ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SALİHA TELLİ

OCAK 2022

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Yüksek Lisans Tezi
Saliha TELLİ

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN

ZONGULDAK
Ocak 2022

KABUL:

Saliha TELLİ tarafından hazırlanan "Bir İntegral Geometri Probleminin Çözümünün Tekliğinin Araştırılması" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 20/01/2022

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Nejla ÖZMEN ....
Düzce Üniversitesi, Gölyaka Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. …/….2022

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Saliha TELLİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

Saliha TELLİ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN
Ocak 2022, 53 sayfa

Bu çalışmada bir integral geometri probleminin çözümünün tekliği araştırılmaktadır. Bu amaçla ilk olarak ele alınan integral geometri problemi bir kinetik denklem için ters probleme indirgenmektedir. Daha sonra Fourier dönüşümü kullanılarak bir diferansiyel denklem sistemi elde edilmektedir. Riemann koordinatlarını tanımlamak suretiyle problem daha basit bir hale dönüştürülüp Hörmander (1956) tarafından elde edilen bir sonuç kullanılarak ispat tamamlanmaktadır. Bu çalışma Amirov (2005) ve Amirov, Gölgeleyen ve Yamamoto (2017) çalışmaları esas alınarak hazırlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: İntegral geometri problemi, ters problem, Fourier dönüşümü, çözümün tekliği.

Bilim Kodu: 403.02.00.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF AN INTEGRAL GEOMETRY PROBLEM

Saliha TELLİ

Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. İsmet GÖLGELEYEN
January 2022, 53 pages

In this thesis, the uniqueness of solution of an integral geometry problem is investigated. For this purpose, the problem is reduced to an inverse problem for a kinetic equation. By using Fourier transform, a system of differential equations is obtained. Then by the help of Riemannian Coordinates, the problem is stated in a simpler form and with a result of Hörmander (1956), the proof is completed. This study is based on the works Amirov (2005) and Amirov, Gölgeleyen and Yamamoto (2017).

Keywords: Integral geometry problem, inverse problem, Fourier transform, uniqueness of solution.

Science Code: 403.02.00.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile beni yönlendiren ve destek olan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu süreçte her zaman sorularıma cevap veren ve önerilerde bulunan kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle her zaman yanımda olan değerli aileme, eşim Bahat TELLİ'ye ve üzerimde emeği olan bütün hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Bu tezi sevgili annem Leyla SEVİMLİ'ye ve oğlum Yiğit Selçuk TELLİ'ye armağan ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KABUL ii
ÖZET iii
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vii
İÇİNDEKİLER ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xi

BÖLÜM 1 GİRİŞ 1

1.1 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİ (IGP) 3
1.2 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN BAZI UYGULAMA ALANLARI 4
1.2.1 Bilgisayarlı Tomografi (BT) 4
1.2.2 Pozitron Emisyon Tomografi (PET) 5

BÖLÜM 2 ÖN BİLGİLER 7

2.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER 7
2.2 HADAMARD ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER 14
2.3 TİKHONOV ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER 15

BÖLÜM 3 GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONLAR 17

3.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYON 17
3.2 DİRAC DELTA GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONU 17
3.3 GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREV 20

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

BÖLÜM 4 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI 21

4.1 BAZI YARDIMCI LEMMALAR 22

4.2 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN BİR TERS PROBLEME İNDİRGENMESİ 28

4.3 PROBLEM 4. 2'YE FOURİER DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULANMASI 30

4.4 YENİ KOORDİNATLARDA BAZI YARDIMCI SONUÇLAR 35

BÖLÜM 5 TEOREM 4. 1' İN İSPATI 43

5.1 SONUÇ 47

KAYNAKLAR 49

ÖZGEÇMİŞ 53

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Ω	: Verilen bir bölge
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$L_1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\mathrm{C}[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_o^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı sonsuz defa diferansiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
Γ_{ij}^k	: Christoffel sembolleri
$\delta(x)$	: Delta fonksiyonu
D^α	: Türev için çoklu indeks gösterimi
$\rho(x)$	: Ağırlık fonksiyonu

KISALTMALAR

IGP	: İntegral Geometri Problemi
BT	: Bilgisayarlı Tomografi
PET	: Pozitron Emisyon Tomografi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Denklem, bölge ve koşullar verildiğinde denklemi ve koşulları sağlayan çözümü bulma problemine direkt problem denir. Diğer taraftan, pratikte bazı problemlerin çözümleri için ayrıca bir ek bilgiye ihtiyaç duyulur. Bu durumda çözümünün yanı sıra denklem, bölge, koşullar ve denklemin sağ tarafından en az birinin bulunması istenir. Böyle problemlere ters problem adı verilir. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin karakteristik özelliklerinden biri, bu problemlerin Hadamard anlamında kötü konulmuş olmasıdır. Bu tezde bir integral geometri probleminin çözümünün tekliği araştırılmaktadır. İntegral geometri problemleri ile kinetik denklemler için ters problemler arasında çok yakın bir ilişki bulunmaktadır. Diğer bir deyişle, birçok integral geometri problemi kinetik denklem için bir ters probleme indirgenebilmektedir (Amirov 2001). Kinetik denklemler için ters problemler ise hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem taşımaktadır. Bu alanda önemli çalışmalar Lavrent'ev ve Anikonov (1967), Anikonov ve Amirov (1983), Amirov (1986, 2001), Anikonov (2001) tarafından elde edilmiştir.

İntegral geometri problemlerinin çözülebilirliğinin kinetik denklemler için bazı ters problemler aracılığı ile araştırılması ilk olarak Lavrent'ev ve Anikonov (1967) tarafından yapılmıştır.

Bu tezin birinci bölümünde, integral geometri probleminin tanımı ve tarihçesi verilmektedir. Ayrıca bu problemlerin uygulama alanlarına örnek olarak bilgisayarlı tomografi ve pozitron emisyon tomografi hakkında bazı bilgiler sunulmaktadır. İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler yer almaktadır. İntegral geometri problemleri genellikle Hadamard anlamında kötü, Tikhonov anlamında iyi konulmuş problemlerdendir. Bu bağlamda, iyi ve kötü konulmuş problemler hakkında bazı bilgiler bu bölümde verilmiştir. Ardından üçüncü bölümde genelleştirilmiş fonksiyon, genelleştirilmiş türev ve Dirac delta genelleştirilmiş fonksiyonunun özellikleri tartışılmıştır. Dördüncü bölümde ise ele alınan problemin çözümünün tekliğinin araştırılmasında önem arzeden bazı yardımcı lemmalar ve matematiksel araçlar sunulmuştur. Tüm bunların sonucunda beşinci bölümde teklik teoreminin ispatı yer almaktadır.

$D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ basit bağlantılı, kapalı ve sınırlı bir bölge olsun. D bölgesinin bir $g \in C^6(D)$ metriğine göre konveks olduğu yani her $x, y \in D$ için g metriğinin bu noktaları birleştiren ve D içinde yer alan tek bir $\Gamma(x, y)$ jeodeziğinin varlığı kabul edilsin. Ayrıca D nin sınırı C^5 sınıfından olsun. Tez boyunca

$$\xi = (\xi^1, ..., \xi^n) \in \mathbb{R}^n,\ \dot{\xi} = \frac{d}{dt}\xi,\ \xi' = (\xi^2, ..., \xi^n)$$

gösterimleri kullanılacaktır. Ayrıca $\Gamma(x, y)$ jeodeziğinin bir koordinat gösterimi

$$\Gamma(x, y) = \xi(x, y, t) = \left\{\xi^1(x, y, t), ..., \xi^n(x, y, t)\right\}$$

dir. Burada t doğal parametre olup $t = Al + B$ dir. l ile g metriğine göre bir noktadan geçen jeodeziğin uzunluğu ifade edilmektedir. A ve B sabit sayılardır (Dubrovin vd. 1992, Raschewski 1959).

Bu tezde, her $(x, y) \in \partial D \times \partial D$ için değeri bilinen

$$\int_{\Gamma(x,y)} \left(\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(\xi(x, y, t))\dot{\xi}^i(x, y, t)\dot{\xi}^j(x, y, t) \right) dt,$$

integralinden D bölgesinde a_{ij} $(2 \leq i, j \leq n)$ fonksiyonlarının belirlenmesi problemi ele alınmaktadır. Ele alınan bu problemin çözümünün tekliği araştırılırken bir yardımcı fonksiyon tanımlanmaktadır. Tanımlanan yardımcı fonksiyon yardımıyla problem kısmi türevli denklem için bir ters probleme indirgenmektedir. Daha sonra Fourier analizi kullanılarak ve yeni Riemann koordinatları tanımlanarak problem daha uygun bir forma indirgenmektedir. Son olarak da ele alınan problemin çözümünün tekliği Amirov (2005) ve Amirov, Gölgeleyen ve Yamamoto (2017) esas alınarak verilmiştir.

1.1 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİ (IGP)

E^n üzerinde yeterince düzgün bir fonksiyon veya daha karmaşık bir matematiksel obje $\lambda(x)$, $x \in E^n$ olsun. E^n üzerinde diferansiyel formlar, vektör alanları, tensör alanları bu cinsten objelerdir.

$$r = (r_1, r_2, ..., r_k), \;\; r_i \in \mathbb{R}$$

olmak üzere r parametresine bağlı E^n deki düzgün manifoldların cümlesi $\{\Gamma(r)\}$ ve $\lambda(x)$ her bir $\Gamma(r)$ manifoldu üzerinde integrallenebilir, yani

$$\int\limits_{\Gamma(r)} \lambda(x) d\sigma_r = f(r)$$

olsun, burada $d\sigma_r$, $\Gamma(r)$ üzerinde verilmiş ölçü elemanıdır. $\Gamma(r)$ ve $f(r)$ ye göre $\lambda(x)$ in bulunması problemine lineer integral geometri problemi (IGP) denir.

$$\int\limits_{\Gamma(r)} \lambda(x) d\sigma_r = f(r)$$

denkleminde $\{\Gamma(r)\}$ belli olmayabilir. Bu durumda $f(r)$ ye göre aynı zamanda $\lambda(x)$ i ve $\{\Gamma(r)\}$ yi bulma problemine ise lineer olmayan integral geometri problemi denir (Lavrent'ev et al 1986, s. 168).

İntegral geometri problemi ilk olarak Johann Radon tarafından incelenmiştir (Radon 1917). Radon problemi; $\lambda(x)$ fonksiyonunun E^n de yer alan tüm $m < n$ boyutlu düzlemler üzerindeki integrallerinin verilmesi halinde bu integrallere göre $\lambda(x)$ in bulunması problemidir (Radon 1917). Radon bu problemi çözerek $\lambda(x)$ in $f(r)$ ile ilgili ifadelerini vermiştir. Bu ifade radon dönüşümü olarak bilinmektedir. Radon dönüşümü de Fourier dönüşümü gibi diferansiyel ve pseudo-diferansiyel denklemlerle ilgili çeşitli problemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Bu problem daha sonra çeşitli açılardan John (1935), Gel'fand ve Graev (1959), Gel'fand vd. (1962) ve farklı araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. İntegral geometri problemlerinin teorisi Lavrent'ev ve Bukhgeim (1973), Muhometov (1977), Anikonov (1976, 2001), Kireitov (1975), Sharafutdinov (1981, 1994) ve Amirov (1986, 2001) gibi önemli bilim insanlarının çalışmalarıyla ve bu alanda yapılan diğer çalışmalarla daha da ileriye taşınmıştır (Gölgeleyen 2011).

1.2 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN BAZI UYGULAMA ALANLARI

Standart X-ray dönüşümünde fonksiyonun doğrular boyunca integrali söz konusudur ve bu tür bir integral geometri problemi bilgisayarlı tomografi (BT) ve pozitron emisyon tomografi (PET) gibi tıbbi görüntüleme tekniklerinin temelini oluşturmaktadır. Genel olarak jeodezikler boyunca integrasyon hali jeofiziksel görüntülemede ve ultrason görüntülemede ortaya çıkar. Tensör Tomografi problemlerinde, simetrik bir tensör alanını, sınır noktalarını birleştiren jeodezikler boyunca verilen integrallerden belirlemek amaçlanmaktadır. Birinci dereceden tensörleri içeren integral geometri problemleri çeşitli tümörlerin tespit ve tanısını sağlayan ultrason tomografi ile ilgilidir (Natterer 1986, Paternain vd. 2013). Yüksek dereceden tensör alanlarının integrasyonu farklı şekillerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, ikinci dereceden tensör alanlarını içeren durumlar diferansiyel geometrinin önemli problemlerinden olan "rigidity" probleminin linearizasyonuna karşılık gelmektedir (Pestov ve Uhlmann 2005). Rankı dört olan tensör alanları ile ilgili modeller hafif anizotropik elastik ortamda yayılan sıkışma dalgalarının seyahat zamanlarının düzensizliğini tanımlamaktadır.

İntegral geometri problemleri için teklik teoremleri ve kararlılık değerlendirmesi Muhometov (1977) tarafından iki boyutta verilmiştir. Daha yüksek boyutlu durumlar Bernstein ve Gerver (1978), Muhometov ve Romanov (1978), Anikonov ve Romanov (1997) ve Sharafutdinov (1994) tarafından araştırılmıştır. Ayrıca metriğin belirlenmesi problemi ile ilgili olarak Sharafutdinov ve Uhlmann (2000), Pestov ve Uhlmann (2005), Sharafutdinov (2007) ve Dairbekov (2006) önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Diferansiyel formlar için farklı tiplerde integral geometri problemleri Gelfand vd. (2003), Sharafutdinov (1994) da araştırılmıştır. Bu problemler arasındaki bağlantılar, hiperbolik tip ve kinetik denklemler için ters problemler Amirov (2001), Anikonov (1995) ve Romanov (1987) tarafından ele alınmıştır (Gölgeleyen 2013).

1.2.1 Bilgisayarlı Tomografi (BT)

Bilgisayarlı Tomografi 1963 yılında Cormak tarafından teorize edilmiş ve radyolojide yeni bir çığır açmış kesitsel görüntüleme yöntemidir (İnce 1987). Bilgisayarlı Tomografi, elde edilen gözlem verilerini bilinmeyen fiziksel parametrelerle ilişkilendiren denklemleri oluşturmak için X-ışını soğurumunun matematik modeline ve bu denklemlerin çözümü için de bazı metodlara ihtiyaç duyar. Böyle bir yöntemle radyografik verilerde bulunan çok büyük miktarda bilginin ortaya çıkarılması mümkün olur. Yani insan vücudunun üç boyutlu görüntüsü elde edilebilir. Bilgisayarlı Tomografi' deki bu yeni fikirler kısa süre sonra diğer tıbbi görüntüleme yöntemlerinde de kullanılmıştır (Mueller ve Siltanen 2012, s. 3).

1.2.2 Pozitron Emisyon Tomografi (PET)

Dokuların kanlanmasını, metabolik aktivitesini ve canlılığını(viabilite) yansıtan, tomografik görüntüleme ve kantitatif parametrelerin kullanıldığı, non-invaziv bir görüntüleme yöntemidir. PET' de, diğer Nükleer Tıp uygulamalarında olduğu gibi görüntüleme ajanı olarak radyoaktif işaretli bileşikler kullanılır. PET' in en önemli ve eşsiz özelliği, anatomik (yapısal) bilgi sağlayan radyolojik görüntüleme yöntemleri (direkt radyografiler, bilgisayarlı tomografi, anjiografi, MR vs.) ile elde edilemeyen fonksiyonel değişiklikleri (örneğin tümör metabolik aktivitesi) gösterebilmesidir. Pet görüntülemede kullanılan radyofarmasötiklerin en önemli özelliği vücudun temel alt yapı taşları ile aynı fizyolojik ve metabolik yolları izleyen karbon (C), oksijen (O), flor (F), azot (N_2) gibi elementleri içermeleri ve vücutta biyolojik olarak bu moleküller gibi davranmalarıdır. PET çalışmalarının %90' ında Flor- 18 (18F) işaretli bileşikler ve özellikle radyoaktif şeker olan F- 18 Florodeoksiglukoz (FDG) kullanılır. Vücutta şekeri fazla oranda kullanan hücreler tarafından tutulan FDG, PET tarayıcıda tespit edilerek tüm vücudun metabolik görüntüsü oluşturulur. PET belirli bazı beyin, kalp ve özellikle kanser hastalıklarında tanı amacı ile kullanılır. En yaygın kullanım alanı kanser tanısı veya kanser hastasında en iyi tedavi seçeneğinin belirlenmesine olan katkısıdır. Beyin PET; epilepsiye neden olan epilepsi odağının lokalize edilmesi ile hafıza kaybı ve diğer nörolojik semptomların kaynağı olan hastalıkların tanısında da kullanılır. Kardiyak PET çalışmaları, enfarktüs geçiren olgularda kalp dokusu canlılığı ile kalbe kan akımını arttırmaya yönelik yapılacak cerrahi tedavinin kardiyak fonksiyonlar üzerine olumlu katkı sağlayıp sağlayamayacağının değerlendirilmesinde kullanılan yöntem yine PET' tir. PET çalışmasından hekimin elde edeceği bilgi, kişi için en uygun tedavi seçeneğinin belirlenmesi ve gereksiz cerrahi tedavinin önlenmesinde kullanılacaktır (URL-1).

