal{I} 'da düzgün sürekli, sınırlı ve (3.7) ile verilen ifade her $t \in \mathcal{I}$ için düzgün olarak sağlansın. O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{S}_n f - f\|_\infty = 0$$

olur [1]

Belirtelim ki (3.6) ile verilen örnekleme operatörlerinin bazı özel halleri yaklaşım teorisinde iyi bilinen ayrık operatörlerin Kantorovich versiyonlarına karşılık gelir.

Örneğin;

1) Her $k \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{I} = [0, 1]$ ve $v_{n,k} = \frac{k}{k+n}$ olsun. Bu durumda Kantorovich tip Meyer-König-Zeller operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$f \in \text{Dom}M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom}M_n$ olmak üzere

$$(M_n f)(t) = (1-t)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} t^k \left[\frac{(k+n)(k+n+1)}{n} \int_{\frac{k}{k+n}}^{\frac{k+1}{k+n+1}} f(u) du \right]$$

şeklindedir. Burada görüleceği gibi $\lambda_{n,k} = \frac{n}{(k+n)(k+n+1)} \leq \frac{n}{n^2+n} = \lambda_n$ dir. $M_n f$ operatöründe ele alınan pozitif çekirdek fonksiyonları

$$K_{n,k}(t) = \binom{n+k}{k} t^k (1-t)^{n+1}$$

eşitliğiyle verilir. Bununla birlikte (3.3) ve (3.4) cebirsel ve mutlak momentleri ile verilen

şartlar ile birlikte her $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki gibidir: (Bkz. [38])

$$m_0(K_n(t)) = 1.$$

$$m_1(K_n(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} t^k (1-t)^{n+1} \left(\frac{k}{n+k} - t \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} m_2(K_n(t)) &= (1-t)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} t^k \left(\frac{k^2}{(n+k)^2} - t^2 \right). \\ &= \frac{t(1-t)^2}{n} + \frac{t(1-t)^2(2t-1)}{n^2} + \mathcal{O}(n^{-3}). \end{aligned}$$

$$m_3(K_n(t)) = \frac{t(1-t)^3(1-5t)}{n^2} + \mathcal{O}(n^{-3}).$$

$$m_4(K_n(t)) = \frac{3t^2(1-t)^4}{n^2} + \mathcal{O}(n^{-3})$$

eşitlikleriyle birlikte $(K_{n,k}.1)$ ve $(K_{n,k}.2)$ sağlanır.

2) Her $k \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{I} = [0, \infty)$ ve $v_{n,k} = \frac{k}{n+2-k}$ olsun. Bu durumda $f \in \text{Dom}L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom}L_n$ ve $I_k = [v_{n,k}, v_{n,k+1}]$ olmak üzere Kantorovich tip Bleimann-Butzer Hahn operatörü

$$(J_n f)(t) = \frac{1}{(t+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k \frac{\int_{I_k} f(u) du}{\int_{I_k} du}$$

şeklinde tanımlanır [39].

Burada Kantorovich tip Meyer-König-Zeller ve Bleimann-Butzer Hahn operatörlerinin elde edilmesine benzer şekilde, Bernstein Szász-Mirakyan ve Baskakov operatörlerinin Kantorovich formları, (3.6) göz önüne alınarak elde edilebilir [1].

Şimdi (3.6) ile verilen seri için verilen bilgilerden faydalanarak iki değişkenli genelleştirilmiş Kantorovich tip örnekleme operatörünün tanımını verelim.

3.2. İki değişkenli Kantorovich Genelleştirilmiş Örnekleme Operatörleri ile Yaklaşım Derecesi

Statik bir görüntü iki değişkenli bir fonksiyon (sinyal) olarak tanımlanabilir. Benzer şekilde dijital (statik) bir görüntü ayrık bir sinyaldir ve 2 boyutlu matrisler ile modellenebilir. Böylelikle iki değişkenli örnekleme Kantorovich operatörünü kullanarak orijinal görüntüye yaklaşan yeni bir matris (görüntü) elde etmek için girdi görüntüsüyle (matrisiyle) eşleşen bir fonksiyon oluşturulabilir. Örnekleme değerleri orijinal örnekleme değerlerinden daha büyük seçilirse, orijinalinden daha yüksek çözünürlüğe sahip yeni bir görüntü elde edilir, yani orijinal görüntüye kıyasla daha fazla piksel ile oluşturulur [8, 13]. Dolayısıyla (3.6) ile verilen serinin iki değişkenli yapısı bu şekildeki dijital görüntü sinyallerine yaklaşım sonuçlarında en iyi sonuçları veren operatörlerden bir tanesidir.

Motivasyon olarak 3. Bölümde verilenleri kullanarak iki değişkenli Kantorovich tip örnekleme serisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

3.2.1. Tanım

$\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı olan ya da olmayan bir aralık olarak sabitlensin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < v_{n,k+1} - v_{n,k} := \lambda_{n,k} \leq \lambda_n$ ve $0 < s_{m,j+1} - s_{m,j} := \lambda_{m,j} \leq \lambda_m$ koşullarını gerçekleyen $(v_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}}, (s_{m,j})_{j \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{I}$ dizileri $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ aralığının örnekleme değerlerinin birer dizisi olsunlar. Burada her $n, m \in \mathbb{N}$ için λ_n ve λ_m pozitif sayılardır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = 0$ şeklindedir. Her $n \in \mathbb{N}, k, j \in \mathbb{Z}$ için $K_{n,m,k,j} : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ iki değişkenli fonksiyonlar olsun.

Ayrıca $\gamma > 0$ ve $(x, y) \in \mathcal{I}^2$ için (x, y) merkezli γ yarıçaplı diski

$$\mathcal{U}_\gamma(x, y) = \{(u, v) \in \mathcal{I}^2 \mid (u - x)^2 + (v - y)^2 \leq \gamma^2\}$$

ile gösterelim. Aşağıdaki notasyonları kullanacağız:

Herhangi bir $\mu \in \mathbb{N}_0$, $\mu = |\ell| = \ell_1 + \ell_2$ olacak şekildeki $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ için

$$m_\ell(K_{n,m}) = m_\ell(K_{n,m}, x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} K_{n,m,k,j}(x, y) (v_{n,k} - x)^{\ell_1} (s_{m,j} - y)^{\ell_2} \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanan (3.8) serisine cebirsel moment denir.

$$M_\ell(K_{n,m}) = M_\ell(K_{n,m}, x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m,k,j}(x, y)| |(v_{n,k} - x)|^{\ell_1} |(s_{m,j} - y)|^{\ell_2} \quad (3.9)$$

(3.9) eşitliğiyle verilen seriye ise mutlak moment denir. Verilen cebirsel ve mutlak momentler aşağıdaki koşulları sağlar;

1) Her $(x, y) \in \mathcal{I}^2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$m_0(K_{n,m}, x, y) = 1, \quad (3.10)$$

2) Her $x, y \in \mathcal{I}$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ için en az bir $M_0 > 0$ vardır öyle ki

$$M_0(K_{n,m}, x, y) \leq M_0 \quad (3.11)$$

ve her $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{|v_{n,k}-x| \geq \delta_1} \sum_{|s_{m,j}-y| \geq \delta_2} |K_{n,m,k,j}(x, y)| = 0. \quad (3.12)$$

Şu halde Tanım 3.2.1 de verilenlerle birlikte en genel iki değişkenli genelleştirilmiş örnekleme serilerinin Kantorovich yapısını aşağıdaki tanımla verebiliriz.

3.2.2. Tanım

Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ve $f \in \text{Dom}\mathcal{S}$ olmak üzere her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} K_{n,m,k,j}(x, y) \frac{1}{\lambda_{n,k}\lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} f(u, v) dv du \quad (3.13)$$

operatörüne iki değişkenli genelleştirilmiş Kantorovich örnekleme serisi denir. Burada $\text{Dom}\mathcal{S} = \bigcap_{n,m \in \mathbb{N}} \text{Dom}(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m)$ 'dir ve $\text{Dom}(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m)$ her $n, m \in \mathbb{N}$ için (3.13) ile verilen sonsuz toplamın $(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y)$ ifadesine yakınsak olmasını sağlayan tüm $f : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesini ifade etmektedir.

$$\mathcal{L}^\infty(\mathcal{I}^2) \subseteq \text{Dom}\mathcal{S} \quad (3.14)$$

olduğu göz önüne alınmaktadır.

Şu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.3. Teorem

$f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{I}^2)$ olmak üzere her $(x, y) \in \mathcal{I}^2$ için f fonksiyonu sürekli ise

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} (\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) = f(x, y)$$

olur.

Ayrıca eğer f fonksiyonu \mathcal{I}^2 de düzgün sürekli, sınırlı ve (3.14) ifadesi düzgün olarak sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{S}_{n,m}$ operatörü f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar, yani;

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \|\mathcal{S}_{n,m}f - f\|_\infty = 0$$

olur.

Kanıt. f fonksiyonu \mathcal{I}^2 üzerinde düzgün sürekli ve sınırlı olsun. Bu durumda f nin düzgün sürekliliğinden verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} < \gamma$ şartını sağlayan her $(u, v), (x, y) \in \mathcal{I}^2$ için $|f(u, v) - f(x, y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\gamma > 0$ sayısı vardır. Şu durumda (3.13) den

$$\begin{aligned} & |(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m,k,j}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k}} \frac{1}{\lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} |f(u, v) - f(x, y)| dv du \\ & = \left(\sum_{(v_{n,k}, s_{m,j}) \in \mathcal{U}_{\gamma/2}(x, y)} + \sum_{(v_{n,k}, s_{m,j}) \notin \mathcal{U}_{\gamma/2}(x, y)} \right) |K_{n,m,k,j}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k}} \frac{1}{\lambda_{m,j}} \\ & \times \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} |f(u, v) - f(x, y)| dv du = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

I_1 için, $(v_{n,k}, s_{m,j}) \in \mathcal{U}_{\gamma/2}(x, y)$, $u \in [v_{n,k}, v_{n,k+1}]$ ve $v \in [s_{m,j}, s_{m,j+1}]$ olduğunu biliyoruz. Şu durumda yeterince büyük bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için her $n \geq n_0$ olduğunda $\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} < \gamma$ sağlanır. Şu halde

$$I_1 \leq \varepsilon \sum_{(v_{n,k}, s_{m,j}) \in \mathcal{U}_{\gamma/2}(x, y)} \sum |K_{n,m,k,j}(x, y)| \leq \varepsilon M_0(K_{n,m})$$

I_2 için, $(v_{n,k}, s_{m,j}) \notin \mathcal{U}_{\gamma/2}(x, y)$ olduğundan $|v_{n,k} - x| \geq \frac{\gamma}{4}$ veya $|s_{m,j} - y| \geq \frac{\gamma}{4}$ dir.

