

YUMUŞAK BELİRTİSİZ KÜMELER

SOFT FUZZY SETS

İsmail Uğur TİRYAKİ

**Hacettepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
DOKTORA TEZİ
olarak hazırlanmıştır.**

2005

YUMUŞAK BELİRTİSİZ KÜMELER

İsmail Uğur Tiryaki

ÖZ

Bu tezin temel amacı, di-topolojik doku uzayları teorisini kullanarak belirtisiz kümelerin yeni bir genelleştirmesini vermek ve di-topolojik doku uzayı ile belirtisiz kümeler arasındaki ilişkiyi incelemektir. Birinci bölümde genel bir giriş yapıldı. İkinci bölümde ise sonraki diğer bölümlerde kullanılmak üzere temel bilgiler verildi.

Üçüncü bölümde ise dokularla Zadeh anlamında verilen klasik belirtisiz kümeler arasındaki ilişkiler verildi. Di-bağıntı, di-fonksiyonlar ve bunlarla ilgili kavramlar $F(X)$, $F(Y)$ Hutton cebirler arasında temsil edilmeye çalışıldı ve bu bölümün sonunda nesneleri $F(X)$ Hutton cebirler ve morfizmaları bu nesneler arasındaki difonksiyonlar olan $\mathbb{I}\text{-dfSet}$ kategorisinden bahsedildi.

Dördüncü bölümde “Yumuşak Belirtisiz Kümeler” adı verilen klasik belirtisiz kümelerin bir genelleştirilmesi elde edildi, bu yeni kümenin latis yapısı incelendi ve yumuşak belirtisiz kümelerin, nokta, ko-nokta kavramları tanıtılıp $\mathbf{SF}$ yapısı incelendi.

Beşinci bölümde X üzerinde yumuşak belirtisiz topoloji adını verdiğimiz $T \subseteq SF(X)$ topolojileri ele alındı. Bu topolojinin özellikleri ve bu topolojik uzayda ayırma aksiyomları ve tıkızlık incelendi. Daha sonra $\omega : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF-Top}$ ’a ve $\iota : \mathbf{SF-Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ ’a Lowen dönüşümlerinin bir genelleştirilmesi elde edildi. Bu dönüşümlerin tıkızlığı korumadığı için bunlar yerine $\omega_r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF_r-Top}$ ve $\iota_r : \mathbf{SF_r-Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ ’a iki yeni Lowen dönüşüm tanımlandı ve bunlara Lowen’nın tombul dönüşümleri adı verildi. Bu dönüşümler tıkızlığı koruduğu için, genelleştirilmiş Lowen dönüşümlerden topolojik açıdan daha kullanışlı sonuçlar verdikleri görüldü.

Altıncı bölümde ise, üçüncü bölüme paralel olarak yumuşak belirtisiz kümelerin Hutton cebirleri arasındaki di-bağıntılar, di-fonksiyonlar ve bunlarla ilgi kavramlar ayrıntılı bir biçimde incelendi.

Anahtar Kelimeler: Doku Uzay, Di-fonksiyon, Di-topoloji, Taban, Ayırma aksiyomları, Tıkızlık, Bi-süreklilik, Kategori, Hutton Cebiri, Lowen Dönüşümleri.

Danışman: Prof. Dr. Lawrence M. Brown, Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü.

SOFT FUZZY SETS

İsmail Uğur Tiriyaki

ABSTRACT

The general purpose of this dissertation is to offer a new extension of classical fuzzy sets by using the theory of ditopological texture spaces, and to study the relationship between ditopological texture spaces and fuzzy topologies. The first section presents a general introduction. The second section covers the fundamental issues needed in subsequent sections. The third section presents the relationships between textures and fuzzy sets in the sense of Zadeh, and notions of di-relation and di-function are defined between Hutton algebras $F(X)$, $F(Y)$. The category $\mathbb{I}\text{-dfSet}$, whose objects are Hutton algebras $F(X)$ and morphisms di-functions between such objects is defined at the end of this section.

In the fourth section a generalization of classical fuzzy subsets of a set X , called “Soft Fuzzy Subsets of X ”, is obtained. The lattice structure of the set $SF(X)$ of soft fuzzy subsets of X is analyzed, concepts of point and co-point introduced, and the construct **SF** studied.

In the fifth section, SF -topologies T on a set X , that is topologies $T \subseteq SF(X)$, are considered and using the link with ditopological texture spaces, separation axioms and a notion of compactness for SF -topological spaces are defined and examined. Next, generalized Lowen mappings $\omega : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF-Top}$ and $\iota : \mathbf{SF-Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ are obtained. Since ω is seen not to preserve compactness, two new mappings $\omega_r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF_r-Top}$ and $\iota_r : \mathbf{SF_r-Top} \rightarrow \mathbf{Top}$, called the Lowen rotund mappings, are considered in their place. It is shown that ω_r preserves both the basic separation axioms and compactness, the existence of such a mapping being a very important property of SF -topologies. In parallel with the third section, di-relations and di-functions between Hutton algebras of soft fuzzy sets are examined in detail in the sixth section.

Keywords: Texture, Difunction, Ditopology, Base, Separation axioms, Compactness, Bicontinuity, Category, Construct, Hutton Algebra, Lowen Mappings

Advisor: Prof. Dr. Lawrence M. Brown, Hacettepe University, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Öncelikle Doktora Yaptığım süreç boyunca büyük bir sabırla birikimini bana aktaran ve hertürlü desteği benden esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. L. M. Brown'a teşekkür ederim.

Ayrıca en zor anlarımda yanımda olan ve manevi desteklerini sürekli hissettiğim sayın hocam Doç. Dr. Rıza Ertürk ve Prof. Dr. Haydar Eş hocam'a teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak bu zorlu süreç boyunca beni cesaretlendiren ve destekleyen sevgili eşim Eylem Tiryaki ve aileme teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Latis Kuramı	4
2.2. Dokular	12
2.3. Çarpım Dokuları	17
2.4. Bağıntılar, Ko-bağıntılar ve Di-bağıntılar	19
2.5. Di-fonksiyonlar	26
2.6. Di-Topolojiler	29
2.7. Taban, Ko-taban, Alttaban, Ko-alttaban	31
2.8. Belirtisiz Alt Kümeler	33
2.9. Belirtisiz Alt Kümeler Üzerindeki Bağıntılar	34
3 BELİRTİSİZ KÜMELERİN HUTTON CEBİRLERİ ARASINDAKİ Dİ-BAĞINTILAR	38
3.1. Bağıntı ve Ko-bağıntılarının Temsil Edilmesi	40
3.2. Belirtisiz Kümeler Arasındaki Di-fonksiyonlar	56
4 YUMUŞAK BELİRTİSİZ KÜMELER	67
4.1. Yumuşak Belirtisiz Kümelerin Latisi	67
4.2. Noktalar ve Ko-Noktalar	72
4.3. Yumuşak Belirtisiz Kümelerin Alternatif Tasviri	77

4.4. Yumuşak belirtisiz kümelerin SF yapısı	80
5 SF-TOPOLOJİLERİ	86
5.1. X üzerindeki SF -topolojileri	86
5.2. SF -Topolojik uzaylarında Ayırma Aksiyomları	94
5.3. SF -Topolojik uzaylarında Tıkızlık	106
5.4. Di-tıkızlık ve Çarpım Di-topolojik uzayları	110
5.5. Genelleştirilmiş Lowen ω ve ι Dönüşümleri	111
5.6. Lowen'nın Tombul ω_r ve ι_r Dönüşümleri	115
5.7. ω ve ω_r Lowen Funktorları ile Topolojik Özelliklerin Korunması	119
6 YUMUŞAK BELİRTİSİZ KÜMELERİN HUTTON CEBİRLERİ ARASINDAKİ Dİ-BAĞINTILAR	122
6.1. Bağntı ve ko-bağntının temsil edilmesi	122
6.2. Yumuşak Belirtisiz Kümeler Arasındaki Di-Fonksiyonlar	139
KAYNAKLAR DİZİNİ	145
ÖZGEÇMİŞ	150

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçek Sayılar Kümesi
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
A^p	A'nın çekirdeği
$(S, \mathcal{S})$	Doku Uzayları
$(S, \mathcal{S}, \sigma)$	Tümleyenli Doku Uzayları
(τ, κ)	Di-topoloji
$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$	Di-topolojik Doku Uzakı
(r, R)	Di-bağımtı
(f, F)	Di-fonksiyon
$SF(X)$	Yumuşak Belirtisiz Kümeler
$Ob(\mathbf{A})$	$\mathbf{A}$ kategorisinin nesneler sınıfı
Set	kümeler ve dönüşümlerin kategorisi
fSTex	basit dokular ve taban kümeleri arasındaki belirli koşulları sağlayan fonksiyonların oluşturduğu yapı
dfTex	dokular ve di-fonksiyonların kategorisi
dfSTex	basit dokular ve di-fonksiyonların kategorisi
dfPTex	sade dokular ve di-fonksiyonların kategorisi
tmTex	dokular ve dokusal dönüşümlerin kategorisi
ctmPTex	tümleyenli sade dokular ve tümleyeni koruyan dokusal dönüşümlerin kategorisi
SF-Top	SF-tpolojik uzaylar ve taban kümeleri arasındaki fonksiyonların oluşturduğu yapı

1. GİRİŞ

Dokular, L.M. Brown ve diğer akademisyenler tarafından tanımlanmıştır [5-8]. Ayrıntılı tanım, örnekler ve sonuçlar bir sonraki bölümde bulunabilir, ama bir fikir vermek amacı ile bazı kavramlardan kısaca söz edeceğiz.

Boştan farklı bir S kümesi üzerindeki *dokulanma*, $\mathcal{P}(S)$ kuvvet kümesinin belirli koşulları sağlayan bir alt kümesidir ve bir $\mathcal{S}$ dokulanması ile birlikte $(S, \mathcal{S})$ ikilisine *doku uzay* veya kısaca *doku* denir. Doku uzaylarında yapılan çalışmalarda belirtisiz (fuzzy) latilerin dokularla temsil edilebildikleri görülmüştür. Genelde dokulanmalar, kümesel tümleyen işlemi altında kapalı değildir, ama bu uzaylarda tanımlı kuvvetli bir dualite sayesinde, birçok kavram için uygun genelleştirmeler yapılabilmektedir. Örneğin, dokular üzerinde tanımlanan *di-topoloji* kavramı; topoloji, ikili topoloji ve $\mathbb{L}$ -topoloji kavramlarının bir ortak genellemesidir.

$(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki bir *di-topoloji*, $\tau, \kappa \subseteq \mathcal{S}$ olmak üzere (τ, κ) çiftidir. Burada $\tau, \emptyset$ ve S 'yi kapsayan sonlu arakesit, keyfi supremumlar altında kapalı bir ailedir ve elemanları *açık küme* olarak isimlendirilir. Diğer yandan $\kappa, \emptyset$ ve S 'yi kapsayan sonlu birleşimler ve keyfi arakesitler altında kapalı bir ailedir ve elemanları *kapalı küme* olarak isimlendirilir. Dolayısıyla *di-topoloji* açık ve kapalı kümeleri arasında bağlantı bulunmayan bir nevi “topoloji” dir. Di-topolojiler, ikili topolojik uzayların doğal bir genellemesi olup bir çok ikili topolojik kavramlar bu yapılar içinde ifade edilebilmektedir. Ayrıca bir $\mathbb{L}$ latisi için $\mathbb{L}$ -topolojiler de, dokuların bir özel tipi üzerindeki di-topolojiye karşılık gelmektedir.

Dokular ve di-topolojik doku uzaylar, belirtisiz kümeler ve belirtisiz topolojiler nokta-tabanlı bir ortamda incelemek amacı ile tasırlanmıştır. Fakat, doku uzayı teorisi bu motivasyondan büyük ölçüde bağımsız gelişmiştir. Literatürde bu bağlantıya çok az değinilmiştir.

Bizim bu çalışmadaki temel amacımız di-topolojik doku uzayları teorisini kullanarak belirtisiz kümelerin yeni bir genellemesini vermek ve di-topolojik doku uzayı ile belirtisiz kümeler arasındaki ilişkiyi incelemektir.

Bu tez çalışmasında, kategori kuramı hakkında genel olarak [1] nolu kaynağın gösterimleri kullanılmıştır. Yardımcı olmak için, kategori kuramında geçen bazı kavramlar

yeri geldiğinde hatırlatılmıştır. Özel olarak $\mathbf{A}$ bir kategori ise $Ob(\mathbf{A})$, bu kategorinin nesnelerinin sınıfını, $\mathbf{A}(A_1, A_2)$ de A_1 'den A_2 'ye giden morfizmaların kümesini göstermektedir.

Nesneleri dokular olan kategoriler tanımlamak için dokular arasında morfizmalar tanımlamaya ihtiyaç vardır. Bir doğal yaklaşım; kaynağı $(S, \mathcal{S})$ ve hedefi $(T, \mathcal{T})$ dokuları olan bir morfizma, S kümesinden T kümesine bir fonksiyon olmasıdır. Ancak böyle bir fonksiyon $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{T}$ dokulanmalarıyla uyumlu olmasını isteriz, ve bu uyum nasıl tanımlaması gerekli olduğunu baştan bilmek zordur. Bunun için fonksiyon yerine, [4] 'de tanımlı di-bağıntı kavramının özel halı olan di-fonksiyon, morfizma olarak kullanılmasıdır [8].

İkinci bölümde, latisler, dokular ve di-topolojik doku uzaylar için gerekli temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise dokularla Zadeh anlamında verilen klasik belirtisiz kümeler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Şöyle ki, $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ klasik anlamda bir belirtisiz küme olmak üzere,

$$F(X) = \{\mu : \mu : X \rightarrow [0, 1]\}.$$

kümesi tam, tamamen dağılımlı latistir. Bu kümeye $(X \times L, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{L})$ dokusu karşılık gelmektedir. Bu doku, $(X, \mathcal{P}(X))$ ile $(L, \mathcal{L})$ dokularının çarpımıdır. Burada $L = (0, 1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] : 0 \leq r \leq 1\}$ dir. Üstelik $F(X)$ kümesi bir Hutton cebirdir. Dokular arasındaki di-bağıntı, di-fonksiyon ve bunlarla ilgili diğer kavramlar $F(X)$, $F(Y)$ Hutton cebirler arasında taşınmaya çalışıldı. Üstelik nesneleri $F(X)$ Hutton cebirler ve morfizmaları bu nesneler arasındaki difonksiyonlar olan bir kategori elde edildi. Bu bölümde bu kategori ile diğer bilinen kategoriler arasında ilişkilerde kısaca incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, $\mu \in F(X)$ ve $M \subseteq X$ olmak üzere (μ, M) biçimde yazılan ve X 'in *yumuşak belirtisiz alt küme* adını verdiğimiz, genelleştirilmiş belirtisiz küme kavramı ele alıyoruz. X 'in tüm yumuşak belirtisiz alt kümeler kümesi $SF(X)$ olarak gösterilmiştir. Diğer taraftan, $F(X)$ Hutton cebirine karşı gelen $(X, \mathcal{P}(X)) \otimes (L, \mathcal{L})$ dokusundaki $(L, \mathcal{L})$ dokusu yerine, matematiksel bakımından daha uygun olan $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ birim aralık dokusu alınmıştır. Burada $\mathbb{I} = [0, 1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, r] : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{[0, r) : 0 \leq r \leq 1\}$ dir. Yumuşak belirtisiz alt küme tanımı, $(X, \mathcal{P}(X)) \otimes (\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokuya ile $SF(X)$ arasında yakın bir ilişki bulunacak biçimde verilmiştir. Bu ilişki ortaya çıkarmak için yumuşak belirtisiz kümelerin latis yapısı incelenmiştir ve yumuşak belirtisiz kümelerin latisi ile buna

karşılık gelen doku arasında bir izomorfizma tanımlanmıştır. Böylece, bu yeni kavram klasik belirtisiz kümelerle göre daha zengin bir dokuya karşılık geldiğinden daha zengin bir matematiksel yapıya sahip olacağı aşıkardır. Bu karşılıktan yararlanarak, yumuşak belirtisiz kümelerin noktaları ve ko-noktaları tanımlanmıştır ve özellikleri incelenmiştir. Ek olarak (μ, M) yumuşak belirtisiz kümesini $\langle \mu, \mu_M \rangle : X \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{I} \times \{0, 1\}$ fonksiyonuna karşılık getirerek yumuşak belirtisiz kümelerin alternatif bir tasfirine değindik. Daha sonra Yumuşak Belirtisiz kümelerin **SF** yapısını, yani **Set** kategorisi üzerindeki somut kategorisini inceledi.

Beşinci bölümde X üzerinde yumuşak belirtisiz topoloji adını verdiğimiz $T \subseteq SF(X)$ topolojileri ele alındı. Bu topolojilerin özellikleri ve bu topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları ve tıklılık incelenmiştir. Daha sonra $\omega : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF-Top}$ ve $\iota : \mathbf{SF-Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ biçiminde tanımlı Lowen dönüşümlerinin bir genelleştirilmesi elde edilmiştir. ω dönüşümü tıklılığı korumadığı için, bunlar yerine $\omega_r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF_r-Top}$ ve $\iota_r : \mathbf{SF_r-Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ biçiminde iki yeni Lowen dönüşüm tanımlanmış ve Lowen'nın tombul dönüşümleri adı verilmiştir. ω_r dönüşümü, tıklılığı korudukları için, bu dönüşümler genelleştirilmiş Lowen dönüşümlerinden daha kullanışlı topolojik özelliklere sahip olduğunu gösterilmiştir.

Altıncı bölümde ise, üçüncü bölüme paralel olarak yumuşak belirtisiz kümelerin hut-ton cebirleri arasındaki di-bağıntılar, di-fonksiyonlar ve bunlarla ilgi kavramlar ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, tez boyunca ihtiyaç duyulan tanım, teorem ve kavramları içermektedir.

2.1. Latis Kuramı

Bu alt bölümde, [3, 24, 29] nolu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Matematikte, sıralama ve denklik olmak üzere bağıntıların iki önemli tipi vardır. Bunlardan *kısmen sıralama bağıntısı*, küme kapsama ve gerçel sayılar üzerindeki sıralama bağıntısının bir genellemesidir. Bir $A \neq \emptyset$ kümesi üzerindeki, aşağıdaki koşulları sağlayan $\leq$ bağıntısına *kısmen sıralama bağıntısı* denir:

1. Her $x \in A$ için $x \leq x$. (yansıma)
2. Her $x, y \in A$ için $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$. (ters simetrik)
3. Her $x, y, z \in A$ için $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$ dir. (geçişlilik)

$(A, \leq)$ ikilisine *kısmen sıralı küme* denir.

2.1.1. Örnekler :

- (1) $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ bağıntısı kısmen sıralama bağıntısıdır.
- (2) $[0, 1]$ birim aralık üzerindeki bilinen $\leq$ bağıntısı kısmen sıralama bağıntısıdır.
- (3) $\mathcal{U}$, evrensel U kümesinin altkümelerinin bir ailesi olsun. Her $A, B \in \mathcal{U}$ için

$$A \leq B \implies A \subseteq B$$

ile tanımlı $\subseteq$ kapsama bağıntısı bir kısmen sıralama bağıntısıdır.

- (4) A, X üzerinde tanımlı, gerçel değerli fonksiyonların bir kümesi olsun. Her $f, g \in A$ ve $x \in X$ için

$$f \leq g \implies f(x) \leq g(x)$$

ile tanımlı $\leq$, A kümesi üzerinde bir kısmen sıralama bağıntısıdır.

$(A, \leq)$ kısmen sıralı küme olsun. Eğer $x \leq y$ ya da $y \leq x$ ise $x, y \in A$ öğelerine, *karşılaştırılabilir* denir.

Bir kısmen sıralı kümedeki herhangi iki öge karşılaştırılabilir ise bu kısmen sıralama bağıntısına *tam sıralama bağıntısı*, kümeye de *tam sıralı küme* denir.

A kısmen sıralı küme olsun. $m \in A$ olmak üzere,

$$\forall x[(x \in A, m \leq x) \implies x = m]$$

önermesi sağlanıyorsa, m 'ye *maximal öge* denir. Örnekler 2.1.1(1) ve (4) 'de maximal öge yoktur. (2). örnekte 1, (3). örnekte U tek maximal öğelerdir. Benzer şekilde, $n \in A$ için

$$\forall x[(x \in A, x \leq n) \implies x = n]$$

önermesi sağlanıyorsa, n 'ye *minimal öge* denir. Örnekler 2.1.1(1) 'de minimal öge yoktur, (2).örnekte minimal öge 0, (3). örnekte minimal öge $\emptyset$ olur. Bunun yanı sıra, bir kısmen sıralı A kümesindeki (eğer varsa) en büyük eleman $\max A$ ve en küçük eleman da $\min A$ ile gösterilir.

$(A, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve X , A kümesinin boş olmayan altkümesi olsun. Bu durumda, her $x \in X$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayan bir $a \in A$ ögesine X 'in bir *alt sınırı* ve alt sınırların en büyüğüne de X kümesinin *en büyük alt sınırı* denir. Benzer şekilde, her $y \in X$ için $y \leq b$ olacak biçimde bir $b \in A$ ögesine X 'in bir *üst sınırı* ve üst sınırların en küçüğüne de X kümesinin *en küçük üst sınırı* denir. Genelde, X kümesi bir kaç alt sınırı ve üst sınırı sahip olabilir, ancak en büyük alt sınır ve en küçük üst sınır varsa tektir. Buna göre:

Örnekler 2.1.1 (1) 'de geçen $(\mathbb{R}, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin $X = \{(1 + 1/n)^n \mid n = 1, 2, \dots\}$ altkümesini göz önüne alalım. Açıktır ki, 3 sayısı X kümesinin bir üst sınırıdır. Ancak en küçük üst sınır, $e = 2.7182\dots$ temel sabitidir. İyi bilinir ki, gerçel sayıların bir alt sınırı (üst sınırı) sahip, boş olmayan her altkümesi en büyük alt sınırı (en küçük üst sınırı) sahiptir.

A , gerçel sayıların boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer A bir alt sınırı sahipse, bu durumda en büyük alt sınır genellikle *infimum* olarak isimlendirilir ve $\inf A$ ile gösterilir. Buna karşılık, A bir üst sınırı sahipse, bu durumda en küçük üst sınır genellikle *supremum* olarak isimlendirilir ve $\sup A$ olarak yazılır. Eğer A kümesi sonlu ise, $\inf A$ ve $\sup A$ değerleri vardır ve A kümesine aittir.

2.1.2. Tanım : $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. L 'nin elemanlarının her çifti, en büyük alt sınıra ve en küçük üst sınıra sahipse, $(L, \leq)$ kısmen sıralı kümesine *latis* denir. Eğer $x, y \in L$ ise, $\{x, y\}$ kümesinin en büyük alt sınırı $x \wedge y$ ve en küçük üst sınırı $x \vee y$ olarak gösterilir. Ayrıca $x \wedge y$ ve $x \vee y$ elemanları x ve y 'nin sırasıyla, *infimum* ve *supremum* 'u olarak isimlendirilir.

Kolayca görülebilir ki, $\vee$ ve $\wedge$ ikili işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned} x \wedge x &= x \quad \text{ve} \quad x \vee x = x \\ x \wedge y &= y \wedge x \quad \text{ve} \quad x \vee y = y \vee x \\ x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z \quad \text{ve} \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ (x \wedge y) \vee x &= x \quad \text{ve} \quad (x \vee y) \wedge x = x \end{aligned}$$

Şimdi boştan farklı bir L kümesi üzerinde yukarıdaki özellikleri gerçekleyen ve $\vee, \wedge$ ile gösterilen iki işlem verilmiş olsun. Buna göre, L üzerinde $x \wedge y$ ve $x \vee y$ elemanları sırasıyla en büyük alt sınır, en küçük üst sınır olacak şekilde bir $\leq$ kısmen sıralama bağıntısı tanımlayacağız. İlk olarak, $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ eşitliklerinin denk olduğunu gösterelim: Eğer $x \wedge y = x$ ise $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = (y \wedge x) \vee y = y$ olur. Benzer şekilde, $x \vee y = y$ ise $x \wedge y = x$ olduğu gösterilebilir. Şimdi de her $x, y \in L$ için

$$x \leq y \iff x \wedge y = x$$

biçiminde tanımlı, $\leq$ bağıntısının kısmen sıralama bağıntısı olduğunu gösterelim: Her $x \in X$ için $x \wedge x = x$ olduğundan $x \leq x$ dir. Eğer $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x \wedge y = x, y \wedge x = y$ olup $x = x \wedge y = y \wedge x = y$ elde edilir. Şimdi de $x \leq y$ ve $y \leq z$ olsun. Öyleyse $x \wedge y = x$ ve $y \wedge z = y$ olup $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$ olduğundan $x \leq z$ elde edilir. O halde $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı kümedir. Şimdi $x \wedge y$ ögesinin x ve y 'nin en büyük alt sınırı olduğunu gösterelim: $(x \wedge y) \vee x = x$ ve $(x \wedge y) \vee y = (y \wedge x) \vee y = y$ olduğundan $x \wedge y \leq x$ ve $x \wedge y \leq y$ bulunur. Eğer $z \leq x$ ve $z \leq y$ ise $z \wedge x = z$ ve $z \wedge y = z$ olup $z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$ bulunur ki buradan $z \leq x \wedge y$ elde edilir. Benzer şekilde, $x \vee y$ ögesinin x ve y 'nin en küçük üst sınırı olduğu gösterilebilir. O halde $(L, \leq)$ bir latistir.

Örnekler 2.1.1 'de geçen tüm kısmen sıralı kümeler birer latistir.

2.1.3. Tanım : $(L, \leq)$ kısmen sıralı küme olsun. Eğer, L 'nin boştan farklı her A altkümesinin en küçük üst sınırı ($\bigvee A = \sup A$ veya join A olarak yazılır) ve en büyük alt sınırı ($\bigwedge A = \inf A$ veya meet A olarak yazılır) varsa, $(L, \leq)$ kısmen sıralı kümesine *tam latis* denir.

2.1.4. Örnekler :

- (1) $(\mathbb{R}, \leq)$ bir latistir ancak bir tam latis değildir.
- (2) $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ en büyük elemana sahip değildir, dolayısıyla $(\mathbb{N}, \leq)$ bir tam latis değildir.
- (3) $\mathbb{I} = [0, 1]$ bilinen sıralamayla bir tam latistir.
- (4) Eğer $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{P}(X)$, X 'in kuvvet kümesi ise $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir tam latistir. Buna göre, $\mathcal{P}(X)$ 'de bir altailenin supremumu bu ailenin birleşimi, infimumu da bu ailenin arakesitidir.

Biz, bir kuvvet kümesinin latis olan altkümeleri ile ilgileneceğimizden, aşağıdaki teorem temeldir.

2.1.5. Teorem : $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ keyfi arakesit altında kapalı bir aile olsun. Bu durumda, $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi tam latistir.

Kanıt: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ ve $\mathcal{A} \neq \emptyset$ olsun. Açıktır ki, $\bigcap \mathcal{A}$ kümesi, $\mathcal{A}$ ailesinin tüm öğeleri tarafından kapsanan, X 'in en geniş altkümesidir. Varsayımdan, $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{L}$ olup bu küme, $\mathcal{L}$ 'de $\mathcal{A}$ ailesinin en büyük alt sınırıdır. Şimdi

$$B = \bigcap \{L \mid L \in \mathcal{L} \text{ ve } \bigcup \mathcal{A} \subseteq L\}$$

kümesini göz önüne alalım. Varsayımdan, $B \in \mathcal{L}$ olur. Açıktır ki, $\mathcal{A}$ ailesindeki her küme, B 'nin bir altkümesidir ve B bu özelliğe sahip $\mathcal{L}$ 'nin en küçük elemanıdır. Böylece B kümesi, $\mathcal{A}$ 'nın $\mathcal{L}$ 'deki en küçük üst sınırıdır. O halde, $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi tam latistir. $\square$

Yukarıdaki kanıttan, eğer $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$ ise $\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$ olduğu açıktır. Tersine, $\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$ ise $\bigvee \mathcal{A} \in \mathcal{L}$ olduğundan, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$ bulunur. Buradan:

2.1.6. Sonuç : $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ keyfi arakesit altında kapalı bir aile ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda, $(\mathcal{L}, \subseteq)$ tam latisinde aşağıdaki önerme geçerlidir.

$$\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \iff \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}. \quad \square$$

Tam ve tamamen dağılımlı latisler bu çalışmada önemli rol oynar.

2.1.7. Tanım : Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan bir $(L, \leq)$ latisine *dağılımlı* denir: $x, y, z \in L$ için

$$(i) \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \text{ ve}$$

$$(ii) \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \text{ dir.}$$

2.1.8. Tanım : Aşağıdaki eşitliği sağlayan bir $(L, \leq)$ tam latisine *tamamen dağılımlı* denir: Her J index kümesi, $k \in J$ ve J_k index kümesi için $j \in J_k$ ve $a_j^k \in L$ olmak üzere

$$\bigwedge_{k \in J} \bigvee_{j \in J_k} a_j^k = \bigvee_{\gamma \in \prod_k J_k} \bigwedge_{k \in J} a_{\gamma(k)}^k \quad \text{dir.}$$

2.1.9. Teorem : [29] X boş olmayan bir küme olsun. Bu durumda $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tam latisi tamamen dağılımlıdır.

Kanıt: Biz

$$\bigcap_{k \in J} \bigcup_{j \in J_k} A_j^k = \bigcup_{\gamma \in \prod_k J_k} \bigcap_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k, \quad \forall A_j^k \subseteq X.$$

olduğunu göstermeliyiz.

(i) Bir $k_0 \in J$ alalım. Buradan her $\gamma \in \prod_k J_k$ için $\gamma(k_0) \in J_{k_0}$ olduğundan

$$\bigcap_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k \subseteq A_{\gamma(k_0)}^{k_0} \subseteq \bigcup_{j \in J_{k_0}} A_j^{k_0}$$

bulunur. Diğer yandan, $\gamma \in \prod_k J_k$ ve $k_0 \in J$ keyfi olduğundan

$$\bigcup_{\gamma \in \prod_k J_k} \bigcap_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k \subseteq \bigcap_{k \in J} \bigcup_{j \in J_k} A_j^k \quad \text{olur.}$$

(ii) Şimdi $x \in \bigcap_{k \in J} \bigcup_{j \in J_k} A_j^k$ olsun. Buradan her $k \in J$ için $x \in \bigcup_{j \in J_k} A_j^k$ ve böylece $x \in A_j^k$ olacak biçimde bir $j \in J_k$ vardır. Şimdi $\gamma(k) = j$ olsun. Öyleyse $\gamma(k) \in J_k$ olduğundan her k için $\gamma \in \prod_k J_k$ olup bu γ için $x \in \bigcap_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k$ bulunur. Dolayısıyla

$$\bigcap_{k \in J} \bigcup_{j \in J_k} A_j^k \subseteq \bigcup_{\gamma \in \prod_k J_k} \bigcap_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k \quad \text{bulunur.}$$

O halde (i) ve (ii) den,

$$\bigcap_{k \in J} \bigcup_{j \in J_k} A_j^k = \bigcup_{\gamma \in \Pi_k J_k} \bigcap_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k, \quad \forall A_j^k \subseteq X.$$

elde edilir. $\square$

2.1.10. Teorem : [29] $\mathbb{I} = [0, 1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, r] \mid r \in \mathbb{I}\} \cup \{[0, r) \mid r \in \mathbb{I}\}$ olsun. Bu durumda, $(\mathcal{J}, \subseteq)$ tam, tamamen dağılımlı bir latistir.

Kanıt: Açıkça, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{I})$ ailesi keyfi arakesit altında kapalıdır ve böylece Teorem 2.1.5 'den bir tam latistir. Bu latis için infimum ile arakesit aynıdır. Ayrıca $\mathcal{J}$ keyfi birleşim altında kapalı olduğundan Sonuç 2.1.6 'dan supremum ile birleşim de aynı olur. Bu latisin tamamen dağılımlı olması Teorem 2.1.9 'un kanıtına benzer şekilde yapılır. $\square$

2.1.11. Teorem : [29] $L = (0, 1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] \mid r \in L\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. Bu durumda, $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi tam, tamamen dağılımlı bir latistir.

Kanıt: İlk olarak, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(L)$ keyfi arakesit altında kapalıdır ve böylece Teorem 2.1.5 'den bir tam latistir. Diğer yandan, bu latiste infimum ile arakesit aynıdır. Ancak supremum ile birleşim aynı değildir. Örneğin, $\mathcal{F} = \{(0, 1 - 1/n] \mid n = 2, 3, 4, \dots\} \subseteq \mathcal{L}$ ailesi için $\bigcup \mathcal{F} = (0, 1) \notin \mathcal{L}$ olmasına rağmen $\bigvee \mathcal{F} = (0, 1] \in \mathcal{L}$ dir.

$\mathcal{L}$ latisinin tamamen dağılımlı olduğunu göstermek için,

$$\bigwedge_{k \in J} \bigvee_{j \in J_k} A_j^k = \bigvee_{\gamma \in \Pi_k J_k} \bigwedge_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k, \quad \forall A_j^k \in \mathcal{L}$$

eşitliğini sağlamalıyız.

Burada

$$\bigvee_{\gamma \in \Pi_k J_k} \bigwedge_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k \subseteq \bigwedge_{k \in J} \bigvee_{j \in J_k} A_j^k$$

kapsaması Teorem 2.1.9 'un kanıtında izlenen yolla kolayca elde edilir. Şimdi

$$\bigwedge_{k \in J} \bigvee_{j \in J_k} A_j^k \not\subseteq \bigvee_{\gamma \in \Pi_k J_k} \bigwedge_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k$$

olduğunu kabul edelim. Burada $A_j^k \in \mathcal{L}$ olduğundan her $j \in J_k$ ve $k \in J$ için $0 \leq r_j^k \leq 1$ olmak üzere $A_j^k = (0, r_j^k]$ olarak yazabiliriz. Açıkça,

$$\bigwedge_{k \in J} \bigvee_{j \in J_k} A_j^k = \bigwedge_{k \in J} (0, \sup_{j \in J_k} r_j^k] = (0, \inf_{k \in J} \sup_{j \in J_k} r_j^k]$$

ve

$$\bigvee_{\gamma \in \prod_k J_k} \bigwedge_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k = \bigvee_{\gamma \in \prod_k J_k} (0, \inf_{k \in J} r_{\gamma(k)}^k] = (0, \sup_{\gamma \in \prod_k J_k} \inf_{k \in J} r_{\gamma(k)}^k]$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\sup_{\gamma \in \prod_k J_k} \inf_{k \in J} r_{\gamma(k)}^k < \inf_{k \in J} \sup_{j \in J_k} r_j^k$$

olur. Buradan

$$\sup_{\gamma \in \prod_k J_k} \inf_{k \in J} r_{\gamma(k)}^k < r < \inf_{k \in J} \sup_{j \in J_k} r_j^k$$

olacak biçimde $r \in L$ vardır. O halde her $k \in J$ için $r < \sup_{j \in J_k} r_j^k$ olup $r < r_j^k$ olacak biçimde bir $j \in J_k$ seçebiliriz. Şimdi $\gamma(k) = j$ olarak tanımlarsak, $\gamma \in \prod_k J_k$ olur. O halde bu j ve her $k \in J$ için $r < r_{\gamma(k)}^k$ ve böylece $r \leq \inf_{k \in J} r_{\gamma(k)}^k$ bulunur. Ancak buradan

$$\sup_{\gamma \in \prod_k J_k} \inf_{k \in J} r_{\gamma(k)}^k < r$$

çelişkisi elde edilir. O halde

$$\bigwedge_{k \in J} \bigvee_{j \in J_k} A_j^k \subseteq \bigvee_{\gamma \in \prod_k J_k} \bigwedge_{k \in J} A_{\gamma(k)}^k$$

olmalıdır. $\square$

2.1.12. Tanım : [3] Bir tam, tamamen dağılımlı $\mathbb{L}$ latisi, aşağıdaki özellikleri sağlayan ve *şırayı tersine çeviren involüt*, $' : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$, işlemine sahipse, *Hutton cebiri* ([6] 'da belirtisiz latis olarak geçmiştir) olarak isimlendirilir.

- (a) Her $a \in \mathbb{L}$ için $(a')' = a$.
- (b) Her $a, b \in \mathbb{L}$ için $a \leq b \implies b' \leq a'$.

2.1.13. Tanım : [29] $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ Hutton cebirleri ve $f : \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$ bir fonksiyon olsun. Eğer f bire-bir, örten bir fonksiyon ve keyfi infimum, supremum ve de involütü koruyorsa, f 'ye bir *latis izomorfizma* adı verilir.

2.1.14. Tanım : [26, 27] X boş olmayan bir küme ve $(\mathbb{L}, ')$ bir Hutton cebiri olsun. X üzerindeki bir $\mathbb{L}$ -değerli küme, $\mu : X \rightarrow \mathbb{L}$ fonksiyonudur. X üzerindeki $\mathbb{L}$ -değerli kümelerin kümesi, $\mathbb{L}^X$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathbb{L}^X = \{\mu \mid \mu : X \rightarrow \mathbb{L} \text{ bir fonksiyon}\}$$

olur. $\mathbb{L}^X$ üzerinde, her $x \in X$ için $\mu(x) = 0$ olan $\mu \in \mathbb{L}^X$ elemanı *en küçük* ve her $x \in X$ için $\eta(x) = 1$ olan $\eta \in \mathbb{L}^X$ elemanı *en büyük* olarak isimlendirilir. Bazen bu elemanlar sırasıyla, $\emptyset$ ve X ile gösterilir.

2.1.15. Uyarı : [26, 27] $\mu, \eta \in \mathbb{L}^X$ ve $x \in X$ için

$$\mu \leq \eta \iff \mu(x) \leq \eta(x)$$

kısmen sıralama bağıntısı ile $\mathbb{L}^X$ bir Hutton cebiridir. Burada infimum ve supremum işlemleri, $x \in X$ için:

$$(i) \quad (\mu \wedge \eta)(x) = \mu(x) \wedge \eta(x)$$

$$(ii) \quad (\mu \vee \eta)(x) = \mu(x) \vee \eta(x)$$

$$(iii) \quad \left(\bigvee_{j \in J} \mu_j \right)(x) = \bigvee_{j \in J} \mu_j(x), \{ \mu_j \mid j \in J \} \subseteq \mathbb{L}^X$$

$$(iv) \quad \left(\bigwedge_{j \in J} \mu_j \right)(x) = \bigwedge_{j \in J} \mu_j(x), \{ \mu_j \mid j \in J \} \subseteq \mathbb{L}^X$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $\mathbb{L}^X$ üzerindeki sırayı ters çeviren involüt, bir $\mu \in \mathbb{L}^X$ için $\mu'(x) = (\mu(x))'$ ile tanımlıdır.

2.1.16. Tanım : [38] $\mathbb{L}$ tam, tamamen dağılımlı bir latıs olsun. $b, c \in \mathbb{L}$ ve $e \leq b \vee c \implies e \leq b$ yada $e \leq c$ ise $e \in \mathbb{L}$ elemanına *V-indirgenemez* denir. Eğer e , $\mathbb{L}$ 'nin sıfırdan farklı *V-indirgenemez* elemanı ise e 'ye $\mathbb{L}$ 'nin *molekülü* denir.

Şimdi $\mathbb{L}$ Hutton cebirindeki moleküllerin kümesini $M_{\mathbb{L}}$ ile gösterelim.

2.1.17. Tanım : [6] $x \in X$ ve $m \in M_{\mathbb{L}}$ olmak üzere,

$$x_m(z) = \begin{cases} m & z = x \\ 0 & z \neq x \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $x_m : X \rightarrow \mathbb{L}$ fonksiyonuna, X 'in bir *belirtisiz noktası* denir. Burada (x, m) çiftleri x_m ile temsil edilir.

2.1.18. Tanım : [15, 27] X küme ve $(\mathbb{L}, ')$ Hutton cebiri olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $T \subseteq \mathbb{L}^X$ altailesine, X üzerinde bir $\mathbb{L}$ -*topoloji* denir.

$$(1) \quad \emptyset, X \in T.$$

(2) $\mu, \eta \in T$ ise $\mu \wedge \eta \in T$.

(3) $\{\mu_j \mid j \in J\} \subseteq T$ ise $\bigvee_{j \in J} \mu_j \in T$ 'dir.

(X, T) çiftine, $\mathbb{L}$ -topolojik uzay denir.

2.1.19. Tanım : [15] (X, T) ve $(Y, \mathcal{V})$, $\mathbb{L}$ -topolojik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $v \in \mathcal{V}$ için $f^{-1}(v) \in T$ oluyorsa f 'ye $\mathbb{L}$ -süreklidir denir. Burada $f^{-1}(v) = v \circ f$ olarak tanımlıdır.

2.2. Dokular

Bu alt bölümde geçen tanım teorem ve sonuçlar,[4, 5, 6, 7, 8, 9, 12] nolu kaynaklardan alınmıştır.

2.2.1. Tanım : S bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ailesine S 'nin bir *dokulanması*, $(S, \mathcal{S})$ çiftine de bir *doku uzayı* veya kısaca *doku* denir.

(1) $(\mathcal{S}, \subseteq)$ ikilisi S ve $\emptyset$ 'yi kapsayan bir tam latistir.

(2) $(\mathcal{S}, \subseteq)$ üzerindeki infimum ve supremum işlemleri, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ üzerindeki arakesit ve birleşim işlemleri ile aşağıdaki anlamda bağlantılıdır. Tüm J indis kümeleri için $j \in J$, $A_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \bigwedge_{j \in J} A_j$$

ve her sonlu J index kümesi için $j \in J$, $A_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \bigvee_{j \in J} A_j \quad \text{dir.}$$

(3) $\mathcal{S}$ tamamen dağılımlıdır.

(4) $\mathcal{S}$, S kümesinin noktalarını ayırır. Yani, $s_1, s_2 \in S$ ve $s_1 \neq s_2$ olmak üzere $s_1 \in A$, $s_2 \notin A$ veya $s_2 \in A$, $s_1 \notin A$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}$ vardır.

$(S, \mathcal{S})$ dokusunda $s \in sS$ için tanımları verilen P_s ve Q_s kümelerinin doku kuramında çok önemli rolleri vardır. Şimdi bu kümelerin tanımını verelim.

2.2.2. Tanım : $(S, \mathcal{S})$ dokusu ve $s \in S$ için,

(a) $P_s = \bigcap \{A \in \mathcal{S} \mid s \in A\}$ ve

(b) $Q_s = \bigvee \{A \in \mathcal{S} \mid s \notin A\} = \bigvee \{P_u \mid u \in S, P_s \not\subseteq P_u\}$ biçiminde tanımlanır.

(c) P_s ve Q_s kümelerine, $(S, \mathcal{S})$ dokusunun sırasıyla p -kümesi ve q -kümesi denir.

Açıktır ki, $s \in S$ için P_s kümesi, $\mathcal{S}$ dokusunun s noktasını içeren en küçük elemanıdır. Bu nedenle, P_s kümeleri dokular kuramında önemli bir rol oynar.

2.2.3. Tanım : $(S, \mathcal{S})$ bir doku, $M \in \mathcal{S}$ ve M boştan farklı olsun. Her $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için

$$M \subseteq A_1 \cup A_2 \implies M \subseteq A_1 \quad \text{veya} \quad M \subseteq A_2$$

koşulu gerçekleşiyorsa, M kümesine dokunun *molekülü* denir.

Açıktır ki, $\{P_s \mid s \in S\}$ kümesi $\mathcal{S}$ dokusunda moleküllerin bir kümesidir ve $A \in \mathcal{S}$ için,

$$A = \bigvee_{s \in A} P_s = \bigcup_{s \in A} P_s \quad \text{dir.}$$

2.2.4. Tanım : Eğer $\mathcal{S}$ 'nin tüm molekülleri $\{P_s \mid s \in S\}$ formunda ise $(S, \mathcal{S})$ 'ye *basit doku* denir.

Dikkat edilirse, bir dokuda keyfi supremumlarla birleşimler aynı olmak zorunda değildir. Ancak bu durum, dokunun keyfi birleşimler altında kapalı olması durumunda gerçekleşir.

2.2.5. Tanım : $(S, \mathcal{S})$ dokusu verilsin. Her $s \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_s$ oluyorsa $(S, \mathcal{S})$ 'ye *sade doku* denir.

2.2.6. Yardımcı Teorem : $(S, \mathcal{S})$ sade dokusunda aşağıdaki koşullar denktir.

1. Her $s \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_s$
2. $\mathcal{S}$ birleşim altında kapalıdır.
3. $\forall J$ için $\bigvee_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} A_j$ dir.

Genelde $\mathcal{S}$ küme tümleyen işlemi altında kapalı değildir. Ancak bazı dokular için tümleyene benzeyen bir işlem tanımlanabilir.

2.2.7. Tanım : Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $\sigma^2(A) = A$ ve $A \subseteq B$ için $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$ koşullarını sağlayan $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dönüşümüne $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ üzerinde bir *tümleyen* ve $(\mathcal{S}, \mathcal{S}, \sigma)$ 'ya *tümleyenli doku* denir.

Dikkat edilirse, $A, B \in \mathcal{S}$ için $\sigma(A \cap B) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$ ve dolayısıyla $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) \cap \sigma(B)$ olur. Diğer yandan, $\sigma(\emptyset) \subseteq S \implies \sigma(S) \subseteq \emptyset \implies \sigma(S) = \emptyset$ ve dolayısıyla $\sigma(\emptyset) = S$ olarak bulunur.

2.2.8. Örnekler :

(1) Bir X kümesi ve $Y \subseteq X$ için $\pi(Y) = X \setminus Y$ ile tanımlı olmak üzere $(X, \mathcal{P}(X), \pi)$, bir tümleyenli dokudur. Ayrıca her $x \in X$ için $P_x = \{x\}$ ve $Q_x = X \setminus \{x\}$ dir. O halde, *ayrık doku* olarak isimlendirilen $(X, \mathcal{P}(X))$ hem basit hem de sade dokudur.

(2) $L = (0, 1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] \mid r \in [0, 1]\}$ olsun. Teorem 2.1.11 'den $(\mathcal{L}, \subseteq)$ 'nin tam ve tamamen dağılımlı bir latis olduğunu biliyoruz. Burada infimum ile arakesit aynı olmasına rağmen, supremum ile birleşim her zaman aynı değildir. Ancak $(0, r_1], (0, r_2], \dots, (0, r_n] \in \mathcal{L}$ için $\bigcup_{i=1}^n (0, r_i] = (0, \max_{i=1}^n r_i] \in \mathcal{L}$ olduğundan Tanım 2.2.1(1)-(2) sağlanır. Şimdi $s, t \in L$ olmak üzere $s \neq t$ olsun. Bu durumda, $s < t$ veya $t < s$ olur. İlk durumdan, $t \notin (0, s] \in \mathcal{L}$ ve ikinci durumdan $s \notin (0, t] \in \mathcal{L}$ olup $\mathcal{L}$ L 'nin noktalarını ayırır. Böylece $(L, \mathcal{L})$ bir doku olur. Burada bir $r \in L$ için $P_r = Q_r = (0, r]$ olup, $(L, \mathcal{L})$ dokusu, basittir ancak sade değildir.

Diğer yandan, $r \in (0, 1]$ için $\lambda((0, r]) = (0, 1 - r]$ ile tanımlı λ , $(L, \mathcal{L})$ üzerinde bir doğal tümleyendir.

(3) $\mathbb{I} = [0, 1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, t] \mid t \in [0, 1]\} \cup \{[0, t) \mid t \in [0, 1]\}$ olsun. $(\mathcal{J}, \subseteq)$, Teorem 2.1.10 'dan tam ve tamamen dağılımlı bir latistir. Üstelik, $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ çifti supremum ile birleşimin aynı olduğu bir dokudur. Burada $t \in \mathbb{I}$ için $P_t = [0, t]$ ve $Q_t = [0, t)$ olur. Dolayısıyla $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusu sade ama, $Q_s = [0, s)$ de birer molekül olduğundan, basit değildir.

Ayrıca $t \in [0, 1]$ için $\iota([0, t]) = [0, 1 - t)$, $\iota([0, t)) = [0, 1 - t]$ ile tanımlı ι , bir tümleyen dönüşümüdür. $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \iota)$ tümleyenli dokusu *birim aralık dokusu* olarak isimlendirilir.

(4) $B = \{a, b, c\}, \mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, B\}$ ve $\beta(\emptyset) = B, \beta(\{a\}) = \{a, b\}, \beta(\{a, b\}) = \{a\}, \beta(B) = \emptyset$ olarak tanımlansın. O halde $(B, \mathcal{B}, \beta)$ tümleyenli bir dokudur. Açıkça, $P_a = \{a\}, P_b = \{a, b\}, P_c = B$ ve $Q_a = \emptyset, Q_b = \{a\}, Q_c = \{a, b\}$ olup, $(B, \mathcal{B})$ dokusu hem sade hem basittir.

(5) $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, S\}$ kümesi, $S = \{a, b, c\}$ üzerinde bir dokulanmadır. Ancak $\mathcal{S}$ üzerinde bir tümleyen tanımlamak olanaksızdır.

Dikkat edilirse, $(X, \mathcal{P}(X), \pi)$ dokusunda, Q_x kümesi $\mathcal{P}(X)$ 'in x noktasını içermeyen en büyük elemanıdır. Ancak bu durum genelde doğru değildir. Gerçekten, Örnekler 2.2.8(2) 'de $r \in Q_r$ 'dir. Yardımcı Teorem 2.2.6'den kolayca görülebilir ki, $(S, \mathcal{S})$ dokusunda, $s \notin Q_s$ olması için gerek ve yeter koşul $(S, \mathcal{S})$ 'nin sade olmasıdır. Bununla birlikte, p -kümeleri ve q -kümeleri tümleyensel küme işlemleri ile dokularda bir dualite oluşturmaktadır.

Şimdi dokular arasında izomorfizma kavramını verelim:

2.2.9. Tanım : [4] $(S_1, \mathcal{S}_1)$ ve $(S_2, \mathcal{S}_2)$ doku uzaylar olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\theta : S_1 \rightarrow S_2$ dönüşümüne *doku izomorfizması* denir.

(i) θ , birebir ve örtendir.

(ii) Her $L \in \mathcal{S}_1$ için $\theta(L) \in \mathcal{S}_2$ 'dir.

(iii) $\theta : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2, L \rightarrow \theta(L)$ dönüşümü, birebir ve örtendir.

İzomorf olan doku uzaylar $(S_1, \mathcal{S}_1) \cong (S_2, \mathcal{S}_2)$ biçiminde gösterilir.

$(S_1, \mathcal{S}_1, \sigma_1)$ ve $(S_2, \mathcal{S}_2, \sigma_2)$ tümleyenli doku uzayları ve her $L \in \mathcal{S}_1$ için

$$\theta(\sigma_1(L)) = \sigma_2(\theta(L))$$

eşitliği sağlanıyorsa, θ dönüşümüne *tümleyenli doku izomorfizması* denir.

2.2.10. Teorem : [4] $\theta : (S_1, \mathcal{S}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir doku izomorfizması ve $\{L_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{S}_1$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) \theta\left(\bigcap_{j \in J} L_j\right) = \bigcap_{j \in J} \theta(L_j),$$

$$(ii) \theta\left(\bigvee_{j \in J} L_j\right) = \bigvee_{j \in J} \theta(L_j). \quad \square$$

Şimdi de dokular ve Hutton cebirleri arasında Brown ve Ertürk tarafından ele alınan aşağıdaki ilişkiyi verelim [6]:

$(\mathbb{L}, ')$ bir Hutton cebiri olsun. $M_{\mathbb{L}}$, $\mathbb{L}$ 'deki moleküllerin kümesi, $\hat{a} = \{m \in M_{\mathbb{L}} \mid m \leq a\}$ ve $\mathcal{M}_{\mathbb{L}} = \{\hat{a} \mid a \in \mathbb{L}\}$ olsun. Bu durumda:

2.2.11. Teorem : $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}})$ bir basit dokudur. Üstelik, $a \in \mathbb{L}$ olmak üzere $\mu_{\mathcal{L}}(\hat{a}) = \hat{a}'$ ile tanımlı $\mu_{\mathbb{L}} : \mathcal{M}_{\mathbb{L}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{L}}$ dönüşümü, $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}})$ dokusu üzerinde bir tümleyen dönüşümü ve $\hat{\cdot} : \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{L}}$ dönüşümü bir latis izomorfizmasıdır.

Tersine, her tümleyenli basit doku bu yolla uygun bir Hutton cebirinden elde edilebilir. Buna göre; $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ bir tümleyenli basit doku ise her $A \in \mathcal{S}$ için $A' = \sigma(A)$ olarak tanımlı $(\mathcal{S}, ')$ bir Hutton cebiri olur. Böylece $A \in \mathcal{S}$ için $\hat{A} = \{P_s \mid P_s \subseteq A\}$, $M_{\mathcal{S}} = \{P_s \mid s \in S\}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{S}} = \{\hat{A} \mid A \in \mathcal{S}\}$ ve $\mu_{\mathcal{S}}(\hat{A}) = \widehat{\sigma(A)}$ olarak tanımlanırsa, $(M_{\mathcal{S}}, \mathcal{M}_{\mathcal{S}}, \mu_{\mathcal{S}})$ üçlüsü $\mathcal{S}$ 'ye karşılık gelen tümleyenli basit doku olur. Buradan açıkça, $s \rightarrow P_s$ dönüşümü $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ile $(M_{\mathcal{S}}, \mathcal{M}_{\mathcal{S}}, \mu_{\mathcal{S}})$ dokuları arasında bir izomorfizmadır. $\square$

2.2.12. Tanım : Yukarıda elde edilen, $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}}, \mu_{\mathbb{L}})$ tümleyenli dokusu, $(\mathbb{L}, ')$ 'nin *Hutton dokusu* olarak isimlendirilir.

2.2.13. Örnekler :

- (1) Örnekler 2.2.8(2) 'de geçen $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ dokusu, $([0, 1], ')$ Hutton cebirine karşılık gelen Hutton dokusudur.
- (2) X boş olmayan küme ve $(\mathbb{L}, ')$ sabit bir Hutton cebiri olsun. Şimdi X üzerindeki, $\mathbb{W}_X = \mathbb{L}^X = \{\mu \mid \mu : X \rightarrow \mathbb{L} \text{ fonksiyon}\}$ $\mathbb{L}$ -değerli fonksiyonların kümesini göz önüne alalım. Biz 2.1. bölümden $\mathbb{W}_X$ 'in bir Hutton cebiri olduğunu biliyoruz. $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}}, \mu_{\mathbb{L}})$ üçlüsü, $(\mathbb{L}, ')$ Hutton cebirine karşılık gelen Hutton dokusu olsun. Diğer yandan, 2.1. bölümde de bahsedildiği gibi $\mathbb{W}_X$ 'in molekülleri esas itibari ile, $x \in X$ ve $m \in M_{\mathbb{L}}$ olmak üzere x_m "belirtisiz noktaları" dır. O halde $W_X = X \times M_{\mathbb{L}}$ 'in noktaları ile $\mathbb{W}_X$ 'in molekülleri aynı olup bir $f \in \mathbb{W}_X$ için $\hat{f} = \{(x, m) \in W_X \mid m \leq f(x)\}$ olur. Böylece $\mathcal{W}_X = \{\hat{f} \mid f \in \mathbb{W}_X\}$ ve $w_X(\hat{f}) = \widehat{(f')}$ olmak üzere $(W_X, \mathcal{W}_X, w_X)$ üçlüsü, $\mathbb{L}^X = \mathbb{W}_X$ Hutton cebirine karşılık gelen Hutton dokusu olur.

Yukarıdaki örneklerden, tümleyenli basit dokular ile Hutton cebirler ve bir X kümesinin $\mathbb{L}$ -değerli kümeleri arasında oldukça yakın bir ilişkinin varlığını görüyoruz. Bu

çalışmada, söz konusu bağlantılar ele alınacaktır. Diğer yandan, Örnekler 2.2.8(3) 'de geçen $(\mathbb{I}, \mathbb{J}, \iota)$ birim aralık dokusu basit değildir ve böylece bir Hutton cebirinden elde edilemez. Bu nedenle dokular, Hutton cebirlerinden daha geneldir.

2.2.14. Tanım : [5] $(S, \mathcal{S})$ bir doku ve $A \in \mathcal{S}$ olsun.

$$A^b = \bigcap \{ \bigcup \{ A_j \mid j \in J \} \mid \{ A_j \mid j \in J \} \subseteq \mathcal{S}, \quad A = \bigvee \{ A_j \mid j \in J \} \}$$

olarak tanımlı A^b 'ya, A kümesinin *çekirdeği* denir.

Sade doku uzaylarında $A^b = A$ olur. Ancak Örnekler 2.2.8(2) 'de geçen $(L, \mathcal{L})$ dokusu için $(0, r]^b = (0, r) \notin \mathcal{L}$ 'dir. Aşağıda, çekirdek ve p, q -kümelerinin temel özellikleri verilmiştir.

2.2.15. Teorem : [8] $(S, \mathcal{S})$ bir doku olsun.

- (1) $s \in S$ ve $A \in \mathcal{S}$ için, $s \notin A \implies A \subseteq Q_s \implies s \notin A^b$ 'dir.
- (2) $A \in \mathcal{S}$ için $A^b = \{s \mid A \not\subseteq Q_s\}$ 'dir.
- (3) Bir $A \in \mathcal{S}$ için $\mathcal{S}$ 'nin A^b kümesini kapsayan en küçük elemanı A 'dır.
- (4) $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \not\subseteq B$ ise $A \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq B$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.
- (5) $A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigcap \{ Q_s \mid P_s \not\subseteq A \}$ 'dır.
- (6) $A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigvee \{ P_s \mid A \not\subseteq Q_s \}$ 'dir. $\square$

Üstteki teoremden, (5) ve (6) 'dan dolayı daha önce bahsedilen dualite; $\bigcap$ ve $\bigvee$, Q_s ve P_s , $A \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq A$ arasında oluşmaktadır. Diğer yandan Teorem 2.2.15(4), kanıtlarda kapsamalar gösterilirken *olmayana ergi yöntemi* kullanıldığında çok kolaylık sağlar.

2.3. Çarpım Dokuları

$((S_j, \mathcal{S}_j)_{j \in J})$ dokuların bir ailesi ve $S = \prod_{j \in J} S_j$ kümesi, $((S_j)_{j \in J})$ kümelerinin kartezyen çarpımı olsun. Şimdi $k \in J$ ve $A \subseteq S_k$ için

$$Y_j = \begin{cases} A & , j = k \\ S_j & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere, $E(k, A) = \prod_{j \in J} Y_j$ olsun. Şimdi de

$$\varepsilon = \left\{ \bigcup_{k \in K} E(k, L_k) \mid K \subseteq J, L_k \in \mathcal{S}_k \right\}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{S}, \varepsilon$ kümesinin elemanlarının keyfi arakesitinden oluşsun. $\mathcal{S}$ ailesinin, S kümesi üzerinde bir doku olduğu [6] 'de gösterilmiştir.

2.3.1. Tanım : Yukarıda tanımlanan, $(S, \mathcal{S})$ dokusuna $((S_j, \mathcal{S}_j)_{j \in J})$ ailesinin *çarpım dokusu* denir ve bazen $\mathcal{S} = \bigotimes_{j \in J} \mathcal{S}_j$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremden, çarpım doku uzayının p, q - kümeleri karakterize edilmiş ve çarpım dokusu üzerinde faydalı bazı eşitlikler verilmiştir.

