

**ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK
VE ÇATALLAŞMA ANALİZİ**

Gülten ÇETİNTAŞ

**Yüksek Lisans Tezi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Vedat ÇELİK**

OCAK-2016

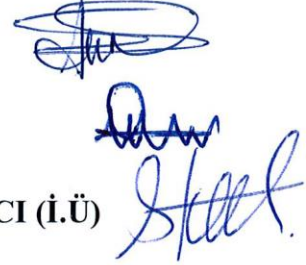
T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK VE ÇATALLAŞMA
ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Gülten ÇETİNTAŞ
(122113106)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Aralık 2015
Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Ocak 2016

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Vedat ÇELİK (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa POYRAZ (F.Ü)
Prof. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI (İ.Ü)



OCAK-2016

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlamış olduğum bu çalışmada, matematiksel modelleri gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler kullanılarak oluşturulan zaman gecikmeli sistemler ve bu sistemlerin farklı sistem parametreleri ve zaman gecikmesi değerlerine göre kararlılık ve çatallaşma analizlerinin Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın, konu üzerinde yapılacak olan benzer araştırmalara bir kaynak olmasını temenni ederim.

Tez çalışmam süresince benden yardım ve bilgisini esirgemeyen, değerli yorum ve önerileri ile bana katkıda bulunan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Vedat ÇELİK' e ve her konuda benden maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen aileme en içten dileklerle teşekkür eder, saygılar sunarım.

Gülten ÇETİNTAŞ
ELAZIĞ-2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET	VI
ABSTRACT	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ	VIII
TABLOLAR LİSTESİ	XIII
SEMBOLLER LİSTESİ	XIV
KISALTMALAR LİSTESİ	XV
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Literatür Taraması	3
1.2. Tezin Amacı ve Organizasyonu	6
2. KARARLILIK.....	10
2.1. Kararlılığa İlişkin Bazı Tanımlar	10
2.1.1. Denge Noktası:	10
2.1.2. Sistem Gösterimi	11
2.1.3. Doğrusal Sistemler için Kararlılık Tanımı	11
2.1.4. Doğrusal Olmayan Sistemler için Kararlılık Tanımı	12
2.2. Doğrusal Sistemlerin Denge Noktalarının Yapısı ve Kararlılığı.....	13
2.2.1. Reel, Birbirinden Farklı ve Aynı İşaretli Öz Değerler	14
2.2.2. Reel, Birbirinden Farklı ve Zıt İşaretli Öz Değerler	15
2.2.3. Reel ve Birbirine Eşit Öz Değerler.....	16
2.2.4. Sıfırdan Farklı Reel Kısma Sahip Kompleks Eşlenik Öz Değerler.....	18
2.2.5. Pür İmajiner Kısma Sahip Olan Öz Değerler	19
2.3. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Denge Noktalarının Yapısı ve Kararlılığı.....	20
2.3.1. Doğrusallaştırma	20
2.3.2. Doğrusallaştırılmış Sistemin Kararlılığı.....	21
3. ÇATALLAŞMA VE TÜRLERİ.....	23
3.1. Limit Çevrim	23

3.2.	Çatallaşma	24
3.2.1.	Eyer Düğümü Çatallaşma (Saddle Node Çatallaşma).....	25
3.2.2.	Transkritik Çatallaşma	26
3.2.3.	Tırmık Çatallaşma (Pitchfork Çatallaşma).....	28
3.2.3.1.	Süperkritik Tırmık Çatallaşma	28
3.2.3.2.	Subkritik Tırmık Çatallaşma	29
3.2.4.	Hopf Çatallaşma	30
3.2.4.1.	Süperkritik Hopf Çatallaşma	31
3.2.4.2.	Subkritik Hopf Çatallaşma	33
4.	ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER	35
4.1.	Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler.....	36
4.1.1.	Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması.....	36
4.1.1.1.	İleri (Advanced) Fonksiyonel Diferansiyel Denklem	36
4.1.1.2.	Nötral (Neutral) Fonksiyonel Diferansiyel Denklem.....	37
4.1.1.3.	Gecikmeli (Retarded) Fonksiyonel Diferansiyel Denklem	37
4.1.1.3.1.	Tek Sabit Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler.....	38
4.1.1.3.2.	Farklı Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler.....	39
4.1.1.3.3.	Dağıtılmış Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler	39
4.1.1.3.4.	Durum Bağımlı Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler.....	39
4.1.1.3.5.	Zaman Bağımlı Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler	39
4.2.	Zaman Gecikmeli Sistemler ve Matematiksel Modelleri.....	39
4.2.1.	Karışım Problemi	40
4.2.2.	Elektrodinamik	41
4.2.3.	Mackey-Glass Denklemleri	41
4.2.4.	Zaman Gecikmeli Doğrusal Olmayan Kaotik Sistem	43
4.2.5.	Tek Hücreli Zaman Gecikmeli Hücrel Sinir Ağı	44
4.3.	Zaman Gecikmeli Sistemlerin Karakteristik Denklemleri	44
4.3.1.	Karakteristik Denklemin Önemi	44
4.3.2.	Döngü İçindeki Gecikmenin Konumuna Göre Karakteristik Denklem	45
5.	ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ	
	İÇİN LAMBERT W FONKSİYONU	50
5.1.	Lambert W Fonksiyonu	50

5.2.	Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Lambert W Fonksiyonu Kullanımı.....	55
5.3.	Zaman Gecikmeli Sistemlerin Lambert W Fonksiyonu ile Kararlılık Analizi	61
6.	ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ İÇİN GENELLEŞTİRİLEN DEĞİŞTİRİLMİŞ MİKHAİLOV KARARLILIK KRİTERİ.....	73
6.1.	Mikhailov Eğrisi.....	73
6.2.	Mikhailov'un Kararlılık Kriterleri.....	80
6.2.1	Mikhailov'un Birinci Kararlılık Kriteri.....	80
6.2.2.	Mikhailov'un İkinci Kararlılık Kriteri	81
6.3.	Geri Tipli Zaman Gecikmeli Sistemler için Mikhailov Kararlılık Kriteri	82
6.4.	Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri.....	86
7.	ZAMAN GECİKMELİ DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN KARARLILIK VE ÇATALLAŞMA ANALİZLERİNİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ.....	91
7.1.	Zaman Gecikmeli Doğrusal Olmayan Bir Sistemin Kararlılık ve Çatallaşma Analizi	91
7.1.1.	Çatallaşmanın Yönü	95
7.1.1.1.	Lambert W Fonksiyonu ile Çatallaşma Yönünün Belirlenmesi	96
7.1.1.2.	Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile Çatallaşma Yönünün Belirlenmesi.....	100
7.1.2 .	Nümerik Sonuçlar.....	104
7.2.	Zaman Gecikmeli Kaotik Bir Sistemin Aktif Kontrol İle Senkronizasyonu.....	108
7.2.1.	Kazanç Aralığının Belirlenmesi	111
7.2.1.1.	Lambert W Fonksiyonu ile Kararlı Olunan Kazanç Aralığının Belirlenmesi	111
7.2.1.2	Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile Kararlı Olunan Kazanç Aralığının Belirlenmesi	114
7.2.2.	Nümerik Sonuçlar.....	116
7.3.	Tek Hücreli Zaman Gecikmeli Hücrel Sinir Ağının Kararlılık ve Çatallaşma Analizi	118
7.3.1.	Çatallaşmanın Yönü	123
7.3.1.1.	Lambert W Fonksiyonu ile Çatallaşma Yönünün Belirlenmesi	123

7.3.1.2.	Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile Çatallaşma	
	Yönünün Belirlenmesi.....	128
7.3.2.	Nümerik sonuçlar	132
8.	SONUÇLAR	137
	KAYNAKLAR	140
	ÖZGEÇMİŞ	146

ÖZET

Bu tez çalışmasında, matematiksel modelleri gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler ile tanımlanan bazı zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemlerin Lambert W fonksiyonu ve geliştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile kararlılık ve çatallaşma analizlerinin ve senkronizasyonunun gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, ilk olarak zaman gecikmeli doğrusal olmayan kaotik bir sistemin farklı sistem parametrelerine göre kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilmiştir. Sistemin denge noktalarının doğrusallaştırılmış modelinden faydalanarak çatallaşmanın varlığı ve çatallaşma noktası zaman gecikmesi parametresine göre analitik olarak hesaplanmıştır. Çatallaşmanın yönü, Lambert W fonksiyonu ve geliştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile belirlenmiştir. İkinci olarak, zaman gecikmeli doğrusal olmayan özdeş iki kaotik sistemin (biri Master Verici-diğeri Slave Alıcı olmak üzere) farklı başlangıç şartları için kaos senkronizasyonu gerçekleştirilmiştir. İki sistem arasındaki senkronizasyonu gerçekleştirmek için bir oransal kontrolör, aktif kontrol yöntemi kullanılarak tasarlanmıştır. Elde edilen kontrolörün etkinliği Lambert W fonksiyonu ve geliştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile test edilerek uygun kazanç parametresi seçilmiştir. Üçüncü olarak, tek hücreli zaman gecikmeli doğrusal olmayan hücrel sinir ağının farklı sistem parametrelerine göre kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilmiştir. Çatallaşmanın varlığı ve çatallaşma noktası analitik olarak hesaplanmıştır. Çatallaşmanın yönü, Lambert W fonksiyonu ve geliştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile belirlenmiştir. Her üç uygulamada da analitik sonuçlar *Matlab/Simulink* ortamında elde edilen benzetim sonuçları ile doğrulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zaman gecikmeli sistemler, Zaman gecikmeli sistemlerin çatallaşma analizi, Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizi, Zaman gecikmeli sistemlerin senkronizasyonu, Lambert W fonksiyonu, Geliştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri

ABSTRACT

Stability and Bifurcation Analysis of Time Delay Systems

In this thesis, the analyses of bifurcation and stability and synchronization of some nonlinear time delay systems described by retarded functional differential equations have been aimed to perform via Lambert W function and generalised modified Mikhailov stability criterion. For this purpose, first of all, bifurcation and stability analyses of a nonlinear time delay chaotic system have been achieved for different system parameters. By utilizing the linearized model of the equilibrium points of the system, the presence of bifurcation and bifurcation point have been calculated analytically according to the time delay parameter. The direction of bifurcation has been determined by Lambert W function and generalised modified Mikhailov stability criterion. Secondly, chaos synchronization of two identical chaotic, nonlinear time delay systems (one Master-Transmitter other Slave-Receiver) have been achieved for different initial conditions. For achieving synchronization between two systems, a proportional controller has been designed by using active control method. Efficiency of designed controller has been tested using Lambert W function and generalised modified Mikhailov stability criterion and appropriate gain parameter has been selected. Thirdly, bifurcation and stability analyses of nonlinear one-cell delayed cellular neural network have been achieved for different system parameters. The presence of bifurcation and bifurcation point has been calculated analytically. The direction of bifurcation has been computed by Lambert W function and generalised modified Mikhailov stability criterion. The analytical results have been verified by simulation results obtained from the *Matlab/Simulink* environment for each three practices.