Böylece;

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{(v_{n,k}, s_{m,j}) \notin \mathcal{U}_{\gamma/2}(x, y)} \sum |K_{n,m,k,j}(x, y)| \\ &= 2\|f\|_\infty \sum_{|v_{n,k} - x| \geq \gamma/4} \sum_{|s_{m,j} - y| \geq \gamma/4} |K_{n,m,k,j}(x, y)|. \end{aligned}$$

Şu durumda (3.12) den dolayı $n, m \rightarrow \infty$ iken $I_2 \rightarrow 0$ olur. I_1 ve I_2 den dolayı istenen sonuç elde edilmiş olur. \square

3.2.1. Tam ve kısmi süreklilik modülleri

Bu bölümde verilecek teoremlerin ispatları için kullanılacak olan tam ve kısmi süreklilik modüllerinin tanımlarını verelim.

3.2.4. Tanım

f fonksiyonu \mathcal{I}^2 kompakt kümesi üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ olmak üzere

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = \sup \{|f(t, s) - f(x, y)| : (t, s), (x, y) \in \mathcal{I}^2, |t - x| \leq \delta_1, |s - y| \leq \delta_2\} \quad (3.15)$$

eşitliğiyle verilen ifadeye f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir.

3.2.5. Lemma

$\delta_1, \delta_2 > 0$ olmak üzere (3.15) ile tanımlanan tam süreklilik modülü için aşağıdaki

1. $\delta_1 \rightarrow 0$ ve $\delta_2 \rightarrow 0$ ise $\omega(f; \delta_1, \delta_2) \rightarrow 0$,
2. $|f(t, s) - f(x, y)| \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_1}\right) \left(1 + \frac{|s-y|}{\delta_2}\right)$

ifadeleri vardır.

3.2.6. Tanım

$f \in C(\mathcal{I}^2)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega^{(1)}(f; \delta) = \sup \{|f(x_1, y) - f(x_2, y)| : (x_1, y), (x_2, y) \in \mathcal{I}^2, |x_1 - x_2| \leq \delta\} \quad (3.16)$$

$$\omega^{(2)}(f; \delta) = \sup \{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| : (x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{I}^2, |y_1 - y_2| \leq \delta\} \quad (3.17)$$

fonksiyonlarına sırasıyla f 'nin x ve y değişkenlerine göre kısmi süreklilik modülleri denir. Ayrıca (3.15) ve (3.16) ile tanımlanan kısmi süreklilik modülleri için Lemma 3.2.5 deki ifadeler gerçekleşir.

$\mathcal{C}^*(\mathbb{R}^2)$ tüm düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayını gösterebiliriz. (3.13) ile verilen $(\mathcal{S}_{n,m}(f))$ operatörler dizisi için aşağıdaki ifadeler gerçekleşir.

3.2.7. Teorem

i) $f \in \mathcal{C}^*(\mathbb{R}^2)$ ve $\lambda_{n,k} = \lambda_n$ ve $\lambda_{m,j} = \lambda_m$ olsun. $\delta_1, \delta_2 > 0$ ve her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} |(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ M_0(K_{n,m}) + \frac{1}{\delta_1} \left(\lambda_n M_0(K_{n,m}) + 2M_{(1,0)}(K_{n,m}) \right) \right. \\ &+ \frac{1}{\delta_2} \left(\lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2M_{(0,1)}(K_{n,m}) \right) + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \left(\lambda_n \lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2\lambda_n M_{(1,0)}(K_{n,m}) \right. \\ &\left. \left. + 2\lambda_m M_{(0,1)}(K_{n,m}) + 4M_{(1,1)}(K_{n,m}) \right) \right\} \end{aligned}$$

burada δ_1 ve δ_2 değerleri λ_n, λ_m ile bağlantılıdır. Bu durumda $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{N}_0^2$,

$\eta = |\ell| = \ell_1 + \ell_2$ olmak üzere

$$\frac{1}{\lambda_n \lambda_m} M_\ell(K_{n,m}) \quad (3.18)$$

ifadesi düzgün sınırlı ise $C > 0$ bir sabit, δ_1 ve δ_2 sırasıyla λ_n ve λ_m olmak üzere

$$|S_{n,m}f - f| \leq C\omega(f; \lambda_n, \lambda_m) \text{ olur.}$$

ii) $f \in C^*(\mathbb{R}^2)$ her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\lambda_{n,k} = \lambda_n$ ve $\lambda_{m,j} = \lambda_m$ olsun. Eğer $\delta_1 = \lambda_n$ ve $\delta_2 = \lambda_m$ seçildiğinde

$$\frac{2}{\lambda_m} M_{(0,1)}(K_{n,m}) \text{ ve } \frac{2}{\lambda_n} M_{(1,0)}(K_{n,m}) \quad (3.19)$$

ifadeleri düzgün sınırlı ise bu durumda $C_1, C_2 > 0$ reel sabitler olmak üzere i) ifadesine benzer şekilde

$$|S_{n,m}f - f| \leq C_1\omega_1(f; \lambda_n) + C_2\omega_2(f; \lambda_m)$$

olur.

Kanıt. i) Verilen $\delta_1, \delta_2 > 0$ ve $f \in C^*(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere (3.13) ifadesinden ve tam süreklilik modülü tanımından faydalanarak;

$$\begin{aligned} & |(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k} \lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} |f(u, v) dvdu - f(x, y)| dvdu \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k} \lambda_{m,j}} \times \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} \left(1 + \frac{|u-x|}{\delta_1}\right) \left(1 + \frac{|v-y|}{\delta_2}\right) dvdu$$

$$:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (3.21)$$

$$I_1 = \omega(f; \delta_1, \delta_2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| = \omega(f; \delta_1, \delta_2) M_0(K_{n,m}). \quad (3.22)$$

$$I_2 = \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k} \lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} |u-x| dvdu$$

$$\text{Her } u \in [v_{n,k}, v_{n,k+1}] \text{ için } |u-x| \leq |x-v_{n,k+1}| + |x-v_{n,k}| \text{ olduğundan} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k} \lambda_{m,j}} (|x - v_{n,k+1}| + |x - v_{n,k}|) \\
&\leq \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1} \{ \lambda_n M_0(K_{n,m}) + 2M_{(1,0)}(K_{n,m}) \}. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k} \lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} |v - y| dv du$$

(3.23) ifadesine benzer şekilde işlemler I_3 eşitliğine uygulanırsa;

$$I_3 \leq \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_2} \{ \lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2M_{(0,1)}(K_{n,m}) \} \tag{3.25}$$

elde edilir. Son olarak I_4 için $|u - x|$ ve $|v - y|$ ifadelerine (3.23) eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| (|x - v_{n,k+1}| + |x - v_{n,k}|) (|y - s_{m,j+1}| + |y - s_{m,j}|) \\
&\leq \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| (\lambda_n + 2|v_{n,k} - x|) (\lambda_m + 2|s_{m,j} - y|)
\end{aligned}$$

Gerekli işlemler yapılırsa eğer;

$$I_4 \leq \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \{ \lambda_n \lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2\lambda_m M_{(1,0)}(K_{n,m}) + 2\lambda_n M_{(0,1)}(K_{n,m}) + 4M_{(1,1)}(K_{n,m}) \} \tag{3.26}$$

elde edilir. Böylece (3.22), (3.24), (3.25) ve (3.26) eşitsizliklerinden dolayı istenen ifade elde edilmiş olur. Eğer $\lambda_n = \delta_1$ ve $\lambda_m = \delta_2$ seçilirse

$$|(S_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq \omega(f; \lambda_n, \lambda_m) \left(M_0(K_{n,m}) + \frac{2M_{(1,0)}(K_{n,m})}{\lambda_n} + \frac{2M_{(0,1)}(K_{n,m})}{\lambda_m} + \frac{4M_{(1,1)}(K_{n,m})}{\lambda_n \lambda_m} \right)$$

eşitsizliğinden istenen sonuca ulaşılır. \square

Kanıt. ii) $f \in C^*(\mathbb{R}^2)$, $\lambda_{n,k} = \lambda_n$ ve $\lambda_{m,j} = \lambda_m$ olsun.

$\delta_1, \delta_2 > 0$ ve her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} K_{n,m}(x, y) \frac{1}{\lambda_{n,k} \lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} (f(u, v) - f(x, y)) dv du \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k} \lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} |f(u, v) - f(x, y)| dv du \\
&\leq \mathcal{S}_{n,m}(|f(u, v) - f(x, v)|; x, y) + \mathcal{S}_{n,m}(|f(u, v) - f(u, y)|; x, y) \\
&\leq \omega^{(1)}(f; \delta_1) \left[1 + \frac{1}{\delta_1} \mathcal{S}_{n,m}(|u - x|; x, y) \right] + \omega^{(2)}(f; \delta_2) \left[1 + \frac{1}{\delta_2} \mathcal{S}_{n,m}(|v - y|; x, y) \right] \\
&\leq \omega^{(1)}(f; \delta_1) + \frac{\omega^{(1)}(f; \delta_1)}{\delta_1} \{ \lambda_n M_0(K_{n,m}) + 2M_{(1,0)}(K_{n,m}) \} + \omega^{(2)}(f; \delta_2) \\
&\quad + \frac{\omega^{(2)}(f; \delta_2)}{\delta_2} \{ \lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2M_{(0,1)}(K_{n,m}) \}
\end{aligned}$$

Bu durumda $\delta_1 = \lambda_n$ ve $\delta_2 = \lambda_m$ seçilirse, (3.19) ifadesinden

$$|\mathcal{S}_{n,m}f(x, y) - f(x, y)| \leq C_1 \omega^{(1)}(f; \delta_1) + C_2 \omega^{(2)}(f; \delta_2)$$

olacak şekilde C_1, C_2 sayıları vardır. Bu durumda istenen sonuç elde edilmiş olur. \square

3.2.2. Lipschitz sınıfından fonksiyonlar

3.2.8. Tanım

f fonksiyonu $I^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ altkümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. \mathbb{R}^2 deki bilinen Öklid normu, $A_1(x_1, x_2), A_2(y_1, y_2) \in I^2$ olmak üzere

$$r(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (3.27)$$

şeklindedir, şu durumda

$$|f(A_1) - f(A_2)| \leq M r^\alpha(A_1, A_2), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.28)$$

eşitsizliğini gerçekleyen f fonksiyonuna I^2 üzerinde M sabitine göre Lipschitz sınıfındandır denir ve $f \in Lip_M \alpha$ ile gösterilir.