2.3.2. Önerme : [6, 9] $((S_j, \mathcal{S}_j)_{j \in J})$ dokuların bir ailesi, $(S, \mathcal{S})$ bu dokuların çarpımı olsun. Aşağıdakiler geçerlidir. $s = (s_j) \in S$ için

$$(1) \ s = (s_j) \in S \text{ için } P_s = \bigcap_{j \in J} E(j, P_{s_j}) = \prod_{j \in J} P_{s_j}.$$

$$(2) \ s = (s_j) \in S \text{ için } Q_s = \bigcup_{j \in J} E(j, Q_{s_j}) \text{ 'dir.}$$

$$(3) \ j \in J \text{ ve } A_j \in \mathcal{S}_j \text{ için } \prod_{j \in J} A_j \in \mathcal{S} \text{ 'dir.}$$

$$(4) \ S^\flat = \prod_{j \in J} S_j^\flat \text{ 'dir.}$$

$$(5) \ s, t \in S \text{ için } P_s \not\subseteq Q_t \text{ olması için gerek ve yeter koşul her } j \in J \text{ için } P_{s_j} \not\subseteq Q_{t_j} \text{ olmasıdır. } \square$$

Eğer $((S_j, \mathcal{S}_j, \sigma_j)_{j \in J})$ tümleyenli dokuların bir ailesi ise $(S, \mathcal{S})$ çarpım dokusu üzerinde bir tümleyen tanımlamak mümkündür [6].

2.3.3. Teorem : Bir $A \in \mathcal{S}$ için,

$$\sigma(A) = \bigcap_{s \in A} \bigcup_{j \in J} E(j, \sigma_j(P_{s_j}))$$

ile tanımlı σ , $(S, \mathcal{S})$ çarpım dokusu üzerinde bir tümleyen tanımlar. $\square$

Aşağıdaki eşitlikler bazı kanıtlarda işimizi kolaylaştıracaktır.

2.3.4. Yardımcı Teorem: [6] $((S_j, \mathcal{S}_j, \sigma_j)_{j \in J})$ tümleyenli dokular ve $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ bu dokuların çarpımı olsun. O halde $j \in J$ ve $A_j \in \mathcal{S}$ için,

$$\sigma(E(j, A_j)) = E(j, \sigma_j(A_j))$$

dir. Buradan bir $s \in S$ için $\sigma(P_s) = \bigcup_{j \in J} E(j, \sigma_j(P_{s_j}))$ olur. $\square$

2.3.5. Örnekler :

- (1) $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzaylar olsun. $S \times T$ üzerindeki $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusu, $A \in \mathcal{S}$ ve $B \in \mathcal{T}$ olmak üzere $(A \times T) \cup (S \times B)$ formundaki kümelerin keyfi arakesitinden oluşur. O halde, $(s, t) \in S \times T$ için

$$P_{(s,t)} = P_s \times P_t \quad \text{ve} \quad Q_{(s,t)} = (Q_s \times T) \cup (S \times Q_t)$$

olarak bulunur.

- (2) Örnek (1) deki çarpım dokusunun özel ve önemli bir durumu, $(S, \mathcal{P}(S))$ ve $(T, \mathcal{T})$ dokularının çarpımı alındığında ortaya çıkar. Böylece $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusu, $A \subseteq S$ ve $B \in \mathcal{T}$ olmak üzere $(A \times T) \cup (S \times B)$ formundaki kümelerin keyfi arakesitinden oluşur. Burada karışıklığa neden olmaması için, $P_{(s,t)}$ yerine $\overline{P}_{(s,t)}$ ve $Q_{(s,t)}$ yerine $\overline{Q}_{(s,t)}$ yazacağız. Açıkça, $\overline{P}_{(s,t)} = \{s\} \times P_t$ ve $\overline{Q}_{(s,t)} = ((S \setminus \{s\}) \times T) \cup (S \times Q_t)$ olur. Dolayısıyla

$$\overline{P}_{(s',t')} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \iff s' = s \quad \text{ve} \quad P_{t'} \not\subseteq Q_t$$

bulunur. $(S \times T, \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T})$ çarpım dokusu, bağıntı, ko-bağıntı kavramları için önemli bir rol oynar.

- (3) Örnekler 2.2.13(2) 'de geçen $\mathbb{L}^X = \mathbb{W}_X$ Hutton cebirine karşılık gelen $(W_X, \mathcal{W}_X, w_X)$ Hutton dokusu, $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ ile $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}}, \mu_{\mathbb{L}})$ tümleyenli dokularının çarpımıdır (bkz. [6]).

2.4. Bağıntılar, Ko-bağıntılar ve Di-bağıntılar

$(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzaylar olsun. Acaba $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya giden bir (iki-li) bağıntıdan ne anlıyoruz. Özel olarak, $(X, \mathcal{P}(X))$ ve $(Y, \mathcal{P}(Y))$ dokularını alırsak, X 'den Y kümesine giden ikili bağıntıların $\mathcal{P}(X \times Y)$ kümesi, $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y)$ dokusal

çarpımı olur. Böylece $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya giden bir bağıntıyı, $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ 'nin bir elemanı olarak görebiliriz. Ancak kolayca görülebilir ki, doku teorisini desteklemek için bu çarpım kümesi fazla küçüktür. Diğer yandan, bir S kümesi üzerindeki dokulanma, küme tümleyen işlemi altında kapalı olmadığından, standart bağıntılar ve fonksiyonlar, dokular kuramı için büyük ölçüde uygun değildir. Bu nedenle [[3]] 'de, Lawrence M. Brown dokular için bağıntı, ko-bağıntı, di-bağıntı ve di-fonksiyon kavramlarını tanıtmıştır. Bu alt bölümde, bağıntı, ko-bağıntı ve di-bağıntı kavramlarının birbirleriyle olan ilişkilerine tezde ihtiyaç duyulacak kadar yer verildi. Di-fonksiyon kavramı bir sonraki alt bölümde anlatılacaktır.

Aşağıda verilen temel tanım ve sonuçlar, [3, 8] nolu kaynaktan alınmıştır.

2.4.1. Tanım : $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzaylar olsun.

- (1) Aşağıdaki koşulları sağlayan $r \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ 'ye $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya tanımlı bir *bağıntı* denir.

$$(R1) \quad r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}, P_{s'} \not\subseteq Q_s \implies r \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)} \text{ 'dir.}$$

$$(R2) \quad r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \implies P_s \not\subseteq Q_{s'} \text{ ve } r \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)} \text{ olacak şekilde bir } s' \in S \text{ vardır.}$$

- (2) Aşağıdaki koşulları sağlayan $R \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ 'ye $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya tanımlı bir *ko-bağıntı* denir.

$$(CR1) \quad \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R, P_s \not\subseteq Q_{s'} \implies \overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R \text{ 'dir.}$$

$$(CR2) \quad \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \implies P_{s'} \not\subseteq Q_s \text{ ve } \overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R \text{ olacak şekilde bir } s' \in S \text{ vardır.}$$

- (3) Eğer r ve R , $(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ 'ya sırasıyla bağıntı ve ko-bağıntı ise (r, R) çiftine $(S, \mathcal{S})$ 'dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna bir *di-bağıntı* denir.

Ayrıca (r_1, R_1) ve (r_2, R_2) , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya iki di-bağıntı ise

$$(r_1, R_1) \subseteq (r_2, R_2) \implies r_1 \subseteq r_2 \quad \text{ve} \quad R_2 \subseteq R_1$$

olarak tanımlıdır.

$(S, \mathcal{S})$ bir doku olsun. Bu durumda,

$$i_{(S,S)} = \bigvee \{\overline{P}_{(s,s)} \mid s \in S\} \quad \text{ve} \quad I_{(S,S)} = \bigcap \{\overline{Q}_{(s,s)} \mid s \in S\}$$

ile tanımlı $(i_{(S,S)}, I_{(S,S)})$ çifti $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir di-bağıntıdır. Dikkat edilirse, $i_{(S,S)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \iff P_s \not\subseteq Q_t$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq I_{(S,S)} \iff P_t \not\subseteq Q_s$ olmaktadır.

2.4.2. Tanım : $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlanan yukarıdaki, $i_{(S, \mathcal{S})}$ (sırasıyla $I_{(S, \mathcal{S})}$, $(i_{(S, \mathcal{S})}$, $I_{(S, \mathcal{S})}$)) 'ye *birim bağıntı* (*birim ko-bağıntı*, *birim di-bağıntı*) adı verilir.

Karışıklığa yol açmadığı sürece, $(i_{(S, \mathcal{S})}, I_{(S, \mathcal{S})})$ yerine bazen (i_S, I_S) ya da (i, I) kullanılır.

Şimdi ters bağıntı, ters ko-bağıntı ve ters di-bağıntı kavramlarını verelim.

2.4.3. Tanım : $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzaylar olsun.

(1) r , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir bağıntı olsun. Bu durumda,

$$r^{\leftarrow} = \bigcap \{\overline{Q}_{(t,s)} \mid r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}\}$$

ko-bağıntısına r 'nin *tersi* denir.

(2) R , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir ko-bağıntı olsun. Bu durumda

$$R^{\leftarrow} = \bigvee \{\overline{P}_{(t,s)} \mid \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R\}$$

bağıntısına, R 'nin *tersi* denir.

(3) (r, R) , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ olarak tanımlı $(r, R)^{\leftarrow}$ 'ye (r, R) di-bağıntısının *tersi* denir.

Aşağıda ters bağıntı ve ters ko-bağıntılarla ilgili özellikler verilmiştir.

2.4.4. Yardımcı Teorem : (r, R) , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Bu durumda:

(1) Her $s \in S$ ve $t \in T$ için $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \iff \overline{P}_{(t,s)} \not\subseteq r^{\leftarrow}$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \iff R^{\leftarrow} \not\subseteq \overline{Q}_{(t,s)}$ 'dir.

(2) $(r^{\leftarrow})^{\leftarrow} = r$ ve $(R^{\leftarrow})^{\leftarrow} = R$ 'dir.

(3) Bir (m, M) di-bağıntısı için,

$$r \subseteq m \iff m^{\leftarrow} \subseteq r^{\leftarrow} \quad \text{ve} \quad R \subseteq M \iff M^{\leftarrow} \subseteq R^{\leftarrow} \quad \text{dir.} \quad \square$$

Özel olarak $(S, \mathcal{P}(S))$ ve $(T, \mathcal{P}(T))$ dokularında di-bağıntıyı karakterize etmeye çalıştığımızda $\mathcal{P}(S \times T) = \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{P}(T)$ olup, bir $f \in \mathcal{P}(S \times T)$ için

$$f = \bigcap \{((S \times A) \cup (B \times T)) \mid A \in \mathcal{P}(T), \quad B \in \mathcal{P}(S)\}$$

olarak ifade edilebileceğinden, $f \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{P}(T)$ olur. Diğer yandan, $f \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{P}(T)$ olsun. Öyleyse $f, A \in \mathcal{P}(T), B \in \mathcal{P}(S)$ olmak üzere, $(S \times A) \cup (B \times T) \subseteq S \times T$ biçimindeki kümelerin keyfi arakesitinden oluşur. Bu durumda, $f \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(T)$ olup $\mathcal{P}(S \times T) = \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{P}(T)$ elde edilir.

Eğer ayrık dokular üzerinde çalışılırsa bilinen anlamda ikili (noktasal) bağıntılarla aşağıdaki gibi bir ilişki elde edilir: $\varphi : S \rightarrow T$ bir noktasal bağıntı olsun. Bu durumda, $\varphi(S, \mathcal{P}(S))$ 'den $(T, \mathcal{P}(T))$ dokusuna Tanım 2.4.1 anlamında hem bağıntı hem de ko-bağıntıdır:

İlk olarak, bağıntı özelliklerinin sağlandığını gösterelim: $s \in S$ ve $t \in T$ için $\varphi \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ise $(a, b) \in \varphi, (a, b) \notin \overline{Q}_{(s,t)}$ olacak şekilde bir $a \in S$ ve $b \in T$ vardır. Buradan $(a, b) \notin \overline{Q}_{(s,t)}$ ise $a = s$ ve $b = t$ olarak bulunur.

(R1) Bir $s' \in S$ için $P_{s'} \not\subseteq Q_s$ ise $P_{s'} = \{s'\} \not\subseteq Q_s = Q_a = S \setminus \{a\}$ olup, $s' = a = s$ bulunur. Buradan $\varphi \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}$ olarak elde edilir.

(R2) $(X, \mathcal{P}(X))$ dokusu sade olduğundan $P_s \not\subseteq Q_a$ dir. O halde $(a, b) \notin \overline{Q}_{(a,t)}$ olup $\varphi \not\subseteq \overline{Q}_{(a,t)}$ elde edilir.

Şimdi de ko-bağıntı özelliklerinin sağlandığını gösterelim: $s \in S$ ve $t \in T$ için $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \varphi$ ise $(a, b) \in \overline{P}_{(s,t)}, (a, b) \notin \varphi$ olacak şekilde bir $a \in S$ ve $b \in T$ vardır. Buradan $a = s$ ve $b = t$ olarak bulunur.

(CR1) Bir $s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise $a = s' = s$ olup $(a, b) \in \overline{P}_{(s',t)}$ bulunur. Buradan $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq \varphi$ elde edilir.

(CR2) $(X, \mathcal{P}(X))$ dokusu sade olduğundan $P_a \not\subseteq Q_s$ dir. Dolayısıyla $(a, b) \in \overline{P}_{(a,t)}$ olup $\overline{P}_{(a,t)} \not\subseteq \varphi$ elde edilir.

Burada $\varphi^{-1} = \{(t, s) \mid (s, t) \in \varphi\}$, bilinen noktasal ters bağıntı ve ^{c} küme tümleyen işlemini göstermek üzere,

$$\varphi^{\leftarrow} = (\varphi^{-1})^c = (\varphi^c)^{-1}$$

biçiminde bir ilişki vardır.

Gerçekten, $\varphi^{\leftarrow} \not\subseteq (\varphi^c)^{-1}$ ise $\varphi^{\leftarrow} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq (\varphi^c)^{-1}$ olacak biçimde $s \in S, t \in T$ vardır. Buradan $(s, t) \notin (\varphi^c)^{-1}$ olup $(t, s) \notin \varphi^c$ ve dolayısıyla $(t, s) \in \varphi$ bulunur. Böylece $\varphi \not\subseteq \overline{Q}_{(t,s)}$ olup $\varphi^{\leftarrow} \subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ çelişkisi elde edilir.

Tersine, $(\varphi^c)^{-1} \not\subseteq \varphi^{\leftarrow}$ ise $(\varphi^c)^{-1} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \varphi^{\leftarrow}$ olacak biçimde $s \in S, t \in T$ vardır. Son durumdan, $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,w)}$ ve $\varphi \not\subseteq \overline{Q}_{(w,s)}$ olacak şekilde bir $w \in T$ vardır. Buradan $P_t \not\subseteq Q_w, \varphi \not\subseteq \overline{Q}_{(t,s)}$ ve dolayısıyla $(t, s) \in \varphi$ bulunur. Ancak diğer yandan, $(s, t) \in (\varphi^c)^{-1}$ olup $(t, s) \in \varphi^c$ çelişkisi elde edilir.

Diğer yandan, $(\varphi^{-1})^c = (\varphi^c)^{-1}$ olduğu açıktır.

Şimdi bir $\varphi : S \rightarrow T$ noktasal bağıntısı ve $A \subseteq S$ için $\varphi[A] = \{t \mid \exists s \in A, (s, t) \in \varphi\} = \bigcap \{T \setminus \{t\} \mid \forall s, \varphi \not\subseteq (S \times T) \setminus \{(s, t)\} \implies A \subseteq S \setminus \{s\}\}$, olarak tanımlı $\varphi[A]$ kümesinden yola çıkarak, aşağıda dokular için bir yaklaşım verilmiştir:

2.4.5. Tanım : $(r, R), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun.

(1) $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere r 'nin A-kesiti,

$$r^{\rightarrow}(A) = \bigcap \{Q_t \mid \forall s, r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \implies A \subseteq Q_s\} \in \mathcal{T}$$

(2) $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere R 'nin A-kesiti,

$$R^{\rightarrow}(A) = \bigvee \{P_t \mid \forall s, \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \implies P_s \subseteq A\} \in \mathcal{T}$$

biçiminde tanımlanır.

Açıktır ki, kesitler içermeyi korurlar, yani $A_1 \subseteq A_2 \implies r^{\rightarrow}(A_1) \subseteq r^{\rightarrow}(A_2)$ ve $R^{\rightarrow}(A_1) \subseteq R^{\rightarrow}(A_2)$ dir.

2.4.6. Yardımcı Teorem : $(r, R), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Bu durumda,

$$r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \iff r^{\rightarrow}(P_s) \not\subseteq Q_t \quad \text{ve} \quad \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \iff P_t \not\subseteq R^{\rightarrow}(Q_s) \quad \text{'dir.} \quad \square$$

2.4.7. Yardımcı Teorem : (r_1, R_1) ve $(r_2, R_2), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya iki di-bağıntı ise

(1) Her $A \in \mathcal{S}$ için $r_1 \subseteq r_2 \iff r_1^{\rightarrow}(A) \subseteq r_2^{\rightarrow}(A)$ dir.

(2) Her $A \in \mathcal{S}$ için $R_1 \subseteq R_2 \iff R_1^{\rightarrow}(A) \subseteq R_2^{\rightarrow}(A)$ dir. $\square$

Şimdi kesitler yardımıyla, aşağıdaki yardımcı teoremi yazalım.

2.4.8. Tanım : $(r, R), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Bu durumda, bir $B \in \mathcal{T}$ için:

$$(1) \ r^{\leftarrow}(B) = (r^{\leftarrow})^{\rightarrow}(B) = \bigvee \{P_s \mid \forall t, r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \implies P_t \subseteq B\} \in \mathcal{S} \text{ ve}$$

$$(2) \ R^{\leftarrow}(B) = (R^{\leftarrow})^{\rightarrow}(B) = \bigcap \{Q_s \mid \forall t, \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \implies B \subseteq Q_t\} \in \mathcal{S} \text{ 'dir. } \square$$

2.4.9. Yardımcı Teorem :

(1) Bir r bağıntısı için $r^{\rightarrow}(\emptyset) = \emptyset$, $A \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq r^{\leftarrow}(r^{\rightarrow}(A))$ ve bir $B \in \mathcal{T}$ için $r^{\rightarrow}(r^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$ 'dir.

(2) Bir R ko-bağıntısı için $R^{\rightarrow}(S) = T$, $A \in \mathcal{S}$ için $R^{\leftarrow}(R^{\rightarrow}(A)) \subseteq A$ ve bir $B \in \mathcal{T}$ için $B \subseteq R^{\rightarrow}(R^{\leftarrow}(B))$ 'dir.

(3) (i, I) , $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde birim di-bağıntı ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda, $i^{\rightarrow}(A) = I^{\rightarrow}(A) = A$ ve böylece $i^{\leftarrow}(A) = I^{\leftarrow}(A) = A$ olur.

(4) $j \in J$, $A_j \in \mathcal{S}$ için

$$r^{\rightarrow}\left(\bigvee_{j \in J} A_j\right) = \bigvee_{j \in J} r^{\rightarrow}(A_j) \quad \text{ve} \quad R^{\rightarrow}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \bigcap_{j \in J} R^{\rightarrow}(A_j) \quad \text{'dir.}$$

Ayrıca $j \in J$ ve $B_j \in \mathcal{T}$ için

$$r^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} r^{\leftarrow}(B_j) \quad \text{ve} \quad R^{\leftarrow}\left(\bigvee_{j \in J} B_j\right) = \bigvee_{j \in J} R^{\leftarrow}(B_j) \quad \text{olur. } \square$$

Şimdi di-bağıntıların bileşkesi tanımını verelim.

2.4.10. Tanım : (c, C) , $(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ 'ya ve (d, D) , $(T, \mathcal{T})$ dokusundan $(U, \mathcal{U})$ 'ya iki di-bağıntı olsun.

(1) c, d bağıntılarının *bileşkesi* olan $d \circ c$,

$$d \circ c = \bigvee \{\overline{P}_{(s,u)} \mid \exists t \in T, \quad c \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \quad \text{ve} \quad d \not\subseteq \overline{Q}_{(t,u)}\}$$

(2) C, D ko-bağıntılarının *bileşkesi* olan $D \circ C$,

$$D \circ C = \bigcap \{\overline{Q}_{(s,u)} \mid \exists t \in T, \quad \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq C \quad \text{ve} \quad \overline{P}_{(t,u)} \not\subseteq D\}$$

(3) c, d ve C, D yukarıdaki gibi olmak üzere (c, C) ve (d, D) di-bağıntılarının *bileşkesi*,

$$(d, D) \circ (c, C) = (d \circ c, D \circ C).$$

biçiminde tanımlanır.

2.4.11. Önerme : Tanım 2.4.10 'da geçen $(d, D) \circ (c, C) = (d \circ c, D \circ C)$ bileşkesi $(S, \mathcal{S})$ 'den $(U, \mathcal{U})$ 'ya bir di-bağıntıdır. $\square$

Aşağıda önermede bileşke işleminin önemli özellikleri verilmiştir. Bu özellikler, noktasal fonksiyonlarda karşılık gelen durumların doğal bir genellemesidir.

2.4.12. Önerme : $(c, C), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya ve $(d, D), (T, \mathcal{T})$ dokusundan $(U, \mathcal{U})$ 'ya iki di-bağıntı olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir:

(1) $(i_S, I_S), (S, \mathcal{S})$ üzerinde ve $(i_T, I_T), (T, \mathcal{T})$ dokusu üzerinde birim di-bağıntılar ise

$$(c, C) \circ (i_S, I_S) = (c, C) \quad \text{ve} \quad (i_T, I_T) \circ (c, C) = (c, C) \quad \text{olur.}$$

(2) $[(d, D) \circ (c, C)]^{\leftarrow} = (c, C)^{\leftarrow} \circ (d, D)^{\leftarrow}$ 'dır.

(3) (c, C) ve (d, D) di-bağıntıları için aşağıdakiler sağlanır.

(a) Her $A \in \mathcal{S}$ için $(q \circ p)^{\rightarrow}(A) = q^{\rightarrow}(p^{\rightarrow}(A))$ ve $(Q \circ P)^{\rightarrow}(A) = Q^{\rightarrow}(P^{\rightarrow}(A))$ ve

(b) Her $B \in \mathcal{U}$ için $(q \circ p)^{\leftarrow}(B) = p^{\leftarrow}(q^{\leftarrow}(B))$ ve $(Q \circ P)^{\leftarrow}(B) = P^{\leftarrow}(Q^{\leftarrow}(B))$ dir.

(4) Bileşke işlemi, birleşme özelliğine sahiptir. Yani, (r, R) 'de, $(U, \mathcal{U})$ 'dan $(V, \mathcal{V})$ 'ye bir di-bağıntı ise,

$$[(r, R) \circ (d, D)] \circ (c, C) = (r, R) \circ [(d, D) \circ (c, C)] \quad \text{'dir.} \quad \square$$

Aşağıda tümleyenli dokular üzerindeki bir bağıntının, ko-bağıntının ve di-bağıntının tümleyeni tanımları verilmiştir.

2.4.13. Tanım : $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ve $(T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli dokular, $(r, R), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Bu durumda:

(1) r bağıntısının tümleyeni r' bir ko-bağıntıdır ve

$$r' = \bigcap \{ \overline{Q}_{(s,t)} \mid \exists u, v \quad r \not\subseteq \overline{Q}_{(u,v)}, \quad \sigma(Q_s) \not\subseteq Q_u, \quad P_v \not\subseteq \theta(P_t) \}$$

(2) R ko-bağıntısının tümleyeni R' bir bağıntı olup

$$R' = \bigvee \{ \overline{P}_{(s,t)} \mid \exists u, v \quad \overline{P}_{(u,v)} \not\subseteq R, \quad P_u \not\subseteq \sigma(P_s), \quad \theta(Q_t) \not\subseteq Q_v \}$$

- (3) (r, R) di-bağıntısının tümleyeni, $(r, R)'$ de bir di-bağıntı olup $(r, R)' = (R', r')$ biçiminde tanımlanır.

Eğer $(r, R)' = (r, R)$ ise (r, R) di-bağıntısına *tümleyenlidir* denir.

2.4.14. Yardımcı Teorem : Gösterimler yukarıdaki gibi olmak üzere;

- (1) Her $A \in \mathcal{S}$ için $(r')^\rightarrow(A) = \theta(r^\rightarrow \sigma(A))$ ve $(R')^\rightarrow(A) = \theta(R^\rightarrow \sigma(A))$ 'dır.
 (2) Her $B \in \mathcal{T}$ için $(r')^\leftarrow(B) = \sigma(r^\leftarrow \theta(B))$ ve $(R')^\leftarrow(B) = \sigma(R^\leftarrow \theta(B))$ 'dir. $\square$

Aşağıdaki teorem tümleyen işleminin temel özelliklerini verir.

2.4.15. Teorem : $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ve $(T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli dokular, $(r, R), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya di-bağıntı ve $(r, R)' = (R', r')$, (r, R) di-bağıntısının tümleyeni olsun.

- (1) $(r')' = r$ ve $(R')' = R$ 'dir.
 (2) $(r')^\leftarrow = (r^\leftarrow)'$ ve $(R')^\leftarrow = (R^\leftarrow)'$ dir.
 (3) Eğer $(U, \mathcal{U}, v)$ tümleyenli bir doku ve $(d, D), (T, \mathcal{T})$ 'den $(U, \mathcal{U})$ 'ya bir di-bağıntı ise $(d \circ r)' = d' \circ r'$ ve $(D \circ R)' = D' \circ R'$ dir.
 (4) $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerindeki, (i_S, I_S) birim di-bağıntısı tümleyenlidir. $\square$

2.5. Di-fonksiyonlar

Şimdi klasik anlamda, fonksiyonun bağıntının özel bir tipi olduğu gibi di-bağıntının özel bir tipi olarak di-fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.5.1. Tanım : [[3]] $(f, F), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, (f, F) di-bağıntısına, di-fonksiyon denir ve $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ ya da $(S, \mathcal{S}) \xrightarrow{(f, F)} (T, \mathcal{T})$ ile gösterilir.

(DF1) $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise $f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır.

(DF2) $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s,t')} \not\subseteq F$ ise $P_{t'} \not\subseteq Q_t$ dir.

Kolayca görülebilir ki $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki (i_S, I_S) birim di-bağıntısı bir di-fonksiyondur ve *birim di-fonksiyon* olarak isimlendirilir.

Özel olarak, $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ noktasal fonksiyonları için, (φ, ψ) çiftinin $(X, \mathcal{P}(X))$ 'den $(Y, \mathcal{P}(Y))$ dokusuna bir di-fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $\psi = \varphi^c$ olmasıdır.

2.5.2. Yardımcı Teorem : [8] $(r, R), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun.

(1) Aşağıdakiler denktir.

- (i) $(r, R), (DF1)$ koşulunu sağlar.
- (ii) $r^{\leftarrow} \circ R \subseteq I_S$
- (iii) Her $A \in \mathcal{S}$ için $r^{\leftarrow}(R^{\rightarrow}(A)) \subseteq A$ 'dır.
- (iv) Her $B \in \mathcal{T}$ için $r^{\leftarrow}(B) \subseteq R^{\leftarrow}(B)$ 'dir.
- (V) Her $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için $r^{\rightarrow}(A_1) \subseteq R^{\rightarrow}(A_2) \implies A_1 \subseteq A_2$ 'dir. $\square$

(2) Aşağıdakiler denktir.

- (i) $(r, R), (DF2)$ koşulunu sağlar.
- (ii) $r \circ R^{\leftarrow} \subseteq i_T$
- (iii) Her $B \in \mathcal{T}$ için $r^{\rightarrow}(R^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$ 'dir. $\square$

2.5.3. Teorem : [8] $(f, F), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) (f, F) bir di-fonksiyondur.

(2) Aşağıdaki içermeler geçerlidir.

- (a) Her $A \in \mathcal{S}$ için $f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}(A)) \subseteq A \subseteq F^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A))$ ve
- (b) Her $B \in \mathcal{T}$ için $f^{\rightarrow}(F^{\leftarrow}(B)) \subseteq B \subseteq F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B))$ dir.

(3) Her $B \in \mathcal{T}$ için $f^{\leftarrow}(B) = F^{\leftarrow}(B)$ 'dir. $\square$

Şimdi $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ bir di-fonksiyon, $A \in \mathcal{S}$ ve $B \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda, $f^{\rightarrow}(A) (F^{\rightarrow}(A))$ 'ya A kümesinin *görüntüsü* (*ko-görüntüsü*) denir. Bu kümeler genelde eşit değildir. Diğer yandan, $f^{\leftarrow}(B) (F^{\leftarrow}(B))$ 'ye B kümesinin *ters görüntüsü* (*ters ko-görüntüsü*) denir ve yukarıdaki teoreme göre bu kümeler eşittir.

2.5.4. Önerme : [8] (f, F) ve $(g, G), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya iki di-fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f \subseteq g \iff F \subseteq G$$

dir. Bundan dolayı, $(f, F) \sqsubseteq (g, G) \iff F = G \iff f = g \iff (f, F) = (g, G)$ olur.

$\square$

Bu sonuç, di-fonksiyonların bağıntı ve ko-bağıntı kısımlarıyla karakterize edilebildiğini göstermektedir.

2.5.5. Önerme : [8]

(1) $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ bir di-fonksiyon olsun. Bu durumda,

(a) $A \in \mathcal{S}$ için $A = \emptyset \iff f^{\rightarrow}(A) = \emptyset$ 'dir.

(b) $A \in \mathcal{S}$ için $A = S \iff F^{\rightarrow}(A) = T$ 'dir.

(c) $f^{\leftarrow}(\emptyset) = F^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$ ve $f^{\leftarrow}(T) = F^{\leftarrow}(T) = S$ 'dir

(2) $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ ve $(g, G) : (T, \mathcal{T}) \rightarrow (U, \mathcal{U})$ iki di-fonksiyon olsun. Bu durumda $(g, G) \circ (f, F)$ bileşkesi $(S, \mathcal{S})$ 'den $(U, \mathcal{U})$ 'ya bir di-fonksiyondur. $\square$

2.5.6. Önerme : [8] $(S, \mathcal{S}, \sigma), (T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli dokular olsun. Eğer $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ bir di-fonksiyon ise $(f, F)' : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ de bir di-fonksiyondur.

Aşağıdaki teoremde, noktasal fonksiyonlarla di-fonksiyonlar arasındaki ilişki verilmiştir:

2.5.7. Teorem : [3] $(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T})$ doku uzaylar ve $\varphi : S \rightarrow T$ bir noktasal fonksiyon olsun. Aşağıdakiler denktir:

(1) Her $s \in S$ için,

(a) $P_s \not\subseteq Q_{s'} \implies P_{\varphi(s)} \not\subseteq Q_{\varphi(s')}.$

(b) $A \in \mathcal{T}$ için $P_{\varphi(s)} \not\subseteq A$ ise $P_s \not\subseteq Q_v$ ve $P_{\varphi(v)} \not\subseteq A$ olacak şekilde bir $v \in S$ vardır.

(c) $A \in \mathcal{T}$ ve $s \in S^b$ için $A \not\subseteq Q_{\varphi(s)}$ ise $P_v \not\subseteq Q_s$ ve $A \not\subseteq Q_{\varphi(v)}$ olacak şekilde bir $v \in S$ vardır.

(2) Eğer $f = \bigvee \{\overline{P}_{(s, \varphi(s))} \mid s \in S\}$ ve $F = \bigcap \{\overline{Q}_{(s, \varphi(s))} \mid s \in S^b\}$ olarak tanımlanırsa,

(i) $(f, F), (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-fonksiyondur.

(ii) Her $A \in \mathcal{T}$ için $f^{\leftarrow}(A) = F^{\leftarrow}(A) = \varphi^{-1}[A]$ 'dır. $\square$

2.5.8. Örnek : [8] $j \in J$, $(S_j, \mathcal{S}_j)$ dokular, $(S, \mathcal{S})$ bu dokuların çarpım dokusu olsun. Şimdi $S = \prod_{j \in J} S_j$ olduğunu hatırlayarak, $\rho_j : S \rightarrow S_j$ izdüşüm fonksiyonlarını göz önüne alalım. Burada $P_s \not\subseteq Q_{s'} \implies P_{s_j} \not\subseteq Q_{s_j}$ olup $P_{\rho_j(s)} \not\subseteq Q_{\rho_j(s')}$ bulunur. Böylece Teorem 2.5.7(1-a) sağlanır. Şimdi $A \in \mathcal{S}_j$ ve $s = (s_j) \in S$ olmak üzere $P_{\rho_j(s)} \not\subseteq A$ olarak alalım. Buradan $P_{s_j} \not\subseteq A$ olup $P_{s_j} \not\subseteq Q_{s'_j}$ ve $P_{s'_j} \not\subseteq A$ olacak biçimde bir $s'_j \in S_j$ vardır. Bu durumda, $k \in J$, $k \neq j$ için $P_{s_k} \not\subseteq \emptyset$ olduğundan $P_{s_k} \not\subseteq Q_{s'_k}$ bulunur. O halde, $s' \in S$ ve $P_s \not\subseteq Q_{s'}$, $P_{\rho_j(s')} \not\subseteq A$ olduğundan (b) koşulu da sağlanır. Şimdi de, $A \in \mathcal{S}_j$ ve $s \in S^b$ için $A \not\subseteq Q_{\rho_j(s)}$ olsun. Buradan $A \not\subseteq Q_{\rho_j(s_j)}$ olup $A \not\subseteq Q_{s'_j}$ ve $P_{s'_j} \not\subseteq Q_{s_j}$ olacak biçimde bir $s'_j \in S_j$ vardır. Böylece $k \in J$, $k \neq j$ için $S^b = \prod_{j \in J} S_j^b$ olduğundan $s_k \in S_k^b$ ve $Q_{s_k} \neq S_k$ bulunur. O halde $P_{s'_k} \not\subseteq Q_{s_j}$ olacak şekilde bir $s'_k \in S_k$ vardır. Dolayısıyla $s' \in S$ ve $P_{s'} \not\subseteq Q_s$, $A \not\subseteq Q_{\rho_j(s')}$ olduğundan (c) koşulu da sağlanır. Buradan

$$\pi_j = \bigvee \{ \overline{P}_{(s, s_j)} \mid s = (s_i) \in S \} \quad \prod_j = \bigcap \{ \overline{Q}_{(s, s_j)} \mid s = (s_i) \in S^b \}$$

olarak tanımlı, $(\pi_j, \prod_j)$ çifti $(S, \mathcal{S})$ 'den $(S_j, \mathcal{S}_j)$ 'ye bir di-fonksiyondur. Bu di-fonksiyonlara *i. izdüşüm di-fonksiyonları* denir. Burada her $A \in \mathcal{S}_j$ için $\pi_j^{\leftarrow}(A) = \prod_j^{\leftarrow}(A) = \rho_j^{-1}[A]$ 'dir.

2.6. Di-Topolojiler

Bu alt bölümde, bir doku üzerinde tanımlı di-topoloji [8] kavramını vereceğiz.

2.6.1. Tanım : $(S, \mathcal{S})$ bir doku olsun. $\mathcal{S}$ 'nin altkümelerinin aşağıdaki koşulu sağlayan (τ, κ) çiftine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-topoloji denir.

$$(1) \ S, \emptyset \in \tau$$

$$(2) \ G_1, G_2 \in \tau \implies G_1 \cap G_2 \in \tau$$

$$(3) \ G_j \in \tau, j \in J \implies \bigvee_{j \in J} G_j \in \tau$$

τ 'nun elemanları açık kümeler olarak isimlendirilir.

$$(1') \ S, \emptyset \in \kappa$$

$$(2') \ K_1, K_2 \in \kappa \implies K_1 \cup K_2 \in \kappa$$

$$(3') \ K_j \in \kappa, j \in J \implies \bigcap_{j \in J} K_j \in \kappa$$

κ 'nın elemanları kapalı kümeler olarak isimlendirilir.

Burada genelde, açık kümeler ile kapalı kümeler arasında herhangi bir ilişki yoktur. Ancak σ , $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen ve di-topoloji $\kappa = \sigma[\tau]$ koşulunu sağlıyorsa, (τ, κ) çiftine $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde *tümleyenli di-topoloji* adı verilir. Genel olarak, τ ailesi *topoloji* ve κ ailesi de *ko-topoloji* olarak isimlendirilir.

2.6.2. Örnekler :

- (1) $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir di-topolojik uzay olsun. Eğer $\tau = \mathcal{S}$ ($\kappa = \mathcal{S}$) ise (τ, κ) di-topolojisine *ayrık* (*ko-ayrık*) denir.
- (2) Bir $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ di-topolojik uzay için $\tau = \{S, \emptyset\}$ ($\kappa = \{S, \emptyset\}$) ise (τ, κ) ya *ayrık olmayan* (*ko-ayrık olmayan*) di-topoloji denir.
- (3) $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ise $\tau = \mathcal{T}$ ve $\kappa = \mathcal{T}^c = \{X \setminus G \mid G \in \mathcal{T}\}$ ile tanımlı (τ, κ) çifti, $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ üzerinde bir tümleyenli di-topolojidir.
- (4) (X, u, v) bir ikili topolojik uzay ise $\tau = u$, $\kappa = v^c$ ile tanımlı (τ, κ) çifti, $(X, \mathcal{P}(X))$ üzerinde bir di-topoloji tanımlar.
- (5) Örnekler 2.2.8(3) 'de geçen $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \iota)$ dokusu üzerinde, $\tau_{\mathbb{I}} = \{[0, r) \mid 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\mathbb{I}\}$ ve $\kappa_{\mathbb{I}} = \{[0, r] \mid 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$ ile tanımlı (τ, κ) çiftine *doğal di-topoloji* denir.

Gerçekten, $r = 0$ için $[0, r) = \emptyset \in \tau_{\mathbb{I}}$ olur. Diğer yandan, $r, s \in [0, 1]$ için $m = \min\{r, s\}$ olmak üzere $[0, r) \cap [0, s) = [0, m) \in \tau_{\mathbb{I}}$ olduğundan $\tau_{\mathbb{I}}$ sonlu arakesitler altında kapalıdır. Üstelik, $r_j \in [0, 1]$ için $n = \max\{r_j \mid r_j \in [0, 1]\}$ olmak üzere $\bigvee \{[0, r_j)\} = \bigcup \{[0, r_j)\} = [0, n) \in \tau_{\mathbb{I}}$ olduğundan $\tau_{\mathbb{I}}$ bir topolojidir. Benzer şekilde $\kappa_{\mathbb{I}}$ ailesinde bir ko-topoloji olduğu gösterilebilir.

- (6) Şimdi $A = \{a, b\}$ olmak üzere $\mathbb{I}^A$ Hutton cebirine karşılık gelen $(W_A, \mathcal{W}_A, w_A)$ Hutton dokusunu göz önüne alalım. O halde $L = (0, 1]$ olmak üzere Örnekler 2.3.5(3) 'den $W_A = \{a, b\} \times L$ 'dir. Ayrıca $\mathcal{W}_A$ dokulanması $\mathcal{P}(A)$ ile $\mathcal{L}$ dokularının çarpımı ve w_A ; π_A ile λ tümleyen dönüşümlerinin çarpımıdır. Öyleyse $\tau = \{\emptyset, \{a\} \times (0, 1/2], W_A\}$ ve $\kappa = w[\tau] = \{W_A, (\{b\} \times L) \cup (A \times (0, 1/2]), \emptyset\}$ ile tanımlı (τ, κ) çifti, $(W_A, \mathcal{W}_A, w_A)$ dokusu üzerinde bir tümleyenli di-topolojidir.

Gerçekten, $w(\{a\} \times (0, 1/2]) = w(E(1, \{a\}) \cap E(2, (0, 1/2])) = w(E(1, P_a) \cup E(2, P_{1/2})) = E(1, \{b\}) \cup E(2, P_{1/2}) = (\{b\} \times L) \cup (A \times (0, 1/2])$ olarak bulunur.

Aşağıda di-topolojik uzaylar arasında tanımlı di-fonksiyonlar için süreklilik tanımı verilmiştir.

2.6.3. Tanım : [8] $k = 1, 2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ di-topolojik uzaylar ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir di-fonksiyon olsun.

- (1) Her $G \in \tau_2$ için $F^{\leftarrow}(G) \in \tau_1$ ise (f, F) 'ye *süreklili*,
- (2) Her $K \in \kappa_2$ için $f^{\leftarrow}(K) \in \kappa_1$ ise (f, F) 'ye *ko-süreklili*,
- (3) Eğer (f, F) hem süreklili hem de ko-süreklili ise (f, F) di-fonksiyonuna *bi-süreklili* denir.

2.6.4. Yardımcı Teorem : $\mathcal{P}$, süreklilik, ko-süreklilik, bi-süreklilik özelliklerinden birini gösterebilir. Bu durumda,

- (1) Bir $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ di-topolojik uzayı için (i_S, I_S) birim di-fonksiyonu $\mathcal{P}$ özelliğine sahiptir.
- (2) $\mathcal{P}$ özelliğine sahip di-fonksiyonların bileşkesi de $\mathcal{P}$ özelliğine sahiptir.
- (3) Eğer $(S_k, \mathcal{S}_k, \sigma_k, \tau_k, \kappa_k)$, $k=1,2$ için tümleyenli di-topolojik uzaylar ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1, \sigma_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{S}_2, \sigma_2)$ bir tümleyenli di-fonksiyon ise (f, F) 'nin süreklili olması için gerekli ve yeterli koşul (f, F) 'nin ko-süreklili olmasıdır. Benzer şekilde, diğer $\mathcal{P}$ özellikleri için de aynı durum geçerlidir. $\square$

2.7. Taban, Ko-taban, Alttaban, Ko-alttaban

Di-topolojilerde taban ve alttaban [8] kavramları beklendiği gibi tanımlanmaktadır.

2.7.1. Tanım : (τ, κ) , $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-topoloji olsun.

- (1) $\beta \subseteq \tau$ için τ 'nın her kümesi, β 'daki kümelerin supremumu olarak yazılabiliyorsa, β 'ya τ için bir *taban* denir.
- (2) $\beta \subseteq \kappa$ için, κ 'nın her kümesi β 'daki kümelerin arakesiti olarak yazılabiliyorsa, β 'ya κ için bir *ko-taban* denir.
- (3) $\beta \subseteq \tau$ olmak üzere, β 'nın sonlu arakesitlerinin kümesi, τ için bir taban oluyorsa β 'ya τ için bir *alttaban* denir.

- (4) $\beta \subseteq \kappa$ olmak üzere, β 'nın sonlu birleşimlerinin kümesi, κ için bir ko-taban oluyorsa β 'ya κ için bir *ko-alttaban* denir. Tümleyenli di-topoloji olması durumunda tümleyen dönüşümü, τ için bir tabanı (alttabanı), κ için bir ko-tabana (ko-alttabana) taşır.

p, q -kümeleri, di-topolojideki tabanların, karakterizasyonunda önemli rol oynar:

2.7.2. Teorem : [8] $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir di-topolojik uzay olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir:

- (1) $\beta \subseteq \tau$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) β, τ topolojisi için bir tabandır.
- (ii) $G \in \tau, G \not\subseteq Q_s$ ise $B \not\subseteq Q_s$ ve $B \subseteq G$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ vardır.
- (iii) $G \in \tau, G \not\subseteq Q_s$ ise $P_s \subseteq B \subseteq G$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ vardır. $\square$

- (2) $\beta \subseteq \kappa$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) β, κ ko-topolojisi için bir ko-tabandır.
- (ii) $K \in \kappa, P_s \not\subseteq K$ ise $K \subseteq B$ ve $P_s \not\subseteq B$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ vardır.
- (iii) $K \in \kappa, P_s \not\subseteq K$ ise $K \subseteq B \subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ vardır. $\square$

Bu teorem, τ ve κ 'nın tabanları arasında, p, q -kümelerine göre doğal bir dualite olduğunu göstermektedir. Burada (τ, κ) di-topolojisi için bir *taban* (*ko-taban*), τ (κ) için bir *taban* (*ko-taban*) olarak isimlendirilir. Benzer bir isimlendirme *alttaban* için yapılabilir. Aşağıdaki teorem $\mathcal{S}$ dokusunun bir altkümesinin $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir di-topoloji için taban ve ko-taban olma koşullarını verir.

2.7.3. Teorem : [8] $\beta \subseteq \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda,

- (1) β 'nın $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir di-topolojinin tabanı olması için gerekli ve yeterli koşul,

- (a) $\bigvee \beta = S$, ve
- (b) $B_1, B_2 \in \mathcal{S}, s \in S$ için $B_1 \cap B_2 \not\subseteq Q_s$ ise $P_s \subseteq B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ vardır.

(2) β 'nın $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir di-topolojinin ko-tabanı olması için gerekli ve yeterli koşul

(a) $\bigcap \beta = \emptyset$, ve

(b) $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$, $s \in S$ için $P_s \not\subseteq B_1 \cup B_2$ ise $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3 \subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ vardır. $\square$

2.8. Belirtisiz Alt Kümeler

2.8.1. Tanım : X boş olmayan bir küme olsun, $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ biçiminde tanımlı $A \subseteq X$ kümesine X 'in *belirtisiz* alt kümesi denir. Burada $\mu_A : X \mapsto [0, 1]$ 'ya belirtisiz A kümesinin üyelik fonksiyonu denir $\mu_A(x)$ değerine X 'in üyelik derecesi ve $\{\mu_A(x) \mid x \in X\}$ kümesine de A belirtisiz kümesinin üyelik derecelerinin kümesi denir.([39])

2.8.2. Tanım : $A, B, A_i \in I^X$ belirtisiz kümeleri için aşağıdakiler verilebilir.

1. $A = B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $A(x) = B(x)$,
2. $A \leq B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $A(x) \leq B(x)$,
3. $C = A \vee B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $C(x) = \max\{A(x), B(x)\}$,
4. $C = A \wedge B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $C(x) = \min\{A(x), B(x)\}$,

Daha genel olarak, X 'in belirtisiz kümelerinin bir $\{A_i \mid i \in I\}$ ailesinin birleşimi

$$\text{her } x \in X \text{ için } (\bigvee_{i \in I} A_i)(x) = \sup_{i \in I} A_i(x),$$

arakesiti

$$\text{her } x \in X \text{ için } (\bigwedge_{i \in I} A_i)(x) = \inf_{i \in I} A_i(x),$$

olarak tanımlanır ([39]). Yukarıda tanımlanan işlemler altında $\mathbb{I}^X$ bir tam ve tamamen dağılımlı latisi olup, biz bu latisi $F(X)$ ile göstereceğiz. Tanım 2.1.12'de olduğu gibi bu $F(X)$ latisi, $\mu \rightarrow 1 - \mu$ işlemi altında bir Hutton cebiridir.

2.8.3. Not : Özellikle matematik ağırlıklı çalışmalarda, belirtisiz alt küme, ilgili üyelik fonksiyonu ile eşlenir. Yani X 'in bir belirtisiz alt kümesi $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ biçiminde bir fonksiyon olarak alınır. Bu tezde bu yaklaşımı benimseyeceğiz.

2.9. Belirtisiz Alt Kümeler Üzerindeki Bağıntılar

Üçüncü bölümde, dokular teorisi kullanılarak $F(X)$ ve $F(Y)$ arasında bir bağlantı, ko-bağıntı ve di-bağıntı kavramları verilecektir. Bir dizi örnekte bu kavram, bilinen X ve Y arasındaki belirtisiz bağıntı kavramının özel bir durumu olarak verilebileceği gösterilecektir. Bu örnekleri daha iyi anlamak için bu alt bölümde belirtisiz bağıntılar için ön bilgi verilecektir.

Bu kavram için temel kaynak olarak [28] ve [14] nolu makaleler alınacaktır. Bu kaynaklar konuya biraz farklı açılardan yaklaşıyorlar. [28]'de X 'den Y 'ye belirtisiz bağıntılar, yani $X \times Y \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonları için işlemler genel bir t -norm cinsinden verilmektedir. İleriki bölümdeki söz konusu örnekler için min t-norm alınmıştır.

Diğer taraftan [14]'de A , X 'in bir belirtisiz alt kümesi ve B , Y 'nin belirtisiz alt kümesi olmak üzere A 'dan B 'ye bir belirtisiz bağıntıdan söz ediliyor. Ancak göreceğimiz gibi bu belirtisiz bağıntılar yine de X 'den Y 'ye belirtisiz bağıntı olur, üstelik bu bağıntılar üzerindeki işlemler A ve B 'den bağımsızdır. O halde uygulamalarda bu bağıntılar X 'den Y 'ye belirtisiz bağıntı olarak düşünülebilir.

X bir küme ve A, B bu X kümesinin sırası ile μ_A ve μ_B üyelik fonksiyonları ile tanımlı belirtisiz alt kümeleri olsunlar. $A \times B$, $X \times X$ kümesinin belirtisiz alt kümesidir ve aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\text{her } x, y \in X \text{ için } \mu_{A \times B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)].$$

2.9.1. Tanım : [14] $R \subseteq A \times B$ olsun, yani;

$$\mu_R(x, y) \leq \min[\mu_A(x), \mu_A(y)].$$

ise, R 'ye A 'dan B 'ye *belirtisiz bağıntı* denir.

2.9.2. Tanım : [14] R, R_1, R_2 A 'dan B 'ye belirtisiz bağıntılar ise, $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, \bar{R}$ ve R^{-1} her $x, y \in X$ için aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

1. $\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \max[\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)],$
2. $\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \min[\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)],$
3. $\mu_{\bar{R}}(x, y) = \min[1 - \mu_R(x, y), \mu_{A \times B}(x, y)],$
4. $\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x),$

2.9.3. Notlar : 1. Eğer A ve B X kümesinin klasik anlamda alt kümeleri ise

$$\mu_{\bar{R}}(x, y) = \begin{cases} 1 - \mu_R(x, y) & (x, y) \in A \times B \\ 0 & (x, y) \notin A \times B \end{cases}.$$

bu tanım klasik anlamda R 'nin $A \times B$ deki tümleyenine karşılık gelmektedir. A ve B belirtisiz alt kümeler olması durumunda, $A \times B$ ve (x, y) için üyelik bağıntısı tanımlı değildir. Böylece tümleyeni yukarıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} \mu_{R^{-1}}(x, y) &\leq \min[\mu_A(y), \mu_B(x)] \\ &= \min[\mu_B(x), \mu_A(y)] \\ &= \mu_{B \times A}(x, y). \end{aligned}$$

Böylece eğer R , A 'dan B 'ye bir bağıntı ise, R^{-1} , B 'den A 'ya bir bağıntıdır.

2.9.4. Teorem : [14] Eğer R_1 ve R_2 A 'dan B 'ye bağıntılar ise aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) \ R_1 \subseteq R_2 \implies R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1},$$

$$(ii) \ (R_1^{-1})^{-1} = R_1$$

Kanıt. (i)

$$\begin{aligned} R_1 \subseteq R_2 &\implies \mu_{R_1}(x, y) \leq \mu_{R_2}(x, y) \\ &\implies \mu_{R_1^{-1}}(y, x) \leq \mu_{R_2^{-1}}(y, x) \\ &\implies R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}. \end{aligned}$$

$$(ii) \ \mu_{(R_1^{-1})^{-1}}(x, y) = \mu_{R_1^{-1}}(y, x) = \mu_{R_1}(x, y). \text{ Böylece } (R_1^{-1})^{-1} = R_1 \quad \square$$

2.9.5. Tanım : [14] R_1 ve R_2 bağıntılarının bileşkesi aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

$$\mu_{R_1 \circ R_2} = \max_{z \in X} [\min(\mu_{R_1}(x, z), \mu_{R_2}(z, y))]$$

burada R_1 A 'dan B 'ye ve R_2 B 'den C 'ye bağıntıdır.

2.9.6. Teorem : [14] R_1 , A 'dan B 'ye bir bağıntı ve R_2 , B 'den C 'ye bir bağıntı ise, $R_1 \circ R_2$ A 'dan C 'ye bir bağıntıdır.

Kanıt. $R_1 \circ R_2$ 'nin üyelik fonksiyonu Tanım 2.9.5' de olduğu gibi tanımlansın. Her $z \in X$ için,

$$\mu_{R_1}(x, z) \leq \min[\mu_A(x), \mu_B(z)]$$

ve

$$\mu_{R_2}(y, z) \leq \min[\mu_B(z), \mu_C(y)]$$

dir, bu durumda aşağıdaki altı durum gerçekleşir.

$$\mu_A(x) < \mu_B(z) < \mu_C(y),$$

$$\mu_A(x) < \mu_C(y) < \mu_B(z),$$

$$\mu_B(z) < \mu_A(x) < \mu_C(y),$$

$$\mu_B(z) < \mu_C(y) < \mu_A(x),$$

$$\mu_C(y) < \mu_A(x) < \mu_B(z),$$

$$\mu_C(y) < \mu_B(z) < \mu_A(x).$$

Tüm bu durumlar için,

$$\min[\mu_{R_1}(x, z), \mu_{R_2}(z, y)] \leq \min[\mu_A(x), \mu_C(y)].$$

Böylece,

$$\max_z[\min(\mu_{R_1}(x, z), \mu_{R_2}(z, y))] \leq \min[\mu_A(x), \mu_C(y)].$$

Bundan dolayı, $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times B$. Böylece kanıt tamamlanmış olur. $\square$

Aşağıdaki Teorem bileşkenin bazı özelliklerini vermektedir. Bu teoremin kanıtını vermeden geçeceğiz, ilgilenenler [14] nolu kaynaktan yararlanabilirler.

2.9.7. Teorem : [14]

- (i) $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$, burada R_1 ve R_2 A üzerinde belirtisiz bağıntılardır.
- (ii) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$, burada R_1 A 'dan B 'ye, R_2 B 'den C 'ye ve R_3 C 'den D 'ye birer belirtisiz bağıntıdır.
- (iii) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \neq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$
- (iv) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$, burada R_1 A 'dan B 'ye R_2, R_3 B 'den C 'ye belirtisiz bağıntılardır.

(v) $R_1 \subseteq R_2 \implies R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_3$, burada R_1 ve R_2 A 'dan B 'ye belirtisiz bağıntılar ve R_3 ise B 'den C 'ye belirtisiz bağıntıdır.

(vi) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$, burada R_1 A 'dan B 'ye ve R_2 B 'den C 'ye belirtisiz bağıntıdır.

2.9.8. Tanım : [14] A üzerinde bir R belirtisiz bağıntısı her $(x, y) \in X$ için $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ özelliğini sağlıyorsa bu R bağıntısına *simetriktir* denir.

2.9.9. Teorem : [14] R belirtisiz bağıntısı simetrik ise R^{-1} bağıntısı da simetriktir.

Kanıt. $\mu_R^{-1}(x, y) = \mu_R(y, x) = \mu_R(x, y) = \mu_R^{-1}(y, x)$ □

2.9.10. Teorem : [14] R simetriktir ancak ve ancak $R = R^{-1}$ dir.

Kanıt. R simetrik olsun, bu durumda

$$\mu_{R^{-1}} = \mu_R(y, x) = \mu_R(x, y)$$

böylece $R^{-1} = R$ olur. Tersine, $R^{-1} = R$ olsun

$$\mu_R(x, y) = \mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x)$$

olur. □

2.9.11. Teorem : [14] R_1 ve R_2 A üzerinde simetrik bağıntılar ise $R_1 \circ R_2$ de A üzerinde simetrik bağıntıdır ancak ve ancak $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ dir.

3. BELİRTİSİZ KÜMELERİN HUTTON CEBİRLERİ ARASINDAKİ Dİ-BAĞINTILAR

Zadeh anlamında bir X kümesinin belirtisiz alt kümeleri X değişkenli $\mathbb{I}$ değerli fonksiyonlardır. Burada $\mathbb{I} = [0, 1]$ olmak üzere $\mathbb{I}$ üzerinde bilinen $\leq$ sıralama ve sırayı ters çeviren involüt işlemi $s' = 1 - s$ $s \in \mathbb{I}$ şeklinde tanımlıdır. Böylece bir X kümesinin belirtisiz alt kümesi, $\mu : X \rightarrow \mathbb{I}$ fonksiyonuna karşılık gelmektedir.

Biz $F(X) = \{\mu : \mu : X \rightarrow \mathbb{I} \text{ bir fonksiyon}\}$ ile X üzerindeki tüm belirtisiz altkümelerinin kümesini göstereceğiz. $F(X)$ üzerinde noktasal sıra, $\forall x \in X$ olmak üzere $\mu \leq \nu \Leftrightarrow \mu(x) \leq \nu(x)$ ile tanımlıdır. Ayrıca $F(X)$ üzerinde sırayı ters çeviren involüt işlemi $\forall x \in X$ olmak üzere $\mu'(x) = (\mu(x))' = 1 - \mu(x)$ biçimindedir. $\mathbb{I}$ ve $F(X)$ kümeleri iyi bilinen Hutton cebirleridir. Yani sırayı ters çeviren involüt işlemi ile, tam ve tamamen dağılımlı latislerdir.

Biz her Hutton cebirinden tümleyenli basit bir dokunun elde edildiğini biliyoruz. $F(X)$ de bir Hutton cebiri olduğuna göre tümleyenli basit bir doku karşılık gelir. Bu doku $(W_X, \mathcal{W}_X, \omega_X)$ ile gösterilecektir.

Genel bir $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı ve $s \in S$ için

$$P_s = \bigcap \{A \in \mathcal{S} \mid s \in A\}, Q_s = \bigvee \{A \in \mathcal{S} \mid s \notin A\} = \bigvee \{P_u \mid P_s \not\subseteq P_u\}$$

kümeleri $\mathcal{S}$ 'ye ait olur. $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık dokusu için $P_x = \{x\}$, $Q_x = X \setminus \{x\}$, $x \in X$ olur. Diğer taraftan

$$L = (0, 1] \text{ ve } \mathcal{L} = \{(0, r] \mid 0 \leq r \leq 1\}$$

eşitlikleriyle verilen $(L, \mathcal{L})$ dokusu için $P_s = Q_s = (0, s]$ dir.

3.1. Önerme : ([8]) $(S, \mathcal{S})$ bir doku, $A, B \in \mathcal{S}$ ise,

1. $A = \bigvee \{P_s \mid A \not\subseteq Q_s\}$.
2. $A = \bigcap \{Q_s \mid P_s \not\subseteq A\}$.
3. $A \not\subseteq B \implies \exists s \in S$ öyleki $A \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq B$.

Ayrıca, $A \not\subseteq Q_s$ olduğunda $P_s \subseteq A$ olur, ama tersi genelde doğru değildir.

$(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T})$ doku uzaylarının $(S \times T, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$ çarpım doku uzayındaki $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ dokulanması, $(A \times T) \cup (S \times B), A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}$ biçimdeki kümelerin keyfi arakesitlerden oluşmaktadır. Özel olarak çarpım dokusu üzerindeki p,q-kümeleri için aşağıdaki önerme verilebilir.

3.2. Önerme : ([8]) $(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T})$ dokular olsun. O halde, $(s, t) \in S \times T$ için,

1. $P_{(s,t)} = P_s \times P_t,$
2. $Q_{(s,t)} = (Q_s \times T) \cup (S \times Q_t),$

dir.

[6]'ya göre, izomorfizma anlamında $(W_X, \mathcal{W}_X) = (X, \mathcal{P}(X)) \otimes (L, \mathcal{L})$ dir. Böylece, Önerme 3.2'den, $\forall (x, s) \in X \times L$ için $P_{(x,s)} = \{x\} \times (0, s]$ ve $Q_{(x,s)} = ((X \setminus \{x\}) \times L) \cup (X \times (0, s])$ bulunur.