Keywords: Time delay systems, Bifurcation analysis of time delay systems, Stability analysis of time delay systems, Synchronization of time delay systems, Lambert W function, Generalised modified Mikhailov stability criterion.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1. Öz değerlerin reel, birbirinden farklı ve aynı işaretli olma durumunda faz portresi: a) Toplayıcı düğüm noktası b) Kaynak düğüm noktası	15
Şekil 2.2. Öz değerlerin reel, birbirinden farklı ve zıt işaretli olması durumunda bir eyer noktasının faz portresi	16
Şekil 2.3. Öz değerlerin reel, birbirine eşit ve iki öz vektöre sahip olması durumunda faz portresi: a)Toplayıcı düğüm noktası b) Kaynak düğüm noktası.....	17
Şekil 2.4. Öz değerlerin reel, birbirine eşit ve bir öz vektöre sahip olması durumunda faz portresi: a)Toplayıcı düğüm noktası b) Kaynak düğüm noktası.....	18
Şekil 2.5. Öz değerlerin sıfırdan farklı reel kısma sahip kompleks eşlenik olma durumunda faz portresi: a)Spiral toplayıcı b) Spirak kaynak.....	19
Şekil 2.6. Öz değerlerin pür imajiner kısma sahip olması durumunda faz portresi.....	20
Şekil 3.1. Kararlı, kararsız ve yarı kararlı limit çevrim	24
Şekil 3.2. Çatallaşma olayı.....	25
Şekil 3.3. Eyer düğümü çatallaşmada farklı parametre durumları için vektör alanları	26
Şekil 3.4. Eyer düğüm çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı	26
Şekil 3.5. Transkritik çatallaşmada farklı parametre durumları için vektör alanları	27
Şekil 3.6. Transkritik çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı	28
Şekil 3.7. Süperkritik tırmık çatallaşmada farklı parametre durumları için vektör alanları	29

Şekil 3.8. Süperkritik tırmık çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı	29
Şekil 3.9. Subkritik tırmık çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma	30
Şekil 3.10. a) Eyer noktası, transkritik ve tırmık çatallaşmada öz değerlerin genel değişim profili b) Hopf çatallaşmada öz değerlerin genel değişim profili	31
Şekil 3.11. Süperkritik hopf çatallaşmada kararlılık değişimi ve oluşan limit çevrimler	32
Şekil 3.12. Subkritik hopf çatallaşmada kararlılık değişimi ve oluşan limit çevrimler	34
Şekil 4.1. İki elektronun birbirleri üzerindeki etkisi	41
Şekil 4.2. Gecikme süresi gösterimi	45
Şekil 4.3. Geri besleme döngüsü içinde bir gecikme ile birinci dereceden bir sistem	46
Şekil 4.4. Döngü içinde bir gecikme ile birinci dereceden bir sistem	46
Şekil 4.5. Giriş içinde bir gecikme ile birinci dereceden bir sistem	47
Şekil 4.6. Geri besleme döngüsü içinde gecikme bulunan ikinci dereceden bir sistem	47
Şekil 5.1. Lambert W fonksiyonunun; a) -1 . , b) 0 . ve c) 1 . dalına ait reel ve imajiner kısımların çizimi	52
Şekil 5.2. Lambert W fonksiyonunun iki dalının reel değerleri (W_0 : düz çizgi W_{-1} : kesikli çizgi)	53
Şekil 5.3. $\alpha = 1$ ve $\tau = 1$ için Denklem (5.55)'in kutuplarının s -düzleminde konumları	64
Şekil 5.4. Denklem (5.55) için kararlılık sınırı	65
Şekil 5.5. a) $\alpha = 2$ ve $\tau = 0.4$ b) $\alpha = 4$ ve $\tau = 0.8$ için Denklem (5.55)'in kutuplarının s -düzleminde konumları	66

Şekil 5.6. Farklı A_d parametrelerine göre Denklem (5.64)'ün kutuplarının s- düzleminde konumları	68
Şekil 6.1. Mikhailov eğrisi.....	74
Şekil 6.2. Köklerin konumuna göre açının belirlenmesi.....	77
Şekil 6.3. Mikhailov eğrisinin; a) sıfır kök durumu ve b) saf imajiner kök durumu	78
Şekil 6.4. Mikhailov eğrisinin özellikleri	80
Şekil 6.5. n. dereceden bir sistemin kararlı Mikhailov eğrisi	81
Şekil 6.6. Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterine göre; a) $n = 4$ için kararlı bir sistem, b) $n = 4$ için kararsız bir sistem ve c) $n = 5$ için kararsız bir sistem	82
Şekil 6.7. Denklem (6.30)'da verilen sistemin $\tau = 6.2s$ ve $\xi = 0.2$ için Mikhailov eğrisi	84
Şekil 6.8. Denklem (6.47) için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında çizilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi.....	89
Şekil 6.9. Denklem (6.47) için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi.....	89
Şekil 7.1. Denklem (7.1)'de verilen zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin blok diyagramı.....	92
Şekil 7.2. $\delta = \varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin kutuplarının s-düzleminde konumları: a) $\tau = 0.7s$, b) $\tau_c = 0.785s$ ve c) $\tau = 0.9s$	97
Şekil 7.3. $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin kutuplarının s-düzleminde konumları: a) $\tau = 0.2s$, b) $\tau_c = 0.3925s$ ve c) $\tau = 0.5s$	99
Şekil 7.4. $\delta = \varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: a) $\tau = 0.7s$, b) $\tau_c = 0.785s$ ve c) $\tau = 0.9s$	101

Şekil 7.5. $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: a) $\tau = 0.2s$, b) $\tau_c = 0.3925s$ ve c) $\tau = 0.5s$	103
Şekil 7.6. $\delta = \varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı: a) $\tau = 0.7s$ ve b) $\tau = 0.9s$	104
Şekil 7.7. $\delta = \varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin çıkışının zamana göre değişimi: a) $\tau = 0.7s$ ve b) $\tau = 0.9s$	105
Şekil 7.8. $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı: a) $\tau = 0.2s$ ve b) $\tau = 0.5s$	106
Şekil 7.9. $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin çıkışının zamana göre değişimi: a) $\tau = 0.2s$ ve b) $\tau = 0.5s$	107
Şekil 7.10. Kaos senkronizasyon blok diyagramı	109
Şekil 7.11. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin kutuplarının s-düzlemindeki konumları: a) $K = 0.8$	112
Şekil 7.11. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin kutuplarının s-düzlemindeki konumları: b) $K = 1.2$, c) $K = 1.5$ ve d) $K = 2.5$	113
Şekil 7.12. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: a) $K = 0.8$, b) $K = 1.2$ ve c) $K = 1.5$	115
Şekil 7.12. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: d) $K = 2.5$	116

Şekil 7.13. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan özdeş Master ve Slave sistemlerin çıkışı: a) $K = 1.2$ ve b) $K = 1.5$ (Düz çizgi: Master, Kesikli çizgi: Slave)	117
Şekil 7.14. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan özdeş Master ve Slave sistemlerin çıkışı: a) $K = 1.2$ ve b) $K = 1.5$ (Düz çizgi: Master, Kesikli çizgi: Slave).....	118
Şekil 7.15. $a = 2$ ve $b = 3$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA' nın kutupları a) $\tau = 0.1s$, b) $\tau_c = 0.204s$ ve c) $\tau = 0.4s$	126
Şekil 7.16. $a = 2$ ve $b = 5$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA' nın kutupları: a) $\tau = 0.3s$ ve b) $\tau_c = 0.432s$ c) $\tau = 0.5s$	127
Şekil 7.17. $a = 2$ ve $b = 3$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında ZGHSA' nın genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: a) $\tau = 0.1s$ b) $\tau_c = 0.204s$ ve c) $\tau = 0.4s$	130
Şekil 7.18. $a = 2$ ve $b = -5$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında ZGHSA' nın genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: a) $\tau = 0.3s$, b) $\tau_c = 0.432s$ ve c) $\tau = 0.5s$	131
Şekil 7.19. $a = 2$ ve $b = 3$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA' nın durum uzay diyagramları: a) $\tau = 0.1s$ ve b) $\tau = 0.4s$	132
Şekil 7.20. $a = 2$ ve $b = 3$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA' nın çıkışının zamana göre değişimi: a) $\tau = 0.1s$ ve b) $\tau = 0.4s$	133
Şekil 7.21. $a = 2$ ve $b = -5$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA' nın durum uzay diyagramları: a) $\tau = 0.3s$ ve b) $\tau = 0.5s$	134
Şekil 7.22. $a = 2$ ve $b = -5$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA' nın çıkışının zamana göre değişimi: a) $\tau = 0.3s$ ve b) $\tau = 0.5s$	135

TABLolar LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 5.1. Lambert W fonksiyonunun -1.,0. ve 1. dallarına ait bazı değerleri.....	54
Tablo 5.2. Farklı A_d parametrelerine karşılık gelen en sağdaki kutuplar.....	67
Tablo 5.3. Q_k matrisinin $k = 0$ ve $k = \pm 1$ için değerleri.....	69
Tablo 5.4. $k = 0$ ve $k = \pm 1$ için Q_k , s_k ve λ_{ki} değerleri	72

SEMBOLLER LİSTESİ

C	: Karmaşık Sayılar Kümesi
$D(s)$	: Karakteristik denklem
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
r	: Çatallaşma Parametresi
τ	: Zaman gecikmesi
λ	: Öz değer
v	: Öz vektör
W	: Lambert fonksiyonu
ω	: Frekans
$\theta(\omega)$	: Açı değişimi
$\tilde{\theta}$	: Açıların toplam değişimi
$\psi(s)$	: Rasyonel fonksiyon
$w_r(s)$	: Referans fonksiyon
$\delta, \varepsilon, a, b$	: Sistem parametreleri
x^*	: Denge Noktası
$\ \cdot\ $	: Norm

KISALTMALAR LİSTESİ

- FDD** : Fonksiyonel Diferansiyel Denklem
GFDD : Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklem
İFDD : İleri Fonksiyonel Diferansiyel Denklem
NFDD : Nötral Fonksiyonel Diferansiyel Denklem
ZGHSA : Zaman Gecikmeli Hücresel Sinir Ağı

1. GİRİŞ

Kararlılık, kontrol sistemlerinin tasarımı ve analizinde karşımıza çıkan önemli problemlerden birisidir. Verilen bir kontrol sistemi ile ilgili konu, onun kararlı olup olmamasıdır. Çünkü kararsız bir kontrol sistemi faydasız ve potansiyel tehlike olarak kabul edilir [1]. Doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin zamanla değişip değişmeme durumlarına göre çok farklı şekillerde kararlılık tanımları verilmektedir [2-6].