Şimdi (3.13) ile verilen operatörün Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım derecesini veren aşağıdaki teoremi verelim.

3.2.9. Teorem

$f \in Lip_M \alpha$ olsun. Eğer (3.18) ile verilen düzgün sınırlılık şartı sağlanırsa; her $(x, y) \in \mathcal{I}^2$ için

$$|(S_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq K[(\lambda_n \lambda_m)^{\alpha/2}]$$

olacak biçimde bir $K > 0$ vardır.

Kanıt. $f \in Lip_M \alpha$ olsun. (3.13) ile verilen serinin düzgün yakınsaklığını kullanarak;

$$\begin{aligned} & |(S_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m,k,j}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k}} \frac{1}{\lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} |f(u, t) - f(x, y)| dt du \end{aligned}$$

$f \in Lip_M \alpha$ olduğundan

$$|f(u, t) - f(x, y)| \leq M \left((u - x)^2 + (t - y)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \text{ sağlanır.} \quad (3.29)$$

(3.29) eşitsizliğini kullanacak olursak

$$\begin{aligned} & |(S_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \\ & \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m,k,j}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k}} \frac{1}{\lambda_{m,j}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} M \left((u - x)^2 + (t - y)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} dt du \end{aligned}$$

$u \in [v_{n,k}, v_{n,k+1}]$ ve $t \in [s_{m,j}, s_{m,j+1}]$ olduğundan (3.23) ye benzer bir yaklaşım ile

$|u - x|^2 \leq (2|v_{n,k} - x| + \lambda_{n,k})^2$ ve $|v - y|^2 \leq (2|s_{m,j} - y| + \lambda_{m,j})^2$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Şu durumda

$$\begin{aligned} & |(S_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \\ & \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m,k,j}(x, y)| \frac{1}{\lambda_{n,k}} \frac{1}{\lambda_{m,j}} \\ & \times \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \int_{s_{m,j}}^{s_{m,j+1}} \left[(2|v_{n,k} - x| + \lambda_{n,k})^2 + (2|s_{m,j} - y| + \lambda_{m,j})^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} dt du \end{aligned}$$

$p = \frac{2}{\alpha}$, $q = \frac{2}{2-\alpha}$ seçilirse Hölder Eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
& |(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \\
& \leq M [M_0(K_{n,m})]^{2-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m,k,j}(x, y)| \left((2|v_{n,k} - x| + \lambda_{n,k})^2 + (2|s_{m,j} - y| + \lambda_{m,j})^2 \right) \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\
& \leq M [M_0(K_{n,m})]^{2-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{n,m,k,j}(x, y)| (2|v_{n,k} - x| + \lambda_{n,k})^2 + \right. \\
& \quad \left. \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |K_{n,m,k,j}(x, y)| (2|s_{m,j} - y| + \lambda_{m,j})^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\
& \leq M [M_0(K_{n,m})]^{2-\alpha} \left[M_0(K_{n,m}) (\lambda_{n,k}^2 + \lambda_{m,j}^2) + 4\lambda_{n,k}M_{(1,0)}(K_{n,m}) + 4\lambda_{m,j}M_{(0,1)}(K_{n,m}) \right. \\
& \quad \left. + 4(M_{(2,0)}(K_{n,m}) + M_{(0,2)}(K_{n,m})) \right]^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Eğer $\lambda_{n,k} = \lambda_n$ ve $\lambda_{m,j} = \lambda_m$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| & \leq M [M_0(K_{n,m})]^{2-\alpha} (\lambda_n \lambda_m)^{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{4}{\lambda_n \lambda_m} (M_{(2,0)}(K_{n,m}) + M_{(0,2)}(K_{n,m})) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{\lambda_m} M_{(1,0)}(K_{n,m}) + \frac{4}{\lambda_n} M_{(0,1)}(K_{n,m}) + \frac{\lambda_n^2 + \lambda_m^2}{\lambda_n \lambda_m} M_0(K_{n,m}) \right]^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Şu durumda (3.18) ile verilen düzgün sınırlılık şartından dolayı $C = \frac{4}{\lambda_n \lambda_m} (M_{(2,0)}(K_{n,m}) + M_{(0,2)}(K_{n,m})) + \frac{4}{\lambda_m} M_{(1,0)}(K_{n,m}) + \frac{4}{\lambda_n} M_{(0,1)}(K_{n,m}) + \frac{\lambda_n^2 + \lambda_m^2}{\lambda_n \lambda_m} M_0(K_{n,m})$ olmak üzere

$$|(\mathcal{S}_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq K (\lambda_n \lambda_m)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olacak şekilde bir $K = CM[M_0(K_{n,m})]^{2-\alpha} > 0$ sayısı bulunmuş olur. Bu ise istenen sonuçtur. \square

Buraya kadar gelinen bölümde öncelikle Genelleştirilmiş Kantorovich tip operatörlerinin tek değişkenli yapısı tanımlanarak bu operatörlerin iki değişkenli halinin tanımı verildi. Sonrasında bu operatörlerin -belirli varsayımlar göz önüne alınarak- tam ve kısmi süreklilik modülü tanımlarından faydalanarak yaklaşım derecelerini veren teoremler ispatlandı ve iki değişkenli Lipschitz sınıfından fonksiyonlara yaklaşım dereceleri incelendi.

Bundan sonraki bölümde iki değişkenli $\mathcal{S}_{n,m}$ operatörlerinin Genelleştirilmiş Boolean Toplam operatörleriyle ilişkili tanımına odaklanıldı ve bu operatörler için -aynı varsayımlar göz önüne alınarak- ilgili teoremler incelendi.

4. $\mathcal{S}_{n,m}$ OPERATÖRÜNÜN GBS TİPİ İLE BÖGEL SÜREKLİ FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

Bu bölümde Bögel sürekliliğe sahip fonksiyonlara yaklaşım için $\mathcal{S}_{n,m}$ operatörlerinin bir genelleştirilmesi olan Genelleştirilmiş Boolean Toplam (GBS) operatörlerini tanımlayacağız. Bu operatörler yardımıyla Bögel sürekliliğe sahip fonksiyonların Lipschitz sınıfı ve karma süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesine ilişkin sonuçlar vereceğiz. Bögel sürekliliğe sahip (B-sürekliliğe sahip) ve Bögel diferansiyellenebilir (B-diferansiyellenebilir) fonksiyon kavramı ilk olarak [31, 32] de Karl Bögel tarafından verildi ve geliştirildi. Dobrescu ve Matei [33], Bernstein polinomlarının iki değişkenli genelleştirilmesine ilişkin genelleştirilmiş Boolean toplam (GBS) operatörleri ile B-sürekliliğe sahip ve B-diferansiyellenebilir fonksiyonlara düzgün yaklaşılabilirliğini gösteren bir yaklaşım teoremi verdiler. Yaklaşım teorisinde iyi bilinen Korovkin teoremi ise B-sürekliliğe sahip fonksiyonlar için [34, 35] de incelendi. Yazarlar, Boolean toplam yaklaşımını kullanarak B-sürekliliğe sahip fonksiyonların yaklaşımı için Korovkin tip bir teorem ispatladılar. Son yıllarda, ilginç bazı operatörlere ilişkin GBS operatörleri ile daha iyi yaklaşım sonuçları elde edilen çalışmalar literatürde yer almıştır ([18, 19]).

Bir operatörün GBS tipi genellikle iki değişkenli orjinal operatöre göre daha iyi yaklaşım derecesi vermektedir. Bu nedenle iki değişkenli örnekleme Kantorovich tipin GBS operatörleri fonksiyonların daha geniş bir sınıfında çalışmamıza imkan verirken bu operatörler ile yaklaşım sağlandığında daha iyi çözünürlüğe sahip görüntüler elde edilmektedir.

Bu bölümde, 3.2 de tanımlanan iki değişkenli genelleştirilmiş Kantorovich tip örnekleme serilerinin genelleştirilmiş Boolean toplam (GBS) operatörleriyle ilgili genel hali tanımlandı. Sonrasında bu operatörler için Bögel sürekliliğe sahip ve Bögel diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayında karma süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesine ilişkin teoremler verildi.

4.1. $\mathcal{S}_{n,m}$ Operatörlerinin Genelleştirilmiş Boolean Toplamı

4.1.1. Tanım

$\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq \mathbb{R}$ iki alt aralık ve $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ olsun. $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir $(u, v) \in \mathcal{J}$ noktası komşuluğunda

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (u,v)} \Delta_{(x,y)} f[u, v; x, y] = 0 \quad (4.1)$$

şartını sağlıyorsa, B-sürekli (Bögel Sürekli) fonksiyon denir. Burada

$$\Delta_{(x,y)} f[u, v; x, y] = f(x, y) - f(u, y) - f(x, v) + f(u, v) \quad (4.2)$$

olup bu ifadeye f nin karma farkı denir. Buna eşdeğer olarak;

Her $\varepsilon > 0$ için $|x - u| < \delta$ ve $|y - v| < \delta$ iken $|\Delta_{(x,y)} f[u, v; x, y]| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna $(u, v) \in \mathcal{J}$ noktasında Bögel süreklidir denir.

Eğer $|\Delta_{(x,y)} f[u, v; x, y]| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna B-sınırlı (Bögel Sınırlı) fonksiyon denir. Alışılmış $\|\cdot\|_\infty$ supremum normuyla birlikte \mathbb{R}^2 de tüm Bögel sürekli ve Bögel sınırlı fonksiyonların uzayı sırasıyla $C_b(\mathbb{R}^2)$ ve $B_b(\mathbb{R}^2)$ ile gösterilir.

4.1.2. Tanım

Her $(x, y), (u, t) \in \mathcal{J}$ için

$f^x(u, t) = f(x, t)$, $f^y(u, t) = f(u, y)$ olmak üzere

$$(L_{n,m} f)(x, y) := (\mathcal{S}_{n,m}(f^x + f^y - f))(x, y) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanan $L_{n,m} f$ ifadesine iki değişkenli GBS Kantorovich tip örnekleme operatörü denir.