$\mathcal{W}_X$ dokulanmasının $\mu \in F(X)$ 'e karşılık gelen elemanı, $\hat{\mu}$ olarak gösterilecektir. Burada $\hat{\mu} = \{(x, m) \mid m \in L, x \in X, m \leq \mu(x)\}$ biçimindedir.

3.3. Önerme : $(x, s) \in W_X$ için

1. $P_{(x,s)} = \hat{x}_s.$ Burada $x_s(z) = \begin{cases} s & z = x \\ 0 & z \in X \setminus \{x\} \end{cases}$ dir.
2. $Q_{(x,s)} = \hat{x}^s,$ Burada $x^s(z) = \begin{cases} s & z = x \\ 1 & z \in X \setminus \{x\} \end{cases}$ dir.

Sırasıyla $x_s(z)$ ve $x^s(z)$ noktalarına belirtisiz nokta ve belirtisiz ko-nokta adı verilir.

Eğer $\forall A \in \mathcal{S}$ için $\sigma(\sigma(A)) = A$ ve $\forall A, B \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq B \implies \sigma(B) \subseteq \sigma(A)$ koşullarını sağlayan bir $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonu varsa, σ 'ya $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *tümleyendir* denir ve bu durumda $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ 'ya tümleyenli doku denir.

Bir X kümesinin $\mathcal{P}(X)$ ayrık dokulanması için $\pi_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X), A \mapsto X \setminus A$ dönüşümü bu anlamında bir tümleyen olur. $(L, \mathcal{L})$ dokusu için bir doğal $\lambda : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tümleyeni $\lambda((0, s]) = (0, 1 - s], s \in \mathbb{I} = [0, 1]$, olarak tanımlanabilir.

Son olarak $\omega_X(\hat{\mu}) = \hat{\mu}' = \{(x, s) \mid s \leq 1 - \mu(x)\} = \{(x, s) \mid \mu(x) \leq 1 - s\}$ fonksiyonu $(W_X, \mathcal{W}_X)$ için bir tümleyendir ve bu tümleyen π_X ve λ 'ların çarpımıdır [6]. Böylece:

3.4. Önerme : ([8], Örnekler 3.11 (4)) $(W_X, \mathcal{W}_X, \omega_X)$ tümleyenli dokusu için her $(x, s) \in W_X$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

$$1. \omega_X(P_{(x,s)}) = Q_{(x,1-s)} = \widehat{x}^{1-s}, \text{ ve}$$

$$2. \omega_X(Q_{(x,s)}) = P_{(x,1-s)} = \widehat{x}_{1-s},$$

Burada $P_{(x,0)} = \emptyset$ ve $Q_{(x,0)} = X \setminus \{x\} \times L$ dir.

3.1. Bağntı ve Ko-bağntıların Temsil Edilmesi

Bu alt bölüm, ikinci bölümde verilen tanım ve teoremleri hatırlatmak ve okunurluluğu kolaylaştırmak amacı ile tekrar edilmiştir.

$(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ dokular olsun. $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye bir bağntı ya da ko-bağntı, $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokulanmasının bir elemanı olur. $(S \times T, \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T})$ dokusuna ait p-kümeler ve q-kümeler, $\overline{P}_{(s,t)}, \overline{Q}_{(s,t)}, (s,t) \in S \times T$ biçimde gösterilecektir. X ve Y bildiğimiz anlamda kümeler ise, $(W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'ye bir bağntı ya da ko-bağntıyı, belirtisiz küme biçiminde nasıl temsil edebiliriz? Böyle bir bağntı ya da ko-bağntı $\mathcal{P}(W_X) \otimes \mathcal{W}_Y = \mathcal{P}(X \times L) \otimes (\mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{L})$ çarpım dokulanmasının bir elemanıdır. Ancak, $(\mathcal{P}(X \times L) \otimes \mathcal{P}(Y)) \otimes \mathcal{L}$ ile $\mathcal{P}(X \times L \times Y) \otimes \mathcal{L}$ aynıdır, ve bu $F(X \times L \times Y)$ Hutton cebirinin, $X \times L \times Y \times L$ üzerindeki dokulanmasıdır.

O halde, $(W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'ye bir bağntı ya da ko-bağntı, uygun koşulları sağlayan $F(X \times L \times Y)$ 'nin bir elemanı ile temsil edilebilir.

3.1.1. Tanım : $(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T})$ dokular olsun. O halde:

1. $r \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$, $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye bir *bağntı* denir eğer

$$R1 \quad r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}, P_{s'} \not\subseteq Q_s \implies r \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}.$$

$$R2 \quad r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \implies \exists s' \in S \text{ öyle ki } P_s \not\subseteq Q_{s'} \text{ ve } r \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}.$$

2. $R \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$, $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye bir *ko-bağntı* denir eğer

$$CR1 \quad \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R, P_s \not\subseteq Q_{s'} \implies \overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R.$$

$$CR2 \quad \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \implies \exists s' \in S \text{ öyle ki } P_{s'} \not\subseteq Q_s \text{ ve } \overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R.$$

3. r bir bağıntı, R bir ko-bağıntı ise (r, R) ikilisine, $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye bir *di-bağıntı* denir.

Şimdi $r : (W_X, \mathcal{W}_X) \rightarrow (W_Y, \mathcal{W}_Y)$ bir bağıntı, $\mu_r \in F(X \times L \times Y)$, r 'ye karşılık gelen belirtisiz küme olsun. O halde $r = \widehat{\mu}_r = \{((x, s), (y, t)) \mid t \leq \mu_r(x, s, y)\}$. Benzer biçimde, bir R ko-bağıntı için $R = \widehat{\mu}_R = \{((x, s), (y, t)) \mid t \leq \mu_R(x, s, y)\}$, $\mu_R \in F(X \times L \times Y)$ şeklindedir.

3.1.2. Önerme : $r, (W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'e bir bağıntı, R bir ko-bağıntı olsun. O halde:

1. $r = \widehat{\mu}_r \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))} \iff t < \mu_r(x, s, y)$,
2. $\overline{P}_{((x,s),(y,t))} \not\subseteq \widehat{\mu}_R = R \iff t > \mu_R(x, s, y)$.

Kanıt. (1) $r = \widehat{\mu}_r = \bigvee \{\overline{P}_{((x,s),(y,t))} \mid t \leq \mu_r(x, s, y)\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_r \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))} &\iff \exists t', P_{t'} \not\subseteq Q_t \text{ ve } t' \leq \mu_r(x, s, y) \\ &\iff \exists t', t < t' \leq \mu_r(x, s, y) \\ &\iff t < \mu_r(x, s, y) \end{aligned}$$

(2) Benzer şekilde yapılabilir. □

3.1.3. Teorem :

1. $r : (W_X, \mathcal{W}_Y) \rightarrow (W_Y, \mathcal{W}_Y)$ bir bağıntıdır ancak ve ancak her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$\mu_r(x, s, y) = \bigvee \{\mu_r(x, s', y) \mid 0 < s' < s\} \quad \forall s \in L.$$

2. $R : (W_X, \mathcal{W}_Y) \rightarrow (W_Y, \mathcal{W}_Y)$ bir ko-bağıntıdır ancak ve ancak her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$\mu_R(x, s, y) = \bigwedge \{\mu_R(x, s', y) \mid s < s' \leq 1\} \quad \forall s \in L.$$

Özel olarak, r bir bağıntı ve R bir ko-bağıntı ise, sabit x, y için $\mu_r(x, s, y)$, $\mu_R(x, s, y)$ s 'ye göre monoton fonksiyonlardır, ayrıca $\mu_R(x, 1, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in X \times Y$ dir.

Kanıt:(1) $\Rightarrow$ İlk olarak, r 'nin bir bağıntı olduğunu kabul edelim. $x \in X, y \in Y$ ve $0 < s' < s$ için $\mu_r(x, s, y) < \mu_r(x, s', y)$ olsun. Eğer $t = \mu_r(x, s, y)$ seçersek önerme 3.1.2(1)'den

$r \notin Q_{((x,s')(y,t))}$ olur. $s' < s$ için $P_{(x,s)} \not\subseteq Q_{(x,s')}$ ve R1 koşulundan $r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ elde edilir. Bu ise önerme 3.1.2(1)'den dolayı $t < \mu_r(x, s, y)$ çelişkisini verir.

$$\bigvee \{ \mu_r(x, s', y) \mid 0 < s' < s \} \leq \mu_r(x, s, y) \text{ dır.}$$

$\bigvee \{ \mu_r(x, s', y) \mid 0 < s' < s \} < \mu_r(x, s, y)$ olsun bu durumda $\bigvee \{ \mu_r(x, s', y) \mid 0 < s' < s \} < t < \mu_r(x, s, y)$ olacak şekilde bir $t \in L$ vardır. $t < \mu_r(x, s, y)$ ise önerme 3.1.2(1)'den ve $s' \in L$ için R2 koşulundan $P_{(x,s)} \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s'),(y,t))}$ ve $r \notin \overline{Q}_{((x,s'),(y,t))}$ olur. Fakat $0 < s' < s$ olduğundan, $t < \mu_r(x, s', y) \leq \bigvee \{ \mu_r(x, s', y) \mid 0 < s' < s \} < t$ çelişkisi elde edilir. Böylece $\forall x \in X, y \in Y$ ve $s \in L$ için

$$\mu_r(x, s, y) = \bigvee \{ \mu_r(x, s', y) \mid 0 < s' < s \} \text{ dır.}$$

$\Leftarrow$. $r \in \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{L}$ alalım ve μ_r verilen eşitliği sağlasın. $r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ için önerme 3.1.2(1)'den $t < \mu_r(x, s, y)$ dir.

Öncelikle $P_{(x,s')} \not\subseteq Q_{(x,s)}$ ise $s < s'$ olduğunu biliyoruz, μ_r özel olarak s' 'ye göre monoton artan bir fonksiyon olduğundan, $t < \mu_r(x, s, y) \leq \mu_r(x, s', y)$ olur. Buradan $r \notin \overline{Q}_{((x,s'),(y,t))}$ elde edilir. Böylece R1 koşulu sağlanmış olur.

R2 koşulunu sağlamaya çalışalım. $t < \mu_r(x, s, y) = \bigvee \{ \mu_r(x, s', y) \mid 0 < s' < s \}$ olsun $\exists s' \in L, s' < s$ için $t < \mu_r(x, s', y)$ sağlanır. Bu bize $P_{(x,s)} \not\subseteq Q_{(x,s')}$ ve $r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ olduğunu verir ki, bu da istediğimiz R2 koşuludur.

(2) Bu kanıt (1)'in benzeri olduğu için atlanacaktır.

Sabit $x \in X, y \in Y$ için r bağıntı ve R ko-bağıntı ise, $\mu_r(x, s, y)$ ve $\mu_R(x, s, y)$ s' 'ye göre monoton artan fonksiyonlardır. Sonuç olarak $\{ \mu_R(x, 1, y) \mid s < s' \leq 1 \} = \emptyset$ olduğundan $\forall (x, y) \in X \times Y$ için $\mu_R(x, 1, y) = \bigwedge \{ \mu_R(x, s', y) \mid s < s' \leq 1 \} = 1$ dir, ve $1 (L, \leq)$ 'nin en büyük elemanıdır.

Bir (r, R) di-bağıntısına karşılık gelen (μ_r, μ_R) belirtisiz alt kümeler çiftinin özelliklerini göz önüne alarak, aşağıdaki tanımı verebiliriz.

3.1.4. Tanım : $\phi, \Phi, X \times L \times Y$ kümesinin belirtisiz alt kümeleri olsun.

1. Tüm $(x, s, y) \in X \times L \times Y$ için

$$\phi(x, s, y) = \bigvee \{ \phi(x, s', y) \mid 0 < s' < s \}$$

ise, ϕ 'ye $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bir bağıntı denir.

2. Tüm $(x, s, y) \in X \times L \times Y$ için

$$\Phi(x, s, y) = \bigwedge \{\Phi(x, s', y) \mid s < s' \leq 1\}$$

ise, Φ 'ye $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bir ko-bağıntı denir.

3. ϕ bir bağıntı, Φ bir ko-bağıntı ise, (ϕ, Φ) ikilisine $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntı denir.

3.1.5. Örnek : φ , X 'den Y 'e bir belirtisiz bağıntı olsun. O halde

$$\phi(x, s, y) = \varphi(x, y) \wedge s, \text{ ve } \Phi(x, s, y) = (1 - \varphi(x, y)) \vee s,$$

$(x, s, y) \in X \times L \times Y$, biçiminde tanımlanan (ϕ, Φ) çifti $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye Tanım 3.1.4 'e göre bir di-bağıntıdır.

3.1.6. Örnek : (S, S) dokusu için

$$i = \bigvee \{\bar{P}_{(s,s)} \mid s \in S\} \text{ ve } I = \bigcap \{\bar{Q}_{(s,s)} \mid s \in S^b\}$$

eşitlikleri (S, S) üzerindeki *birim di-bağıntıyı* verir. $(W_X, \mathcal{W}_X)$ üzerindeki birim di-bağıntısına $F(X)$ üzerinde karşılık gelen (μ_i, μ_I) di-bağıntısı

$$\mu_i(x, s, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ s & x = y \end{cases}, \quad \mu_I(x, s, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ s & x = y \end{cases}$$

biçimindedir. Eğer φ , X üzerindeki (belirtisiz) birim bağıntı ise, yani

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases},$$

ise, $\mu_i(x, s, y) = \varphi(x, y) \wedge s$ ve $\mu_I(x, s, y) = (1 - \varphi(x, y)) \vee s$ olur.

3.1.7. Önerme : $(c, C), (d, D), (W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'e di-bağıntılar ve $(\mu_c, \mu_C), (\mu_d, \mu_D), F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye karşılık gelen di-bağıntılar olsun. O halde:

$$1. c \subseteq d \iff \mu_c \leq \mu_d.$$

$$2. C \subseteq D \iff \mu_C \leq \mu_D.$$

$$3. (c, C) \sqsubseteq (d, D) \iff \mu_c \leq \mu_d \text{ ve } \mu_D \leq \mu_C.$$

Kanıt:(1) Kolayca önerme 3.1.2(1)'den elde edilir.

(2) Kolayca önerme 3.1.2(2)'den elde edilir.

(3) $(c, C) \sqsubseteq (d, D) \Leftrightarrow c \subseteq d$ ve $D \subseteq C$ olduğundan (1) ve (2)'den sonuç elde edilir.

3.1.8. Tanım : $(\phi, \Phi), (\psi, \Psi), F(X)$ 'den $F(Y)$ 'e di-bağıntılar olsun. Bu durumda $(\phi, \Phi) \sqsubseteq (\psi, \Psi), \phi \leq \psi$ ve $\Psi \leq \Phi$ anlamına gelir.

3.1.9. Tanım : $r, (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye bir bağıntı, R bir ko-bağıntı olsun.

$$r^{\leftarrow} = \bigcap \{\overline{Q}_{(t,s)} \mid r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}\}, \quad R^{\leftarrow} = \bigvee \{\overline{P}_{(t,s)} \mid \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R\},$$

ise, $r^{\leftarrow}, (T, \mathcal{T})$ 'den $(S, \mathcal{S})$ 'e bir ko-bağıntı ve $R^{\leftarrow}$ bir bağıntıdır. Böylece, $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ $(T, \mathcal{T})$ 'den $(S, \mathcal{S})$ 'e bir di-bağıntı olur.

$(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir di-bağıntı, $(r, R)^{\leftarrow} = (r, R)$ eşitliğini sağlıyorsa *simetriktir* denir.

$$\begin{array}{ccc} (W_X, \mathcal{W}_X) & & F(X) \\ \downarrow (r, R) & \mapsto & (\mu_r, \mu_R) \downarrow \\ (W_Y, \mathcal{W}_Y) & & F(Y) \end{array}$$

Yukarıdaki diyagramda görüldüğü gibi $(W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'ye (r, R) di-bağıntısına, $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye (μ_r, μ_R) di-bağıntısı karşı gelmektedir. Şimdi aşağıdaki gibi, $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'den $(W_X, \mathcal{W}_X)$ 'ye $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ ters di-bağıntısına, $F(Y)$ 'den $F(X)$ 'e $(\mu_{r^{\leftarrow}}, \mu_{R^{\leftarrow}})$ di-bağıntısını karşılık getirip formülüze edilmeye çalışılacaktır.

$$\begin{array}{ccc} (W_X, \mathcal{W}_X) & & F(X) \\ \uparrow (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow}) & \mapsto & (\mu_{R^{\leftarrow}}, \mu_{r^{\leftarrow}}) \uparrow \\ (W_Y, \mathcal{W}_Y) & & F(Y) \end{array}$$

3.1.10. Teorem : $(y, t, x) \in Y \times L \times X$ için:

$$\begin{aligned} \mu_{r^{\leftarrow}}(y, t, x) &= \bigvee \{s \in L \mid \mu_r(x, s, y) \leq t\}, \text{ ve} \\ \mu_{R^{\leftarrow}}(y, t, x) &= \bigwedge \{s \in L \mid t \leq \mu_R(x, s, y)\}. \end{aligned}$$

Kanıt: (1) $r \not\subseteq \overline{Q}_{(x,s)(y,t)} \Leftrightarrow \overline{P}_{(y,t)(x,s)} \not\subseteq r^{\leftarrow}$ olduğunu Yardımcı Teorem 2.4.4 (1)'den biliyoruz. Böylece önerme 3.1.2'den $t < \mu_r(x, s, y) \Leftrightarrow s > \mu_{r^{\leftarrow}}(y, t, x)$ dir. Bunu $\mu_r(x, s, y) \leq t \Leftrightarrow s \leq \mu_{r^{\leftarrow}}(y, t, x)$ şeklinde yazabiliriz. böylece birinci eşitlik kolayca elde edilebilir.

(2) Benzer yolla kanıtlanabilir.

Buna göre:

3.1.11. Tanım : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'e bir di-bağıntı ve $(y, t, x) \in Y \times L \times X$ için

$$\begin{aligned}\phi^{\leftarrow}(y, t, x) &= \bigvee \{s \in L \mid \phi(x, s, y) \leq t\}, \\ \Phi^{\leftarrow}(y, t, x) &= \bigwedge \{s \in L \mid t \leq \Phi(x, s, y)\}.\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $F(Y)$ 'den $F(X)$ olan, $\phi^{\leftarrow}$ ko-bağıntısı, $\Phi^{\leftarrow}$ bağıntısı ve $(\phi, \Phi)^{\leftarrow} = (\Phi^{\leftarrow}, \phi^{\leftarrow})$ di-bağıntısı, sırasıyla ϕ , Φ ve (ϕ, Φ) 'nın *tersi* olarak isimlendirilir.

$(\phi, \Phi)^{\leftarrow} = (\phi, \Phi)$ eşitliğini sağlayan $F(X)$ üzerindeki (ϕ, Φ) di-bağıntısına *simetrik-tir* denir.

3.1.12. Örnekler :

1. X 'den Y 'e bir φ belirtisiz bağıntısına karşılık gelen (ϕ, Φ) di-bağıntısı için

$$\begin{aligned}\Phi^{\leftarrow}(y, t, x) &= \begin{cases} 0 & \varphi(x, y) \leq 1 - t \\ t & 1 - t < \varphi(x, y) \end{cases}, \\ \phi^{\leftarrow}(y, t, x) &= \begin{cases} 1 & \varphi(x, y) \leq t \\ t & t < \varphi(x, y) \end{cases}\end{aligned}$$

bulunur. Açıkça, genel olarak, $\Phi^{\leftarrow}$, $\phi^{\leftarrow}$ Örnek 3.1.5'de tanımlandığı gibi Y 'den X 'e bir belirtisiz bağıntısına karşılık gelmez.

2. Herhangi bir (S, S) dokusu için (S, S) üzerindeki birim di-bağıntı simetriktir[28]. Buradan $F(X)$ üzerindeki (μ_i, μ_I) birim di-bağıntısı da simetriktir. Bu φ birim belirtisiz bağıntı[3] alınarak doğrudan gösterilebilir.

Eğer (r, R) , (S, S) 'den (T, T) 'ye di-bağıntı ise, $(r^{\leftarrow})^{\leftarrow} = r$ ve $(R^{\leftarrow})^{\leftarrow} = R$ olduğu ([8], Önerme 2.4)'den biliniyor.

3.1.13. Yardımcı Teorem : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'e bir di-bağıntı olsun. O halde, $(\phi^{\leftarrow})^{\leftarrow} = \phi$ ve $(\Phi^{\leftarrow})^{\leftarrow} = \Phi$ dir.

Kanıt. (r, R) , $(W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'ye bir di-bağıntı olsun Teorem 3.1.3 'ten $\phi = \mu_r$ ve $\Phi = \mu_R$ alabiliriz. Böylece,

$$(\phi^{\leftarrow})^{\leftarrow} = (\mu_r^{\leftarrow})^{\leftarrow} = (\mu_{r^{\leftarrow}}) = \mu_{(r^{\leftarrow})^{\leftarrow}} = \mu_r = \phi$$

elde edilir benzer şekilde ikinci eşitlikte gösterilebilir. $\square$

3.1.14. Not : Yukarıdaki yardımcı teoremden olduğu gibi Tanım 3.1.4 anlamında bağıntı, ko-bağıntı ve di-bağıntının özellikleri genel dokular arasındaki bağıntı, ko-bağıntı ve di-bağıntılar için bilinen sonuçlara bağlıdır. Böylece kanıtsız olarak aşağıdaki Yardımcı Teoremi verebiliriz.

3.1.15. Yardımcı Teorem :

1. (ϕ, Φ) di-bağıntı ve $x \in X, y \in Y, s, t \in L$ için

$$t < \phi(x, s, y) \iff \phi^{\leftarrow}(y, t, x) < s \text{ ve}$$

$$\Phi(x, s, y) < t \iff s < \Phi^{\leftarrow}(y, t, x).$$

2. $(\phi_1, \Phi_1), (\phi_2, \Phi_2)$ di-bağıntıları için

$$\phi_1 \leq \phi_2 \iff \phi_2^{\leftarrow} \leq \phi_1^{\leftarrow} \text{ ve}$$

$$\Phi_1 \leq \Phi_2 \iff \Phi_2^{\leftarrow} \leq \Phi_1^{\leftarrow} \text{ dir.}$$

Kanıt. [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir. $\square$

Noktasal bağıntılarda oldukça önemli bir yer tutan bileşke kavramını dokular üzerindeki bağıntı, ko-bağıntı ve di-bağıntı kavramlarına taşımaya çalışacağız. Bu amaçla aşağıdaki tanımı verebiliriz.

3.1.16. Tanım : $(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T}), (U, \mathcal{U})$ dokular olsun.

1. c , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye ve d , $(T, \mathcal{T})$ 'den $(U, \mathcal{U})$ 'ya bağıntılar ise, onların bileşkesi $d \circ c$ bağıntısı $(S, \mathcal{S})$ 'den $(U, \mathcal{U})$ 'ya olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d \circ c = \bigvee \{ \overline{P}_{(s,u)} \mid \exists t \in T, c \not\leq \overline{Q}_{(s,t)} \text{ ve } d \not\leq \overline{Q}_{(t,u)} \}.$$

2. $C, (S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye ve $D, (T, \mathcal{T})$ 'den $(U, \mathcal{U})$ 'ya ko-bağıntılar ise onların bileşkesi $D \circ C$ ko-bağıntısı $(S, \mathcal{S})$ 'den $(U, \mathcal{U})$ 'ya olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D \circ C = \bigcap \{ \overline{Q}_{(s,u)} \mid \exists t \in T, \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq C \text{ ve } \overline{P}_{(t,u)} \not\subseteq D \}.$$

3. $c, d; C, D$ yukarıdaki gibi olmak üzere, $(c, C), (d, D)$ di-bağıntılarının *bileşkesi* $(d, D) \circ (c, C) = (d \circ c, D \circ C)$ olarak tanımlanır.

3.1.17. Teorem: $(c, C), (W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'ye ve $(d, D), (W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'den $(W_Z, \mathcal{W}_Z)$ 'ye di-bağıntılar olsun. Eğer $(\mu_c, \mu_C), (\mu_d, \mu_D)$ ve $(\mu_{doc}, \mu_{D \circ C})$, di-bağıntıları sırasıyla $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'e, $F(Y)$ 'den $F(Z)$ 'e ve $F(X)$ 'den $F(Z)$ 'ye ise, bu durumda $(x, s, z) \in X \times L \times Z$ için

1. $\mu_{doc}(x, s, z) = \bigvee \{ \mu_d(y, t, z) \mid y \in Y, 0 < t < \mu_c(x, s, y) \}$, ve
2. $\mu_{D \circ C}(x, s, z) = \bigwedge \{ \mu_D(y, t, z) \mid y \in Y, \mu_C(x, s, y) < t \leq 1 \}$.

olur. Özel olarak, birinci eşitliği

$$\mu_{doc}(x, s, z) = \bigvee \{ \mu_d(y, \mu_c(x, s, y), z) \mid y \in Y \text{ öyle ki } \mu_c(x, s, y) > 0 \}.$$

formunda yazabiliriz.

Kanıt:(1) önerme 3.1.2 ve tanım 3.1.16 'yı kullanarak $\forall w \in L$ için aşağıdaki denkliği kolayca elde edebiliriz.

$$w < \mu_{doc}(x, s, z) \Leftrightarrow \exists y \in Y, t \in L \text{ için } t < \mu_c(x, s, y) \text{ ve } w < \mu_d(y, t, z) \text{ dir.}$$

ve istenen eşitlik bu denklikten kolayca elde edilebilir.

(2) kanıt (1)'de izlenen yola benzer bir yolla kolayca elde edilebilir.

Son eşitliği kanıtlamaya çalışalım, öncelikle μ_d fonksiyonun ortadaki elamanına göre monoton artan olduğunu hatırlatalım. Böylece

$$t < \mu_c(x, s, y) \Rightarrow \mu_d(y, t, z) \leq \mu_d(y, \mu_c(x, s, y), z)$$

dir. Buradan

$$\mu_{doc}(x, s, z) \leq \bigvee \{ \mu_d(y, \mu_c(x, s, y), z) \mid y \in Y \text{ öyle ki } \mu_c(x, s, y) > 0 \}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $w < \bigvee \{\mu_d(y, \mu_c(x, s, y), z) \mid y \in Y \text{ öyle ki } \mu_c(x, s, y) > 0\}$ ise $\exists y \in Y$ için $w < \mu_d(y, \mu_c(x, s, y), z)$ dir. Teorem (3.1.3)(1)'den bir $t \in L$ için $w < \mu_d(y, t, z)$ ve $t < \mu_c(x, s, y)$ dir. Böylece (1)'den $w < \mu_{doc}(x, s, z)$ elde edilir. Bu ise bize,

$$\bigvee \{\mu_d(y, \mu_c(x, s, y), z) \mid y \in Y \text{ öyle ki } \mu_c(x, s, y) > 0\} \leq \mu_{doc}(x, s, z)$$

olduğunu verir, ve böylece

$$\mu_{doc}(x, s, z) = \bigvee \{\mu_d(y, \mu_c(x, s, y), z) \mid y \in Y \text{ öyle ki } \mu_c(x, s, y) > 0\}$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki eşitliklere dayanarak, aşağıdaki tanımları verebiliriz.

3.1.18. Tanım : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'e ve (θ, Θ) , $F(Y)$ 'den $F(Z)$ 'ye birer di-bağıntı olsun. O halde (ϕ, Φ) ile (θ, Θ) 'nın $(\theta \circ \phi, \Theta \circ \Phi)$ *bileşkesi*,

1. $(\theta \circ \phi)(x, s, z) = \bigvee \{\theta(y, t, z) \mid y \in Y, 0 < t < \phi(x, s, y)\},$
2. $(\Theta \circ \Phi)(x, s, z) = \bigwedge \{\Theta(y, t, z) \mid y \in Y, \Phi(x, s, y) < t \leq 1\}.$

eşitlikleriyle tanımlanan $F(X)$ 'den $F(Z)$ di-bağıntısıdır. Teorem 3.1.17 'de olduğu gibi,

$$(\theta \circ \phi)(x, s, z) = \bigvee \{\theta(y, \phi(x, s, y), z) \mid y \in Y, \phi(x, s, y) > 0\}.$$

yazılabilir.

3.1.19. Tanım : $F(X)$ üzerinde, $\phi \circ \phi \leq \phi$ koşulunu sağlayan, ϕ bağıntısına ve $\Phi \leq \Phi \circ \Phi$ koşulunu sağlayan Φ ko-bağıntısına *geçişken* denir. Bu durumda (ϕ, Φ) di-bağıntısına da $F(X)$ 'de *geçişken* denir.

([8], Önerme 2.17) 'e göre:

3.1.20. Teorem :

1. (μ_i, μ_I) (Örnek 3.1.6) birim di-bağıntısı, bileşke işlemi için birimdir. Özel olarak, (μ_i, μ_I) geçişkendir.
2. Bağıntı, ko-bağıntı ve di-bağıntılar için bileşke işlemi birleşmelidir.
3. Tanım 3.1.16 'deki notasyon ile,

$$(\theta \circ \phi)^\leftarrow = \phi^\leftarrow \circ \theta^\leftarrow \text{ ve } (\Theta \circ \Phi)^\leftarrow = \Phi^\leftarrow \circ \Theta^\leftarrow.$$

dir.

Kanıt. [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir. $\square$

3.1.21. Örnek : $\varphi \in F(X \times Y)$, $\vartheta \in F(Y \times Z)$ belirtisiz bağıntılar, (ϕ, Φ) (θ, Θ) karşılık gelen di-bağıntılar olsun. O halde, $(x, s, z) \in X \times L \times Z$ için

$$\begin{aligned} (\theta \circ \phi)(x, s, z) &= \bigvee \{ \theta(y, \phi(x, s, y), z) \mid y \in Y, \phi(x, s, y) > 0 \} \\ &= \bigvee \{ \vartheta(y, z) \wedge \phi(x, s, y) \mid y \in Y, \phi(x, s, y) > 0 \} \\ &= \bigvee \{ \vartheta(y, z) \wedge \varphi(x, y) \wedge s \mid y \in Y \} \\ &= (\bigvee \{ \vartheta(y, z) \wedge \varphi(x, y) \mid y \in Y \}) \wedge s \\ &= (\vartheta \circ \varphi)(x, z) \wedge s \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\theta \circ \phi$, φ ve ϑ belirtisiz bağıntıların min t-norm'a göre $\vartheta \circ \varphi$ bileşkesine karşılık gelir [28]. Benzer biçimde,

$$(\Theta \circ \Phi)(x, s, z) = (1 - \bigvee \{ \vartheta(y, z) \wedge \varphi(x, y) \mid y \in Y \}) \vee s,$$

bulunur.

$(\Theta \circ \Phi) = (1 - (\theta \circ \phi)(x, s, z)) \vee s$ olduğundan $(\Theta \circ \Phi)$ Örnek 3.1.5 anlamında φ ve ϑ belirtisiz bağıntılarının $\vartheta \circ \varphi$ bileşkesine karşılık gelir.

3.1.22. Tanım : (r, R) , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun.

(1) $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere r 'nin A-kesiti,

$$r^{\rightarrow}(A) = \bigcap \{ Q_t \mid \forall s, r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \implies A \subseteq Q_s \} \in \mathcal{T}$$

olarak tanımlanır.

(2) $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere R 'nin A-kesiti,

$$R^{\rightarrow}(A) = \bigvee \{ P_t \mid \forall s, \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \implies P_s \subseteq A \} \in \mathcal{T}$$

olarak tanımlanır.

3.1.23. Teorem : (r, R) , $(W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'ye bir di-bağıntı ve (μ_r, μ_R) , (r, R) 'ye karşılık gelen $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntı olmak üzere, $\alpha \in F(X)$ ve $\forall y \in Y$ için aşağıdakiler sağlanacak şekilde bir $\beta \in F(Y)$ vardır.

$$1. \ r^{\rightarrow}\hat{\alpha} = \hat{\beta} \iff \beta(y) = \bigwedge \{ t \in L \mid s < \alpha(x) \implies \mu_r(x, s, y) \leq t \},$$

$$2. R \rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta} \iff \beta(y) = \bigvee \{t \in L \mid \alpha(x) < s \implies t \leq \mu_R(x, s, y)\},$$

burada gerektirmeler tüm $x \in X$ ve $s \in L$ 'ler için geçerlidir.

Kanıt:(1) Tanım 3.1.22'den

$$\begin{aligned} r \rightarrow \hat{\alpha} &= \bigcap \{\overline{Q}_{(y,t)} \mid (x, s) \in X \times L, r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))} \implies \hat{\alpha} \subseteq \overline{Q}_{(x,s)}\} \\ &= \bigcap \{\overline{Q}_{(y,t)} \mid t < \mu_r(x, s, y) \implies \alpha(x) \leq s\} \\ &= \bigcap \{\overline{Q}_{(y,t)} \mid (x, s) \in X \times L, s < \alpha(x) \implies \mu_r(x, s, y) \leq t\}, \end{aligned}$$

Burada $r \rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta} \iff (\beta(y) \leq t \iff (s < \alpha(x) \implies \mu_r(x, s, y) \leq t))$ böylece istenilen eşitlik kolayca gösterilebilir.

(2) Bu ispat (1) de izlenen yolla benzer olduğundan, okuyucuya bırakılmıştır.

3.1.24. Tanım : (θ, ϕ) $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntı ve $\alpha \in F(X)$ ise:

1. $\beta = \phi \rightarrow \alpha$ ile gösterilen ϕ 'nin α -kesiti $\beta \in F(Y)$ ve $y \in Y$ olmak üzere, $\beta(y) = \bigwedge \{t \in L \mid s < \alpha(x) \implies \phi(x, s, y) \leq t\}$ şeklinde tanımlıdır,
2. $\beta = \Phi \rightarrow \alpha$ ile gösterilen Φ 'nin α -kesiti $\beta \in F(Y)$ ve $y \in Y$ olmak üzere, $\beta(y) = \bigvee \{t \in L \mid \alpha(x) < s \implies t \leq \Phi(x, s, y)\}$ şeklinde tanımlıdır.

Açıktır ki, $\phi \rightarrow$, $\Phi \rightarrow$ $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye dönüşümlerdir. Bu dönüşümlerin temel özellikleri aşağıdaki teoremden verilmiştir.

3.1.25. Teorem : $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in F(X)$ ve $(\phi, \Phi), (\phi_1, \Phi_1), (\phi_2, \Phi_2)$ $F(X)$ 'de $F(Y)$ 'ye di-bağıntılar ise:

1. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \implies \phi \rightarrow \alpha_1 \leq \phi \rightarrow \alpha_2$ ve $\Phi \rightarrow \alpha_1 \leq \Phi \rightarrow \alpha_2$.
2. $t < \phi(x, s, y) \iff \phi \rightarrow x_s \not\leq y^t$ ve $\Phi(x, s, y) < t \iff y_t \not\leq \Phi \rightarrow x^s$.
3. (a) $(\phi_1 \leq \phi_2) \iff (\phi_1 \rightarrow \alpha \leq \phi_2 \rightarrow \alpha \forall \alpha \in F(X))$,
(b) $(\Phi_1 \leq \Phi_2) \iff (\Phi_1 \rightarrow \alpha \leq \Phi_2 \rightarrow \alpha \forall \alpha \in F(X))$.
4. $\alpha_j \in F(X), j \in J$, için

$$\phi \rightarrow \left(\bigvee_{j \in J} \alpha_j \right) = \bigvee_{j \in J} \phi \rightarrow \alpha_j \text{ ve } \Phi \rightarrow \left(\bigwedge_{j \in J} \alpha_j \right) = \bigwedge_{j \in J} \Phi \rightarrow \alpha_j.$$

5. Eğer (θ, Θ) $F(Y)$ 'den $F(Z)$ 'ye bir di-bağıntı ise

$$(\theta \circ \phi)^{\rightarrow} \alpha = \theta^{\rightarrow}(\phi^{\rightarrow} \alpha) \text{ ve } (\Theta \circ \Phi)^{\rightarrow} \alpha = \Theta^{\rightarrow}(\Phi^{\rightarrow} \alpha) \text{ dir .}$$

Kanıt:(1) açıktır. (2) ve (3) ([8] Önerme 2.6 ve Önerme 2.7)'den elde edilir. Son olarak, (4) ([8], Önerme 2.12)'nin bir sonucudur ve (5) ([8] Önerme 2.16(1)) den elde edilebilir.

3.1.26. Örnek : ϕ 'ye φ belirtisiz bağıntısını karşı getirdiğimizde, $\alpha \in F(X)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$(\phi^{\rightarrow} \alpha)(y) = \bigvee \{\varphi(x, y) \wedge \alpha(x) \mid x \in X\}, \quad y \in Y.$$

Öncelikle kabul edelim ki, $(\phi^{\rightarrow} \alpha)(y) < w < \bigvee \{\varphi(x, y) \wedge \alpha(x) \mid x \in X\}$ olsun. Bu durumda $t < w$ için $s < \alpha(x) \implies \varphi(x, y) \wedge s \leq t$ olur, üstelik $x \in X$ için $w < \varphi(x, y) \wedge \alpha(x)$ dir. Açıktır ki, bu durumda $w < \alpha(x)$ ve $\varphi(x, y) \wedge w = w$ dir, böylece $s = w$ aldığımızda yukarıdaki gerektirme çelişki verir. $w \leq t$ dir.

Öbür yandan farzedelim ki, $\bigvee \{\varphi(x, y) \wedge \alpha(x) \mid x \in X\} < w < (\phi^{\rightarrow} \alpha)(y)$ olsun. Sağ taraftaki eşitsizlikten, $x \in X$ ve $s \in L$ için $s < \alpha(x)$ ve $\varphi(x, y) \wedge s > w$ sağlanır. Bununla beraber $\varphi(x, y) \wedge \alpha(x) > w$ olduğundan, çelişki elde etmiş oluruz. $\bigvee \{\varphi(x, y) \wedge \alpha(x) \mid x \in X\} > w$ dir. Böylece yukarıdaki eşitlik sağlanmış olur. Böylece Örnek 2.1.5'te olduğu gibi ϕ bağıntısı φ belirtisiz bağıntısından elde edilmiş olur, gördük ki, α -kesit φ altındaki α 'nın $\varphi''\alpha$ dolu görüntüsünden başka birşey değildir, ve bu min t-normlar kullanılarak hesaplanabilir ([28], Tanım 2.9).

Aşağıdaki eşitlik benzer biçimde kolayca gösterilebilir.

$$(\Phi^{\rightarrow} \alpha)(y) = \bigwedge \{(1 - \varphi(x, y)) \vee \alpha(x) \mid x \in X\}, \quad y \in Y,$$

$\alpha \in F(X)$ için Φ ko-bağıntısına φ belirtisiz bağıntısı karşı getirilebilir.

Şimdi bağıntı ve ko-bağıntının önkesit tanımını vereceğiz.

3.1.27. Tanım : (ϕ, Φ) $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye, di-bağıntı ise $\beta \in F(Y)$ için :

1. ϕ 'nin β -önkesiti $F(Y)$ 'den $F(X)$ 'e $\phi^{\leftarrow}$ ko-bağıntısının β -kesitidir.
2. Φ 'nin β -önkesiti $F(Y)$ 'den $F(X)$ 'e $\Phi^{\leftarrow}$ bağıntısının β -kesitidir.

Matematikte alıştığımız gibi $(\phi^{\leftarrow})^{\rightarrow} \beta$ 'yi $\phi^{\leftarrow} \beta$ ile ve $(\Phi^{\leftarrow})^{\rightarrow} \beta$ 'yi de $\Phi^{\leftarrow} \beta$ ile kısaltabiliriz.

3.1.28. Önerme : (ϕ, Φ) $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntı ise, $\beta \in F(Y)$ için aşağıdaki ifadeler vardır.

1. $(\phi^{\leftarrow} \beta)(x) = \bigvee \{s \in L \mid \phi(x, s, y) \leq \beta(y) \ \forall y \in Y\}.$
2. $(\Phi^{\leftarrow} \beta)(x) = \bigwedge \{s \in L \mid \beta(y) \leq \Phi(x, s, y) \ \forall y \in Y\}.$

Kanıt:(1) $F(Y)$ 'den $F(X)$ 'e $\phi^{\leftarrow}$ ko-bağıntısına Teorem 3.1.23 (2) uygulanırsa,

$$(\phi^{\leftarrow} \beta)(x) = \bigvee \{s \in L \mid \beta(y) < t \implies s \leq \phi^{\leftarrow}(y, t, x)\}$$

elde edilir. Burada Tanım 3.1.11 den $\phi^{\leftarrow}(y, t, x) = \bigvee \{z \in L \mid \phi(x, z, y) \leq t\}$ dir. Farzedelim ki, $\beta(y) < t \implies s \leq \phi^{\leftarrow}(y, t, x)$ fakat $\phi(x, s, y) \not\leq \beta(y)$ olsun. Bu durumda $\beta(y) < t < \phi(x, s, y)$ 'yi sağlayacak bir t seçebiliriz. ϕ bağıntı olduğundan, Tanım 3.1.4(1) 'den $0 < s' < s$ için $t < \phi(x, s', y)$ dir. Diğer yandan $\beta(y) < t$ olduğundan yukarıdaki gerektirme gereği $s' < s \leq \phi^{\leftarrow}(y, t, x)$ olur. Böylece bir z için $s' < z$ ve $\phi(x, z, y) \leq t$ sağlanır. Monotonluktan $\phi(x, s', y) \leq t$ elde edilir ki, bu da çelişkidir.

Tersine, her $y \in Y$ için $\phi(x, s, y) \leq \beta(y)$ olduğunu kabul edelim, ve bazı $y \in Y$ ve $t \in L$ için $\beta(y) < t$ ve $s > \phi^{\leftarrow}(y, t, x)$ olsun. Buradan $\phi(x, s, y) > t$ olur bu ise $\phi(x, s, y) > \beta(y)$ ile çelişir. Bu da (1)'in kanıtı tamamlar.

(2) kanıt (1) de izlenen yolla benzer biçimde yapılabilir.

3.1.29. Örnek : φ belirtisiz bağıntısına karşılık ϕ $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bir bağıntı olsun. Bu durumda $\beta \in F(Y)$ için, $(\phi^{\leftarrow} \beta)(x) = \bigvee \{s \in L \mid \varphi(x, y) \wedge s \leq \beta(y) \ \forall y \in Y\}$ önkесiti, min t-norm ile hesaplanabilir. $\varphi \downarrow \beta$ ([28] Tanım 2.9) dan başka birşey değildir. Bu işlem [39]'daki $\varphi \downarrow \alpha$ @-operasyona karşılık gelir.

Φ ko-bağıntısına φ karşılık getirildiğinde, $\beta \in F(Y)$ için $(\Phi^{\leftarrow} \beta)(x) = \bigwedge \{s \in L \mid \beta(y) \leq (1 - \varphi(x, y)) \vee s \ \forall y \in Y\}$ eşitliği sağlanır.

Önkесit, tersin kesiti olduğundan , aşağıdaki sonuçlar Teorem 3.1.25, Yardımcı Teorem 3.1.13, Önerme 3.1.15(1) ve Teorem 3.1.20(3)'den elde edilebilir.

3.1.30. Teorem : $\beta, \beta_1, \beta_2 \in F(Y)$ için $(\phi, \Phi), (\phi_1, \Phi_1), (\phi_2, \Phi_2)$ $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntılar olsunlar. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

1. $\beta_1 \leq \beta_2 \implies \phi^{\leftarrow} \beta_1 \leq \phi^{\leftarrow} \beta_2$ ve $\Phi^{\leftarrow} \beta_1 \leq \Phi^{\leftarrow} \beta_2.$

$$2. t < \phi(x, s, y) \iff x_s \not\leq \phi^{\leftarrow} y^t \text{ ve } \Phi(x, s, y) < t \iff \Phi^{\leftarrow} y_t \not\leq x^s.$$

$$3. (a) (\phi_2 \leq \phi_1) \iff (\phi_1^{\leftarrow} \beta \leq \phi_2^{\leftarrow} \beta \forall \beta \in F(Y)),$$

$$(b) (\Phi_2 \leq \Phi_1) \iff (\Phi_1^{\leftarrow} \beta \leq \Phi_2^{\leftarrow} \beta \forall \beta \in F(Y)).$$

4. Herhangi $\beta_j \in F(Y)$, $j \in J$ için,

$$\phi^{\leftarrow}(\bigwedge_{j \in J} \beta_j) = \bigwedge_{j \in J} (\phi^{\leftarrow} \beta_j) \text{ ve } \Phi^{\leftarrow}(\bigvee_{j \in J} \beta_j) = \bigvee_{j \in J} (\Phi^{\leftarrow} \beta_j).$$

5. Eğer (θ, Θ) , $F(Y)$ 'den $F(Z)$ 'ye di-bağıntı ise, $\gamma \in F(Z)$

$$(\theta \circ \phi)^{\leftarrow} \gamma = \phi^{\leftarrow}(\theta^{\leftarrow} \gamma) \text{ ve } (\Theta \circ \Phi)^{\leftarrow} \gamma = \Phi^{\leftarrow}(\Theta^{\leftarrow} \gamma) \text{ dır.}$$

Kanıt. [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir. □

Şimdi kesit ve önkesitlerle ilgili bazı önemli sonuçlar vereceğiz.

3.1.31. Teorem : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntı olsun.

1. $\phi^{\rightarrow} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ dır, burada $\mathbf{0}$ ile X 'in sıfır belirtisiz altkümesini göstereceğiz. Üstelik,

$$\forall \beta \in F(Y) \text{ için } \alpha \leq \phi^{\leftarrow}(\phi^{\rightarrow} \alpha) \forall \alpha \in F(X) \text{ ve } \phi^{\rightarrow}(\phi^{\leftarrow} \beta) \leq \beta.$$

2. $\Phi^{\rightarrow} \mathbf{1} = \mathbf{1}$, burada $\mathbf{1}$ ile X 'in birim belirtisiz altkümesini göstereceğiz. Üstelik,

$$\forall \beta \in F(Y) \text{ için } \Phi^{\leftarrow}(\Phi^{\rightarrow} \alpha) \leq \alpha \forall \alpha \in F(X) \text{ ve } \beta \leq \Phi^{\rightarrow}(\Phi^{\leftarrow} \beta).$$

3. $F(X)$ üzerindeki birim di-bağıntı (μ_i, μ_I) için aşağıdakiler sağlanır.

$$\mu_i^{\rightarrow} \alpha = \mu_I^{\rightarrow} \alpha = \alpha, \mu_i^{\leftarrow} \alpha = \mu_I^{\leftarrow} \alpha = \alpha, \forall \alpha \in F(X).$$

Kanıt. [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir. □

Son olarak bu bölümde $(W, \mathcal{W}, \omega)$ tümleyenli doku uzaylarını ele alacağız. Öncelikle genel olarak di-bağıntılar için bazı tümleyen kavramlarını hatırlayalım.

3.1.32. Tanım : ([8], Tanım 2.18) $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ve $(T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli dokular ve (r, R) $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye di-bağıntı ise:

1. r bağıntısının tümleyeni r' bir ko-bağıntıdır ve

$$r' = \bigcap \{ \overline{Q}_{(s,t)} \mid \exists u, v, r \not\leq \overline{Q}_{(u,v)}, \sigma(Q_s) \not\leq Q_u \text{ ve } P_v \not\leq \theta(P_t) \}$$

2. R ko-bağıntısının tümleyeni R' bir bağıntıdır ve

$$R' = \bigvee \{ \overline{P}_{(s,t)} \mid \exists u, v, \overline{P}_{(u,v)} \not\subseteq R, P_u \not\subseteq \sigma(P_s) \text{ ve } \theta(Q_t) \not\subseteq Q_v \}$$

3. (r, R) di-bağıntısının $(r, R)'$ tümleyeni bir di-bağıntı olup $(r, R)' = (R', r')$ biçiminde tanımlanır.

$(r, R)' = (r, R)$ sağlanıyorsa (r, R) di-bağıntısına *tümleyenlidir* denir.

3.1.33. Teorem : (r, R) $(W_X, \mathcal{W}_X, \omega_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y, \omega_Y)$ 'ye di-bağıntı olsun, $(r, R)' = (R', r')$ bu di-bağıntının tümleyeni ve $(\mu_r, \mu_R), (\mu_{R'}, \mu_{r'})$ $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bunlara karşılık gelen di-bağıntılar ise, $(x, s, y) \in X \times L \times Y$ için aşağıdakiler sağlanır

$$\mu_{R'}(x, s, y) = \begin{cases} 1 - \mu_R(x, 1 - s, y) & s \neq 1 \\ \bigvee \{ 1 - \mu_R(x, u, y) \mid u \in L \} & s = 1 \end{cases}$$

$$\mu_{r'}(x, s, y) = \begin{cases} 1 - \mu_r(x, 1 - s, y) & s \neq 1 \\ 1 & s = 1 \end{cases}$$

Kanıt:(1) Biz $\mu_{R'}$ için ispatı vereceğiz. Benzer yolla $\mu_{r'}$ 'nin de ispatı yapılabilir.

Tanım 3.1.32(2) den

$$\widehat{\mu_{R'}} = \bigvee \{ \overline{P}_{((x,s),(y,t))} \mid \exists (z, u), (w, v) \text{ için } \overline{P}_{((z,u),(w,v))} \not\subseteq R, \\ P_{(z,u)} \not\subseteq \omega_X(P_{(x,s)}) \text{ ve } \omega_Y(Q_{(y,t)}) \not\subseteq Q_{(w,v)} \}$$

Önerme 3.4'ten $P_{(z,u)} \not\subseteq \omega_X(P_{(x,s)}) \iff z = x, 1 - s < u$ ve $\omega_Y(Q_{(y,t)}) \not\subseteq Q_{(w,v)} \iff w = y, v < 1 - t$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$t' < \mu_{R'}(x, s, y) \iff \exists t' t' < t < 1, u, v \text{ için } \mu_R(x, u, y) < v, 1 - s < u, v < 1 - t$$

olarak bulunur.

$s \neq 1$ ise $1 - s \in L$ dir. $t' < \mu_{R'}(x, s, y)$ olsun, t,u ve w için Teorem 3.1.3'den $\mu_R(x, 1 - s, y) \leq \mu_R(x, u, y) < v < 1 - t < 1 - t'$ bulunur. Bundan dolayı $t' < 1 - \mu_R(x, 1 - s, y)$ olur. Böylece $\mu_{R'}(x, s, y) \leq 1 - \mu_R(x, 1 - s, y)$ elde edilir. $\mu_{R'}(x, s, y) < 1 - \mu_R(x, 1 - s, y)$ alırsak $\mu_{R'}(x, s, y) < t' < 1 - \mu_R(x, 1 - s, y)$ olacak şekilde bir t' seçebiliriz, ve t,v için $\mu_R(x, 1 - s, y) < v < 1 - t < 1 - t'$ sağlanır. Teorem 3.1.3(2) den $1 - s < u$ ve $\mu_R(x, u, y) < v$ olacak şekilde bir u seçilebilir. Bu durumda $t' < \mu_{R'}(x, s, y)$ oluşu ile çelişki elde edilir.

Böylece $s \neq 1$ için istenilen eşitlik elde edilmiş olur. $s = 1$ olması durumunda da benzer yolla eşitlik elde edilebilir.

3.1.34. Tanım : (ϕ, Φ) $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bir di-bağıntı olsun.

1. ϕ' , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bir ko-bağıntıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\phi'(x, s, y) = \begin{cases} 1 - \phi(x, 1 - s, y) & s \neq 1 \\ 1 & s = 1. \end{cases}$$

Bu ko-bağıntıya ϕ' nin *tümleyeni* denir.

2. Φ' , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bağıntıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\Phi'(x, s, y) = \begin{cases} 1 - \Phi(x, 1 - s, y) & s \neq 1 \\ \bigvee \{1 - \Phi(x, u, y) \mid u \in L\} & s = 1. \end{cases}$$

Bu bağıntıya Φ' nin *tümleyeni* denir.

3. $(\phi, \Phi)' = (\Phi', \phi')$ di-bağıntısına (ϕ, Φ) bağıntısının *tümleyeni* denir.

$(\phi, \Phi)' = (\phi, \Phi)$ eşitliğini sağlayan di-bağıntıya *tümleyenlidir* denir.

3.1.35. Örnek : φ , X 'den Y 'ye bir belirtisiz bağıntı olsun ve (ϕ, Φ) ise Örnek 3.1.5 anlamında bu belirtisiz bağıntıya karşılık gelen $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntı ise, $s \neq 1$ için,

$$\begin{aligned} \phi'(x, s, y) &= 1 - \phi(x, 1 - s, y) \\ &= 1 - (\varphi(x, y) \wedge (1 - s)) \\ &= (1 - \varphi(x, y)) \vee s \\ &= \Phi(x, s, y). \end{aligned}$$

Açıkça bu formül $s = 1$ için de, sağlanır. Böylece $\phi' = \Phi$ ve benzer şekilde, $\Phi' = \phi$ olur. Bu durumda $(\phi, \Phi)' = (\phi, \Phi)$ eşitliği gösterilmiş olur. Bu yüzden belirtisiz bağıntıya karşılık gelen di-bağıntı tümleyenlidir.

Şimdi tümlemenin özelliklerini aşağıdaki teoremle verebiliriz.

3.1.36. Teorem : (ϕ, Φ) $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntı olsun, ve $(\phi, \Phi)' = (\Phi', \phi')$ bu di-bağıntının tümleyeni ise:

1. $(\phi')' = \phi$ ve $(\Phi')' = \Phi$ olur.
2. $(\phi')^{\leftarrow} = (\phi^{\leftarrow})'$ ve $(\Phi')^{\leftarrow} = (\Phi^{\leftarrow})'$ ters işlemi ile tümleyen değişmelidir.
3. Her $\alpha \in F(X)$ için $(\phi')^{\rightarrow} \alpha = (\phi^{\rightarrow} \alpha')'$ ve $(\Phi')^{\rightarrow} \alpha = (\Phi^{\rightarrow} \alpha')'$.
4. Her $\beta \in F(Y)$ için $(\phi')^{\leftarrow} \beta = (\phi^{\leftarrow} \beta')'$ ve $(\Phi')^{\leftarrow} \beta = (\Phi^{\leftarrow} \beta')'$.
5. Eğer (θ, Θ) $F(Y)$ 'den $F(Z)$ 'ye di-bağıntı ve $(\theta, \Theta)' = (\Theta', \theta')$ bu di-bağıntının tümleyeni ise $(\theta \circ \phi)' = \theta' \circ \phi'$ ve $(\Theta \circ \Phi)' = \Theta' \circ \Phi'$ dır.
6. $F(X)$ üzerindeki birim di-bağıntı (μ_i, μ_I) tümleyenlidir.

Kanıt. [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir. □

3.2. Belirtisiz Kümeler Arasındaki Di-fonksiyonlar

Burada verilen tanımlar daha önce ikinci bölümde verilmiştir. Ancak tekrar etmenin yararlı olacağını düşünmekteyim.

Şimdi klasik anlamda fonksiyonun, bağıntının özel bir tipi olarak tanımlanması gibi, di-fonksiyonda di-bağıntının özel bir tipi olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

3.2.1. Tanım : [8] (f, F) , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, (f, F) di-bağıntısına di-fonksiyon denir ve $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ ya da $(S, \mathcal{S}) \xrightarrow{(f, F)} (T, \mathcal{T})$ ile gösterilir.

DF1 $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise, $f \not\subseteq \overline{Q}_{(s, t)}$ ve $\overline{P}_{(s', t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır.

DF2 $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \overline{Q}_{(s, t)}$ ve $\overline{P}_{(s, t')} \not\subseteq F$ ise, $P_{t'} \not\subseteq Q_t$ dir.

Kolayca görülebilir ki $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki (i_S, I_S) birim di-bağıntısı bir di-fonksiyondur ve *birim di-fonksiyon* olarak isimlendirilir.

3.2.2. Teorem : (f, F) , $(W_X, \mathcal{W}_X, \omega_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y, \omega_Y)$ 'ye di-bağıntı ve μ_f, μ_F , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bu di-bağıntıya karşılık gelen di-bağıntı ise, (f, F) di-fonksiyondur ancak ve ancak aşağıdaki koşullar sağlanır.

(α) $x \in X$ L 'de $s' < s$ ise $\exists y \in Y$ için $\mu_F(x, s', y) < \mu_f(x, s, y)$ sağlanır.

(β) $\forall (x, s, y) \in X \times L \times Y$ için $\mu_f(x, s, y) \leq \mu_F(x, s, y)$ dir.

(γ) $x \in X$, $s \in L$ ve $y \neq y'$ sağlayan $y, y' \in Y$ için $\mu_f(x, s, y) = 0$ yada $\mu_F(x, s, y') = 1$ dir.

Kanıt:(1) Öncelikle (f, F) 'nin di-fonksiyon olduğunu kabul edip $(\alpha) - (\gamma)$ koşullarını sağlamaya çalışalım.

(α) $x \in X$ ve $s, s' \in L$ için $s' < s$ aldığımızda $P_{(x,s)} \not\subseteq Q_{(x,s')}$ olur. Böylece DF1 den $\widehat{\mu_f} \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ ve $\overline{P}_{((x,s')(y,t))} \not\subseteq \widehat{\mu_F}$ olacak şekilde $\exists(y, t) \in Y \times L$ vardır. Bu $y \in Y$ için Önerme 3.1.2'den $\mu_F(x, s', y) < t < \mu_f(x, s, y)$ dir.

(β) $(x, s, y) \in X \times L \times Y$ alalım ve $\mu_f(x, s, y) \not\leq \mu_F(x, s, y)$ olsun. Bu durumda $\mu_F(x, s, y) < t' = t < \mu_f(x, s, y)$ olacak şekilde $t, t' \in L$ seçebiliriz. Bu eşitsizlikten $\widehat{\mu_f} \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s)(y,t))}$, $\overline{P}_{((x,s)(y,t'))} \not\subseteq \widehat{\mu_F}$ elde ederiz. Fakat buradan $P_{(y,t')} \subseteq Q_{(y,t)}$ olur, bu ise DF2 koşulu ile çelişir.

(γ) $x \in X, s \in L$ ve $y, y' \in L$ için $y \neq y'$ olsun ve verilen sonuç sağlanmasın öyleyse $t < \mu_f(x, s, y)$ ve $\mu_F(x, s, y') < t'$ olacak şekilde $t, t' \in L$ seçebiliriz. Bu durumda, $\widehat{\mu_f} \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$, $\overline{P}_{((x,s)(y',t'))} \not\subseteq \widehat{\mu_F}$ olur. Böylece $P_{(y',t')} \subseteq Q_{(y,t)}$ elde edilir. Bu ise DF2 koşulu ile çelişir.

Tersine μ_f, μ_F (α) - (γ) koşullarını sağlasın biz (f, F) için DF1 ve DF2 koşullarını sağladığını gösterelim.

DF1 $P_{(x,s)} \not\subseteq Q_{(x,s')}$ olacak şekilde $x \in X, s, s' \in L$ aldığımızda $s' < s$ elde edilir ve (α) koşulundan $y \in Y$ için $\mu_F(x, s', y) < \mu_f(x, s, y)$ olur. $\mu_F(x, s', y) < t < \mu_f(x, s, y)$ seçersek $(y, t) \in Y \times L$ ve $f \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s)(y,t))}$, $\overline{P}_{((x,s')(y,t))} \not\subseteq F$ olur.