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

2.1 TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 *(Metrik, Metrik uzay) Boş olmayan bir X kümesi ve bir*

$d : X \times X \to \mathbb{R}^+, \ \ (x, y) \to d(x, y)$

dönüşümü verilsin. Eğer, her $x,\ y,\ z \in X$ için

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
$d(x, y) = d(y, x),$
$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Üçgen Eşitsizliği)*

özellikleri sağlanıyorsa o takdirde d dönüşümüne X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adı verilir ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir. Bir küme üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.2 *(Hilbert Uzayı) Bir Hilbert uzayı, üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır (Kreyszig 1989, s. 151).*

Tanım 2.3 *($C^k(\Omega)$ Uzayı) Ω üzerinde tanımlı ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip tüm fonksiyonların kümesi $C^k(\Omega)$ ile ifade edilir.*

$f \in C^k(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *bir çoklu indeks* $(\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, i = 1, 2, ..., n)$ ve

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

olsun. Bu durumda

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n} f(x),$$

f fonksiyonunun kısmi türevlerini ifade eder ve $D^k f(x) = \{D^\alpha f(x) \mid |\alpha| = k\}$ kümesi f fonksiyonunun mertebesi k olan tüm kısmi türevlerinin oluşturduğu kümedir (Evans 1997).

Tanım 2.4 ***($C_0^{\infty}(\Omega)$ Uzayı)*** *$C_0^{\infty}(\Omega)$, Ω üzerinde tanımlı sonsuz defa diferansiyellenebilir ve dayanağı*

$$\left(supp\varphi(x) = \overline{\{x \mid x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}\right)$$

Ω nın kompakt alt cümlesi olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir (Mikhailov 1978).

Tanım 2.5 ***($L_1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ Uzayları)*** *$L_1(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu küme; $L_2(\Omega)$, Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülünün karesi integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir.*

Bu kümelere ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978);
1) $L_1(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ lineer uzaydır ve Ω sınırlı bir bölge ise

$$C\left(\overline{\Omega}\right) \subset L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$$

dir,
2) $L_1(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)|\, dx$$

normuna göre bir Banach uzayıdır,
3) $L_2(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f_1(x)\,\overline{f_2(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

biçimindedir,
4) $C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $C_0^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı, $L_1(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ da her yerde yoğundur,
5) $L_1(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ ayrılabilir uzaylardır.

Tanım 2.6 *(Paralel Vektör Alanı - Jeodezik Eğri)* $S \subset E^3$ *bir düzgün yüzey ve*

$\alpha\colon I \to S$ *regüler bir eğri olsun. Eğer* α *eğrisi üzerinde* Y *bir* C^∞ *vektör alanı ve* α *üzerinde* $D_T Y = 0$ *ise* Y *vektör alanına* α *eğrisi üzerinde bir paralel vektör alanıdır denir.*

Eğer bir α *eğrisi üzerinde*

$$D_T Y = 0$$

ise α *eğrisine bir jeodezik eğri adı verilir. Düzlemin doğruları ve kürenin büyük çemberleri bu cinsten eğrilerdir (Hacısalihoğlu 1993).*

Tanım 2.7 *(Christoffel Sembolleri)* $S \subset E^3$ *bir düzgün yüzey,* $p \in S$ *bir nokta,*

$$\sigma : U \to S, p \in \sigma(U)$$

olacak şekilde bir koordinat sistemi olsun.

$$X \in \chi(S), Y \in \chi(E^3)$$

olmak üzere

$$X = a^i e_i, Y = b^j e_j, 1 \leq i, j \leq 2$$

yazılabilir. Burada ve bundan sonra tekrar eden alt ve üst indisler için 1 *den* n *ye kadar toplam anlaşılacaktır. Bu durumda*

$$D_X Y = D_X(b^j e_j),$$

$$D_X Y = X[b^j]e_j + b^j D_X e_j,$$

$$D_X Y = a^i e_i[b^j]e_j + b^j D_{a^i e_i} e_j,$$

$$D_X Y = a^i e_i[b^j]e_j + b^j D_{a^i e_i} e_j,$$

$$D_X Y = a^i e_i[b^j]e_j + b^j a^i D_{e_i} e_j,$$

$$D_{e_i} e_j \in \chi(S)$$

olur.

Böylece $D_X Y$ vektör alanı $\chi(S)$ nin bazı cinsinden ifade edilebilir. O zaman,

$$D_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, i, j, k = 1, 2$$

eşitliğiyle tanımlı $\Gamma_{ij}^k : U \to R$ fonksiyonlarına σ koordinat sistemi için Christoffel sembolleri adı verilir (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.8 *(Jeodezik eğrilerin diferansiyel denklemi)*

$$\frac{d\alpha}{ds} = T(s) = (\frac{d\alpha_1}{ds}, \frac{d\alpha_2}{ds}, ..., \frac{d\alpha_n}{ds})$$

olmak üzere α jeodezik ise $D_T T = 0$ olacağından $D_X Y = a^i e_i[b^j]e_j + b^j a^i D_{e_i} e_j$ eşitliğinde

$$X = Y = T = \frac{d\alpha_i}{ds} e_i \mid_{\alpha(s)}$$

alınırsa, α nın jeodezik olmasına karşılık

$$\frac{d^2\alpha_k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha_i}{ds} \frac{d\alpha_j}{ds} = 0, i, j, k = 1, 2$$

diferansiyel denklemi elde edilir (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.9 *(Kısmi Türevli Denklem) Bir kısmi türevli denklem $x_1, x_2, ..., x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen u fonksiyonu ve onun sonlu sayıda kısmi türevlerinin oluşturduğu bir bağıntıdır. Bu denklemin en genel biçimi, $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$ olmak üzere*

$$F = \left(x_1, x_2, ..., x_n, u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}} \right) = 0 \tag{2.1}$$

dır. (2.1) denkleminde en yüksek kısmi türev basamağı k dır. k ya kısmi türevli denklemin basamağı (mertebesi) denir (Dernek 2009, s. 1).

Tanım 2.10 *(Fourier Dönüşümü) $f \in L^1(\mathbb{R})$ olmak üzere f fonksiyonun Fourier dönüşümü ve eşlenik Fourier dönüşümü sırasıyla*

$$\mathcal{F} f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx,$$

$$\bar{\mathcal{F}} f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} f(x) dx$$

şeklinde tanımlanır (Gasquet and Witomski 2013).

Yukarıdaki integral ancak ve ancak $f \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunda anlamlıdır. Çünkü

$$\left|e^{\pm 2i\pi\xi x}\right| = 1$$

dir. Ayrıca $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunda $\bar{\mathcal{F}}$ operatörü, $\mathcal{F}$'nin tersi olur, $(\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}})$.
O halde f ve $\widehat{f}$ fonksiyonları $L^1(\mathbb{R})$ uzayına ait olduğunda, hemen hemen her yerde

$$\bar{\mathcal{F}}\widehat{f}(t) = f(t)$$

yazılabilir. Fourier dönüşümü literatürde farklı şekillerde tanımlanır. Bütün tanımlamalar aşağıdaki formdadır:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{C}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ik\xi x} f(x)dx.$$

Burada C ve k sabit sayıları temsil etmektedir ve yukarıda $C = k = 2\pi$ olarak alınmıştır. Farklı kaynaklarda $C = 1$, $C = 2\pi$, $C = \sqrt{2\pi}$, $k = \pm 1$ ve $k = \pm 2\pi$ sayılarının çeşitli kombinasyonları kullanılır (Gonzalez-Velasco 1996).

Tanım 2.11 *(İntegrallenebilirlik) Eğer $f \in C^2(\mathbb{R})$ ve f, f', f'' fonksiyonları integrallenebilirse $\widehat{f}$ integrallenebilirdir (Gasquet and Witomski 1999).*

Teorem 2.1 *(Plancherel teoremi) $\mathbb{R}$' nin Lebesgue ölçümü sonsuz olduğundan $L^2(\mathbb{R})$ kümesi $L^1(\mathbb{R})$' nin alt kümesi değildir. Bu nedenle yukarıda verilen Fourier dönüşümü tanımı her $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonu için direkt olarak uygulanabilir değildir. Ancak eğer*

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

ise yukarıdaki tanımın kolayca uygulanabileceği açıktır. Ayrıca bu durumda $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ dir. Aslında

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

olup bu bağıntıya Plancherel dönüşümü adı verilir. Böylece L^2 uzayında f ve $\widehat{f}$ aynı rolü oynar (Rudin 1987).

Tanım 2.12 *(Riemann metriği) Bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir Riemann metriği; M nin her bir noktasını T_pM tanjant uzayı üzerindeki bir $< \, , >_p$ iç çarpımına (simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı) karşılık getiren bir eşlemedir:*

Eğer $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$; *p civarında*

$$x(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in x(U)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 1, ...0)$$

şartlarını sağlayan bir koordinat sistemi ise bu durumda

$$< \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) >_q = g_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

U üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyondur. Açıktır ki bu tanım koordinat sisteminin seçimine bağlı değildir. Riemann metriğinin diferansiyellenebilirliğini ifade etmenin başka bir yolu da şudur: M nin bir V komşuluğunda difarensiyellenebilir olan her X ve Y vektör alanı çifti için $< X, Y >$ *iç çarpımı V üzerinde diferansiyellenebilirdir.*
Eğer bir karışıklığa yol açmayacaksa genellikle $< \, , \, >_p$ *iç çarpımdaki p notasyonu yazılmaz.*

$$g_{ij}(= g_{ji})$$

gösterimi Riemann metriğinin $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *koordinat sistemindeki yerel temsilcisi olarak adlandırılır. Bir Riemann metriği ile verilen diferansiyellenebilir manifolda, Riemann manifoldu adı verilir.*
Tarihsel olarak Riemann geometrisi $\mathbb{R}^3$ *teki yüzeylerin diferansiyel geometrisinin doğal bir genelleştirilmesidir.* $S \subset \mathbb{R}^3$ *yüzeyi verildiğinde bu S ye teğet olan vektörlerin uzunluğunu ölçmek için doğal bir yöntem vardır. S nin bir p noktasında S ye teğet olan iki vektörün* $< v, w >$ *iç çarpımı basit olarak bu vektörlerin* $\mathbb{R}^3$ *teki iç çarpımıdır. Bir eğrinin uzunluğunu hesaplamak için yöntem; bu hız vektörünün uzunluğunun integralinin alınmasıdır.* $< \, , \, >$ *iç çarpımın tanımı bize; sadece S deki eğrilerin uzunluğunu ölçmeyi değil aynı zamanda S nin alanının hesaplanmasını ve iki eğri arasındaki açının bulunmasını da sağlar. Daha genel olarak bu kavramlar S üzerinde jeodezik adı verilen bazı özel eğrileri tanımlama imkanı sağlar. Bu eğriler aşağıdaki özelliğe sahiptir: Bir jeodezik üzerinde birbirine yeterince yakın p ve q noktaları verildiğinde böyle bir eğrinin uzunluğu p ve q yu birleştiren diğer eğrilerin uzunluğundan küçük veya eşittir. Bu eğriler bir çok durumda S nin doğrularıymış gibi davranırlar ve geometrinin geliştirilmesinde önemli bir*

rol oynarlar. Dikkat edilirse her bir $p \in S$ noktasındaki iç çarpım tanımı denk olarak S nin p noktasındaki birinci temel formu adı verilen

$$I_p(v) =< v, v >, \ v \in T_pS$$

tanjant uzayı ile tanımlı bir I_p kuadratik formunu ortaya çıkarır. Bu teorinin geliştirilmesinde kritik nokta Gauss' un 1827 yılında yayınlanmış eserinde verilmiştir. Bu çalışmada Gauss tarafından bir $p \in S$ noktasında p deki tanjant düzleminden S nin sapma miktarını ölçen yüzeyler için bir eğrilik kavramı tanımlanmıştır (Do Carmo 1976).

Teorem 2.2 *(Ortalama Değer Teoremi) $A \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $f : A \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $x, y \in A$ noktaları, bu noktaları birleştiren doğru parçası A' da kalacak şekilde iki nokta olsun.Bu durumda bu doğru parçası üzerinde bir c noktası,*

$$f(y) - f(x) = Df(c)(y - x)$$

olacak şekilde vardır (Marsden ve Hoffman 1993, s. 174).

Teorem 2.3 *(Taylor Teoremi) $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n, u \in C^{n+1}(\Omega)$ olsun.*

Ayrıca x, $y \in \Omega$ noktalarını birleştiren doğru parçası Ω içinde kalsın. Bu durumda bu doğru parçası üzerinde

$$u(y) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x)(y - x)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(\xi)(y - x)^\alpha$$

olacak şekilde bir ξ noktası vardır (Marsden ve Hoffman 1993, s. 359).

Teorem 2.4 *(Fubini Teoremi) Q_n ve Q_m sırasıyla n boyutlu ve m boyutlu sınırlı bölgeler olsun. Bir $f(x, y)$ fonksiyonu $Q_{m+n} = Q_m \times Q_n$ $(m + n)$ sınırlı bölgesinde ele alınsın ve $f(x, y)$ Q_{m+n} üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda $f(x, y)$; hemen hemen tüm $x \in Q_n$ için $y \in Q_m$' e göre ve hemen hemen tüm $y \in Q_m$ için $x \in Q_n$' e göre integrallenebilirdir. Ayrıca*

$$\int_{Q_m} f(x, y) \ \textit{ve} \int_{Q_n} f(x, y)$$

fonksiyonları sırasıyla $x \in Q_n$ ve $y \in Q_m$' e göre integrallenebilirdir ve

$$\int_{Q_{m+n}} f dx dy = \int_{Q_n} dx \int_{Q_m} f dy = \int_{Q_m} dy \int_{Q_m} f dx$$

eşitlikleri sağlanır (Mikhailov 1978, s. 56).

Teorem 2.5 *(Fredholm Alternatif Teoremi 1) A, bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde self-adjoint, lineer, kompakt operatör olsun. Aşağıdaki iki denklem ele alınsın:*

$$x = Ax + f, \qquad (I)$$

$$x = Ax. \qquad (H)$$

Burada (I) ve (H) denklemleri sırasıyla homojen olmayan ve homojen denklemleri göstersin.
i) *Eğer (H) denkleminin tek çözümü $x = 0$ ise bu durumda (I) her $f \in H$ için bir tek x çözümüne sahiptir.*
ii) *Eğer (H) denklemi sıfırdan farklı çözümlere sahip ve f, (H) denkleminin tüm çözümlerine dik ise (I) denklemi bir çözüme sahiptir. (I) denkleminin sonsuz çözüme sahip olduğu durumda, bu çözümlerin herhangi ikisinin farkı (H) denkleminin çözümüdür. Yani x ve y, (I) denklemini sağlıyorsa (x-y) de (H) denklemini sağlar (Griffel 2002, s. 257).*

Teorem 2.6 *(Fredholm Alternatif Teoremi 2) A, bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde bir kompakt operatör olsun. Aşağıdaki dört denklem ele alınsın:*

$$x = Ax + f, \qquad (I)$$

$$y = A^*y + g, \qquad (I^*)$$

$$x = Ax, \qquad (H)$$

$$y = A^*y. \qquad (H^*)$$

Burada f ve g , H'nın bilinen elemanlarıdır. O halde iki alternatif söz konusudur:
i) *(H) ve (H^*) denklemlerinin tek çözümü sıfırdır ve bu durumda (I) ve (I^*) her $f, g \in H$ için tek çözüme sahiptir.*
ii) *(H) ve (H^*) ın sıfırdan farklı çözümleri vardır. Bu durumda:*

f, (H^*) ın her çözümüne dik ise (I) bir çözüme sahiptir. Aynı şekilde g, (H) nın her çözümüne dik ise (I^*) bir çözüme sahiptir (Griffel 2002, s. 259).