Bu operatörün $f \in C_b(\mathcal{J})$ fonksiyonuna yakınsama oranını Bögel anlamındaki süreklilik modülü cinsinden tahmin edeceğiz.

4.2. $L_{n,m}$ GBS Operatörlerinin Karma Süreklilik Modülü Cinsinden Yaklaşım Derecesi

4.2.1. Karma süreklilik modülü

4.2.1. Tanım

$\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq [0, \infty)$ herhangi iki alt aralık ve $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$ olsun. Bu durumda $f \in B_b(\mathcal{J})$ olmak üzere, her $(x, y), (u, v) \in \mathcal{J}$ ve herhangi $(\delta_1, \delta_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ için

$$\omega_B(f; \delta_1, \delta_2) := \sup \{ |\Delta_{(x,y)} f[u, v; x, y]| : |x - u| < \delta_1, |y - v| < \delta_2 \} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanan $\omega_B : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna karma süreklilik modülü veya f nin karma düzgünlük modülü denir ve ω_B yerine ω_{mixed} olarak yazılır.

Kolaylıkla görüleceği gibi kompakt aralıklarda tanımlanan her B-süreklili fonksiyon B-düzgün süreklidir [34].

4.2.2. Teorem

$\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq [0, \infty)$ kompakt iki alt aralık ve $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}$ olsun. Bu durumda $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \omega_B(f; \delta_n, \delta_m) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f \in C_b(\mathcal{I})$ olmasıdır.

\mathcal{J} kümesinin herhangi bir ∇ kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı B-süreklili fonksiyonların kümesini $\mathcal{C}_b(\nabla)$ ile gösterelim.

4.2.3. Teorem

$f \in C_b(\nabla)$ olsun. $\lambda_{n,k} = \lambda_n$ ve $\lambda_{m,j} = \lambda_m$ olduğu dikkate alınırsa bu durumda her $(x, y) \in \nabla$ için $|(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq \omega_B(f; \delta_1, \delta_2) \left\{ M_0(K_{n,m}) \left(1 + \frac{\lambda_n}{\delta_1} + \frac{\lambda_m}{\delta_2} + \frac{\lambda_n \lambda_m}{\delta_1 \delta_2} \right) + \frac{2M_{(1,0)}(K_{n,m})}{\delta_1} + \frac{2M_{(0,1)}(K_{n,m})}{\delta_2} + \frac{2M_{(1,0)}(K_{n,m}) + 2M_{(0,1)}(K_{n,m}) + 4M_{(1,1)}(K_{n,m})}{\delta_1 \delta_2} \right\}$ eşitsizliği geçerlidir. Burada δ_1 ve δ_2 ler λ_n ve λ_m değerleriyle bağlantılı olup

$\delta_1 = \lambda_n$ ve $\delta_2 = \lambda_m$ seçilirse, tanım 3.2.1 ile verilen ℓ değerleri için

$$\frac{M_\ell(K_{n,m})}{\lambda_n \lambda_m} \quad (4.5)$$

düzgün sınırlılık şartını sağlayan her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$|(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq H\omega_B(f; \lambda_n, \lambda_m) \quad (4.6)$$

olacak şekilde bir H sayısı vardır.

Kanıt. $\kappa, \xi > 0$ için $\omega_B(f; \kappa\delta_1, \xi\delta_2) \leq (1 + \kappa)(1 + \xi)\omega_B(f; \delta_1, \delta_2)$ olduğundan her $(x, y), (u, v) \in \nabla$ ve $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} |\Delta_{(x,y)}f[u, v; x, y]| &\leq \omega_B(f; |u-x|, |v-y|) \\ &\leq \left(1 + \frac{|u-x|}{\delta_1}\right) \left(1 + \frac{|v-y|}{\delta_2}\right) \omega_B(f; |u-x|, |v-y|) \end{aligned}$$

(4.1) ve (4.3) tanımlarını kullanarak

$$\begin{aligned} (L_{n,m}f)(x, y) &= (\mathcal{S}_{n,m}(f^x + f^y - f))(x, y) \\ &= \left(\mathcal{S}_{n,m}(f(x, y) - \Delta_{(x,y)}f[u, v; x, y])\right)(x, y) \\ &= \mathcal{S}_{n,m}(f(x, y))(x, y) - \left(\mathcal{S}_{n,m}(\Delta_{(x,y)}f[u, v; x, y])\right)(x, y) \\ &= f(x, y)m_0(K_{n,m}) - \left(\mathcal{S}_{n,m}(\Delta_{(x,y)}f[u, v; x, y])\right)(x, y) \end{aligned}$$

Şu durumda (3.10) den

$$|(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq \left(\mathcal{S}_{n,m}(|\Delta_{(x,y)}f[u, v; x, y]|)\right)(x, y) \text{ elde edilmiş olur.}$$

Buradan

$$\begin{aligned} |(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \\ \leq \left(1 + \frac{(\mathcal{S}_{n,m}|u-x|)(x, y)}{\delta_1} + \frac{(\mathcal{S}_{n,m}|v-y|)(x, y)}{\delta_2} + \frac{(\mathcal{S}_{n,m}|u-x||v-y|)(x, y)}{\delta_1\delta_2}\right) \omega_B(f; \delta_1, \delta_2). \end{aligned}$$

3.2.7 numaralı Teoreminden dolayı $\mathcal{S}_{n,m}$ operatörü için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

1. $\left(\mathcal{S}_{n,m}|u-x|\right)(x, y) \leq \lambda_n M_0(K_{n,m}) + 2M_{(1,0)}(K_{n,m})$
2. $\left(\mathcal{S}_{n,m}|v-y|\right)(x, y) \leq \lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2M_{(0,1)}(K_{n,m})$
3. $\left(\mathcal{S}_{n,m}|u-x||v-y|\right)(x, y) \leq \lambda_n \lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2\lambda_m M_{(1,0)}(K_{n,m}) + 2\lambda_n M_{(0,1)}(K_{n,m}) + 4M_{(1,1)}(K_{n,m})$.

Şu durumda eğer $\delta_1 = \lambda_n, \delta_2 = \lambda_m$ seçilirse, (3.18) dan dolayı $H > 0$ reel bir sabit

olmak üzere

$$\|L_{n,m}f - f\|_\infty \leq H\omega_B(f; \lambda_n, \lambda_m)$$

bulunur. Bu durumda istenen sonuç elde edilmiş olur. \square

Şimdi (4.3) ile verilen seri için Bögel süreklili fonksiyonların Lipschitz sınıfı tanımını kullanarak yaklaşım derecesini belirleyelim.

4.2.2. B-Süreklili fonksiyonların lipschitz sınıfı

4.2.4. Tanım

$f \in \mathcal{C}_b(\nabla)$ olsun. f fonksiyonunun Lipschitz sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Her $(t, s), (x, y) \in \nabla$ ve $0 < \zeta \leq 1$ için

$$Lip_M(\zeta) := \left\{ f \in \mathcal{C}_b(\nabla) : |\Delta_{(x,y)}f[(t, s); (x, y)]| \leq M \left((t-x)^2 + (s-y)^2 \right)^{\frac{\zeta}{2}} \right\} \quad (4.7)$$

4.2.5. Teorem

$f \in Lip_M(\zeta)$ olsun. Şu durumda her $M > 0$ ve $\zeta \in (0, 1]$ için bir $H > 0$ vardır öyle ki

$$|(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq MH \{M_0(K_{n,m})\}^{\frac{2-\zeta}{2}} (\lambda_n \lambda_m)^{\frac{\zeta}{2}}.$$

Burada

$$H = \frac{4}{\lambda_n \lambda_m} \left(M_{(2,0)}(K_{n,m}) + M_{(0,2)}(K_{n,m}) \right) + \frac{4}{\lambda_m} M_{(1,0)}(K_{n,m}) + \frac{4}{\lambda_n} M_{(0,1)}(K_{n,m}) + \frac{\lambda_n^2 + \lambda_m^2}{\lambda_n \lambda_m} M_0(K_{n,m}).$$

Kanıt. $f \in Lip_M(\zeta)$, $M > 0$ ve $\zeta \in (0, 1]$ olsun. $L_{n,m}$ operatörünün lineerliğinden, (3.10) ifadesinden ve (3.13) ile verilen serinin tanımıyla birlikte (4.7)'yi kullanırsak;

her $(u, t), (x, y) \in \nabla$ için

$$(L_{n,m}f)(x, y) = \left(\mathcal{S}_{n,m}(f^x + f^y - f) \right)(x, y)$$

$$= \left(\mathcal{S}_{n,m} \left(f(x, y) - \Delta_{(x,y)}f[(u, t); (x, y)] \right) \right)(x, y)$$

$$= f(x, y)m_0(K_{n,m}) - \mathcal{S}_{n,m}(\Delta_{(x,y)}f[(u, t); (x, y)])(x, y)$$

$$(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y) = -\mathcal{S}_{n,m}(\Delta_{(x,y)}f[(u, t); (x, y)])(x, y)$$

elde edilir. Şu durumda

$$\begin{aligned} |(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| &\leq \mathcal{S}_{n,m}(|\Delta_{(x,y)}f[(u, t); (x, y)]|)(x, y) \\ &\leq \left(\mathcal{S}_{n,m}M[(u-x)^2 + (t-y)^2]^{\frac{\zeta}{2}}\right)(x, y) \end{aligned}$$

$p = \frac{2}{\zeta}$, $q = \frac{2}{2-\zeta}$ olmak üzere Hölder Eşitsizliğinden;

$$|(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq M \left\{ M_0(K_{n,m}) \right\}^{\frac{2-\zeta}{2}} \left\{ (\mathcal{S}_{n,m}(u-x)^2)(x, y) + (\mathcal{S}_{n,m}(v-y)^2)(x, y) \right\}^{\frac{\zeta}{2}}$$

Teorem 3.2.9 de yapılan işlemlere benzer işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} |(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| &\leq M \left\{ M_0(K_{n,m}) \right\}^{\frac{2-\zeta}{2}} (\lambda_n \lambda_m)^{\frac{\zeta}{2}} \left\{ \frac{4}{\lambda_n \lambda_m} \left(M_{(2,0)}(K_{n,m}) + M_{(0,2)}(K_{n,m}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\lambda_m} M_{(1,0)}(K_{n,m}) + \frac{4}{\lambda_n} M_{(0,1)}(K_{n,m}) + \frac{\lambda_n^2 + \lambda_m^2}{\lambda_n \lambda_m} M_0(K_{n,m}) \right\}^{\frac{\zeta}{2}} \end{aligned}$$

Şu durumda (3.18) ifadesindeki düzgün sınırlılık şartı sağlanması durumunda eşitsizliğin sağ tarafındaki son ifadeyi $H > 0$ alırsak,

$$|(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq MH \left\{ M_0(K_{n,m}) \right\}^{\frac{2-\zeta}{2}} (\lambda_n \lambda_m)^{\frac{\zeta}{2}}$$

olup istenen elde edilir. Burada $MHM_0(K_{n,m})^{\frac{2-\zeta}{2}}$ alırsak

$$|(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| \leq K(\lambda_n \lambda_m)^{\frac{\zeta}{2}}$$

yazılır. □

Şimdi B-diferansiyellebilir (Bögel diferansiyellenebilir) fonksiyon tanımını verelim.