DF2 $f \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s)(y,t))}$, $\overline{P}_{((x,s)(y',t'))} \not\subseteq F$ sağlayacak şekilde $(y, t), (y', t') \in Y \times L$ ve $(x, s) \in X \times L$ seçelim. Böylece $t < \mu_f(x, s, y)$ ve $t' > \mu_F(x, s, y')$ olur. Özel olarak $\mu_f(x, s, y) \neq 0$ ve $\mu_F(x, s, y) \neq 1$ alınırsa (γ) koşulundan $y = y'$ olur. (β) koşulundan $t < \mu_f(x, s, y) \leq \mu_F(x, s, y') < t'$ olduğunu biliyoruz. Bu ise bize $P_{(y',t')} \not\subseteq Q_{(y,t)}$ olduğunu verir ve istenilen elde edilmiş olur.

Bu sonuç, $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bir di-fonksiyon kavramı için aşağıdaki gibi bir tanım verebilmemizi sağlamaktadır.

3.2.3. Tanım: $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye aşağıdaki koşulları sağlayan (ϕ, Φ) di-bağıtısına di-fonksiyon denir.

(α) $x \in X$, $s' < s$ ise $\Phi(x, s', y) < \phi(x, s, y)$ sağlayacak şekilde $\exists y \in Y$ vardır.

(β) $\forall (x, s, y) \in X \times L \times Y$ için $\phi(x, s, y) \leq \Phi(x, s, y)$ dir.

(γ) $x \in X$, $s \in L$ ve $y \neq y'$ sağlayan $y, y' \in Y$ için $\phi(x, s, y) = 0$ yada $\Phi(x, s, y') = 1$ dir.

3.2.4. Örnekler :

1. $F(X)$ üzerinde (μ_i, μ_l) birim di-bağıntısı $F(X)$ üzerinde bir di-fonksiyondur.
2. φ , X 'den Y 'ye belirtisiz bağıntı ve (ϕ, Φ) Örnek 3.1.5 deki gibi tanımlı φ ye karşılık gelen $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntı olsun. Biz (ϕ, Φ) 'yi di-fonksiyon yapan, gerekli ve yeterli koşulları vereceğiz.

Her $(x, s, y) \in X \times L \times Y$ için

$$\phi(x, s, y) = \varphi(x, y) \wedge s \leq s \leq (1 - \varphi(x, y)) \vee s = \Phi(x, s, y).$$

dir. Böylece (β) otomatik olarak sağlanır.

Öncelikle (ϕ, Φ) bir di-fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Amacımız $\varphi(x, y) \neq 0$ olacak şekilde tek bir $y \in Y$ olduğunu göstermektir. Bunun için önce böyle bir y 'nin var olduğunu gösterelim. $s' < s < 1$ 'i sağlayacak şekilde $s, s' \in L$ alalım. Bu $y \in Y$ için α koşulundan $\Phi(x, s', y) < \phi(x, s, y)$ elde edilir. Buradan $\phi(x, s, y) = \varphi(x, y) \wedge s \neq 0$ olur, ve böylece $\varphi(x, y) \neq 0$ bulunur. Şimdi tekliği göstermeye çalışalım, $y \neq y'$ olacak şekilde bir $y' \in Y$ seçelim. $\phi(x, s, y) \neq 0$ olduğundan γ koşulundan, $\Phi(x, s, y') = 1$ elde edilir. Böylece $s < 1$ olduğundan $(1 - \varphi(x, y')) = 1$ elde edilir. Bu ise $\varphi(x, y') = 0$ olduğunu verir ki, istediğimiz elde edilmiş olur. Biz bu tek olan y 'yi $g(x)$ ile gösterelim bu suretle, $\varphi(x, y) \neq 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ özelliğini sağlayan $g : X \rightarrow Y$ noktasal bir fonksiyon kuralım.

Sonuçta, her $x \in X$ için $\varphi(x, g(x)) = 1$ olduğunu gösterebilirsek işimiz biter. Bazı $x \in X$ 'ler için bu eşitlik sağlanmasın ve $\varphi(x, g(x)) \leq s' < s \leq 1$ 'i sağlayacak $s, s' \in L$ seçersek, $y = g(x)$ için $\Phi(x, s', y) \geq s' \geq \varphi(x, g(x)) = \phi(x, s, y)$ elde edilir, $y \neq g(x)$ için $\Phi(x, s', y) > 0 = \phi(x, s, y)$ bulunur bu ise α ile çelişir. Böylece eğer (ϕ, Φ) di-fonksiyon ise, φ X 'den Y 'ye bildiğimiz anlamda noktasal bir fonksiyondur.

Tersine, g , X 'den Y 'ye bildiğimiz anlamda bir fonksiyon ise φ 'nin yukarıdaki özellikleri ile (ϕ, Φ) di-bağıntısının di-fonksiyon olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi doğal olarak şu soru aklımıza gelmektedir. Eğer Örnek 3.2.4(2) de olduğu gibi bildiğimiz anlamda noktasal bir fonksiyona özel bir tip di-fonksiyon karşılık gelirse, genel olarak böyle bir ilişki var mıdır?

Genelde $(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna olan bir di-fonksiyona S 'den T 'ye noktasal bir fonksiyon karşı gelmemektedir, ve benzer biçimde S 'den T 'ye noktasal bir fonksiyona $(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna bir di-fonksiyon karşı gelmemektedir. Ama bununla birlikte bazı özel koşullar altında bu karşılık getirme vardır. Örneğin bütün molokülleri p-kümeleri olan $(S, \mathcal{S})$ basit dokusu için, bu karşılık getirme geçerlidir. $(W_X, \mathcal{W}_X)$ dokusu içinde bunun doğru olduğu kolayca görülebilir. Böylece, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\varphi : X \times L \rightarrow Y \times L$ noktasal bir fonksiyon yardımıyla $(W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'ye bir di-fonksiyon karşı getirilebilir. φ 'nin sağlamak zorunda olduğu koşullar ([8], Örnek 3.11(4)) de verilmiştir. Biz hatırlatmak için bu koşulları aşağıda tekrar vereceğiz.

3.2.5. Teorem : $(W_X, \mathcal{W}_X)$ 'den $(W_Y, \mathcal{W}_Y)$ 'ye (f, F) di-fonksiyonuna aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi : W_X \rightarrow W_Y$ noktasal fonksiyonunu 1-1 karşı getirebiliriz.

- (i) $\varphi(x, r) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x, r))$, burada $\varphi_1 : X \rightarrow Y$ ve $\varphi_2 : X \times L \rightarrow L$.
- (ii) $r, s \in L$ ve $\forall x \in X$ için $r < s \implies \varphi_2(x, r) < \varphi_2(x, s)$.
- (iii) $x \in X, s, t \in L, t < \varphi_2(x, s) \implies r < s$ ve $t < \varphi_2(x, r)$ olacak şekilde bir $r \in L$ vardır.

Dahası, (f, F) tümleyenlidir ancak ve ancak φ (i-iii) koşullarına ek olarak aşağıdaki koşulları sağlar

- (iv) (A) $\varphi_2(x, s) + \varphi_2(x, 1 - s) \leq 1 \forall x \in X, \forall s \in L \setminus \{1\}$.
- (B) $\varphi_2(x, v) + \varphi_2(x, 1 - s) > 1 \forall x \in X, \forall s, v \in L, v > s$.

(f, F) ve φ arasındaki ilişki $(f, F) = (f_\varphi, F_\varphi)$ eşitliği ile verilebilir. Burada

$$f_\varphi = \bigvee \{ \overline{P}_{((x,s),(\varphi_1(x),t))} \mid x \in X, s, t \in L, t < \varphi_2(x, s) \}, \text{ ve}$$

$$F_\varphi = \bigcap \{ \overline{Q}_{((x,s),(\varphi_1(x),t))} \mid x \in X, s, t \in L, \exists v \in L, s < v, \varphi_2(x, v) < t \}.$$

dır.

Şimdi bu sonuçlara dayanarak $F(X)$ ile $F(Y)$ arasındaki di-fonksiyonlar için çok kullanışlı bir karakterizasyon vereceğiz.

3.2.6. Teorem : $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye (ϕ, Φ) di-bağıntısı bir di-fonksiyondur ancak ve ancak $\varphi : W_X \rightarrow W_Y$ fonksiyonu Teorem 3.2.5'deki (i)–(iii) koşullarını sağlar.

$$\phi(x, s, y) = \begin{cases} \varphi_2(x, s) & y = \varphi_1(x), \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$\Phi(x, s, y) = \begin{cases} \bigwedge \{t \in L \mid \exists s < v \in L, \varphi_2(x, v) < t\} & y = \varphi_1(x), \\ 1 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Üstelik (ϕ, Φ) di-fonksiyonunun tümleyenli olması için gerekli ve yeterli koşul φ fonksiyonunun (i-iii) koşullarına ek olarak Teorem 3.2.5'deki (iv) koşulunu sağlamasıdır.

Kanıt: Teorem 3.2.5 de verilen (f_φ, F_φ) eşitlikleri kullanılarak kolayca elde edilebilir. $\square$

(ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bir di-bağıntı ve $\alpha \in F(X)$ ise $\phi^\rightarrow \alpha$ 'ya α 'nın (ϕ, Φ) altındaki görüntüsü ve $\Phi^\rightarrow \alpha$ 'ya da ko-görüntüsü denir. Benzer şekilde $\beta \in F(Y)$ için $\phi^\leftarrow \beta$ 'ya β nın (ϕ, Φ) altındaki ters görüntüsü ve $\Phi^\leftarrow \beta$ 'ya da ters ko-görüntüsü denilir. Dokular arasındaki di-fonksiyonların ters görüntüleri ile ters ko-görüntülerinin her zaman çakıştığı bilinmektedir. Dolayısıyla belirtisiz altkümelerin Hutton cebirleri arasındaki difonksiyonlar için de bu doğru olacaktır.

3.2.7. Teorem : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye bir di-fonksiyon ve $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, $X \times L$ 'den $Y \times L$ 'ye karşılık gelen bir di-fonksiyon ise, $\alpha \in F(X)$, $y \in Y$ için aşağıdakiler vardır.

$$\begin{aligned} (\phi^\rightarrow \alpha)(y) &= \bigvee \{ \varphi_2(x, s) \mid (x, s) \in X \times L, y = \varphi_1(x), s < \alpha(x) \} \\ &= \bigvee \{ \varphi_2(x, \alpha(x)) \mid x \in X, y = \varphi_1(x), \alpha(x) > 0 \}, \text{ ve} \\ (\Phi^\rightarrow \alpha)(y) &= \bigwedge \{ \varphi_2(x, s) \mid (x, s) \in X \times L, y = \varphi_1(x), \alpha(x) < s \}. \end{aligned}$$

Benzer biçimde $\beta \in F(Y)$, $x \in X$ için aşağıdakiler sağlanır.

$$\begin{aligned} (\phi^\leftarrow \beta)(x) &= \bigvee \{ s \in L \mid \varphi_2(x, s) \leq \beta(\varphi_1(x)) \} \\ &= (\Phi^\leftarrow \beta)(x). \end{aligned}$$

Kanıt: $(\phi^\rightarrow \alpha)(y)$ için birinci eşitliği kanıtlayalım, öncelikle $\bigvee \{ \varphi_2(x, s) \mid (x, s) \in X \times L, y = \varphi_1(x), s < \alpha(x) \} \not\leq (\phi^\rightarrow \alpha)(y)$ olsun. Böylece bir $(x_0, s_0) \in X \times L$ için $y = \varphi_1(x_0)$, $s_0 < \alpha(x_0)$ ve $\varphi_2(x_0, s_0) \not\leq (\phi^\rightarrow \alpha)(y)$ sağlanır. Tanım 3.1.24(1)'den $\varphi_2(x_0, s_0) \not\leq t$ için $s < \alpha(x) \implies \phi(x, s, y) \leq t$ olacak şekilde bir $t \in L$ vardır. Diğer yandan $(x, s) = (x_0, s_0)$ için $\phi(x_0, s_0, y) \leq t$ elde edilir. Böylece Teorem 3.2.6'dan çelişki elde ederiz.

$$\varphi_2(x_0, s_0) = \phi(x_0, s_0, \varphi_1(x_0)) = \phi(x_0, s_0, y) \leq t.$$

Şimdi,

$$\bigvee \{\varphi_2(x, s) \mid (x, s) \in X \times L, y = \varphi_1(x), s < \alpha(x)\} < w < (\phi^\rightarrow \alpha)(y)$$

olacak şekilde $w \in L$ seçelim. Eşitsizliğin sağ tarafını kullanırsak $s_1 < \alpha(x_1)$ ve $\phi(x_1, s_1, y) \not\leq w$ olacak şekilde bir $(x_1, s_1) \in X \times L$ vardır. $\phi(x_1, s_1, y) \neq 0$ olduğundan ve Teorem 3.2.6'dan $y = \varphi_1(x_1)$ ve $\phi(x_1, s_1, y) = \varphi_2(x_1, s_1)$ elde edilir. Buradan $w < \varphi_2(x_1, s_1)$ olur. Bununla birlikte,

$$w < \varphi_2(x_1, s_1) \leq \bigvee \{\varphi_2(x, s) \mid (x, s) \in X \times L, y = \varphi_1(x), s < \alpha(x)\} < w$$

olduğundan gelişki elde edilir.

Böylece birinci eşitlik gösterilmiş olur. $(\Phi^\rightarrow \alpha)(y)$ için ikinci eşitlik benzer yolla gösterilebilir.

Son olarak, her $\beta \in F(X)$ ve her $x \in X$ için $(\phi^\leftarrow \beta)(x) = (\Phi^\leftarrow \beta)(x)$ olduğundan $(\phi^\leftarrow \beta)(x)$ için verilen eşitliği gösterebilirsek işimiz biter. Öncelikle, $(\phi^\leftarrow \beta)(x) \not\leq \bigvee \{s \in L \mid \varphi_2(x, s) \leq \beta(\varphi_1(x))\}$ olsun. Önerme 3.1.28(1)'den her $y \in Y$ ve $\phi(x, s, y) \leq \beta(y)$ için $s \not\leq \bigvee \{s \in L \mid \varphi_2(x, s) \leq \beta(\varphi_1(x))\}$ olacak şekilde bir $s \in L$ vardır. Özel olarak $y = \varphi_1(x)$ için $\varphi_2(x, s) \leq \phi(x, s, \varphi_1(x))$ elde edilir. Bu ise, $s \leq \bigvee \{s \in L \mid \varphi_2(x, s) \leq \beta(\varphi_1(x))\}$ oluşu ile çelişir.

Tersine, $\bigvee \{s \in L \mid \varphi_2(x, s) \leq \beta(\varphi_1(x))\} \not\leq (\phi^\leftarrow \beta)(x)$ olsun $\varphi_2(x, s) \leq \beta(\varphi_1(x))$ için $s \not\leq (\phi^\leftarrow \beta)(x)$ olacak şekilde bir $s \in L$ vardır. Böylece, Teorem 3.2.6'dan, eğer $y = \varphi_1(x)$ ise $\phi(x, s, y) = \varphi_2(x, s) \leq \beta(y)$ ve $y \neq \varphi_1(x)$ ise $\phi(x, s, y) = 0 \leq \beta(y)$ olur. Böylece Önerme 3.1.28(1)'den $s \leq \bigvee \{s \in L \mid \varphi_2(x, s) \leq \beta(\varphi_1(x))\} = (\phi^\leftarrow \beta)(x)$ oluşu ile gelişir.

Şimdi φ_1 ve φ_2 'nin özel bir seçimi için oldukça önemli bir örnek vereceğiz

3.2.8. Örnek : $g : X \rightarrow Y$ noktasal fonksiyon olsun. Özel olarak $\varphi_1 = g$, $\varphi_2 = \iota_L$ seçelim, burada ι_L L üzerinde birim fonksiyondur. $\varphi_g = \langle g, \iota_L \rangle$ fonksiyonu Teoem 3.2.5'deki (i)–(iv) koşullarını sağlar, ve bu fonksiyon $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye tümleyenli bir di-fonksiyona karşılık gelir. Biz bu di-fonksiyonu (γ, Γ) ile göstereceğiz. Böylece Teorem 3.2.6'dan aşağıdakiler vardır

$$\gamma(x, s, y) = \begin{cases} s & y = g(x), \\ 0 & \text{diğer durumlarda;} \end{cases} \quad \Gamma(x, s, y) = \begin{cases} s & y = g(x), \\ 1 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Teorem 3.2.7'deki eşitliklerden aşağıdakiler kolayca elde edilir:

1. $\alpha \in F(X)$ için,

$$(\gamma^{\rightarrow}\alpha)(y) = \begin{cases} \bigvee\{\alpha(x) \mid y = g(x)\} & g^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$(\Gamma^{\rightarrow}\alpha)(y) = \begin{cases} \bigwedge\{\alpha(x) \mid y = g(x)\} & g^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 1 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

2. $\beta \in F(Y)$ için,

$$\gamma^{\leftarrow}\beta = \Gamma^{\leftarrow}\beta = \beta \circ \alpha.$$

Buradaki $\gamma^{\rightarrow}$ dönüşümü, g ile gösterilen $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye $\alpha \mapsto \gamma^{\rightarrow}\alpha$ dönüşümünden başka birşey değildir. $(\gamma^{\leftarrow})^{\rightarrow}$ ve $(\Gamma^{\leftarrow})^{\rightarrow}$ dönüşümleri ise, $F(Y)$ 'den $F(X)$ 'e $\beta \mapsto \beta \circ g$ dönüşümü ile çakışır. Genellikle bu dönüşüm g^{-1} ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem di-fonksiyonların görüntü, ko-görüntü ve ters görüntü, ters ko-görüntüleri([8],Teorem 2.24) ile ilgili önemli özelliklerini vermektedir. $\beta \in F(Y)$ için $\phi^{\leftarrow}\beta = \Phi^{\leftarrow}\beta$ eşitliğini hatırlatmak yararlı olacaktır.

3.2.9. Teorem : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-fonksiyon olsun. $\alpha \in F(X)$ ve $\beta \in F(Y)$ ise,

$$\phi^{\leftarrow}(\Phi^{\rightarrow}\alpha) \leq \alpha \leq \Phi^{\leftarrow}(\phi^{\rightarrow}\alpha),$$

$$\phi^{\rightarrow}(\Phi^{\leftarrow}\beta) \leq \beta \leq \Phi^{\rightarrow}(\phi^{\leftarrow}\beta).$$

Kanıt. [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir. □

Her α ve β için bu eşitsizlikler gerçekte, $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-bağıntıları, di-fonksiyonlar olarak karakterize etmektedir.

3.2.10. Tanım : [4, 8] (f, F) $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye di-fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan (f, F) di-fonksiyonuna *örtendir* denir.

ÖRT. $t, t' \in T$ için, $P_t \not\subseteq Q_{t'} \implies f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde $\exists s \in S$ vardır.

Benzer biçimde, aşağıdaki koşulu sağlayan (f, F) di-fonksiyonuna *bire-bir dir* denir.

$$1-1. s, s' \in S \text{ ve } t \in T, \text{ olmak üzere } f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \text{ ve } \overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq F \implies P_s \not\subseteq Q_{s'}.$$

Buradan belirtisiz altkümelerin Hutton cebirleri arasındaki di-fonksiyonlar için örtelik ve bire-bir lik tanımı benzer olarak kolayca verilebilir:

3.2.11. Tanım :

Aşağıdaki koşulu sağlayan (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-fonksiyonuna *örten dir* denir.

ÖRT. $t, t' \in L$, $y \in Y$ için,

$$t' < t \implies t' < \phi(x, s, y) \text{ ve } \Phi(x, s, y) < t.$$

olacak şekilde $\exists (x, s) \in X \times L$ vardır.

Benzer biçimde, aşağıdaki koşulu sağlayan (ϕ, Φ) di-fonksiyonuna *bire-bir dir* denir.

1-1. $(x, s), (x', s') \in X \times L$ ve $y \in Y$ için,

$$\Phi(x', s', y) < \phi(x, s, y) \implies x = x' \text{ ve } s' < s.$$

([8], Sonuç 2.33 ve Önerme 2.34)'ün karşılığı olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

3.2.12. Yardımcı Teorem : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-fonksiyon olsun.

1. (ϕ, Φ) örten ise, her $\beta \in F(Y)$ için $\Phi^\rightarrow(\phi^\leftarrow\beta) = \beta = \phi^\rightarrow(\Phi^\leftarrow\beta)$ dir. Özel olarak

(a) $\forall \alpha \in F(X)$ için $\Phi^\rightarrow\alpha \leq \phi^\rightarrow\alpha$, ve

(b) $\forall \beta_1, \beta_2 \in F(Y)$, $\phi^\leftarrow\beta_1 \leq \phi^\leftarrow\beta_2 \implies \beta_1 \leq \beta_2$ olur.

2. (ϕ, Φ) bire-bir ise, her $\alpha \in F(X)$ için $\Phi^\leftarrow(\phi^\rightarrow\alpha) = \alpha = \phi^\leftarrow(\Phi^\rightarrow\alpha)$ dir. Özel olarak

(a) $\forall \alpha \in F(X)$ için $\phi^\rightarrow\alpha \leq \Phi^\rightarrow\alpha$, ve

(b) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F(X)$, $\Phi^\rightarrow\alpha_1 \leq \Phi^\rightarrow\alpha_2 \implies \alpha_1 \leq \alpha_2$ olur.

Kanıt. [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir. □

3.2.13. Yardımcı Teorem : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-fonksiyon olsun.

1. (ϕ, Φ) 'nin örten olması için gerekli ve yeterli koşul $(\phi, \Phi)'$ 'nin örten olmasıdır.

2. (ϕ, Φ) 'nin bire-bir olması için gerekli ve yeterli koşul $(\phi, \Phi)'$ 'nin bire-bir olmasıdır.

Kanıt. [8] nolu kaynaktan yararlanılabilir. □

Şimdi bir di-fonksiyona noktasal fonksiyon karşı getirilmesi durumunda, örtenlik ve bire-birlik karakterizasyonlarını vereceğiz.

3.2.14. Teorem : (ϕ, Φ) , $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-fonksiyonuna Teorem 3.2.6 anlamında $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ fonksiyonu karşılık gelsin

1. (ϕ, Φ) bire-bir dir ancak ve ancak $\varphi_1 : X \rightarrow Y$ noktasal fonksiyonu bire-bir dir.
2. (ϕ, Φ) örtendir ancak ve ancak verilen bir $y \in Y$ ve $t' < t$ 'yi sağlayan $t, t' \in L$ için $y = \varphi_1(x)$ ve $t' < \varphi_2(x, s) < t$ olacak şekilde $\exists(x, s) \in X \times L$ vardır.

Özel olarak, (ϕ, Φ) örten ise, $\varphi_1 : X \rightarrow Y$ noktasal fonksiyonu örtendir, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

Kanıt:(1) (ϕ, Φ) bire-bir fakat φ_1 bire-bir olmasın. Bu durumda bazı $x, x' \in X$ 'ler için $x \neq x'$ ve $\varphi_1(x) = \varphi_1(x')$ olur. $s \in L$ ve $y \in Y$ alalım. 1-1'lik koşulundan $\varphi_2(x, s) \geq \varphi(x', s)$ ve $\varphi(x', s) \geq \varphi_2(x, s)$ sağlanır. Böylece $\varphi_2(x, s) = \varphi(x', s)$ elde edilir. $s' < s$ olacak şekilde seçilen $s' \in L$ için Teorem 3.2.5(ii)'den $\varphi(x', s') < \varphi(x', s) = \varphi(x, s)$ olur. Buradan $x = x'$ elde edilir, bu ise $x \neq x'$ kabulümüzle çelişir.

Tersine, $\varphi_1 : X \rightarrow Y$ bire-bir olsun. $\Phi(x', s', y) < \phi(x, s, y)$ olacak şekilde (x, s) , $(x', s') \in X \times L$ ve $y \in Y$ alalım. $\phi(x, s, y) \neq 0$ olduğu açıktır. Bu durumda teorem 3.2.6'dan $y = \varphi_1(x)$ ve $\phi(x, s, y) = \varphi_2(x, s)$ olur. Benzer biçimde $\Phi(x', s', y) \neq 1$ olması durumunda yine aynı teoremden $y = \varphi_1(x')$ ve $\Phi(x', s', y) = \wedge \{t \in L \mid \exists s' < v, \varphi_2(x', v) < t\}$ olur. φ_1 bire-bir olduğundan $x = x'$ elde edilir. Diğer yandan $s' < v \in L$ ve $t \in L$ için $\varphi_2(x', v) < t < \varphi_2(x, s)$ elde edilir. Teorem 3.2.5(ii)'den $\varphi_2(x, s') = \varphi_2(x', s') < \varphi_2(x', v) < \varphi_2(x, s)$ elde edilir. Böylece $\varphi_2(x, s') < \varphi_2(x, s)$ olur. Açıktır ki, $s \neq s'$ olur. $s < s'$ olması Teorem 3.2.5(ii) ile çelişir. O halde $s' < s$ elde edilir ve böylelikle (ϕ, Φ) 'nin bire-bir olduğu gösterilmiş olur.

(2) Verilen koşulun örtenliğe denk olduğu açıktır, ve (ϕ, Φ) 'nin örtenliği φ_1 'nin örten olmasını gerektirir fakat yeterli olmadığını gösterelim. $Y = X$ alalım. φ_1 X üzerinde birim olsun ve aşağıdaki fonksiyonu düşünelim.

$$\varphi_2(x, r) = \begin{cases} r/2, & 0 < r \leq 1/3 \\ r/2 + 1/4, & 1/3 < r \leq 2/3, \\ r/2 + 1/2 & 2/3 < r \leq 1. \end{cases}$$

([8], Örnek 3.11(4)) düşünülürse $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ (i)–(iv) koşullarını sağlar, ve φ_1 örtendir. Fakat bu fonksiyona karşılık gelen di-fonksiyon örten değildir. Gerçekten $x \in X$ alalım.

$t' = (1/3)/2 = 1/6, t = (1/3)/2 + 1/4 = 5/12$ ise $t' < t$ ve $x = \varphi_1(x)$ olur. Fakat $t' < \varphi_2(x, r) < t$ olacak şekilde hiçbir $r \in L$ yoktur. $\square$

3.2.15. Sonuç : (ϕ, Φ) di-fonksiyonuna karşılık gelen noktasal fonksiyon $\varphi = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ 'nin izomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul φ_1 'in bire-bir, örten ve verilen $y \in Y, t' < t$ olacak şekilde $t, t' \in L$ için $y = \varphi_1(x)$ ve $t' < \varphi_2(x, s) < t$ 'yi sağlayan $(x, s) \in X \times L$ var olmasıdır.

Kanıt: ([8], Önerme 3.14(5))'den, (ϕ, Φ) izomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul 1-1 ve örten olmasıdır. Bu sonuç Teorem 3.14'ten elde edilebilir. $\square$

Son olarak di-fonksiyonların bileşkesini düşündüğümüzde, ([8], Önerme 2.28) ve Teorem 3.1.20 den aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.16. Teorem : İki di-fonksiyonun bileşkesi yine bir di-fonksiyondur. Birim di-fonksiyon bileşke işlemi için birimdir ve bileşke işlemi birleşmelidir.

Doğal olarak $X \in \mathbf{ObSet}$ olmak üzere nesneleri $F(X)$ Hutton dokusu ve morfizmaları bu nesneler arasındaki di-fonksiyonlar olacak şekilde bir *kategori* tanımlanabilir. Biz bu kategoriye $\mathbb{I}\text{-dfSet}$ ile göstereceğiz. Morfizmalar tümleyenli di-fonksiyonlar ise, buna karşı gelen kategoriye $\mathbb{I}\text{-cdfSet}$ ile göstereceğiz. Nesneleri basit dokular ve morfizmaları di-fonksiyonlar olan kategori ([8])'te $\mathbf{dfSTex}$ ile gösterilmişti. O halde $\mathfrak{E}(F(X)) = (W_X, \mathcal{W}_X)$ ve $\mathfrak{E}(\phi, \Phi) = (f, F)$ olmak üzere $\mathfrak{E} : \mathbb{I}\text{-dfSet} \rightarrow \mathbf{dfSTex}$ bir fonktordur. Burada $\phi = \mu_f$ ve $\Phi = \mu_F$ dır. Benzer biçimde $\mathfrak{E}_c(F(X)) = (W_X, \mathcal{W}_X, \omega_X)$ ve $\mathfrak{E}_c(\phi, \Phi) = (f, F)$ olmak üzere $\mathfrak{E}_c : \mathbb{I}\text{-cdfSet} \rightarrow \mathbf{cdfSTex}$ bir fonktordur. (ϕ, Φ) ve (μ_f, μ_F) tümleyenli difonksiyonlar olmak üzere $(\phi, \Phi) = (\mu_f, \mu_F)$ dir.

3.2.17. Teorem : $\mathfrak{E}$ fonktoru $\mathbb{I}\text{-dfSet}$ kategorisini $\mathbf{dfSTex}$ kategorisinin içine dolu gömen fonktordur ve $\mathfrak{E}_c$ fonktoru da $\mathbb{I}\text{-cdfSet}$ kategorisini $\mathbf{cdfSTex}$ kategorisinin içine dolu gömen bir fonktordur.

[8]'te belirtildiği gibi $\mathbf{fSTex}$ nesneleri basit dokular ve morfizmaları (a) ve (b) koşullarını sağlayan, taban kümeleri arasındaki fonksiyonlar olan bir yapıdır. Bu $\mathbf{fSTex}$ yapısı nesneler üzerinde birim ve $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ye (f_φ, F_φ) difonksiyonuna $\varphi : S \rightarrow T$ $\mathbf{fSTex}$ morfizmasını karşı getiren $\mathcal{D}_s$ fonktoru altında $\mathbf{dfSTex}$ kategorisine izomorftur. Bu $\mathbf{fSTex}$ ve $\mathbf{dfSTex}$ morfizmaları arasındaki karşılık getirme, (i)-(iii) koşullarını sağlayan $X \times L$ ve $Y \times L$ arasındaki noktasal fonksiyona $F(X)$

ile $F(Y)$ arasında bir di-fonksiyon karşılık getirme ile paraleldir. Buradan $\mathbb{I}\text{-fSet}$ ile göstereceğimiz $X \in \text{Ob Set}$ olmak üzere nesneleri $F(X)$ 'in, Hutton dokusu morfizmaları (i)-(iii) koşullarını sağlayan $X \times L$ 'den $Y \times L$ 'ye noktasal fonksiyonlar olan bir kategori elde ediyoruz. Nesneler üzerinde birim ve $F(X)$ 'den $F(Y)$ 'ye di-fonksiyona karşılık gelen $\varphi : X \times L \rightarrow Y \times L$ noktasal fonksiyonunu yani $\mathbb{I}\text{-fSet}$ morfizmalarını alan $\mathfrak{D}^{\mathbb{I}}$ fonktoru, $\mathbb{I}\text{-fSet}$ 'ten $\mathbb{I}\text{-dfSet}$ 'e izomorfizmadır. Bu aşağıdaki soldaki değişmeli diyagramı verir. Burada $\mathfrak{G}$, $\mathbb{I}\text{-fSet}$ 'i fSTex içine dolu gömen funktordur. Sağ taraftaki diyagram tümleyen durumundan bahsetmektedir. Burada $\mathbb{I}\text{-cfSTex}$ 'in morfizmaları (i)-(iii) koşullarına ek olarak (iv) koşulunda sağlar buradaki difonksiyonlar tümleyenli olarak düşünülecektir.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I}\text{-fSet} & \xrightarrow{\mathfrak{G}} & \text{fSTex} \\
 \downarrow \mathfrak{D}^{\mathbb{I}} & & \downarrow \mathfrak{D}_s \\
 \mathbb{I}\text{-dfSet} & \xrightarrow{\mathfrak{E}} & \text{dfSTex}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I}\text{-cfSet} & \xrightarrow{\mathfrak{G}_c} & \text{cfSTex} \\
 \downarrow \mathfrak{D}_c^{\mathbb{I}} & & \downarrow \mathfrak{D}_{cs} \\
 \mathbb{I}\text{-cdfSet} & \xrightarrow{\mathfrak{E}_c} & \text{cdfSTex}
 \end{array}$$

4. YUMUŞAK BELİRTİSİZ KÜMELER

$\mu : X \rightarrow [0, 1]$ klasik anlamda bir belirtisiz küme olmak üzere,

$$F(X) = \{\mu : \mu : X \rightarrow [0, 1]\}$$

kümesi tam, tamamen dağılımlı latistir. 3. bölümde $F(X)$ Hutton cebirine karşı $(X \times L, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{L})$ dokusu getirebileceğimizi görmüştük. Bu doku, $(X, \mathcal{P}(X))$ ile $(L, \mathcal{L})$ dokularının çarpımıdır[2]. Burada $L = (0, 1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] : 0 \leq r \leq 1\}$ dir. $(L, \mathcal{L})$ dokusu, özellikle topolojik olarak kullanışlı bir yapı değildir. Örneğin, sonlu olanları hariç, doğal bir “tıkız” ditopolojisi yoktur. Amacımız, $(L, \mathcal{L})$ yerine, matematiksel açıdan çok daha kullanışlı ve zengin bir doku olduğunu düşündüğümüz $(\mathbb{I}, \mathbb{J})$,

$$\mathbb{I} = [0, 1], \quad \mathbb{J} = \{[0, r] : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{[0, r) : 0 \leq r \leq 1\}$$

birim aralık dokusunun kullanılmasıdır. Bu doku, doğal bir di-topolojisine sahiptir:

$$\tau_{\mathbb{I}} = \{[0, r) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\mathbb{I}\} \quad \kappa = \{[0, r] : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\emptyset\}.$$

Üstelik, $(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ di-tıkızdır[9]. O halde $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathbb{J})$, $(X \times L, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{L})$ 'e göre çok daha kullanışlı özelliklere sahip bir dokudur. Üstelik bu doku sade (plain [6]) dir, yani $\mathbb{J}$ dokusu keyfi birleşimler altında kapalıdır. Bu dokuyu, genelleştirilmiş bir belirtisiz küme tanımı elde etmek için kullanıyoruz. Yumuşak belirtisiz küme olarak adlandırdığımız bu kavram, klasik belirtisiz kümelerle göre, matematiksel özellikleri daha zengin bir dokuya karşı geldiği için, daha zengin bir matematiksel teoriye sahip olacağı açıktır. Beklentilerimiz, uygulamalarda da avantajlı sonuçların verilmesidir.

4.1. Yumuşak Belirtisiz Kümelerin Latisi

4.1.1. Tanım : X bir küme olsun. μ klasik anlamda X belirtisiz altkümesi ve $M \subseteq X$ ise, (μ, M) çiftine X 'in *yumuşak belirtisiz* alt kümesi denir. X 'in tüm yumuşak belirtisiz alt kümelerinin kümesini $SF(X)$ ile göstereceğiz.

Burada $x \in X$ için $x \in M$ ve $x \notin M$ olmak üzere iki durum söz konusudur. Bu iki durum $\mu(x)$ 'in üyelik derecesi ile ilgili ek bilgi vermek için kullanılabilir. Böylece $x \in M$

olması durumunda $\mu(x)$ değerin gerçekleşmiş yada sert bir değeri, diğeri durumda yani $x \notin M$ olması durumunda $\mu(x)$ değerin henüz gerçekleşmemiş yada yumuşak bir değeri olarak düşünebiliriz.

Yumuşak belirtisiz kümeler $\mathcal{S}_X = \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}$ dokulanmasını karşılık getirmek için, $SF(X)$ 'den $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}$ 'ya bir dönüşüm tanımlamamız gerekmektedir. Bu tanım aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\varphi(\mu, M) = \{(x, s) \in X \times \mathbb{I} \mid (s < \mu(x)) \text{ veya } (s = \mu(x) \text{ ve } x \in M)\}.$$

Amacımız $\varphi(\mu, M) \in \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}$ olduğunu göstermektir. $Y \subseteq X$ ve $A \in \mathcal{I}$ olmak üzere $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}$ kümesinin elemanlarının $\bigcap \{(Y \times \mathbb{I}) \cup (X \times A)\}$ formunda olduğunu Tanım 2.3.1'den biliyoruz. O halde istenilen, aşağıdaki eşitlikten çıkarılabilir.

4.1.2. Önerme : (μ, M) , X 'in yumuşak belirtisiz altkümesi, ve $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ ise;

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, M) = \bigcap_{z \in M} ((X \setminus \{z\}) \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, \mu(z)]) \cap \\ \bigcap_{z \in X \setminus M} ((X \setminus \{z\}) \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, \mu(z))). \end{aligned}$$

Kanıt. $(x, s) \in \varphi(\mu, M)$ fakat (x, s) sağ taraftaki kesişime ait olmasın. Bu halde iki durum vardır:

1. Bazı $z \in M$ ler için $(x, s) \notin ((X \setminus \{z\}) \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, \mu(z)])$ olsun. Bu durumda $z = x$ ve $s \notin [0, \mu(z)]$ olur, buradan $s \in M$ ve $s > \mu(x)$ elde edilir, bu ise $(x, s) \in \varphi(\mu, M)$ oluşu ile çelişir.
2. Bazı $z \in X \setminus M$ ler için $(x, s) \notin ((X \setminus \{z\}) \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, \mu(z)])$ olsun. Bu durumda $s \geq \mu(x)$ ve $x \notin M$ elde edilir, bu $(x, s) \in \varphi(\mu, M)$ oluşu ile çelişir.

Tersine (x, s) sağ taraftaki kesişimin elemanı fakat $\varphi(\mu, M)$ 'nin elemanı olmasın. Bu durumda $s > \mu(x)$ yada $(s = \mu(x) \text{ ve } x \notin M)$ olur, burada da iki durum vardır:

1. $s > \mu(x)$ olsun. $x \in M$ için $(x, s) \in ((X \setminus \{x\}) \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, \mu(x)])$ oluşu ile , ve $x \in X \setminus M$ için yine $(x, s) \in ((X \setminus \{x\}) \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, \mu(x)])$ oluşu ile çelişir.
2. $s = \mu(x)$ ve $x \notin M$. Bu durum $(x, s) \in ((X \setminus \{x\}) \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, \mu(x)])$ oluşu ile çelişki yaratır.

□

4.1.3. Sonuç: 4.1.2 Örnekteki gibi tanımlanan $\varphi : SF(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) \otimes \mathbb{J}$, φ bir fonksiyondur.

4.1.4. Önerme: $\varphi : SF(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) \otimes \mathbb{J}$ fonksiyonu bire-bir dir.

Kanıt. $\varphi(\mu, M) = \varphi(\nu, N)$ fakat $(\mu, M) \neq (\nu, N)$ olsun . Öyleyse iki durum vardır

1. $\mu \neq \nu$ ise bazı $x \in X$ için $\mu(x) \neq \nu(x)$ olur, genelliği kaybetmeden $\mu(x) < \nu(x)$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $\mu(x) < s < \nu(x)$ olacak şekilde bir s seçebiliriz. Böylece $(x, s) \in \varphi(\nu, N)$ fakat $(x, s) \notin \varphi(\mu, M)$ olur, bu bize çelişki verir.
2. $\mu = \nu$ ve $M \neq N$ olsun. $x \in M$ ve $x \notin N$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Eğer $s = \mu(x) = \nu(x)$ ise, $(x, s) \in \varphi(\mu, M)$ fakat $(x, s) \notin \varphi(\nu, N)$ olur, bu bize çelişki verir.

□

Böylelikle φ 'nin bire-birliği kanıtlanmış olur. Üstelik φ dönüşümü örtendir. Fakat bu kanıtı daha sonra vereceğiz. Öncelikle $SF(X)$ üstünde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlayalım.

4.1.5. Tanım: Her $(\mu, M), (\nu, N) \in SF(X)$ için aşağıdaki şekilde $SF(X)$ üzerinde $\sqsubseteq$ bağıntısını tanımlayalım.

$$(\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N) \iff (\mu(x) < \nu(x)) \text{ yada } (\mu(x) = \nu(x) \text{ ve } x \notin M \setminus N) \forall x \in X$$

Bu bağıntı gerçekten $SF(X)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlar. Bunu aşağıdaki önermeden kolayca görebiliriz.

4.1.6. Önerme: Her $(\mu, M), (\nu, N) \in SF(X)$ için aşağıdaki çift yönlü gerektirme sağlanır.

$$(\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N) \iff \varphi(\mu, M) \subseteq \varphi(\nu, N).$$

Kanıt. Öncelikle $(\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N)$ fakat $\varphi(\mu, M) \not\subseteq \varphi(\nu, N)$ olsun. $(x, s) \notin \varphi(\nu, N)$ sağlanacak şekilde $(x, s) \in \varphi(\mu, M)$ alalım. Bu halde aşağıdaki iki duruma sahibiz:

1. $s > \nu(x)$ için. $(\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N)$ 'dan $\mu(x) \leq \nu(x)$ ve böylece $s > \mu(x)$ olur, bu ise $(x, s) \in \varphi(\mu, M)$ ile çelişir.

2. $s = \nu(x)$ ve $x \notin N$ olsun. Buradan $\mu(x) \leq s$ olur, $\mu(x) < s$ olması $(x, s) \in \varphi(\mu, M)$ oluşu ile çelişir. Böylece $\mu(x) = s$ ve $x \in M$ olur. Bu bize $\mu(x) = \nu(x)$ ve $x \in M \setminus N$ 'yi verir, bu da $(\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N)$ oluşu ile çelişir.

Tersine $\varphi(\mu, M) \subseteq \varphi(\nu, N)$ fakat $(\mu, M) \not\sqsubseteq (\nu, N)$ olduğunu kabul edersek. bazı $x \in X$ için $\mu(x) \geq \nu(x)$ ve $(\mu(x) \neq \nu(x) \text{ yada } x \in M \setminus N)$ olur, böylece bu iki durumu $\mu(x) > \nu(x)$ yada $\mu(x) = \nu(x)$, $x \in M \setminus N$ şeklinde ayırabiliriz. Böylece bu her iki durumun da $\varphi(\mu, M) \subseteq \varphi(\nu, N)$ oluşu ile çeliştiğini görmüş oluruz. $\square$

$\subseteq, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olduğundan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

4.1.7. Sonuç : $(SF(X), \sqsubseteq)$ kısmi sıralı küme ve $\varphi : SF(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ sıra koruyan dönüşümdür.

$(\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \subseteq)$ 'nın tam latis olduğunu biliyoruz. Keyfi meet ve joinler için aşağıdaki vereceğimiz formüllerle benzer bir sonucu $(SF(X), \sqsubseteq)$ içinde elde edebiliriz.

4.1.8. Yardımcı Teorem : Herhangi bir $(\mu_j, M_j) \in SF(X)$, $j \in J$, ailesinin $\prod_{j \in J} (\mu_j, M_j)$ biçimde gösterilen bir en büyük alt sınırı vardır.

$\mu = \bigwedge_{j \in J} \mu_j(x)$, $M = \{x : \forall j, x \in M_j \text{ yada } \mu(x) < \mu_j(x)\}$ olmak üzere, bu en büyük alt sınır:

$$\prod_{j \in J} (\mu_j, M_j) = (\mu, M)$$

dir.

Kanıt. $j \in J$ alalım. Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \mu_j(x)$ olduğu açıktır. Eğer $\mu(x) = \mu_j(x)$ ise M 'nin tanımı gereği $x \notin M_j$ ise $x \notin M$ ve böylece $x \notin M \setminus M_j$ olur. Böylece her $j \in J$ için $(\mu, M) \sqsubseteq (\mu_j, M_j)$ olur.

Her $j \in J$ için $(\nu, N) \sqsubseteq (\mu_j, M_j)$ olacak şekilde $(\nu, N) \in SF(X)$ alalım $(\nu, N) \not\sqsubseteq (\mu, M)$ olduğunu kabul edelim. $x \in X$ için aşağıdaki iki farklı duruma sahibiz.

1. $\nu(x) > \mu(x)$. Bu durumda $\inf_{j \in J} \mu_j(x) < \nu(x)$ ve böylece $\mu(x) \leq \mu_j(x) < \nu(x)$ sağlayan $j \in J$ vardır, bu ise $(\nu, N) \sqsubseteq (\mu_j, M_j)$ ile çelişir.
2. $\nu(x) = \mu(x)$ ve $x \in N \setminus M$ olsun. $x \notin M$ olduğundan $x \notin M_j$ ve $\mu(x) = \mu_j(x)$ 'yi sağlayacak şekilde $j \in J$ vardır. Bu bize $\nu(x) = \mu_j(x)$ ve $x \in N \setminus M_j$ 'yi verir, bu ise $(\nu, N) \sqsubseteq (\mu_j, M_j)$ oluşu ile çelişir.

□

Bu bize (μ, M) 'nin $j \in J$ için (μ_j, M_j) elemanının en büyük alt sınırı olduğunu verir.

4.1.9. Sonuç: Her $(\mu_j, M_j) \in SF(X)$, $j \in J$, için

$$\varphi\left(\bigcap_{j \in J} (\mu_j, M_j)\right) = \bigcap_{j \in J} \varphi(\mu_j, M_j).$$

Kanıt. $\bigcap_{j \in J} (\mu_j, M_j)$ 'yı Yardımcı Teorem 4.1.8 deki gibi (μ, M) ile gösterelim. Önerme 4.1.6 dan $\varphi(\mu, M) \subseteq \bigcap_{j \in J} \varphi(\mu_j, M_j)$ olduğu açıktır.

Tersine, $\bigcap_{j \in J} \varphi(\mu_j, M_j) \not\subseteq \varphi(\mu, M)$ olsun ve $(x, s) \in \bigcap_{j \in J} \varphi(\mu_j, M_j)$, $(x, s) \notin \varphi(\mu, M)$ olacak şekilde seçelim. Bu durumu iki kısımda inceleyebiliriz:

1. $s > \mu(x)$ olsun. Bu durum her $j \in J$ için $(x, s) \in \bigcap_{j \in J} \varphi(\mu_j, M_j)$ ise, $s \leq \mu_j(x)$ olduğundan çelişki verir.
2. $s = \mu(x)$ ve $x \notin M$ olsun. Bu durumda $x \notin M_j$ ve $\mu(x) = \mu_j(x)$ olacak şekilde $j \in J$ vardır. Böylece $(x, s) \notin \varphi(\mu_j, M_j)$ olur, bu ise yine bir çelişki verir.

Böylelikle istenen eşitlik elde edilmiş olur. □

4.1.10. Yardımcı Teorem: Herhangi bir $(\mu_j, M_j) \in SF(X)$, $j \in J$, ailesinin $\bigsqcup_{j \in J} (\mu_j, M_j)$ biçimde gösterilen bir en küçük üst sınırı vardır.

$\mu = \bigvee_{j \in J} \mu_j(x)$, $M = \{x : \exists j, x \in M_j \text{ ve } \mu(x) = \mu_j(x)\}$ olmak üzere

$$\bigsqcup_{j \in J} (\mu_j, M_j) = (\mu, M)$$

dir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 4.1.8'in kanıtına benzer bir yolla yapılabilir. □

4.1.11. Sonuç: Her $(\mu_j, M_j) \in SF(X)$, $j \in J$ için

$$\varphi\left(\bigsqcup_{j \in J} (\mu_j, M_j)\right) = \bigcup_{j \in J} \varphi(\mu_j, M_j).$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi φ dönüşümünün örten olduğunu, dolayısıyla $(SF(X), \sqsubseteq)$ ile $(\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}, \subseteq)$ arasında bir tam latis izomorfizması olduğunu kolayca gösterebiliriz.

4.1.12. Yardımcı Teorem : $\varphi : SF(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}$ fonksiyonu örtendir.

Kanıt. Çarpım dokularının tanımından $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}$ 'nin elemanları $Y \subseteq X$ ve $s \in \mathbb{I}$ için $(Y \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, s])$ ve $(Y \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, s))$ formundaki kümelerin keyfi arakesitlerinden oluşmaktadır. φ 'nin örten olduğunu göstermek için , bu temel kümelerin $\varphi[SF(X)]$ görüntüsüne ait olduğunu göstermemiz yetecektir. Bu amaç için $\mu : X \rightarrow \mathbb{I}$ fonksiyonu

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ s, & x \in X \setminus Y \end{cases}.$$

şeklinde tanımlansın bu durumda amacımız $(Y \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, s]) = \varphi(\mu, X)$ olduğunu göstermektir. Gerçekten, $(x, t) \in \varphi(\mu, X)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $t \leq \mu(x)$ olmasıdır ve böylece $\varphi(\mu, X) = (Y \times \mathbb{I}) \cup ((X \setminus Y) \times [0, s]) = (Y \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, s])$ olur, ve istenilen elde edilir. Aynı yolla, $(Y \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, s)) = \varphi(\mu, Y)$ olduğu gösterilir, ve bu da kanıtı tamamlar. $\square$

φ 'nin $(SF(X), \sqsubseteq)$ ve $(\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}, \subseteq)$ tam latisleri arasında bir izomorfizma olduğunu gördük ve böylece $(SF(X), \sqsubseteq)$ tam dağılımlıdır.

4.2. Noktalar ve Ko-Noktalar

$X \times \mathbb{I}$ kümesi ile $SF(X)$ ' arasında bağıntı kurabilmek için $SF(X)$ 'de “nokta” kavramı tanımlayacağız . Bu tanım oldukça yararlı olacaktır. Üstelik nokta tanımına dual olarak “ko-nokta” tanımını da vereceğiz.

4.2.1. Tanım : $x \in X$ ve $s \in \mathbb{I}$ alalım.

$$1. \ x_s(x') = \begin{cases} s, & x' = x \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \text{ile } x_s : X \rightarrow \mathbb{I} \text{ fonksiyonunu tanımlarsak,}$$

$(x_s, \{x\})$ yumuşak belirtisiz kümesine *tabanı x ve değeri s olan SF(X)'in noktası* denir.

$$2. \ x^s(x') = \begin{cases} s, & x' = x \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \text{ile } x^s : X \rightarrow \mathbb{I} \text{ fonksiyonunu tanımlarsak,}$$

$(x^s, X \setminus \{x\})$ yumuşak belirtisiz kümesine *tabanı x ve değeri s olan SF(X)'in ko-noktası* denir.

Klasik belirtisiz altkümelerin aksine $s = 0$ için $(x_s, \{x\})$ kümesi anlamlıdır. Çünkü x_s sıfır fonksiyon olmasına rağmen x sert değere sahip tek nokta olması ile ayrılır. Dual olarak $s = 1$ için $(x^s, X \setminus \{x\})$ ko-noktası değeri 1 olan sabit fonksiyondur, fakat x sahip olduğu yumuşak değeri ile ayrılır.

$SF(X)$ 'in noktaları ve ko-noktaları ile $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ dokusu arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir.

4.2.2. Yardımcı Teorem : $x \in X, s \in \mathbb{I}$ için

$$\varphi(x_s, \{x\}) = P_{(x,s)} \text{ ve } \varphi(x^s, X \setminus \{x\}) = Q_{(x,s)}.$$

eşitlikleri sağlanır

Kanıt. Biz birinci eşitliği kanıtlayalım, benzer şekilde ikinci eşitlikte gösterilebilir. $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ alırsak $(x', s') \in X \times \mathbb{I}$ için

$$\begin{aligned} (x', s') \in \varphi(x_s, \{x\}) &\iff s' < x_s(x') \text{ veya } (s' = x_s(x') \text{ ve } x' \in \{x\}) \\ &\iff x' = x \text{ ve } s' \leq s, \end{aligned}$$

ve böylece $\varphi(x_s, \{x\}) = \{x\} \times [0, s] = P_{(x,s)}$ bulunur. $\square$

$(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ 'nın bilinen özellikleri kullanılarak aşağıdaki sonuçlar doğrudan gösterilebilir.

4.2.3. Teorem : $(\mu, M) \in SF(X)$, $(\mu_j, M_j) \in SF(X)$, $j \in J$, ve $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için aşağıdakiler sağlanır:

1. $(\mu, M) = \bigsqcup \{(x_s, \{x\}) \mid (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu, M)\}.$
2. $(\mu, M) = \bigsqcap \{(x^s, X \setminus \{x\}) \mid (\mu, M) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})\}.$
3. $(\mu, M) \not\sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\}) \iff (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu, M).$
4. $(x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\}).$
5. $(x_s, \{x\}) \sqsubseteq \bigsqcup_{j \in J} (\mu_j, M_j) \implies (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu_j, M_j) \text{ olacak şekilde } \exists j \in J \text{ vardır.}$

Kanıt. (1). $\varphi(\mu, M) \in \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ olduğu için, ([8], Teorem 1.2 (7))’den ve $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ dokusu sade doku olduğundan $\varphi(\mu, M) = \bigvee \{P_{(x,s)} \mid \varphi(\mu, M) \not\subseteq Q_{(x,s)}\} = \bigcup \{P_{(x,s)} \mid P_{(x,s)} \subseteq \varphi(\mu, M)\}$ olur . Böylece Yardımcı Teorem 4.1.14, Sonuç 4.1.11 ve Önerme 4.1.6

$$\begin{aligned}\varphi(\mu, M) &= \bigcup \{\varphi(x_s, \{x\}) \mid \varphi(x_s, \{x\}) \subseteq \varphi(\mu, M)\} \\ &= \varphi(\bigsqcup \{(x_s, \{x\}) \mid (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu, M)\})\end{aligned}$$

elde edilir. φ bire-bir olmasından istenilen sonuç bulunur.

(2). ([8], Teorem 1.2 (6)) kullanılarak (1)’de kullanılan yöntemle benzer bir şekilde elde edilebilir.

(3). Önerme 4.1.14 ve Önerme 4.1.6’dan

$$\begin{aligned}(\mu, M) \not\sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\}) &\iff \varphi(\mu, M) \not\subseteq \varphi(x^s, X \setminus \{x\}) \\ &\iff \varphi(\mu, M) \not\subseteq Q_{(x,s)} \\ &\iff (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \text{ sade olduğundan } P_{(x,s)} \subseteq \varphi(\mu, M) \\ &\iff \varphi(x_s, \{x\}) \subseteq \varphi(\mu, M) \\ &\iff (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu, M).\end{aligned}$$

(4). $(\mu, M) = (x_s, \{x\})$ alınarak (3)’den elde edilir.

(5). $(x_s, \{x\}) \sqsubseteq \bigsqcup_{j \in J} (\mu_j, M_j)$ ’dan $P_{(x,s)} \subseteq \bigcup_{j \in J} \varphi(\mu_j, M_j)$ elde ederiz, bu $(x, s) \in \bigcup_{j \in J} \varphi(\mu_j, M_j)$ oluşuna denktir. Bu sebeple $(x, s) \in \varphi(\mu_j, M_j)$ olacak şekilde $j \in J$ vardır, buradan $\varphi(x_s, \{x\}) = P_{(x,s)} \subseteq \varphi(\mu_j, M_j)$ ve bu j için $(x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu_j, M_j)$ elde edilir. $\square$

Yukarıdaki (1) ve (2) eşitlikleri, $SF(X)$ ’in nokta yada ko-noktaları kullanılarak X ’in yumuşak belirtisiz alt kümelerini elde edebilmenin yolunu göstermektedir. (3) ve (4) ise $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ dokusunun sade olmasına dayanan teknik ama çok önemli sonuçlardır. (5). özellikte dokunun sade olmasının bir sonucudur. Üstelik (5). özellik $SF(X)$ ’in noktalarının klasik belirtisiz küme teorisindeki belirtisiz noktaların tersine, join işlemi ile ilgi olarak klasik küme teorisindeki noktalarla aynı işleve sahip olduğunu göstermiştir.

Şimdi tümleyen kavramını ele alalım ve yumuşak belirtisiz kümeler üzerinde bir tümleyen tanımı verelim.

4.2.4. Tanım : $(\mu, M) \in SF(X)$ için $(\mu, M)' = (1 - \mu, X \setminus M)$ yumuşak belirtisiz kümesine (μ, M) 'in *tümleyeni* denir.

Tanımdan aşağıdakiler açıktır.

$$(i) \quad ((\mu, M)')' = (\mu, M), \text{ ve}$$

$$(ii) \quad (\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N) \iff (\nu, N)' \sqsubseteq (\mu, M)'.$$

$\iota, (SF(X), \sqsubseteq)$ üzerinde sırayı tersine çeviren involüttür, ve böylece $(SF(X), \sqsubseteq, \iota)$ Hutton cebirdir. Bu involütün $SF(X)$ 'in noktaları ve ko-noktaları üzerindeki etkisi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$(iii) \quad (x_s, \{x\})' = (x^{1-s}, X \setminus \{x\}), \text{ ve}$$

$$(iv) \quad (x^s, X \setminus \{x\})' = (x_{1-s}, \{x\}).$$

Bu involütün $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ üzerinde tanımlanan $\sigma_X = \pi_X \otimes \iota_X$ tümleyen ile ilişkisini inceleyelim,

4.2.5. Önerme : $(\mu, M) \in SF(X)$ için, $\varphi((\mu, M)') = \sigma_X(\varphi(\mu, M))$ eşitliği sağlanır.

Kanıt. Teorem 4.2.3 (1)'in kanıtında olduğu gibi, Sonuç 2.11, Sonuç 4.1.11 ve Teorem 4.2.3, (2) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sigma_X(\varphi(\mu, M)) &= \sigma_X\left(\bigcup \{P_{(x,s)} \mid (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu, M)\}\right) \\ &= \bigcap \{\sigma_X(P_{(x,s)}) \mid (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu, M)\} \\ &= \bigcap \{Q_{(x,1-s)} \mid (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (\mu, M)\} \quad (\text{Önerme 3.4}) \\ &= \varphi\left(\bigcap \{(x^{1-s}, X \setminus \{x\}) \mid (\mu, M)' \sqsubseteq (x_s, \{x\})'\}\right) \\ &= \varphi\left(\bigcap \{(x^{1-s}, X \setminus \{x\}) \mid (\mu, M)' \sqsubseteq (x^{1-s}, X \setminus \{x\})\}\right) \\ &= \varphi((\mu, M)') \end{aligned}$$

istenilen eşitliktir. □

4.2.6. Yardımcı Teorem : Şimdi $\varphi(\mu, M)$ 'nin bazı özelliklerini verelim.

$$1. \quad (a) \quad (x, s) \in \varphi(\mu, M), \quad s' \leq s \Rightarrow (x, s') \in \varphi(\mu, M)$$

$$(b) \quad (z, r) \in \varphi(\mu, M) \Leftrightarrow (z, 1-r) \notin \varphi(1-\mu, X \setminus M)$$

2. $\sigma(P(x, s)) = Q(x, 1 - s)$
3. $\sigma(Q(x, s)) = P(x, 1 - s)$
4. $(z, r) \in \sigma(\varphi(\mu, M)) \Leftrightarrow (z, 1 - r) \notin \varphi(\mu, M)$

Kanıt. 1. (a) $(x, s) \in \varphi(\mu, M)$ ve $s' \leq s$ ise tanımdan $s < \mu(x)$ veya $s = \mu(x)$, $x \in M$ burada karşımıza iki durum çıkmaktadır

- i. $s < \mu(x)$ olsun, $s' \leq s$ olduğundan $s' \leq \mu(x)$ olur. Bu durumda $(x, s') \in \varphi(\mu, M)$ elde edilir.
- ii. $s = \mu(x)$, $x \in M$ olsun bu durumda $s' \leq s$ olduğundan, $x \in M$ için $s' = s = \mu(x)$ seçilirse $(x, s') \in \varphi(\mu, M)$ elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

(b) $(\Rightarrow) (z, r) \in \varphi(\mu, M) \Rightarrow (z, 1 - r) \notin \varphi(1 - \mu, X \setminus M)$ gerektirmesinin doğru olmadığını kabul edelim, yani $(z, r) \in \varphi(\mu, M)$, $(z, 1 - r) \in \varphi(1 - \mu, X \setminus M)$ olsun. $(z, 1 - r) \in \varphi(1 - \mu, X \setminus M)$ olması tanımdan $1 - r < 1 - \mu(z)$ veya $1 - r = 1 - \mu(z)$, $z \in X \setminus M$ burada karşımıza iki durum çıkmaktadır

- i. $1 - r < 1 - \mu(z)$ olsun bu durumda $r > \mu(z)$ olur. Bu ise $(z, r) \in \varphi(\mu, M)$ yani $r < \mu(z)$ oluşu ile çelişir.
- ii. $1 - r = 1 - \mu(z)$ ve $z \in X \setminus M$ olsun. Bu durumda $z \notin M$ oluşu ile yani $(z, r) \in \varphi(\mu, M)$ ile çelişir.