2.2 HADAMARD ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER

İyi konulmuş problem tanımı 20. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi J. S. Hadamard tarafından verilmiştir. U ve F metrik uzaylar, $A : U \to F$ bir operatör olmak üzere

$$Au = f \qquad (2.2)$$

denklemi ele alınsın. (2.2) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir:

1) Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır.

2) Problemin çözümü U uzayında tektir.

3) Problemin koşulları F uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986).

Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme (U_2, F_2) uzay çifti için zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir.

Hadamard' a göre kötü konulmuş problemler, reel fiziksel anlamı olan pratik olayları tanımlamaz. Çünkü pratikte her zaman koşullar belirli bir hata payı ile verilir. Bu hatalı koşullar kullanılarak bulunan çözüm, kesin çözümden çok farklı olabilir ve bu da pratikte yanlış sonuçlara götürebilir. Bu nedenle bir çok matematikçi önceleri sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemler ile ilgilenmişti. Öte yandan birçok pratik problem de Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlere dönüşerek ister istemez matematikçilerin karşısına çıkıyordu. Hadamard' ın kendisinin örnek olarak gösterdiği kötü konulmuş problem, Laplace denklemi için Cauchy problemidir, bu da elektromanyetik alanların bulunması problemiyle ilgilidir. Ayrıca, diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin karakteristik özelliklerinden biri, bu problemlerin Hadamard anlamında kötü konulmuş olmalarıdır.

2.3 TIKHONOV ANLAMINDA İYİ VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER

İlk defa, bir Rus matematikçi olan A. N. Tikhonov, Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerin gerekliliğini ortaya koymuştur. (2.2) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine şartı iyi(doğru) konulmuş problem veya Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem denir:

1) U bir metrik uzay olmak üzere, problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ kümesine aittir.

2) Problemin çözümü M de tektir.

3) Problemin çözümü M de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M cümlesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir (Lavrent'ev et al. 1986). M kümesine problemin doğruluk kümesi denir ve M genellikle kompakt bir küme olarak seçilir.

BÖLÜM 3

GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONLAR

3.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYON

$C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir. Bu uzay, $D(\Omega)$ ile gösterilir. Eğer, bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır öyle ki

1) $Her\ k \in \mathbb{N}$ için $\text{supp}\varphi_k \in K$,

2) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ve $k \to \infty$ iken $D^\alpha_{\varphi_k(x)} \to D^\alpha_{\varphi(x)}$yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise, $k \to \infty$ için $\varphi_k \overset{D(\Omega)}{\to} \varphi$ yakınsar denir.

$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere, genelleştirilmiş fonksiyon denir. Genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1984).

3.2 DİRAC DELTA GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONU

Delta fonksiyonu genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisine daha sağlam bir teorik temel kazandırmak amacıyla Dirac tarafından 1930 yılında kuantum mekaniğinin matematiksel formülasyonunda teknik bir araç olarak geliştirilmiştir. Buradaki temel fikri şöyle açıklayabiliriz:

Bir tane düzgün olmayan kalınlıkta bir çubuk düşünelim. Bu çubuğun uzunluğu boyunca kütlesinin nasıl değiştiğini ifade etmek için yoğunluk kütle fonksiyonunun yani $\rho(x)$ in tanımlanması gerekir. Bu fiziksel olarak x noktasında çubuğun birim uzunluğundaki kütlesini ifade eder, matematiksel olarak da çubuğun a ile b arasında kalan kısmının toplam kütlesi

$$\int_a^b \rho(x)dx$$

ile verilir. Bu ifade sürekli kütle dağılımında tatmin edici bir tanımlamadır. Kütle merkezi veya eylemsizlik momenti $\rho(x)$ fonksiyonuna göre ifade edilebilir.

Eğer kütle, bu çubuğun tamamına sürekli bir şekilde dağılmak yerine sonlu sayıda noktada yoğunlaşmışsa biraz önce verilen tanım geçersiz sayılır. Örneğin; ortasında küçük fakat ağır bir boncuk asılı olan kütlesi ihmal edilebilir bir ip veya kolye düşünelim. Kabul edelim ki bu boncuk birim kütleye sahip olsun. Ve öyle küçük bir boncuk olsun ki bu boncuğu matematiksel olarak bir nokta ile gösterebilelim.
Eğer $x = 0$, (a, b) aralığının dışındaysa (a, b) aralığındaki toplam kütle sıfırdır. Eğer $x = 0$, (a, b) aralığında ise bu durumda toplam kütle 1 dir. Çünkü boncuğun kütlesi 1 br dir. Bu kütle dağılımını ifade edebilecek bir $\rho(x)$ fonksiyonu yoktur. Eğer olsaydı, $x \neq 0$ olduğunda $\rho(x) = 0$ olacaktı. Çünkü birim uzunluktaki kütle $x = 0$ dışında sıfırdı. Fakat eğer bir fonksiyon bir tek nokta dışında her yerde sıfır oluyorsa o zaman bu aralık üzerindeki integralin sıfır olması gerekir. Bu nedenle orijini içeren bu aralık üzerinde integralin alınması bize doğru cevabı vermez. Kütle dağlımı sürekli değil de noktasal olduğunda klasik integral yetersiz kalır. Fiziksel açıdan kütle yoğunluğu $x = 0$ dışında her yerde sıfırdır. Ancak $x = 0$ da kütle yoğunluğu sonsuzdur. Çünkü sonlu bir kütle sıfır uzunluğunda yoğunlaşmıştır. Çok küçük bir yerde pozitif olmasına rağmen bu integral sıfırdan farklıdır. Bu durum fiziksel olarak anlamlı, matematiksel olarak aykırı bir görüştür.
Bu nedenle Dirac aşağıdaki özelliklere sahip bir $\delta(x)$ fonksiyonu tanımlamıştır:

$$\begin{aligned} x &\neq 0 \text{ iken } \delta(x) = 0, \\ a &< 0 < b \text{ olmak üzere } \int_a^b \delta(x)dx = 1. \end{aligned}$$

Eğer δ fonksiyonu bir çubuktaki sürekli dağılımı ifade eden herhangi bir çalışmada kütle yoğunluk fonksiyonu olarak alınırsa bu durum noktasal parçacıktaki sonuçlara karşılık gelecektir. Dolayısıyla δ fonksiyonu kullanıldığında sürekli fonksiyon dağılımı ile ayrık dağılım içeren fiziksel olaylar birleştirilerek tek bir teoriyle açıklanabilecektir. Burada noktasal bir parçacık sürekli dağılımlar dizisinin bir limit noktası gibi ele alınabilir. $\delta(x)$ fonksiyonu benzer şekilde klasik fonksiyonlar dizisinin limiti olarak düşünülebilir. Örneğin

$$d_n(x) = n/\left[\pi(1 + n^2x^2)\right]$$

olarak tanımlanırsa

$$x \neq 0 \text{ ve } n \to \infty \text{ iken } d_n(x) \to 0$$

$x = 0$ ve $n \to \infty$ iken $d_n(0) \to \infty$

olur. Ayrıca

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_n(x)dx = 1$$

olacaktır. Eğer

$$n \to \infty \text{ iken } a < 0 < b \text{ ise } \int_{a}^{b} d_n(x) \to 1$$

olur.

Delta fonksiyonunu kullanan birçok fizikçi, mühendis veya uygulamalı matematikçi yukarıdaki tanımı kullanmıştır. Soyut matematikçilere göre ise Dirac' ın tanımlaması biraz sorunlu bir durumdu. Ancak matematiksel olarak işe yaradığı ve faydalı sonuçlar verdiği de bilinmekteydi. Bu nedenle $\delta(x)$ in doğru yere oturtulabileceği bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur.

Bu teorinin temeli Sobolev tarafından 1936 yılında ve Schwartz tarafından 1950' lerde oluşturulmuştur. Onların geliştirdiği genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi klasik analiz içerisinde de uygulama alanı bulmuş ve hatta bazı açılardan çeşitli avantajlar sağlamıştır. Örneğin; her genelleştirilmiş fonksiyon diferansiyellenebilirdir. Düzgün yakınsaklık durumları gözardı edilerek her seri terim terim diferansiyellenebilir ve integrallenebilirdir. Ama bu teorinin bazı sınırları da vardır. Yani Dirac delta genelleştirilmiş fonksiyonu ile neler yapılamaz? Mesela Dirac delta genelleştirilmiş fonksiyonu kendisi ile çarpılamaz veya sürekli olmayan fonksiyon ile çarpılamaz. Diğer bir dezavantajı ise bir dizi formal işlemlerin yapılması gerekmektedir. Dirac delta genelleştirilmiş fonksiyonunu içerecek şekilde bir genelleştirilmiş fonksiyon kavramının farklı şekillerde tanımının verilmesi mümkündür. Burada Schwartz' ın yöntemi kullanılacaktır. Schwartz bu tarz fonksiyonları dağılımlar diye adlandırmıştır. Buradaki temel fikir Dirac'ın delta genelleştirilmiş fonksiyonu fikrinin bir teoriye oturtulmasıdır. Herhangi bir aralık verildiğinde bir kütle yoğunluk fonksiyonu bu aralığın kütlesini hesaplama imkanı verir. Daha genel olarak ϕ ağırlık fonksiyonu verildiğinde kütlenin ortalama ağırlığının hesaplanmasını sağlar. Örneğin; yer çekim merkezlerinin hesaplanmasında olduğu gibi (Griffel 2002, s. 13).

3.3 GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREV

$f \in D'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^\alpha f$ (genelleşmiş) türevi,

$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi), \ \varphi \in D(\Omega)$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1984, s. 94).

BÖLÜM 4

İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

$D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ basit bağlantılı, kapalı ve sınırlı bir bölge olsun. D bölgesinin bir $g \in C^6(D)$ metriğine göre konveks olduğunu yani her x, $y \in D$ noktası için g metriğinin bu noktaları birleştiren ve D de bulunan bir tek $\Gamma(x, y)$ jeodeziğinin varlığını kabul edelim. Ayrıca D nin sınırı C^5 sınıfından olsun.

Problem 4.1 *Her $(x, y) \in \partial D \times \partial D$ nokta çifti için değeri bilinen*

$$\int_{\Gamma(x,y)} \left(\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(\xi(x, y, t))\dot{\xi}^{i}(x, y, t)\dot{\xi}^{j}(x, y, t) \right) dt, \tag{4.1}$$

integralinden D bölgesinde a_{ij} $(2 \leq i, j \leq n)$ fonksiyonlarının belirlenmesi problemi ele alınacaktır.

Bu çalışma boyunca

$\mathbb{R}_0^n := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $\mathbb{R}_0^{n-1} := \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$,

$C_0^5(D) = \{a \in C^5(D) |\, \operatorname{supp} a \subset D\}$.

gösterimleri kullanılacaktır. Bu bölümde aşağıdaki teoremin ispatı tartışılacaktır.

Teorem 4.1 *D bölgesi $g \in C^6(D)$ metriğine göre konveks olsun. Ayrıca $a_{ij} \in C_0^5(D)$ ve $g_{11} = 1$, $g_{1i} = 0$, $2 \leq i$, $j \leq n$ şartları sağlansın. Bu durumda Problem 4.1 en çok bir $a_{ij} \in C_0^5(D)$, $2 \leq i$, $j \leq n$, çözümüne sahiptir.*

Bilindiği gibi g metriğine göre konveks olan herhangi bir D bölgesi için, bu bölgede g ye göre bir yarı-jeodezik koordinat sistemi tanımlanabilir. Ayrıca, yarı-jeodezik x^i koordinat sisteminde, $g = (g_{ij})$ metriğinin bileşenleri aşağıdaki koşulları sağlar:

$g_{11} = 1, g_{1i} = 0, 2 \leq i \leq n.$

Tersine, bu koşullar x^i koordinat sisteminin D deki g metriği için yarı- jeodezik olması için yeterlidir (Raschewski 1959, s. 450). Yarı-jeodezik koordinatların kullanıldığı en önemli alanlardan biri izafiyet teorisidir (Petrov 1969).

4.1 BAZI YARDIMCI LEMMALAR

Bu bölümde, ele alınan integral geometri probleminin çözümünün tekliğini incelemek için gerekli olan ve Amirov (2005) de verilen bazı yardımcı lemmalar ve ispatları sunulacaktır. Bu amaçla

$$I_{ij}(x,\xi) = \int_{\gamma(x,\xi)} b\left(z\left(x,\xi,t\right)\right) \dot{z}^i\left(x,\xi,t\right) \dot{z}^j\left(x,\xi,t\right) dt,\ 2 \leq i,j \leq n, \tag{4.2}$$

formunda bir yardımcı fonksiyon tanımlayalım. (4.2) de $b \in C^5(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun D bölgesinin dışında sıfır olduğu kabul edilsin. Ayrıca $\gamma\left(x,\xi\right) = \left(z^1\left(x,\xi,t\right),...,z^n\left(x,\xi,t\right)\right)$ nın aşağıda verilen (4.3)-(4.4) Cauchy probleminin bir çözümü olduğu bilinmektedir:

$$\frac{d^2 z^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk}(z)\dot{z}^j\dot{z}^k,\ 1 \leq i \leq n, \tag{4.3}$$

$$z(0) = x,\ \dot{z}(0) = \xi. \tag{4.4}$$

Burada Γ^i_{jk} fonksiyonları g metriğinin Christoffel sembolleridir ve

$$\begin{aligned} z\left(x,\xi,t\right) &= \left(z^1\left(x,\xi,t\right),...,z^n\left(x,\xi,t\right)\right), \\ \dot{z}\left(x,\xi,t\right) &= \left(\dot{z}^1\left(x,\xi,t\right),...,\dot{z}^n\left(x,\xi,t\right)\right),\ \dot{z}^i = \frac{d}{dt}z^i, \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca (4.3)-(4.4) probleminin çözümü aşağıdaki özelliklere sahiptir, (Do Carmo, 1992):

$$z\left(x,\xi,t\right) = z\left(x,\nu,\left|\xi\right|t\right);\ \dot{z}\left(x,\xi,t\right) = \left|\xi\right|\dot{z}\left(x,\nu,\left|\xi\right|t\right) \tag{4.5}$$

Burada $\nu = \xi/\left|\xi\right|$ ve $\left|\xi\right|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}\xi^i\xi^j$ şeklinde tanımlanmıştır. (4.5) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa, (4.2) ifadesi

$$\begin{aligned} I_{ij}(x,\xi) &= \int_0^\infty b\left(z\left(x,\xi,t\right)\right)\dot{z}^i\left(x,\xi,t\right)\dot{z}^j\left(x,\xi,t\right)dt \\ &= \int_0^\infty b\left(z\left(x,\nu,\left|\xi\right|t\right)\right)\left|\xi\right|\dot{z}^i\left(x,\nu,\left|\xi\right|t\right)\left|\xi\right|\dot{z}^j\left(x,\nu,\left|\xi\right|t\right)dt \\ &= \frac{1}{\left|\xi\right|}\int_0^\infty b\left(z\left(x,\nu,\tau\right)\right)\left|\xi\right|\dot{z}^i\left(x,\nu,\tau\right)\left|\xi\right|\dot{z}^j\left(x,\nu,\tau\right)d\tau \end{aligned} \tag{4.6}$$

formunda yazılabilir. Sadelik açısından (4.2) de, $i,\ j \in \{2,...,n\}$ indislerini sabitledikten sonra

$$I(x,\xi) := I_{ij}(x,\xi)$$

olarak alınabilir.