4.3. $L_{n,m}$ GBS Operatörlerinin Bölge Diferansiyellenebilir Fonksiyonlara Karma Süreklilik Modülü Cinsinden Yaklaşım Derecesi

4.3.1. Tanım

$\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq [0, \infty)$ herhangi iki alt aralık olmak üzere $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$ olsun. Şu durumda $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. Herhangi bir $(u, v) \in \mathcal{J}$ noktasında

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (u,v)} \frac{\Delta_{(x,y)} f[u, v; x, y]}{(x-u)(y-v)} = D_B(f; u, v) \quad (4.8)$$

limiti varsa f fonksiyonuna **B-diferansiyellenebilirdir** denir. \mathcal{J} de ki tüm B-diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayı $D_b(\mathcal{J})$ ile gösterilir.

4.3.2. Teorem

$f \in D_b(\mathcal{J})$ ve $D_B f \in B(\mathcal{J})$ olsun. Şu durumda her $(x, y) \in \mathcal{J}$ için

$$\begin{aligned} |(L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y)| &\leq K_1 \left(3\|D_B f\|_\infty + \omega_B(D_B f; \delta_1, \delta_2) \right) + \omega_B(D_B f; \delta_1, \delta_2) \\ &\times \left(\frac{1}{\delta_1} K_2 + \frac{1}{\delta_2} K_3 + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} K_4 \right) \end{aligned}$$

Burada δ_1, δ_2 değerleri λ_n, λ_m 'lere bağlı olup

$$K_1 = \lambda_n \lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2\lambda_n M_{(0,1)}(K_{n,m}) + 2\lambda_m M_{(1,0)}(K_{n,m}) + 4M_{(1,1)}(K_{n,m}),$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \lambda_n^2 \lambda_m M_0(K_{n,m}) + 2\lambda_n^2 M_{(0,1)}(K_{n,m}) + 4\lambda_n \lambda_m M_{(1,0)}(K_{n,m}) + 8\lambda_n M_{(1,1)}(K_{n,m}) \\ &+ 8M_{(2,1)}(K_{n,m}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= \lambda_n \lambda_m^2 M_0(K_{n,m}) + 2\lambda_m^2 M_{(1,0)}(K_{n,m}) + 4\lambda_n \lambda_m M_{(0,1)}(K_{n,m}) + 8\lambda_m M_{(1,1)}(K_{n,m}) \\ &+ 8M_{(1,2)}(K_{n,m}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4 &= \lambda_n^2 \lambda_m^2 M_0(K_{n,m}) + 4\lambda_n^2 \lambda_m M_{(0,1)}(K_{n,m}) + 4\lambda_n^2 M_{(0,2)}(K_{n,m}) + 4\lambda_n \lambda_m^2 M_{(1,0)}(K_{n,m}) \\ &+ 16\lambda_n \lambda_m M_{(1,1)}(K_{n,m}) + 16\lambda_n M_{(1,2)}(K_{n,m}) + 4\lambda_m^2 M_{(2,0)}(K_{n,m}) + 16\lambda_m M_{(2,1)}(K_{n,m}) \\ &+ 16M_{(2,2)}(K_{n,m}) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Kanıt. $f \in D_b(\mathcal{J})$ olduğundan $\Delta_{(x,y)}f[u, v; x, y] = (u - x)(v - y)D_Bf(p, q)$ olacak şekilde $p \in (u, x)$ ve $q \in (v, y)$ vardır. $\Delta_{(x,y)}f[u, v; x, y]$ 'nin tanımını kullanarak

$$D_Bf(p, q) = \Delta_{(x,y)}D_Bf(p, q) + D_Bf(p, y) + D_Bf(x, q) - D_Bf(x, y)$$

elde edilir. $D_Bf \in B(\mathcal{J})$ olduğundan yukarıdaki eşitliği kullanarak;

$$\begin{aligned} & \left| (S_{n,m}\Delta_{(x,y)}f[u, v; x, y])(x, y) \right| = \left| (S_{n,m}(u - x)(v - y)D_Bf(p, q))(x, y) \right| \\ &= \left| (S_{n,m}(u - x)(v - y)\{ \Delta_{(x,y)}D_Bf(p, q) + D_Bf(p, y) + D_Bf(x, q) \right. \\ & \quad \left. - D_Bf(x, y) \}) (x, y) \right| \\ &\leq \left(S_{n,m}|u - x||v - y| |\Delta_{(x,y)}D_Bf(p, q)| \right) (x, y) \\ & \quad + \left(S_{n,m}|u - x||v - y| (|D_Bf(p, y)| + |D_Bf(x, q)| + |D_Bf(x, y)|) \right) (x, y) \\ &\leq \left(S_{n,m}|u - x||v - y| \omega_B(D_Bf; |p - x|, |q - y|) \right) (x, y) \\ & \quad + 3\|D_Bf\|_\infty \left(S_{n,m}|u - x||v - y| \right) (x, y) \\ &\leq \left(S_{n,m}|u - x||v - y| \omega_B(D_Bf; |u - x||v - y|) \right) (x, y) \\ & \quad + 3\|D_Bf\|_\infty \left(S_{n,m}|u - x||v - y| \right) (x, y) \\ &\leq \omega_B(D_Bf; \delta_1, \delta_2) \left(S_{n,m}|u - x||v - y| \left(1 + \frac{|u-x|}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{|v-y|}{\delta_2} \right) \right) (x, y) \\ & \quad + 3\|D_Bf\|_\infty \left(S_{n,m}|u - x||v - y| \right) (x, y) \\ &= \left\{ \left(S_{n,m}|u - x||v - y| \right) (x, y) + \frac{1}{\delta_1} \left(S_{n,m}(u - x)^2|v - y| \right) (x, y) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\delta_2} \left(S_{n,m}|u - x|(v - y)^2 \right) (x, y) + \frac{1}{\delta_1\delta_2} \left(S_{n,m}(u - x)^2(v - y)^2 \right) (x, y) \right\} \\ & \quad \times \omega_B(D_Bf; \delta_1, \delta_2) + 3\|D_Bf\|_\infty \left(S_{n,m}|u - x||v - y| \right) (x, y) \\ &\Rightarrow \left| (L_{n,m}f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq K_1(3\|D_Bf\|_\infty + \omega_B(D_Bf; \delta_1, \delta_2)) \\ & \quad + \left[\frac{1}{\delta_1}K_2 + \frac{1}{\delta_2}K_3 + \frac{1}{\delta_1\delta_2}K_4 \right] \omega_B(D_Bf; \delta_1, \delta_2). \end{aligned}$$

Eğer $\delta_1 = \lambda_n$ ve $\delta_2 = \lambda_m$ seçilip (3.18) ile verilen düzgün sınırlılık şartı sağlanırsa istenen sonuç elde edilmiş olur. \square

5. ORLICZ UZAYLARINDA ÖRNEKLEME KANTOROVICH TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde (3.6) ile verilen $(S_n f)$ operatörler dizisinin modüler uzayların bir örneği olan Orlicz uzaylarında modüler normda yakınsaklık problemleri incelenecektir. \mathcal{L}^p Lebesgue uzaylarının bir genelleştirmesi olan Orlicz uzaylarında Kantorovich tip örnekleme operatörlerin incelenmesi iyi bir genellik derecesine ulaşmaya böylece \mathcal{L}^p uzaylarında yakınsama teoremlerini çıkarmaya izin verir. Bu nedenle bu bölümde elde edeceğimiz yakınsaklık teoremi [1] de elde edilen sonucun bir genelleştirmesidir. Öncelikle modüler uzay ve $L^p(\mathbb{R})$ Orlicz uzayı üzerindeki norma karşılık gelen modüler fonksiyonel kavramlarını verelim.

5.1. Modüler Uzaylar ve Modüler Yakınsama

5.1.1. Tanım

X bir reel veya kompleks vektör uzayı olsun. Keyfi $x, y \in X$ için aşağıdaki şartları sağlayan $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneline bir pseudomodüler denir:

$$(\rho 1) \quad \rho(0) = 0$$

$$(\rho 2) \quad X = \mathbb{R} \text{ olması durumunda } \forall x \in X \text{ için } \rho(-x) = \rho(x),$$

$$(\rho 3) \quad X = \mathbb{C} \text{ olması durumunda } \forall x \in X \text{ ve } \forall t \in \mathbb{R} \text{ için } \rho(e^{it}x) = \rho(x),$$

$$(\rho 4) \quad \forall x, y \in X \text{ ve } \alpha + \beta = 1 \text{ olacak şekildeki } \alpha, \beta \geq 0 \text{ için } \rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y).$$

Yukarıdaki tanımda $\rho(1)$ yerine ayrı ayrı aşağıdaki $\rho(1^*)$ ve $\rho(1^{**})$ dikkate alınır; $\rho(1^*)$ Keyfi bir $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda x) = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa bu durumda ρ ya yarı-modüler denir.

$\rho(1^{**})$ Her $x \in X$ için $\rho(x) = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa ρ fonksiyoneline modülerdir denir.

5.1.2. Tanım

Eğer yukarıdaki 4. şarta aşağıdaki ifade eklenecek olursa, ρ pseudomodülerine **s-konveks pseudomodülerdir** denir, eğer ρ modüler olursa **s-konveks modüler** olarak adlandırılır.