$(\Leftarrow) (z, 1 - r) \notin \varphi(1 - \mu, X \setminus M) \Rightarrow (z, r) \in \varphi(\mu, M)$ gerektirmesinin doğru olmadığını kabul edelim, yani $(z, 1 - r) \notin \varphi(1 - \mu, X \setminus M)$, $(z, r) \notin \varphi(\mu, M)$ $(z, r) \notin \varphi(\mu, M)$ tanımını kullanırsak $r > \mu(z)$ veya $r = \mu(z)$, $z \notin M$ elde ederiz. Burada karşımıza iki durum çıkmaktadır.

- i. $r > \mu(z)$ olsun. Bu ise $1 - r > 1 - \mu(z)$ yani $r < \mu(z)$ oluşu ile çelişir.
- ii. $r = \mu(z)$ ve $z \notin M$ olsun. Bu ise $z \notin X \setminus M$ oluşu ile çelişir.

2.

$$\begin{aligned}
 \sigma_X(P_{(x,s)}) &= (\pi_X(P_x) \times \mathbb{I}) \cup (X \times \iota_X(P_s)) \\
 &= (X \setminus \{x\} \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, 1 - s)) \\
 &= Q_{(x,1-s)}
 \end{aligned}$$

3. $Q_{(x,1-s)} = \sigma_X(P_{(x,s)})$ bağıntısında tümleyen alınır ve s yerine $1-s$ yazılırsa istediğimiz $\sigma_X(Q_{(x,s)}) = P_{(x,1-s)}$ 'yi elde ederiz
4. $(\Rightarrow)(z, r) \in \sigma_X(\varphi(\mu, M)) \Rightarrow (z, 1-r) \notin \varphi(\mu, M)$ gerektirmesinin doğru olmadığını kabul edelim. $(z, r) \in \sigma_X(\varphi(\mu, M))$, $(z, 1-r) \in \varphi(\mu, M)$ olsun $(z, r) \in \sigma(\varphi(\mu, M)) = (z, r) \in \bigcap_{(x,s) \in \varphi(\mu, M)} \{(X \setminus \{x\} \times [0, 1]) \cup (X \times [0, 1-s])\}$ bu ifadeyi $(z, 1-r) \in \varphi(\mu, M)$ olduğunu dikkate alarak yeniden düzenlersek $(z, r) \in \{(X \setminus \{z\} \times [0, 1]) \cup (X \times [0, r])\}$ elde ederiz. Bu ise $z \in X \setminus \{z\}$ oluşu ile çelişir. $\Leftarrow$ 1-(b)'den $(z, 1-r) \in \varphi(\mu, M) \Rightarrow (z, r) \in \varphi(1-\mu, X \setminus M) = \varphi((\mu, M)')$ elde edilir. Böylece Önerme 4.1.7'den $(z, r) \in \sigma(\varphi(\mu, M))$ olur.
- $\Leftarrow$ benzer şekilde elde edilebilir.

□

Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuçlar kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.7. Teorem : φ fonksiyonu $(SF(X), \sqsubseteq, \iota)$ ve $(\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{I}, \subseteq, \sigma_X)$ Hutton cebirleri arasında bir izomorfizmadır.

4.3. Yumuşak Belirtisiz Kümelerin Alternatif Tasviri

Şimdi yumuşak belirtisiz kümelerin alternatif bir tasvirini vereceğiz. $x \in X$ ve X 'in (μ, M) yumuşak belirtisiz kümesi için $\mu(x)$ 'in değeri, $x \in M$ ve $x \notin M$ olmak üzere iki durumda incelenmiştir. Eğer birinci durumu 1 ve ikinci durumu 0 ile gösterirsek (μ, M) yumuşak belirtisiz kümesini $\langle \mu, \mu_M \rangle : X \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{I} \times \{0, 1\}$ fonksiyonuna karşılık getirebiliriz. Burada μ_M her $x \in X$ için,

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in M \\ 0 & \text{eğer } x \notin M \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır.

4.3.1. Önerme : $\leq$ ile $\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \{0, 1\}$ üzerinde sözlük sırayı gösterirsek $(\mu, M), (\nu, N) \in SF(X)$ için,

$$\langle \mu, \mu_M \rangle \leq \langle \nu, \nu_N \rangle \iff (\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N)$$

dir ve burada $\langle \mu, \mu_M \rangle \leq \langle \nu, \nu_N \rangle$ noktasal tanımlıdır.

Kanıt. Öncelikle sözlük sırayı hatırlatalım, $(s, k), (t, l) \in \mathbb{D}$ için $(s, k) \leq (t, l)$ sözlük sıralıdır ancak ve ancak $s < t$ yada $(s = t \text{ ve } k \leq l)$ ise, burada $\mathbb{I}$ ve $\{0, 1\}$ üzerinde bilinen sıra vardır. Buradan eğer $\langle \mu, \mu_M \rangle \leq \langle \nu, \nu_N \rangle$ ise, $x \in X$ için ya $\mu(x) < \nu(x)$ ya da $(\mu(x) = \nu(x) \text{ ve } \mu_M(x) \leq \nu_N(x))$ olur. $\mu_M(x) \leq \nu_N(x)$ oluşu $x \notin M \setminus N$ ile denktir. Böylece Tanım 4.1.5.'den $(\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N)$ olur. Ters gerektirme benzer yolla gösterilebilir. $\square$

$(s, k) \in \mathbb{D}$ için $(s, k)' = (1 - s, 1 - k)$ şeklinde tanımlayalım $\iota : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $(s, k) \mapsto (s, k)'$ dönüşümü, sırayı ters çeviren involüttür. Dahası, eğer $\langle \mu, \mu_M \rangle, (\mu, M)$ 'e karşılık geliyorsa $\langle \mu, \mu_M \rangle', \langle \mu, \mu_M \rangle'(x) = (\langle \mu, \mu_M \rangle(x))'$ şeklinde tanımlanabilir, ve buna karşılık gelen $(\mu, M)', (\mu, M)$ 'in tümleyenidir. Böylece:

4.3.2. Teorem : $(SF(X), \sqsubseteq, \iota)$ Hutton cebiri X 'in $\mathbb{D}$ -değerli alt kümesinin $(\mathbb{D}^X, \leq, \iota)$ Hutton cebirine izomorftur.

4.3.3. Sonuç : $(\mathbb{D}, \leq, \iota)$ Hutton cebiri $(\mathcal{J}, \sqsubseteq, \iota)$ Hutton cebirine izomorftur.

Kanıt. Eğer X tek nokta kümesi seçilirse Teorem 4.2.7'den $SF(X)$, $\mathcal{J}$ 'ya izomorftur. Diğer yandan Teorem 4.3.2'den $SF(X)$, $\mathbb{D}$ 'ye izomorftur. Böylece $\mathbb{D}$, $\mathcal{J}$ 'ya izomorf olur. $\square$

$(\mathbb{D}, \leq, \iota)$ 'in Hutton dokusu $(M_{\mathbb{D}}, \mathcal{M}_{\mathbb{D}}, \mu_{\mathbb{D}})$ olmak üzere $\mathbb{D}^X$ 'in Hutton dokusu $(X \times M_{\mathbb{D}}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{D}}, \pi_X \otimes \mu_{\mathbb{D}})$ formundadır. Sonuç 4.3.3'den biz $\mathbb{D}$ ile $\mathcal{J}$ 'yı yer değiştirebiliriz. Böylece $SF(X)$ 'in Hutton dokusu $(X \times M_{\mathcal{J}}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{M}_{\mathcal{J}}, \pi_X \otimes \mu_{\mathcal{J}})$ formunda yazılabilir. $(M_{\mathcal{J}}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}}, \mu_{\mathcal{J}})$ dokusu ([8], Örnek 2.14)'de incelenmiştir. Kolayca görülebilir ki, $\mathbb{D}$ 'nin molekülleri sadece $\mathbb{D}$ 'nin sıfırdan farklı elemanlarıdır. Yani $(r, 0)$, $r > 0$ ve $(r, 1)$, $r \geq 0$ biçimindeki elemanlardır. Burada $(r, 0)$, $r > 0$, $(0, 1] \times \{0\}$ kümesinin elemanları ve $(r, 1)$, $r \geq 0$ ise $[0, 1] \times \{1\}$ kümesinin elemanlarıdır. Böylece $M_{\mathbb{D}} = ((0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\})$ gösterimi ([8], Örnek 2.14)'de 0 ve 1'in yer değiştirilmesi ile verilen $M_{\mathcal{J}}$ gösteriminden farklıdır.

Şimdi $\mathcal{M}_{\mathbb{D}} = \{A_r \mid r \in [0, 1]\} \cup \{B_r \mid r \in [0, 1]\}$ olur. Burada

$$A_r = (((0, r] \times \{0\}) \cup [0, r] \times \{1\}),$$

$$B_r = (((0, r] \times \{0\}) \cup [0, r] \times \{1\}).$$

formundadır. Üstelik aşağıdaki eşitlikler,

$$\mu_{\mathbb{D}}(A_r) = B_{1-r} \text{ ve } \mu_{\mathbb{D}}(B_r) = A_{1-r}$$

$(M_{\mathbb{D}}, \mathcal{M}_{\mathbb{D}})$ üzerinde tümleyen işlemini verir.

$$P_{(r,1)} = A_r, \quad Q_{(r,1)} = B_r \text{ ve } P_{(r,0)} = B_r, \quad Q_{(r,0)} = A_r.$$

eşitlikleri kolayca gösterilebilir. Böylece $(M_{\mathbb{D}}, \mathcal{M}_{\mathbb{D}}, \mu_{\mathbb{D}})$ basit ama sade olmayan bir dokudur.

$(\mu, M) \in SF(X)$ için yada denk olarak $\langle \mu, \chi_M \rangle : X \rightarrow \mathbb{D}$ için aşağıdaki eşitliği verebiliriz.

$$\widehat{\langle \mu, \chi_M \rangle} = \{(x, (s, k)) \in X \times M_{\mathbb{D}} \mid (s, k) \leq \langle \mu, \chi_M \rangle(x)\} \in \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{D}}.$$

$\widehat{(\mu, M)}$ kümesi ile $SF(X)$ Hutton cebiri ve $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{D}}$ dokusu arasında izomorfizma tanımlayacağız. Şimdi bu dönüşüm altında $SF(X)$ 'in noktalarının görüntülerini tanımlamaya çalışalım.

4.3.4. Yardımcı Teorem: $x \in X, s \in \mathbb{I}$ için $\widehat{(x_s, \{x\})} = P_{(x, (s, 0))}$ olur. Bu yüzden $SF(X)$ 'in noktaları $X \times (\mathbb{I} \times \{0\}) \subset X \times M_{\mathbb{D}}$ 'in elemanlarına karşılık gelmektedir.

Kanıt. $\widehat{(x_s, \{x\})}$ 'in tanımından,

$$\begin{aligned} (y, (r, k)) \in \widehat{(x_s, \{x\})} &\iff (r, k) \leq \langle x_s, \chi_{\{x\}} \rangle(y) \\ &\iff r < x_s(y), \quad k = 0, 1 \text{ yada } r = x_s(y), \quad k \leq \chi_{\{x\}}(y) \\ &\iff y = x, \quad r \leq s \text{ ve } k = 0, 1, \end{aligned}$$

$y \neq x$ olduğundan birinci durum $r < 0$ ile ikinci durum ise, $r = k = 0$ ile çelişir. Böylece $\widehat{(x_s, \{x\})} = \{x\} \times A_s = P_x \times P_{(s, 1)} = P_{(x, (s, 1))}$ olur ve istenilen elde edilir. $\square$

Burada $SF(X)$ 'in $(X \times M_{\mathbb{D}}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{M}_{\mathbb{D}})$ biçiminde alternatif bir dokusal gösterimini vermiş olduk, bu gösterim gerektiğinden daha fazla noktalara sahiptir. Bu yüzden biz $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ dokusunu tercih ettik

4.4. Yumuşak belirtisiz kümelerin SF yapısı

Bu bölümde, yumuşak belirtisiz kümelerin oluşturduğu yapı yani, **set** kategorisi üzerindeki somut kategoriye tanımlayacağız.

4.4.1. Tanım : $X \in \text{Ob } \mathbf{Set}$ olmak üzere, nesneleri $SF(X)$ Hutton cebirleri ve morfizmaları taban kümeleri arasındaki fonksiyonlar olan bir yapı tanımlar, bu yapıyı **SF** ile göstereceğiz ve *yumuşak belirtisiz kümelerin yapısı* diye adlandıracağız.

Amacımız, **SF**'in incelenmesi ve bilinen diğer kategorilerle arasındaki ilişkiyi araştırmaktır.

X, Y iki küme ve $g : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, $SF(Y)$ 'den $SF(X)$ 'e g^{-1} ile göstereceğimiz aşağıdaki biçimde tanımlanan bir dönüşüm elde ederiz.

$$g^{-1}(\nu, N) = (\nu \circ g, g^{-1}[N]) \quad \forall (\nu, N) \in SF(Y).$$

Aşağıdaki önerme yardımı ile g^{-1} dönüşümünün temel özelliklerini verebiliriz.

4.4.2. Önerme :

1. $g \in \mathbf{Set}(X, Y)$ olmak üzere, $g^{-1} : SF(Y) \rightarrow SF(X)$ dönüşümü tümleyeni, keyfi meetleri ve joinleri korur
2. (a) $X \xrightarrow{g_1} Y \xrightarrow{g_2} Z$ için, $(g_2 \circ g_1)^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1}$ dir.
- (b) $(\iota_X)^{-1} = \iota_{SF(X)}$, burada ι_X X üzerinde birimdir ve $\iota_{SF(X)}$ da $SF(X)$ üzerinde birimdir.

Kanıt. (1) Her $(\nu, N) \in SF(Y)$ için $g^{-1}((\nu, N)') = g^{-1}(1 - \nu, Y \setminus N) = ((1 - \nu) \circ g, g^{-1}[Y \setminus N]) = (1 - \nu \circ g, X \setminus g^{-1}[N]) = (\nu \circ g, g^{-1}[N])' = (g^{-1}(\nu, N))'$ olduğundan g^{-1} dönüşümü tümleyeni korur.

$j \in J$, için $(\nu_j, N_j) \in SF(Y)$ olsun, her j için $g^{-1}(\nu_j, N_j) = (\mu_j, M_j)$ olarak tanımlayalım, $\prod_{j \in J} (\nu_j, N_j) = (\nu, N)$ ve $\prod_{j \in J} (\mu_j, M_j) = (\mu, M)$ olsun. $g^{-1}(\nu, N) = (\mu, M)$ yani $(\nu \circ g, g^{-1}[N]) = (\mu, M)$ olduğunu gösterebilirsek işimiz biter. Yardımcı Teorem 4.1.8 'den

$$\mu = \bigwedge_{j \in J} \mu_j = \bigwedge_{j \in J} (\nu_j \circ g) = (\bigwedge_{j \in J} \nu_j) \circ g = \nu \circ g.$$

diğer yandan,

$$\begin{aligned}
 x \in M &\iff \forall j \ (x \in M_j \text{ yada } \mu(x) < \mu_j(x)) \\
 &\iff \forall j \ (g(x) \in N_j \text{ yada } \nu(g(x)) < \nu_j(g(x))) \\
 &\iff g(x) \in N,
 \end{aligned}$$

böylece $M = g^{-1}[N]$ olur. Dolayısıyla, g^{-1} 'in keyfi meet'i koruduğu gösterilmiş olur. Benzer biçimde keyfi join'in de korunduğu gösterilebilir.

(2 a) $(\omega, O) \in SF(Z)$ için aşağıdaki eşitliği biliyoruz.

$$\begin{aligned}
 (g_2 \circ g_1)^{-1}(\omega, O) &= (\omega \circ (g_2 \circ g_1), (g_2 \circ g_1)^{-1}[O]) \\
 &= ((\omega \circ g_2) \circ g_1, g_1^{-1}[g_2^{-1}[O]]) \\
 &= g_1^{-1}(\omega \circ g_2, g_2^{-1}[O]) \\
 &= (g_1^{-1} \circ g_2^{-1})(\omega, O),
 \end{aligned}$$

ve böylece $(g_2 \circ g_1)^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1}$ olur.

(2 b) Her $(\mu, M) \in SF(X)$ için, $(\iota_X)^{-1}(\mu, M) = (\mu \circ \iota_X, \iota_X^{-1}[M]) = (\mu, M) = \iota_{SF(X)}(\mu, M)$. Buradan $(\iota_X)^{-1} = \iota_{SF(X)}$ istenilen elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.7 gereğince φ dönüşümü $SF(X)$ ile $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ arasında bir izomorfizmadır. Biz φ_X ile $SF(X)$ Hutton cebiri ve $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ dokusu arasındaki izomorfizmaya benzer şekilde $SF(Y)$ ve $\mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}$, arasındaki izomorfizmayı φ_Y ile gösterelim. Buradan aşağıdaki gibi bir θ_g dönüşümü tanımlanabilir:

$$\theta_g = \varphi_X \circ g^{-1} \circ \varphi_Y^{-1}$$

Bu dönüşüm $(\mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}, \subseteq, \sigma_Y)$ ile $(\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \subseteq, \sigma_X)$ arasında tümleyeni, keyfi meet'i ve join'i koruyan dönüşümdür.

$$\begin{array}{ccc}
 X & & SF(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J} \\
 \downarrow g & & \uparrow g^{-1} \qquad \qquad \uparrow \theta_g \\
 Y & & SF(Y) \xrightarrow{\varphi_Y} \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}
 \end{array}$$

Şimdi biz **SF** ile **ctmPTex^{op}** kategorisi arasında bir fonktor tanımlayabilecek durumdayız.

4.4.3. Teorem : $SF(X) \in \text{Ob } \mathbf{SF}$ ve $g \in \text{Mor } (\mathbf{SF})$ için $\mathfrak{E}(SF(X)) = (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$, $\mathfrak{E}(g) = \theta_g$ şeklinde tanımlansın bu durumda $\mathfrak{E} : \mathbf{SF} \rightarrow \mathbf{ctmPTex}^{\text{op}}$ dönüşümü bir funktordur üstelik bu funktor bir gömmedir.

Kanıt. $\mathfrak{E}(SF(X))$ tümleyenli sade dokudur ve $\mathfrak{E}(g) = \theta_g$ dönüşümü $\mathbf{ctmPTex}^{\text{op}}$ kategorisinde bir morfizma olduğundan $\mathfrak{E}$ dönüşümünün birimi ve bileşkeyi koruduğu gösterilirse kanıt tamamlanır. Öncelikle, Önerme 4.4.2 (2b) 'den $\mathfrak{E}(\iota_X) = \varphi_X \circ (\iota_X)^{-1} \circ \varphi_X^{-1} = \varphi_X \circ \iota_{SF(X)} \circ \varphi_X^{-1} = \varphi_X \circ \varphi_X^{-1} = \iota_{SF(X)}$ olduğu biliniyor. Böylelikle $\mathfrak{E}$ dönüşümü birimi korur. İkinci olarak $X \xrightarrow{g_1} Y \xrightarrow{g_2} Z$ için Önerme 4.4.2 (2a)'dan $\mathfrak{E}(g_2 \circ g_1) = \varphi_X \circ (g_2 \circ g_1)^{-1} \circ \varphi_Z^{-1} = \varphi_X \circ (g_1^{-1} \circ g_2^{-1}) \circ \varphi_Z^{-1} = (\varphi_X \circ g_1^{-1} \circ \varphi_Y^{-1}) \circ (\varphi_Y \circ g_2^{-1} \circ \varphi_Z^{-1}) = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \mathfrak{E}(g_2) \circ \mathfrak{E}(g_1)$ eşitliği elde edilir. Burada $\mathbf{ctmPTex}^{\text{op}}$ kategorisinde morfizmaların bileşkesinin sırası bu dönüşümlerin tersi olduğu unutulmamalıdır. Bu nedenle $\mathfrak{E}$ bir funktordur üstelik 1-1 ve gömme olduğu da açıktır. $\square$

Eğer $\mathbf{ctmPTex}^{\text{op}}$ 'in nesneleri $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ forma kısıtlanırsa, $\mathbf{ctmPTex}_{\mathbf{SF}}^{\text{op}}$ ile gösterilen alt kategori elde edilir. Böylece $\mathfrak{E}$ nesneler üzerinde bire-bir olan $\mathbf{SF}$ 'den $\mathbf{ctmPTex}_{\mathbf{SF}}^{\text{op}}$ 'e bir funktordur. Ancak $\mathfrak{E}$ funktoru altında $\mathbf{SF}$ 'nin görüntüsü $\mathbf{ctmPTex}_{\mathbf{SF}}^{\text{op}}$ kategorisinin dolu alt kategorisi değildir.

([8], Theorem 4.2)'de $\mathbf{tmPTex}^{\text{op}}$ kategorisinin $\mathbf{dfPTex}$ kategorisine izomorfik olduğu gösterilmiştir, ve bu izomorfizma $\mathfrak{N} : \mathbf{tmPTex}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{dfPTex}$ doğal bir yolla tümleyenli dokulara kısıtlanabilir. Açıktır ki, sade dokulara doğru daha fazla kısıtlamalar yapılabilir, ve $\mathfrak{N}$ dönüşümüne $\mathbf{ctmPTex}^{\text{op}}$ ve $\mathbf{cdfPTex}$ arasında bir izomorfizma gözü ile bakılabilir. $\mathfrak{N}$ dönüşümü altında $\mathbf{ctmPTex}_{\mathbf{SF}}^{\text{op}}$ 'in $\mathbf{dfPTex}_{\mathbf{SF}}$ görüntüsü $\mathbf{ctmPTex}_{\mathbf{SF}}^{\text{op}}$ kategorisine izomorfiktir. $\mathfrak{N}$ nesneler üzerinde birim olduğundan, $\mathbf{cdfPTex}_{\mathbf{SF}}$ kategorisinin nesneleri tümleyenli sade dokulardır ve nesneler $X \in \text{Ob } \mathbf{Set}$ için $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ biçimindedirler. Son olarak eğer, $(S, \mathcal{S})$, $(T, \mathcal{T})$ dokuları için ve $\theta : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ keyfi meet ve joini koruyan dönüşüm ise, $\mathfrak{N}(\theta) = (f^\theta, F^\theta)$ dır. Burada

$$f^\theta = \bigvee \{ \bar{P}_{(s,t)} \mid \exists P_s \not\subseteq Q_u, P_v \not\subseteq Q_t \text{ için } P_u \subseteq \theta(C) \implies P_v \subseteq C, \forall C \in \mathcal{T} \},$$

$$F^\theta = \bigcap \{ \bar{Q}_{(s,t)} \mid \exists P_u \not\subseteq Q_s, P_t \not\subseteq Q_v \text{ için } \theta(C) \subseteq Q_u \implies C \subseteq Q_v, \forall C \in \mathcal{T} \}.$$

Şimdi aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

4.4.4. Önerme : $g : X \rightarrow Y$ için $\mathfrak{N}(\theta_g) = (f^{\theta_g}, F^{\theta_g})$ fonktoru vardır, burada

$$f^{\theta_g} = \{((x, s), (g(x), t)) \mid x \in X, s, t \in \mathbb{I}, t \leq s\},$$

$$F^{\theta_g} = \{((x, s), (g(x), t)) \mid x \in X, s, t \in \mathbb{I}, t < s\}.$$

biçimindedir.

Kanıt. Öncelikle aşağıdaki yararlı yardımcı teoremi vermekle başlayalım.

4.4.5. Yardımcı Teorem : $Z \subseteq Y$, $t \in \mathbb{I}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\theta_g((Z \times \mathbb{I}) \cup (Y \times [0, t])) = (g^{-1}[Z] \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, t]),$$

$$\theta_g((Z \times \mathbb{I}) \cup (Y \times [0, t))) = (g^{-1}[Z] \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, t)).$$

Kanıt. Biz birinci eşitliği göstereceğiz, ikinci eşitlik benzer biçimde yapılabilir. Önce-

likle Yardımcı Teorem 4.1.12'nin kanıtından $\nu(y) = \begin{cases} 1 & y \in Z, \\ t & y \in Y \setminus Z. \end{cases}$ olmak üzere

$\varphi_Y^{-1}((Z \times \mathbb{I}) \cup (Y \times [0, t])) = (\nu, Y)$ eşitliğinin varlığını biliyoruz. Diğer yandan, $g^{-1}(\nu, Y) =$

$(\nu \circ g, g^{-1}[Y]) = (\nu \circ g, X)$, ve $(\nu \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & x \in g^{-1}[Z], \\ t & x \in X \setminus g^{-1}[Z]. \end{cases}$ böylece tekrar

Yardımcı Teorem 4.1.12'nin kanıtı kullanılırsa $\theta_g((Z \times \mathbb{I}) \cup (Y \times [0, t])) = \varphi_X(\nu \circ g, X) = (g^{-1}[Z] \times \mathbb{I}) \cup (X \times [0, t])$ eşitliği elde edilir. $\square$

f^{θ_g} eşitliğinin ispatına dönelim, verilen eşitliğin sağ tarafını h ile gösterelim. $((x, s), (g(x), t)) \in h$ alalım ve $u = s$, $v = t$ olarak seçelim, böylece $P_{(x,s)} \not\subseteq Q_{(x,u)}$ ve $P_{(y,v)} \not\subseteq Q_{(y,t)}$ olur. Sade dokularla ilgilendiğimizden $C \in \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}$ alırsak $C = \bigcap_{j \in J} (Z_j \times \mathbb{I}) \cup (Y \times A_j)$ olur. Burada her $j \in J$ için $Z_j \subseteq Y$ ve $A_j \in \mathcal{J}$ dir. Böylece, Yardımcı Teorem 4.4.5'den

$$P_{(x,u)} \subseteq \theta_g(C) \implies (x, s) \in \bigcap_{j \in J} (g^{-1}[Z_j] \times \mathbb{I}) \cup (Y \times A_j)$$

$$\implies (g(x), t) \in C$$

$$\implies P_{(g(x),t)} \subseteq C$$

elde edilir, $((x, s), (g(x), t)) \in f^{\theta_g}$ ve böylece $h \subseteq f^{\theta_g}$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $f^{\theta_g} \subseteq h$ olduğunu gösterelim bunu için öncelikle $f^{\theta_g} \not\subseteq h$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f^{\theta_g} \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$, $\overline{P}_{((x,s),(y,t))} \not\subseteq h$ olacak şekilde $\overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ ve

$\overline{P}_{((x,s),(y,t))}$ vardır. $\overline{P}_{((x,s),(y,t'))} \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ sağlayan $t' \in \mathbb{I}$ vardır. $u, v \in \mathbb{I}$ için $P_{(x,s)} \not\subseteq Q_{(x,u)}$, $P_{(y,v)} \not\subseteq Q_{(y,t')}$ ve

$$P_{(x,u)} \subseteq \theta_g(C) \implies P_{(y,v)} \subseteq C, \forall C \in \mathcal{P}(Y) \otimes \mathbb{J}. \quad (1)$$

sağlanır. Diğer yandan $((x,s),(y,t)) \notin h$ ve böylece $y \neq g(x)$ yada $s < t$ olur. Burada iki durum ile karşı karşıyayız.

1. Durum $y \neq g(x)$ için. $C = (\{g(x)\} \times \mathbb{I} \cup Y \times \emptyset)$ seçersek Yardımcı Teorem 4.4.5'den $\theta_g(C) = g^{-1}[\{g(x)\}] \times \mathbb{I}$, bu yüzden $P_{(x,u)} \in \theta_g(C)$ olur. (1) gerektirmesinden $P_{(y,v)} \in C$ elde edilir. Böylece $y \in \{g(x)\}$ olur ki, bu da çelişkidir.

2. Durum $s < t$. Bu durumda C 'yi $C = (\emptyset \times \mathbb{I}) \cup (Y \times [0, s])$ seçersek, Yardımcı Teorem 4.4.5'den $\theta_g(C) = X \times [0, s]$ olur, bu yüzden $u \leq s$ olduğundan $P_{(x,u)} \in \theta_g(C)$ elde edilir. Bundan dolayı (1) gerektirmesinden $P_{(y,v)} \in C$ olur ve $v \leq s$ sonucuna varırız. Bununla birlikte, $s < t \leq t' \leq v$ elde edilir ki, bu bir çelişki verir.

Böylece, $f^{\theta_g} \subseteq h$ kanıtlanmış olur, benzer şekilde ikinci eşitlik elde edilebilir. $\square$

[8]'de gösterildiği gibi, eğer $(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T})$ sade dokularsa $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ difonksiyonu $\psi(s) = t \iff f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq F$ koşulu altında $\psi = \psi_{(f,F)} : S \rightarrow T$ fonksiyonu ile temsil edilebilir. Böylece $\mathfrak{V}_p(S, \mathcal{S}) = (S, \mathcal{S})$, $\mathfrak{V}_p(f, F) = \psi_{(f,F)}$ biçiminde tanımlı $\mathfrak{V}_p : \mathbf{dfPTex} \rightarrow \mathbf{fPTex}$ fonktörünü kurabiliriz. $\mathfrak{V}_p$ $\mathbf{dfPTex}$ kategorisi ile $\mathbf{fPTex}$ yapısı arasında bir izomorfizmadır. Tümleyenli dokulara ve difonksiyonlara kısıtlama yaparsak $\mathfrak{V}_{cp} : \mathbf{cdfPTex} \rightarrow \mathbf{cfPTex}$ izomorfizmasını elde ederiz. $\mathfrak{V}_{cp}$ fonktörü altında $\mathbf{cdfPTex}_{\mathbf{SF}}$ 'nin $\mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}}$ izomorfik görüntüsü, $\mathbf{cfPTex}$ 'nin bir alt yapısıdır. $\mathfrak{V}_{cp}$ nesneler üzerinde birimdir, böylece tek ihtiyacımız olan $\mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}}$ 'in morfizmalarını belirlemektir.

4.4.6. Önerme: $g : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun, θ_g ve $(f^{\theta_g}, F^{\theta_g})$ yukarıdaki gibi tanımlasın. $\psi = \langle g, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ ile tanımlı $\psi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ fonksiyonu $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathbb{J})$ ve $(Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathbb{J})$ sade dokuları arasındaki $(f^{\theta_g}, F^{\theta_g})$ difonksiyonuna karşılık gelmektedir. Burada her $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için $\langle g, \iota_{\mathbb{I}} \rangle(x, s) = (g(x), s)$ biçiminde tanımlıdır.

Kanıt. Yukarıda ψ fonksiyonu $\psi(x, s) = (y, t) \iff f^{\theta_g} \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ ve $\overline{P}_{((x,s),(y,t))} \not\subseteq F^{\theta_g}$ biçiminde karakterize edilmişti. Önerme 4.4.4'ten aşağıdakiler biliniyor.

$$\begin{aligned} f^{\theta_g} \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))} &\iff y = g(x) \text{ ve } t \leq s, \\ \overline{P}_{((x,s),(y,t))} \not\subseteq F^{\theta_g} &\iff y \neq g(x) \text{ yada } t \geq s. \end{aligned}$$

Bu nedenle, $\psi(x, s) = (y, t) \iff y = g(x)$ ve $t = s$ olur, bu ise istenilen $\psi = \langle g, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ eşitliğini verir. $\square$

Aşağıdaki diyagram şimdiye kadar incelediğimiz izomorfik kategorileri ve morfizmaları göstermektedir.

$$\mathbf{SF} \xrightarrow{\mathfrak{e}} \mathbf{ctmPTex}_{\mathbf{SF}}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathfrak{N}_{cp}} \mathbf{cdfPTex}_{\mathbf{SF}} \xrightarrow{\mathfrak{V}_{cp}} \mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J} & (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X) & X \times \mathbb{I} \\ \downarrow g & \uparrow \theta_g & \downarrow (f^{\theta_g}, F^{\theta_g}) & \downarrow \langle g, \iota_{\mathbb{I}} \rangle \\ Y & \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J} & (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}, \sigma_Y) & Y \times \mathbb{I} \end{array}$$

$SF(X)$ noktaları ile $X \times \mathbb{I}$ kümesinin noktaları arasında bire-bir ilişki olduğu biliniyor. Bu nedenle $\mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}}$ 'in $\langle g, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ morfizmasını $SF(X)$ 'in noktaları ile $SF(Y)$ 'nin noktaları arasında bir dönüşüm olarak göz önüne alınabilir. Böylece aşağıdaki tanımları verilebilir.

4.4.7. Tanım: $X \in \mathbf{Ob Set}$ olmak üzere nesneleri $SF(X)$ olan ve morfizmaları $g : X \rightarrow Y; (x_s, \{x\}) \mapsto (g(x)_s, \{g(x)\})$ biçiminde tanımlı $SF(X)$ 'in noktaları ile $SF(Y)$ 'nin noktaları arasındaki dönüşüm bir kategori tanımlar. Biz bu kategoriyi $\mathbf{fSF}$ ile göstereceğiz.

$(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ nesnesini $SF(X)$ nesnesine götüren ve $g : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için $\langle g, \iota_X \rangle : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ morfizmasını $(x_s, \{x\}) \mapsto (g(x)_s, \{g(x)\})$ morfizması ile ilişkilendiren fonktor altında $\mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}}$ kategorisi $\mathbf{fSF}$ kategorisine izomorfiktir. Özel olarak $\mathbf{SF}$ yapısı $\mathbf{fSF}$ kategorisine izomorfiktir. $\mathbf{Set}$ 'den $\mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}}$ 'e $\mathfrak{F}$ fonktoru $\mathfrak{F}(X) = (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$, $\mathfrak{F}(g) = \langle g, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$, biçiminde tanımlanabilir. Burada $X \in \mathbf{Ob Set}$ ve $g \in \mathbf{Set}(X, Y)$ dir. Açık ki, $\mathfrak{F}$ nesneler üzerinde bire-bir dir. Fakat $\mathbf{Set}$ 'nin $\mathfrak{F}$ fonktoru altında görüntüsü, $\mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}}$ kategorisinin alt kategorisi değildir. Bu fonktorun önemi, $SF(X)$ üzerindeki topolojilerini inceleneceği sonraki bölümde ortaya konacaktır.

5. SF -TOPOLOJİLERİ

Bu bölümde $SF(X)$ Hutton cebiri üzerindeki topoloji kavramını inceleyeceğiz, ve belirtsiz küme teorisindeki geleneklere uymak amacı ile böyle bir topolojiyi X üzerindeki SF -topolojisi diye adlandıracacağız.

5.1. X üzerindeki SF -topolojileri

5.1.1. Tanım: X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $T \subseteq SF(X)$ alt kümesine X üzerinde SF -topolojisi denir.

SFT1 $(\mathbf{0}, \emptyset) \in T$ ve $(\mathbf{1}, X) \in T$.

SFT2 $(\mu_j, M_j) \in T, j = 1, 2, \dots, n \implies \prod_{j=1}^n (\mu_j, M_j) \in T$.

SFT3 $(\mu_j, M_j) \in T, j \in J \implies \bigsqcup_{j \in J} (\mu_j, M_j) \in T$.

T 'nin elamanlarına *açık* kümeler, ve $T' = \{(\mu, M) \mid (\mu, M)' \in T\}$ biçiminde tanımlanan T' 'nin elemanlarına ise, *kapalı* kümeler denir.

T, X üzerinde bir SF -topoloji ise, (X, T) çiftine SF -topolojik uzay denir.

5.1.2. Tanım: T, X üzerinde bir SF -topoloji olsun;

- (i) $(\mu, M) \in SF(X)$ olmak üzere (μ, M) 'in *kapalı* $\overline{(\mu, M)}$ ile gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\overline{(\mu, M)} = \prod \{(\nu, N) \mid (\mu, M) \sqsubseteq (\nu, N) \in T'\}.$$

- (ii) Benzer biçimde (μ, M) 'in *içi* $(\mu, M)^\circ$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$(\mu, M)^\circ = \bigsqcup \{(\nu, N) \mid (\nu, N) \in T, (\nu, N) \sqsubseteq (\mu, M)\}.$$

Şimdi klasik topolojide olduğu gibi taban ve alttaban kavramları SF -topolojisi için karakterize edilebilir.

5.1.3. Tanım: T, X üzerinde bir SF -topolojisi olsun.

1. $B \subseteq T$ olmak üzere T 'nin her elemanı B 'nin elemanlarının bir joini olarak yazılabiliyorsa B 'ye T 'nin T 'nin tabanı denir. Denk olarak, B , T 'nin bir tabanıdır ancak ve ancak $(x_r, \{x\}) \sqsubseteq (\mu, M)$ sağlayan $(\mu, M) \in T$ ve $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_r, \{x\}) \sqsubseteq (\nu, N) \sqsubseteq (\mu, M)$ sağlayan bir $(\nu, N) \in B$ vardır.
2. $S \subseteq T$ olmak üzere S 'nin elemanlarının sonlu meet kümesi T için bir taban oluyorsa, S 'ye T 'nin bir alt tabanı denir.

5.1.4. Önerme: $B \subseteq SF(X)$ alt kümesi X üzerindeki SF -topolojisi için bir tabandır ancak ve ancak B alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlar.

$SFB1 \sqcup \{(\nu, N) \mid (\nu, N) \in B\} = (\mathbf{1}, X)$.

$SFB2$ Verilen $(\nu_1, N_1), (\nu_2, N_2) \in B$ ve $(x_r, \{x\}) \in (\nu_1, N_1) \sqcap (\nu_2, N_2)$ için, $(x_r, \{x\}) \in (\nu_3, N_3) \sqsubseteq (\nu_1, N_1) \sqcap (\nu_2, N_2)$ koşulunu sağlayan bir $(\nu_3, N_3) \in B$ vardır.

Kanıt. Teorem 4.2.3 (5)'den elde edilebilir. □

$SF(X)$ 'in boş kümeden farklı herhangi bir S alt kümesinin elemanlarının sonlu meet kümesi $SFB1$ ve $SFB2$ koşullarını sağladığından, klasik topolojide olduğu gibi, X üzerindeki SF -topolojisi için bir alttabandır.

Şimdi süreklilik kavramını tanımlayacağız.

5.1.5. Tanım: T , X üzerinde SF -topoloji ve V , Y üzerinde bir SF -topoloji olsun $(\nu, N) \in V \implies f^{-1}(\nu, N) \in T$ gerektirmesini sağlayan $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna T - V sürekli denir.

Önerme 4.4.2 (2)'den her birim fonksiyonun sürekli olduğu ve sürekli iki fonksiyonun bileşkesinin de sürekli olacağı görülebilir. Bu nedenle SF -topolojik uzaylar ve taban kümeleri arasındaki sürekli fonksiyonlar bir yapı tanımlamaktadır. Biz bu yapıyı **SF-Top** ile göstereceğiz. Aşağıdaki yardımcı teorem süreklilik kavramını karakterize etmek için oldukça yararlı olacaktır.

5.1.6. Yardımcı Teorem: $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$, $r \in \mathbb{I}$ ve $(\nu, N) \in SF(Y)$ ise

$$(f(x)_r, \{f(x)\}) \sqsubseteq (\nu, N) \iff (x_r, \{x\}) \sqsubseteq f^{-1}(\nu, N).$$

dır.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
(x_r, \{x\}) \sqsubseteq f^{-1}(\nu, N) &\iff (x_r, \{x\}) \sqsubseteq (\nu \circ f, f^{-1}N) \\
&\iff r < (\nu \circ f)(x) \text{ yada } r = (\nu \circ f)(x) \text{ ve } x \in f^{-1}N \\
&\iff r < \nu(f(x)) \text{ yada } r = \nu(f(x)) \text{ ve } f(x) \in N \\
&\iff (f(x)_r, \{f(x)\}) \sqsubseteq (\nu, N).
\end{aligned}$$

□

Şimdi X üzerindeki SF -topoloji ile $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ üzerindeki ditopoloji arasındaki ilişkiyi verelim. Eğer T, X üzerinde bir SF -topolojisi ise $T \subseteq SF(X)$ ve $\varphi : SF(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ izomorfizmasını kullanırsak $\varphi(T) \subseteq \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ elde ederiz. $\varphi(\mathbf{0}, \emptyset) = \emptyset$, $\varphi(\mathbf{1}, X) = X \times \mathbb{I}$ ve φ , meet ve joini $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ üzerinde sırasıyla kesişim ve bileşime dönüştürdüğünden, $\varphi(T)$, $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ sade dokusu üzerinde bir topolojidir. Üstelik, Önerme 4.2.5 'ten $(\mu, M) \in T$ için, $\varphi((\mu, M)') = \sigma_X(\varphi(\mu, M))$ olur, böylece $\varphi(T') = \sigma_X(\varphi(T))$, $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ sade dokusu üzerinde bir kotopolojidir. Bu nedenle $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ üzerinde $(\varphi(T), \varphi(T'))$ ditopolojisi X üzerindeki T, SF -topolojisine karşılık gelir ve $(\varphi(T), \varphi(T'))$, (τ_T, κ_T) olarakta gösterilir.

Açıkça φ izomorfizmasından yararlanarak bu $(\varphi(T), \varphi(T'))$ ditopoloji üzerindeki kapanış ve iç tanımlarını ifade edelim:

$$[\varphi((\mu, M))] = \bigcap \{ \varphi(\nu, N) \mid \varphi(\mu, M) \subseteq \varphi(\nu, N) \in \varphi[T'] \}$$

burada $[\varphi((\mu, M))]$ ile $\varphi(\mu, M)$ 'nin kapanışını göstermekteyiz. Benzer biçimde;

$$]\varphi((\mu, M)) [= \bigcup \{ \varphi((\nu, N)) \mid \varphi((\nu, N)) \in T, \varphi((\nu, N)) \subseteq \varphi((\mu, M)) \}$$

burada $]\varphi((\mu, M)) [$ ile de $\varphi(\mu, M)$ 'nin içini göstermekteyiz.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{SF} & \xrightarrow{\mathfrak{E}} & \mathbf{ctmPTex}_{\mathbf{SF}}^{\mathbf{op}} & \xrightarrow{\mathfrak{N}_{cp}} & \mathbf{cdfPTex}_{\mathbf{SF}} & \xrightarrow{\mathfrak{N}_{cp}} & \mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}} \\
& & & \searrow \mathfrak{E}_f & & & \nearrow
\end{array}$$

$\mathbf{SF}$ 'den $\mathbf{cfPTex}$ 'e $\mathfrak{E}_f = \mathfrak{N}_{cp} \circ \mathfrak{N}_{cp} \circ \mathfrak{E}$ fonktörünü düşünelim, bu fonktor $\mathfrak{E}_f(SF(X)) = (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için $\mathfrak{E}_f(f) = \langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ biçiminde verilir. Burada $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle(x, r) = (f(x), r)$ dır. T X üzerinde bir SF -topoloji ve V Y üzerinde bir SF -topoloji olsun. $f : X \rightarrow Y$, T - V sürekli ise $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ ninde $(\varphi(T), \varphi(T')) - (\varphi(V), \varphi(V'))$ bi-sürekli olduğunu göstermeye çalışacağız. Bunun için aşağıdaki Yardımcı Teoreme ihtiyacımız vardır.

5.1.7. Yardımcı Teorem: $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $(\nu, N) \in SF(Y)$ olsun, bu durumda

$$\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle^{-1}[\varphi(\nu, N)] = \varphi(f^{-1}(\nu, N)).$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ için

$$\begin{aligned} (x, r) \in \langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle^{-1}[\varphi(\nu, N)] &\iff (f(x), r) \in \varphi(\nu, N) \\ (\varphi\text{'nin tanımından}) &\iff r < \nu(f(x)) \text{ yada } (r = \nu(f(x)) \text{ ve } f(x) \in N) \\ &\iff r < (\nu \circ f)(x) \text{ yada } (r = (\nu \circ f)(x) \text{ ve } x \in f^{-1}(N)) \\ &\iff (x, r) \in \varphi(\nu \circ f, f^{-1}(N)) \\ &\iff (x, r) \in \varphi(f^{-1}(\nu, N)) \end{aligned}$$

□

Şimdi $H \in \varphi[V]$ alalım. Bu durumda $(\nu, N) \in V$ için $H = \varphi(\nu, N)$ olur böylece Yardımcı Teorem 5.7'den $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle^{-1}[H] = \varphi(f^{-1}(\nu, N))$ eşitliğini elde edilir. Eğer $f, T \rightarrow V$ sürekli ise, $f^{-1}(\nu, N) \in T$ dir. Böylece istenilen $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle^{-1}[H] \in \varphi[T]$ elde edilmiş olur. $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ ko-sürekli oluşu benzer biçimde ifade edilebilir. Gördük ki, $\mathfrak{E}_f$ 'yi **SF** – **Top**'dan **cfPDitop** 'a bir fonktor olarak düşünebiliriz. $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ formundaki tümleyenli ditopolojik dokulara kısıtlama yaptığımızda $\mathfrak{E}_f$ 'i **SF** – **Top**'tan **cfPDitop_{SF}** alt kategorisine bir fonktor olarak düşünebiliriz. $\mathfrak{E}_f$ 'in izomorfizma olması için **cfPDitop_{SF}** 'deki morfizmaları $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ biçimine kısıtlanması gerekir. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

5.1.8. Tanım: Nesneleri $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X, \tau, \kappa)$, $X \in \text{Ob Set}$, formundaki tümleyenli di-topolojik doku uzaylar ve morfizmaları $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$, $f \in \text{Set}(X, Y)$, olan kategori **SF-Ditop** ile göstereceğiz.

Açıktır ki, **SF-Ditop**, **cfPDitop_{SF}** kategorisinin dolu olmayan alt kategorisidir ve $\mathfrak{E}_f : \text{SF-Top} \rightarrow \text{SF-Ditop}$ bir izomorfizmadır.

Bu izomorfizmayı di-topolojik doku uzaylarındaki kavramları ve sonuçları X üzerindeki SF -topolojilerine aktarmak için kullanabiliriz. Gerçekten sonraki bölümde

ayırma aksiyomları ve tıközlık ile ilgili kavramlar tanıtılırken bu izomorfizmanın nasıl kullanıldığı gösterilecektir.

$(\varphi[T], \varphi[T'])$, çarpım dokusu üzerinde bir di-topoloji olduğundan bu di-topoloji $(X, \mathcal{P}(X))$ üzerindeki di-topoloji ile $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ üzerindeki di-topolojinin çarpımı olarak yazılabilir mi? Şeklinde doğal bir soru sorulabilir. $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ üzerinde (τ, κ) di-topolojisi verilsin.

$$\tau^1 = \{G \in \mathcal{P}(X) \mid G \times \mathbb{I} \in \tau\} \text{ ve } \kappa^1 = \{K \in \mathcal{P}(X) \mid K \times \mathbb{I} \in \kappa\}.$$

Açıktır ki, (τ^1, κ^1) , $(X, \mathcal{P}(X))$ üzerinde di-topolojidir. Bunu kolayca aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$X \times \mathbb{I} \in \tau$ ve $\emptyset \times \mathbb{I} = \emptyset \in \tau$, olduğundan $X, \emptyset \in \tau^1$ olur. Şimdi $G_1, G_2 \in \tau^1$ ise $G_1 \times \mathbb{I}, G_2 \times \mathbb{I} \in \tau$ olur. Buradan $(G_1 \cap G_2) \times \mathbb{I} = (G_1 \times \mathbb{I}) \cap (G_2 \times \mathbb{I}) \in \tau$ olup $G_1 \cap G_2 \in \tau^1$ bulunur. Diğer yandan $\{G_j\}_{j \in J} \subseteq \tau^1$ ise, her $j \in J$ için $G_j \times \mathbb{I} \in \tau$ olur. Böylece $\bigvee_{j \in J} G_j \in \mathcal{P}(X)$ ve $(\bigvee_{j \in J} G_j) \times \mathbb{I} = \bigvee_{j \in J} (G_j \times \mathbb{I}) \in \tau$ olup $\bigvee_{j \in J} G_j \in \tau^1$ elde edilir. Aynı düşünceyle, κ^1 ailesinin de bir ko-topoloji olduğu görülebilir.

Benzer biçimde,

$$\tau^2 = \{G \in \mathcal{J} \mid X \times G \in \tau\} \text{ ve } \kappa^2 = \{K \in \mathcal{J} \mid X \times K \in \kappa\}$$

biçiminde tanımlı (τ^2, κ^2) 'da $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ üzerinde bir di-topolojidir. $X \times \mathbb{I} \in \tau$ ve $X \times \emptyset = \emptyset \in \tau$, olduğundan $X, \emptyset \in \tau^2$ olur. Şimdi $G_1, G_2 \in \tau^2$ ise, $X \times G_1, X \times G_2 \in \tau$ olur. Buradan $(X \times G_1) \cap (X \times G_2) = X \times (G_1 \cap G_2) \in \tau$ olup $G_1 \cap G_2 \in \tau^2$ bulunur. Diğer yandan $\{G_j\}_{j \in J} \subseteq \tau^2$ ise, her $j \in J$ için $X \times G_j \in \tau$ olur. Böylece $\bigvee_{j \in J} (X \times G_j) = X \times (\bigvee_{j \in J} G_j) \in \tau$ olup $\bigvee_{j \in J} G_j \in \tau^2$ elde edilir. Benzer şekilde, κ^2 ailesinin de bir ko-topoloji olduğu görülebilir.

Bu durumda (τ^1, κ^1) ve (τ^2, κ^2) ditopolojilerinin çarpımı da $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ üzerinde bir di-topolojidir. Açıktır ki, bu di-topoloji (τ, κ) topolojisinden daha kabadır [19]. Aşağıdaki sonuçlar bu iki topolojinin çakışması için gerekli ve yeterli koşulları vermektedir.

5.1.9. Yardımcı Teorem : *Aşağıdakiler denktir.*

1. (τ^1, κ^1) ve (τ^2, κ^2) ditopolojilerinin çarpımı ile (τ, κ) çakışır.
2. Aşağıdaki koşullar sağlanır:

(a) $P_{(x,r)} \subseteq G$ kapsamasını sağlayan $G \in \tau$, $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ için, $\overline{P}_{(x,r)} \subseteq (G_1 \times \mathbb{I}) \cap (X \times G_2) \subseteq G$ sağlayan bir $G_1 \in \tau^1$, $G_2 \in \tau^2$ vardır.

(b) $K \subseteq Q_{(x,r)}$ kapsamasını sağlayan $K \in \kappa$ ve $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ için, $K \subseteq (K_1 \times \mathbb{I}) \cup (X \times K_2) \subseteq Q_{(x,r)}$ sağlayan bir $K_1 \in \kappa^1$, $K_2 \in \kappa^2$ vardır.

Kanıt. Çarpım ditopolojisi tanımı ve $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ dokusunun sade olmasından kolayca elde edilebilir. $\square$

Eğer, (τ, κ) di-topolojisi tümleyenli ise (τ^1, κ^1) , (τ^2, κ^2) di-topolojileri de tümleyenlidir. Özel olarak, τ^1 , X üzerinde klasik anlamda bir topolojidir. κ^1 ise kapalı kümelerin kümesidir. Şimdi $\mathfrak{G}(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X, \tau, \kappa) = (X, \tau^1)$ ve $\mathfrak{G}(\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle) = f$ biçiminde $\mathfrak{G} : \mathbf{SF-Ditop} \rightarrow \mathbf{Top}$ fonktörünü tanımlayalım, bu durumda $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle \in \text{Mor } \mathbf{SF-Ditop}$ ise $f \in \text{Mor } \mathbf{Set}$ olduğunu kontrol etmeliyiz. $f : X \rightarrow Y$ için sırasıyla (τ_X, κ_X) ve (τ_Y, κ_Y) ditopolojiler olsun. Bu durumda, $G \in \tau_Y^1$ için $G \times \mathbb{I} \in \tau_Y$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ bi-sürekli ise $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle^{-1}[G \times \mathbb{I}] \in \tau_X$ dir. Bununla birlikte $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle^{-1}[G \times \mathbb{I}] = f^{-1}[G] \times \mathbb{I}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece $f, \tau_X^1 - \tau_Y^1$ süreklidir.

$\mathfrak{G}$ 'nin sağlaması gereken diğer koşullar kolayca gösterilebilir. Böylelikle $\mathfrak{G} : \mathbf{SF-Ditop} \rightarrow \mathbf{Top}$ bir fonktordur.

Zıt yönde daha önce $\mathfrak{F} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{cfPTex}_{\mathbf{SF}}$ fonktörü tanımlanmıştı. Şimdi $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF-Ditop}$ fonktörler ailesini üretmeye çalışalım, (τ_0, κ_0) , $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \iota)$ üzerinde tanımlı sabit bir di-topoloji olsun. $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji ve $\mathcal{T}^c = \{X \setminus G \mid G \in \mathcal{T}\}$ ise $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$, $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ üzerinde tümleyenli di-topolojidir. Bu durumda $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ ve (τ_0, κ_0) di-topolojilerinin çarpımlarını alarak $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X)$ üzerinde tümleyenli di-topoloji tanımlayabiliriz. Şimdi $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ topolojik uzaylar ve $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ sürekli olsun. $\mathcal{V} \otimes \tau_0$ çarpım topolojisinin taban elemanları $G \in \mathcal{V}$, $H \in \tau_0$ olmak üzere $G \times H$, şeklindedir ve $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle^{-1}[G \times H] = f^{-1}[G] \times H \in \mathcal{T} \otimes \tau_0$ olur. Böylece $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ süreklidir. Di-topolojilerimiz tümleyenli olduğundan aynı zamanda bi-süreklidir.

Böylece, $\mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}(X, \mathcal{T}) = (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X, \mathcal{T} \otimes \tau_0, \mathcal{T}^c \otimes \kappa_0)$ ve $\mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}(f) = \langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ biçiminde tanımlı $\mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF-Ditop}$ bir fonktordur.

Klasik durumda olduğu gibi [9, Theorem 5.12] aşağıdaki teoremi verebiliriz:

5.1.10. Teorem : $\tau_0 = \kappa_0 = \{\mathbb{I}, \emptyset\}$ seçersek, $\mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}$, $\mathfrak{G}$ 'nin bir eşleniğidir.

Kanıt. $B = (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X, \tau, \kappa) \in \text{Ob } \mathbf{SF}\text{-Ditop}$ alalım. $\mathfrak{G}(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X, \tau, \kappa) = (X, \tau^1)$ olduğunu hatırlayalım, bu durumda $(\langle \iota_X, \iota_{\mathbb{I}} \rangle, (X, \tau^1))$, B kaynağına sahip $\mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}$ evrensel ok olduğunu gösterebilirsek işimiz biter.

$\langle \iota_X, \iota_{\mathbb{I}} \rangle : X \times \mathbb{I} \rightarrow X \times \mathbb{I}$, $\tau - \tau^1 \times \{\mathbb{I}, \emptyset\}$ süreklidir, di-topolojilerimiz tümleyenli olduğundan bi-süreklidir. Bu durumda $(\langle \iota_X, \iota_{\mathbb{I}} \rangle, (X, \tau^1))$, B kaynağına sahip $\mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}$ yapısal oktur. Eğer $(\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle, (Y, \mathcal{V}))$, kaynağı B olan $\mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}$ yapısal oksa, biz aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde tek bir $\bar{f} : (X, \tau^1) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ sürekli fonksiyonun varlığını göstermeliyiz.

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\langle \iota_X, \iota_{\mathbb{I}} \rangle} & \mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}(X, \tau^1) \\
 & \searrow \langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle & \downarrow \mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}(\bar{f}) \\
 & & \mathfrak{F}_{(\tau_0, \kappa_0)}(Y, \mathcal{V})
 \end{array}$$

Açıktır ki, tek mümkün seçim $\bar{f} = f$ dir. Bu nedenle $f : X \rightarrow Y$ 'nin $\tau^1 - \mathcal{V}$ sürekli olduğunu kanıtlamalıyız. $V \in \mathcal{V} \implies V \times \mathbb{I} \in \mathcal{V} \otimes \tau_0 \implies f^{-1}[V] \times \mathbb{I} = \langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle^{-1}[V \times \mathbb{I}] \in \tau$, $\langle f, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$, $\mathbf{SF}\text{-Ditop}$ morfizma olduğundan istenilen $f^{-1}[V] \in \tau^1$ elde edilir. $\square$

Aşağıdaki sonuçlar $\mathbf{SF}\text{-Top}$ 'da çalışırken oldukça yararlı olacaktır.

5.1.11. Yardımcı Teorem: (X, T) SF -topoloji ve (τ_T, κ_T) ise, T 'ye karşılık gelen $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ dokusu üzerindeki di-topoloji olsun. Bu durumda,

1. $\tau_T^1 = \{G \subseteq X \mid (\chi_G, G) \in T\}$ ve
 $\tau_T^2 = \{[0, r) \mid (r, \emptyset) \in T\} \cup \{[0, s] \mid (s, X) \in T\},$

2. Aşağıdakiler denktir:

(i) $\tau_T = \tau_T^1 \otimes \tau_T^2.$

(ii) $(h, H) \in T$ ve $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_r, \{x\}) \in (h, H)$ sağlansın. Bu durumda

$$(x_r, \{x\}) \in (\chi_Y \wedge s, \emptyset) \sqsubseteq (h, H), \quad (s, \emptyset) \in T, \quad \text{yada}$$

$$(x_r, \{x\}) \in (\chi_Y \wedge s, Y) \sqsubseteq (h, H), \quad (s, X) \in T.$$

$(\chi_Y, Y) \in T$ 'yi sağlayan $Y \subseteq X$ ve $s \in \mathbb{I}$ vardır.

- (iii) B , T 'nin bir alttabanı olsun; $(h, H) \in B$ ve $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_r, \{x\}) \in (h, H)$ sağlansın bu durumda, (ii)'de olduğu gibi $Y \subseteq X$ ve $s \in \mathbb{I}$ vardır.

$$(iv) (X, T) = \mathfrak{F}_{(\tau_T^2, \kappa_T^2)}(\mathfrak{G}(X, T)).$$

Kanıt. (1) $\varphi((\chi_G, G)) = G \times \mathbb{I}$, $\varphi(\mathbf{r}, \emptyset) = X \times [0, r]$ ve $\varphi(\mathbf{r}, X) = X \times [0, r]$ olduğundan açıktır.

(2) (i) $\implies$ (ii). $(x_r, \{x\}) \in (h, H)$ ise, $P_{(x,r)} \subseteq \varphi(h, H)$ olur. Üstelik $\varphi(h, H) \in \tau_T$ dir. Bu durumda Yardımcı Teorem 5.1.9'den $P_{(x,r)} \subseteq (G_1 \times \mathbb{I}) \cap (X \times G_2) \subseteq \varphi(h, H)$ olacak şekilde $G_1 \in \tau_T^1$, $G_2 \in \tau_T^2$ 'nin varlığını biliyoruz. Bu nedenle $Y = G_1$ alabiliriz. $Y \subseteq X$ ve $(\chi_Y, Y) \in T$, $P_{(x,r)} \subseteq (Y \times \mathbb{I}) \cap (X \times G_2) \subseteq \varphi(h, H)$ olduğundan, burada iki durum söz konusudur.