Ayrıca burada türevler için

$$\begin{aligned}
\partial_{x^s} &= \frac{\partial}{\partial x_s},\ \partial_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta},\ \partial_{\xi^j} = \frac{\partial}{\partial \xi^j}, \\
\partial_\xi^\beta &= \partial_{\xi^1}^{\beta_1} \cdots \partial_{\xi^n}^{\beta_n},\ |\beta| = \beta_1 + ... + \beta_n, \\
\partial_{\xi'}^{\beta'} &= \partial_{\xi^2}^{\beta_2} \cdots \partial_{\xi^n}^{\beta_n},\ |\beta'| = \beta_2 + ... + \beta_n
\end{aligned}$$

gösterimleri kullanılacaktır.

Lemma 4.1 *D bölgesi $g = (g_{ij}) \in C^6(D)$ metriğine göre konveks olsun ve g* metriği

$$g_{11} = 1,\ g_{1i} = 0,\ 2 \le i \le n$$

özelliklerini sağlasın. Bu durumda;

(i) $\partial_\xi^\beta I_{ij},\ \partial_\xi^\beta \partial_{x^s} I_{ij} \in C(\Omega),\ 0 \le |\beta| \le 4,$

(ii) *Sabitlenmiş $x \in D$ ve $\xi' \in G'$ $(\xi' \neq 0)$ için,*

(a) $\partial_\xi^\beta I_{ij},\ \partial_\xi^\beta \partial_{x^s} I_{ij} \in L_2\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right),\ |\beta| \le 2,$

(b) $\partial_\xi^\beta I_{ij},\ \partial_\xi^\beta \partial_{x^s} I_{ij} \in L_1\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right),\ |\beta| = 3,$

(c) $\xi^1 \partial_\xi^\beta I_{ij},\ \xi^1 \partial_\xi^\beta \partial_{x^s} I_{ij} \in L_1\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right),\ |\beta| = 4, 1 \le s \le n,\ 2 \le i,j \le n$

durumları sağlanır.

Uyarı 4.1 *Burada dikkat edilmesi gereken husus Lemma 4.1' in (4.6) deki i veya j indislerinden en az birinin 1' e eşit olması durumunda geçerli olmadığıdır.*

Gerçekten de:

(i) $\xi^1 \to \pm\infty$ iken $\dot{z}^1(x,\nu,t) \to \dot{z}^1(x,\pm\nu^0,t) = \pm 1$ olduğundan $\left|\xi^1 \dot{z}^1(x,\nu,t)\right|$ fonksiyonu $\xi^1 \to \infty$ iken $\left|\xi^1\right|$ gibi artar,

(ii) (4.6) integrali sonlu bir $[0, d_0]$ aralığında alınır, burada d_0, $g = (g_{ij}(x))$ metriğine göre D nin çapıdır.

(iii) $\left| \ |\xi| \ \dot{z}^k (x, \nu, t) \right| \leq K_1$ dir.

Tüm bu nedenlerden dolayı (4.6) den, eğer i, j indislerinden sadece biri 1' e eşitse, $I_{ij}(x, \xi)$ sadece Ω kümesinde sınırlıdır. Buna rağmen $|I_{11}(x, \xi)|$ fonksiyonu herhangi sabitlenmiş bir $(x, \xi') \in D \times G'$ için $\xi^1 \to \infty$ iken, $\left|\xi^1\right|$ gibi artar.

Lemma 4.1'in İspatı:

(4.6) daki son integralin sonlu $[0, d_0]$ aralığında olduğu kabul edilmektedir. $g_{ij} \in C^6(D)$ koşulundan, (4.3)-(4.4) probleminin $z(x, \nu, t)$ çözümü kısmi türevli denklemler teorisinden $C^5(\Omega(d_0))$ uzayına aittir. Burada

$$\Omega(d_0) = \{(x, \nu, t) \, | x \in D, \ \nu \in S^n(x), \ t \in [0, d_0]\}$$

şeklinde tanımlanmış olup $S^n(x)$, $x \in D$ civarında g metriğine göre birim küreyi ifade etmektedir. Böylece $b \in C^5(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in G$, $\xi' \neq 0$ koşulları ve (4.6) eşitliği hesaba katılırsa, $0 \leq |\beta| \leq 4$, $1 \leq s \leq n$ için

$$\partial_\xi^\beta I, \ \partial_\xi^\beta \partial_{x^s} I \in C(\Omega)$$

olur.

Diğer taraftan Lemma 4.1' in ikinci iddiasını ispatlamak için

$$|\xi| \, \dot{z}^k (x, \nu, \tau)$$

ifadesinin ve onun ξ^j ye göre türevlerinin davranışını $\xi^1 \longrightarrow \infty$ iken araştırmak gerekir. Bunun için $\xi^1 = \frac{1}{\mu}$ olsun. Bu durumda $\xi^1 \longrightarrow +\infty$ yani $\mu \longrightarrow +0$ için $\nu = \frac{\xi}{|\xi|} \in S^n(x)$ vektörü $\nu^0 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ vektörüne yakınsar. Bu nedenle kısmi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, (4.3)-(4.4) probleminin tek çözümü $\mu \longrightarrow +0$ iken $C^2[0, d_0]$ da $z(x, \nu^0, t)$ ye yakınsar (Petrovski 1966). $g = (g_{ij})$ metriği yarı-jeodezik koordinatlarda verildiğinden $\Gamma^1_{1s} = \Gamma^s_{11} = 0$, $1 \leq s \leq n$ ve (4.3)-(4.4) probleminin çözümü tek olduğundan

$$z\left(x, \nu^0, t\right) = \left(z^1\left(x, \nu^0, t\right), ..., z^n\left(x, \nu^0, t\right)\right)$$

olur. Burada

$$z^1\left(x, \nu^0, t\right) = x^1 + t, \ z^k\left(x, \nu^0, t\right) = x^k, \ \dot{z}\left(x, \nu^0, t\right) = (1, 0, \cdots, 0), \ \dot{z}^1\left(x, \nu^0, t\right) = 1,$$

$$\dot{z}^k\left(x,\nu^0,t\right)=0,\ 2\le k\le n$$

dir.

Diğer taraftan $\xi^1=\frac{1}{\mu}>0$ için

$$|\xi'|_\mu=\left(1+\mu^2\sum_2^n g_{ij}\xi^i\xi^j\right)^{1/2}$$

olmak üzere

$$|\xi|\,\dot{z}^k\left(x,\frac{\xi^1}{|\xi|},\cdots,\frac{\xi^n}{|\xi|},t\right)=\frac{1}{\mu}\,|\xi'|_\mu\,\dot{z}^k\left(x,\frac{1}{|\xi'|_\mu},\frac{\mu\xi^2}{|\xi'|_\mu},\cdots,\frac{\mu\xi^n}{|\xi'|_\mu},t\right),\tag{4.7}$$

dir. Böylece eğer $x\in D$, $(\xi^2,...,\xi^n)\in G'$, $t\in[0,d_0]$ sabitlenirse, bu durumda

$$\dot{z}^k\left(x,\frac{1}{|\xi'|_\theta},\frac{\theta\xi^2}{|\xi'|_\theta},\cdots,\frac{\theta\xi^n}{|\xi'|_\theta},t\right)$$

fonksiyonuna $[0,\mu]$ aralığında θ ya göre ortalama değer teoremi uygulandığında,

$$z^k\left(x,\nu^0,t\right)=0,\ 2\le k\le n$$

eşitliğinden,

$$\dot{z}^k\left(x,\frac{1}{|\xi'|_\mu},\frac{\mu\xi^2}{|\xi'|_\mu},\cdots,\frac{\mu\xi^n}{|\xi'|_\mu},t\right)=\mu\partial_{\mu_0}\dot{z}^k,\ 0<\mu_0<\mu\le 1,\ 2\le k\le n\tag{4.8}$$

elde edilir, burada $\partial_{\mu_0}\dot{z}^k$;

$$\dot{z}^k\left(x,\frac{1}{|\xi'|_\theta},\frac{\theta\xi^2}{|\xi'|_\theta},\cdots,\frac{\theta\xi^n}{|\xi'|_\theta},t\right)$$

fonksiyonunun $\theta=\mu_0$ noktasında θ ya göre türevidir.

Ayrıca $\dot{z}^k(x,\nu,t)\in C^5(\Omega(d_0))$ ve $\left(\frac{1}{|\xi'|_\mu},\frac{\mu\xi^2}{|\xi'|_\mu},\cdots,\frac{\mu\xi^n}{|\xi'|_\mu}\right)\in S^n(x)$ olduğundan

$$\partial_\mu\dot{z}^k\left(x,\frac{1}{|\xi'|_\mu},\frac{\mu\xi^2}{|\xi'|_\mu},\cdots,\frac{\mu\xi^n}{|\xi'|_\mu},t\right)$$

fonksiyonu $\Omega(d_0)$ üzerinde sınırlıdır. $\Omega(d_0)$ kapalı ve sınırlı bir kümedir. O halde (4.7) ve (4.8) bağıntılarından, $\xi^1\longrightarrow+\infty$ iken $\nu=\frac{\xi}{|\xi|}\in S^n(x)$ vektörü $\nu^0=(1,0,...,0)\in\mathbb{R}^n$ vektörüne yakınsadığından Ω kümesinde

$$\left|\ |\xi|\ \dot{z}^k(x,\nu,t)\right|\le K_1,\ 2\le k\le n\tag{4.9}$$

elde edilir, burada $K_1>0$, $(x,\xi)\in D\times G$ den bağımsızdır fakat $\dot{z}(x,\nu,t)$ vektör fonksiyonunun $C^1(\Omega(d_0))$ uzayına göre normuna ve G' kümesinin çapına bağlıdır.

Yukarıdaki yolla son eşitsizlik $\xi^1 \longrightarrow -\infty$ durumu için de gösterilebilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi^1}(|\xi|) &= \frac{\xi^1}{|\xi|},\ \partial^2_{\xi^1}(|\xi|) = \frac{1}{|\xi|} - \frac{\left(\xi^1\right)^2}{|\xi|^3}, \partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}(|\xi|) = -\frac{\sum\limits_{r=2}^{n} g_{ri}\xi^r\xi^1}{|\xi|^3}, \\
\partial_{\xi^i}(|\xi|) &= \frac{\sum\limits_{r=2}^{n} g_{ri}\xi^r}{|\xi|},\ \partial_{\xi^j}\partial_{\xi^i}(|\xi|) = \frac{g_{ji}}{|\xi|} - \frac{\sum\limits_{r=2}^{n} g_{rj}\xi^r \sum\limits_{r=2}^{n} g_{ri}\xi^r}{|\xi|^3}
\end{aligned}$$

eşitliklerini gözönünde bulundurarak

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi^1}\left(|\xi|\,\dot z^k\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}, t\right)\right) &= \frac{\xi^1}{|\xi|^2}\left(|\xi|\,\dot z^k\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}, t\right)\right) \\
&\quad + |\xi|\left(-\sum_{j=1}^{n}\partial_{\nu^j}\dot z^k\frac{\xi^j\xi^1}{|\xi|^3} + \frac{1}{|\xi|}\partial_{\nu^1}\dot z^k\right), \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_{\xi^i}\left(|\xi|\,\dot z^k\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}, t\right)\right) = \frac{1}{|\xi|^2}\sum_{j=2}^{n} g_{ij}\xi^j\left(|\xi|\,\dot z^k\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}, t\right)\right) \\
&+ |\xi|\left(-\sum_{s=1}^{n}\left(\partial_{\nu^s}\dot z^k\right)\frac{1}{|\xi|^3}\xi^s\sum_{j=2}^{n} g_{ij}\xi^j + \frac{1}{|\xi|}\partial_{\nu^i}\dot z^k\right), \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2_{\xi^1}\left(|\xi|\,\dot z^k\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}, t\right)\right) &= \frac{1}{|\xi|}\dot z^k - \frac{(\xi^1)^2}{|\xi|^3}\dot z^k - \sum_{j=2}^{n}\frac{\xi^j}{|\xi|^2}\partial_{\nu^j}\dot z^k - 2\frac{\xi^1}{|\xi|^2}\partial_{\nu^1}\dot z^k \\
&\quad + 2\xi^1\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi^j\xi^1}{|\xi|^4}\partial_{\nu^j}\dot z^k + \frac{\xi^1}{|\xi|^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{-\xi^j\xi^1}{|\xi|^2}\partial_{\nu^j}\dot z^k + \partial_{\nu^1}z^k\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\frac{\xi^j\xi^1}{|\xi|^3}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi^i\xi^1}{|\xi|^2}\partial_{\nu^i}\partial_{\nu^j}\dot z^k - \partial_{\nu^j}\partial_{\nu^1}\dot z^k\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n}\frac{\xi^j\xi^1}{|\xi|^3}\partial_{\nu^1}\partial_{\nu^j}\dot z^k + \frac{1}{|\xi|}\partial^2_{\nu^1}\dot z^k, \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}\left(|\xi|\,\dot z^k\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}, t\right)\right) &= -\frac{\xi^1}{|\xi|^3}\left(\sum_{j=2}^{n} g_{ij}\xi^j\right)\dot z^k - \left(\sum_{j=1}^{n}\dot z^k_{\nu^j}\frac{\xi^j\xi^1}{|\xi|^4}\right)\left(\sum_{j=2}^{n} g_{ij}\xi^j\right) \\
&\quad + \dot z^k_{\nu^i}\frac{\xi^1}{|\xi|^2} + 2\left(\sum_{j=1}^{n}\dot z^k_{\nu^j}\xi^j\xi^1\right)\left(\frac{1}{|\xi|^4}\sum_{j=2}^{n} g_{ij}\xi^j\right) \\
&\quad - \dot z^k_{\nu^i}\frac{\xi^1}{|\xi|^2} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\xi^j\xi^1}{|\xi|^3}\left(\sum_{m=1}^{n}\dot z^k_{\nu^j\nu^m}\frac{1}{|\xi|^2}\xi^m\sum_{s=2}^{n} g_{is}\xi^s - \dot z^k_{\nu^i\nu^j}\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n}\dot z^k_{\nu^j\nu^1}\frac{1}{|\xi|^3}\xi^j\sum_{j=2}^{n} g_{ij}\xi^j + \frac{1}{|\xi|}\dot z^k_{\nu^i\nu^1}, \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

$2 \leq i \leq n$, $\nu = \frac{\xi}{|\xi|}$ ve

$$\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^j}\left(|\xi|\,\dot{z}^k\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}, t\right)\right) = \frac{g_{ij}}{|\xi|}\dot{z}^k - \frac{1}{|\xi|^3}\left(\sum_{r=2}^{n} g_{jr}\xi^r\right)\left(\sum_{r=2}^{n} g_{ir}\xi^r\right)\dot{z}^k$$
$$-\frac{1}{|\xi|^2}\left(\sum_{r=2}^{n} g_{jr}\xi^r\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\left(\partial_{\nu^s}\dot{z}^k\right)\frac{1}{|\xi|^2}\left(\xi^s\sum_{r=2}^{n} g_{ir}\xi^r\right) - \partial_{\nu^i}\dot{z}^k\right)$$
$$-\left(\partial_{\nu^i}\dot{z}^k\right)\frac{1}{|\xi|^2}\left(\sum_{r=2}^{n} g_{jr}\xi^r\right) - \sum_{s=1}^{n}\left(\partial_{\nu^s}\dot{z}^k\right)\frac{\xi^s g_{ij}}{|\xi|^2}$$
$$+\frac{2}{|\xi|^4}\left(\sum_{r=2}^{n} g_{jr}\xi^r\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\left(\partial_{\nu^s}\dot{z}^k\right)\xi^s\left(\sum_{r=2}^{n} g_{jr}\xi^r\right)\right)$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{|\xi|^3}\xi^s\left(\sum_{r=2}^{n} g_{ir}\xi^r\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\left(\partial_{\nu^m}\partial_{\nu^s}\dot{z}^k\right)\frac{1}{|\xi|^2}\xi^m\sum_{r=2}^{n} g_{ir}\xi^r - \partial_{\nu^s}\partial_{\nu^i}\dot{z}^k\right)$$
$$-\frac{1}{|\xi|^3}\left(\sum_{r=2}^{n} g_{ir}\xi^r\right)\sum_{m=1}^{n}\xi^m\partial_{\nu^m}\partial_{\nu^j}\dot{z}^k + \frac{1}{|\xi|}\partial_{\nu^j}\partial_{\nu^i}\dot{z}^k, \tag{4.14}$$

elde edilir, burada $2 \leq i,\ j \leq n$ dir. $\dot{z}^k \in C^5(\Omega(d_0))$ ve G' cümlesi kapalı ve sınırlı olduğundan, (4.9)-(4.14)' den Ω üzerinde

$$\left||\xi|^{|\alpha|-1}\partial_\xi^\alpha\left(|\xi|\,\dot{z}^k\right)\right| \leq K_2,\ 1 \leq |\alpha| \leq 4 \tag{4.15}$$

elde edilir, burada $K_2 > 0$, $(x, \xi) \in (D \times G)$' den bağımsızdır.