Keyfi bir $s \in (0, 1]$ için

$$(\rho 4^*) \rho(\alpha^s x + \beta^s y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y), \quad \alpha^s + \beta^s = 1.$$

1-konveks modüler fonksiyonel ise **konveks modüler** olarak adlandırılır.

$(\rho 4)$ ve $(\rho 4^*)$ dan dolayı keyfi $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ için aşağıdaki ifadeler vardır:

1) $\forall \alpha \leq 1$ için $\rho(\alpha x) \leq \rho(x)$.

2) $\rho\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^n \rho(x_i), \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$

3) Eğer ρ bir s-konveks modüler ise

$$\rho\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i^s x_i\right) \leq \sum_{i=0}^n \alpha_i^s \rho(x_i), \quad \alpha_i^s \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^s = 1.$$

5.1.3. Tanım

ρ , X de bir modüler fonksiyonel olsun.

$$X_\rho = \{x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda x) = 0\}$$

olmak üzere (X_ρ, ρ) ikilisine ρ fonksiyonelinin ürettiği bir **modüler uzay** denir.

5.1.4. Teorem

X_ρ uzayı X uzayının bir alt vektör uzayıdır [17].

Kanıt. ρ modüler fonksiyonelinin özelliklerini kullanırsak;

$0 \in X_\rho$ dur. Gerçekten;

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda 0) = 0.$$

Öyleyse $X_\rho \neq \emptyset$ dir. Diğer yandan $x, y \in X_\rho$ olsun. Gösterelim ki $x + y \in X_\rho$ sağlanır.

Keyfi bir $\lambda > 0$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda(x + y)) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho\left(\frac{2\lambda}{2}(x + y)\right) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \{\rho(2\lambda x) + \rho(2\lambda y)\} = 0$$

Buradan $x + y \in X_\rho$ elde edilir.

Şimdi herhangi iki $x, y \in X_\rho$ için $xy \in X_\rho$ olduğunu gösterelim. X reel ya da kompleks vektör uzayı olduğu için $\lambda > 0$ sayısı da X kümesine aittir. Dolayısıyla

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = \beta y \text{ denirse } \lambda \rightarrow 0 \text{ iken } \beta \rightarrow 0 \text{ olacağından}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\beta y) = 0$$

olur. Bu durumda $xy \in X_\rho$ olur. Öyleyse X_ρ modüler uzayı X in bir alt vektör uzayıdır. □

5.1.1. Modüler yakınsama

5.1.5. Tanım

ρ fonksiyoneli X 'de bir pseudomodüler olsun. (x_k) dizisinin elemanları X_ρ 'nin elemanlarından olmak üzere herhangi bir $\lambda > 0$ için $k \rightarrow \infty$ iken $\rho(\lambda(x_k - x)) \rightarrow 0$ oluyorsa $(x_k) \subseteq X_\rho$ dizisi $x \in X_\rho$ noktasına **modüler yakınsaktır** (kısaca ρ -yakınsaktır) denir ve $x_k \xrightarrow{\rho} x$ şeklinde gösterilir.

Yukarıda verilen ρ -yakınsaklık kavramıyla birlikte aşağıdaki lemma ile verilen özellikler sağlanır:

5.1.6. Lemma

ρ, X de bir pseudomodüler olsun. Bu durumda

1. $x_k \xrightarrow{\rho} x$ ve $y_k \xrightarrow{\rho} y$ ise $x_k + y_k \xrightarrow{\rho} x + y$
2. $x_k \xrightarrow{\rho} x$ ve c bir sabit olmak üzere bu durumda $cx_k \xrightarrow{\rho} cx$ sağlanır.

3. Eğer ρ fonksiyoneli X uzayında modüler ise bu durumda X_ρ modüler uzayının elemanlarından oluşan her $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin limiti tektir.

5.1.7. Tanım

X reel ya da kompleks bir vektör uzayı, ρ fonksiyoneli bir pseudomodular ve $A \subseteq X_\rho$ olsun.

1. A 'nın elemanlarından oluşan her x_k dizi için öyle bir $\varepsilon_k \rightarrow 0$ vardır öyle ki $\varepsilon_k x_k \rightarrow 0$ sağlanıyorsa A 'ya **ρ -sınırlıdır** denir.
2. $x_k \in A$ ve $x_k \xrightarrow{\rho} x$ olması $x \in A$ olmasını gerektiriyorsa A 'ya **ρ -kapalıdır** denir.
3. $A \subseteq X_\rho$ yu içeren en küçük ρ -kapalı kümeye A 'nın **ρ -kapanışı** denir ve \bar{A}^ρ ile gösterilir. Eğer $\bar{A}^\rho = X$ ise bu durumda A 'ya X_ρ da **ρ -yoğundur** denir.

5.2. Orlicz Uzaylarında Yakınsaklık Teoremleri

Klasik Lebesgue uzaylarının bir genelleştirmesi olan Orlicz uzayları 1931 yılında Z.W. Birnbaum ve W. Orlicz tarafından tanıtılmıştır. Bu genelleştirmede Lebesgue uzayları tanımında yer alan x^p fonksiyonu yerine daha genel bir φ konveks fonksiyonu alınmıştır.

5.2.1. Tanım

$\varphi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonuna aşağıdaki koşullar ile birlikte bir **φ -fonksiyon** denir:

$\Phi 1)$ φ, \mathbb{R}_0^+ üzerinde azalmayan ve $\varphi(0) = 0, u > 0$ için $\varphi(u) > 0$,

$\Phi 2)$ φ, \mathbb{R}_0^+ üzerinde konvektir.

$f \in M(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\|f\|_\varphi = I^\varphi[f] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(|f(x)|) dx$$

eşitliğiyle verilen $I^\varphi, M(\mathbb{R})$ (\mathbb{R} üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların uzayı) üzerinde bir konveks modüler fonksiyoneldir

(I^φ fonksiyonelinin konveks modüler olması için φ fonksiyonunun konveks fonksiyon olarak seçilmesi gerektiğine dikkat edilmelidir.)

Gerçekten, $I^\varphi[0] = 0$,

Her $f \in M(\mathbb{R})$ için $I^\varphi[-f] = I^\varphi[f]$, φ 'nin konveksliğinden $\alpha + \beta = 1$ olacak şekildeki $\alpha, \beta \geq 0$ sayıları için $I^\varphi[\alpha f + \beta g] \leq I^\varphi[f] + I^\varphi[g]$ sağlanır. Ayrıca $I^\varphi[f] = 0$ olması için $f = 0$ olması gerektiği de kolaylıkla görülebilir. Böylece I^φ bir modüler fonksiyoneldir. Bu durumda φ tarafından oluşturulan

$$L^\varphi(\mathbb{R}) := \{f \in M(\mathbb{R}) : I^\varphi[\lambda f] < \infty \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ sayıları için}\}$$

kümesine I^φ modüleriyle birlikte **Orlicz Uzayı** denir. Orlicz Uzayı'nın uygun bir alt uzayı

$$E^\varphi(\mathbb{R}) := \{f \in M(\mathbb{R}) : \text{her } \lambda > 0 \text{ için } I^\varphi[\lambda f] < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır ve $L^\varphi(\mathbb{R})$ nin tüm sonlu elemanlarının uzayı olarak adlandırılır. Bu iki uzayın çakışması için $u \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\varphi(2u) \leq M\varphi(u) \tag{5.1}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısının olması gerekli ve yeterlidir. (5.1) ile verilen eşitsizliğe Δ_2 koşulu denir [17].

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $u \in \mathbb{R}^+$ için $\varphi(u) = u^p$ seçilirse $L^\varphi(\mathbb{R}) = E^\varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ olur bu ise modüler yakınsama ile norm yakınsamanın denk olduğunu gösterir.

Diğer yandan $\alpha \geq 1$ ve $\beta > 0$ için $\varphi_{\alpha,\beta}(u) = u^\alpha \log^\beta(e + u)$ olduğu göz önüne alınırsa bazı $\lambda > 0$ sayıları için Orlicz uzayındaki $f \in M(\mathbb{R})$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların sınıfı

$$I^{\varphi_{\alpha,\beta}}[\lambda f] = \int_{\mathbb{R}} (\alpha |f(x)|)^\alpha \log^\beta(e + \lambda |f(x)|) dx < \infty$$

ile birlikte $L^\alpha \log^\beta L(\mathbb{R})$ şeklinde gösterilir. Burada $\varphi_{\alpha,\beta}$ fonksiyonunun (5.1) Δ_2 koşulunu sağladığı dikkate alınmalıdır. Bu koşulun sağlanması $L^\alpha \log^\beta L(\mathbb{R})$ nin elemanlarının onun tüm sonlu elemanlarının uzayı $E^\alpha \log^\beta L(\mathbb{R})$ ile çakışması

anlamına gelmektedir, yani eğer $f \in L^\alpha \log^\beta L(\mathbb{R})$ ise bu durumda her $\lambda > 0$ için $I^{\varphi_{\alpha,\beta}}[\lambda f] < \infty$ sağlanır.

Diğer yandan bazı $\alpha > 0$ için $\varphi_\alpha(x) = e^{x^\alpha} - 1$ tarafından üretilen üstel uzaylar için Δ_2 koşulu sağlanmadığından, $L^{\varphi_\alpha}(\mathbb{R})$ uzayı ile onun sonlu elemanlarının uzayı $E^{\varphi_\alpha}(\mathbb{R})$ örtüşmez. Ayrıca $L^{\varphi_\alpha}(\mathbb{R})$ deki modüler yakınsama norm yakınsamayı gerektirmez.

5.2.2. Tanım

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

- i) f fonksiyonunun desteği $\text{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$ olarak tanımlanır.
- ii) Eğer en az bir $a, b \in \mathbb{R}$ için $\text{supp} f \subseteq [a, b]$ ise f fonksiyonu kompakt olarak desteklenir denir.
- iii) $C_c(\mathbb{R})$ ise tüm kompakt olarak desteklenen ve desteklendikleri aralıkta sürekli olan fonksiyonların uzayıdır.

$C_c(\mathbb{R})$ uzayı modüler olarak $L^\varphi(\mathbb{R})$ Orlicz uzayında yoğundur.

$C_c^*(\mathcal{I})$ uzayı $C_c(\mathcal{I})$ uzayındaki tüm düzgün sürekli, sınırlı ve her $t \in \mathcal{I}$ için (3.7) ifadesini düzgün olarak sağlayan fonksiyonların uzayı olsun.