Doğrusal sistemlerde kararlılığın incelenmesi için bir çok yöntem olmasına rağmen doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığının incelenmesi önemli bir sorun teşkil etmektedir. Çünkü, doğrusal olmayan sistemler, doğrusal sistemlerde görünmeyen farklı davranış türleri sergileyebilmektedir. Bu davranış türlerine birden fazla denge noktası, sabit genlikli ve sabit periyotlu osilasyonlar (limit çevrim), çatallaşma ve kaos örnek olarak verilebilir [1]. Doğrusal olmayan sistemlerin dinamik analizleri genellikle sistemin yerel kararlılığına bakılarak yapılmaktadır [1-4,7,8]. Yerel kararlılık, doğrusal olmayan sistemin herhangi bir denge noktasının doğrusallaştırılmış eşdeğerinden faydalanılarak gerçekleştirilmektedir. Böylece sistemin dinamiği hakkında bir sonuca varılabilmektedir.

Doğrusal olmayan sistemlerde sistemin denge noktalarının kararlılığının sistem parametrelerine göre değiştiği durumlar söz konusudur. Sistem parametresindeki çok küçük değişiklikler sistemin davranışındaki nitel yapıyı değiştirebilmektedir. Parametreler bazı kritik değerlere ulaştığı zaman sistemin davranışı aniden değişebilmektedir. Sistemde yeni denge noktaları oluşabildiği gibi var olan denge noktaları yok olabilir veya denge noktalarının kararlılığı değişebilmektedir. Bu niteliksel değişimlere çatallaşma ve bu değişimin meydana geldiği parametre değerine çatallaşma değeri denir. Doğrusal olmayan sistemlerde gerçekleşen çatallaşma sistemin global davranışı ile ilgili sonuçlar doğurduğundan önemlidir [5-8].

Fiziksel, kimyasal, biyolojik yapıların matematiksel modelleri genellikle sistemlerin o andaki durumlarına bağlıdır. Fakat bazı yapıların matematiksel modelleri, sadece o andaki durumlarına değil aynı zamanda geçmişteki durumlarına da bağlı olabilmektedir. Bu tip sistemler zaman gecikmeli sistemler (time delay systems) olarak adlandırılırlar. Zaman gecikmeli sistemler, gecikme teriminin bulunduğu konuma ve etkisine göre giriş-çıkış zaman gecikmeli sistemler ve durum zaman gecikmeli sistemler olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Giriş-çıkış zaman gecikmeli sistemler, sistemin girişi ile çıkışı arasında

gecikme etkisi bulunan sistemlerdir. Durum zaman gecikmeli sistemler ise geri tipli zaman gecikmeli sistem (retarded type time delay system), nötral tip zaman gecikmeli sistem (neutral type time delay system) ve ileri tip zaman gecikmeli sistem (advanced type time delay system) olmak üzere üç sınıfa ayrılmaktadır. Geri tipli zaman gecikmeli sistemlerde durum değişkeninin en yüksek mertebeden türevi t anında diğerleri ise t 'den önceki zamanlarda hesaplanmaktadır. Nötral tip zaman gecikmeli sistemlerde durum değişkeninin en yüksek mertebeden türevi sadece t 'ye bağlı değil de t 'nin geçmiş ve gelecek değerlerine de bağlı olabilmektedir. İleri tip zaman gecikmeli sistemlerde ise durum değişkeninin en yüksek mertebeden türevi t anında diğerleri ise t 'den daha sonraki zamanlarda hesaplanmaktadır [9-11]. Bu tez çalışmasında, incelenen tüm örnekler ve uygulaması gerçekleştirilen tüm sistemler geri tipli zaman gecikmeli sistemler sınıfına aittir. Tezin devam eden kısımlarında kullanılan “zaman gecikmeli sistemler” ifadesinden “geri tipli zaman gecikmeli sistemler” ifadesi kastedilmiştir.

Sistemler modellenirken genellikle gecikmeler ihmal edilir. Fakat modellenen sistemlerde ihmal edilen çok küçük gecikmeler bile sistemin mevcut durumunda çok büyük değişikliklere yol açabilir. Bu yüzden durum zaman gecikmeli sistemlerin matematiksel modelleri oluşturulurken sıradan diferansiyel denklemler ile ifade edilmeleri zor olduğu için fonksiyonel diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Fonksiyonel diferansiyel denklemler ileri (advanced), nötral (neutral) ve gecikmeli (retarded) fonksiyonel diferansiyel denklemler olmak üzere üç kısma ayrılmaktadır [11,12].

Gecikmenin varlığı sistem analizini ve kontrolünü çok daha fazla kompleks hale getirebilir. Sistemde kararsızlığa ve kötü performansa yol açabilir. Bu yüzden bu tip sistemlerin kararlılık analizleri teorik ve pratik açıdan önem kazanmıştır. Ancak zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığının belirlenmesi gecikmesiz sistemler kadar kolay değildir. Çünkü zaman gecikmesi, sistemin kapalı döngü karakteristik denklemine e^{-sr} gibi bir üstel fonksiyonun eklenmesine sebep olur. Bu da karakteristik denklemi sonsuz sayıda kökleri olan bir transcendental quasi-polinoma dönüştürmektedir. Analitik olarak böyle bir polinomu çözmek oldukça zordur [9-12].

Bu problemin üstesinden gelmek için önerilen yöntemlerden biri, Lambert W fonksiyonudur. Lambert W fonksiyonu, zaman gecikmeli sistemler için frekans bölgesinde bir yaklaşımdır [13-15]. Bu fonksiyon aynı zamanda Omega fonksiyonu veya çarpım logaritması olarak da bilinen bir fonksiyon kümesidir [16]. Lambert W fonksiyonu,

transcendental yapıdaki karakteristik denklemlerin sıfırlarının bulunmasında kolaylık sağlamaktadır.

Bir diğeri ise genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteridir. 1938'de Mikhailov [17]'de n . dereceden sabit katsayılı doğrusal sistemlerin kararlılığı için gerekli ve yeterli şartı sağlayacak bir frekans cevap kriterini tanıtmıştır. Sistemlerin kararlılığı, Mikhailov hodograf olarak adlandırılan eğrinin şekline bağlı olmaktadır [18]. Genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri [19]'da elde edilmiştir.

Senkronizasyon, eş zamanlı ya da eş zamanlama anlamına gelmektedir. Kaos senkronizasyon, kaotik bir sistemi başka bir kaotik sistemle aynı davranışları göstermeye zorlamaktır [20]. Haberleşme sistemlerinde her geçen gün bilgi güvenliğine verilen önem artmaktadır. Bilginin güvenli bir şekilde iletilebilmesi için haberleşme sistemlerinde kaos önerilmektedir. Kaosun haberleşmede kullanılma nedenleri şu şekilde açıklanabilir. Kaotik işaretler başlangıç şartlarına hassas bağlı, periyodik olmayan ve önceden kestirilemeyen bir yapıdadır. Kaotik sinyaller büyük band genişliği kullanan ve düşük güç spektrum yoğunluğuna sahip olan sinyallerdir. Kaotik işaretlerin güvenli haberleşmede kullanılması ile birlikte işaretin alıcıda tekrar bilgi kaybı olmaksızın elde edilebilmesi için senkronizasyon kavramı ortaya çıkmıştır [21,22].

1.1. Literatür Taraması

Zaman gecikmeli sistemlerin çatallaşma analizi ile ilgili literatürde bir çok alanda çalışmalar yapılmıştır ve yapılmaya devam edilmektedir. Genellikle normal form ve center manifold teoremleri kullanılarak [23]'te Nicholson'nun Blowflies denkleminde, [24]'te Mackey-Glass denkleminde, [25,26]'da av-avcı sistemlerinde ve [27]'de dört boyutlu bir enerji kaynağı sisteminde hopf çatallaşmanın yönü ve çatallaşan periyodik çözümlerin kararlılığı belirlenerek sistemlerin dinamik davranışları analiz edilmiştir.

Literatüre baktığımız zaman, tuzlu su karışımının modellenmesi [28], aralarında mesafe bulunan iki elektrodun birbiri ile iletişimi [29], fizyolojik sistemlerde birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin dinamiklerindeki çatallaşmalar ile hastalığın ilişkilendirilmesi [30], tek durum değişkenine sahip zaman gecikmeli doğrusal olmayan kaotik bir sistemin modellenmesi [31,32], tek hücreli zaman gecikmeli hücresel sinir ağının modellenmesi [33,34] gibi bir çok sistem fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir

alt sınıfı olan gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerle modellenerek uygulamalar yapıldığı görülmektedir.

Literatürde bu tür sistemlerin kararlılık analizi genelde gecikmeden bağımsız [35,36] ve gecikmeye bağımlı [35,37,38] olmak üzere iki şekilde incelenmektedir. Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizleri için genellikle Razumikhin ve Krasovskii kriterlerine dayalı Lyapunov benzeri yöntemler kullanılmıştır [35,38,39]. Farklı analiz yöntemleri için ayrıca [36,37]'ye bakılabilir. Yalnız kararlılık analizinde kullanılan yöntemlerin matematiksel alt yapılarının çok karmaşık olduğu görülmektedir.