Durum a. Bazı $s \in \mathbb{I}$ için $G_2 = [0, s]$ ise, (1)'den $(\mathbf{s}, \emptyset) \in T$ dir. $\varphi(\chi_Y, Y) = Y \times \mathbb{I}$ ve $\varphi(\mathbf{s}, \emptyset) = X \times [0, s]$ olduğundan $(Y \times \mathbb{I}) \cap (X \times [0, s]) = \varphi((\chi_Y, Y) \sqcap (\mathbf{s}, \emptyset)) = \varphi(\chi_Y \wedge \mathbf{s}, \emptyset)$ eşitliği sağlanır, böylece istenilen $(x_r, \{x\}) \sqsubseteq (\chi_Y \wedge \mathbf{s}, \emptyset) \sqsubseteq (h, H)$ elde edilmiş olur.

Durum b. Bazı $s \in \mathbb{I}$ için $G_2 = [0, s]$ ise, $(\mathbf{s}, X) \in T$ dir. $P_{(x,r)} \subseteq (Y \times \mathbb{I}) \cap (X \times [0, s]) \subseteq \varphi(h, H)$, $\varphi(\chi_Y, Y) = Y \times \mathbb{I}$ ve $\varphi(\mathbf{s}, X) = X \times [0, s]$ olduğundan $(Y \times \mathbb{I}) \cap (X \times [0, s]) = \varphi((\chi_Y, Y) \sqcap (\mathbf{s}, X)) = \varphi(\chi_Y \wedge \mathbf{s}, Y)$ eşitliği sağlanır, böylece istenilen $(x_r, \{x\}) \sqsubseteq (\chi_Y \wedge \mathbf{s}, Y) \sqsubseteq (h, H)$ elde edilmiş olur.

(ii) $\implies$ (iii). Açıktır.

(iii) $\implies$ (i). $(h, H) \in T$ alalım ve $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ için $P_{(x,r)} \subseteq \varphi(h, H)$ olsun. B (iii)'yi sağlayan T 'nin bir alttabanı olsun. Bu durumda

$$(h, H) = \bigsqcup_{j \in J} \left(\prod_{i \in I_j} (h_i^j, H_i^j) \right).$$

eşitliği sağlanacak şekilde $(h_i^j, H_i^j) \in B$, $j \in J$ ve I_j sonlu olmak üzere $i \in I_j$ vardır. Böylece $\varphi(h, H) = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I_j} \varphi(h_i^j, H_i^j) \right)$ olur ve $P_{(x,r)} \subseteq \varphi(h, H)$ olduğundan $P_{(x,r)} \subseteq \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I_j} \varphi(h_i^j, H_i^j) \right)$ elde edilir. Bu durumda $P_{(x,r)} \subseteq \bigcap_{i \in I_j} \varphi(h_i^j, H_i^j)$ olacak şekilde bir $j \in J$ vardır. Bu j ve her $i \in I_j$ için $P_{(x,r)} \subseteq \varphi(h_i^j, H_i^j)$ olur. (iii)'den $(\chi_{Y_i}, Y_i) \in T$ olacak şekilde $Y_i \subseteq X$ ve $s_j \in \mathbb{I}$ varlığını biliyoruz. $Y = \bigcap_{i \in I_j} Y_i$ seçersek,

$$\varphi(\chi_Y, Y) = Y \times \mathbb{I} = \bigcap_{i \in I_j} (Y_i \times \mathbb{I}) = \varphi \left(\prod_{i \in I_j} (\chi_{Y_i}, Y_i) \right),$$

elde ederiz. Böylece $(\chi_Y, Y) = \prod_{i \in I_j} (\chi_{Y_i}, Y_i) \in T$, I_j sonlu olduğundan, $Y \in \tau_T^1$ ve açıktır ki, $x \in Y$ dir. $s = \min\{s_i \mid i \in I_j\}$ alalım burada iki durum söz konusudur.

Durum 1. $s = s_k$ olacak şekilde $k \in I_j$ vardır ki, $(\mathbf{s}_k, \emptyset) \in T$ ve $(x_r, \{x\}) \sqsubseteq (\chi_{Y_k} \wedge \mathbf{s}, \emptyset)$ olur ve $r < s$ dir. $x \in Y$ olduğundan $(x_r, \{x\}) \sqsubseteq (\chi_Y \wedge \mathbf{s}, \emptyset)$ elde ederiz. Diğer yandan

$i \in I_j$ için $Y \subseteq Y_i$, $s \leq s_i$ vardır. Bu nedenle $(\chi_Y \wedge s, \emptyset) \sqsubseteq (\chi_{Y_i} \wedge s_i, \emptyset) \sqsubseteq (h_i^j, H_i^j)$ yada $(\chi_Y \wedge s, \emptyset) \sqsubseteq (\chi_{Y_i} \wedge s_i, Y_i) \sqsubseteq (h_i^j, H_i^j)$ olur. Böylece $(\chi_Y \wedge s, \emptyset) \sqsubseteq \prod_{i \in I_j} (h_i^j, H_i^j) \sqsubseteq (h, H)$ olur ve buradan $Y \in \tau_T^1$, $[0, s] \in \tau_T^2$ olmak üzere $P_{(x,r)} \subseteq (Y \times \mathbb{I}) \cap (X \times [0, s]) \subseteq \varphi(h, H)$ elde edilir.

Durum 2. $s = s_i$ olacak şekilde $i \in I_j$ vardır ki, $(s_i, X) \in T$ ve $(x_r, \{x\}) \in (\chi_{Y_i} \wedge s_i, Y_i)$ olur. Buradan $(x_r, \{x\}) \in (\chi_Y \wedge s, Y)$ yazılabilir. $(s_i, \emptyset) \in T$ ise, hipotezden $s < s_i$ olur. Böylece her için $(\chi_Y \wedge s, Y) \sqsubseteq (\chi_{Y_i} \wedge s_i, \emptyset) \sqsubseteq (h_i^j, H_i^j)$ yada $(\chi_Y \wedge s, Y) \sqsubseteq (\chi_{Y_i} \wedge s_i, Y_i) \sqsubseteq (h_i^j, H_i^j)$ elde edilir. Durum 1'de olduğu gibi $Y \in \tau_T^1$, $[0, s] \in \tau_T^2$ olmak üzere $(x_r, \{x\}) \in (\chi_Y \wedge s, Y) \sqsubseteq (h, H)$, ve böylece $P_{(x,r)} \subseteq (Y \times \mathbb{I}) \cap (X \times [0, s]) \subseteq \varphi(h, H)$ olur. Bu da $\tau_T = \tau_T^1 \otimes \tau_T^2$ kanıtını tamamlamış olur.

(i) $\iff$ (iv). Tanımlardan kolayca elde edilebilir. $\square$

5.1.12. Tanım : Yardımcı Teorem 5.1.11 (2)'nin koşullarından birini sağlayan T , SF -topolojisine *çarpımsaldır* denir.

5.2. SF -Topolojik uzaylarında Ayırma Aksiyomları

5.2.1. Tanım : T , X üzerinde bir SF -topolojisi olmak üzere;

- (a) $(g, G) \in T$, $(x_s, \{x\}) \in (g, G) \implies \overline{(x_s, \{x\})} \sqsubseteq (g, G)$ ise, T 'ye R_0 dır,
- (b) $(k, K) \in T'$, $(x_s, \{x\}) \notin (k, K) \implies (k, K) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})^\circ$ ise, T 'ye $ko\text{-}R_0$ dır.

denir.

Aşağıda oldukça kullanışlı denklikler vereceğiz.

5.2.2. Yardımcı Teorem : T , X üzerinde SF -topoloji olsun.

1. Aşağıdakiler denktir:

- (a) $T \text{ } R_0 \text{ dır.}$
- (b) $(g, G) \in T$ için $(g, G) = \bigsqcup_{i \in I} (k_i, K_i)$ eşitliğini sağlayan $(k_i, K_i) \in T'$, $i \in I$ kümeleri vardır.
- (c) $(g, G) \in T$ için, $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$, $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ olsun bu durumda $(k, K) \sqsubseteq (g, G)$ ve $(x_s, \{x\}) \in (k, K)$ kapsamalarını sağlayan $(k, K) \in T'$ vardır.

2. Aşağıdakiler denktir:

(a) T ko- R_0 dir.

(b) $(k, K) \in T'$ için $(k, K) = \prod_{i \in I} (g_i, G_i)$ eşitliğini sağlayan $(g_i, G_i) \in T$, $i \in I$ kümeleri vardır.

(c) $(k, K) \in T'$ için $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \notin (k, K)$ olsun. $(k, K) \sqsubseteq (g, G)$ ve $(x_s, \{x\}) \notin (g, G)$ kapsamalarını sağlayan $(g, G) \in T$ vardır.

Kanıt. (1)

(a) $\implies$ (b) $(g, G) \in T$ olsun (a) dan $(g, G) = \bigsqcup \{(x_s, \{x\}) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\} \sqsubseteq \bigsqcup \{\overline{(x_s, \{x\})} \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\} \sqsubseteq (g, G)$ böylece

$$(g, G) = \bigsqcup \{\overline{(x_s, \{x\})} \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\}$$

$\overline{(x_s, \{x\})} \in T'$ olduğundan (b) ispatlanmış olur.

(b) $\implies$ (c) $(g, G) \in T$ $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ olsun. (b)'den $\exists i \in \mathbb{I}$ ve (k_i, K_i) için $(k_i, K_i) \sqsubseteq (g, G)$ olur, $(g, G) = \bigsqcup \{(x_s, \{x\}) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\}$ olduğundan ve (b)'den $(x_s, \{x\}) \in (k_i, K_i)$ elde edilir.

(c) $\implies$ (a) $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ olsun (c)'den $(x_s, \{x\}) \in (k, K) \sqsubseteq (g, G)$ böylece $\overline{(x_s, \{x\})} \sqsubseteq (g, G)$ olur, bu ise kanıtı tamamlar.

(2) Benzer biçimde yapılabilir. □

5.2.3. Sonuç : T , X üzerinde SF -topoloji olsun. Bu durumda T , R_0 dır ancak ve ancak T , ko- R_0 dır.

Kanıt. T , R_0 olsun ve $(k, K) \in T'$ alalım. $(k, K)' \in T$ ve Yardımcı Teorem 5.2.2(1)(b)'den $(k, K)' = \bigsqcup_{i \in I} (k_i, K_i)$ biçiminde yazabiliriz. Burada $(k_i, K_i) \in T'$ dir.

$$(k, K) = ((k, K)')' = \left(\bigsqcup_{i \in I} (k_i, K_i) \right)' = \prod_{i \in I} (k_i, K_i)' = \prod_{i \in I} (g_i, G_i)$$

burada $(g_i, G_i) = (k_i, K_i)'$ dir. Böylece T 'nin ko- R_0 olduğu Yardımcı Teorem 5.2.2(2)(b)'den elde edilir. □

5.2.4. Tanım : T , X üzerinde SF -topolojisi olmak üzere;

(a) $(g, G) \in T$, $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$, $(x_t, \{x\}) \notin (g, G) \implies \exists (h, H) \in T$ için $(x_s, \{x\}) \in (h, H)$, $(x_t, \{x\}) \notin \overline{(h, H)}$ ise, T 'ye R_1 dir.

- (b) $(k, K) \in T', (x_s, \{x\}) \notin (k, K), (x_t, \{x\}) \in (k, K) \implies \exists (f, F) \in T'$ için $(x_s, \{x\}) \notin (f, F), (x_t, \{x\}) \in (f, F)^\circ$ ise, T' 'ye ko- R_1 dir.

denir.

5.2.5. Yardımcı Teorem : T X üzerinde bir SF -topoloji olsun.

1. Aşağıdakiler denktir:

(a) T R_1 dir.

(b) $(g, G) \in T$ ise, $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ ve $(x_t, \{x\}) \notin (g, G)$ olsun. Bu durumda $(x_s, \{x\}) \in (h, H)$ ve $(x_t, \{x\}) \notin \overline{(h, H)}$ 'yi sağlayan bir $(h, H) \in T$ vardır.

(c) $(g, G) \in T$ için

$$(g, G) = \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in J_i} (h_j^i, H_j^i) = \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in J_i} \overline{(h_j^i, H_j^i)}.$$

eşitliğini sağlayan $(h_j^i, H_j^i) \in T, j \in J_i, i \in I$ vardır.

2. Aşağıdakiler denktir:

(a) T ko- R_1 dir.

(b) $(k, K) \in T'$ ise, $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \notin (k, K)$ ve $(x_t, \{x\}) \in (k, K)$ olsun. Bu durumda $(x_s, \{x\}) \notin (f, F)$ ve $(x_t, \{x\}) \in (f, F)^\circ$ sağlayan bir $(f, F) \in T'$ vardır.

(c) $(k, K) \in T'$ için,

$$(k, K) = \prod_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J_i} (f_j^i, F_j^i) = \prod_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J_i} (f_j^i, F_j^i)^\circ.$$

eşitliğini sağlayan $(f_j^i, F_j^i) \in T', j \in J_i, i \in I$ vardır.

Kanıt. (a) $\implies$ (b) açıktır.

(b) $\implies$ (c) $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ ve $(x_t, \{x\}) \notin (g, G)$ 'yi sağlayan $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için, $(x_s, \{x\}) \in (h_t^s, H_t^s)$ ve $(x_t, \{x\}) \notin \overline{(h_t^s, H_t^s)}$ olacak şekilde $(h_t^s, H_t^s) \in T$ seçebiliriz.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} (x_s, \{x\}) \in \prod \{ (h_t^s, H_t^s) \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G) \} &\subseteq \prod \{ \overline{(h_t^s, H_t^s)} \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G) \} \\ &\subseteq (g, G) \end{aligned}$$

olur, böylece

$$\begin{aligned}
(g, G) &= \bigsqcup \{(x_s, \{x\}) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\} \\
&\sqsubseteq \bigsqcup \{\bigsqcap \{(h_t^s, H_t^s) \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G)\} \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\} \\
&\sqsubseteq \bigsqcup \{\bigsqcap \{\overline{(h_t^s, H_t^s)} \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G)\} \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\} \\
&\sqsubseteq (g, G) \\
(g, G) &= \bigsqcup \{\bigsqcap \{(h_t^s, H_t^s) \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G)\} \mid (x_s, \{x\})\} \\
&= \bigsqcup \{\bigsqcap \{\overline{(h_t^s, H_t^s)} \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G)\} \mid (x_s, \{x\})\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(c) $\implies$ (a) (c)'den $\exists i \in \mathbb{I} (g, G) \sqsubseteq \prod_{j \in J_i} (h_{j_i}^i, H_{j_i}^i)$ ve böylece $\forall j \in J_i (g, G) \sqsubseteq (h_{j_i}^i, H_{j_i}^i)$ olur. Bu nedenle, $(x_s, \{x\}) \in (h_{j_i}^i, H_{j_i}^i)$ olur ve benzer biçimde $(x_t, \{x\}) \notin (h_{j_i}^i, H_{j_i}^i)$ elde edilir böylece (a) kanıtlanmış olur.

(2) Benzer şekilde yapılabilir. $\square$

5.2.6. Sonuç : T, X üzerinde bir SF -topoloji olsun. Bu durumda, T R_1 dir ancak ve ancak $ko-R_1$ dir.

Kanıt. T R_1 olsun ve $(k, K) \in T'$ alalım. Bu durumda $(k, K)' \in T$ için Yardımcı Teorem 5.2.5 (1)(c)'den, $(k, K)' = \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in j_i} (h_i^j, H_i^j)$ şeklinde yazabiliriz. Burada $(h_i^j, H_i^j) \in T$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
(k, K) &= ((k, K)')' = \left(\bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in j_i} (h_i^j, H_i^j) \right)' = \left(\bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in j_i} \overline{(h_i^j, H_i^j)} \right)' \\
&= \prod_{i \in I} \prod_{j \in j_i} (h_i^j, H_i^j)' = \prod_{i \in I} \prod_{j \in j_i} ((h_i^j, H_i^j)')^\circ \\
&= \prod_{i \in I} \prod_{j \in j_i} (f_i^j, F_i^j) = \prod_{i \in I} \prod_{j \in j_i} (f_i^j, F_i^j)^\circ
\end{aligned}$$

olur. Burada $(f_i^j, F_i^j) = (h_i^j, H_i^j)'$ ve $\overline{((h_i^j, H_i^j))}' = ((h_i^j, H_i^j)')^\circ$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 5.2.5(2)(c)'den T 'nin $ko-R_1$ olduğu gösterilmiş olur. $\square$

5.2.7. Tanım : T, X üzerinde bir SF -topoloji olmak üzere;

(a) $(g, G) \in T, (x_s, \{x\}) \in (g, G) \implies \exists (h, H) \in T$ için $(x_s, \{x\}) \in (h, H), \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$ ise T 'ye *düzenlidir(regular)*,

(b) $(k, K) \in T', (x_s, \{x\}) \notin (k, K) \implies \exists (f, F) \in T'$ için $(x_s, \{x\}) \notin (f, F), (k, K) \sqsubseteq (f, F)^\circ$ ise T *ko-düzenlidir*,

denir.

5.2.8. Yardımcı Teorem : T X üzerinde bir SF -topoloji olsun.

1. Aşağıdakiler denktir:

(a) T düzenlidir.

(b) $(g, G) \in T$ ise , $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ olsun. Bu durumda $(x_s, \{x\}) \in (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$ olacak şekilde bir $(h, H) \in T$ vardır.

(c) $(g, G) \in T$ için,

$$(g, G) = \bigsqcup_{i \in I} (h_i, H_i) = \bigsqcup_{i \in I} \overline{(h_i, H_i)}.$$

eşitliğini sağlayan $(h_i, H_i) \in T$, $i \in I$ vardır.

2. Aşağıdakiler denktir:

(a) T ko-düzenlidir.

(b) $(k, K) \in T'$ ise , $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \notin (k, K)$ olsun. Bu durumda $(k, K) \sqsubseteq (f, F)^\circ \sqsubseteq (f, F) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ olacak şekilde bir $(f, F) \in T'$ vardır

(c) $(k, K) \in T'$ için,

$$(k, K) = \prod_{i \in I} (f_i, F_i) = \prod_{i \in I} (f_i, F_i)^\circ.$$

eşitliğini sağlayan $i \in I$, $(f_i, F_i) \in T'$ vardır.

Kanıt. (1) (a) $\implies$ (b) açıktır.

(b) $\implies$ (c) Her $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ olsun, burada $(g, G) \in T$ dir.

(b)'den $(x_s, \{x\}) \in (h_s^t, H_s^t) \sqsubseteq \overline{(h_s^t, H_s^t)} \sqsubseteq (g, G)$ olacak şekilde $(h_s^t, H_s^t) \in T$ varlığını biliyoruz. Böylece,

$$\begin{aligned} (g, G) &= \bigsqcup \{(x_s, \{x\}) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\} \sqsubseteq \bigsqcup \{(h_s^t, H_s^t)\} \sqsubseteq \bigsqcup \{\overline{(h_s^t, H_s^t)}\} \sqsubseteq (g, G) \\ (g, G) &= \bigsqcup \{(h_s^t, H_s^t)\} = \bigsqcup \{\overline{(h_s^t, H_s^t)}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $\implies$ (c) $(g, G) \in T$ için $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ olsun. $\exists i \in I$ için (c)'den $(g, G) \sqsubseteq (h_i, H_i)$ ve $(g, G) \sqsubseteq \overline{(h_i, H_i)}$ olacak şekilde bir $(h_i, H_i) \in T$ seçebiliriz, böylece (a)'nın kanıtını tamamlar.

(2) Benzer şekilde yapılabilir. □

5.2.9. Sonuç : T, X üzerinde bir SF -topoloji olsun T düzenlidir ancak ve ancak T , ko-düzenlidir.

Kanıt. T düzenli olsun ve $(k, K) \in T'$ alalım. Yardımcı Teorem 5.2.8(1)(c)'den $(k, K)' = \bigsqcup_{i \in I} (h_i, H_i) = \bigsqcup_{i \in I} \overline{(h_i, H_i)}$ biçiminde yazabiliriz. Burada $(h_i, H_i) \in T$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned} (k, K) &= ((k, K)')' = \left(\bigsqcup_{i \in I} (h_i, H_i) \right)' = \left(\bigsqcup_{i \in I} \overline{(h_i, H_i)} \right)' \\ &= \prod_{i \in I} (h_i, H_i)' = \prod_{i \in I} \overline{((h_i, H_i))}' \\ &= \prod_{i \in I} (f_i, F_i) = \prod_{i \in I} (f_i, F_i)^\circ \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(f_i, F_i) = (h_i, H_i)'$ ve $(f_i, F_i)^\circ = \overline{((h_i, H_i))}' = ((h_i, H_i))'^\circ$ dir. Buradan Yardımcı Teorem 5.2.2(2)(c) kullanılırsa T 'nin ko-düzenli olduğu gösterilmiş olur. $\square$

$SF(X)$ ile $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma)$ tümleyenli sade doku arasında bir izomorfizma olduğunu biliyoruz. O halde aşağıdaki Yardımcı Teoremi verebiliriz.

5.2.10. Yardımcı Teorem : $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma)$ tümleyenli sade doku, $Q_{(x,s)} \subseteq Q_{(x,t)} \Leftrightarrow P_{(x,s)} \subseteq P_{(x,t)}$ koşulunu sağlar.

Kanıt.

$\Leftarrow$ Herzaman sağlanır.

$\Rightarrow$ $Q_{(x,s)} \subseteq Q_{(x,t)}$ olsun. Dokumuz sade doku olduğundan $P_{(x,t)} \not\subseteq Q_{(x,t)}$ olur ve böylece $P_{(x,t)} \not\subseteq Q_{(x,s)}$ elde edilir. Buradan $P_{(x,s)} \subseteq P_{(x,t)}$ olur ve istenilen elde edilir. $\square$

5.2.11. Sonuç : $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $SF(X)$ yumuşak belirtisiz kümesi aşağıdaki özelliği sağlar:

$$(x^s, X \setminus \{x\}) \sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \Leftrightarrow (x_s, \{x\}) \sqsubseteq (y_t, \{y\})$$

5.2.12. Teorem : $(1, X)$ ve $(0, \emptyset)$ 'i içeren $\mathcal{E} \subseteq SF(X)$ alalım. Aşağıdakiler denktir.

1. $\forall (\mu, M) \in SF(X)$ için $(\mu, M) = \prod_{i \in I} (\nu_i, N_i)$ olacak şekilde $\exists (\nu_i, N_i) \in \mathcal{E}, i \in I$, vardır.

2. $(x, s), (y, t) \in X \times I$ için $(x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (y_t, \{y\}) \implies (y_t, \{y\}) \sqsubseteq (\nu, N)$ ve $(x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (\nu, N)$ olacak biçimde bir $(\nu, N) \in \mathcal{E}$ vardır.
3. $(x, s), (y, t) \in X \times I$ için $(x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (y_t, \{y\}) \implies (y_t, \{y\}) \sqsubseteq (\nu, N) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ olacak biçimde bir $(\nu, N) \in \mathcal{E}$ vardır.
4. Aşağıdakileri sağlayan $((a_i, A_i), (b_i, B_i))_{i \in I}, (a_i, A_i), (b_i, B_i) \in \mathcal{E}$ ailesi vardır.
 - (a) $(\mu, M) \in SF(X) \setminus \{(0, \emptyset)\} \implies (\mu, M) = \bigsqcup \{(a_i, A_i) \mid (\mu, M) \not\sqsubseteq (b_i, B_i)\}.$
 - (b) $(\mu, M) \in SF(X) \setminus \{(1, X)\} \implies (\mu, M) = \prod \{(b_i, B_i) \mid (a_i, A_i) \not\sqsubseteq (\mu, M)\}.$
 - (c) $(a_i, A_i) \not\sqsubseteq (a_j, A_j) \implies (a_j, A_j) \sqsubseteq (\mu, M) \sqsubseteq (b_i, B_i)$ olacak şekilde $\exists (\mu, M) \in \mathcal{E}$ vardır.
5. $\forall (\mu, M) \in \mathcal{S}$ için $(\mu, M) = \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in J_i} (m_j^i, M_j^i)$ olacak şekilde $(m_j^i, M_j^i) \in \mathcal{E}, i \in I$ vardır.
6. $(x, s), (y, t) \in X \times I$ için $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \implies (x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (\mu, M) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $(\nu, M) \in \mathcal{E}$ vardır.
7. $(x, s), (y, t) \in X \times I$ için $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \implies (y_t, \{y\}) \sqsubseteq (\mu, M) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ olacak şekilde $(\nu, M) \in \mathcal{E}$ vardır.
8. $\forall (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(y^t, X \setminus \{y\}) \in \mathcal{E}$ dir.
9. $(x, s), (y, t) \in SF(X)$ için $(x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (y_t, \{y\}) \implies (x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (\mu, M)(y_t, \{y\})$ olacak şekilde $(\nu, M) \in \mathcal{E}$ vardır.

Kanıt. ([10])'da doku uzaylarında kanıt verilmiştir. $SF(X)$ ile $(\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ izomorf olduklarından, oradaki kanıtın aynısı kullanılabilir. $\square$

5.2.13. Teorem : $(1, X)$ ve $(0, \emptyset)$ 'i içeren $\mathcal{E} \subseteq SF(X)$ alalım. Aşağıdakiler denktir.

1. $\forall (\mu, M) \in SF(X)$ için $(\mu, M) = \bigsqcup_{i \in I} (\nu_i, N_i)$ olacak şekilde $\exists (\nu_i, N_i) \in \mathcal{E}, i \in I$, vardır.
2. $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \implies (x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (\mu, M) \not\sqsubseteq (y_t, \{y\})$ olacak şekilde $(\mu, M) \in \mu$ vardır.
3. $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \implies (y_t, \{y\}) \sqsubseteq (\mu, M) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ olacak şekilde $(\mu, M) \in \mu$ vardır.

4. Aşağıdakileri sağlayan $((a_i, A_i), (b_i, B_i))_{i \in I}$, $(a_i, A_i), (b_i, B_i) \in \mathcal{E}$ ailesi vardır.

$$(a) \ (\mu, M) \in SF(X) \setminus \{(0, \emptyset)\} \implies (\mu, M) = \bigsqcup \{(a_i, A_i) \mid (\mu, M) \not\sqsubseteq (b_i, B_i)\}.$$

$$(b) \ (\mu, M) \in SF(X) \setminus \{(1, X)\} \implies (\mu, M) = \prod \{(b_i, B_i) \mid (a_i, A_i) \not\sqsubseteq (\mu, M)\}.$$

$$(c) \ (b_i, B_i) \not\sqsubseteq (b_j, B_j) \implies (a_j, A_j) \sqsubseteq (\mu, M) \sqsubseteq (b_i, B_i) \text{ olacak şekilde } \exists (\mu, M) \in \mathcal{E} \text{ vardır.}$$

5. $\forall (\mu, M) \in \mathcal{S}$ için $(\mu, M) = \prod_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J_i} (m_j^i, M_j^i)$ olacak şekilde $(m_j^i, M_j^i) \in \mathcal{E}$, $i \in I$ vardır.

6. $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (y_t, \{y\}) \implies (x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (\mu, M) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $(\mu, M) \in \mathcal{E}$ vardır.

7. $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \not\sqsubseteq (y_t, \{y\}) \implies (y_t, \{y\}) \sqsubseteq (\mu, M) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ olacak şekilde $(\mu, M) \in \mathcal{E}$ vardır.

8. $\forall (x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için, $(x_s, \{x\}) \in \mathcal{E}$ dir.

Kanıt. ([10])'da dokular için verilmiştir. □

5.2.14. Tanım : Aşağıdaki koşulu sağlayan (X, T) SF -topolojik uzayına T_0 dır denir.
 $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \implies (x_s, \{x\}) \notin (b, B) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $(b, B) \in T \cup T'$ vardır.

5.2.15. Önerme : Bir T_0 SF -topolojik uzayının karakteristik özellikleri aşağıdaki şekilde listelenmiştir.

1. $(x_s, \{x\}) \notin (x_t, \{x\}) \implies \exists (\mu_i, M_i) \in T \cup T'$ ve $i \in I$ için, $(x_t, \{x\}) \in \bigsqcup_{i \in I} (\mu_i, M_i) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ dir.

2. $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \implies \exists (\mu_i, M_i) \in T \cup T'$ ve $i \in I$ için, $(x_t, \{x\}) \in \prod_{i \in I} (\mu_i, M_i) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ dir.

3. $(\mu, M) \in SF(X)$ için $(\mu, M) = \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in J_i} (b_j^i, B_j^i)$ eşitliğini sağlayan $(b_j^i, B_j^i) \in T \cup T'$, $i \in I, j \in J_i$ vardır.

4. $\overline{(x_s, \{x\})} \sqsubseteq \overline{(x_t, \{x\})}$ ve $(x^s, X \setminus \{x\})^\circ \sqsubseteq (x_t, \{x\})^\circ \implies (x^s, X \setminus \{x\}) \sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$.

5. Her $(x, s) \in \mathbb{I}$ ve $(\mu_i, M_i) \in T \cup T'$ için $(x^s, X \setminus \{x\}) = \bigsqcup_{i \in I} (\mu_i, M_i)$ eşitliği sağlanır.

6. Her $(x, s) \in \mathbb{I}$ ve $(\mu_i, M_i) \in T \cup T'$ için $(x_s, \{x\}) = \prod_{i \in I} (\mu_i, M_i)$ eşitliği sağlanır.

Kanıt. Tanım 5.2.14'yi kullanarak (4)'ü gösterelim $(x^s, X \setminus \{x\}) = \bigsqcup \{(x_t, \{x\}) \mid (x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (x^t, X \setminus \{x\})\}$ olduğunu biliyoruz ve $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (x^t, X \setminus \{x\})$ için Tanım 5.2.14'dan $(x_s, \{x\}) \notin (b_i, B_i) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $(b_i, B_i) \in T \cup T'$ $i \in I$ seçebiliriz. $(x_s, \{x\}) \notin (b_i, B_i) \implies (b_i, B_i) \sqsubseteq (x^s, \{x\})$ ve $(b_i, B_i) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \implies (x_t, \{x\}) \in (b_i, B_i)$ olduğundan $(x_t, \{x\}) \in (b_i, B_i) \sqsubseteq (x^s, \{x\})$ elde edilir. Böylece, $(x^s, \{x\}) = \bigsqcup_{i \in I} (b_i, B_i)$ olur.

(4) $\implies$ (2) $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\}) \implies \overline{(x_s, \{x\})} \not\sqsubseteq \overline{(y_t, \{y\})}$ yada $(x^s, X \setminus \{x\})^\circ \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})^\circ$ olsun. Birinci durumda $(y_t, \{y\}) \sqsubseteq \overline{(y_t, \{y\})} \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ ve ikinci durumda $(y_t, \{y\}) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})^\circ \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})$ olacağından (2) sağlanır.

Teorem 5.2.12'de $\mathcal{E} = (T \sqcup T')^\sqcup$ yada Teorem 5.2.13'de $\mathcal{E} = (T \sqcap T')^\sqcap$ alınırsa diğer koşulların doğruluğu kolayca gösterilebilir. $\square$

5.2.16. Tanım : Bir SF -topolojik uzayı,

1. T_0 ve R_0 ise, T_1 dir,
2. T_0 ve $\text{ko-}R_0$ ise, $\text{ko-}T_1$ dir,

denir.

5.2.17. Önerme : T X üzerinde bir SF -topoloji olsun.

1. Aşağıdakiler SF -topolojik uzayının $\text{ko-}T_1$ özellikleri karakterize eder.

- (i) $(\mu, M) \in SF(X)$ için, $(\mu, M) = \prod_{i \in I} (g_i, G_i)$ olacak şekilde $i \in I$, $(g_i, G_i) \in T$ vardır.
- (ii) $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için, $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ ise, $(x_s, \{x\}) \notin (g, G) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $\exists (g, G) \in T$ vardır.
- (iii) Her $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için, $(x^s, X \setminus \{x\}) \in T$ dir.

2. Aşağıdakiler SF -topolojik uzayının T_1 özelliklerini karakterize eder.

- (i) $(\mu, M) \in SF(X)$ için $(\mu, M) = \bigsqcup_{i \in I} (f_i, F_i)$ olacak şekilde $i \in I$, $F_i \in T'$ vardır.

(ii) $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için, $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ ise $(x_s, \{x\}) \notin (f, F) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $\exists (f, F) \in T'$ vardır.

(iii) Her $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \in T'$ dir.

Kanıt. (1) T , $ko-T_1$ ise, T_0 ve $ko-R_0$ olduğundan (i),(ii) ve (iii) Yardımcı Teorem 5.2.2(2), Tanım 5.2.14 ve Önerme 5.2.15'den kolayca elde edilebilir.

(2) Benzer şekilde T , T_1 ise, T_0 ve R_0 olduğundan (i),(ii) ve (iii) Yardımcı Teorem 5.2.2(1), Tanım 5.2.14 ve Önerme 5.2.15'den kolayca elde edilebilir. $\square$

5.2.18. Sonuç : T , X üzerinde bir SF -topoloji olmak üzere; T , T_1 dir ancak ve ancak $ko-T_1$ dir.

Kanıt. $(\mu, M) \in SF(X)$ için, $(\mu, M) = \prod_{i \in I} (g_i, G_i)$ olacak şekilde $i \in I$, $(g_i, G_i) \in T'$ nin varlığını Önerme 5.2.17 (1)(i)'den biliyoruz. Böylece

$$(\mu, M)' = \left(\prod_{i \in I} (g_i, G_i) \right)' = \bigsqcup_{i \in I} (g_i, G_i)'$$

elde ederiz. Burada $(g_i, G_i)' \in T'$ dür. $\square$

Şimdi de Tanım 5.1.16'ya paralel olarak T_2 (Hausdorff) uzayın tanımını verebiliriz.

5.2.19. Tanım : (X, T) bir SF -topolojik uzayı,

1. T_0 ve R_1 ise, T_2 dir,
2. T_0 ve $ko-R_1$ ise, $ko-T_2$ dir,

denir.

Aşağıdaki gerektirmeler tanımlardan elde edilebilir:

$$\begin{aligned} T_2 &\implies T_1 \implies T_0 \\ ko-T_2 &\implies ko-T_1 \implies ko-T_0 \end{aligned}$$

5.2.20. Teorem : Aşağıdakiler (X, T) SF -topolojik uzayı için denk koşullardır.

1. T , T_2 ve $ko-T_2$ ise, $bi-T_2$ dir.
2. $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için, $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ ise $(x_s, \{x\}) \notin (k, K)$ ve $(x_t, \{x\}) \in (h, H)$ olacak şekilde $(h, H) \in T$, $(k, K) \in T'$ vardır.

3. $(\mu, M) \in SF(X)$ olsun, her i, j için $(h_j^i, H_j^i) \sqsubseteq (k_j^i, K_j^i)$ ve $(\mu, M) = \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in J_i} (h_j^i, H_j^i)$
 $= \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in J_i} (k_j^i, K_j^i)$ eşitliği sağlanacak şekilde $i \in I, j \in J_i, (h_j^i, H_j^i) \in T, (k_j^i, K_j^i) \in T'$ vardır.

Kanıt. (1) $\implies$ (2) $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olsun. T, T_0 olduğundan Tanım 5.2.14'dan $(x_s, \{x\}) \notin (b, B) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $(b, B) \in T \cup T'$ vardır. Eğer $(b, B) \in T$ ise, R_1 aksiyomundan $(x_s, \{x\}) \notin (h, H), (x_t, \{x\}) \in (h, H)$ olacak şekilde $(h, H) \in T'$ in varlığını biliyoruz. Böylece $(k, K) = \overline{(h, H)}$ biçiminde seçersek (2) sağlanır. Diğer yandan eğer $(b, B) \in T'$ ise, ko- R_1 aksiyomundan $(x_s, \{x\}) \in T', (x_t, \{x\}) \in (k, K)^\circ$ olacak biçimde $(k, K) \in T'$ vardır. Böylece $(h, H) = (k, K)^\circ$ seçersek (2) sağlanır.

(2) $\implies$ (3) $(\mu, M) \in SF(X)$ için $(\mu, M) = \bigsqcup \{(x_t, \{x\}) \mid (x_t, \{x\}) \in (\mu, M)\} = \prod \{(x^s, X \setminus \{x\}) \mid (\mu, M) \sqsubseteq (x^s, X \setminus \{x\})\}$ biçiminde yazabiliriz. $(x_t, \{x\}) \in (\mu, M)$ ve $(x_s, \{x\}) \notin (\mu, M)$ 'yi sağlayan $(x, s), (y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\sqsubseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ elde ederiz. Böylece, $(h_s^t, H_s^t) \sqsubseteq (k_s^t, K_s^t), (x_s, \{x\}) \notin (k_s^t, K_s^t)$ ve $(x_t, \{x\}) \in (h_s^t, H_s^t)$ olacak biçimde $(h_s^t, H_s^t) \in T, (k_s^t, K_s^t) \in T'$ vardır. Bu durumda,

$$(\mu, M) = \bigsqcup_{(x_t, \{x\}) \in (\mu, M)} \prod_{(x_s, \{x\}) \notin (\mu, M)} (h_s^t, H_s^t) = \bigsqcup_{(x_t, \{x\}) \in (\mu, M)} \prod_{(x_s, \{x\}) \notin (\mu, M)} (k_s^t, K_s^t)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

(3) $\implies$ (1) (3)'den

$$(\mu, M) = \bigsqcup_{(x_t, \{x\}) \in (\mu, M)} \prod_{(x_s, \{x\}) \notin (\mu, M)} (h_s^t, H_s^t)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece Önerme 5.2.15 den T, T_0 dir. Özel olarak $(k_s^t, K_s^t) = \overline{(h_s^t, H_s^t)}$ seçilirse, (3) den

$$(\mu, M) = \bigsqcup_{(x_t, \{x\}) \in (\mu, M)} \prod_{(x_s, \{x\}) \notin (\mu, M)} (h_s^t, H_s^t) = \bigsqcup_{(x_t, \{x\}) \in (\mu, M)} \prod_{(x_s, \{x\}) \notin (\mu, M)} \overline{(h_s^t, H_s^t)}$$

elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 5.2.5'ten T, R_1 olur, bu ise T' nin T_2 olduğunu verir. Benzer şekilde T' nin ko- T_2 olması kolayca gösterilebilir. Bu nedenle, T bi- T_2 dir. $\square$

R_1 ve ko- R_1 SF -topolojik uzayda birbirlerine denk olduğundan T_2 ve ko- T_2 'de denktir. Bu durumda aşağıdaki sonucu verebiliriz.

5.2.21. Sonuç : T, X üzerinde bir SF -topoloji olsun. Bu durumda Teorem 5.2.20'nin (2). ve (3). özellikleri T_2 özelliğini karakterize etmektedir.

5.2.22. Tanım : (X, T) bir SF -topolojik uzayı,

1. T_0 ve düzenli ise, T_3 tür,
2. T_0 ve ko-düzenli ise, ko- T_3 tür,

denir.

5.2.23. Teorem : Aşağıdakiler (X, T) SF -topolojik uzayı için denk koşullardır.

1. T, T_3 ve ko- T_3 ise, bi- T_3 tür.
2. Her $(x, s)(y, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\subseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ ve $(x_s, \{x\}) \not\subseteq (b, B) \not\subseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $(b, B) \in (T \sqcup T')$ için $((h_t, H_t) \sqsubseteq (k_t, K_t), (k_t, K_t) \sqsubseteq (b, B)$ ve $(y_t, \{y\}) \sqsubseteq (h_t, H_t)$ olacak biçimde $\exists(h_t, H_t) \in T, \exists(k_t, K_t) \in T'$ yada $((h_s, H_s) \sqsubseteq (k_s, K_s), (b, B) \sqsubseteq (h_s, H_s)$ ve $(x_s, \{x\}) \sqsubseteq (k_s, K_s)$ olacak biçimde $\exists(h_t, H_t) \in T, \exists(k_t, K_t) \in T'$ vardır.
3. Her $(\mu, M) \in SF(X)$ için, $\forall i, j (h_j^i, H_j^i) \sqsubseteq (k_j^i, K_j^i)$ ve $(\mu, M) = \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in J_i} (h_j^i, H_j^i) = \bigsqcup_{i \in I} \prod_{j \in J_i} (k_j^i, K_j^i)$ olacak biçimde $(h_j^i, H_j^i), (k_j^i, K_j^i), i \in I, j \in J_i$ vardır.

Kanıt. (1) $\implies$ (2) $(x^s, X \setminus \{x\}) \not\subseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olsun. $(T, T'), T_0$ olduğundan $(x_s, \{x\}) \not\subseteq (b, B) \not\subseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olacak şekilde $(b, B) \in (T, T')$ var olduğunu biliyoruz. Eğer $(b, B) \in T$ ise, $(b, B) \not\subseteq (y^t, X \setminus \{y\})$ olduğundan ve düzenlilikten $(y_t, \{y\}) \sqsubseteq (h_t, H_t), \overline{(h_t, H_t)} \sqsubseteq (b, B)$ olacak şekilde $\exists(h_t, H_t) \in T$ vardır. Burada $(k_t, K_t) = \overline{(h_t, H_t)}$ alırsak ve $(h_t, H_t) \sqsubseteq \overline{(h_t, H_t)}$ olduğundan $(h_t, H_t) \sqsubseteq (k_t, K_t), (k_t, K_t) \sqsubseteq (b, B)$ ve $(y_t, \{y\}) \sqsubseteq (h_t, H_t)$ elde edilir. Eğer $(b, B) \in T'$ ise, $(x_s, \{x\}) \not\subseteq (b, B)$ olduğundan ve ko-düzenlilikten $(x_s, \{x\}) \not\subseteq (k_s, K_s), (b, B) \sqsubseteq (k_s, K_s)^\circ$ olacak şekilde bir $(k_s, K_s) \in T'$ vardır. Burada $(h_s, H_s) = (k_s, K_s)^\circ$ alırsak ve $(k_s, K_s)^\circ \sqsubseteq (k_s, K_s)$ olduğundan $(h_s, H_s) \sqsubseteq (k_s, K_s), (x_s, \{x\}) \not\subseteq (k_s, K_s)$ ve $(b, B) \sqsubseteq (h_s, H_s)$ elde edilir. Böylece (2)' nin kanıtı tamamlanmış olur.

(2) $\implies$ (3) Teorem 5.2.20 daki tekniğe benzer biçimde elde edilebilir.

(3) $\implies$ (1) Her $j \in J_i$ için $(h_i, H_i) = \prod_{j \in J_i} (h_j^i, H_j^i)$ olacak şekilde tanımlayalım $(h_j^i, H_j^i) \in T$ ve J_i sonlu olduğundan $(h_i, H_i) \in T$ olur. Bunlara ek olarak $\overline{(h_i, H_i)} =$

$\prod_{j \in J_i} \{(k_j^i, K_j^i) \mid (h_j^i, H_j^i) \sqsubseteq (k_j^i, K_j^i)\}$ olacağından Yardımcı Teorem 5.2.8 (1)(c)'den düzenlilik elde edilmiş olur. Önerme 5.2.15'den T_0 özelliği kolayca görülebilir. Böylece $(T, T'), T_3$ tür. Benzer biçimde $ko-T_3$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $bi-T_3$ tür. $\square$

5.2.24. Tanım : $(k, K) \sqsubseteq (g, G)$ 'yi sağlayan $(k, K) \in T', (g, G) \in T$ için $(k, K) \sqsubseteq (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$ 'yi sağlayan bir $(h, H) \in T$ varsa, (X, T) SF -topolojik uzayına *normal* denir.

5.3. SF -Topolojik uzaylarında Tıkızlık

5.3.1. Tanım : (X, T) , SF -topolojik uzayına,

1. $(1, X) = \bigsqcup_{i \in I} (g_i, G_i)$, $(g_i, G_i) \in T$, $i \in I$ için $\bigsqcup_{j \in J} (g_j, G_j) = (1, X)$ olacak şekilde I 'nın sonlu bir J alt kümesi varsa *Tıkız* denir.
2. $\prod_{i \in I} (f_i, F_i) = (0, \emptyset)$, $(f_i, F_i) \in T'$, $i \in I$ için $\prod_{j \in J} (f_j, F_j) = (0, \emptyset)$ olacak şekilde I 'nın sonlu bir J alt kümesi varsa *Ko-Tıkız* denir.
3. $(k, K) \not\sqsubseteq (1, X)$ olan her $(k, K) \in T'$ kümesi tıkızdır; yani $(k, K) \sqsubseteq \bigsqcup_{i \in I} (g_i, G_i)$, $(g_i, G_i) \in T$, $i \in I$ olmak üzere I 'nın sonlu bir J alt kümesi için, $(k, K) \sqsubseteq \bigsqcup_{j \in J} (g_j, G_j)$ oluyorsa *dengeli* denir.
4. $(g, G) \not\sqsubseteq (0, \emptyset)$ olan her $(g, G) \in T$ kümesi ko-tıkızdır; yani $\prod_{i \in I} (f_i, F_i) \sqsubseteq (g, G)$, $(f_i, F_i) \in T'$, $i \in I$ olmak üzere I 'nın sonlu bir J alt kümesi için, $\prod_{j \in J} (f_j, F_j) \sqsubseteq (g, G)$ oluyorsa *ko-Dengeli* denir.

5.3.2. Önerme : T, X üzerinde SF -topoloji olsun,

1. T tıkızdır ancak ve ancak ko-tıkızdır.
2. T dengelidir ancak ve ancak ko-dengelidir.

Kanıt. $\prod_{i \in I} (f_i, F_i) = (0, \emptyset)$ olsun, tümleyen işlemini kullanırsak,

$$\left(\prod_{i \in I} (f_i, F_i) \right)' = (0, \emptyset)' \implies \bigsqcup_{i \in I} (f_i, F_i)' = (1, X), i \in I$$

elde ederiz. Özel olarak $(f_i, F_i)' = (g_i, G_i)$ seçersek ve (X, T) SF -topolojik uzayı tıkız olduğundan $\bigsqcup_{j \in J} (g_j, G_j) = (1, X)$ eşitliğini sağlayan I 'nin bir J sonlu alt kümesi vardır. Tümleyen işemini tekrar uyguladığımızda,

$$(\bigsqcup_{j \in J} (g_j, G_j))' = (1, X)' \implies \prod_{j \in J} (g_j, G_j)' = (0, \emptyset)$$

elde edilir ve böylece kanıt tamamlanmış olur.

(2) Benzer şekilde gösterilebilir. □

5.3.3. Önerme : $\mathcal{T}$, X üzerinde SF -topoloji olsun.

1. Ko-dengeli ve R_1 SF -topolojik uzayı, düzenlidir.
2. Dengeli ve $ko-R_1$ SF -topolojik uzayı, ko-düzenlidir.
3. Düzenli ve dengeli SF -topolojik uzayı, normaldir.
4. Ko-düzenli ve ko-dengeli SF -topolojik uzayı, normaldir.

Kanıt. (1) $(g, G) \in T$ alalım, $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ 'yi sağlayan bir $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için,

$$(x_s, \{x\}) \in (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$$

'yi sağlayan $(h, H) \in T$ 'nin varlığını göstermeliyiz. T , R_1 olduğundan, $(x_t, \{x\}) \notin (g, G)$ 'yi sağlayan $(x, t) \in X \times \mathbb{I}$ için, $(x_s, \{x\}) \in (h_t, H_t)$ ve $(x_t, \{x\}) \notin \overline{(h_t, H_t)}$ olacak şekilde $(h_t, H_t) \in T$ 'nin varlığını biliniyor. Öyleyse

$$\prod \{ \overline{(h_t, H_t)} \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G) \} \sqsubseteq (g, G)$$

olduğunu gösterelim. Kanıt için tersini kabul edelim. O halde, $(x_u, \{x\}) \in \prod \{ \overline{(h_t, H_t)} \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G) \}$ ve $(x_u, \{x\}) \notin (g, G)$ olacak şekilde bir $(x, u) \in X \times \mathbb{I}$ vardır. R_1 özelliğinden $(x_s, \{x\}) \in (h_u, H_u)$ ve $(x_u, \{x\}) \notin \overline{(h_u, H_u)}$ olacak şekilde bir $(h_u, H_u) \in T$ vardır, bu da bir çelişkidir, dolayısıyla

$$\prod \{ \overline{(h_t, H_t)} \mid (x_t, \{x\}) \notin (g, G) \} \sqsubseteq (g, G)$$

olur.

Hipotezden $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ alınmıştı. Böylece $(g, G) \not\sqsubseteq (0, \emptyset)$ dir. T ko-dengeli olduğundan $(x, t_1), (x, t_2), \dots, (x, t_n)$ ve $(x_{t_i}, \{x\}) \notin (g, G)$ için $\overline{(h_{t_1}, H_{t_1})} \sqcup \overline{(h_{t_2}, H_{t_2})} \sqcup$

$\dots \sqcup \overline{(h_{t_n}, H_{t_n})} \sqsubseteq (g, G)$ olur. $(h, H) = (h_{t_1}, H_{t_1}) \sqcup (h_{t_2}, H_{t_2}) \sqcup \dots \sqcup (h_{t_n}, H_{t_n})$ alırsak, $(h, H) \in T$, $(x_s, \{x\}) \in (h_{t_i}, H_{t_i}), i = 1, 2, \dots, n$ ve böylece $(x_s, \{x\}) \in (h, H)$ olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \overline{(h, H)} &= \overline{((h_{t_1}, H_{t_1}) \sqcup (h_{t_2}, H_{t_2}) \sqcup \dots \sqcup (h_{t_n}, H_{t_n}))} \\ &\not\sqsubseteq \overline{(h_{t_1}, H_{t_1})} \sqcup \overline{(h_{t_2}, H_{t_2})} \sqcup \dots \sqcup \overline{(h_{t_n}, H_{t_n})} \\ &\not\sqsubseteq (g, G) \end{aligned}$$

elde edilir bu da T' 'nin düzenli olması demektir.

(2) $(k, K) \in T'$ alalım, $(x_s, \{x\}) \notin (k, K)$ 'yi sağlayan bir $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ için,

$$(x_s, \{x\}) \notin (f, F) \text{ ve } (f, F) \sqsubseteq (k, K)^\circ$$

'yi sağlayan $(f, F) \in T''$ 'nin varlığını göstermeliyiz. T , ko- R_1 olduğundan $(x_t, \{x\}) \in (f, F)$ 'yi sağlayan her $(x, t) \in X \times \mathbb{I}$ için $(x_s, \{x\}) \notin (k_t, K_t)$ ve $(x_t, \{x\}) \in (k_t, K_t)^\circ$ olacak şekilde $K_t \in T''$ 'nin varlığını biliniyor. Öyleyse

$$(f, F) \sqsubseteq \bigsqcup \{(k_t, K_t)^\circ \mid (x_t, \{x\}) \in (f, F)\}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için tersini yani bu içermenin olmadığını kabul edelim. Bu durumda $(x_u, \{x\}) \in (f, F)$ ve $(x_u, \{x\}) \notin \bigsqcup \{(k_t, K_t)^\circ \mid (x_t, \{x\}) \in (f, F)\}$ olacak şekilde $(x, u) \in X \times \mathbb{I}$ vardır. T' 'nin ko- R_1 özelliğinden $(x_s, \{x\}) \notin (k_u, K_u)$ ve $(x_u, \{x\}) \in (k_u, K_u)^\circ$ 'yi sağlayan $(k_u, K_u) \in T'$ vardır. Böylece $(x_u, \{x\}) \in (k_u, K_u)^\circ \sqsubseteq \bigsqcup \{(k_t, K_t)^\circ \mid (x_t, \{x\}) \in (f, F)\}$ elde edilir. Bu ise bir çelişki verir dolayısıyla,

$$(f, F) \sqsubseteq \bigsqcup \{(k_t, K_t)^\circ \mid (x_t, \{x\}) \in (f, F)\}$$

olur.

$(x_s, \{x\}) \notin (f, F)$ olduğundan $(f, F) \not\sqsubseteq (1, X)$ dir. T' 'nin dengeli oluşundan $(f, F) = (k_{t_1}, K_{t_1})^\circ \sqcap (k_{t_2}, K_{t_2})^\circ \sqcap \dots \sqcap (k_{t_n}, K_{t_n})^\circ$ olacak şekilde $(x, t_1), (x, t_2) \dots (x, t_n) \in X \times \mathbb{I}$ vardır. $(k, K) = (k_{t_1}, K_{t_1}) \sqcap (k_{t_2}, K_{t_2}) \sqcap \dots \sqcap (k_{t_n}, K_{t_n})$ aldığımızda, $(f, F) \in T'$, $(x_s, \{x\}) \notin (k_{t_i}, K_{t_i}), i = 1, 2, \dots, n \implies (x_s, \{x\}) \notin (k, K)$ olur ve

$$\begin{aligned} (f, F) &\sqsubseteq (k_{t_1}, K_{t_1})^\circ \sqcap (k_{t_2}, K_{t_2})^\circ \sqcap \dots \sqcap (k_{t_n}, K_{t_n})^\circ \\ &\sqsubseteq ((k_{t_1}, K_{t_1}) \sqcap (k_{t_2}, K_{t_2}) \sqcap \dots \sqcap (k_{t_n}, K_{t_n}))^\circ \\ &= (k, K)^\circ \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da kanıtı tamamlar.

(3) $(k, K) \sqsubseteq (g, G)$ olacak şekilde $(k, K) \in T'$, $(g, G) \in T$ alalım.

$$(k, K) \sqsubseteq (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$$

olduğunu göstermeliyiz.

(i) $(g, G) = (1, X)$ olsun. Bu durumda $(h, H) = (1, X)$ seçtiğimizde $(h, H) \in T$ ve $(k, K) \sqsubseteq (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$ olur ki, böylece istenen elde edilir.

(ii) $(g, G) \neq (1, X)$ olsun. $(x_s, \{x\}) \in (g, G)$ olacak şekilde $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ alalım, düzenlilikten $(x_s, \{x\}) \in (h_s, H_s) \sqsubseteq \overline{(h_s, H_s)} \sqsubseteq (g, G)$ 'yi sağlayan $\exists (h_s, H_s) \in T'$ vardır. Şimdi

$$(k, K) \sqsubseteq \bigsqcup \{(h_s, H_s) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için tersini yani,

$$(k, K) \not\sqsubseteq \bigsqcup \{(h_s, H_s) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(x_u, \{x\}) \in (k, K)$ ve $(x_u, \{x\}) \notin \bigsqcup \{(h_s, H_s) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\}$ olacak şekilde $\exists (x, u) \in X \times \mathbb{I}$ vardır. $(x_u, \{x\}) \in (k, K)$ ve $(k, K) \sqsubseteq (g, G) \implies (x_u, \{x\}) \in (g, G)$ olur. Böylece düzenlilikten $(x_u, \{x\}) \in (h_u, H_u) \sqsubseteq \overline{(h_u, H_u)} \sqsubseteq (g, G)$ olacak şekilde $(h_u, H_u) \in T$ varlığını biliyoruz. Bu durumda $(x_u, \{x\}) \in (h_u, H_u) \sqsubseteq \bigsqcup \{(h_s, H_s) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\}$ olur. Bu ise bir çelişki verir. Böylece $(k, K) \sqsubseteq \bigsqcup \{(h_s, H_s) \mid (x_s, \{x\}) \in (g, G)\}$ olur ve $(k, K) \neq (1, X)$ dır. $(k, K) \sqsubseteq (g, G)$ olduğu için $(g, G) \neq (1, X)$ dır. T 'nin dengeli olması kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (k, K) &\sqsubseteq (h_{s_1}, H_{s_1}) \sqcup (H_{s_2}, h_{s_2}) \sqcup \dots \sqcup (H_{s_n}, h_{s_n}) \\ &\sqsubseteq \overline{((h_{s_1}, H_{s_1}) \sqcup (H_{s_2}, h_{s_2}) \sqcup \dots \sqcup (H_{s_n}, h_{s_n}))} \\ &= \overline{(h_{s_1}, H_{s_1})} \sqcup \overline{(H_{s_2}, h_{s_2})} \sqcup \dots \sqcup \overline{(H_{s_n}, h_{s_n})} \\ &\sqsubseteq (g, G) \end{aligned}$$

olacak şekilde $(x, s_1), (x, s_2) \dots (x, s_n) \in X \times \mathbb{I}$ vardır. Eğer $(h, H) = (h_{s_1}, H_{s_1}) \sqcup (h_{s_2}, H_{s_2}) \sqcup \dots \sqcup (h_{s_n}, H_{s_n})$ biçiminde tanımlarsak, $(h, H) \in T$ ve $(k, K) \sqsubseteq (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$ olduğunu görürüz.

Böylece (i) ve (ii)'den T 'nin normalliği elde edilir.

(4) $(k, K) \sqsubseteq (g, G)$ olacak şekilde $(k, K) \in T'$, $(g, G) \in T$ alalım,

$$(k, K) \sqsubseteq (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$$

olduğunu göstermeliyiz.

(i) $(f, F) = (0, \emptyset)$ olsun bu durumda $(h, H) = (1, X)$ seçersek $(h, H) \in T$ ve $(k, K) \sqsubseteq (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$ olur ki, böylece istenilen elde edilir.

(ii) $(f, F) \neq (0, \emptyset)$ olsun, $(x_s, \{x\}) \notin (k, K)$ olacak şekilde $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ alalım, ko-düzenlilikten $(x_s, \{x\}) \notin (f_s, F_s)$, $(k, K) \sqsubseteq (f_s, F_s)^\circ$ 'yi sağlayan $(f_s, F_s) \in T'$ vardır. Şimdi,

$$\bigcap \{(f_s, F_s) \mid (x_s, \{x\}) \notin (k, K)\} \sqsubseteq (g, G)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için tersini kabul edelim. Bu durumda, $(x_u, \{x\}) \in \bigcap \{(f_s, F_s) \mid (x_s, \{x\}) \notin (k, K)\}$ ve $(x_u, \{x\}) \notin (g, G)$ olacak biçimde $(x, u) \in X \times \mathbb{I}$ vardır. $(k, K) \sqsubseteq (g, G)$ olduğundan $(x_u, \{x\}) \notin (k, K)$ olur ve böylece ko-düzenlilikten $(x_u, \{x\}) \notin (f_u, F_u)$ ve $(k, K) \sqsubseteq (f_u, F_u)^\circ$ olacak şekilde $(f_u, F_u) \in T''$ 'nin varlığını biliniyor. Buradan $(x_u, \{x\}) \not\sqsubseteq \bigcap \{(f_s, F_s) \mid (x_s, \{x\}) \notin (k, K)\} \sqsubseteq (f_u, F_u)$ elde edilir ki, bu bir çelişki verir. Yani $\bigcap \{(f_s, F_s) \mid (x_s, \{x\}) \notin (k, K)\} \sqsubseteq (g, G)$ olur. $(g, G) \not\sqsubseteq (0, \emptyset)$ olduğu açıktır. $(k, K) \sqsubseteq (g, G)$ olduğundan $(f, F) \neq (0, \emptyset)$ olur. T 'nin ko-dengeliliğinden

$$\begin{aligned} (k, K) &\sqsubseteq (f_{s_1}, F_{s_1})^\circ \sqcap (f_{s_2}, F_{s_2})^\circ \sqcap \dots \sqcap (f_{s_n}, F_{s_n})^\circ \\ &= ((f_{s_1}, F_{s_1}) \sqcap (f_{s_2}, F_{s_2}) \dots (f_{s_n}, F_{s_n}))^\circ \\ &\sqsubseteq (f_{s_1}, F_{s_1}) \sqcap (f_{s_2}, F_{s_2}) \sqcap \dots \sqcap (f_{s_n}, F_{s_n}) \\ &\sqsubseteq (g, G). \end{aligned}$$

olacak şekilde $(x, s_1), (x, s_2) \dots (x, s_n) \in X \times \mathbb{I}$ vardır. Eğer $(h, H) = (f_{s_1}, F_{s_1})^\circ \sqcap (f_{s_2}, F_{s_2})^\circ \sqcap \dots \sqcap (f_{s_n}, F_{s_n})^\circ$ biçimde tanımlanırsa, $(h, H) \in T$ ve $(k, K) \sqsubseteq (h, H) \sqsubseteq \overline{(h, H)} \sqsubseteq (g, G)$ olur.