$C_c^*(\mathcal{I})$ uzayına ait fonksiyonlar için I^φ normunda modüler yakınsama sonucunu elde etmek amacıyla $(K_{n,k}(x))$ fonksiyon dizisi üzerine bazı koşullar eklenmesi gerekmektedir. Bu sebepten aşağıdaki Lemma'yı verelim.

5.2.3. Lemma

$K_{n,k} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ olmak üzere $(K_{n,k}(x))$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların monoton artan bir dizisi ve $n \rightarrow \infty$ iken her $k \in \mathbb{N}_0$ için noktasal olarak $K_{n,k}(x) \rightarrow K(x)$ olsun. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $\gamma > 0$ vardır ki yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ ve $v_{n,k} \in [-\gamma, \gamma]$ ve $\psi(\mathcal{I}) < \gamma$ olacak biçimdeki $\mathcal{I} \subseteq [0, \infty)$ için

$$\int_{\mathcal{I}} |K_{n,k}(x)| dx < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $k \in \mathbb{N}_0$ için verilen hipotezlerle birlikte Monoton Yakınsaklık Teoreminden

$$\lim_n \int_{\mathcal{I}} K_{n,k}(x) dx = \int_{\mathcal{I}} K(x) dx$$

dir. $K_{n,k}(x)$ monoton olduğundan her bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$K_{j,k}(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} K_{n,k}(x) = K(x)$$

olup

$$\int_{\mathcal{I}} K_{j,k} d\psi \leq \int_{\mathcal{I}} K d\psi$$

dir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $K_{n,k} \leq K_{n+1,k}$ olduğundan

$$\int_{\mathcal{I}} K_{n,k} d\psi \leq \int_{\mathcal{I}} K_{n+1,k} d\psi$$

ve böylece $\left(\int_{\mathcal{I}} K_{n,k} d\psi \right)$ integrallerinin dizisi monoton artandır. Bu ise $\int_{\mathcal{I}} K_{n,k} d\psi$ ifadesini \mathcal{I} üzerinde anlamlı kılar. Her $n \in \mathbb{N}$ için $K_{n,k}$ fonksiyonları monoton olduğundan

$$\lim_n \int_{\mathcal{I}} K_{n,k} d\psi = \sup_{n \geq 1} \int_{\mathcal{I}} K_{n,k} d\psi \leq \int_{\mathcal{I}} K d\psi$$

olur. Buradan $K_{n,k}$ fonksiyonları integrallenebilir olduğundan K da integrallenebilirdir. Şu durumda Teorem 2.1.19 dan her $\varepsilon > 0$ için bir $\gamma > 0$ vardır öyle ki $\psi(\mathcal{I}) < \gamma$ şartını sağlayan her $\mathcal{I} \subseteq [0, \infty)$ kümesi için

$$\int_{\mathcal{I}} K_{n,k}(x) dx \leq \int_{\mathcal{I}} K(x) dx < \varepsilon$$

sağlanır. □

5.2.4. Teorem

$f \in \mathcal{C}_c^*(\mathcal{I})$, $\lambda > 0$ ve φ bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{S}_n f - f\|_\varphi = 0.$$

Kanıt. Her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I^\varphi[\lambda(\mathcal{S}_n f - f)] = 0$$

olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.1.1 den her $\lambda > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\lambda \|\mathcal{S}_n f - f\|_\infty) = 0$$

sağlanır. İspatın bu bölümünde f fonksiyonunun kompakt olarak desteklendiği ve desteklendikleri aralıkta sürekli olduğu bilgisini kullanacağız.

$\varepsilon > 0$ ve $\lambda > 0$ verilsin. $\bar{\gamma} > 0$ olmak üzere $\text{supp} f \subseteq [-\bar{\gamma}, \bar{\gamma}]$ olsun. Bir $\gamma > 0$ sayısı için $\gamma > \bar{\gamma} + \lambda_n$ ve $\mathcal{I} = [-\gamma, \gamma]$ alalım. Eğer $v_{n,k} \notin \mathcal{I}$ ise şu durumda $[v_{n,k}, v_{n,k+1}] \cap [-\bar{\gamma}, \bar{\gamma}] = \emptyset$ olur. Böylece

$$\frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} |f(u)| du = 0$$

olur. Şimdi $v_{n,k} \in [-\gamma, \gamma]$ olsun. $A = \{x \in \mathcal{I} : |K(x)| > M, M > 0\}$ olsun. \mathcal{S}_n serisinin düzgün yakınsaklığını, Jensen eşitsizliğini ve Fubini-Tonelli teoremlerini kullanarak;

$$\begin{aligned} \int_A \varphi(\lambda |(\mathcal{S}_n f)(x)|) dx &= \int_A \varphi \left(\lambda \left| \sum_{k=0}^{\infty} K_{n,k}(x) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} f(u) du \right| \right) dx \\ &\leq \int_A \varphi \left(\lambda \sum_{v_{n,k} \in [-\gamma, \gamma]} |K_{n,k}(x)| \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} |f(u)| du \right) dx \\ &\leq \frac{1}{M_0(K_n(x))} \int_A \left[\sum_{v_{n,k} \in [-\gamma, \gamma]} |K_{n,k}(x)| \varphi \left(\lambda M_0(K_n(x)) \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} |f(u)| du \right) \right] dx \\ &\leq \frac{1}{M_0(K_n(x))} \int_A \left[\sum_{v_{n,k} \in [-\gamma, \gamma]} |K_{n,k}(x)| \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \varphi(\lambda M_0(K_n(x)) |f(u)|) du \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{M_0(K_n(x))} \int_A \left[\sum_{v_{n,k} \in [-\gamma, \gamma]} |K_{n,k}(x)| \varphi(\lambda M_0(K_n(x)) \|f\|_\infty) \right] dx \\
&= \frac{1}{M_0(K_n(x))} \sum_{v_{n,k} \in [-\gamma, \gamma]} \int_A |K_{n,k}(x)| \varphi(\lambda M_0(K_{n,k}(x)) \|f\|_\infty) dx \\
&= \frac{1}{M_0(K_n(x))} \sum_{v_{n,k} \in [-\gamma, \gamma]} \varphi(\lambda M_0(K_n(x)) \|f\|_\infty) \int_A |K_{n,k}(x)| dx \quad [-\gamma, \gamma] \text{ aralığının pozitif ve} \\
&\text{negatif bölümlerinin her biri } \theta \text{ uzunlukta olacak şekilde parçalanırsa yukarıda verilen} \\
&\text{seri } 2 \left(\left\lceil \frac{\gamma}{\theta} \right\rceil + 1 \right) \text{ den küçük kalır. Şu halde Lemma 5.2.3 den}
\end{aligned}$$

$$\int_A \varphi(\lambda |(\mathcal{S}_n f)(x)|) \leq \frac{2\varepsilon \varphi(\lambda M_0(K_n(x)) \|f\|_\infty)}{M_0(K_n(x))} \left(\left\lceil \frac{\gamma}{\theta} \right\rceil + 1 \right)$$

olur. Ayrıca herhangi bir $B \subseteq \mathcal{I}$ kümesinin Lebesgue ölçüsü $|B| < \frac{\varepsilon}{\varphi(\lambda M_0 \|f\|_\infty)}$ olsun. Şu durumda $K_{n,k} \cdot 2$ den dolayı $M_0(K_n(x)) \leq M_0$ olacak şekilde bir $M_0 > 0$ sayısı var olduğundan her $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{I})$ için $|(\mathcal{S}_n f)(x)| \leq M_0 \|f\|_\infty$ sağlanır. Böylece

$$\int_B \varphi(\lambda |(\mathcal{S}_n f)(x)|) dx \leq \int_B \varphi(\lambda M_0 \|f\|_\infty) dx < \varepsilon.$$

Bu durumda

$$\int_{\diamond} \varphi(\lambda |(\mathcal{S}_n f)(x) - f(x)|) dx$$

integralleri eş-mutlak süreklidir dolayısıyla Vitali Yakınsaklık Teoreminden;

$$\begin{aligned}
\lim_n \|(\mathcal{S}_n f)(x) - f(x)\|_\varphi &= \lim_n \int_{\diamond} \varphi(\lambda |(\mathcal{S}_n f)(x) - f(x)|) dx \\
&= \int_{\diamond} \lim_n \varphi(\lambda |(\mathcal{S}_n f)(x) - f(x)|) dx = 0
\end{aligned}$$

olur. Bu ise istenen sonuçtur. □

5.2.5. Teorem

Keyfi bir φ konveks fonksiyonu için $f \in L^\varphi(\mathcal{I})$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_{n,k} \geq a_n > 0$ olsun. $(K_{n,k})$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların monoton artan bir dizisi ve $n \rightarrow \infty$

iken her $k \in \mathbb{N}_0$ için noktasal olarak $K_{n,k}(x) \rightarrow K(x)$ olsun. Bu durumda

$$I^\varphi[\lambda \mathcal{S}_n f] \leq \frac{\|K\|_1}{M_0(K_n(x))} \frac{I^\varphi[M_0 f]}{a_n}, \quad (\lambda > 0) \quad (5.2)$$

sağlanır.

Kanıt. (5.2) ile verilen eşitsizliğin sağ tarafının sonlu olduğunu varsayabiliriz, $\lambda = 1$ için ispatı yapacağız. İki kez Jensen eşitsizliğini ve Fubini-Tonelli teoremini kullanarak;

$$\begin{aligned} I^\varphi[S_n f] &= \int_{\mathcal{I}} \varphi(|(\mathcal{S}_n f)(x)|) dx \\ &\leq \frac{1}{M_0(K_n(x))} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_{n,k}} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \varphi(M_0(K_n(x))|f(u)|) du \cdot \int_{\mathcal{I}} |K_{n,k}(x)| dx \right\} \end{aligned}$$

Monoton yakınsaklık teoreminden ve $K_{n,k.2}$) den

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{M_0(K_n(x))} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a_n} \int_{v_{n,k}}^{v_{n,k+1}} \varphi(M_0(K_n(x))|f(u)|) du \right\} \int_{\mathcal{I}} |K(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{M_0(K_n(x))} \frac{\|K\|_1}{a_n} I^\varphi[M_0 f]. \end{aligned}$$

Bu ise istenen sonuçtur. □

Son olarak bu çalışmanın merkezini oluşturan teoremin ispatını verebiliriz.