Kararlılık analizinde kullanılacak olan Lambert W fonksiyonu üzerine etkili bir çalışma Corless vd. [13]'te toplanmaktadır. [13]'te W fonksiyonuna, matematikte bu fonksiyonun kullanımına yönelik bazı uygulama alanlarına, bu fonksiyonun sayısal analizine, asimptotik analizine ve sembolik hesaplamasına değinilmiştir. [13]'te W 'nin tüm dalları için standart bir notasyon önerisinde bulunularak çalışmanın en önemli kısmı oluşturulmuştur. Çünkü bir çok alanda Lambert W fonksiyonu kullanılmasına rağmen farklı notasyondan ve standart bir ismin yokluğundan dolayı fonksiyonun farkındalığı olması gerektiği kadar yüksek değildir. Lambert W fonksiyonu fizik ve mühendislik gibi alanlarda çoğu uygulamalarda kullanılmıştır. Asl ve Ulsoy [40] çalışmalarında Lambert W fonksiyon konseptine dayalı homojen gecikmeli diferansiyel denklemlerin analitik çözümü ve kararlılık analizi için yeni bir yaklaşım yansıtmışlardır. [15]'te Lambert W fonksiyon kavramına dayalı, gecikmeli diferansiyel denklemlerli sistemlerin tam çözümünü elde etmek için bir analitik yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşım makinelerin çalışırken çıkardığı gürültü problemine bir analitik çözüm bulmak için kullanılmıştır. Diğer metotların aksine bu yaklaşım, sistem parametreleriyle ifade edilen bir analitik forma sahiptir. Yani her bir parametre, çözümü ve öz değerleri etkilemektedir. Sunulan analitik yaklaşımın temel avantajı, sıradan diferansiyel denklem sistemlerine benzer bir kompakt formda homojen doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerine bir kapalı form çözüm sağlama yeteneğidir. Fakat Lambert W fonksiyon yaklaşımı skaler durumda ve gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerinin matrisleri değiştirilebilir olduğu durumda geçerlidir. Daha sonra Yi ve Ulsoy [41]'de matris Lambert W fonksiyonunu kullanarak homojen olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlerin genel sistemlerine yönelik analitik çözüm için bir yaklaşım geliştirmiştir. Bu yaklaşımın avantajı, sistem matrisleri değiştirilebilir olmadığı durumda da sıradan diferansiyel denklemlerdeki durum geçiş matrisi konseptinin matris Lambert W fonksiyonu konseptini kullanarak gecikmeli diferansiyel denklemler için

genelleştirilebilmesidir. Matris Lambert W fonksiyonuna dayalı metot aracılığıyla [42]'de makinelerin çalışırken çıkardığı gürültü probleminin kararlılığı, [43]'te doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirliği, [44]'te çok boyutlu zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizinde bazı özel durumlar analiz edilmiştir. Literatürde Lambert W fonksiyon konsepti kullanılarak, [45]'te ikinci dereceden sabit katsayılı gecikmeli diferansiyel denklemler için analitik kararlılık sınırı elde edilmiş ve sonuçlar yüksek dereceli sistemler için genelleştirilmiş, [46]'da kararsız doğrusal zaman gecikmeli sistemlerin bir sınıfı için güçlü kararlılık şartları türetilmiş, [47]'de en sağdaki kökün hesabı üzerine bir çalışma sunulmuş, [48]'de sinir ağlarının kararlılığı ve güçlü kararlılığı incelenmiş ve kararlılık koşulları elde edilerek güçlü kararlılık şartları parametreler açısından verilmiş, [49]'da doğrusal gecikmeli diferansiyel denklemlerin salınım ve asimptotik özellikleri çalışılmıştır. Literatüre baktığımız zaman Lambert W fonksiyonu tam dereceli sistemlerin yanı sıra kesir dereceli sistemler için de uygulama alanı bulabilmektedir [50,51]. Görüldüğü üzere, Lambert W fonksiyonu kararlılık analizi içeren uygulamalarda oldukça sık kullanılmaktadır.

Başka bir kararlılık analiz metodu olarak, [18]'de gecikmesiz doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için Mikhailov eğrisinin özelliklerine ve Mikhailov kararlılık kriterinin iç yüzüne değinilmiştir. Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için Mikhailov'un iki tane kararlılık kriteri vardır. Mikhailov'un birinci kararlılık kriterinde, $0 \leq \omega < \infty$ aralığında n . dereceden bir sistemin kararlılığı, karakteristik denklem için çizilen Mikhailov eğrisinde açının saat yönünün tersinde $n\pi/2$ olması gerekli ve yeterli şartı ile sağlanır. Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterinde ise, $0 \leq \omega < +\infty$ aralığında Mikhailov eğrisi için karakteristik denklemin sırasıyla reel ve imajiner kısımlarını tanımlayan $X(\omega)$ ve $Y(\omega)$ eğrileri $\omega=0$ noktasında içeren apsis ekseninde n kez kesişir ve bu kesişim sıra ile olursa sistem karardır denir [18]. [52]'de doğrusal zamanla değişmeyen gecikmeli sistemler için Mikhailov kararlılık kriterinin birinci ve ikinci formülasyonunun geçerli ve geçersiz uygulamaları tartışılmıştır. Mikhailov kararlılık kriterinin ilk formülasyonunun geri tipli zaman gecikmeli sistemler için geçerli olduğu fakat nötral tip zaman gecikmeli sistemler için geçersiz olduğu gösterilmiştir. Mikhailov kararlılık kriterinin ikinci formülasyonunun zaman gecikmeli sistemler için uygulanmadığı belirtilmiştir. [53]'te genelleştirilen Mikhailov eğrisinin doğrusal zamanla değişmeyen sürekli zamanlı kesir dereceli istemler için de çizilebileceği ve bu eğrinin özelliğinden faydalanarak sistemlerin kararlılık analizinin gerçekleştirilebileceğine vurgu

yapılmış ancak sistem derecesinin çok büyük olduğu durumlarda Mikhailov eğrisinin analizinin zorlaşacağından bir rasyonel fonksiyon tanımlanarak Mikhailov'un kararlılık kriterine ve değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine dayalı bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri olarak adlandırılmıştır. Daha sonra Busłowicz [19]'da genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterini kullanarak geri tipli zaman gecikmeli kesir dereceli sistemlerin kararlılığını incelemiştir. Genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine göre $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizdirilen rasyonel fonksiyonun orijini çevreleme ya da çevrelememe durumuna göre sistemlerin kararlılığı hakkında yorum yapılabilmektedir. Zaman gecikmeli sistemler için [54]'te gecikmeli lojistik denklemin kararlılık analizi Mikhailov kararlılık kriteri ile incelenmiş, [55]'te bir PI kontrolör tarafından kontrol edilen Smith Predictor yapısı için Mikhailov kararlılık kriterinin uygulama olasılığına değinilmiş, [56]'da Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak sabit iki gecikmeli geri tipli quasipolinomun bazı kararlılık özellikleri elde edilmiş, [57]'de bir oransal kontrolör aracılığıyla gecikmeli bir sistemin kararlılaştırılması Mikhailov kararlılık kriterine dayalı olarak amaçlanmıştır.

Kaos senkronizasyon ile ilgili literatür çalışmalarına bakılırsa, ilk olarak Pecora ve Carroll [22]'de farklı başlangıç şartlarına sahip iki aynı kaotik sistemin senkronizasyonu için bir yöntem tanıtmıştır. Daha sonra kaotik sistemler arasındaki senkronizasyon ilgi çeken bir konu haline gelmiştir ve kaotik sistemlerin haberleşmede kullanımı üzerine bir çok araştırma yapılmasına yol açmıştır [20-22,58-63]. Kaotik sistemlerin senkronizasyonu için literatürde birden fazla yöntem önerilmektedir. Bunlardan bazıları; [58,60]'da verilen aktif kontrol, [59]'da verilen uyarmalı kontrol, [61,62]'de verilen doğrusal olmayan geri beslemeli kontrol ve [63]'te verilen pasif kontrol yöntemidir.

1.2. Tezin Amacı ve Organizasyonu

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan bazı geri tipli zaman gecikmeli sistemlerin denge noktalarının doğrusallaştırılmış modelinden faydalanılarak kararlılık ve çatallaşma analizinin, Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak farklı sistem parametreleri ve zaman gecikmesi değerlerine göre incelenmesi amaçlanmıştır. Buna ek olarak, elde edilen analitik sonuçlar ile incelenen sistemlerin modellerine ait *Matlab/Simulink* ortamında oluşturulan benzetim sonuçları

karşılaştırılarak yapılan çalışmanın doğruluğunu sunmak temel hedeflerdendir. Bu amaçla birlikte tezin organizasyonu devam eden kısımdaki gibi planlanmıştır.

Bölüm 2: Kararlılık

Bu bölümde; kararlılıktan bahsedilerek doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin denge noktalarına ait kararlılık tanımları, doğrusal sistemlerin denge noktasının yapısı ve karakteristik denklemin öz değerleri aracılığıyla kararlılık analizi, doğrusal olmayan sistemlerin doğrusallaştırılması ve doğrusallaştırılmış denge noktası etrafında kararlılığının incelenmesi gibi genel bilgilere yer verilmiştir.

Bölüm 3: Çatallaşma ve Türleri

Bu bölümde; limit çevrime, çatallaşma ve türlerine değinilmiştir. Çatallaşma türleri örnekler üzerinden açıklanmaya çalışılmıştır.

Bölüm 4: Zaman Gecikmeli Sistemler

Bu bölümde; zaman gecikmeli sistemlerden genel olarak bahsedilip fonksiyonel diferansiyel denklemler ve türleri açıklanmıştır. Fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir alt sınıfı olan gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler üzerinde durularak kullanım alanlarına ve modellenmesine yer verilmiştir. Gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerle modellenen zaman gecikmeli sistemlere birkaç örnek verilerek matematiksel modellerine değinilmiştir. Sistemin matematiksel modelinde kullanılan gecikme teriminin önemine vurgu yapılmıştır. Zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik denklemlerinin kararlılık analizi için önemli olduğu vurgusu yapıp, gecikmenin döngü içindeki farklı durumları için sistemlerin karakteristik denklemleri çıkarılmıştır.

Bölüm 5: Zaman Gecikmeli Sistemlerin Kararlılık Analizi için Lambert W Fonksiyonu

Bu bölümde; Lambert W fonksiyonu tanıtılarak, doğrusal birinci dereceden ve homojen

gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümü Lambert W fonksiyonu yardımıyla gerçekleştirilip genelleştirilmiştir. Matris Lambert W fonksiyonuna ve kullanım amacına değinilmiştir. Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizinde Lambert W fonksiyonu kullanımına yer verilmiştir. Bazı örnek geri tipli zaman gecikmeli sistemlerin Lambert W fonksiyonu yardımıyla çözümü gerçekleştirilip kararlılığı incelenmiştir.

Bölüm 6: Zaman Gecikmeli Sistemlerin Kararlılık Analizi için Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri

Bu bölümde; Mikhailov eğrisinin özelliklerine ve Mikhailov'un kararlılık kriterlerine değinilmiştir. Kesir dereceli geri tipli zaman gecikmeli sistemler için önerilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterinin tam dereceli geri tipli zaman gecikmeli sistemler için uygulanabileceği üzerinde durulmuştur. Kararlılık kriterinin uygulanmasına yönelik örnekler verilmiştir.