Yukarıda K_2 ifadesi $\dot{z}(x, \nu, t)$ vektör fonksiyonunun $C^5(\Omega(d_0))$ uzayındaki normuna ve G' kümesinin çapına bağlıdır. Ayrıca aşağıdaki eşitsizlikler Ω da geçerlidir:

$$\left||\xi|^{|\alpha|+1}\partial_\xi^\alpha\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right| \leq K_3,\ \left||\xi|^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha\left(b(z)\right)\right| \leq K_4,\ 0 \leq |\alpha| \leq 4. \tag{4.16}$$

Burada K_3 ve K_4, (4.15) daki K_2 ile aynı parametrelere bağlıdır.

Sonuç olarak bir integralin bir parametreye göre diferansiyeli,

$$|\xi|\,\dot{z}^k, \partial_{\xi^j}\left(|\xi|\,\dot{z}^k\right)$$

fonksiyonlarının sınırlılığı ve (4.15) - (4.16) ilişkileri kullanılarak Lemma 4.1' in ikinci iddiasının ispatı tamamlanır.

Lemma 4.2 *Lemma 4.1' in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda*

(i) $\partial_{\xi'}^{\beta'}\widehat{I}_{ij},\ \partial_{\xi'}^{\beta'}\partial_{x^s}\widehat{I}_{ij} \in C\left(D \times \Delta_\eta^\rho \times G'\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_\eta^1\right)$, $|\beta'| \leq 2$,

(ii) $\partial_{\xi'}^{\beta'}\widehat{I}_{ij},\ \partial_{\xi'}^{\beta'}\partial_{x^s}\widehat{I}_{ij} \in C\left(D \times \mathbb{R}_\eta^1 \times G'\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_\eta^1\right)$, $|\beta'| = 3$,

(iii) $\eta^r \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta \widehat{I}_{ij},\ \eta^r \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta \partial_{x^s} \widehat{I}_{ij} \in C\left(D \times \mathbb{R}_\eta^1 \times G'\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_\eta^1\right),$

$r + |\beta'| = 4,\ 0 \leq r \leq 4$ *olup* $1 \leq s \leq n$ *ve* $2 \leq i, j \leq n$

özellikleri geçerlidir.

Lemma 4.2'nin İspatı:

Lemma 4.1'in (c) şıkkından, belirlenmiş $x \in D$ ve $\xi' \in G'$ $(\xi' \neq 0)$ için,

$$\xi^1 \partial_{\xi^1}^r \left(\partial_{\xi'}^{\beta'} I\right),\ \xi^1 \partial_{\xi^1}^r \left(\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} I\right) \in L_1\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right), \quad r + |\beta'| = 4,\ 0 \leq r \leq 4$$

yazılabilir. Bu durumda (4.9)-(4.14) bağıntıları ve Fourier dönüşümünün özelliklerinden

$$\eta^r \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta \widehat{I},\ \eta^r \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta \partial_{x^j} \widehat{I} \in C\left(D \times \mathbb{R}_\eta^1 \times G'\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_\eta^1\right) \tag{4.17}$$

elde edilir, burada $r + |\beta'| = 4,\ 0 \leq r \leq 4$, yani, Lemma 4.2' nin (iii) şıkkı ispatlanmış olur.

Lemma 4.2' nin ikinci iddiası, Lemma 4.1' in (i) ve (ii-b)' si kullanılarak ispatlanır.

Lemma 4.1' in (i) ve (ii-c) şıklarından $r + |\beta'| = 4$, $0 \leq r \leq 4$, $x \in D$ ve $\xi' \neq 0$, $\xi' \in G'$ için

$$\partial_{\xi^1}^r \left(\partial_{\xi'}^{\beta'} I\right),\ \partial_{\xi^1}^r \left(\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} I\right) \in L_1\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_{\xi^1}^1\right)$$

yazılabilir. Son elde edilenler ve Lemma 4.1' in (i) şıkkı

$$\eta^r \partial_{\xi'}^{\beta'} \widehat{I},\ \eta^r \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \widehat{I} \in C\left(D \times \mathbb{R}_\eta^1 \times G'\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}_\eta^1\right) \tag{4.18}$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak $|\beta'| \leq 4$ için,

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} \widehat{I},\ \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \widehat{I} \in C\left(D \times \Delta_\eta^\rho \times G'\right) \tag{4.19}$$

elde edilir. Lemma 4.2' nin ilk iddiası, Lemma 4.1' in (ii-a)'sı, (4.18) ve (4.19) dan elde edilir.

4.2 İNTEGRAL GEOMETRİ PROBLEMİNİN BİR TERS PROBLEME İNDİRGENMESİ

Ele alınan integral geometri problemini kinetik denklem için bir ters probleme indirgemek için aşağıdaki yardımcı fonksiyon tanımlayalım:

$$u(x, \xi) = \sum_{i,j=2}^{n} \int_{\gamma(x,\xi)} a_{ij}\left(z\left(x, \xi, t\right)\right) \dot{z}^i\left(x, \xi, t\right) \dot{z}^j\left(x, \xi, t\right) dt. \tag{4.20}$$

Burada $\gamma(x,\xi)$, $g=(g_{ij})$ metriğinin, $x\in D$ noktasından başlayıp $\xi\in\mathbb{R}_0^n$ vektörü yönünde devam eden bir ışınıdır. Ayrıca $a_{ij}\in C_0^5(D)$' dir.
G' kümesi $\xi'=(\xi^2,...,\xi^n)$ değişkenlerinin kapalı ve sınırlı bir kümesi ve $0\notin G'$ olmak üzere

$$G=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n \mid \xi=(\xi^1,\xi'),\ \xi^1\in\mathbb{R}^1,\ \xi'\in G'\right\},$$

$$\Omega=\{(x,\xi)|x\in D,\ \xi\in G\}$$

kümeleri tanımlansın.

Uyarı 4.2 *$u(x,\xi)$ fonksiyonu I_{ij} formundaki fonksiyonların toplamı olarak ifade edildiğinden Lemma 4.1 ve Lemma 4.2; $u(x,\xi)$ için de geçerlidir. Diğer taraftan, Uyarı 4.1 de ifade edilen nedenlerle, eğer*

$$u(x,\xi)=\sum_{i,j=2}^{n}\int_{\gamma(x,\xi)}a_{ij}\left(z\left(x,\xi,t\right)\right)\dot{z}^{i}\left(x,\xi,t\right)\dot{z}^{j}\left(x,\xi,t\right)dt$$

eşitliğinin sağ tarafı

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\gamma(x,\xi)}a_{ij}\left(z\left(x,\xi,t\right)\right)\dot{z}^{i}\left(x,\xi,t\right)\dot{z}^{j}\left(x,\xi,t\right)dt,$$

eşitliği ile yer değiştirirse, bu durumda verilen lemmalar geçerli olmaz.

(4.20) eşitliğinin her iki tarafının x noktasında ξ yönünde türevi alınır ve (4.3), (4.4) bağıntıları kullanılırsa

$$\sum_{j=1}^{n}\xi^j\frac{\partial u}{\partial x^j}-\sum_{j,k,s=1}^{n}\Gamma_{jk}^{s}(x)\xi^k\xi^j\frac{\partial u}{\partial\xi^s}=\sum_{j,k=2}^{n}a_{jk}(x)\xi^k\xi^j \tag{4.21}$$

kinetik denklemi elde edilir. Ayrıca Problem 4.1' in ifadesi, (4.20), (4.5) eşitlikleri ve $a_{jk}(x)$ fonksiyonlarının D bölgesinin dışında sıfır olması dikkate alınırsa, $u(x,\xi)$ fonksiyonunun $(x,\xi)\in\partial D\times\mathbb{R}_0^n$ için bilindiği görülür. Böylece Problem 4.1' in çözümünün tekliğinin araştırılması meselesi, aşağıdaki problemin çözümünün tekliğinin araştırılmasına indirgenir:

Problem 4.2 *$u(x,\xi)$ fonksiyonunun $(x,\xi)\in\partial D\times\mathbb{R}_0^n$ için bilindiği kabul edilerek (4.21) denkleminden (a_{jk}), $(2\le j,k\le n)$ matris değerli fonksiyonunun belirlenmesi problemi ele alınacaktır.*

Problem 4.2' nin çözümünün tekliğini Fredholm alternatif teoremi yardımı ile ispatlamak için

$$u(x,\xi)=0,\ (x,\xi)\in\partial D\times\mathbb{R}_0^n \tag{4.22}$$

homojen sınır koşulu alınır.

4.3 PROBLEM 4.2' YE FOURİER DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULANMASI

Bir $I(x,\xi)\in L_1\left(\mathbb{R}^1_{\xi^1}\right)$ fonksiyonunun ξ^1 değişkenine göre Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\left\{I(x,\xi)\right\}=\widehat{I}\left(x,\eta,\xi'\right):=\int_{-\infty}^{\infty}I\left(x,\xi^1,\xi'\right)e^{-\sqrt{-1}\xi^1\eta}d\xi^1$$

olarak tanımlansın. Burada η, ξ^1 in dual değişkenidir. Ayrıca $\rho=-1,1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Delta^\rho_\eta\ &:=\left\{\eta\in\mathbb{R}^1_\eta \mid \rho\eta>0\right\},\\ \overline{\Delta}^\rho_\eta\ &:=\left\{\eta\in\mathbb{R}^1_\eta \mid \rho\eta\geq 0\right\}\end{aligned}$$

kümeleri tanımlansın.

Şimdi (4.21) denklemine sabitlenmiş her bir $x\in D$ ve $\xi'\in G'$ için ξ^1 değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulayalım. O halde $\Gamma^1_{1k}=\Gamma^k_{11}=0,\ 1\leq k\leq n$ olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\partial_\eta\partial_{x^1}\widehat{u}-2\sqrt{-1}\sum_{j,k=2}^{n}\Gamma^j_{1k}\xi^k\partial_\eta\partial_{\xi^j}\widehat{u}+\sum_{j=2}^{n}\xi^j\partial_{x^j}\widehat{u}\\ &-\sqrt{-1}\sum_{j,k=2}^{n}\Gamma^1_{jk}\xi^k\xi^j\eta\widehat{u}-\sum_{j,k,s=2}^{n}\Gamma^s_{jk}\xi^k\xi^j\partial_{\xi^s}\widehat{u}=2\pi\delta\left(\eta\right)\sum_{k,j=2}^{n}a_{kj}\left(x\right)\xi^k\xi^j\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu denklemde $\delta\left(\eta\right)$ Dirac delta genelleştirilmiş fonksiyonu olup

$$\mathcal{F}(1)=2\pi\delta\left(\eta\right)$$

dır.

Uyarı 4.2 ile Lemma 4.2 hesaba katılırsa, $\widehat{u}$, $\partial_\eta\widehat{u}$ fonksiyonlarının $\eta>0$ ve $\eta<0$ olması durumları için, $D\times G'$ bölgesinde sürekli diferansiyellenebilir olduğu görülür. Bu durumda Fourier dönüşümü uyguladıktan sonra elde edilen denklem kullanılırsa $\eta>0$ ve $\eta<0$ durumları için $\widehat{u}$ fonksiyonu aşağıdaki denklemi klasik anlamda sağlar:

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\partial_\eta\partial_{x^1}\widehat{u}-2\sqrt{-1}\sum_{j,k=2}^{n}\Gamma^j_{1k}\xi^k\partial_\eta\partial_{\xi^j}\widehat{u}\\ &+\sum_{j=2}^{n}\xi^j\partial_{x^j}\widehat{u}-\sqrt{-1}\sum_{j,k=2}^{n}\Gamma^1_{jk}\xi^k\xi^j\eta\widehat{u}-\sum_{j,k,s=2}^{n}\Gamma^s_{jk}\xi^k\xi^j\partial_{\xi^s}\widehat{u}=0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Burada $\widehat{u} = p + \sqrt{-1}q$ yazılırsa ve $\eta > 0$ ve $\eta < 0$ durumları için (4.23) eşitliğinin sol tarafı reel ve imajiner kısımlarına ayrılırsa $\partial_\eta p$ ve $\partial_\eta q$ fonksiyonlarına göre sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\partial_\eta \partial_{x^1} p - 2 \sum_{j,k=2}^{n} \Gamma^j_{1k} \xi^k \partial_\eta \partial_{\xi^j} p = \digamma_1, \tag{4.24}$$

$$\partial_\eta \partial_{x^1} q - 2 \sum_{j,k=2}^{n} \Gamma^j_{1k} \xi^k \partial_\eta \partial_{\xi^j} q = \digamma_2. \tag{4.25}$$

Burada $\digamma_1$ve $\digamma_2$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\begin{aligned} \digamma_1 &= \sum_{j,k=2}^{n} \Gamma^1_{jk} \xi^k \xi^j \eta p - \sum_{j=2}^{n} \xi^j \partial_{x^j} q + \sum_{s,j,k=2}^{n} \Gamma^s_{jk} \xi^k \xi^j \partial_{\xi^s} q, \\ \digamma_2 &= \sum_{j,k=2}^{n} \Gamma^1_{jk} \xi^k \xi^j \eta q + \sum_{j=2}^{n} \xi^j \partial_{x^j} p - \sum_{s,j,k=2}^{n} \Gamma^s_{jk} \xi^k \xi^j \partial_{\xi^s} p. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ek olarak aşağıdaki sınır koşulları mevcuttur:

$$u\,(x,\xi) = 0,\ (x,\xi) \in \partial D \times G,\ \ (\widehat{u}(x,\eta,\xi') = 0,\ (x,\xi') \in \partial D \times G')\,. \tag{4.27}$$

Lemma 4.3 *Lemma 4.1'de verilen koşullar ve (4.22) sınır şartı sağlansın. Bu durumda* $\widehat{u}$ fonksiyonu *sabitlenmiş* $(x, \xi') \in D \times G'$ *için*

$$\partial^{\beta'}_{\xi'} \partial_\eta \widehat{u}(x,\cdot,\xi'),\ \partial^{\beta'}_{\xi'} \partial_{x^s} \partial_\eta \widehat{u}(x,\cdot,\xi') \in L_1\left(\Delta^\rho_\eta\right) \cap L_2\left(\Delta^\rho_\eta\right),$$

$0 \leq |\beta'| \leq 2$ *ve* $1 \leq s \leq n$ *için*

$$\begin{aligned} \partial^{\beta'}_{\xi'} \partial_\eta \widehat{u},\ \partial^{\beta'}_{\xi'} \partial_{x^s} \partial_\eta \widehat{u} &\in C\left(D \times \Delta^\rho_\eta \times G'\right), \\ \partial^{\beta'}_{\xi'} \widehat{u},\ \partial^{\beta'}_{\xi'} \partial_{x^s} \widehat{u} &\in C\left(D \times \overline{\Delta}^\rho_\eta \times G'\right), \end{aligned}$$

özelliklerine sahiptir.