Böylece (i) ve (ii)'den T 'nin normal olduğu görülür. $\square$

5.4. Di-tıkızlık ve Çarpım Di-topolojik uzayları

Bu alt bölümde, di-topolojik doku uzayının di-tıkız olmasını ve çarpım di-topolojik uzayın tanımını verip, bu bölümde verilen ayırma aksiyomlarının çarpım di-topolojik doku uzaylarındaki karakterizasyonları araştırılacaktır. Bu bölümdeki teoremlerin kanıtlarının referansları verilip atlanacaktır.

5.4.1. Tanım : [27] Di-topolojik doku uzayı $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ tıkız, ko-tıkız, dengeli ve ko-dengeli ise, bu di-topolojik doku uzayına *di-tıkızdır* denir.

5.4.2. Tanım : [10] $(S_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{T}_i, \mathcal{K}_i)$ ditopolojik doku uzayları, $(S, \mathcal{S})$, $(S_i, \mathcal{S}_i)$ lerin çarpımı olsun. $(S, \mathcal{S})$ üzerinde, alttabanı $\{E(i, G_i) \mid i \in I, G_i \in \mathcal{T}_i\}$ ve ko-alttabanı $\{E(i, K_i) \mid i \in I, K_i \in \mathcal{K}_i\}$ olan (τ, κ) di-topolojisine $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki çarpım di-topolojisi denir.

5.4.3. Teorem : [11] Aşağıdaki özellikler vardır.

1. $\forall i \in I$ için $(S_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{T}_i, \mathcal{K}_i)$ di-topolojik doku uzayları $R_0 \implies (S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K})$ çarpım di-topolojik doku uzayı R_0 dir.
2. $\forall i \in I$ için $(S_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{T}_i, \mathcal{K}_i)$ di-topolojik doku uzayları $R_1 \implies (S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K})$ çarpım di-topolojik doku uzayı R_1 dir.
3. $\forall i \in I$ için $(S_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{T}_i, \mathcal{K}_i)$ di-topolojik doku uzayları düzenli $\implies (S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K})$ çarpım di-topolojik doku uzayı düzenlidir.
4. $\forall i \in I$ için $(S_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{T}_i, \mathcal{K}_i)$ di-topolojik doku uzayları $T_0 \implies (S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K})$ çarpım di-topolojik doku uzayı T_0 dir.

5.4.4. Teorem : [27] $\forall i \in I$ için $(S_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{T}_i, \mathcal{K}_i)$ di-topolojik doku uzayları di-tıkız $\implies (S, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K})$ çarpım di-topolojik doku uzayı di-tıkızdır.

5.5. Genelleştirilmiş Lowen ω ve ι Dönüşümleri

Şimdi *Lowen* tarafından tanımlanan fonktörleri hatırlayalım. [34] Bunlardan w dönüşümü; X üzerindeki bir $\mathcal{T}$ topolojisini, X üzerindeki

$$\gamma = \{g \in \mathbb{I}^X \mid \{x \mid r < g(x)\} \in \mathcal{T}, \forall r \in \mathbb{I}\}$$

alttabanına sahip $\mathbb{I}$ -topolojisine karşılık getirir. Buna göre, γ ailesinin alttaban olduğu $w(\mathcal{T})$, $\mathbb{I}$ -topolojisi; $\mathbb{I}$ üzerindeki $\mathcal{V} = \{(r, 1] \mid 0 \leq r \leq 1\} \cup \{[0, 1]\}$ topolojisi için

$$w(\mathcal{T}) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{I} \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

ailesidir. Ayrıca ι dönüşümü; X üzerindeki bir T , $\mathbb{I}$ -topolojisini, X üzerindeki

$$\beta = \{\{x \mid r < g(x)\} \mid r \in \mathbb{I}, g \in T\}$$

alttabanına sahip bir topolojiye karşılık getirir. Burada β alttabanına sahip $\iota(T)$ topolojisi, $(\mathbb{I}, \mathcal{V})$ topolojik uzayı için X üzerindeki $\{f \in T \mid f : X \rightarrow \mathbb{I}\}$ fonksiyonlar ailesi ile üretilen başlangıç topolojisidir.

Biz, yukarıda sözüedilen Lowen dönüşümlerini genelleştirmek için aşağıdaki tanımı verebiliriz.

5.5.1. Tanım : $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji olsun. Biz $\omega(\mathcal{T})$ ile alt tabanı $B_{\mathcal{T}} = \{(\mu, M) \in SF(X) \mid \{x \mid (x_r, \{x\}) \in (\mu, M)\} \in \mathcal{T} \forall r \in \mathbb{I}\}$ olan X üzerinde SF -topolojisini göstereceğiz, ve bu $\omega : Top \mapsto SF - Top$ dönüşümüne genelleştirilmiş ω Lowen dönüşümü denir.

$(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ topolojik uzaylar ve $g : X \rightarrow Y$, $\mathcal{T} - \mathcal{V}$ sürekli olsun. Yardımcı Teorem 5.1.6'dan $(\nu, N) \in B_{\mathcal{V}}$, $r \in \mathbb{I}$, için

$$\{x \mid (x_r, \{x\}) \in g^{-1}(\nu, N)\} = g^{-1}[\{y \mid (y_r, \{y\}) \in (\nu, N)\}].$$

eşitliğini görmek kolaydır. Diğer yandan, $\{y \mid (y_r, \{y\}) \in (\nu, N)\} \in \mathcal{V}$, olduğu için her $r \in \mathbb{I}$ için $\{x \mid (x_r, \{x\}) \in g^{-1}(\nu, N)\} \in \mathcal{T}$ olur. Bu yüzden g , $\omega(\mathcal{T}) - \omega(\mathcal{V})$ sürekli dir. Böylece ω Lowen dönüşümünü **Top**'dan **SF-Top**'a $(X, \mathcal{T}) \in \text{Ob } \mathbf{Top}$ nesnesini $(X, \omega(\mathcal{T})) \in \text{Ob } \mathbf{SF-Top}$ nesnesine götüren ve $g \in \mathbf{Top}((X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V}))$ morfizmasını $g \in \mathbf{SF-Top}((X, \omega(\mathcal{T})), (Y, \omega(\mathcal{V})))$ morfizmasına götüren bir fonktor olarak düşünebiliriz.

5.5.2. Tanım : T , X üzerinde bir SF -topoloji olsun. Biz $\iota(T)$ ile alttabanı $\{\{x \mid (x_r, \{x\}) \in (\mu, M)\} \mid (\mu, M) \in T, r \in \mathbb{I}\}$ olan X üzerinde bir topolojiyi göstereceğiz. Buna genelleştirmiş ι Lowen dönüşümü diyeceğiz.

(X, T) ve (Y, V) SF -topolojik uzaylar ve $g : X \rightarrow Y$, $T - V$ sürekli olsun. $r \in \mathbb{I}$, $(\nu, N) \in B_V$ alalım. Böylece $\{y \mid (y_r, \{y\}) \in (\nu, N)\}$, $\iota(V)$ temel elemanıdır. Yukarıdaki eşitlikten $g^{-1}[\{y \mid (y_r, \{y\}) \in (\nu, N)\}] \in \iota(T)$ yazabiliriz. $g^{-1}(\nu, N) \in B_T$ ve böylece her $r \in \mathbb{I}$ için $\{x \mid (x_r, \{x\}) \in g^{-1}(\nu, N)\} \in \iota(T)$ olur. Bu g 'nin $\iota(T) - \iota(V)$ sürekli olduğunu verir. ι Lowen dönüşümünü, $(X, T) \in \text{Ob } \mathbf{SF-Top}$ nesnesini $(X, \iota(T)) \in \text{Ob } \mathbf{Top}$ nesnesine götüren ve $g \in \mathbf{SF-Top}((X, T), (Y, V))$ morfizmasını $g \in \mathbf{Top}((X, \iota(T)), (Y, \iota(V)))$ morfizmasına götüren **SF-Top**'dan **Top**'a bir fonktor olarak düşünebiliriz.

Klasik Lowen fonktorlarda olduğu gibi ([36]) aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.5.3. Teorem : ι Lowen fonktoru eşlenik ve ω fonktoru ko-eşleniktir.

Kanıt. $(X, \mathcal{T}) \in \text{Ob } \mathbf{Top}$ alalım. Amacımız $(\iota_X, (X, \omega(\mathcal{T})))$ 'nin $(X, \mathcal{T})$ kaynağına sahip evrensel ok olduğunu göstermektir. Bu kanıtı yapmak için noktasal birim fonksiyonun sürekli olduğunu göstermeliyiz. $(\mu, M) \in B_{\mathcal{T}}$ olsun. Bu durumda $r \in \mathbb{I}$ için $\{x \mid (x_r, \{x\}) \in (\mu, M)\} \in \mathcal{T}$ var olduğunu bildiğimiz için süreklilik için bu yeterlidir. ι 'nın eşlenik olduğunu göstermek için sadece $(\iota_X, (X, \omega(\mathcal{T})))$ 'nin evrensel özelliğe sahip bir yapısal ok olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu durumda $\bar{f} : X \rightarrow Y$ olacak şekilde aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak tek bir **SF-Top** morfizmasının varlığını göstermek zorundayız.

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\iota_X} & (X, \iota(\omega(\mathcal{T}))) \\ & \searrow f & \downarrow \iota(\bar{f}) \\ & & (Y, \iota(V)) \end{array}$$

Açıktır ki, tek mümkün seçim $\bar{f} = f$ olmasıdır. Bu nedenle biz f 'nin $\omega(\mathcal{T})$ - V sürekliliğini göstermek zorundayız. $f, \mathcal{T}$ - $\iota(V)$ sürekli olduğundan, $(\nu, N) \in V$ ve $r \in \mathbb{I}$ için $f^{-1}[\{y \mid (y_r, \{y\}) \in (\nu, N)\}] \in \mathcal{T}$ olduğunu biliyoruz. Fakat Yardımcı Teorem 5.1.6'dan her $r \in \mathbb{I}$ için $\{x \mid (x_r, \{x\}) \in f^{-1}(\nu, N)\} \in \mathcal{T}$ sonucuna varıyoruz, buradan $f^{-1}(\nu, N) \in \omega(\mathcal{T})$ olur. Böylece f 'nin $\omega(\mathcal{T})$ - V sürekliliği sağlanmış olur.

Böylece ι eşlenik olur, ve [1, Theorem 19.1]'dan ω 'nin ko-eşlenik olduğu sonucuna ulaşılabilir. $\square$

5.5.4. Önerme : $\mathcal{T}, X$ üzerinde bir topoloji ve ω Lowen dönüşümü ise,

1. $s \in \mathbb{I}$ için $(s, \emptyset) \in \omega(\mathcal{T})$ ve $(s, X) \in \omega(\mathcal{T})$ dir.
2. $G \in \mathcal{T}$ için, $(\chi_G, G) \in \omega(\mathcal{T})$ dir.
3. $\omega(\mathcal{T})$ SF-topolojisi çarpımsaldır.

Kanıt. (1) Açıktır ki;

$$\begin{aligned} \{x \mid (x_r, \{x\}) \sqsubseteq (s, \emptyset)\} &= \begin{cases} X & \text{eğer } r < s, \\ \emptyset & \text{diğer,} \end{cases} \\ \{x \mid (x_r, \{x\}) \sqsubseteq (s, X)\} &= \begin{cases} X & \text{eğer } r \leq s, \\ \emptyset & \text{diğer,} \end{cases} \end{aligned}$$

ve böylece bu yumuşak belirtisiz kümeler $B_{\mathcal{T}}$ 'ye böylece $\omega(\mathcal{T})$ aittir.

(2). Her $r \in \mathbb{I}$ için $\{x \mid (x_r, \{x\}) \in (\chi_G, G)\} = G \in \mathcal{T}$ olduğundan açıktır.

(3) $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ ve $(x_r, \{x\}) \in (\mu, M)$ olacak şekilde $(\mu, M) \in B_{\mathcal{T}}$ alalım, $Y = \{y \in X \mid (y_r, \{y\}) \in (\mu, M)\}$ biçiminde tanımlanırsa, $x \in Y$ ve $B_{\mathcal{T}}$ 'nin tanımı gereği $Y \in \mathcal{T}$ dir. Her $s \in \mathbb{I}$ için $\{u \in X \mid (u_s, \{u\}) \in (\chi_Y, Y)\} = Y \in \mathcal{T}$ olduğundan $(\chi_Y, Y) \in B_{\mathcal{T}} \subseteq \omega(\mathcal{T})$ olur. Sonuçta $s = r$ için (1)'den $(s, X) \in \omega(\mathcal{T})$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$(x_r, \{x\}) \in (\chi_Y \wedge s, Y) \sqsubseteq (\mu, M),$$

olduğu kolayca gösterilebilir, böylece Yardımcı Teorem 5.1.11 (2 iii) koşulu Tanım 5.5.1 de verilmiş $B_{\mathcal{T}}$ alttabanı için sağlanır. Bu yüzden $\omega(\mathcal{T})$ çarpımsaldır. $\square$

5.5.5. Sonuç : $\mathcal{T}, X$ üzerinde bir topoloji ve ω Lowen dönüşümü ise, $\omega(\mathcal{T}), \tau_{\omega(\mathcal{T})} = \mathcal{T} \otimes \mathcal{J}, \kappa_{\omega(\mathcal{T})} = \mathcal{T}^c \otimes \mathcal{J}$ eşitliklerini gerçekler. Özel olarak,

$$B^* = \{(s, \emptyset) \mid s \in \mathbb{I}\} \cup \{(s, X) \mid s \in \mathbb{I}\} \cup \{(\chi_Y, Y) \mid Y \in \mathcal{T}\}$$

kümesi $\omega(\mathcal{T})$ için bir alttabandır.

Kanıt. Önerme 5.5.4 (3) den $\tau_{\omega(\mathcal{T})} = \tau_{\omega(\mathcal{T})}^1 \otimes \tau_{\omega(\mathcal{T})}^2$ olduğu biliniyor. Yardımcı Teorem 5.1.11(1) ve Önerme 5.5.4(1)'den $\mathcal{J} = \{[0, s) \mid s \in \mathbb{I}\} \cup \{[0, s] \mid s \in \mathbb{I}\} \subseteq \tau_{\omega(\mathcal{T})}^2 \subseteq \mathcal{J}$ elde edilir. Önerme 5.5.4 (2) den $\mathcal{T} \subseteq \tau_{\omega(\mathcal{T})}^1$ sağlanır. $\tau_{\omega(\mathcal{T})}^1 \subseteq \mathcal{T}$ kapsamasını gösterebilirsek kanıt biter. $G \in \tau_{\omega(\mathcal{T})}^1$ olsun. Eğer $G = \emptyset$ ise, $G \in \mathcal{T}$ dir. $G \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim ve $x \in G$ alalım. Şimdi $(\chi_G, G) \in \omega(\mathcal{T})$ ve $(x_r, \{x\}) \in (\chi_G, G)$ olduğundan, alttaban tanımından $(x_r, \{x\}) \in \prod_{i=1}^n (\mu_i, M_i) \sqsubseteq (\chi_G, G)$ olacak şekilde $1 \leq i \leq n$, $(\mu_i, M_i) \in B$ 'nin varlığını biliniyor.

$$Y_i = \{y \mid (y_r, \{y\}) \in (\mu_i, M_i), i = 1, 2, \dots, n\}$$

kümesi için $x \in Y_i \in \mathcal{T}$ ve böylece $x \in \bigcap_{i=1}^n Y_i \in \mathcal{T}$ olur. Sonuçta $\bigcap_{i=1}^n Y_i \subseteq G$ olduğu kolayca gösterilebilir ve istenilen $G \in \mathcal{T}$ elde edilir.

Böylece $\tau_{\omega(\mathcal{T})} = \mathcal{T} \otimes \mathcal{J}$ kanıtlanmış olur ve $\kappa_{\omega(\mathcal{T})} = \mathcal{T}^c \otimes \mathcal{J}$ 'nin kanıtı ise tümleyen alınarak yapılır.

$G \times \mathbb{I}, G \in \mathcal{T}, X \times [0, s), X \times [0, s], s \in \mathbb{I}$ kümeleri $\mathcal{T} \otimes \mathcal{J}$ topolojisi için alttaban kümeleri olduklarından B^* kümesi $\omega(\mathcal{T})$ için bir alttabandır. $\square$

5.6. Lowen'nın Tombul ω_r ve ι_r Dönüşümleri

Bilindiği üzere klasik Lowen fonktoru ω , ayırma aksiyolarını korur fakat tıkızlığı korumaz. $\omega : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF} - \mathbf{Top}$ biçiminde tanımlı genelleştirilmiş ω dönüşümünde aynı özelliğe sahip olduğunu göreceğiz. Fakat aşağıda tanımlayacağımız Lowen tombul fonktor ω_r hem ayırma aksiyomlarını hem de tıkızlığı korur. Böylece $\mathbf{Top}$ 'dan $\mathbf{SF-Top}$ 'a tıkız Hausdorff özelliğini koruyan bir fonktor vardır. Ayrıca da $\mathbb{I} - \mathbf{Top}$ yerine $\mathbf{SF-Top}$ seçmenin önemli nedenlerinden biri de böyle bir fonktörün varlığıdır.

5.6.1. Tanım :

$$(x_r, \{x\}) \in (\mu, M), r < 1 \implies \exists r' > r \text{ için } (x_{r'}, \{x\}) \in (\mu, M).$$

gerektirmesini sağlayan $(\mu, M) \in SF(X)$ yumuşak belirtisiz kümesine *tombuldur* denir. X 'in tombul (rotund) yumuşak belirtisiz kümelerini $SF_r(X)$ ile göstereceğiz.

5.6.2. Örnek : $s \in \mathbb{I}$ ve $A \subseteq X$ için aşağıdakiler vardır.

1. $(s, \emptyset)$ ve (χ_A, A) tombuldur.
2. (s, X) , $s \leq 1$ için tombul değildir.

(1) $(x_r, \{x\}) \in (s, \emptyset) \iff r < s$ ve $(x_r, \{x\}) \in (\chi_A, A) \iff x \in A$ olduğundan tombulluk koşulları sağlanır.

(2) $(x_r, \{x\}) \in (s, X) \iff r \leq s$ olduğundan $r \neq 1$ için tombul koşulu sağlanmıyor.

5.6.3. Yardımcı Teorem : $SF_r(X)$ ailesi keyfi join ve sonlu meet altında kapalıdır.

Kanıt. Öncelikle $(\mu_j, M_j) \in SF_r(X)$, $j \in J$ ve $(x_r, \{x\}) \in \bigsqcup_{j \in J} (\mu_j, M_j)$ alalım. $r < 1$ olsun. Bu durumda bazı $j \in J$ 'ler için $(x_r, \{x\}) \in (\mu_j, M_j)$ olur. $(x_{r'}, \{x\}) \in (\mu_j, M_j) \sqsubseteq \bigsqcup_{j \in J} (\mu_j, M_j)$ olacak şekilde $r < r'$ 'nin varlığını biliyoruz. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

İki tombul yumuşak belirtisiz kümenin meet'inin tombul olduğunu göstermek yetecektir. Bunun için $(\mu_1, M_1), (\mu_2, M_2) \in SF_r(X)$ ve $r < 1$ alalım. $(x_r, \{x\}) \in (\mu_1, M_1)$ olduğundan $(x_{r_1}, \{x\}) \in (\mu_1, M_1)$ olacak şekilde $r < r_1$ 'nin varlığını biliyoruz. Benzer biçimde $(x_{r_2}, \{x\}) \in (\mu_2, M_2)$ olacak şekilde $r < r_2$ vardır. $r' = \min\{r_1, r_2\}$ alırsak bu bize

$$(x_{r'}, \{x\}) \sqsubseteq (x_{r_1}, \{x\}) \sqcap (x_{r_2}, \{x\}) \sqsubseteq (\mu_1, M_1) \sqcap (\mu_2, M_2),$$

olduğunu verir. Böylece istenilen $(x_{r'}, \{x\}) \in (\mu_1, M_1) \sqcap (\mu_2, M_2)$ gösterilmiş olur. $\square$

5.6.4. Tanım : $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji olsun. $\omega_r(\mathcal{T})$ ile X üzerinde alttabanı $B_{\mathcal{T}}^r = \{(\mu, M) \in SF_r(X) \mid \{x \mid (x_r, \{x\}) \in (\mu, M)\} \in \mathcal{T}\}$ olan SF -topolojisini göstereceğiz. ω_r dönüşümüne de *Lowen'nın tombul ω_r dönüşümü* denir.

5.6.5. Önerme : $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji ve ω_r Lowen'in tombul dönüşümü ise:

1. $s \in \mathbb{I}$ için $(s, \emptyset) \in \omega_r(\mathcal{T})$ dir.
2. $G \in \mathcal{T}$ için $(\chi_G, G) \in \omega_r(\mathcal{T})$ dir.
3. $\omega_r(\mathcal{T}) = \omega(\mathcal{T}) \cap SF_r(X)$ ve bu yüzden $s < 1$ için $(s, X) \notin \omega_r(\mathcal{T})$ olur.
4. $\omega_r(\mathcal{T})$, SF -topolojisi çarpımsaldır.

Kanıt. Önerme 5.5.4'ün kanıtından $(s, \emptyset)$, (χ_G, G) , $G \in \mathcal{T}$ kümeleri $B_{\mathcal{T}}^r$ 'ye ve Örnek 5.6.2 gereği $SF_r(X)$ 'e ait oldukları için $B_{\mathcal{T}}^r$ 'ye aittirler böylece (1) ve (2) açıktır.

(3) $\omega_r(\mathcal{T}) \subseteq \omega(\mathcal{T}) \cap SF_r(X)$ olduğu açıktır. Tersine $(\mu, M) \in \omega(\mathcal{T}) \cap SF_r(X)$ alalım. O halde,

$$(\mu, M) = \underbrace{\bigsqcup_{j \in J_1} (\chi_{G_j}, G_j) \cap (s_j, \emptyset)}_{(\mu_1, M_1)} \cap \underbrace{\bigsqcup_{j \in J_2} (\chi_{G_j}, G_j) \cap (s_j, X)}_{(\mu_2, M_2)}$$

$(x_r, \{x\}) \in (\mu, M)$ olsun. Eğer $(x_r, \{x\}) \in (\mu_1, M_1)$ ise, biz (s_j, X) 'i $(s_j, \emptyset) \in \omega_r(\mathcal{T})$ ile değiştirebiliriz. Böylece $\forall j \in J_2$ için $(x_r, \{x\}) \in (\mu^{(x,r)}, M^{(x,r)}) \subseteq (\mu, M)$ dir.

$(x_r, \{x\}) \notin (\mu_1, M_1)$ olsun, bu durumda $(x_r, \{x\}) \in (s_j, X)$ olacak şekilde $j \in J_2$ vardır, eğer $r = 1$, $r \leq s_j \implies s_j = 1$ dir ve böylece $(1, X) \in \omega_r(\mathcal{T})$ elde edilir. Eğer $r < 1$ ise, $(x_r, \{x\}) \in (s_j, X)$ olacak şekilde $r < s < 1$ vardır. (s_j, X) 'leri $(s_j, \emptyset)$ ile değiştirdiğimizde, $(x_r, \{x\}) \in (s_j, \emptyset)$ olur. Buradan $(x_r, \{x\}) \in (\mu^{(x,r)}, M^{(x,r)}) \subseteq (\mu, M)$ elde edilir. O halde,

$$(\mu, M) \subseteq \bigsqcup_{(x,r) \in X \times \mathbb{I}} (\mu^{(x,r)}, M^{(x,r)}) \subseteq (\mu, M)$$

olur. Bu ise $(\mu, M) \in \omega_r(\mathcal{T})$ demektir.

(4) $(x, r) \in X \times \mathbb{I}$ ve $(x_r, \{x\}) \in (\mu, M)$ olacak şekilde $(\mu, M) \in B_{\mathcal{T}}^r$ alalım. Eğer $r < 1$ ise, $(\mu, M) \in SF_r(X)$ olduğundan $(x_s, \{x\}) \in (\mu, M)$ olacak şekilde $r < s < 1$ vardır. Şimdi $s = 1$ olsun, $Y = \{y \in X \mid (y_r, \{y\}) \in (\mu, M)\}$ biçiminde bir Y kümesi tanımlayalım $x \in Y \in \mathcal{T}$ olur üstelik Örnek 5.6.2'den $(\chi_Y, Y) \in SF_r(X)$, böylece

$(\chi_Y, Y) \in B_{\mathcal{T}}^r \in \omega_r(\mathcal{T})$ sonucu elde edilir. Eğer $s < 1$ ise, (1)'den $(\mathbf{s}, \emptyset) \in \omega_r(\mathcal{T})$ olur. Buradan,

$$(x_r, \{x\}) \in (\chi_Y \wedge \mathbf{s}, \emptyset) \sqsubseteq (\mu, M)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer yandan, eğer $s = 1$ ise, $\omega_r(\mathcal{T})$ 'nin SF -topoloji olmasından $(\mathbf{s}, X) \in \omega_r(\mathcal{T})$ elde edilir. Bu durumda,

$$(x_r, \{x\}) \in (\chi_Y \wedge \mathbf{s}, Y) \sqsubseteq (\mu, M)$$

olduğu açıktır, öyleyse Yardımcı Teorem 5.1.11(2)(iii)'den $\omega_r(\mathcal{T})$ çarpımsaldır. $\square$

5.6.6. Sonuç : $\mathcal{T}, X$ üzerinde bir topoloji ve ω_r Lowen'in tombul dönüşümü ise, $\omega_r(\mathcal{T})$, $\tau_{\omega_r(\mathcal{T})} = \mathcal{T} \otimes \tau_{\mathbb{I}}$, $\kappa_{\omega_r(\mathcal{T})} = \mathcal{T}^c \otimes \kappa_{\mathbb{I}}$ eşitliklerini sağlar. Özel olarak

$$B_r^* = \{(\mathbf{s}, \emptyset) \mid s \in \mathbb{I}\} \cup \{(\chi_Y, Y) \mid Y \in \mathcal{T}\}$$

kümesi $\omega_r(\mathcal{T})$ için alttabandır.

Kanıt. Önerme 5.6.5(4) ten $\tau_{\omega_r(\mathcal{T})} = \tau_{\omega_r(\mathcal{T})}^1 \otimes \tau_{\omega_r(\mathcal{T})}^2$ olduğunu biliyoruz. Yardımcı Teorem 5.1.11(1) ve Önerme 5.6.5(3)'den $\tau_{\mathbb{I}} = \{[0, s) \mid s \in \mathbb{I}\} \cup \{\mathbb{I}\} \subseteq \tau_{\omega_r(\mathcal{T})}^2 \subseteq \tau_{\mathbb{I}}$ elde ederiz. Önerme 5.6.5(2)'den $\mathcal{T} \subseteq \tau_{\omega_r(\mathcal{T})}^1$ olur. Eşitliği göstermek için $\tau_{\omega_r(\mathcal{T})}^1 \subseteq \mathcal{T}$ olduğunu kanıtlamalıyız. Bunun için $G \in \tau_{\omega_r(\mathcal{T})}^1$ olsun. Eğer $G = \emptyset$ ise $G \in \mathcal{T}$ olur, $G \neq \emptyset$ olsun bu durumda $x \in G$ alalım. Önerme 5.6.2'den $(\chi_G, G) \in \omega_r(\mathcal{T})$ ve $(x_r, \{x\}) \in (\chi_G, G)$ aldığımızda, alttaban tanımından $(x_r, \{x\}) \in \prod_{i=1}^n (\mu_i, M_i) \sqsubseteq (\chi_G, G)$ $1 \leq i \leq n$, $(\mu_i, M_i) \in B$ kümelerinin varlığını biliyoruz.

$$Y_i = \{y \mid (y_r, \{y\}) \sqsubseteq (\mu_i, M_i), i = 1, 2, \dots, n\}.$$

kümesi için $x \in Y_i \in \mathcal{T}$ ve böylece $x \in \bigcap_{i=1}^n Y_i \in \mathcal{T}$ olur. Sonuçta $\bigcap_{i=1}^n Y_i \subseteq G$ olduğu kolayca gösterilebilir ve istenilen $G \in \mathcal{T}$ elde edilir.

Böylece $\tau_{\omega_r(\mathcal{T})} = \mathcal{T} \otimes \tau_{\mathbb{I}}$ 'in kanıtı biter ve $\kappa_{\omega_r(\mathcal{T})} = \mathcal{T}^c \otimes \kappa_{\mathbb{I}}$ ise tümleyen alınarak bulunabilir.

$G \times \mathbb{I}$, $G \in \mathcal{T}$, $X \times [0, s)$, $s \in \mathbb{I}$ kümeleri $\mathcal{T} \otimes \tau_{\mathbb{I}}$ topolojisi için alttaban olduklarından B_r^* kümesi $\omega_r(\mathcal{T})$ için bir alttabandır. $\square$

5.6.7. Not : Tanım 5.5.1'de verildiği gibi $B_{\mathcal{T}}$, $\omega(\mathcal{T})$ nin alttabanı ise, Önerme 5.6.5 ve Sonuç 5.6.6'den $B_{\mathcal{T}}^r = B_{\mathcal{T}} \cap SF_r(X)$ olur.

$(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ topolojik uzaylar ve $g : X \rightarrow Y$ $\mathcal{T} - \mathcal{V}$ sürekli olsun. Biz $g : (X, \omega_r(\mathcal{T})) \rightarrow (Y, \omega_r(\mathcal{V}))$ 'nin $\omega_r(\mathcal{T}) - \omega_r(\mathcal{V})$ sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. $\omega_r(\mathcal{T}) = \omega(\mathcal{T}) \cap SF_r(X)$ eşitliğini ve $\omega(\mathcal{T})$ 'nin $\omega(\mathcal{T}) - \omega(\mathcal{V})$ sürekliliğini kullanırsak $(\nu, N) \in SF_r(Y) \implies g^{-1}(\nu, N) \in SF_r(X)$ olduğunu göstermemiz yetecektir. $r < 1$ için $(x_r, \{x\}) \in g^{-1}(\nu, N)$ olsun, Yardımcı Teorem 5.1.6'den $(f(x)_r, \{f(x)\}) \in (\nu, N)$ olur. (ν, N) 'nin tombul olmasından $(f(x)_s, \{f(x)\}) \in (\nu, N)$ olacak şekilde $\exists r < s < 1$ vardır. Böylece $(x_s, \{x\}) \in g^{-1}(\nu, N) \in SF_r(X)$ ve böylece $g^{-1}(\nu, N) \in \omega_r(\mathcal{T})$ elde edilir.

Böylece ω_r Lowen dönüşümünü **Top**'dan **SF_r-Top**'a $(X, \mathcal{T}) \in \text{Ob } \mathbf{Top}$ nesnesini $(X, \omega_r(\mathcal{T})) \in \text{Ob } \mathbf{SF_r-Top}$ nesnesine götüren ve $g \in \mathbf{Top}((X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V}))$ morfizmasını $g \in \mathbf{SF_r-Top}((X, \omega(\mathcal{T})), (Y, \omega(\mathcal{V})))$ morfizmasına götüren bir fonktor olarak düşünebiliriz.

5.6.8. Tanım : T, X üzerinde bir SF_r -topoloji olsun. Biz $\iota_r(T)$ ile alttabanı $\{\{x \mid (x_r, \{x\}) \in (\mu, M)\} \mid (\mu, M) \in SF_r(X), r \in \mathbb{I}\}$ olan X üzerinde bir topolojiyi göstereceğiz. Buna ι_r Lowen'in tombul dönüşümü diyeceğiz.

Açıkça, ι genelleştirilmiş Lowen dönüşümü olmak üzere $\iota_r = \iota|_{SF_r}$ ve ι dönüşümü $\iota(T) - \iota(V)$ sürekli olduğundan ι_r kısıtlama dönüşümü de $\iota_r(T) - \iota_r(V)$ süreklidir.

Böylece ι_r Lowen dönüşümünü, $(X, T) \in \text{Ob } \mathbf{SF_r-Top}$ nesnesini $(X, \iota_r(T)) \in \text{Ob } \mathbf{Top}$ nesnesine götüren ve $g \in \mathbf{SF_r-Top}((X, T), (Y, V))$ morfizmasını $g \in \mathbf{Top}((X, \iota_r(T)), (Y, \iota_r(V)))$ morfizmasına götüren $\mathbf{SF_r-Top}$ 'dan **Top**'a bir fonktor olarak düşünebiliriz.

ω ve ι Lowen dönüşümleri için yaptığımız gibi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.6.9. Teorem : ι_r Lowen fonktoru eşlenik ve ω_r fonktoru ko-eşleniktir.

Kanıt. $(X, \mathcal{T}) \in \text{Ob } \mathbf{Top}$ alalım. Amacımız $(\iota_X, (X, \omega_r(\mathcal{T})))$ 'nin $(X, \mathcal{T})$ kaynağına sahip evrensel ok olduğunu göstermektir. Teorem 5.5.3'nin kanıtından noktasal birim fonksiyonun sürekli olduğu açıktır. ι_r 'nin eşlenik olduğunu göstermek için sadece $(\iota_X, (X, \omega_r(\mathcal{T})))$ 'nin evrensel özelliğe sahip bir yapısal ok olduğunu göstermemiz gerekir. Bu durumda $\bar{f} : X \rightarrow Y$ olacak şekilde aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak tek bir $\mathbf{SF_r-Top}$ morfizmasının varlığını göstermek zorundayız.

$$\begin{array}{ccc}
(X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\iota_X} & (X, \iota_r(\omega_r(\mathcal{T}))) \\
& \searrow f & \downarrow \iota_r(\bar{f}) \\
& & (Y, \iota_r(V))
\end{array}$$

Açıktır ki, tek mümkün seçim $\bar{f} = f$ olmasıdır. Biz f 'nin $\omega_r(\mathcal{T})$ - V sürekliliğini göstere-
lim. $(\nu, N) \in V$ tombul ise, $(\nu, N) \in SF_r(Y)$ dır.

$r < 1$ için $(x_r, \{x\}) \in g^{-1}(\nu, N)$ olsun, Yardımcı Teorem 5.1.6'den $(f(x)_r, \{f(x)\}) \in$
 (ν, N) olur. (ν, N) 'nin tombul olmasından $(f(x)_s, \{f(x)\}) \in (\nu, N)$ olacak şekilde $\exists r <$
 $s < 1$ vardır. Böylece $(x_s, \{x\}) \in g^{-1}(\nu, N) \in \omega_r(\mathcal{T})$ elde edilir.

Böylece ι_r eşlenik olur, ve [1, Theorem 19.1]'dan ω_r 'nin ko-eşlenik olduğu sonucuna
ulaşabiliriz. $\square$

5.7. ω ve ω_r Lowen Funktorları ile Topolojik Özelliklerin Ko- runması

Önceki alt bölümde $\omega : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF} - \mathbf{Top}$ genelleştirilmiş Lowen dönüşümünün di-
tıkızlığı korumadığından fakat bu dönüşüm yerine $\omega_r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF}_r - \mathbf{Top}$ Lowen'nin
Lowen'in tombul dönüşümü alındığında ise, di-tıkızlığı koruduğundan bahsetmiştik.
Bu alt bölümde ise, ω_r dönüşümünün ayırma aksiyomlarını ve di-tıkızlığı koruduğunu
göstereceğiz.

$(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \iota)$ üzerinde $\tau_{\mathbb{I}} = \{[0, s] \mid s \in \mathbb{I}\} \cup \{\mathbb{I}\}$, $\kappa_{\mathbb{I}} = \{[0, s] \mid s \in \mathbb{I}\} \cup \{\emptyset\}$ biçiminde
tanımlı $(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ doğal di-topoloji için $\mathfrak{F}_{(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF-Ditop}$ fonktörünü düşünelim.
 $(X, \mathcal{T}) \in \mathbf{Top}$ için

$$\mathfrak{F}_{(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})}(X, \mathcal{T}) = (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X, \mathcal{T} \otimes \tau_{\mathbb{I}}, \mathcal{T}^c \otimes \kappa_{\mathbb{I}}).$$

olur. Sonuç 5.6.6'den $\mathcal{T} \otimes \tau_{\mathbb{I}} = \tau_{\omega_r(\mathcal{T})}$ ve $\mathcal{T}^c \otimes \kappa_{\mathbb{I}} = \kappa_{\omega_r(\mathcal{T})}$ olduğunu biliyoruz. Diğer
tarafтан $\mathfrak{E}_f : \mathbf{SF-Top} \rightarrow \mathbf{SF-Ditop}$ izomorfizması için,

$$\mathfrak{E}_f^{-1}(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}, \sigma_X, \tau_{\omega_r(\mathcal{T})}, \kappa_{\omega_r(\mathcal{T})}) = (X, \omega_r(\mathcal{T})).$$

eşitliği sağlanır. Sonuçta,

$$\omega_r = \mathfrak{E}_f^{-1} \circ \mathfrak{F}_{(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})},$$

ve benzer biçimde, Sonuç 5.5.5'i kullanırsak,

$$\omega = \mathfrak{E}_f^{-1} \circ \mathfrak{F}_{(\mathcal{J}, \mathcal{J})}.$$

elde edilir. $\mathfrak{E}_f^{-1}$ izomorfisma olduğu için $\mathfrak{F}_{(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})}$, $\mathfrak{F}_{(\mathcal{J}, \mathcal{J})}$, fonktörlerini sırası ile ω_r , ω fonktörleri olarak düşünebiliriz. Bu durumda doğal olarak sorulacak soru, $\mathcal{T}$ 'nin sağladığı topolojik özelliklere karşılık $(\mathcal{T} \otimes \tau_{\mathbb{I}}, \mathcal{T}^c \otimes \kappa_{\mathbb{I}})$ yada $(\mathcal{T} \otimes \mathcal{J}, \mathcal{T}^c \otimes \mathcal{J})$ 'nin di-topolojik özellikleri gerektirip gerektirmediğidir.

Şimdi biz T_0, R_0, R_1 ve düzenlilik ayırma aksiyomları ile tıklılığını inceleyeceğiz.

Öncelikle, doğal tümleyenli $(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ di-topolojik uzayın T_0 , bi- R_0 , bi- R_1 ve bi-düzenli [11], ayırma aksiyomlarına sahip olduğunu hatırlatalım, üstelik di-tıkız özelliğinin sağlar [27]. Diğer yandan, bu di-topolojiden daha ince olan $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ di-topolojisi ayırma aksiyomlarını sağlar fakat di-tıkız değildir. Gerçekten, $[0, 1)$ kümesi kapalıdır. Fakat $\{[0, 1 - \epsilon) \mid 0 < \epsilon < 1\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü yoktur, yani tıkız değildir. Böylece $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ dengeli değildir. ve bu yüzden di-tıkız değildir.

İkinci olarak, eğer $\mathcal{T}$ yukarıda bahsedilen özelliklerden birini sağlıyorsa, buna karşılık gelen $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ di-topolojik özellikleri tanımlamaya çalışacağız.

5.7.1. Yardımcı Teorem : $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ buna karşılık gelen di-topolojik doku uzay olsun. $(X, \mathcal{T})$ T_0, R_0, R_1 yada düzenli ise, $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ tümleyenli di-topolojik doku uzayıda sırasıyla T_0 , bi- R_0 , bi- R_1 , yada bi-düzenlidir.

Kanıt. $(X, \mathcal{T})$, T_0 olsun ve $Q_x \not\subseteq Q_y$ olacak şekilde $x, y \in X$ alalım. Bu durumda, $X \setminus \{x\} \not\subseteq X \setminus \{y\}$ olur ve böylece $x \neq y$ elde edilir. $(X, \mathcal{T})$, T_0 olduğundan,

$$(x \notin G \text{ ve } y \in G) \text{ yada } (x \in G \text{ ve } y \notin G).$$

olacak şekilde $G \in \mathcal{T}$ vardır. Birinci durumda $B = G \in \mathcal{T}$ ve ikinci durumda $B = X \setminus G \in \mathcal{T}^c$ alırsak, iki durumda da $P_x \not\subseteq B \not\subseteq Q_y$ ve $B \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^c$ elde edilir. Böylece $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$, T_0 dır.

$(X, \mathcal{T})$, R_0 olsun, $G \not\subseteq Q_x$ olacak şekilde $G \in \mathcal{T}$ ve $x \in X$ alırsak, $x \in G$ ve böylece $K = \overline{\{x\}} \subseteq G$ olur. $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ 'de $P_x \subseteq K \subseteq G$, $K \in \mathcal{T}^c$ elde edilir. $[P_x] \subseteq G$ olduğundan, $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$, R_0 olur. Bu uzay tümleyenli olduğu için bu, bi- R_0 özelliğiyle denktir.

$(X, \mathcal{T})$, R_1 olsun ve $G \not\subseteq Q_x$, $P_y \not\subseteq G$ olacak şekilde $G \in \mathcal{T}$, $x, y \in X$ alırsak, $x \notin \overline{\{y\}}$ olur. Böylece $(X, \mathcal{T})$, R_1 olduğundan, x ve y noktaları ayrık kümeler tarafından

kapsanır. Bu durumda $x \in H$ için $y \notin \overline{H}$ olacak biçimde $H \in \mathcal{T}$ vardır. Sonuçta, $H \not\subseteq Q_x$ ve $P_y \not\subseteq [H]$ olur. Böylece $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$, R_1 ve bi- R_1 olur.

Son olarak, $(X, \mathcal{T})$ düzenli olsun, $G \not\subseteq Q_x$ olacak şekilde $G \in \mathcal{T}$, $x \in X$ alırsak ve düzenli uzayın her noktası kapalı komşuluk tabanına sahip olduğundan, $x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$ olacak şekilde $H \in \mathcal{T}$ vardır. Bu bize $H \not\subseteq Q_x$, $[H] \subseteq G$ olduğunu verir böylece, $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ düzenli ve bi-düzenli olur. $\square$

5.7.2. Yardımcı Teorem : $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ buna karşılık gelen di-topolojik doku uzay olsun. $(X, \mathcal{T})$ tıkız ise $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ di-tıkızdır.

Kanıt. $(X, \mathcal{T})$ tıkız olsun. X 'in her kapalı alt kümesi tıkızdır, böylece $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ tıkız ve dengeli olur. Bu di-topoloji tümleyenli olduğundan, aynı zamanda ko-tıkız ve ko-dengeli olur. Böylece $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ di-tıkızdır. $\square$

T_0 , bi- R_0 , bi- R_1 , bi- R_2 , bi-düzenli ve di-tıkız di-topolojik uzayların hepsi çarpımsal olduğundan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.7.3. Teorem :

1. Lowen'in tombul fonktör ω_r R_0, R_1 , düzenli, T_0, T_1, T_2, T_3 ve tıkızlık özelliklerini korur.
2. Genelleştirilmiş Lowen fonktör ω R_0, R_1 , düzenli, T_0, T_1, T_2 ve T_3 özelliklerini korur. Fakat tıkızlığı korumaz.

Kanıt. (1) $\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji olsun, $\omega_r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF}_r - \mathbf{Top}$ dönüşümü $\omega_r(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \otimes \tau_{\mathbb{I}}$ biçimindedir. Yani $\mathbf{SF}_r - \mathbf{Top}$ üzerinde ki di-topoloji $(X, \mathcal{P}(X))$ üzerinde ki, $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ di-topoloji ile $(\mathbb{I}, \mathbb{J})$ üzerindeki $(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ di-topolojisinin çarpımıdır. Yardımcı Teorem 5.7.1 'den $(X, \mathcal{T})$, T_0, R_0, R_1 ve düzenli ise, $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^c)$ di-topolojisinin de T_0, R_0, R_1 ve düzenli olduğunu biliyoruz. $(\mathbb{I}, \mathbb{J})$ di-topolojisinin T_0, R_0, R_1 ve düzenli olduğu bilinmekte bu iki di-topolojik uzayın çarpımında Teorem 5.4.3 'den T_0, R_0, R_1 ve düzenli dir. Tıkızlık ise Yardımcı Teorem 5.7.2 'den elde edilebilir.

(2) Benzer şekilde $\omega : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SF} - \mathbf{Top}$ dönüşümünün T_0, R_0, R_1 ve düzenlilik aksiyomlarını koruduğu elde edilebilir. Fakat $(\mathbb{J}, \mathbb{J})$ di-topolojisi tıkız olmadığından ω dönüşümü tıkızlığı korumaz. $\square$

6. YUMUŞAK BELİRTİSİZ KÜMELERİN HUTTON CEBİRLERİ ARASINDAKİ Dİ-BAĞINTILAR

6.1. Bağıntı ve ko-bağıntının temsil edilmesi

Üçüncü Bölümde klasik $F(X)$, $F(Y)$ Hutton cebirler arasında bağıntı, ko-bağıntı ve di-bağıntı kavramları ele alınmıştır. Bu bölümde ise, benzer bir çalışma $SF(X)$ ve $SF(Y)$ için yapacağız. İki çalışma arasındaki temel fark, üçüncü bölümde $(X \times L, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{L})$ 'den $(Y \times L, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{L})$ 'e giden bir (r, R) di-bağıntısını temel aldığımız halde, bu bölümde (r, R) 'nin $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ 'den $(Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ 'e olmasıdır.

$$\begin{array}{c} (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \\ \downarrow (r, R) \\ (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}) \end{array}$$

$r, R \in \mathcal{P}(X \times \mathbb{I}) \otimes (\mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ olduğunu biliyoruz. Şimdi, $\mathcal{P}(X \times \mathbb{I}) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \times \mathbb{I} \times Y)$ şeklinde yazılabileceğinden,

$$r, R \in \mathcal{P}(X \times \mathbb{I}) \otimes (\mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}) = \mathcal{P}(X \times \mathbb{I} \times Y) \otimes \mathcal{J}$$

şeklini alır. Dördüncü bölümden biliyoruz ki, $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}$ latisi, $SF(X)$ latisi ile izomorftur. O halde $\mathcal{P}(X \times \mathbb{I} \times Y) \otimes \mathcal{J}$ latisi, $SF(X \times \mathbb{I} \times Y)$ latisi ile izomorftur. Böylece, r, R birer yumuşak belirtisiz küme ile temsil edilebilir. Bu yumuşak belirtisiz kümeleri sırasıyla (μ_r, M_r) , (μ_R, M_R) biçiminde gösterirsek

$$\mu_r, \mu_R : X \times \mathbb{I} \times Y \rightarrow \mathbb{I}$$

birer fonksiyon,

$$M_r, M_R \subseteq X \times \mathbb{I} \times Y$$

birer alt küme olmak üzere

$$r = \varphi_{X \times \mathbb{I} \times Y}(\mu_r, M_r) \text{ ve } R = \varphi_{X \times \mathbb{I} \times Y}(\mu_R, M_R)$$

eşitlikleri geçerlidir. $\varphi_{X \times \mathbb{I} \times Y}$ dönüşümünün tanımından aşağıdaki sonuç kolayca elde edebilir. ($\varphi_{X \times \mathbb{I} \times Y}$ kısaca φ ile gösterilecek):

6.1.1. Yardımcı Teorem : Yukardaki notasyonu kullanarak

$$\begin{aligned} r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))} &\iff ((x,s),(y,t)) \in \varphi(\mu_r, M_r) \\ &\iff t < \mu_r(x,s,y), \text{ veya } t = \mu_r(x,s,y) \text{ ve } (x,s,y) \in M_r \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{P}_{((x,s),(y,t))} \not\subseteq R &\iff ((x,s),(y,t)) \notin \varphi(\mu_R, M_R) \\ &\iff t > \mu_R(x,s,y), \text{ veya } t = \mu_R(x,s,y) \text{ ve } (x,s,y) \notin M_R. \end{aligned}$$

6.1.2. Önerme : $(r, R) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ bir di-bağıntı, $(\mu, M) \in SF(X \times \mathbb{I} \times Y)$ olsun. O halde

1. $\varphi(\mu, M) = r$ dir ancak ve ancak

- (a) $\forall (x,s,y) \in X \times \mathbb{I} \times Y$ için $\mu(x,s,y) = \sup\{t \mid ((x,s),(y,t)) \in r\}$, ve
- (b) $M = \{(x,s,y) \mid ((x,s),(y,\mu(x,s,y))) \in r\}$.

2. $\varphi(\mu, M) = R$ dir ancak ve ancak

- (a) $\forall (x,s,y) \in X \times \mathbb{I} \times Y$ için $\mu(x,s,y) = \inf\{t \mid ((x,s),(y,t)) \notin R\}$ ve
- (b) $M = \{(x,s,y) \mid ((x,s),(y,\mu(x,s,y))) \notin R\}^c$.

Kanıt: (1) Önce $\varphi(\mu, M) = r$ olsun. O halde $(\mu, M) = (\mu_r, M_r)$ ve Yardımcı Teorem 6.1.1 'e göre, $((x,s),(y,t)) \in r$ ise, $t \leq \mu(x,s,y)$ olur. Böylece

$$\sup\{t \mid ((x,s),(y,t)) \in r\} \leq \mu(x,s,y).$$

Eşitlik yoksa, $\sup\{t \mid ((x,s),(y,t)) \in r\} < t < \mu(x,s,y)$ seçilebilir. O halde Yardımcı Teorem 6.1.1 'den $((x,s),(y,t)) \in r$, böylece $t \leq \sup\{t \mid ((x,s),(y,t)) \in r\}$ çelişkisi elde edilir.

Şimdi $(x,s,y) \in M$ alalım ve $t = \mu(x,s,y)$ olsun. Yine $(\mu, M) = (\mu_r, M_r)$ olduğundan, Yardımcı Teorem 6.1.1 'den $((x,s),(y,t)) \in r$ bulunur. O halde, $((x,s),(y,\mu(x,s,y))) \in r$. Ters olarak $((x,s),(y,\mu(x,s,y))) \in r$ ve $t = \mu(x,s,y)$ olsun. $((x,s),(y,t)) \in r$ olduğundan, Yardımcı Teorem 6.1.1'i kullanarak $(x,s,y) \in M$ bulunur. O halde,

$$M = \{(x,s,y) \mid ((x,s),(y,\mu(x,s,y))) \in r\}$$

bulunur.

Şimdi (a) ve (b) sağlansın. $r = \varphi(\mu, M)$ olduğunu göstermeliyiz. $((x, s), (y, t)) \in r$ olsun. (a) 'dan $t \leq \mu(x, s, y)$ bulunur ve eğer $t = \mu(x, s, y)$ ise, (b) 'den $(x, s, y) \in M$ olur. Böylece, $\varphi(\mu, M)$ 'nın tanımından $((x, s), (y, t)) \in \varphi(\mu, M)$ bulunur. Ters olarak $((x, s), (y, t)) \in \varphi(\mu, M)$ olsun. O halde $t < \mu(x, s, y)$ yada $t = \mu(x, s, y)$ ve $(x, s, y) \in M$. Birinci durumda, (a) kullanılarak, $t < w$, $((x, s), (y, w)) \in r$ olacak biçimde bir $w \in T$ bulunur. O halde, dokunun sade olması kullanılarak, $r \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,w))}$, $Q_{(y,t)} \subseteq Q_{(y,w)}$, dolayısıyla $r \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$, yani $((x, s), (y, t)) \in r$ bulunur. İkinci durumda ise (b) 'den $((x, s), (y, t)) = ((x, s), (y, \mu(x, s, y))) \in r$ tekrar elde edilir. Böylece, $r = \varphi(\mu, M)$ dir.

(2) Kanıt, (1)'in duali olarak elde edilebilir. $\square$

Şimdi, (μ_r, M_r) , (μ_R, M_R) yumuşak belirtisiz kümelerin sağladığı karakteristik özellikleri inceleyelim. Önce, sade dokular arasındaki bağıntılar ve ko-bağıntılar için aşağıdaki genel sonucu verelim.

6.1.3. Önerme : $(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T})$ sade dokular, $\rho \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ olsun. O halde ρ bir bağıntıdır ancak ve ancak ρ bir ko-bağıntıdır.

Kanıt Bağıntıların sağladığı R1, R2 koşulları ile ko-bağıntıların sağladığı CR1, CR2 koşulları Tanım 2.4.1 'de verilmiştir. İlk dikkat edilecek nokta, sade dokular için R2 ve CR2 koşulları her zaman gerçekleşir çünkü $s' = s$ alırsak bu koşullar her zaman geçerli olur. O halde, R1 ile CR1 koşulların denk olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Önce, ρ için R1 koşulunun sağlandığını ama CR1 koşulunun sağlanmadığı kabul edelim. O halde öyle $s, s' \in S$, $t \in T$ vardır ki $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \rho$, $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ve $\overline{P}_{(s',t)} \subseteq \rho$ dir. Şimdi, $(S, \mathcal{S})$ sade olduğundan $\overline{P}_{(s',t)} \subseteq \rho$ ile $\rho \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}$ denktir (Yardımcı Teorem 2.2.6). Böylece R1 özelliğinden $\rho \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$, dolayısıyla $\overline{P}_{(s,t)} \subseteq \rho$ çelişkisi elde edilir.

CR1 sağlandığı zaman R1'in de sağlandığını gösteren benzer bir kanıt verilebilir. $\square$

Önerme 6.1.2 ile Önerme 6.1.3 birlikte aşağıdaki sonucu hemen verir.

6.1.4. Sonuç : $\rho \in \mathcal{P}((X \times \mathbb{I})) \otimes (\mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{T})$ bir bağıntı, dolayısıyla bir ko-bağıntı ise, $\varphi(\mu_\rho, M_\rho) = \rho$ eşitliğini sağlayan (μ_ρ, M_ρ) yumuşak belirtisiz kümesi için aşağıdaki

eşitlikler geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\mu_\rho(x, s, y) &= \sup\{t \mid ((x, s), (y, t)) \in \rho\} \\
&= \inf\{t \mid ((x, s), (y, t)) \notin \rho\}, \\
M_\rho &= \{(x, s, y) \mid ((x, s), (y, \mu_\rho(x, s, y))) \in \rho\} \\
&= \{(x, s, y) \mid ((x, s), (y, \mu_\rho(x, s, y))) \notin \rho\}^c
\end{aligned}$$

Uygulamalarda genelde bu eşitlilerin sadece bir tanesinden faydalanılacaktır, ama diğeri daima bir alternatif olarak kullanılabilir.

6.1.5. Örnek : $(i, I) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ olan birim di-bağıntısını göz önüne alalım. Tanımdan $i \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ dir ancak ve ancak $P_{(x,s)} \not\subseteq Q_{(y,t)}$ dir. Böylece, sadelikten yararlanarak $((x, s), (y, t)) \in i \iff (y = x) \text{ ve } t \leq s$ dir. Önerme 6.1.2 (1) 'deki eşitliklerden yararlanacağız. Açıkça $\{t \mid ((x, s), (y, t)) \in i\}$ kümesi $y \neq x$ için boş, $y = x$ için $\{t \mid t \leq s\}$ dir. Böylece $\mu_i(x, s, y) = \sup\{t \mid ((x, s), (y, t)) \in i\}$ eşitliğinden,

$$\mu_i(x, s, y) = \begin{cases} s & \text{eğer } y = x, \\ 0 & \text{eğer } y \neq x \end{cases}$$

bulunur. Diğer taraftan $((x, s), (y, \mu_i(x, s, y))) \in i$ dir ancak ve ancak $y = x$ ve $\mu_i(x, s, y) \leq s$ dir. $y = x$ için $\mu_i(x, s, y) = s$ olduğu için bu ek bir kısıtlama getirmiyor. O halde,

$$M_i = \{(x, s, x) \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\}$$

elde edilir. Benzer biçimde $((x, s), (y, t)) \notin I \iff (x = y) \text{ ve } s \leq t$ bulunur. Bu defa Önerme 6.1.2 (2) 'deki eşitliklerden yararlanmak daha uygun olacaktır. Bu durumda $\{t \mid ((x, s), (y, t)) \notin I\}$ kümesi $y \neq x$ için boş, $y = x$ için $\{t \mid s \leq t\}$ dir. Böylece $\mu_I(x, s, t) = \inf\{t \mid ((x, s), (y, t)) \notin I\}$ eşitliğinden,

$$\mu_I(x, s, y) = \begin{cases} s & \text{eğer } y = x, \\ 1 & \text{eğer } y \neq x \end{cases}$$

bulunur. Diğer taraftan $((x, s), (y, \mu_I(x, s, y))) \notin I$ dir ancak ve ancak $y = x$ ve $s \leq \mu_I(x, s, y)$ dir. $y = x$ için $\mu_I(x, s, y) = s$ olduğu için bu ek bir kısıtlama getirmiyor. O halde,

$$M_I = \{(x, s, x) \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\}^c$$

elde edilir.

6.1.6. Önerme : $(r, R) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ bir di-bağıntıdır ancak ve ancak (μ_r, M_r) yumuşak belirtisiz alt kümesi, $\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall s, s' \in \mathbb{I}$ için

$$s \leq s' \implies \mu_r(x, s, y) \leq \mu_r(x, s', y),$$

$$s \leq s', \mu_r(x, s, y) = \mu_r(x, s', y), (x, s, y) \in M_r \implies (x, s', y) \in M_r$$

koşullarını ve (μ_R, M_R) yumuşak belirtisiz alt kümesi ise, $\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall s, s' \in \mathbb{I}$ için

$$s \leq s' \implies \mu_R(x, s, y) \leq \mu_R(x, s', y),$$

$$s \leq s', \mu_R(x, s, y) = \mu_R(x, s', y), (x, s, y) \in M_R \implies (x, s', y) \in M_R$$

koşullarını sağlar.

Kanıt: Önerme 6.1.2 'e göre (μ_r, M_r) için kanıt vermek yeterli olacaktır. Ayrıca, Önerme 6.1.2 'nin kanıtında gördüğümüz gibi sadece R_1 koşulunu ele almamız yeterli olacaktır. Varsayalım ki, $s \leq s'$ olduğu halde, $\mu_r(x, s, y) > \mu_r(x, s', y)$ olsun. O halde $\mu_r(x, s', y) < t < \mu_r(x, s, y)$ için, Yardımcı Teorem 6.1.1 kullanılarak, $r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ bulunur. Diğer taraftan, $s \leq s'$ olduğuna göre $P_{(x,s')} \not\subseteq Q_{(x,s)}$ olup, R_1 'den $r \notin \overline{Q}_{((x,s'),(y,t))}$, dolayısıyla $t \leq \mu_r(x, s', y)$ çeliskisi Yardımcı Teorem 6.1.1 'den elde edilir.

Şimdi $s \leq s', \mu_r(x, s, y) = \mu_r(x, s', y), (x, s, y) \in M_r$ olsun. O halde, $t = \mu_r(x, s, y)$ için $r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ olup, yukarıda olduğu gibi $r \notin \overline{Q}_{((x,s'),(y,t))}$ bulunur. Böylece, $t = \mu_r(x, s', y)$ olduğu için $(x, s', y) \in M_r$, Yardımcı Teorem 6.1.1 'den elde edilir.

Ters olarak, verilen koşullar (μ_r, M_r) için sağlansın. $r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}, P_{(x,s')} \not\subseteq Q_{(x,s)}$ olsun. O halde $s \leq s'$ ve $t < \mu_r(x, s, y)$ veya $t = \mu_r(x, s, y), (x, s, y) \in M_r$ dir. Varsayımımıza göre $\mu_r(x, s, y) \leq \mu_r(x, s', y)$ olur. Böylece $t < \mu_r(x, s', y)$ ise, $r \notin \overline{Q}_{((x,s'),(y,t))}$. Aksi taktirde $t = \mu_r(x, s, y) = \mu_r(x, s', y), (x, s, y) \in M_r$ olup, varsayımdan $(x, s', y) \in M_r$ bulunur ve yine $r \notin \overline{Q}_{((x,s'),(y,t))}$ olur. O halde r, R_1 koşulunu sağlıyor ve böylece r bir bağıntıdır. $\square$

Yukardaki sonucu göz önüne alarak, aşağıdaki tanım verilebilir.