Bölüm 7: Zaman Gecikmeli Doğrusal Olmayan Sistemlerin Kararlılık ve Çatallaşma Analizlerinin Gerçekleştirilmesi

Bu bölümde ilk olarak, zaman gecikmeli doğrusal olmayan kaotik bir sistemin denge noktasının doğrusallaştırılmış modelinden faydalanılarak kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilmiş, çatallaşmanın yönü Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak farklı sistem parametreleri ve zaman gecikmesi değerlerine göre incelenmiştir. İkinci olarak, zaman gecikmeli özdeş olmayan iki kaotik sistemin (biri Master Verici – diğeri Slave Alıcı olmak üzere) farklı başlangıç şartları için kaos senkronizasyonu gerçekleştirilmiştir. Master ve Slave sistemlerinin çıkışındaki hatayı sıfıra götürebilmek için Slave sisteme uygun bir kontrolör işareti uygulanmasını sağlayacak bir oransal kontrolör aktif kontrol yöntemi kullanılarak tasarlanmıştır. Elde edilen kontrolörün etkinliği Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak test edilmiş ve uygun kazanç aralığı seçilmiştir. Üçüncü olarak, tek hücreli zaman gecikmeli hücresel sinir ağının kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilmiş, çatallaşmanın yönü Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak farklı sistem parametreleri ve zaman gecikmesi değerlerine göre incelenmiştir. Her üç uygulamada da

elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek için Matlab ortamında elde edilen sistemlere ait benzetim sonuçları verilmiştir.

Bölüm 8: Sonuçlar

Bu bölümde, genel bir değerlendirme ile tezde elde edilen sonuçlar sunulmuş ve yorumlanmıştır.

2. KARARLILIK

Doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin zamanla değişip değişmeme durumlarına göre çok farklı şekillerde kararlılık tanımları verilmektedir. Genelde iki tip kararlılıktan bahsedilir. Bunlardan biri asimptotik anlamda kararlılık diğeri ise sınırlı giriş sınırlı çıkış kararlılığıdır. Sistemde hiçbir giriş uygulanmadığı halde başlangıç koşulları altında sistemin durumu ve çıkışı $t \rightarrow \infty$ için sıfıra gidiyorsa sistem asimptotik anlamda kararlıdır. Sistemin girişine uygulanan sınırlı girişler için çıkışı da $t \rightarrow \infty$ için sınırlı kalıyorsa sistem sınırlı giriş sınırlı çıkış kararlıdır [1-6].

Bu bölümde; doğrusal ve doğrusal olmayan sistemin denge noktasının kararlılığı ile ilgili tanım ve teoremler [2], doğrusal sistemlerin denge noktalarının yapısı ve karakteristik denklemin öz değerleri aracılığıyla kararlılık analizi [1,3-6], doğrusal olmayan sistemlerin doğrusallaştırılması ve doğrusallaştırılmış denge noktası etrafında kararlılıklarının incelenmesi [1] gibi konu başlıklarına yer verilecektir.

2.1. Kararlılığa İlişkin Bazı Tanımlar

2.1.1. Denge Noktası:

$D \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ yerel Lipschitz özelliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

özerk sistemini göz önüne alalım. $f(x^*) = 0$ şartını sağlayacak biçiminde bir $x^* \in D$ varsa x^* 'e (2.1) sisteminin denge noktası (sabit nokta, kritik nokta) denir.

Denge noktasının kararlılığına bakılarak sistemin kararlılığı belirlenebilir. Doğrusal sistemlerde bir tane denge noktası var iken doğrusal olmayan sistemlerde birden fazla denge noktası olabilir [1].

2.1.2. Sistem Gösterimi

Özerk doğrusal bir sistem,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.2)$$

şeklinde gösterilir. Burada A , $n \times n$ boyutunda bir matristir. Böyle bir sistemde $x(0) = x_0$ başlangıç şartı için çözüm,

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (2.3)$$

şeklindedir. Böylece orijin bu sistem için bir denge noktasıdır. A matrisinin zamanla değişip değişmeme durumuna göre zamanla değişen ya da zamanla değişmeyen sistemler olarak sınıflandırılırlar.

Doğrusal olmayan zamanla değişen dinamik bir sistem,

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.4)$$

şeklinde doğrusal olmayan diferansiyel denklem tarafından ifade edilebilir. Burada f , $n \times 1$ boyutunda doğrusal olmayan vektör fonksiyonu, x ise $n \times 1$ boyutunda durum vektörüdür. Denklem (2.4)'teki doğrusal olmayan sistem eğer zamana bağlı değil ise sistem doğrusal olmayan özerk yapıda olacaktır. Özerk sistemin durum denklemi,

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır [1].

2.1.3. Doğrusal Sistemler için Kararlılık Tanımı

Kararlılık tanımları verilmeden önce $\|\cdot\|$ normunun tanımı yapılacaktır.

Tanım 2.1: X , bir vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir normdur denir.

- (i) $\|x\| \geq 0$;
- (ii) $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$;
- (iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Yani, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ olmaktadır [64].

Homojen ve doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin denge noktası $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda [2];

Tanım 2.2: Eğer herhangi bir x_0 başlangıç durumu için, $t \geq 0$ olmak kaydıyla $\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\|$ şartını sağlayacak pozitif bir γ sabiti varsa $x^* = 0$ denge noktası kararlıdır.

Tanım 2.3: Eğer $x^* = 0$ denge noktası kararlı değilse kararsızdır.

Tanım 2.4: Eğer herhangi bir x_0 başlangıç durumu için, $t \geq T$ olmak kaydıyla $\|x(t)\| \leq \mu \|x_0\|$ şartını sağlayacak $\mu > 0$ için $T > 0$ var ise $x^* = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Tanım 2.5: Eğer herhangi bir x_0 başlangıç durumu için, $t \geq 0$ olmak kaydıyla $\|x(t)\| \leq k e^{-\lambda t} \|x_0\|$ şartını sağlayacak k ve λ pozitif sabit sayısı var ise $x^* = 0$ denge noktası global eksponansiyel kararlıdır.

2.1.4. Doğrusal Olmayan Sistemler için Kararlılık Tanımı

Homojen ve doğrusal olmayan bir sistemin denge noktası $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda [2];

Tanım 2.6: Eğer $\varepsilon > 0$ için $t \geq 0$ olmak kaydıyla $\|x_0\| < \delta$ iken $\|x(t)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise $x^* = 0$ denge noktası kararlıdır.

Tanım 2.7: $x^* = 0$ denge noktası kararlı değilse kararsızdır.

Tanım 2.8: $x^* = 0$ denge noktası kararlı ve $\|x_0\| < \delta$ iken $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ olacak şekilde $\delta > 0$ var ise $x^* = 0$ denge noktası asimptotik kararlıdır. Özellikle $t \geq T$ olmak kaydıyla $\varepsilon > 0$ için, $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $T > 0$ vardır.

Tanım 2.9: $x^* = 0$ denge noktası kararlı ve herhangi bir x_0 başlangıç durumu için, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ oluyorsa $x^* = 0$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. Özellikle, $M > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için, $t \geq T$ olmak kaydıyla $\|x_0\| < M$ iken $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $T > 0$ vardır.

Tanım 2.10: Eğer herhangi bir başlangıç durumu için, $t \geq 0$ olmak kaydıyla $\|x_0\| < \delta$ iken $\|x(t)\| < ke^{-\lambda t} \|x_0\|$ olacak şekilde δ, k ve λ pozitif sabitler var ise $x^* = 0$ denge noktası exponansiyel kararlıdır.

Tanım 2.11: Eğer herhangi bir başlangıç durumu için, $t \geq 0$ olmak kaydıyla $\|x(t)\| \leq ke^{-\lambda t} \|x_0\|$ olacak şekilde k ve λ pozitif sabitler var ise $x^* = 0$ denge noktası global exponansiyel kararlıdır.

2.2. Doğrusal Sistemlerin Denge Noktalarının Yapısı ve Kararlılığı

Bu başlık altında iki boyutlu doğrusal bir sistemin kararlılığı öz değer-öz vektör aracılığıyla incelenip faz şekillerinin yapıları belirlenecektir. A katsayı matrisi olmak üzere; $\dot{x} = Ax$ şeklinde iki boyutlu doğrusal ve özerk bir sistem matrisinin,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Denklem (2.6)'daki gibi tanımlandığını düşünelim. Bu doğrusal sistemi çözmek için öz değer-öz vektör metodunu kullanabiliriz. A 'nın λ_1 ve λ_2 öz değerleri,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

karakteristik Denklem (2.7)'nin çözümleridir. Denge noktasının özelliği, λ_1 ve λ_2 öz değerlerinin aşağıdaki ihtimallerine bağlıdır [1,3-6].

1. Reel, birbirinden farklı ve aynı işaretli olma durumu
2. Reel, birbirinden farklı ve zıt işaretli olma durumu

3. Reel ve birbirine eşit olma durumu
4. Sıfırdan farklı reel kısma sahip eşlenikler olma durumu
5. Saf imajiner kısma sahip olma durumu

Bu 5 durum ayrı ayrı incelenecektir. Her bir durumda aşağıdaki denge noktalarından hangisine karşılık geldiği belirlenecektir.

- a. Düğüm noktası (Node point)
- b. Eyer noktası (Saddle point)
- c. Spiral noktası (Spiral point)
- d. Merkez noktası (Center point)

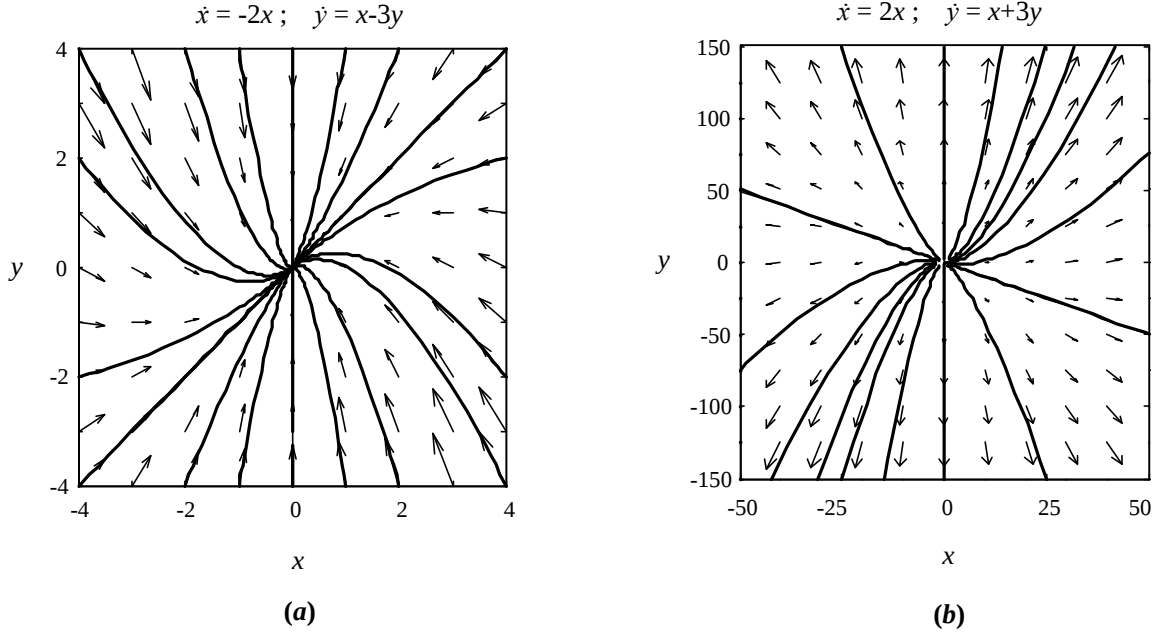
2.2.1. Reel, Birbirinden Farklı ve Aynı İşaretli Öz Değerler

Karakteristik Denklem (2.7)'nin kökleri olan λ_1 ve λ_2 öz değerleri reel, birbirinden farklı ve aynı işaretli iseler Denklem (2.6)'daki doğrusal sistemin orijindeki denge noktası bir düğüm (node) noktası olur. Bu durumda A matrisi, doğrusal bağımsız v_1 ve v_2 öz vektörlerine sahiptir. Genel çözüm, Denklem (2.8) biçimindedir [3,4,6].