Uyarı 4.3 *Lemma 4.3' ün ispatında temelde (4.27) koşulu kullanılmaktadır.*

Lemma 4.3' ün İspatı:

Burada (4.25) denklemi, $\partial_\eta q$ fonksiyonu için bir diferansiyel denklem olarak ele alınır. Bu durumda birinci mertebeden bir kısmi türevli denklem için karakteristik kavramı hesaba katılarak

$$\frac{d}{ds} x^1 = 1,\ \frac{d}{ds} \xi^k = -2 \sum_{j=2}^{n} \Gamma^k_{1j} \xi^j,\ \frac{d}{ds}\left(\partial_\eta q\right) = \digamma_2,\ k = 2,3,...,n \tag{4.28}$$

yazılabilir. Diğer taraftan Lemma 4.2' den $0 \leq |\beta'| \leq 2$, $1 \leq j \leq n$ için,

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} F_2,\ \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x_j} F_2 \in C\left(D \times \Delta_\eta^1 \times G'\right) \cap L_2\left(\Delta_\eta^1\right) \tag{4.29}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece (4.27), (4.28) ve (4.29)' dan,

$$\partial_\eta q(x,\eta,\xi') = \int_{x_0^1}^{x^1} F_2\left(\tau, x', \eta, \zeta'(\tau,\xi')\right) d\tau \tag{4.30}$$

olur. Burada x_0^1, $(x_0^1, x') \in \partial D$ sınır noktasının birinci bileşeni olup $(x^1, x') \in D$' nin birinci bileşeni $x^1 > x_0^1$ koşulunu sağlamaktadır. (4.30) eşitliğinde

$$\zeta'(\tau,\xi') = (\zeta^2(\tau,\xi'), ..., \zeta^n(\tau,\xi'))$$

vektörünün bileşenleri $\zeta'(x^1) = \xi'$ başlangıç koşuluna sahip

$$\frac{d}{d\tau}\zeta^k = -2\sum_{j=2}^{n} \Gamma_{1j}^k \zeta^j, \quad 2 \leq k \leq n$$

diferansiyel denklem sistemini sağlar. Ayrıca $\zeta'(x^1) = \xi' \neq 0$ koşuluna sahip bu Cauchy probleminin çözümünün tekliği $\zeta'(\tau,\xi') \neq 0$, $\tau \in [x_0^1,\ x_0^1 + d_0]$ olmasını gerektirir. Ayrıca $F_2\left(x,\eta,\xi'\right)$ fonksiyonu D bölgesinin dışında sıfır olduğundan ve Ox^1 koordinat eksenine paralel olan $\mathbb{R}_x^n$ deki doğrular (g_{ij}) metriğine göre jeodezikler olduğundan, (4.30) daki integral $(x_0^1, x_0^1 + d_0)$ sonlu aralığı üzerinde alınır, burada d_0 sınırlı D bölgesinin çapıdır. Diğer yandan,(4.6), (4.15), (4.16) ve Lemma 4.1'den

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,\xi) d\xi^1$$

integralinin $(x,\xi') \in D \times G'$ parametresine göre düzgün yakınsak olduğu ve $D \times G'$ üzerinde sürekli olduğu görülür. Bu durumda Plancherel eşitsizliğinden

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,\xi) d\xi^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{u}(x,\eta,\xi')\right|^2 d\eta,$$

olup

$$\int_0^{+\infty} q^2(x,\eta,\xi') d\eta,\ \int_0^{+\infty} p^2(x,\eta,\xi') d\eta$$

integralleri $D \times G'$ üzerinde süreklidir.

Ayrıca (4.6), (4.15) ve (4.16) ile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_\xi^\beta u(x,\xi))^2 d\xi^1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_\xi^\beta \partial_{x^j} u(x,\xi))^2 d\xi^1$$

integralleri $(x,\xi') \in D \times G'$ parametresine göre düzgün yakınsaktır ve

$|\beta| \leq 3, 1 \leq j \leq n$

için $D \times G'$ üzerinde süreklidir. Bu durumda yukarıdakine benzer şekilde aşağıdaki integrallerin $|\beta'| \leq 3$ için $D \times G'$ üzerinde sürekli olduğu gösterilebilir:

$$\int_0^{+\infty} (\partial_{\xi'}^{\beta'} q(x,\eta,\xi'))^2 d\eta, \quad \int_0^{+\infty} (\partial_{\xi'}^{\beta'} p(x,\eta,\xi'))^2 d\eta,$$

$$\int_0^{+\infty} (\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} q(x,\eta,\xi'))^2 d\eta, \quad \int_0^{+\infty} (\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} p(x,\eta,\xi'))^2 d\eta.$$

Böylece

$$\int_0^{+\infty} (\partial_{\xi'}^{\beta'} \mathcal{F}_2(x,\eta,\xi'))^2 d\eta, \quad \int_0^{+\infty} (\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \mathcal{F}_2(x,\eta,\xi'))^2 d\eta$$

integralleri $|\beta'| \leq 2$ için $D \times G'$ üzerinde süreklidir.

Diğer taraftan (4.30) dan

$$q_\eta^2 \leq (x^1 - x_0^1) \int_{x_0^1}^{x^1} \mathcal{F}_2^2 (\tau, x', \eta, \zeta'(\tau,\xi'))\, d\tau \tag{4.31}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_2^2 (x,\eta,\xi')\, d\eta$$

fonksiyonu $(x,\xi') \in D \times G'$ parametrelerine göre sürekli ve D, G' kümeleri de kapalı ve sınırlı olduğundan, (x,ξ') den bağımsız bir $M > 0$ sayısı ile sınırlı

$$\int_{x_0^1}^{x^1} \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_2^2 (\tau, x', \eta, \zeta'(\tau,\xi'))\, d\eta \right) d\tau$$

integralinin var olduğu sonucu çıkar. Bu durumda (4.31) den, Fubini-Tonelli teoremi ile her $N > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\int_0^N (\partial_\eta q(x,\eta,\xi'))^2\, d\eta &\leq d_0 \int_0^N \left(\int_{x_0^1}^{x^1} \mathcal{F}_2^2 (\tau, x', \eta, \zeta'(\tau,\xi'))\, d\tau \right) d\eta \\
&= d_0 \int_{x_0^1}^{x^1} \left(\int_0^N \mathcal{F}_2^2 (\tau, x', \eta, \zeta'(\tau,\xi'))\, d\eta \right) d\tau \\
&\leq d_0 M
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer sebepten, (4.30) dan, $|\beta'| \leq 2$ için

$$\int_0^N (\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta q(x,\eta,\xi'))^2 d\eta, \quad \int_0^N (\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \partial_\eta q(x,\eta,\xi'))^2 d\eta \leq d_0 M_1 \tag{4.32}$$

olduğu görülür, burada $M_1 > 0$ sayısı

$$\int_{x_0^1}^{x^1} (\int_0^{+\infty} (\partial_{\xi'}^{\beta'} F_2(\tau, x', \eta, \zeta'(\tau, \xi')))^2 d\eta) d\tau$$

ve

$$\int_{x_0^1}^{x^1} (\int_0^{+\infty} (\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} F_2(\tau, x', \eta, \zeta'(\tau, \xi')))^2 d\eta) d\tau$$

sürekli fonksiyonlarının $D \times G'$ üzerinde maksimumudur. (4.32) eşitlikleri $|\beta'| \leq 2$ için

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta q, \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \partial_\eta q \in L_2\left(\Delta_\eta^1\right)$$

olduğunu gösterir. Ayrıca Lemma 4.2 den sonra Uyarı 4.2 dikkate alınırsa, (4.17) den,

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta q(x, \eta, \xi'),\ \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \partial_\eta q(x, \eta, \xi') \in L_1\left(\Delta_\eta^1\right) \cap C\left(D \times \Delta_\eta^1 \times G'\right)$$

olur. Benzer şekilde

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta q(x, \eta, \xi'),\ \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \partial_\eta q(x, \eta, \xi') \in L_1\left(\Delta_\eta^{-1}\right) \cap C\left(D \times \Delta_\eta^{-1} \times G'\right)$$

olduğu görülür.

(4.24) eşitliğinden benzer yolla $|\beta'| \leq 2$, $\rho = -1$, 1 için,

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta p(x, \eta, \xi'),\ \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \partial_\eta p(x, \eta, \xi') \in L_1\left(\Delta_\eta^\rho\right) \cap L_2\left(\Delta_\eta^\rho\right) \cap C\left(D \times \Delta_\eta^\rho \times G'\right)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak, $|\beta'| \leq 2$, $1 \leq j \leq n$ için

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\eta \widehat{u},\ \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} \partial_\eta \widehat{u} \in L_1\left(\Delta_\eta^\rho\right) \cap L_2\left(\Delta_\eta^\rho\right) \cap C\left(D \times \Delta_\eta^\rho \times G'\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} q(x, \eta, \xi') = -\int_\eta^\infty \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\tau q(x, \tau, \xi') d\tau \tag{4.33}$$

eşitliği sağlanır ve buradan $(x, \xi') \in D \times G'$ noktası için

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} q(x, +0, \xi') = -\int_0^\infty \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\tau q(x, \tau, \xi') d\tau \tag{4.34}$$

bulunur. (4.32)-(4.34) bağıntılarından

$$\begin{aligned} \left|\partial_{\xi'}^{\beta'} q(x, \eta, \xi') - \partial_{\xi'}^{\beta'} q(x, +0, \xi')\right|^2 &= \left|\int_0^\eta \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\tau q(x, \tau, \xi') d\tau\right|^2 \\ &\leq \eta \int_0^\eta (\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_\tau q(x, \tau, \xi'))^2 d\tau \\ &\leq \eta d_0 M_1 \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece $\partial_{\xi'}^{\beta'} q(x,\eta,\xi')$ fonksiyonu, $\eta \to +0$ iken $(x,\xi') \in D \times G'$ parametrelerine göre $\partial_{\xi'}^{\beta'} q(x,+0,\xi')$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Böylece, $\eta > 0$ için

$\partial_{\xi'}^{\beta'} q(x,\eta,\xi') \in C\left(D \times G'\right)$

olduğundan

$\partial_{\xi'}^{\beta'} q(x,+0,\xi') \in C\left(D \times G'\right)$

olur. Benzer şekilde $|\beta'| \leq 2$, $1 \leq j \leq n$ için,

$$\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} q(x,+0,\xi'),\ \partial_{\xi'}^{\beta'} p(x,+0,\xi'),\ \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} p(x,+0,\xi'),\ \partial_{\xi'}^{\beta'} q(x,-0,\xi'),$$
$$\partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} q(x,-0,\xi'),\ \partial_{\xi'}^{\beta'} p(x,-0,\xi'),\ \partial_{\xi'}^{\beta'} \partial_{x^j} p(x,-0,\xi')$$

fonksiyonlarının $C\left(D \times G'\right)$ uzayına ait olduğu görülebilir.

4.4 YENİ KOORDİNATLARDA BAZI YARDIMCI SONUÇLAR

Bir noktada jeodezik olan özel koordinatların varlığı ilk kez Riemann (1868) tarafından tanımlanan Riemann koordinaları ile mümkün olmuştur. Bu sistemin ayırt edici özelliği orijinden geçen jeodeziklerin, Öklid geometrisindeki kartezyen koordinat sisteminin orijininden geçen düz doğrularla denklem olarak aynı forma sahip olmasıdır. Bir Riemann manifoldunda orijin noktası P olan keyfi bir koordinat sistemi alalım. Mümkün olan her yönde, P noktasından geçen jeodeziklerin mevcut olduğunu kabul edelim. Her bir jeodezik denklemi bir kanonik parametre ile ilişkilendirelim. Herhangi iki kanonik parametre $i = a\tau + b$ doğrusal bağıntısı ile birbirine bağlı olduğundan τ parametresini öyle seçebiliriz ki P noktası her jeodezik üzerinde $\tau = 0$ değerine karşılık gelir ve parametre sabit bir çarpan ile belirlenir. P den geçen her jeodezik $\xi^i = \left\{\frac{dx^i}{d\tau}\right\}_P$ teğet vektörü ile ve üzerindeki A noktası da τ parametresinin değeri ile tam olarak tanımlanır. Bu ifadeler, şüphesiz P noktasının jeodezik diferansiyel denklemi için varlık ve teklik teoremlerinin şartlarının sağlandığı komşuluğunda geçerlidir. Sadece böyle bir bölgede Riemann koordinatlarının inşa edilmesi mümkündür. Eğer A nın orijinal koordinatları

$x^i (i = 1, ..., n)$

ise buna karşılık gelen Riemann koordinatları

$y^i = \xi^i \tau \ (1 \leq i \leq n)$

şeklinde tanımlanır (Petrov 1969). Böylece

$$x^i = x^i(y^1, ..., y^n)$$

dir. Diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, orijinal koordinat sisteminde, jeodezik üzerinde x^i fonksiyonları başlangıç şartlarına ve τ parametresine bağlıdır:

$$x^i = x^i(\tau, \mathring{x}^i, \xi^i).$$

Ayrıca x^i' ler y^i fonksiyonlarının sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları olup P nin bir komşuluğunda x^i ve y^i arasında birebir eşleme vardır.
O halde açıktır ki, bir $\widetilde{x}_0 \in D$ noktası merkez olarak alınırsa

$$\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(x)\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j$$

diferansiyel formu yeni koordinatlarda

$$\sum_{k,s=2}^{n} \widetilde{a}_{ks}(y)\dot{\zeta}^k\dot{\zeta}^s$$

halini alır. Burada $\widetilde{a}_{ks} = a_{ij}\partial_{y^k}x^i\partial_{y^s}x^j$ve $a_{ij} = a_{ij}\left(x\left(y\right)\right)$ şeklinde verilir.
Dolayısıyla (4.20) formulüne benzeyen bir

$$\widetilde{u}\left(y,\zeta\right) = \sum_{i,j=2}^{n} \int_{\widetilde{\gamma}(y,\zeta)} \widetilde{a}_{ij}\left(\tilde{z}\left(y,\zeta,t\right)\right) \dot{\tilde{z}}^i\left(y,\zeta,t\right) \dot{\tilde{z}}^j\left(y,\zeta,t\right) dt, \tag{4.35}$$

fonksiyonu yazılabilir. Burada

$$\widetilde{\gamma}(y,\zeta) = \left\{\tilde{z}^1\left(y,\zeta,t\right), ..., \tilde{z}^n\left(y,\zeta,t\right)\right\}$$

yeni koordinatlarda, $y \in \widetilde{D}$ noktasından ζ doğrultusunda geçen g metriğinin bir jeodeziğidir. $u(x,\xi)$ fonksiyonu için verilen Lemma 4.1 ve Lemma 4.3' ün $\widetilde{u}\left(y,\zeta\right)$ fonksiyonu içinde geçerli olduğu kolayca görülebilir. Böylece, $y = 0$ da $\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = 0$ olacağından $\widetilde{u}\left(y,\zeta\right)$ fonksiyonu aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\sum_{i=1}^{n}\zeta^i\partial_{y^i}\widetilde{u} = \sum_{s,k=2}^{n}\widetilde{a}_{ks}(y)\zeta^k\zeta^s. \tag{4.36}$$

Burada $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}$, yeni y koordinatlarında g metriğinin Christoffel sembolleridir. $u(x,\xi)$ için geçerli olan Lemma 4.1 ve Lemma 4.3 ayrıca $\widetilde{u}(y,\zeta)$ fonksiyonu içinde sağlandığından bundan sonra sadelik açısından

$$\left(y,\zeta\right), \ \widetilde{u}\left(y,\zeta\right), \ \widetilde{\gamma}(y,\zeta), \ \widetilde{a}_{ks}(y)$$

sembollerinin yerine

$(x,\xi)\,,\ u(x,\xi),\ \gamma(x,\xi),\ a_{ks}(x)$

sembolleri kullanılacaktır.