6.1.7. Tanım : $(\phi, f), (\Phi, F) \in SF(X \times \mathbb{I} \times Y)$ olsun.

1. Eğer $\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall s, s' \in \mathbb{I}$ için

$$s \leq s' \implies \phi(x, s, y) \leq \phi(x, s', y),$$

$$s \leq s', \phi(x, s, y) = \phi(x, s', y), (x, s, y) \in f \implies (x, s', y) \in f$$

koşulları sağlanıyorsa (ϕ, f) 'ye $SF(X)$ 'den $SF(Y)$ 'e bir *bağıntı* denir.

2. Eğer $\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall s, s' \in \mathbb{I}$ için

$$s \leq s' \implies \Phi(x, s, y) \leq \Phi(x, s', y),$$

$$s \leq s', \Phi(x, s, y) = \Phi(x, s', y), (x, s, y) \in F \implies (x, s', y) \in F$$

koşulları sağlanıyorsa (Φ, F) 'ye $SF(X)$ 'den $SF(Y)$ 'e *ko-bağıntı* denir.

3. (ϕ, f) bağıntı, (Φ, F) ko-bağıntı ise, $((\phi, f), (\Phi, F))$ çiftine $SF(X)$ 'den $SF(Y)$ 'e *di-bağıntı* denir.

Uyarı. Önerme 6.1.2 'den beklediğimiz gibi bağıntılar ve ko-bağıntılar aynı koşulları sağlıyor. Ancak, bağıntılar ve ko-bağıntılar için tanımlanan işlemler farklı olduğundan arasındaki ayırımın yinede gözetilmesi gerekiyor.

6.1.8. Tanım : $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ üzerindeki birim (i, I) di-bağıntısına karşılık gelen $SF(X)$ üzerindeki $((\mu_i, M_i), (\mu_I, M_I))$ di-bağıntısına *birim di-bağıntı* adı verilir.

Şimdi ters bağıntı ve ters ko-bağıntı kavramlarının yumuşak belirtisiz kümelerdeki karşılığını vermeye çalışacağız. Önce sade dokular için aşağıdaki sonucu verelim.

6.1.9. Yardımcı Teorem : $(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T})$ sade, $\rho \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ olsun. O halde ρ 'un bağıntı olarak hesaplanan tersi ile ρ 'un ko-bağıntı olarak hesaplanan tersi birbirine eşittir.

Kanıt: Tanım 2.4.3 (1) 'e göre ρ bir bağıntı olarak ele alınırsa, tersi $\alpha = \bigcap \{\overline{Q}_{(t,s)} \mid \rho \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}\}$, ve Tanım 4.2.3 (2) 'e göre ρ bir ko-bağıntı olarak ele alınırsa tersi $\beta = \bigcup \{\overline{P}_{(t,s)} \mid \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \rho\}$ dir. O halde, $\alpha = \beta$ olduğunu göstermeliyiz.

Önce $\beta \not\subseteq \alpha$ olduğunu varsayalım. O halde $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \rho, \overline{P}_{(t,s)} \not\subseteq \overline{Q}_{(t,s')}, \rho \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}$ olacak biçimde $s, s' \in S$ ve $t \in T$ vardır. Bu durumda $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ve ρ için R1 koşulu $\rho \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ 'yi verir. Bu ise, $\rho \subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ile çelişir.

Ters olarak $\alpha \not\subseteq \beta$ olsun. O halde $\alpha \not\subseteq \overline{Q}_{(v,u)}, \overline{P}_{(v,u)} \not\subseteq \beta$ biçimde $u \in S, v \in T$ vardır. Şimdi $\rho \subseteq \overline{Q}_{(u,v)}, \overline{P}_{(u,v)} \subseteq \rho$ olur, ve $(S \times T, \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T})$ dokusu sade olduğundan bu bir çelişkidir. $\square$

6.1.10. Teorem : $(r, R) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ bir di-bağıntı, $((\mu_r, M_r), (\mu_R, M_R)) : SF(X) \rightarrow SF(Y)$ karşı gelen di-bağıntı olmak üzere, $(r, R)^\leftarrow = (R^\leftarrow, r^\leftarrow)$ ters di-bağıntı ve $((\mu_{R^\leftarrow}, M_{R^\leftarrow}), (\mu_{r^\leftarrow}, M_{r^\leftarrow})) : SF(Y) \rightarrow SF(X)$ karşılık gelen di-bağıntısı ise,

$$\mu_{R^\leftarrow}(y, t, x) = \sup\{s \mid t > \mu_R(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_R(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \notin M_R\},$$

$$M_{R^\leftarrow} = \{(y, t, x) \mid s = \mu_{R^\leftarrow}(y, t, x) \text{ için } t > \mu_R(x, s, t), \\ \text{veya } t = \mu_R(x, s, t) \text{ ve } (x, s, t) \notin M_R\},$$

$$\mu_{r^\leftarrow}(y, t, x) = \inf\{s \mid t < \mu_r(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, t) \in M_r\},$$

$$M_{r^\leftarrow} = \{(y, t, x) \mid s = \mu_{r^\leftarrow}(y, t, x) \text{ için } t < \mu_r(x, s, y), \\ \text{veya } t = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_r\}^c$$

dir.

Kanıt: Önerme 6.1.2 (1), $R^\leftarrow$ için kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mu_{R^\leftarrow}(y, t, x) &= \sup\{s \mid ((y, t), (x, s)) \in R^\leftarrow\} \\ &= \sup\{s \mid ((x, s), (y, t)) \notin R\} \\ &= \sup\{s \mid t > \mu_R(x, s, t), \text{ veya } t = \mu_R(x, s, t) \text{ ve } (x, s, t) \notin M_R\} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $s = \mu_{R^\leftarrow}(y, t, x)$ alınırsa,

$$M_{R^\leftarrow} = \{(y, t, x) \mid ((y, t), (x, s)) \in R^\leftarrow\} = \{(y, t, x) \mid ((x, s), (y, t)) \notin R\}$$

bulunur. Böylece $M_{R^\leftarrow} = \{(y, t, x) \mid s = \mu_{R^\leftarrow}(y, t, x) \text{ için } t > \mu_R(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_R(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \notin M_R\}$.

Diğer eşitlikler, Önerme 6.1.2 (2), $r^\leftarrow$ için aynı biçimde uygulanarak kanıtlanabilir. $\square$

Tabii ki, Sonuç 6.1.4 kullanırsak, $((\mu_{R^\leftarrow}, M_{R^\leftarrow}), (\mu_{r^\leftarrow}, M_{r^\leftarrow}))$ için alternatif formüller bulunabilir.

Yukardaki sonuçları gözününe alarak, aşağıdaki tanım verilebilir.

6.1.11. Tanım : $((\phi, f), (\Phi, F))$, $SF(X)$ 'den $SF(Y)$ 'e bir di-bağıntı ise, $SF(Y)$ 'den $SF(X)$ 'e olan $((\phi, f), (\Phi, F))^\leftarrow = (\Phi^\leftarrow, F^\leftarrow), (\phi^\leftarrow, f^\leftarrow))$ ters di-bağıntısı aşağıdaki

eşitliklerle tanımlanır:

$$\begin{aligned}\Phi^{\leftarrow}(y, t, x) &= \sup\{s \mid t > \Phi(x, s, y), \text{ veya } t = \Phi(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \notin F\}, \\ F^{\leftarrow} &= \{(y, t, x) \mid s = \Phi^{\leftarrow}(y, t, x) \text{ için } t > \Phi(x, s, t), \\ &\quad \text{veya } t = \Phi(x, s, t) \text{ ve } (x, s, t) \notin F\}, \\ \phi^{\leftarrow}(y, t, x) &= \inf\{s \mid t < \phi(x, s, y), \text{ veya } t = \phi(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in f\}, \\ f^{\leftarrow} &= \{(y, t, x) \mid s = \phi^{\leftarrow}(y, t, x) \text{ için } t < \phi(x, s, y), \\ &\quad \text{veya } t = \phi(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in f\}^c\end{aligned}$$

$SF(X)$ üzerindeki bir $((\phi, f), (\Phi, F))$ di-bağıntısı için $((\phi, f), (\Phi, F))^{\leftarrow} = ((\phi, f), (\Phi, F))$ eşitliği sağlanıyorsa bu bağıntıya *simetrik* denir.

6.1.12. Örnek : (i, I) birim di-bağıntısı için $i^{\leftarrow} = I$ olduğu biliniyor. O halde $\mu_i^{\leftarrow} = \mu_I$, $M_i^{\leftarrow} = M_I$ olacaktır. Bunu, yukardaki tanımı kullanarak kontrol edebiliriz. Gerçekten

$$\mu_i^{\leftarrow}(y, t, x) = \inf\{s \mid t < \mu_i(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_i(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_i\}$$

olup, Örnek 6.1.5 'e göre $\{s \mid t < \mu_i(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_i(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_i\}$ kümesi $y \neq x$ için boş, $y = x$ için $\{s \mid t \leq s\}$ dir. Böylece $\mu_i^{\leftarrow}(x, t, x) = t$, $y \neq x$ için $\mu_i^{\leftarrow}(y, t, x) = 1$ dir. O halde, $\mu_i^{\leftarrow} = \mu_I$ dir. Diğer taraftan, $M_i^{\leftarrow} = \{(y, t, x) \mid s = \mu_i^{\leftarrow}(y, t, x) \text{ için } t < \mu_i(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_i(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_i\}^c$ dir. $x = y$ için ilgili koşul herhangi bir $t \in \mathbb{I}$ için geçerlidir, $y \neq x$ için geçersizdir. Böylece, $M_i^{\leftarrow} = \{(y, t, y) \mid y \in X, t \in \mathbb{I}\} = M_I$ bulunur.

O halde, $((\mu_i, M_i), (\mu_I, M_I))$, $SF(X)$ üzerinde simetrik bir di-bağıntıdır.

6.1.13. Örnek : $X = \{a, b\}$, $Y = \{c\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi(a, r, c) &= \frac{r}{2}, \quad \phi(b, r, c) = \frac{1}{3}, \text{ ve} \\ f &= \{(a, r, c) \mid \frac{1}{4} \leq r \leq 1\} \cup \{(b, r, c) \mid r \geq \frac{3}{4}\}\end{aligned}$$

olsun bu durumda

$$\begin{aligned}\phi^{\leftarrow}(c, t, a) &= \inf\{s \mid t < \phi(a, s, c), \text{ veya } t = \phi(a, s, c) \text{ ve } (a, s, c) \in f\} \\ &= \inf\{s \mid t < \frac{s}{2}, \text{ veya } t = \frac{s}{2} \text{ ve } (a, s, c) \in f\} \\ &= \inf\{s \mid 2t < s, \text{ veya } 2t = s \text{ ve } \frac{1}{4} \leq s \leq 1\} \\ &= 2t \wedge 1.\end{aligned}$$

bulunur ve benzer biçimde

$$\begin{aligned}\phi^{\leftarrow}(c, t, b) &= \inf\{s \mid t < \frac{1}{3}, \text{ veya } t = \frac{1}{3} \text{ ve } s > \frac{3}{4}\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{eğer } 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \text{eğer } t = \frac{1}{3} \\ 1 & \text{eğer } \frac{1}{3} < t \leq 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

dir. Son olarak

$$\begin{aligned}f^{\leftarrow} &= \{(y, t, x) \mid s = \phi^{\leftarrow}(y, t, x) \text{ için } t < \phi(x, s, y), \\ &\text{veya } t = \phi(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in f\}^c,\end{aligned}$$

ve $y = c, x = a$ ile $y = c, x = b$ durumları ayrı ayrı ele alınıp

$$f^{\leftarrow} = (\{(c, t, a) \mid \frac{1}{8} \leq t \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(c, t, b) \mid 0 \leq t \leq \frac{1}{3}\})^c$$

elde edilir.

Şimdi bağıntıların bileşkesi kavramının yumuşak belirtisiz küme kavramındaki karşılığını vermeye çalışacağız.

6.1.14. Önerme : $(r_1, R_1) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}), (r_2, R_2) : (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Z \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Z) \otimes \mathcal{J})$ di-bağıntılar, $((\mu_{r_1}, M_{r_1}), (\mu_{R_1}, M_{R_1})) : SF(X) \rightarrow SF(Y), ((\mu_{r_2}, M_{r_2}), (\mu_{R_2}, M_{R_2})) : SF(Y) \rightarrow SF(Z)$ karşı gelen di-bağıntılar olsun. O halde

$$\begin{aligned}\mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z) &= \sup\{\mu_{r_2}(y, t, z) \mid t < \mu_{r_1}(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_{r_1}(x, s, y), (x, s, y) \in M_{r_1}\}, \\ M_{r_2 \circ r_1} &= \{(x, s, z) \mid \exists y, t \text{ öyle ki } (t < \mu_{r_1}(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_{r_1}(x, s, y), \\ &\quad (x, s, y) \in M_{r_1}) \text{ ve } \mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z) = \mu_{r_2}(y, t, z), (y, t, z) \in M_{r_2}\}, \\ \mu_{R_2 \circ R_1}(x, s, z) &= \inf\{\mu_{R_2}(y, t, z) \mid t > \mu_{R_1}(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_{R_1}(x, s, y), (x, s, y) \notin M_{R_1}\} \\ M_{R_2 \circ R_1} &= \{(x, s, z) \mid \exists y, t \text{ öyle ki } (t > \mu_{R_1}(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_{R_1}(x, s, y), \\ &\quad (x, s, y) \notin M_{R_1}) \text{ ve } \mu_{R_2 \circ R_1}(x, s, z) = \mu_{R_2}(y, t, z), (y, t, z) \notin M_{R_2}\}^c\end{aligned}$$

dir.

Kanıt: Önerme 6.1.2 (1) 'e göre

$$\mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z) = \sup\{w \mid ((x, s), (z, w)) \in r_2 \circ r_1\}$$

dir. Şimdi, Tanım 2.4.10 ve sadelikten yararlanarak, $((x, s), (z, w)) \in r_2 \circ r_1$ dir ancak ve ancak $((x, s), (y, t)) \in r_1$, $((y, t), (z, w)) \in r_2$ olacak biçimde $(y, t) \in Y \times \mathbb{I}$ vardır. O halde $\mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z) = \sup\{w \mid \exists (y, t), ((x, s), (y, t)) \in r_1 \text{ ve } ((y, t), (z, w)) \in r_2\}$. $\alpha = \sup\{\mu_{r_2}(y, t, z) \mid t < \mu_{r_1}(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_{r_1}(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_{r_1}\}$ olsun.

Önce, $((x, s), (y, t)) \in r_1$ ve $((y, t), (z, w)) \in r_2$ koşulları altında $t < \mu_{r_1}(x, s, y)$, veya $t = \mu_{r_1}(x, s, y)$, $(x, s, y) \in M_{r_1}$, ayrıca $w \leq \mu_{r_2}(y, t, z)$ olur. O halde

$$\mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z) \leq \alpha.$$

dir. Eşitlik yoksa, $\mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z) < w < \alpha$ seçebiliriz. Ama, bu durumda $w \leq \mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z)$ kolayca elde edilir ve bu bir çelişkidir.

Şimdi, Önerme 6.1.2 (1) 'den

$$\begin{aligned} M_{r_2 \circ r_1} &= \{(x, s, z) \mid ((x, s), (z, \mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z))) \in r_2 \circ r_1\} \\ &= \{(x, s, z) \mid \exists (y, t) \text{ öyle ki } ((x, s), (y, t)) \in r_1, ((y, t), (z, \mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z))) \in r_2\} \\ &= \{(x, s, z) \mid \exists y, t \text{ öyle ki } (t < \mu_{r_1}(x, s, y), \text{ veya } t = \mu_{r_1}(x, s, y), \\ &\quad (x, s, y) \in M_{r_1}) \text{ ve } \mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z) = \mu_{r_2}(y, t, z), (y, t, z) \in M_{r_2}\}, \end{aligned}$$

olur çünkü verilen koşullar altında $\mu_{r_2}(y, t, z) \leq \mu_{r_2 \circ r_1}(x, s, z)$ dir.

Diğer eşitlikler, Önerme 6.1.2 (2) kullanılarak benzer biçimde kanıtlanabilir. $\square$

6.1.15. Tanım : $((\phi_1, f_1), (\Phi_1, F_1)) : SF(X) \rightarrow SF(Y)$, $((\phi_2, f_2), (\Phi_2, F_2)) : SF(Y) \rightarrow SF(Z)$ di-bağıntılar olsun. O halde $((\phi_2, f_2), (\Phi_2, F_2)) \circ ((\phi_1, f_1), (\Phi_1, F_1)) = ((\phi_2 \circ \phi_1, f_2 \circ f_1), (\Phi_2 \circ \Phi_1, F_2 \circ F_1)) : SF(X) \rightarrow SF(Z)$ bileşkesi aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\phi_2 \circ \phi_1(x, s, z) = \sup\{\phi_2(y, t, z) \mid t < \phi_1(x, s, y), \text{ veya } t = \phi_1(x, s, y), (x, s, y) \in f_1\},$$

$$f_2 \circ f_1 = \{(x, s, z) \mid \exists y, t \text{ öyle ki } (t < \phi_1(x, s, y), \text{ veya } y = \phi_1(x, s, y),$$

$$(x, s, y) \in f_1) \text{ ve } \phi_2 \circ \phi_1(x, s, z) = \phi_2(y, t, z), (y, t, z) \in f_2\},$$

$$\Phi_2 \circ \Phi_1(x, s, z) = \inf\{\Phi_2(y, t, z) \mid t > \Phi_1(x, s, y), \text{ veya } t = \Phi_1(x, s, y), (x, s, y) \notin F_1\}$$

$$F_2 \circ F_1 = \{(x, s, z) \mid \exists y, t \text{ öyle ki } (t > \Phi_1(x, s, y), \text{ veya } t = \Phi_1(x, s, y),$$

$$(x, s, y) \notin F_1) \text{ ve } \Phi_2 \circ \Phi_1(x, s, z) = \Phi_2(y, t, z), (y, t, z) \notin F_2\}^c$$

6.1.16. Tanım : Eğer $SF(X)$ üzerindeki $((\phi, f), (\Phi, F))$ di-bağıntısı $((\phi, f), (\Phi, F)) \circ ((\phi, f), (\Phi, F)) \sqsubseteq ((\phi, f), (\Phi, F))$ biçiminde ise, *geçişkendir* denir.

Şimdi kesit ve önkesit kavramlarını, Yumuşak Belirtisiz Küme kavramında karakterize etmeye çalışalım. Daha önce Tanım 2.4.5'te genel doku uzaylarındaki bir di-bağıntının kesit tanımı verilmişti bu tanımdan yararlanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

6.1.17. Teorem : $(r, R) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ bir di-bağıntı, bu di-bağıntıya karşı gelen $SF(X)$ 'den $SF(Y)$ 'ye di-bağıntıyı $((\mu_r, M_r), (\mu_R, M_R))$ olsun. Bu durumda, $(\mu, M) \in SF(X)$ olmak üzere, aşağıdaki karakterizasyonlar vardır.

$$1. \quad r^\rightarrow \varphi(\mu, M) = \varphi(\nu, N) \in (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$$

$$\begin{aligned} \nu(y) = \sup\{t \mid \exists (x, s) \in X \times \mathbb{I}, (t < \mu_r(x, s, y) \text{ veya } t = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_r) \\ \text{ve } (s < \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x) \text{ ve } x \in M)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = \{y \mid \exists (x, s), (\nu(y) = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_r) \text{ ve} \\ (s < \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x) \text{ ve } x \in M)\} \end{aligned}$$

$$2. \quad R^\rightarrow \varphi(\mu, M) = \varphi(\nu, N) \in (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$$

$$\begin{aligned} \nu(y) = \inf\{t \mid \exists (x, s) \in X \times \mathbb{I}, ((x, s), (y, t)) \notin R \text{ ve } (x, s) \notin \varphi(\mu, M)\} \\ = \inf\{t \mid \exists (x, s) \in X \times \mathbb{I}, (t > \mu_r(x, s, y) \text{ veya } t = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \notin M_R) \\ \text{ve } (s > \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x) \text{ ve } x \notin M)\} \end{aligned}$$

Kanıt: (1)

$$\begin{aligned} r^\rightarrow \varphi(\mu, M) = \bigcap \{Q_{(y,t)} \mid \forall (x, s) \in X \times \mathbb{I}, \varphi(\mu_r, M_r) \not\subseteq Q_{(x,s)(y,t)} \\ \implies \varphi(\mu, M) \subseteq Q_{(x,s)}\} \end{aligned}$$

olduğundan, $\varphi(\nu, N) \not\subseteq Q_{(y,t)}$ dir ancak ve ancak $\exists (x, s)$ öyleki $r \not\subseteq \overline{Q}_{((x,s),(y,t))}$ ve $\varphi(\mu, M) \not\subseteq Q_{(x,s)}$ dir.

Böylece,

$$\begin{aligned} (y, t) \in \varphi(\nu, N) &\iff \exists (x, s), ((x, s), (y, t)) \in r \text{ ve } (x, s) \in \varphi(\mu, M) \\ &\iff \exists (x, s), t < \mu_r(x, s, y) \text{ veya } t = \mu_r(x, s, y) \\ &\text{ve } (x, s, y) \in M_r \text{ ve } s < \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x) \text{ ve } x \in M \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \nu(y) = \sup\{t \mid \exists (x, s) \in X \times \mathbb{I}, (t < \mu_r(x, s, y) \text{ veya } t = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_r) \\ \text{ve } (s < \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x) \text{ ve } x \in M)\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} N &= \{y \mid (y, \nu(y)) \in \varphi(\nu, N)\} \\ &= \{y \mid \exists (x, s), (\nu(y) < \mu_r(x, s, y) \text{ veya } \nu(y) = \mu_r(x, s, y) \text{ ve} \\ &\quad (x, s, y) \in M_r) \text{ ve } (s < \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x) \text{ ve } x \in M)\} \\ &= \{y \mid \exists (x, s), (\nu(y) = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_r) \\ &\quad \text{ve } (s < \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x) \text{ ve } x \in M)\} \end{aligned}$$

Çünkü, $\nu(y) < \mu_r(x, s, y)$ durumunda $\nu(y) < t < \mu_r(x, s, y)$ olacak şekilde bir t seçebiliriz. Ancak bu $t \leq \nu(y)$ oluşu ile çelişir.

(2)

$$\begin{aligned} R \rightarrow \varphi(\mu, M) &= \bigvee \{P_{(y,t)} \mid \forall (x, s) \in X \times \mathbb{I}, P_{(x,s)(y,t)} \not\subseteq \varphi(\mu_R, M_R) \\ &\implies P_{(x,s)} \subseteq \varphi(\mu, X)\} \end{aligned}$$

olduğundan, $P_{(y,t)} \not\subseteq \varphi(\nu, N)$ dir ancak ve ancak $\overline{P}_{((x,s),(y,t))} \not\subseteq R$ ve $P_{(x,s)} \not\subseteq \varphi(\nu, M)$ olacak biçimde $(x, s) \in X \times \mathbb{I}$ vardır.

Böylece,

$$\begin{aligned} \nu(y) &= \inf\{t \mid \exists (x, s) \in X \times \mathbb{I}, ((x, s), (y, t)) \notin R \text{ ve } (x, s) \notin \varphi(\mu, M)\} \\ &= \inf\{t \mid \exists (x, s) \in X \times \mathbb{I}, (t > \mu_r(x, s, y) \text{ veya } t = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \notin M_R) \\ &\quad \text{ve } (s > \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x) \text{ ve } x \notin M)\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} N &= \{y \mid (y, \nu(y)) \notin \varphi(\nu, N)\}^c \\ &= \{y \mid \exists (x, s) \in X \times \mathbb{I}, \nu(y) = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \notin M_R \\ &\quad \text{ve } s > \mu(x) \text{ veya } s = \mu(x), x \notin M\}^c \end{aligned}$$

Benzer bir şekilde, ön kesit için de bir karakterizasyon vermek istiyoruz. Önkesit tanımı daha önce Tanım 2.4.8'de verilmiştir. Bu tanımdan yararlanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

6.1.18. Teorem : (r, R) $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$ 'dan $(Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ 'ya bir di-bağıntı olsun ve bu di-bağıntıya karşılık gelen $SF(X)$ 'den $SF(Y)$ 'ye di-bağıntısını $((\mu_r, M_r), (\mu_R, M_R))$ ile gösterelim. Bu durumda $(\nu, N) \in SF(Y)$ olmak üzere, aşağıdaki karakterizasyonlar vardır:

$$1. \quad r^{\leftarrow} \varphi(\nu, N) = \varphi(\mu, M) \in (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \inf \{s \mid \exists y \in Y, \nu(y) < \mu_r(x, s, y) \text{ veya } \nu(y) = \mu_r(x, s, y), \\ &\quad (x, s, y) \in M_r \text{ ve } y \notin N\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid \exists y \in Y, \nu(y) < \mu_r(x, \mu(x), y) \text{ veya } \nu(y) = \mu_r(x, \mu(x), y), \\ &\quad (x, \mu(x), y) \in M_r \text{ ve } y \notin N\}^c \end{aligned}$$

$$2. \quad R^{\leftarrow} \varphi(\nu, N) = \varphi(\mu, M) \in (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \sup \{s \mid \exists y \in Y, \nu(y) < \mu_r(x, s, y) \text{ veya } \nu(y) = \mu_r(x, s, y), \\ &\quad (x, s, y) \in M_r \text{ ve } y \notin N\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid \exists y \in Y, \mu_R(x, \mu(x), y) < \nu(y) \text{ veya } \mu_R(x, \mu(x), y) = \nu(y), \\ &\quad (x, \mu(x), y) \notin M_r \text{ ve } y \in N\} \end{aligned}$$

Kanıt:(1)

$$\begin{aligned} r^{\leftarrow} \varphi(\nu, N) &= \bigvee \{P_{(x,s)} \mid \forall (y, t) \in Y \times \mathbb{I}, r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))} \\ &\quad \Rightarrow P_{(y,t)} \subseteq \varphi(\nu, N)\} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$P_{(x,s)} \not\subseteq \varphi(\mu, M) \iff r \notin \overline{Q}_{((x,s),(y,t))} \text{ ve } P_{(y,t)} \not\subseteq \varphi(\nu, N)$$

olcak biçimde $(y, t) \in Y \times \mathbb{I}$ vardır. Böylece,

$$(x, s) \not\subseteq \varphi(\mu, M) \iff \exists (y, t) \in Y \times \mathbb{I}, ((x, s), (y, t)) \in r \text{ ve } (y, t) \not\subseteq \varphi(\nu, N)$$

elde ederiz ve buradan,

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \inf\{s \mid (x, s) \notin \varphi(\mu, M)\} \\
&= \inf\{s \mid \exists (y, t) \in Y \times \mathbb{I}, ((x, s), (y, t)) \in r \text{ ve } (y, t) \notin \varphi(\nu, N) \\
&= \inf\{s \mid \exists (y, t) \in Y \times \mathbb{I}, (t < \mu_r(x, s, y) \text{ veya } t = \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_r) \\
&\quad \text{ve } (t > \nu(y) \text{ veya } t = \nu(y) \text{ ve } y \notin N)\} \\
&= \inf\{s \mid \exists y \in Y, \nu(y) < \mu_r(x, s, y) \text{ veya } \nu(y) = \mu_r(x, s, y), \\
&\quad (x, s, y) \in M_r \text{ ve } y \notin N\}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ayrıca,

$$\begin{aligned}
M &= \{x \mid (x, \mu(x)) \notin \varphi(\mu, M)\}^c \\
&= \{x \mid \exists y \in Y, \nu(y) < \mu_r(x, \mu(x), y) \text{ veya } \nu(y) = \mu_r(x, \mu(x), y), \\
&\quad (x, \mu(x), y) \in M_r \text{ ve } y \notin N\}^c \text{ dir.}
\end{aligned}$$

(2)

$$R^{\leftarrow} \varphi(\nu, N) = \bigcap \{Q_{(x,s)} \mid \forall (y, t), \bar{P}_{((x,s),(y,t))} \not\subseteq R \implies \varphi(\nu, N) \subseteq Q_{(y,t)}\}$$

olduğundan,

$$\varphi(\mu, M) \not\subseteq Q_{(x,s)} \iff \bar{P}_{((x,s),(y,t))} \not\subseteq R \text{ ve } \varphi(\nu, N) \not\subseteq Q_{(y,t)}$$

olacak biçimde $(y, t) \in Y \times \mathbb{I}$ vardır. Böylece

$$(x, s) \in \varphi(\mu, M) \iff (x, s), (y, t) \not\subseteq R \text{ ve } (y, t) \in \varphi(\nu, N)$$

elde ederiz ve buradan,

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \sup\{s \mid (x, s) \in \varphi(\mu, M)\} \\
&= \sup\{s \mid \exists (y, t) \in Y \times \mathbb{I}, ((x, s), (y, t)) \notin R \text{ ve } (y, t) \in \varphi(\nu, N) \\
&= \sup\{s \mid \exists (y, t) \in Y \times \mathbb{I}, (t > \mu_R(x, s, y) \text{ veya } t = \mu_R(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \notin M_R) \\
&\quad \text{ve } (t < \nu(y) \text{ veya } t = \nu(y) \text{ ve } y \in N)\} \\
&= \sup\{s \mid \exists y \in Y, \nu(y) > \mu_R(x, s, y) \text{ veya } \nu(y) = \mu_R(x, s, y), \\
&\quad (x, s, y) \in M_R \text{ ve } y \notin N\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ayrıca,

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid (x, \mu(x)) \in \varphi(\mu, M)\} \\ &= \{x \mid \exists y \in Y, \mu_R(x, \mu(x), y) < \nu(y) \text{ veya } \mu_R(x, \mu(x), y) = \nu(y), \\ &\quad (x, \mu(x), y) \notin M_R \text{ ve } y \in N\} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi de *bağıntı* ve *ko-bağıntı* kavramlarının tümleyenini karakterize etmeye çalışalım. Tezimizin başında bu tümleyen tanımı Tanım 2.4.13'te verilmişti, bu tanımı kullanarak aşağıdaki karakterizasyonlar verilebilir:

6.1.19. Teorem :

1. $\varphi(\mu_R, M_R)$ bir ko-bağıntı olsun. Bu ko-bağıntının tümleyeni bağıntıdır ve $\varphi(\mu_{R'}, M_{R'})$ ile gösterilir ve,

$$\begin{aligned} \mu_{R'}(x, s, y) &= \bigvee \{t \mid t < 1 - \mu_R(x, 1 - s, y) \text{ veya } t = 1 - \mu_R(x, s, y) \\ &\quad \text{ve } (x, 1 - s, y) \notin M_R\} \\ M_{R'} &= \{(x, s, y) \mid (x, 1 - s, y) \notin M_R\} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

2. $\varphi(\mu_r, M_r)$ bir bağıntı olsun. Bu bağıntının tümleyeni ko-bağıntıdır ve $\varphi(\mu_{r'}, M_{r'})$ ile gösterilir ve,

$$\begin{aligned} \mu_{r'}(x, s, y) &= \bigwedge \{t \mid t > 1 - \mu_r(x, 1 - s, y) \text{ veya } t = 1 - \mu_r(x, s, y) \\ &\quad \text{ve } (x, 1 - s, y) \in M_r\} \\ M_{r'} &= \{(x, s, y) \mid (x, 1 - s, y) \in M_r\}^c \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt:(1) Tanım 2.4.13 (2)'den aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_{R'}, M_{R'}) = \bigvee \{ & P_{((x,s)(y,t))} \mid \exists (z,u), (w,v), P_{((z,u)(w,v))} \not\subseteq \varphi(\mu_R, M_R), \\ & P_{(z,u)} \not\subseteq \sigma_X(P_{(x,s)}) \text{ ve } \sigma_Y(Q_{(y,t)}) \not\subseteq Q_{(w,v)} \} \end{aligned}$$

Sonuç 6.1.4'ten $\varphi(\mu_{R'}, M_{R'}) = R'$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} \mu_{R'}(x, s, y) &= \sup \{ t \mid ((x, s), (y, t)) \in R' \} \\ M_{R'} &= \{ (x, s, y) \mid ((x, s), (y, \mu_{R'}(x, s, y))) \in R' \} \end{aligned}$$

dolayısıyla $(x, s), (y, t)$ için yukarıda Tanım 2.4.13 (2)'de verilen eşitlik sağlanır. Dokumuzun sade doku olduğundan aşağıdaki çift gerektirmeler vardır.

$$\begin{aligned} P_{(z,u)} \not\subseteq Q_{(x,1-s)} &\Leftrightarrow x = z, 1 - s \leq u \\ P_{(y,1-t)} \not\subseteq Q_{(w,v)} &\Leftrightarrow w = y, v \leq 1 - t \end{aligned}$$

O halde, $\overline{P}_{((x,u),(y,v))} \not\subseteq \varphi(\mu_R, M_R) = R$ olur. Şimdi φ 'nin tanımını kullanırsak

$$v > \mu_R(x, u, y) \text{ veya } v = \mu_R(x, u, y) \text{ ve } (x, u, y) \notin M_R$$

elde edilir. Daha sonra yukarıdaki çift gerektirmelerin sağ tarafı ve μ_R fonksiyonun ortadaki elemana göre monoton artan bir fonksiyon olduğunu bilgisini kullanırsak;

$$1 - t > \mu_R(x, 1 - s, y) \text{ veya } 1 - t = \mu_R(x, 1 - s, y) \text{ ve } (x, 1 - s, y) \notin M_R$$

ve buradan,

$$t < 1 - \mu_R(x, 1 - s, y) \text{ veya } t = 1 - \mu_R(x, 1 - s, y) \text{ ve } (x, 1 - s, y) \notin M_R$$

elde edilir. Böylece

$$\mu_{R'}(x, s, y) = \bigvee \{ t \mid t < 1 - \mu_R(x, 1 - s, y) \text{ veya } t = 1 - \mu_R(x, s, y) \}$$

eşitliği gösterilmiş olur üstelik

$$\mu_{R'}(x, s, y) = 1 - \mu_R(x, 1 - s, y)$$

eşitliği kolayca görülebilir. Şimdi $M_{R'}$ kümesini elde etmeye çalışalım.

$$M_{R'} = \{(x, s, y) \mid ((x, s), (y, \mu_{R'}(x, s, y))) \in R'\}$$

olduğunu biliyoruz $t = \mu_{R'}(x, s, y)$ alırsak $t = 1 - \mu_R(x, 1 - s, y)$ olur ve φ 'nin tanımını kullanarak

$$M_{R'} = \{(x, s, y) \mid ((x, 1 - s, y) \notin M_R)\}$$

eşitliğini elde ederiz.

(2) Tanım 2.4.13 (1)'den

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_r', M_r') = \bigcap \{ & Q_{((x,s)(y,t))} \mid \varphi(\mu_r, M_r) \not\subseteq Q_{((z,u)(w,v))}, \sigma_X(Q_{(x,s)}) \not\subseteq Q_{(z,u)} \\ & \text{ve } P_{(w,v)} \not\subseteq \sigma_Y(Q_{(y,t)}) \} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Sonuç 6.1.4'ten $\varphi(\mu_{r'}, M_{r'}) = r'$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} \mu_{r'}(x, s, y) &= \inf\{t \mid ((x, s), (y, t)) \notin r'\} \\ M_{r'} &= \{(x, s, y) \mid ((x, s), (y, \mu_{r'}(x, s, y))) \notin r'\}^c \end{aligned}$$

dolayısıyla $(x, s), (y, t)$ için yukarıda Tanım 2.4.13 (1)'de verilen eşitlik sağlanır. Doku-
nun sade doku olmasından aşağıdaki çift gerektirmeler vardır:

$$\begin{aligned} P_{(x,1-s)} \not\subseteq Q_{(z,u)} &\Leftrightarrow z = x, u \leq 1 - s \\ Q_{(w,v)} \not\subseteq Q_{(y,1-t)} &\Leftrightarrow w = y, 1 - t \leq v \end{aligned}$$

O halde, $r = \varphi(\mu_r, M_r) \not\subseteq Q_{((x,u)(y,v))} \Rightarrow P_{((x,u)(y,v))} \subseteq \varphi(\mu_r, M_r)$ olur, φ 'nin tanımını kullanırsak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$v < \mu_r(x, u, y) \text{ veya } v = \mu_r(x, u, y) \text{ ve } (x, u, y) \in M_r$$

daha sonra yukarıdaki çift gerektirmelerin sağ tarafı ve μ_r fonksiyonunun ortadaki elemana göre monoton artan olduğu bilgisi kullanılırsa;

$$1 - t < \mu_r(x, 1 - s, y) \text{ veya } 1 - t = \mu_r(x, 1 - s, y) \text{ ve } (x, u, y) \in M_r$$

ve buradan

$$t > 1 - \mu_r(x, 1 - s, y) \text{ veya } t = 1 - \mu_r(x, 1 - s, y) \text{ ve } (x, u, y) \in M_r$$

eşitliği elde edilir. Böylece istenilen,

$$\mu_{r'}(x, s, y) = \bigwedge \{t \mid t > 1 - \mu_r(x, 1 - s, y) \text{ veya } t = 1 - \mu_r(x, s, y) \text{ ve } (x, 1 - s, y) \in M_r\}$$

elde edilir. Şimdi $M_{r'}$ kümesini elde etmeye çalışalım.

$$M_{r'} = \{(x, s, y) \mid ((x, s), (y, \mu_{r'}(x, s, y))) \notin r'\}^c$$

olduğunu biliyoruz. $t = \mu_{r'}(x, s, y)$ alınırsa $t = 1 - \mu_r(x, 1 - s, y)$ olur ve φ 'nin tanımı kullanılarak

$$M_{r'} = \{(x, s, y) \mid ((x, 1 - s, y) \in M_r)\}^c$$

eşitliği elde edilir. □

6.2. Yumuşak Belirtisiz Kümeler Arasındaki Di-Fonksiyonlar

Bu alt bölümde, di-bağıntılara karşı gelen di-fonksiyonları ele alacağız. Önce, $(X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}), (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ arasındaki di-fonksiyonların sağladığı DF1 ve DF2 özellikleri, karşı gelen $SF(X), SF(Y)$ arasındaki di-fonksiyonlar için ifade edip, aşağıdaki tanımı verebiliriz.

6.2.1. Tanım : Eğer $((\phi, f), (\Phi, F)) : SF(X) \rightarrow SF(Y)$ di-bağıntısı

DF1 $\forall x \in X, s, s' \in \mathbb{I}, s' \leq s \implies \exists y \in Y$ öyle ki $(\Phi(x, s', y) < \phi(x, s, y))$ veya $(\Phi(x, s', y) = \phi(x, s, y), (x, s, y) \in f \text{ ve } (x, s', y) \notin F),$

DF2 $\forall x \in X, y, y' \in Y, s, t, t' \in \mathbb{I}$ için $(t < \phi(x, s, y), \text{ veya } t = \phi(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in f)$ ve $(t' > \Phi(x, s, y'), \text{ veya } t' = \Phi(x, s, y') \text{ ve } (x, s, y') \notin F) \implies (y = y' \text{ ve } t \leq t'),$

koşullarını sağlamıyorsa, bu di-bağıntıya $((\phi, f), (\Phi, F))$ *di-fonksiyondur* denir.

Bu tanımdan yararlanarak, di-fonksiyonlar hakkında bilgi elde edilebilir. Ancak sade dokular arasındaki di-fonksiyonlar bir noktasal fonksiyon tarafından temsil edilebilir, ve bu bize çok kullanışlı bir karakterizasyon verecektir.

Gerçekten $(S, \mathcal{S}), (T, \mathcal{T})$ sade dokular ise, verilen bir $(g, G) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ di-fonksiyona karşı bir tek $\psi = \psi_{(g, G)} : S \rightarrow T$ nokta fonksiyonu vardır ki, her $s \in S$ için $g \notin \overline{Q}_{(s, \psi(s))}$ ve $\overline{P}_{(s, \psi(s))} \not\subseteq G$ dir. [8, Önerme 3.7]. Ayrıca

1. ψ fonksiyonu

(a) Her $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'} \implies P_{\psi(s)} \not\subseteq Q_{\psi(s')}$

eşitlikleriyle verilir.

2. (g, G) di-fonksiyonu

$$g = f_\psi = \bigcup \{\overline{P}_{(s, \psi(s))} \mid s \in S\},$$

$$G = F_\psi = \bigcap \{\overline{Q}_{(s, \psi(s))} \mid s \in S\}.$$

eşitliklerini sağlar.

3. Tüm $B \in \mathcal{T}$ için $g^+ B = \psi^{-1}[B] = G^+ B$ dir.

Ters olarak, (a) koşulunu sağlayan her ψ nokta fonksiyon için (f_ψ, F_ψ) bir di-fonksiyondur (Bu sonuçlar için [9, Lemma 3.8] ve [8, Lemma 3.4, Lemma 3.9] 'e bakınız).

$(S, \mathbb{S}) = (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J})$, $(T, \mathcal{T}) = (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ dokuları sade olduğundan bu sonuçlar hemen uygulanabilir.

6.2.2. Yardımcı Teorem : $\psi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ nokta fonksiyonu (a) koşulunu sağlar ancak ve ancak $\psi = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$, $\psi_1 : X \rightarrow Y$, $\psi_2 : X \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ nokta fonksiyonlar ve

$$s, s' \in \mathbb{I}, s' \leq s \implies \forall x \in X \psi_2(x, s') \leq \psi_2(x, s) \text{ için} \quad (*)$$

Kanıt: $\psi(x, s) = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle(x, s) = ((\psi_1(x, s), \psi_2(x, s)))$ biçimde yazarsak, normal olarak $\psi_1, \psi_2 : X \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ olur. (a) koşulundan $s' \leq s \implies P_{(x, s)} \not\subseteq Q_{(x, s')} \implies P_{(\psi_1(x, s), \psi_2(x, s))} \not\subseteq Q_{(\psi_1(x, s'), \psi_2(x, s'))} \implies \psi_1(x, s') = \psi_1(x, s)$ ve $\psi_2(x, s') \leq \psi_2(x, s)$ dir. Özel olarak $s = 1$ alınırsa, tüm $x \in X$ ve $s' \in \mathbb{I}$ için $\psi_1(x, s') = \psi_1(x, 1)$ bulunur, yani $\psi_1(x, s')$ 'nin değeri s' 'den bağımsızdır. O halde ψ_1 , X 'den $\mathbb{I}$ 'e bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Ayrıca, $\psi_2 : X \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ fonksiyonunun (*) özelliğine sahip olduğu yukardaki gerektirmelerden görülebilir.

Ters olarak, $\psi = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ fonksiyonu yukardaki koşulları sağlarsa,

$$P_{(x, s)} \not\subseteq Q_{(x, s')} \implies s \leq s' \implies P_{(\psi_1(x), \psi_2(x, s))} \not\subseteq Q_{(\psi_1(x), \psi_2(x, s'))}$$

bulunur, yani ψ fonksiyonu (a) koşulunu gerçekleştiriyor. $\square$

Şimdi, $SF(X)$ ile $SF(Y)$ arasındaki di-fonksiyonların yukarıda söz edilen karakterizasyonu verilebilir:

6.2.3. Teorem : Eğer $(g, G) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ di-fonksiyonu $\psi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ nokta fonksiyonu ile temsil ediliyorsa,

$$\mu_g(x, s, y) = \begin{cases} \psi_2(x, s) & \text{eğer } y = \psi_1(x), \\ 0 & \text{eğer } y \neq \psi_1(x), \end{cases}$$

$$M_g = \{(x, s, \psi_1(x)) \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\}$$

ve

$$\mu_G(x, s, y) = \begin{cases} \psi_2(x, s) & \text{eğer } y = \psi_1(x), \\ 1 & \text{eğer } y \neq \psi_1(x), \end{cases}$$

$$M_G = \{(x, s, \psi_1(x)) \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\}^c \text{ dir.}$$

Kanıt: $g = \bigcup \{\overline{P}_{((x,s),(\psi_1(x),\psi_2(x,s)))} \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\}$ eşitliği ve Önerme 6.1.2 (1) kullanılarak

$$\begin{aligned} \mu_g(x, s, y) &= \sup\{t \mid ((x, s), (y, t)) \in g\} \\ &= \sup\{t \mid y = \psi_1(x) \text{ ve } t \leq \psi_2(x, s)\} \\ &= \begin{cases} \psi_2(x, s) & y = \psi_1(x) \\ 0 & y \neq \psi_1(x). \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} M_g &= \{(x, s, y) \mid ((x, s), (y, \mu_g(x, s, y))) \in g\} \\ &= \{(x, s, y) \mid y = \psi_1(x) \text{ ve } \mu_g(x, s, y) \leq \psi_2(x, s)\} \\ &= \{(x, s, \psi_1(x)) \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\} \end{aligned}$$

dir, çünkü $\mu_g(x, s, y) \leq \psi_2(x, s)$ her zaman geçerlidir.

Diğer eşitlikler, $G = \bigcap \{\overline{Q}_{((x,s),(\psi_1(x),\psi_2(x,s)))} \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\}$ ve Önerme 6.1.2 (2) kullanılarak benzer biçimde kanıtlanabilir. $\square$

6.2.4. Örnek : Bölüm 5 'de yer alan, $g : X \rightarrow Y$ nokta fonksiyonuna karşı gelen $\langle g, \iota_{\mathbb{I}} \rangle : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ nokta fonksiyonu ve $(f_g, F_g) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$

di-fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\mu_{f_g}(x, s, y) &= \begin{cases} s & \text{eğer } y = g(x), \\ 0 & \text{eğer } y \neq g(x), \end{cases} \\ M_{f_g} &= \{(x, s, g(x)) \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\}, \\ \mu_{F_g}(x, s, y) &= \begin{cases} s & \text{eğer } y = g(x), \\ 1 & \text{eğer } y \neq g(x), \end{cases} \\ M_{F_g} &= \{(x, s, g(x)) \mid x \in X, s \in \mathbb{I}\}^c\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Özel olarak $g = \iota_X$ alınırsa ilgili di-fonksiyon birim di-fonksiyon olur ve Örnek 6.1.12 'deki eşitlikleri tekrar elde edilir.

6.2.5. Teorem : $(g, G) : (X \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{J}) \rightarrow (Y \times \mathbb{I}, \mathcal{P}(Y) \otimes \mathcal{J})$ di-fonksiyonu $\psi : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ nokta fonksiyon tarafından verilsin. O halde $(\nu, N) \in SF(Y)$ için $\varphi(\mu, M) = g^{\leftarrow} \varphi(\nu, N) = G^{\leftarrow} \varphi(\nu, N)$ eşitliklerini sağlayan $(\mu, M) \in SF(X)$ için

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \inf\{s \in \mathbb{I} \mid \nu(\psi_1(x)) < \psi_2(x, s), \text{ veya } \nu(\psi_1(x)) = \psi_2(x, s) \text{ ve } \psi_1(x) \notin N\} \\ &= \sup\{s \in \mathbb{I} \mid \psi_2(x, s) < \nu(\psi_1(x)), \text{ veya } \psi_2(x, s) = \nu(\psi_1(x)) \text{ ve } \psi_1(x) \in N\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}M &= \{x \in X \mid \nu(\psi_1(x)) < \psi_2(x, \mu(x)), \text{ veya } \nu(\psi_1(x)) = \psi_2(x, \mu(x)) \text{ ve } \psi_1(x) \notin N\}^c \\ &= \{x \in X \mid \psi_2(x, \mu(x)) < \nu(\psi_1(x)), \text{ veya } \psi_2(x, \mu(x)) = \nu(\psi_1(x)) \text{ ve } \psi_1(x) \in N\}\end{aligned}$$

dir.

Kanıt: $\mu(x)$ için birinci eşitliği

$$\mu(x) = \inf\{s \mid \exists y \in Y, \nu(y) < \mu_g(x, s, y), \text{ veya } \nu(y) = \mu_g(x, s, y) \text{ ve } (x, s, y) \in M_g, y \notin N\}$$

eşitliğinden elde edilir (Teorem 6.1.2 (1)). $y \neq \psi_1(x)$ ise $\mu_g(x, s, y) = 0$ olduğundan $\nu(y) < \mu_g(x, s, y)$ mümkün değil, ve $(x, s, y) \notin M_g$ olduğundan $(x, s, y) \in M_g$ 'de mümkün değildir. Böylece $y = \psi_1(x)$ alınabilir ve bu durumda $(x, s, y) \in M_g$ geçerli olduğu için

$$\mu(x) = \inf\{s \in \mathbb{I} \mid \nu(\psi_1(x)) < \psi_2(x, s), \text{ veya } \nu(\psi_1(x)) = \psi_2(x, s) \text{ ve } \psi_1(x) \notin N\}$$

elde edilir. İkinci eşitlik Teorem 6.1.2 (2) kullanılarak, ya da $\psi_2(x, s)$ fonksiyonunun s 'ye göre monoton olduğuna dikkat edilerek, birinci eşitlikten de elde edilebilir.

M için birinci eşitlik

$$M = \{x \mid \exists y \in Y, \nu(y) < \mu_g(x, \mu(x), y), \text{ veya } \nu(y) = \mu_g(x, \mu(x), y) \\ \text{ve } (x, \mu(x), y) \in M_g, y \notin N\}$$

eşitliği kullanılarak (Teorem 6.1.2 (1)), ve yukarıda olduğu gibi $y = \psi_1(x)$ alınabileceğine dikkat edilerek, kolayca elde edilebilir. M için verilen ikinci ifadenin ise, birinci ifadeye eşit olduğu açıktır. $\square$

6.2.6. Tanım : $((\phi_\psi, f_\psi), (\Phi_\psi, F_\psi)) : SF(X) \rightarrow SF(Y)$ di-bağıntısı, $\psi = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y \times \mathbb{I}$ nokta fonksiyona karşı gelen di-fonksiyon olsun. O halde $(\nu, N) \in SF(Y)$ için

$$\mu(x) = \inf\{s \in \mathbb{I} \mid \nu(\psi_1(x)) < \psi_2(x, s), \text{ veya } \nu(\psi_1(x)) = \psi_2(x, s) \text{ ve } \psi_1(x) \notin N\} \\ = \sup\{s \in \mathbb{I} \mid \psi_2(x, s) < \nu(\psi_1(x)), \text{ veya } \psi_2(x, s) = \nu(\psi_1(x)) \text{ ve } \psi_1(x) \in N\}$$

ve

$$M = \{x \in X \mid \nu(\psi_1(x)) < \psi_2(x, \mu(x)), \text{ veya } \nu(\psi_1(x)) = \psi_2(x, \mu(x)) \text{ ve } \psi_1(x) \notin N\}^c \\ = \{x \in X \mid \psi_2(x, \mu(x)) < \nu(\psi_1(x)), \text{ veya } \psi_2(x, \mu(x)) = \nu(\psi_1(x)) \text{ ve } \psi_1(x) \in N\}$$

eşitlikleriyle tanımlanan $(\mu, M) \in SF(X)$ yumuşak belirtisiz kümesine (ν, N) 'nin *ters görüntüsü* denir, $(\phi_\psi, f_\psi)^\leftarrow(\nu, N) = (\Phi_\psi, F_\psi)^\leftarrow(\nu, N)$ olarak yazılır.

6.2.7. Örnek : $g : X \rightarrow Y$ olmak üzere $\psi = \langle g, \iota_{\mathbb{I}} \rangle$ özel durumda

$$\mu(x) = \inf\{s \in \mathbb{I} \mid \nu(g(x)) < s, \text{ veya } \nu(g(x)) = s \text{ ve } g(x) \notin N\} \\ = \nu(g(x))$$

bulunur, yani klasik durumda olduğu gibi $\mu = \nu \circ g$ dir. Diğer taraftan

$$M = \{x \mid \nu(g(x)) < \mu(x), \text{ veya } \nu(g(x)) = \mu(x) \text{ ve } g(x) \notin N\}^c \\ = g^{-1}[N]$$

elde edilir. Böylece, bu durumda

$$(\phi_\psi, f_\psi)^\leftarrow(\nu, N) = (\Phi_\psi, F_\psi)^\leftarrow(\nu, N) = g^{-1}(\nu, N) = (\nu \circ g, g^{-1}[N])$$

bulunur (bakınız Bölüm 4.3).

Genel doku uzaylarındaki 1-1 ve örtenlik tanımını hatırlatalım

6.2.8. Tanım : $(f, F), (S, \mathfrak{S})$ 'den $(T, \mathfrak{T})$ 'ye difonksiyon olsun aşağıdaki koşulu sağlayan (f, F) difonksiyonuna örten denir.

ÖRT $t, t' \in T, P_t \not\subseteq Q'_t \Rightarrow f \not\subseteq Q_{((s,t'))}$ ve $P_{(s,t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde $\exists s \in S$ vardır.

Benzer şekilde, aşağıdaki koşulu sağlayan (f, F) difonksiyonuna bire-bir denir.

1-1 $s, s' \in S$ ve $t \in T$ için $f \not\subseteq Q_{(s,t)}$ ve $P_{(s',t)} \not\subseteq F \Rightarrow P_s \not\subseteq Q'_s$

Yukarıdaki tanımdan yararlanarak aşağıdaki tanımı verebiliriz

6.2.9. Tanım : Aşağıdaki koşulu sağlayan $((\phi, f), (\Phi, F)) : SF(X) \rightarrow SF(Y)$ difonksiyonuna örten denir.

ÖRT $y \in Y$ ve $t' \leq t \Rightarrow \exists (x, s) \in X \times \mathbb{I}$ öyle ki $(t' < \phi(x, s, y),$ veya $t' = \phi(x, s, y)$
ve $(x, s, y) \in f)$ ve $(\Phi(x, s, y) < t,$ veya $t = \Phi(x, s, y)$ ve $(x, s, y) \notin F)$.

Aşağıdaki koşulu sağlayan $((\phi, f), (\Phi, F)) : SF(X) \rightarrow SF(Y)$ di-fonksiyonuna bire-bir denir.

1-1 $\Phi(x', s', y) < \phi(x, s, y)$ veya $(\phi(x, s, y) = \Phi(x', s', y), (x, s, y) \in f$
ve $(x, s, y) \notin F) \Rightarrow x = x', s' \leq s$.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Adámek J., Herrlich H. and Strecker G. E., 1990, Abstract and concrete categories, John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Adnadjevic D. and Sostak A.P., 1995, On inductive dimensions for fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 73, 5–12
- [3] Brown L. M., Relations and functions on texture spaces, Preprint
- [4] Brown L. M., Diker M., 1998, Ditopological texture spaces and intuitionistic sets, Fuzzy Sets and Systems, 98, 217–224
- [5] Brown L. M., Diker M., 1998, Paracompactness and full normality in ditopological texture spaces, J. Math. Anal. Appl., 227, 144–165
- [6] Brown L. M., and Ertürk R., 2000, Fuzzy sets as texture spaces, I. Representation theorems, Fuzzy Sets and Systems, 110 (2), 227–236
- [7] Brown L. M., and Ertürk R., 2000, Fuzzy sets as texture spaces, II. Subtextures and quotient textures, Fuzzy Sets and Systems, 110 (2), 237–245
- [8] Brown L. M., Ertürk R., Dost Ş., 2004, Ditopological texture spaces and fuzzy topology, I. Basic concepts, Fuzzy Sets and Systems, 147, 171–199
- [9] Brown L. M., Ertürk R., Dost Ş., 2004, Ditopological texture spaces and fuzzy topology, II. Topological considerations, Fuzzy

- [10] Brown L. M., Lecture Notes On Ditopological Texture Space
- [11] Brown L.M., Ertürk R. ve Dost Ş. Ditopological texture spaces and fuzzy topology
III. separation axioms, hazırlanıyor.
- [12] Brümmer G. C.L., 1984, Topological categories, Topology and its Applications, 18, 27–41
- [13] Chang C.L., 1968, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 24, 182–190
- [14] Chakraborty M. K., Das M. 1983, Studies in fuzzy relations over fuzzy subsets, Fuzzy Sets and Systems, 9, 79–89
- [15] Çoker D., 1996, A note on intuitionistic sets and intuitionistic points, Tr. J. Math, 20, 343–351
- [16] Çoker D., 2000, An introduction to intuitionistic topological spaces, BUSEFAL, 81, 51–56
- [17] Diker M., 1999, Connectedness in ditopological texture spaces, Fuzzy Sets and Systems, 108, 223–230
- [18] Diker M., 2004, One point compactifications of ditopological texture spaces, Fuzzy Sets and Systems, 147, 233–248

- [19] Dost Ş., 2004, Categories of Texture Spaces, Ph.D. Thesis, Hacettepe University, Turkish
- [20] Ertürk R., 1992, Fuzzy topology and bitopological spaces, Ph.D. Thesis, Hacettepe University, Turkish
- [21] Ertürk R., 1993, Separation axioms in fuzzy topology characterized by bitopologies, Fuzzy Sets and Systems, 58, 209–206
- [22] Ertürk R., 1995, Some results on fuzzy compact spaces, Fuzzy Sets and Systems, 70, 107–112
- [23] Gierz G., Hofmann, K. H., Keimel K., 1980, A compendium of continuous lattices, Springer–Verlag
- [24] Giuli E., 2003, On classes of T_0 spaces admitting completions, Applied General Topology, Volume 4, No 1, 143-155
- [25] Goguen J. A., 1967, $\mathbb{L}$ -Fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 18, 145–174
- [26] Goguen J. A., 1973, The fuzzy Tychonoff theorem, J. Math. Anal. Appl., 43, 737–742
- [27] Gohar M. M., 2002, Compactness in ditopological texture spaces, Ph.D. Thesis, Hacettepe University, English
- [28] Gottwald S., 1993, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Foundation of Application-from a Mathematical Point of View, Brounschweig; Wiesbaden:

Verlag Vieweg

- [29] Herrlich H. and Strecker G. E., 1973, Category Theory, Allyn and Bacon, Inc.
- [30] Höhle U., 2002, A note on the hypergraphfunctor, Fuzzy Sets and Systems, 131, 353–356
- [31] Höhle U., Rodabaugh S.E., Sostak A., eds, 1995, Special Issue on Fuzzy Topology, Fuzzy Sets and Systems, 73(1)
- [32] Hutton B., Reilly I., 1980, Seperation axioms in fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 3, 93–104
- [33] Kelly, J. C., 1963, Bitopological spaces, Proc. London Math. Soc., (3) -13, 71–89
- [34] Lowen R., 1978, Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, J. Math. Anal. Appl., 56, 621–633
- [35] Lowen R., 1978, A comparison of different compactness notions in fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 64, 446–454
- [36] Rodabaugh S.E., Lowen, 1988, Para-Lowen, and α - level functors and fuzzy topologies on the crips real line, J. Math. Anal. Appl., 131, 157–169

- [37] Özçağ S. and Brown L. M., 2003, Di-uniform texture spaces, *Applicable General Topology*, 4(1), 157–192

- [38] Wang G. J., 1992, Theory of topological molecular lattices, *Fuzzy Sets and Systems*, 47, 351–376

- [39] Zadeh L. A., 1965, Fuzzy Sets, *Information Control*, 8, 353–388

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İsmail Uğur Tiryaki

Doğum Yeri : Safranbolu

Doğum Yılı : 1972

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise 1986–1989 İskenderun Demir Çelik Lisesi, İskenderun

Lisans 1989–1993 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü, Ankara

Yüksek Lisans 1993–1996 Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, Bolu

Yabancı Dil: İngilizce

İş Tecrübesi :

1994– Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,
Öğretim Görevlisi