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \quad (2.8)$$

Eğer öz değerler reel, birbirinden farklı ve negatif ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$) ise çözüm eğrileri t arttığında orijine yaklaşır. Yani herhangi bir başlangıç şartında $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman $x(t), y(t) \rightarrow 0$ gider. Bu durumda denge noktasına toplayıcı (sink) denir ve bu denge noktası asimptotik kararlıdır. Şekil 2.1(a)'da verilen örnek bir sistemin toplayıcı düğüm noktası için faz portresi gösterilmektedir. Şekil 2.1(a)'da görüldüğü üzere $e^{\lambda_1 t}$ ve $e^{\lambda_2 t}$ üstel ifadeleri $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman sıfıra gitmektedir.

Eğer öz değerler reel, birbirinden farklı ve pozitif ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$) ise çözüm eğrileri t arttığında orijinden ayrılır. Yani herhangi bir başlangıç şartında $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman $x(t), y(t) \rightarrow \infty$ gider. Bu durumda denge noktasına kaynak (source) denir ve bu denge noktası kararsız olur. Şekil 2.1(b)'de verilen örnek bir sistemin kaynak düğüm noktası için faz portresi gösterilmektedir. Şekil 2.1(b)'de görüldüğü üzere $e^{\lambda_1 t}$ ve $e^{\lambda_2 t}$ üstel ifadeleri $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman sonsuza gitmektedir.

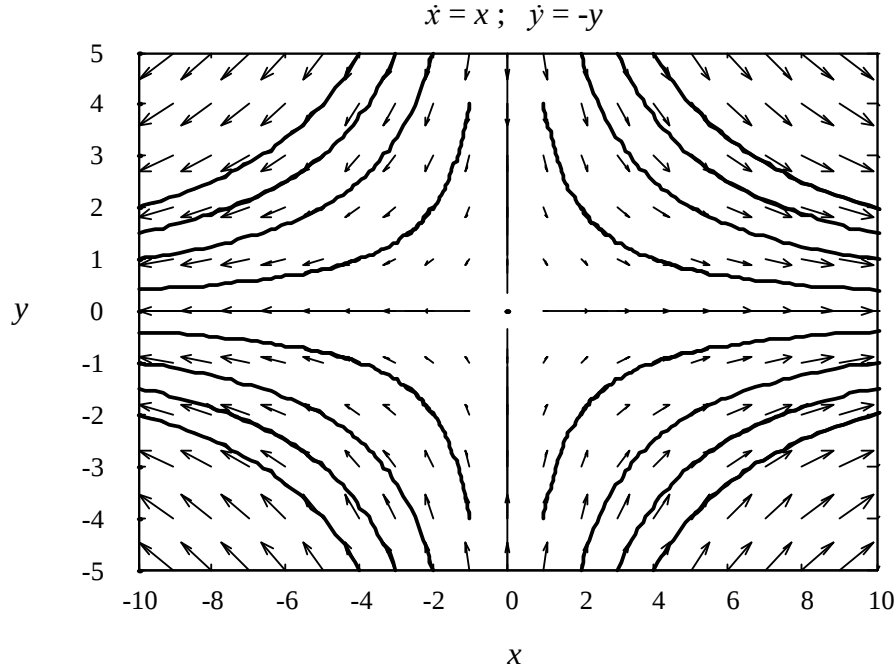


Şekil 2.1. Öz değerlerin reel, birbirinden farklı ve aynı işaretli olma durumunda faz portresi: **a)** Toplayıcı düğüm noktası **b)** Kaynak düğüm noktası

2.2.2. Reel, Birbirinden Farklı ve Zıt İşaretli Öz Değerler

Karakteristik Denklem (2.7)'nin kökleri olan λ_1 ve λ_2 öz değerleri reel, birbirinden farklı ve zıt işaretli ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) ise Denklem (2.6)'daki doğrusal sistemin orijindeki denge noktası bir eyer (saddle) noktası olur. Orijindeki denge noktası kararsız olur. Bu durumda genel çözüm Denklem (2.8)'deki gibi olur [3,4,6].

Şekil 2.2'de verilen örnek bir sistem için eyer noktasının faz portresi görülmektedir. Şekil 2.2'den görüldüğü üzere $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman $e^{\lambda_1 t}$ sıfıra, $e^{\lambda_2 t}$ ise sonsuza gitmektedir.



Şekil 2.2. Öz değerlerin reel, birbirinden farklı ve zıt işaretli olması durumunda bir eyer noktasının faz portresi

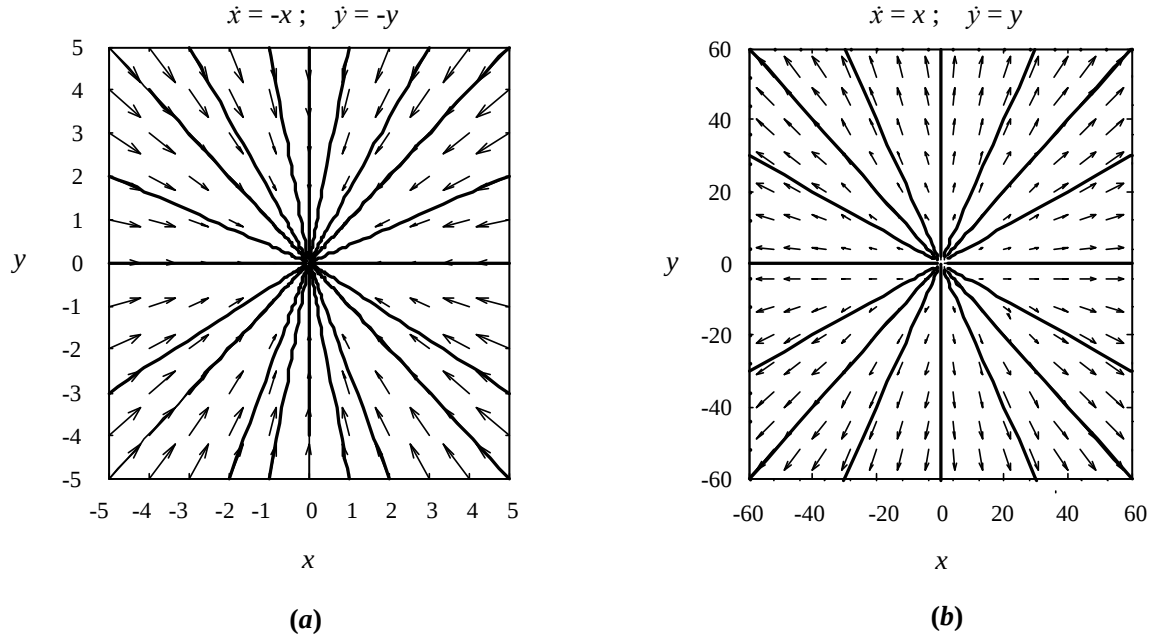
2.2.3. Reel ve Birbirine Eşit Öz Değerler

Bu durumda denge noktasının özelliği A matrisinin bir veya iki doğrusal öz vektöre sahip olup olmamasına bağlıdır [3-6].

Karakteristik Denklem (2.7)'nin kökleri olan λ_1 ve λ_2 öz değerleri reel, birbirine eşit ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$) ve birbirinden bağımsız iki öz vektöre sahip iseler Denklem (2.6)'daki doğrusal sistemin orijindeki denge noktası bir düğüm (node) noktası olur. Öz değerler $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ise denge noktası kaynak olur ve kararsızdır. Öz değerler $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ise denge noktası toplayıcı olur ve asimptotik kararlıdır. A , v_1 ve v_2 gibi iki tane doğrusal bağımsız öz vektöre sahip olsun. Bu durumda genel çözüm, Denklem (2.9) formunda yazılabilir.

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{\lambda t} (c_1 v_1 + c_2 v_2) \quad (2.9)$$

Şekil 2.3(a)'da iki öz vektöre sahip ve birbirine eşit öz değerler durumunda örnek bir sistemin toplayıcı düğüm noktasına ait faz portresi görülmektedir. Şekil 2.3(b)'de ise iki öz vektöre sahip ve birbirine eşit öz değerler durumunda örnek bir sistemin kaynak düğüm noktasına ait faz portresi görülmektedir.

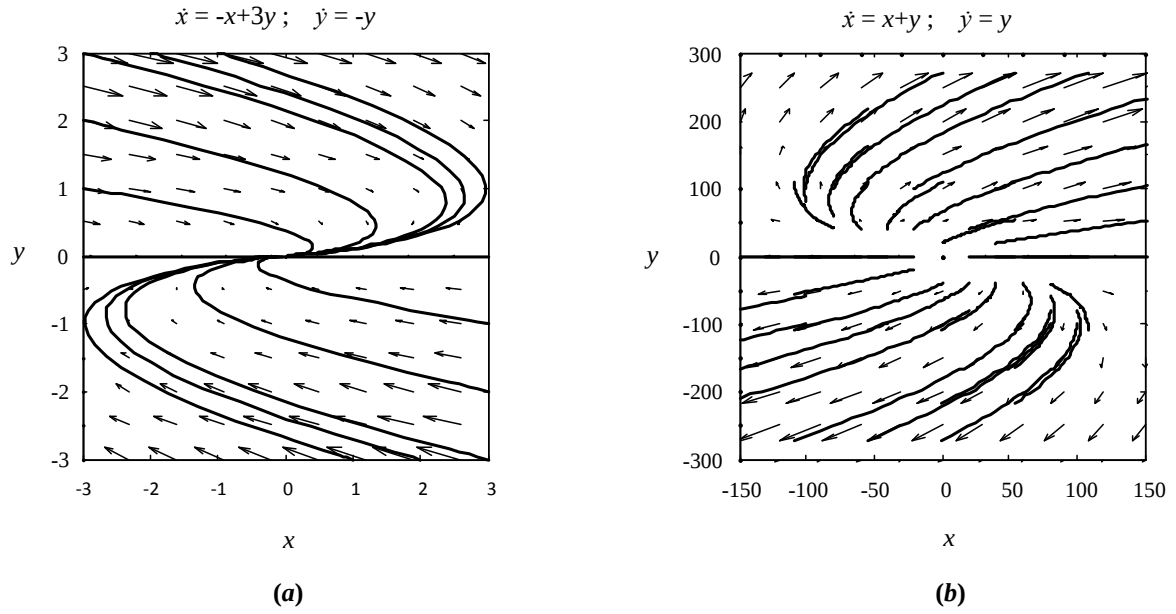


Şekil 2.3. Öz değerlerin reel, birbirine eşit ve iki öz vektöre sahip olması durumunda faz portresi: **a)**Toplayıcı düğüm noktası **b)** Kaynak düğüm noktası

Karakteristik Denklem (2.7)'nin kökleri olan λ_1 ve λ_2 öz değerleri reel ve birbirine eşit ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$) ve sadece bir tane bağımsız öz vektöre sahip iseler Denklem (2.6)'daki doğrusal sistemin orijindeki denge noktası bir düğüm (node) noktası olur. Öz değerler $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ise bu düğüm kaynak olur ve kararsızdır. Öz değerler $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ise bu düğüm bir toplayıcı olur ve asimptotik kararlıdır. Genel çözüm, Denklem (2.10) biçiminde yazılabilir.