Diğer yandan, öklid metriğinde jeodezik denklem

$z\,(x_0,\xi,t) = x_0 + \xi t,\ \ (\xi \neq 0)$

formunda olduğundan

$$\dot{z}\,(x_0,\xi,t) = \frac{d}{dt} z\,(x_0,\xi,t)$$

fonksiyonunun ξ^s $(1 \leq s \leq n)$ parametresine göre ikinci türevinin $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ ve $t \in (0,+\infty)$ için sınırlı olduğu açıktır. Eğer jeodeziğin denklemi $\nu = \frac{\xi}{|\xi|}$ olacak şekilde

$z\,(x_0,\nu,t) = x_0 + \nu t$

formunda yeniden yazılırsa, bu durumda $\dot{z}\,(x_0,\nu,t) = \frac{\xi}{|\xi|}$ fonksiyonunun ξ^s parametresine göre ikinci türevi $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ ve $t \in (0,+\infty)$ için sınırlı olmayacaktır. Bu sınırsızlık yeni $\nu = \frac{\xi}{|\xi|}$ parametresinin tanımlanması ve $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ için $|\xi|$ fonksiyonunun ikinci türevlerinin sınırsız olması ile bağlantılıdır.

Lemma 4.4 *Yeni koordinat sisteminde,*

$\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}u(0,\xi),\ \partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}\partial_{x^j}u(0,\xi),\ \ 1 \leq i,\ \ j \leq n,$

fonksiyonları $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ için G *kümesi üzerinde sınırlıdır. Ayrıca* $1 \leq i, j \leq n$ için

$u(0,\xi^1,\xi'),\ \ \partial_{\xi^i}u(0,\xi^1,\xi'),\ \ \partial_{\xi^i}\partial_{x^j}u(0,\xi^1,\xi'),\ \ \partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}u(0,\xi^1,\xi'),\ \ \partial_{x^j}\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}u(0,\xi^1,\xi'),$

fonksiyonları $\xi' \to 0$ *iken* $L_2(\mathbb{R}^1_{\xi^1})$ *de sıfıra yakınsar.*

Lemma 4.4' ün İspatı:

Öncelikle, $\dot{z}^i\,(x,\xi,t)$ fonksiyonlarının ξ' ye göre ikinci mertebeden türevleri sınırlı ise $\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}u$ fonksiyonları da $0 < |\xi| \leq \frac{1}{3}$ ve $1 \leq i \leq n$ için sınırlı olacaktır. *supp* $b \subset D$ ve (4.3)-(4.4) probleminin çözümü (4.21) özelliğine sahip olduğundan, d_0, $g = (g_{ij}(x))$ metriğinde D nin çapı olmak üzere, (4.6) daki integral $\left[0, \frac{d_0}{|\xi|}\right]$ sonlu aralığı üzerinde düşünülebilir. Böylece (4.6) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$I_{ij}(x,\xi) = \int_0^{\frac{d_0}{|\xi|}} b\,(z\,(x,\xi,t))\,\dot{z}^i\,(x,\xi,t)\,\dot{z}^j\,(x,\xi,t)\,dt. \tag{4.37}$$

Ayrıca, $g = (g_{ij})$ metriği yarı-jeodezik koordinatlarda yazıldığından

$$\dot{z}^k \left(x, \xi^1, 0, t\right) = 0 \ (\xi^1 \neq 0)$$

eşitliği her $k \in \{2, ..., n\}$ için sağlanır ve dolayısıyla

$$\partial_{\xi^1} z^k \left(x, \xi^1, 0, t\right) = 0$$

olur. Bu durumda, sabitlenmiş her bir $x \in D$ ve $0 < |\xi^1| \leq 1$ için, $\xi' = (\xi^2, ..., \xi^n)$ değişkenine göre Taylor formülünden,

$$\dot{z}^k (x, \xi, t) = \sum_{i=2}^{n} \xi^i \partial_{\xi^i} \dot{z}^k \left(x, \xi^1, \xi'\theta_1, t\right), \tag{4.38}$$

$$\partial_{\xi^1} \dot{z}^k (x, \xi, t) = \sum_{i=2}^{n} \xi^i \partial_{\xi^i} \partial_{\xi^1} \dot{z}^k \left(x, \xi^1, \xi'\theta_2, t\right), \tag{4.39}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $0 < \theta_m (x, \xi, t) < 1$, $m = 1, 2$ dir.
Eğer $\partial_{\xi^i} \dot{z}^k$ ve $\partial_{\xi^i} \partial_{\xi^j} \dot{z}^k$fonksiyonların sınırlılığı kabul edilirse, bu durumda (4.38) ve (4.39) eşitliklerinden her $k \in \{2, ..., n\}$, $x \in D$, $t \in (0, +\infty)$ ve $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ $(\xi^1 \neq 0)$ için,

$$\left|\dot{z}^k (x, \xi, t)\right| \leq M_1 |\xi'|, \quad \left|\partial_{\xi^1} \dot{z}^k (x, \xi, t)\right| \leq M_2 |\xi'| \tag{4.40}$$

bulunur. Burada M_1, $M_2 \geq 0$, ξ ve t ye bağlı değildir. Ayrıca biliyoruz ki:

(i) $b \in C^5(D)$, *supp* $b \subset D$ dir,

(ii) (4.40) eşitsizliği sağlanır,

(iii) $z (x, \xi, t)$, t ye göre C^5- sınıfındandır ve $\xi \neq 0$ dır,

(iv) $\dot{z}^k (x, \xi, t)$, $z^s (x, \xi, t)$ $(2 \leq k \leq n$, $1 \leq s \leq n)$ fonksiyonlarının $\xi^1 \neq 0$ olacak şekilde $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ için ξ^i $(1 \leq i \leq n)$ ye göre 2. mertebeye kadar türevlerinin sınırlıdır,

(v) $\partial_{\xi^1} z^k \left(x, \xi^1, 0, t\right) = 0$, $2 \leq k \leq n$ dir.

Tüm bu gerçekler göz önünde bulundurulduğunda, $\partial_{\xi^i} z^s$, $\partial_{\xi^j} \partial_{\xi^i} z^s$ $(1 \leq s \leq n)$ fonksiyonları sınırlı iken $\partial_{\xi^s} \partial_{\xi^1} I_{ij}$ fonksiyonlarının da $|\xi| \leq \frac{1}{2}$, $1 \leq s \leq n$, $2 \leq i, j \leq n$ için sınırlı olacağı açıktır. Diğer yandan $|\xi| \geq \frac{1}{2}$ $(\xi' \in G')$ için fonksiyonların sınırlılığı Lemma 4.1 den görülebilir.

Eğer

$\partial_{\xi^i}\partial_{x^j}\dot{z}^k,\ \partial_{\xi^i}\partial_{\xi^s}\partial_{x^j}\dot{z}^k,\ \partial_{\xi^i}\partial_{x^j}z^s,\ \partial_{\xi^l}\partial_{\xi^i}\partial_{x^j}z^s(2 \leq k \leq n, 1 \leq i,j,s,l \leq n)$

fonksiyonlarının sınırlı olduğu kabul edilirse, bu durumda $\xi \in G$ için

$\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}\partial_{x^j}I_{ij}\ (1 \leq i,j \leq n)$

fonksiyonları da benzer şekilde sınırlı olur. Sonuç olarak, $u(x,\xi)$ fonksiyonu $I_{ij}(x,\xi)$ şeklindeki fonksiyonların sonlu bir toplamı olduğundan,

$\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}u,\ \partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}\partial_{x^j}u\ (1 \leq i,j \leq n)$

fonksiyonları, z^s, $\dot{z}^k$ için yukarıda belirtilen koşullar sağlandığı zaman, $x \in D$ ve $\xi^1 \neq 0$ olacak şekilde $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ için G kümesi üzerinde sınırlı olurlar.
Özel olarak $\dot{z}^k(x,\xi,t)$ fonksiyonlarının ξ ye göre 2. mertebeye kadar türevleri $g_{ij} = \delta_{ij}$ metriği için sınırlı olduğundan, açıktır ki aynı sınırlılık özellikleri

$\dot{z}^k(0,\xi,t)$

için $\widetilde{x}_0 \in D$ merkezli Riemann koordinatlarında da geçerlidir. Ayrıca, yeni koordinat sisteminde sağlanan $y^i = \xi^i t\ (1 \leq i \leq n)$ formülü ile

$z^s(0,\xi,t) = z^s(0,\xi,0)\ \ (1 \leq s \leq n)$

olur. Böylece

$\partial_{\xi^i}\partial_{x^j}z^s(0,\xi,t),\ \partial_{\xi^l}\partial_{\xi^i}\partial_{x^j}z^s(0,\xi,t),\ \partial_{\xi^i}\partial_{x^j}\dot{z}^k(0,\xi,t)$

$\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^s}\partial_{x^j}\dot{z}^k(0,\xi,t)\ (2 \leq k \leq n,\ 1 \leq i,j,s,l \leq n)$

fonksiyonlarının $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ için G kümesi üzerinde sınırlı olduğu kolayca görülür. Bu durumda

$\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}u(0,\xi),\ \partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1}\partial_{x^j}u(0,\xi)\ (1 \leq i,j \leq n)$

fonksiyonları $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ için G kümesi üzerinde sınırlıdır.
Ek olarak, (4.3)-(4.4) problemi için tek çözüm $\nu^0 = (1,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ vektörü için

$z\left(x,\nu^0,t\right) = x + t\nu^0$

ile verildiğinden $\xi' = 0$, $2 \leq k \leq n$ için,

$$\dot{z}^k\left(x, \xi^{^1}, 0, t\right) = 0$$

olur. Bu durumda (4.20) den

$$u(x, \xi^{^1}, 0) = \partial_{\xi^i} u(x, \xi^{^1}, 0) = 0 \ (1 \leq i \leq n)$$

ve

$$\partial_{\xi^1}\partial_{\xi^i} u(x, \xi^{^1}, 0) = \partial_{\xi^1}\partial_{\xi^i}\partial_{x^j} u(x, \xi^{^1}, 0) = 0, (1 \leq i, j \leq n)$$

elde edilir. Böylece

$$u(0, \xi^1, \xi'),\ \partial_{\xi^i} u(0, \xi^1, \xi'),\ \partial_{\xi^i}\partial_{x^j} u(0, \xi^1, \xi'), \partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1} u(0, \xi^1, \xi'),\ \partial_{x^j}\partial_{\xi^i}\partial_{\xi^1} u(0, \xi^1, \xi')$$

fonksiyonlarının $\xi' \to 0$ iken $L_2(\mathbb{R}^1_{\xi^1})$ uzayında sıfıra yakınsadığı görülür.

Lemma 4.5 *Lemma 4.1 ve Lemma 4.3' ün koşulları altında,*

$$\widehat{u}(0, \eta, \xi') = p(0, \eta, \xi') + \sqrt{-1} q(0, \eta, \xi')$$

olmak üzere

$$p(0, \eta, \xi'),\ \partial_{x^j} p(0, \eta, \xi'),\ \partial_{\xi^k} p(0, \eta, \xi'),\ \partial_{x^j}\partial_{\xi^k} p(0, \eta, \xi'),\ \eta q(0, \eta, \xi')$$

fonksiyonları $L_1(\mathbb{R}^1_\eta)$ uzayında $\xi' \to 0$ *iken* $2 \leq k \leq n$ *ve* $1 \leq j \leq n$ *için sıfıra yakınsar.*

Lemma 4.5' in İspatı:

Fourier dönüşümü $L_2(\mathbb{R}^1_{\xi^1})$ de sürekli olduğundan Lemma 4.4' ten

$$\widehat{u}(0, \eta, \xi'),\ \partial_{\xi^k}\widehat{u}(0, \eta, \xi'),\ \eta\widehat{u}(0, \eta, \xi'),\ \eta\partial_{\xi^k}\widehat{u}(0, \eta, \xi'),\ \eta\partial_{x^j}\widehat{u}(0, \eta, \xi'),\ \partial_{\xi^k}\partial_{x^j}\widehat{u}(0, \eta, \xi'),$$

$$\eta^2\partial_{x^j}\widehat{u}(0, \eta, \xi'),\ \eta\partial_{\xi^k}\partial_{x^j}\widehat{u}(0, \eta, \xi'),\ 2 \leq k \leq n,\ 1 \leq j \leq n$$

fonksiyonlarının $L_2(\mathbb{R}^1_\eta)$ de $\xi' \to 0$ iken sıfıra yakınsadığı görülür. Dolayısıyla

$$\int_1^\infty \left|\partial_{\xi^k}\partial_{x^j} p\right| d\eta \leq \left(\int_1^\infty \eta^2 \left(\partial_{\xi^k}\partial_{x^j} p\right)^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^\infty \frac{1}{\eta^2} d\eta\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^1 \left|\partial_{\xi^k}\partial_{x^j} p\right| d\eta \leq \left(\int_0^1 \left(\partial_{\xi^k}\partial_{x^j} p\right)^2 \ d\eta\right)^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\int_1^\infty \eta^2 \left(\partial_{\xi^k}\partial_{x^j} p\right)^2 d\eta \to 0,\ \int_0^1 \left(\partial_{\xi^k}\partial_{x^j} p\right)^2 d\eta \to 0$$

olduğundan, $\partial_{\xi^k}\partial_{x^j}p(0,\eta,\xi')$ fonksiyonları $L_1(0,\infty)$ de $\xi' \to 0$ iken sıfıra gider. Aynı şekilde $\partial_{\xi^k}\partial_{x^j}p(0,\eta,\xi')$ fonksiyonları da $L_1(-\infty,0)$ da $\xi' \to 0$ iken sıfıra yakınsar.
Benzer şekilde

$$p(0,\eta,\xi'), \partial_{x^j}p(0,\eta,\xi'), \partial_{\xi^k}p(0,\eta,\xi'), \eta q(0,\eta,\xi')$$

fonksiyonlarının $L_1(\mathbb{R}^1_\eta)$ de $\xi' \to 0$ iken sıfıra yakınsadığı gösterilebilir.

BÖLÜM 5

TEOREM 4.1'İN İSPATI

Bu bölümde Teorem 4.1' in ispatı verilecektir. Problem 4.1' in çözümünün tekliği, $C_0^5(D)$ sınıfında Problem 4.2' nin çözümünün tekliğinden elde edilir. Bu nedenle Problem 4.2 homojen sınır koşulu ile birlikte ele alınmaktadır.

Öncelikle $\widehat{u} = p + \sqrt{-1}q$ ve $\Gamma^i_{jk}(0) = 0$ olmak üzere,

$$\sqrt{-1}\partial_\eta \partial_{x^1}\widehat{u} - 2\sqrt{-1}\sum_{j,k=2}^{n}\Gamma^j_{1k}\xi^k\partial_\eta\partial_{\xi^j}\widehat{u} + \sum_{j=2}^{n}\xi^j\partial_{x^j}\widehat{u}$$
$$-\sqrt{-1}\sum_{j,k=2}^{n}\Gamma^1_{jk}\xi^k\xi^j\eta\widehat{u} - \sum_{j,k,s=2}^{n}\Gamma^s_{jk}\xi^k\xi^j\partial_{\xi^s}\widehat{u} = 2\pi\delta\,(\eta)\sum_{k,j=2}^{n}a_{kj}\,(x)\,\xi^k\xi^j.$$

denkleminden elde edilen

$$\partial_\eta\partial_{x^1}q - 2\sum_{j,k=2}^{n}\Gamma^j_{1k}\xi^k\partial_\eta\partial_{\xi^j}q = F_2$$

ifadesinden, yeni koordinatlarda $x = 0$ için $F_2 = \sum_{j=2}^{n}\xi^j\partial_{x^j}p$ olmak üzere

$$\partial_\eta\partial_{x^1}q = -2\pi\delta(\eta)\sum_{k,j=2}^{n}a_{jk}\,(0)\,\xi^k\xi^j + F_2, \tag{5.1}$$

yazılır. (5.1) denkleminde

$$\xi'_i = \varepsilon\xi'_i(1), \xi'_i(1) = (\underbrace{0,\cdots,0}_{i-2},1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^{n-1},\ \varepsilon > 0,\ \xi' = \left(\xi^2,\xi^3,\cdots,\xi^n\right)$$

olmak üzere $\xi' = \xi'_i \in G'$, $2 \le i \le n$ olarak alınırsa

$$\partial_\eta\left(\partial_{x^1}q(0,\eta,\xi'_i)\right) = -2\pi\delta\,(\eta)\,a_{ii}(0)\varepsilon^2 + F_{2i}(0,\eta,\xi'_i) \tag{5.2}$$

elde edilir. Burada

$$F_{2i}(0,\eta,\xi'_i) = \varepsilon\partial_{x^i}p(0,\eta,\xi'_i)$$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 5.1 *$U(y)$ fonksiyonu açık bir $Y \subset \mathbb{R}$ cümlesinde tanımlı ve bir $y_0 \in Y$ için, $C^1(Y/\{y_0\})$ uzayına ait olsun. $V(y)$ fonksiyonu $y \neq y_0$ için $\dfrac{dU(y)}{dy}$ ile çakışsın ve y_0' ın bir komşuluğunda integrallenebilir olsun. Bu durumda,*

$$U(y_0 \pm 0) = \lim_{y \to y_0 \pm} U(y)$$

limitleri vardır ve

$$\frac{dU(y)}{dy} = V(y) + (U(y_0+0) - U(y_0-0))\delta(y_0)$$

dır (Hörmander 1983, s. 56).