5.2.6. Teorem

Her $f \in L^\varphi(\mathcal{I})$ için bir $\lambda > 0$ vardır öyle ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I^\varphi[\lambda(\mathcal{S}_n f - f)] = 0$$

olur.

Kanıt. Keyfi bir $f \in L^\varphi(\mathcal{I})$ olsun. Şu durumda bir $\bar{\lambda} > 0$ ve öyle bir $g \in \mathcal{C}_c^*(\mathcal{I})$ vardır ki $I^\varphi[\bar{\lambda}(f - g)] < \varepsilon$ sağlanır. Şimdi bir $\lambda > 0$ için $3\lambda(1 + M_0(K_n(x))) \leq \bar{\lambda}$ olsun. Bu durumda φ fonksiyonunun konveksliğinden ve Teorem 5.2.5 den

$$\begin{aligned}
I^\varphi[\lambda(\mathcal{S}_n f - f)] &\leq \frac{1}{3} \left\{ I^\varphi[3\lambda(\mathcal{S}_n f - \mathcal{S}_n g)] + I^\varphi[3\lambda(\mathcal{S}_n g - g)] + I^\varphi[3\lambda(f - g)] \right\} \\
&\leq \frac{1}{3} \left\{ \frac{\|K\|_1}{M_0(K_n(x))a_n} I^\varphi[\bar{\lambda}(f - g)] + I^\varphi[\bar{\lambda}(f - g)] + I^\varphi[3\lambda(\mathcal{S}_n g - g)] \right\} \\
&\leq \left(\frac{\|K\|_1}{M_0(K_n(x))a_n} + 1 \right) \varepsilon + I^\varphi[3\lambda(\mathcal{S}_n g - g)]
\end{aligned}$$

Şu durumda Teorem 5.2.4 den dolayı ispat tamamlanmış olur. □





6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada yaklaşım teoride iyi bilinen ayırık operatörleri içeren Kantorovich tipi örnekleme operatörlerinin genel bir sınıfı çalışıldı ve aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

* Yukarıda bahsedilen operatörlerin iki değişkenli biçimi tanımlanarak düzgün sürekli sınırlı fonksiyonlar ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için yaklaşım derecesine ilişkin sonuçlar elde edildi.

* İki değişkenli Kantorovich Örnekleme tipin GBS operatörleri tanımlanarak karma düzgünlük modülü cinsinden yakınsaklık oranı ve Bögel diferensiyellenebilir fonksiyonlar için yaklaşım derecesi verildi.

Genelleştirilmiş Boolean toplam operatörleri orijinal operatöre göre genelde daha iyi bir yaklaşım derecesi verir. Görüntü işleme teorisinde önemli bir rol oynayan çok değişkenli Kantorovich tip örnekleme operatörleri için genelleştirilmiş Boolean toplamı yardımı ile daha net görüntüler elde edilebilir.

* Tezin merkezi teoremini oluşturan son bölümde, tek değişkenli genelleştirilmiş Kantorovich tip örnekleme operatörleri için Orlicz uzaylarında yakınsaklık teoremi verildi. Teoremi ispatlayabilmek için çekirdek üzerindeki gerek koşullar bulundu ve L_p uzaylarının bir genelleştirmesi olan Orlicz uzaylarında yakınsaklık teoremi elde edildi.

Bu sonuçların çok boyutlu örnekleme Kantorovich genelleştirmeleri veya çekirdeğin farklı seçimi ile Orlicz veya Musielak-Orlicz uzaylarında yakınsaklık teoremleri çalışılabilir.



KAYNAKLAR

1. Bardaro, C. and Mantellini, I. (2012). On convergence properties for a class of Kantorovich discrete operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 33(4), 374-396.
2. Angeloni, L., Çetin, N., Costarelli, D., Sambucini, A. R., and Vinti, G. (2021). Multivariate sampling Kantorovich operators: quantitative estimates in Orlicz spaces. *Constructive Mathematical Analysis*, 4(2), 229-241.
3. Kumar, A. S., Devaraj, P. (2019). Approximation by generalized bivariate Kantorovich sampling type series. *The Journal of Analysis*, 27(2), 429-449.
4. Bardaro, C., Vinti, G., Butzer, P. L. and Stens R. L. (2007). Kantrovich-Type Generalized Sampling Series in the Setting of Orlicz Spaces. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 6(1), 29-52.
5. Bardaro, C., Musielak, J. and Vinti, G. (2008). *Nonlinear integral operators and applications*, Berlin, New York: De Gruyter.
6. Bardaro, C. and Mantellini, I. (2009). A Voronovskaya-type theorem for a general class of discrete operators. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 39(5), 1411-1442.
7. Bardaro, C. and Mantellini, I. (2010). A quantitative asymptotic formula for a general class of discrete operators. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(10):2859-2870.
8. Costarelli, D., Vinti, G. (2013). Approximation by nonlinear multivariate sampling Kantorovich type operators and applications to image processing. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 34(8), 819-844.
9. Costarelli, D. and Vinti, G. (2014). Order of approximation for sampling Kantorovich operators. *Journal of Integral Equations and Applications*, 26(3), 345-367.
10. Costarelli, D. and Vinti, G. (2019). A quantitative estimate for the sampling Kantorovich series in terms of the modulus of continuity in Orlicz spaces. *Constructive Mathematical Analysis*, 2(1), 8-14.
11. Costarelli, D., Cluni, F., Minotti, A. M., Vinti, G. (2014). Applications of sampling Kantorovich operators to thermographic images for seismic engineering. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 19(4), 602-617.
12. Costarelli, D., Minotti, A. M., Vinti, G. (2017). Approximation of discontinuous signals by sampling Kantorovich series. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 450(2), 1083-1103.

13. Costarelli, D., Vinti, G. (2011). Approximation by Multivariate Generalized Sampling Kantorovich Operators in the Setting of Orlicz Spaces. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 4(3), 445-468.
14. Costarelli, D., Pozzilli, P., Seracini, M., Vinti, G. (2021). Enhancement of Cone-Beam Computed Tomography Dental-Maxillofacial Images by Sampling Kantorovich Algorithm. *Symmetry*, 13(8), 1450.
15. Kumar, A. S., and Devaraj, P. (2019). Approximation by Generalized Kantorovich Sampling Type Series. *Kyungpook Mathematical Journal*, 59(3), 465-480.
16. Kumar, A. S., Shivam, B. (2020). Inverse approximation and GBS of bivariate Kantorovich type sampling series. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 114(2), 1-15.
17. Musielak, J. (1983). *Orlicz spaces and modular spaces: Lecture Notes in Mathematics*, Verlag, Berlin: Springer, 216.
18. Sidharth, M., Ispir, N. and Agrawal, P. N. (2016). Approximation of B-continuous and B-differentiable functions by GBS operators of q-Bernstein-Schurer-Stancu type. *Turkish Journal of Mathematics*, 40(6), 1298-1315.
19. Agrawal, P. N, Ispir, N., Sidharth, M. (2018). Quantitative estimates of generalized Boolean sum operators of blending type, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 39(3), 295-307.
20. Deshwal, S., Ispir, N. and Agrawal, P. N. (2017). Blending type approximation by bivariate Bernstein-Kantorovich operators. *Appl. Math. Inform. Sci*, 11, 2017, 423-432.
21. Butzer, P. L., Stens R. L. (1992). Sampling theory for not necessarily band-limited functions: a historical overview. *SIAM review*, 34(1), 40-53.
22. Butzer, P. L., Stens R. L. (1993). Linear prediction by samples from the past. *Advanced topics in Shannon sampling and interpolation theory*, New York: Springer Texts Electrical Eng., 157-183.
23. Butzer, P. L., Ries, S., Stens, R. L. (1987). Approximation of continuous and discontinuous functions by generalized sampling series. *Journal of approximation theory*, 50(1), 25-39.
24. Kivinukk, A., Tamberg, G. (2009). Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approximation properties. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 8(1), 77-96.
25. Burinska, Z., Runovski, K., Sehmeisser, H. J. (2006). On the approximation by generalized sampling series in L_p -metrics. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 5(1), 59-87.

26. Stens, R. L. (1999). Sampling with generalized kernels. *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Advanced Topics*, 130-157.
27. Asdrubali, F., Baldinelli, G., Bianchi, F., Costarelli, D., Rotili, A., Seracini, M., Vinti, G. (2018). Detection of thermal bridges from thermographic images by means of image processing approximation algorithms. *Applied Mathematics and Computation*, 317, 160-171.
28. Asdrubali, F., Baldinelli, G., Bianchi, F., Costarelli, D., Evangelisti, L., Rotili, A., Seracini, M., Vinti, G. (2018). A model for the improvement of thermal bridges quantitative assessment by infrared thermography. *Applied Energy*, 211, 854-864.
29. Chi-Tsong C. (2004). *Signals and Systems* (Third Edition). USA: Oxford University Press, 453.
30. Vinti, G. (2001). A general approximation result for nonlinear integral operators and applications to signal processing. *Applicable Analysis*, 79(1-2), 217-238.
31. Bögel, K. (1934). Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 170, 197-217.
32. Bögel, K. (1935). Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 173, 5-30.
33. Dobrescu E., and Matei, I. (1966). The approximation by Bernstein type polynomials of bidimensionally continuous functions. *An. Univ. Timisoara Ser. Sti. Mat.-Fiz*, 4, 85-90.
34. Badea, C., Badea, I. and Gonska, H. H. (1986). A test function theorem and approximation by pseudopolynomials. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 34(1), 53-64.
35. Badea, C. and Cottin, C. (1990). Korovkin-type theorems for generalized boolean sum operators. *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, 58, 51-67.
36. Royden, H. L., Fitzpatrick, P. (1988). *Real Analysis* (Fourth Edition). New York: Macmillian, 505.
37. Akkus, Z., Galimzianova, A., Hoogi, A., Rubin, D. L. and Erickson, B. J. (2017). Deep learning for brain MRI segmentation: state of the art and future directions. *Journal of digital imaging*, 30(4), 449-459.
38. Sikkema, P. C. (1970). On the asymptotic approximation with operators of Meyer-König and Zeller. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 73, North-Holland, 428-440.

39. Chen, L., Zeng, X. M. (2009). Rate of convergence of a new type Kantorovich variant of Bleimann-Butzer-Hahn operators. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-10.





GAZİ GELECEKTİR..