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} v + c_2 e^{\lambda t} (u + ktv) = e^{\lambda t} (c_1 v + c_2 u + c_2 ktv) \quad (2.10)$$

Şekil 2.4(a)'da bir öz vektöre sahip ve birbirine eşit öz değerler durumunda örnek bir sistemin toplayıcı düğüm noktasına ait faz portresi görülmektedir. Şekil 2.4(b)'de ise bir öz vektöre sahip ve birbirine eşit öz değerler durumunda örnek bir sistemin kaynak düğüm noktasına ait faz portresi görülmektedir.



Şekil 2.4. Öz değerlerin reel, birbirine eşit ve bir öz vektöre sahip olması durumunda faz portresi:
a)Toplayıcı düğüm noktası **b)** Kaynak düğüm noktası

2.2.4.Sıfırdan Farklı Reel Kısmı Sahip Kompleks Eşlenik Öz Değerler

Karakteristik Denklem (2.7)'nin kökleri olan λ_1 ve λ_2 değerlerinin reel kısmı sıfırdan farklı olan kompleks eşlenik kökler ise $(\lambda_{1,2} = \sigma \mp j\omega)$ Denklem (2.6)'daki doğrusal sistemin orijindeki denge noktası bir spiral nokta olur. $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler $v_{1,2} = u + jv$ olduğunu farz edelim. Bu durumda genel çözüm Denklem (2.16) biçimindedir [3-6].

$$x(t) = e^{(\sigma+j\omega)t} (u + jv) = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) (u + jv) \quad (2.11)$$

$$x(t) = e^{\sigma t} [u \cos \omega t - v \sin \omega t] + j e^{\sigma t} [u \sin \omega t + v \cos \omega t] \quad (2.12)$$

$$x_1(t) = e^{\sigma t} (u \cos \omega t - v \sin \omega t) \quad (2.13)$$

$$x_2(t) = e^{\sigma t} (u \sin \omega t + v \cos \omega t) \quad (2.14)$$

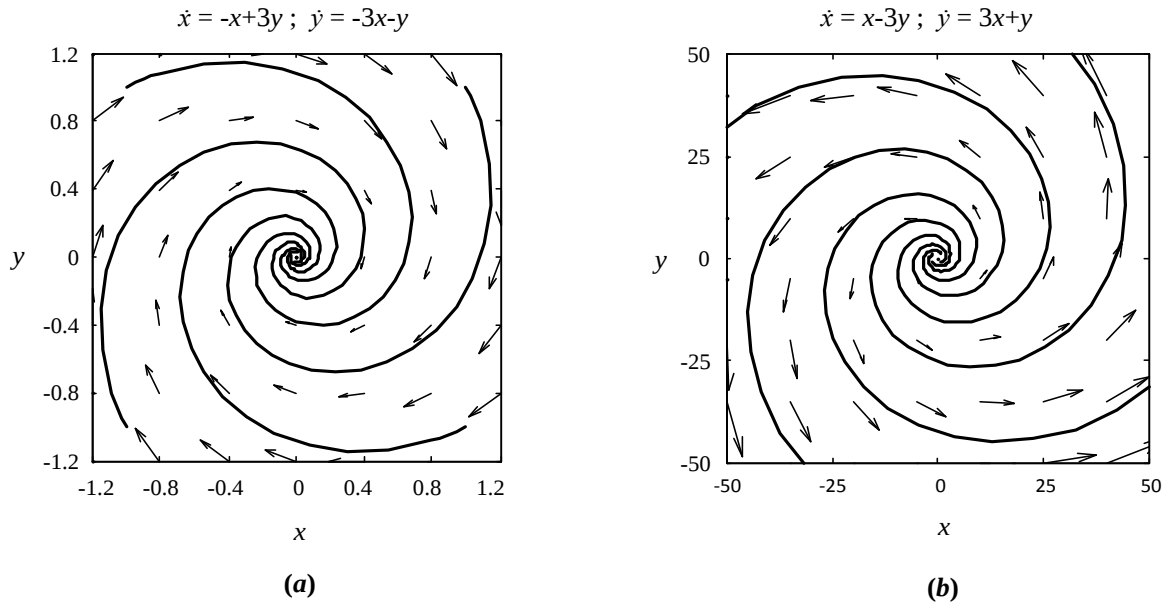
$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (2.15)$$

$$x(t) = c_1 e^{\sigma t} [u \cos \omega t - v \sin \omega t] + c_2 e^{\sigma t} [u \sin \omega t + v \cos \omega t] \quad (2.16)$$

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$ bileşenleri, t arttığı zaman pozitif ve negatif değerler arasında değişir. Böylece denge noktası spiral nokta adını alır.

Eğer öz değerlerin reel kısmı olan σ negatif ($\sigma < 0$) ise sistemin bütün yörüngeleri t sonsuza giderken orijine spiraller olarak yaklaşır. Bu durumda denge çözümü asimptotik kararlı bir spiral toplayıcıdır. Şekil 2.5(a)'da örnek bir sistemin spiral toplayıcı denge noktasına ait faz portresi gösterilmektedir.

Eğer öz değerlerin reel kısmı olan σ pozitif ($\sigma > 0$) ise sistemin bütün yörüngeleri t sonsuza giderken orijinden spiraller olarak uzaklaşır. Bu durumda denge çözümü kararsız bir spiral kaynaktır. Şekil 2.5(b)'de örnek bir sistemin spiral kaynak denge noktasına ait faz portresi gösterilmektedir.

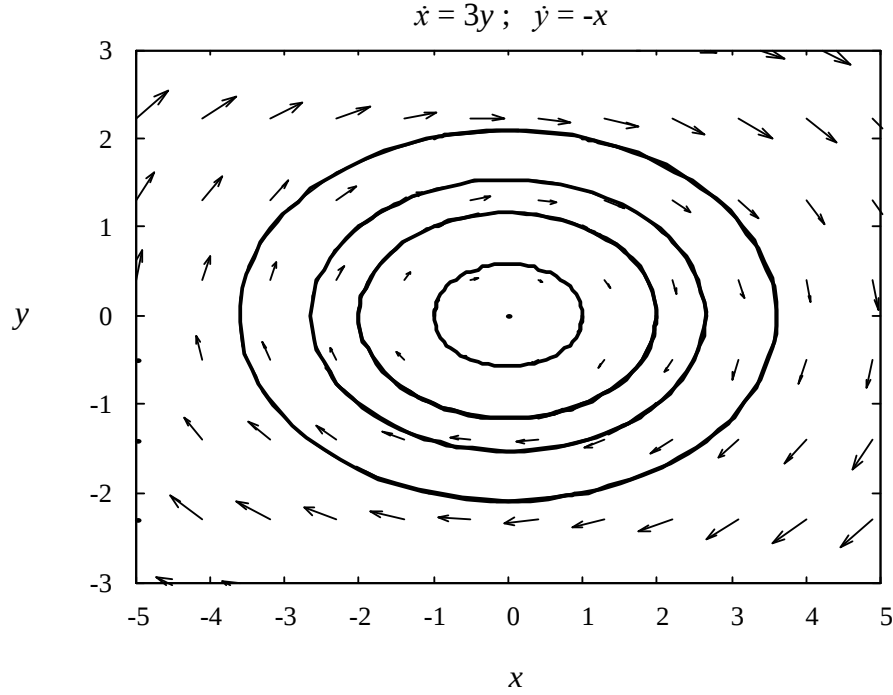


Şekil 2.5. Öz değerlerin sıfırdan farklı reel kısma sahip kompleks eşlenik olma durumunda faz portresi: a)Spiral toplayıcı b) Spiral kaynak

2.2.5.Pür İmajiner Kısma Sahip Olan Öz Değerler

Karakteristik Denklem (2.7)'nin kökleri olan λ_1 ve λ_2 öz değerlerinin reel kısmı sıfır olan kompleks eşlenik kökler ($\lambda_{1,2} = \mp j\omega$) ise Denklem (2.6)'daki doğrusal sistemin orijindeki denge noktası bir merkez (center) olur. Bu denge noktası kararlıdır fakat

asimptotik kararlı değildir. Bu kararlılık ayrıca nötr kararlılık olarak da adlandırılır. Genel çözüm, Denklem (2.16) biçimindedir [3-6]. Şekil 2.6’da verilen örnek bir sistem için öz değerlerin pür imajiner kısma sahip olması durumunda faz portresi gösterilmektedir.



Şekil 2.6. Öz değerlerin pür imajiner kısma sahip olması durumunda faz portresi

2.3. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Denge Noktalarının Yapısı ve Kararlılığı

Doğrusal olmayan sistemlerin çözümleri ve kararlılık analizleri ile doğrusal sistemlerin çözümleri ve kararlılık analizleri arasında bir ilişki mevcuttur. Genellikle doğrusal olmayan sistemi çözmeden, doğrusallaştırarak çözümü hakkında fikir sahibi olunabilir. Bu başlık altında doğrusal olmayan sistemlerin davranışları, denge noktasının yapısı ve kararlılığı incelenecektir.

2.3.1. Doğrusallaştırma

Doğrusallaştırma; doğrusal olmayan sistemin yerel kararlılığı ile ilgilidir. Doğrusal olmayan sistem, denge noktası civarı için doğrusallaştırıldığında doğrusal sistem gibi davranır. (2.5)’teki özerk sistemi düşünelim ve $f(x)$ in sürekli türevlenebilir bir

fonksiyon olduğu kabul edilsin. Doğrusal olmayan sistem dinamiği Denklem (2.17)'deki gibi yazılabilir.