Dikkat edilirse $U = \partial_{x^1} q$ ve $V = F_2$ fonksiyonları $y_0 = 0$ için Lemma 5.1' in koşullarını sağlamaktadır. Burada y değişkeni η değişkeni ile yer değiştirmiştir. Bu nedenle (5.2) ve Lemma 5.1' den $U_{\pm q}(0, \xi_i') = \partial_{x^1} q\,(0, \pm 0, \xi_i')$ olmak üzere

$$U_{+q}(0, \xi_i') - U_{-q}(0, \xi_i') = -2\pi a_{ii}(0)\varepsilon^2 \tag{5.3}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, Lemma 4.2 ve Lemma 4.3 ile (5.2)' den,

$$U_{+q}(0, \xi_i') = -\int_0^\infty F_{2i}(0, \eta, \xi_i')d\eta, \; U_{-q}(0, \xi_i') = \int_{-\infty}^0 F_{2i}(0, \eta, \xi_i')d\eta$$

yazılabilir. Buradan aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$U_{+q}(0, \xi_i') - U_{-q}(0, \xi_i') = -\varepsilon \int_{-\infty}^\infty \partial_{x^i} p(0, \eta, \xi_i')d\eta. \tag{5.4}$$

Lemma 4.5' ten

$$\int_{-\infty}^\infty \partial_{x^s} p(0, \eta, 0)d\eta = 0, \; 1 \leq s \leq n$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$\partial_{\xi^i}\partial_{x^i} p \in L_1\left(\mathbb{R}^1_\eta\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}^1_\eta\right) \cap C\left(\Delta^\rho_\eta \times G'\right), \; \rho = -1, 1$$

olduğunu dördüncü bölümdeki lemmalardan biliyoruz. Böylece $x = 0$ için $[0, \varepsilon]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa, $\theta_1 \in (0, 1)$, ξ_i'' e bağlı bir sabit olmak üzere

$$\int_{-\infty}^\infty \partial_{x^i} p(0, \eta, \xi_i')d\eta = \varepsilon \int_{-\infty}^\infty \partial_{\xi^i}\partial_{x^i} p(0, \eta, \xi_i'\theta_1)d\eta \tag{5.5}$$

yazılır. (5.5)' i (5.4)' te kullanılırsa,

$$U_{+q}(0,\xi_i') - U_{-q}(0,\xi_i') = q_i(0,\xi_i')\varepsilon^2 \tag{5.6}$$

elde edilir, burada

$$q_i(0,\xi_i') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \partial_{\xi^i}\partial_{x^i} p(0,\eta,\xi_i'\theta_1)d\eta$$

dir. (5.3) ve (5.6) eşitlikleri

$$-2\pi a_{ii}(0) = q_i(0,\xi_i'),\ (2 \le i \le n)$$

olduğunu gösterir. Bu durumda Lemma 4.5' ten $\xi_i' \to 0$ iken $q_i(0,\xi_i') \to 0$ olur ve böylece $a_{ii}(0) = 0$, $(2 \le i \le n)$ olarak bulunur.

İkinci olarak,

$$\xi_{ij}'(1) = (\underbrace{0,\cdots,0}_{i-2},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{j-i-1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-j}) \in \mathbb{R}^{n-1}, i \ne j$$

ve

$$\xi_{ij}' = \varepsilon\xi_{ij}'(1) \in G'$$

şeklinde seçelim. Bu durumda, $a_{ii}(0) = 0$, $a_{ij}(0) = a_{ji}(0)$ olduğundan ve (5.1) den $\xi^{'} = \xi_{ij}'$ için,

$$\partial_\eta\left(\partial_{x^1} q\left(0,\eta,\xi_{ij}'\right)\right) = -4\pi\delta(\eta)\, a_{ij}(0)\varepsilon^2 + F_{2ij}\left(0,\eta,\xi_{ij}'\right) \tag{5.7}$$

elde edilir. Burada

$$F_{2ij}(0,\eta,\xi_{ij}') = \varepsilon(\partial_{x^i} p(0,\eta,\xi_{ij}') + \partial_{x^j} p(0,\eta,\xi_{ij}'))$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa (5.7) denklemi ve Lemma 5.1' den, $U_{\pm q}(0,\xi_{ij}') = \partial_{x^1} q\left(0,\pm 0,\xi_{ij}'\right)$ olmak üzere

$$U_{+q}(0,\xi_{ij}') - U_{-q}(0,\xi_{ij}') = -4\pi a_{ij}(0)\varepsilon^2 \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.7)' den, 4.2 ve 4.3 lemmalarından

$$U_{+q}(0,\xi_{ij}') = -\int\limits_0^{\infty} F_{2ij}\left(0,\eta,\xi_{ij}'\right)d\eta,\quad U_{-q}(0,\xi_{ij}') = \int\limits_{-\infty}^{0} F_{2ij}\left(0,\eta,\xi_{ij}'\right)d\eta$$

olduğu görülür. Böylece,

$$U_{+q}(0,\xi'_{ij}) - U_{-q}(0,\xi'_{ij}) = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_{x^i} p(0,\eta,\xi'_{ij}) + \partial_{x^j} p(0,\eta,\xi'_{ij}))d\eta \tag{5.9}$$

olur. Eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_{x^m} p(0,\eta,0)d\eta = 0, \ (1 \le m \le n)$$

olduğu hatırlanırsa, $[0,\varepsilon]$ aralığında ortalama değer teoreminden,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_{x^s} p(0,\eta,\xi'_{ij})d\eta = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_{\xi^i}\partial_{x^s} p(0,\eta,\xi'_{ij}\theta_1^s) + \partial_{\xi^j}\partial_{x^s} p(0,\eta,\xi'_{ij}\theta_1^s))d\eta$$

yazılır. Burada $s = i, j$ ve $0 < \theta_1^s \left(\xi'_{ij}\right) < 1$ dir. Bu durumda son eşitlik ve (5.9)' dan

$$q_{ij}(0,\xi'_{ij}) = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_{\xi^i}\partial_{x^i} p(0,\eta,\xi'_{ij}\theta_1^s) + 2\partial_{\xi^j}\partial_{x^i} p(0,\eta,\xi'_{ij}\theta_1^s) + \partial_{\xi^j}\partial_{x^j} p(0,\eta,\xi'_{ij}\theta_1^s)\right) d\eta$$

olmak üzere

$$U_{+q}(0,\xi'_{ij}) - U_{-q}(0,\xi'_{ij}) = q_{ij}(0,\xi'_{ij})\varepsilon^2, \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.8) ve (5.10) eşitliklerinden $-4\pi a_{ij}(0) = q_{ij}\left(0,\xi'_{ij}\right)$ olur. Bu durumda $\xi'_i \to 0$ iken $q_{ij}(0,\xi'_{ij}) \to 0$ olduğu görülür ve sonuç olarak

$$a_{ij}(0) = 0(2 \le i, j \le n)$$

olur. Böylece Teorem 4. 1' in ispatı tamamlanmış olur.

5.1 SONUÇ

Bu tezde bir integral geometri probleminin çözümünün tekliği incelenmiştir. Bu kapsamda Amirov (2005) ve Amirov, Gölgeleyen ve Yamamoto (2017) çalışmaları analiz edilmiştir. Bilindiği üzere bu problemler başta tomografi olmak üzere bilim ve teknolojinin birçok alanında önemli uygulamalara sahiptir. Ele alınan problem önce kinetik denklem için bir ters probleme indirgenmiştir. Daha sonra Fourier dönüşümü kullanılarak ve yeni Riemann koordinatları tanımlamak suretiyle problem daha basit bir forma indirgenmiştir. Son olarak, Fredholm alternatif teoremleri uyarınca belirli koşullar altında ele alınan integral geometri probleminin çözümünün tekliği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Amirov A (1986) Existence and uniqueness theorems for the solution of an inverse problem for the transport equation. *Siberian Mathematical Journal*, 27 (6): 785-800.

Amirov A (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*. VSP, Utrecht The Netherlands.

Amirov A Kh (2001) To the problem of reconstructing a Riemannian metric. *Doklady Mathematics*, 64 (2): 156-159.

Amirov A Kh (2005) *Boundary Rigidity for Riemannian Manifolds.* Preprint University of Tokyo. UTMS, 2005-12.

Amirov A Gölgeleyen F and Yamamoto M (2017) Uniqueness in an integral geometry problem and an inverse problem for the kinetic equation. *Applicable Analysis*, *96* (13): 2236-2249.

Anikonov Y E (1976) The solvability of a certain problem of integral geometry. *Mat. Sb.*, 101 (143): 271-279.

Anikonov Y E and Amirov A K (1983) A uniqueness theorem for the solution of an inverse problem for a kinetic equation. *Doklady Akademii Nauk*, 272 (6): 1292-1293.

Anikonov Yu E (1995) *Multidimensional Inverse and Ill-Posed Problems for Differential Equations*. VSP, Utrecht.

Anikonov Yu E and Romanov V G (1997) On uniqueness of determination of a form of first degree by its integrals along geodesics. *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 5 (6): 487-490.

Anikonov Y E (2001) *Inverse Problems for Kinetic and other Evolution Equations.* VSP, Utrecht The Netherlands.

Bernstein I N and Gerver M L (1978) A problem of integral geometry for a family of geodesics and an inverse kinematic seismics problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 243 (2): 302-305.

Dairbekov N S (2006) Integral geometry problem for nontrapping manifolds. *Inverse Problems*, 22 (2): 431-445.

Dernek A, Dernek N ve Yürekli O (2009) Identities for the Hankel transform and their applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *354* (1): 165-176.

Do Carmo M P (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall.

Do Carmo M P (1992) *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston.

Dubrovin B A, Fomenko A T and Novikov S P (1992) *Modern Geometry-Methods and Applications*. Part 1, Springer-Verlag, New York.

Evans L C (1997) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence RI.

Gasquet C and Witomski P (1999) *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Springer-Verlag, New York.

Gasquet C and Witomski P (2013) *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Springer Science & Business Media.

Gauss C F (1902) *General İnvestigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825*. Princeton university library.

Gel'fand I M and Graev M I (1959) The geometry of homogeneous spaces, group representations in homogeneous spaces and questions in integral geometry. *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, 8: 321-390.

Gel'fand I M and Graev M I (1962) Construction of irreducible representations of simple algebraic groups over a finite field. *Doklady Akademii Nauk*, 147 (3): 529-532.

Gel'fand I M, Graev M I and Vilenkin N Y (1966) *Integral Geometry and Representation Theory*. Generalized Functions Vol: 5, Academic Press, New York.

Gel'fand I M, Gindikin S G and Graev M I (2003) *Selected Topics in Integral Geometry Transl*. of Math. Monographs 220 Providence RI: Amer. Math. Soc.

Griffel D H (2002) *Applied Functional Analysis.* Courier Corporation.

Gonzalez-Velasco E A (1996) *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*. Elsevier.

Gölgeleyen I (2011) Jeodezikler İçin Bazı İntegral Geometri Problemlerinin Çözülebilirliğinin Ve Yaklaşık Çözümlerinin Araştırılması. *Doktara Tezi*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 111 s.

Gölgeleyen I (2013) İntegral Geometri Problemleri ve Transport Denklemleri için Ters Problemler. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 3 (2): 48-55.

Hacısalihoğlu H H (1993) *Diferensiyel Geometri*. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi.

Hacısalihoğlu H H and Amirov A Kh (1996) To the question of interrelation between the metric and curvature in Riemannian space. *Dokl. Akad. Nauk*, 351: 295-296.

Hörmander L (1983) *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, Berlin.

İnce F B (1987) Epileptik Hastaları Değerlendirmede Komputerize Tomografinin Yeri. *Uzmanlık Tezi*, İstanbul Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

John F (1935) Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion *Math. Ann.*, 111 (1): 541-559.

Kireitov V R (1975) The problem of determining an optical surface from its representations. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 10 (3): 45-54.

Kreyszig E (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley-Sons, Canada.

Lavrent'ev M M and Anikonov Y E (1967) A certain class of problems in integral geometry. *Sov. Math. Dokl.*, 8: 1240-1241.

Lavrent’ev M M and Bukhgeim A L (1973) A certain class of problems of integral geometry. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 211: 38-39.

Lavrentiev M M, Romanov V G and Shishat.skiĭ S P (1986) *The Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. Amer. Math. Soc. Providence RI.

Marsden J E and Hoffman M J (1993) *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company, New York.

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations*. Revised from the 1976 Russian edition, Mir Publishers, Moskow, 396 pp.

Mueller J L and Siltanen S (Eds.) (2012) *Linear and Nonlinear İnverse Problems with Practical Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Muhometov R G (1977) The problem of recovery of a two-dimensional Riemannian metric and integral geometry. *Soviet Math. Dokl.*, 18 (1): 27-31.

Muhometov R G and Romanov V G (1978) On the problem of determining an isotropic Riemannian metric in n-dimensional space. *Soviet Math. Dokl.*, 19 (6): 1330-1333.

Musayev B and Alp M (2000) *Fonksiyonel analiz*. Balcı yayınları.

Natterer F (1986) *The Mathematics of Computerized Tomography.* John Wiley and Sons New York.

Paternain G P, Salo M and Uhlmann G (2013) Tensor tomography on surfaces. *Invent. Math.*, 193 (1): 229-247.

Pestov L and Uhlmann G (2005) Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid. *Ann. Math.*, 161 (2): 1093-1110.

Petrov A Z (1969) *Einstein Spaces.* Pergamon Press.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Petrovski I G (1966) *Ordinary Differential Equations.* Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs New Jersey.

Radon J (1917) Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs Akad*., 69: 262-277.

Raschewski P K (1959) *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis*. VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin.

Riemann B (1920) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Abhand. K. Ges. Wiss. Gottingen*. 13, 133 (1868). Reprinted and edited by H. Weyl, Springer, Berlin.

Romanov V G (1987) *Inverse Problems of Mathematical Physics*. VNU, Science Press, Utrecht.

Rudin L I (1987) Images Numerical Analysis of Singularities and Shock Filters. *Doctoral dissertation, California Institute of Technology.*

Sharafutdinov V A (1981) Determining the characteristics of an optical body in a homogeneous medium from its images. In: *Mathematical methods of Solving Direct and Inverse Problems of Geophysics*, 123-148, Novosibirsk.

Sharafutdinov V A (1994) *Integral Geometry of Tensor Fields*. VSP, Utrecht, The Netherlands.

Sharafutdinov V and Uhlmann G (2000) On deformation boundary rigidity and spectral rigidity of Riemannian surfaces with no focal points. *J. Differential Geom*., 56 (1): 93-110.

Sharafutdinov V (2007) Variations of Dirichlet-to-Neumann map and deformation boundary rigidity of simple 2-manifolds. *J. Geom. Anal.*, 17 (1): 147-187.

Vladimirov V S (1984) *Equations of Mathematical Physics*. MIR, Moscow.

URL- 1 https://fhcam.wordpress.com/2009/11/20/pozitron-emisyon-tomografi-pet/, Ziyaret tarihi: 10.01.2022.

ÖZGEÇMİŞ

Saliha TELLİ, ilk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2014 yılında mezun oldu. 2016 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.