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} x + f_{y,d.t.}(x) \quad (2.17)$$

Burada $f_{y,d.t.}(x)$, x 'in yüksek dereceli terimlerini ifade etmektedir. Denklem (2.17)'deki Taylor açılımı birinci terimden başlamaktadır ve $f(0)=0$ olduğundan $x=0$ denge noktasıdır. A katsayı matrisi, $x=0$ 'da x 'e göre f 'in Jakoben matrisini göstermektedir.

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (2.18)$$

Doğrusal olmayan sistemin denge noktasında doğrusallaştırılması,

$$\dot{x} = Ax \quad (2.19)$$

şeklinde olur [1].

2.3.2. Doğrusallaştırılmış Sistemin Kararlılığı

Doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığı ve denge noktalarının faz şekillerinin yapısı bu sistemin doğrusallaştırılmasıyla bulunabilir. Lyapunov'un doğrusallaştırma metodu doğrusal olmayan sistemlerin yerel kararlılığı ile ilgilenir [1].

(2.5) sistemi ve bunun doğrusallaştırılmış (2.19) sisteminin her ikisi de orijinde $(0,0)$ bir denge noktasına sahip olduğunu kabul edelim. λ_1 ve λ_2 , doğrusallaştırılmış (2.19) sistemin katsayı matrisinin öz değerleri olsun. Bu durumda sistemin kararlılığı;

- Eğer tüm öz değerler sol yarı s -düzleminde ise doğrusallaştırılmış sistem kesinlikle karardır. Denge noktası asimptotik karardır.
- Eğer en az bir öz değer sağ yarı s -düzleminde ise doğrusallaştırılmış sistem kararsızdır. Denge noktası kararsızdır.

- Eğer tđm öz değerler sol yarı kompleks düzlemde fakat en az bir tanesi $j\omega$ eksenini üzerinde ise yani doğrusallaştırılmış sistem marjinal kararlı ise bu durumda doğrusal yaklaşımdan herhangi bir sonuç çıkarılamaz. Doğrusal olmayan sistemin denge noktası kararlı, asimptotik kararlı veya kararsız olabilir.

Sonuç olarak, doğrusal olmayan bir sistemin denge noktasının yapısı ve kararlılığı bu sistemin doğrusallaştırılmasıyla ile çoğu zaman tam olarak belirlenebilir [1].

3. ÇATALLAŞMA VE TÜRLERİ

Dinamik sistemlerde, sistem parametresindeki çok küçük değişiklikler sistemin davranışındaki nitel yapıyı değiştirebilmektedir. Çatallaşma olayında sistem kararlı yapıdan kararsız yapıya ya da kararsız yapıdan kararlı yapıya geçerken bazen kritik sistem parametresi değerinde limit çevrim davranış gözlemlenebilir. Yani, parametreler kritik değerler civarındayken sistemin davranışı aniden değişebilmektedir.

Bu bölümde; limit çevrime [1], çatallaşma ve türlerine [6-8] yer verilecektir. Sistem parametrelerinin değişiminin, sistemin durum uzayında oluşturduğu değişiklikler incelenecektir.

3.1. Limit Çevrim

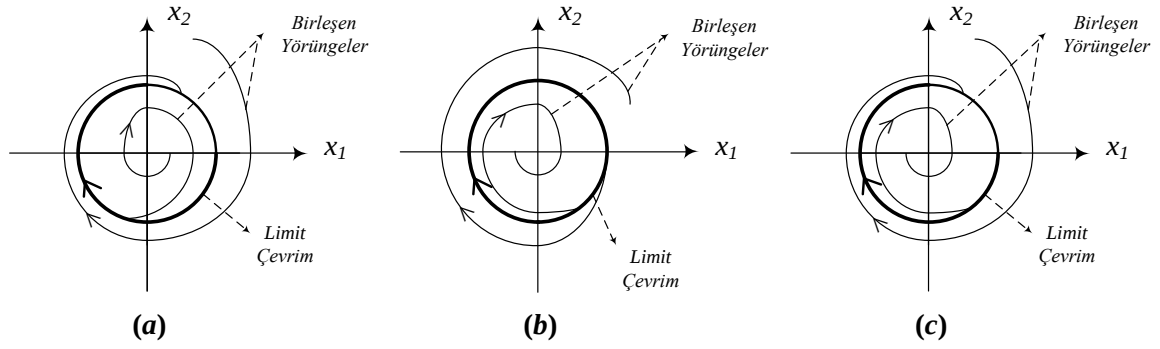
Doğrusal olmayan sistemlerde dış uyarım olmaksızın sabit genlikli ve sabit periyotlu salınımlar (osilasyonlar) gözlenebilir. Bu osilasyonlar limit çevrim veya kendinden uyarmalı salınımlar olarak adlandırılır. Bu önemli olay Van der pol tarafından 1920'lerde ilk olarak çalışılmış osilasyon dinamikleri ile izah edilmiştir [1].

Limit çevrimin etrafındaki yörüngelerin hareket yönlerine göre 3 farklı tipi bulunmaktadır.

1. **Kararlı limit çevrim:** Limit çevrimin çevresindeki tüm yörüngeler $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman limit çevrimde birleşir.
2. **Kararsız limit çevrim:** Limit çevrimin çevresindeki tüm yörüngeler $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman limit çevrimden uzaklaşır.
3. **Yarı kararlı limit çevrim:** $t \rightarrow \infty$ gittiği zaman limit çevrimin etrafındaki bazı yörüngeler onda birleşirken bazıları uzaklaşır.

Şekil 3.1'de kararlı, kararsız ve yarı kararlı limit çevrimin yörünge durumları görülmektedir. Eğer yörüngeler limit çevrime yaklaşırsa kararlı aksi takdirde kararsızdır.

Kontrol sistemlerinde limit çevrimin varlığını tahmin etmek büyük önem taşımaktadır. Limit çevrimin varlığı genellikle bilgisayar simülasyonları aracılığıyla ya da Poincare-Bendixson teoremleri alternatifleriyle tespit edilir [1].



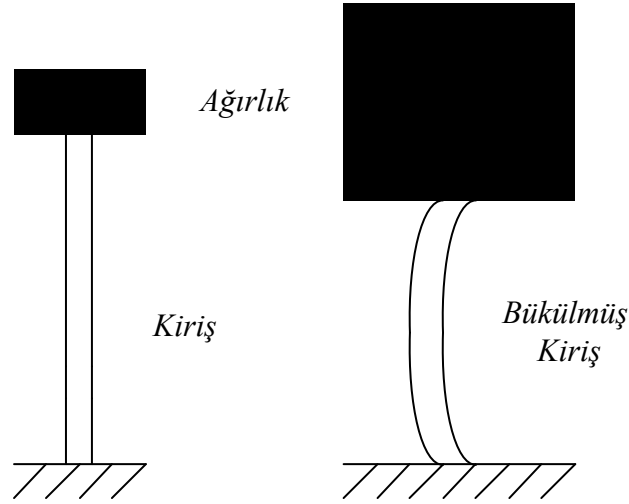
Şekil 3.1. Kararlı, kararsız ve yarı kararlı limit çevrim

3.2. Çatallaşma

Dinamik sistemlerde sistemin parametresi değiştiği zaman genellikle sistemin niteliksel yapısı da değişmektedir. Dinamik sistemler incelendiğinde çatallaşmanın, sistem parametresindeki değişimler sonucu ortaya çıktığı görülmektedir. Sistemde yeni denge noktaları oluşabildiği gibi sistemde var olan denge noktaları kaybolabilir veya bu denge noktalarının kararlılık durumları da değişebilir. Bu niteliksel değişimlere çatallaşma ve bu değişimin meydana geldiği parametre değerine çatallaşma değeri denir [7,8].

Sistem parametreleri değiştiği zaman modelde kararsız bir yapı görülebilir. Örneğin; Şekil 3.2'deki sistemi ele alalım. Kirişin tepesine küçük bir ağırlık yerleştirildiği zaman kiriş dikey bir şekilde pozisyonunu korur. Fakat ağırlık arttırıldığı zaman bu dikey pozisyon kararsızlaşır ve kiriş bükülür. Bu örnekte kontrol parametresi olarak ağırlık önemli bir rol oynamaktadır. Kirişin dikey pozisyonda bükülmesi ise dinamik değişken rolünü oynamaktadır [8]. Sonuç olarak, sistemler genelde bir veya birden fazla parametre içerdiğinden çatallaşma problemini içeren birçok olayla karşılaşabiliriz.

Bu bölümde, bazı çatallaşma türleri ve onların sınıflandırılması anlatılacaktır.



Şekil 3.2. Çatallaşma olayı

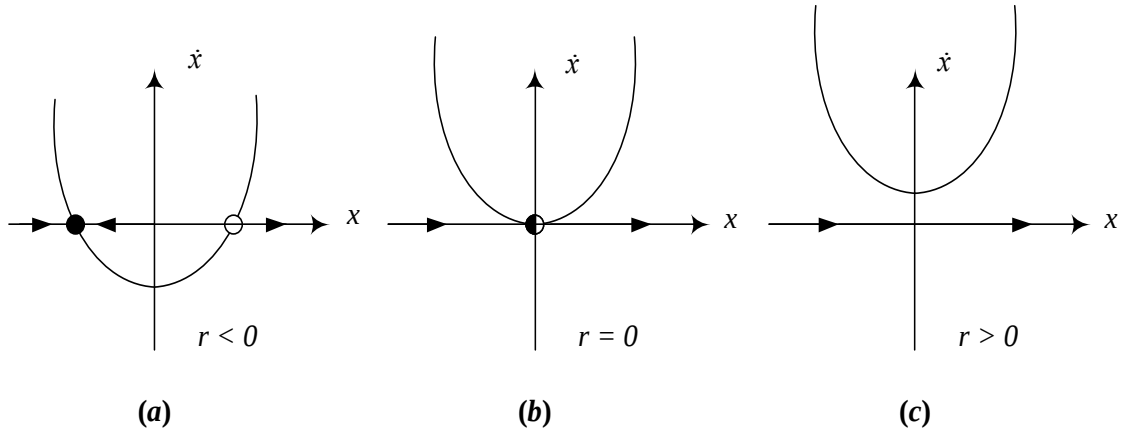
3.2.1. Eyer Düğümü Çatallaşma (Saddle Node Çatallaşma)

Bu çatallaşma türünde sistem parametresi değiştikçe sistemin denge noktaları birbirine doğru hareket eder, çarpışır ve yok olur. Bu denge noktalarından biri kararlı diğeri kararsızdır. Eyer düğümü çatallaşma, sürekli dinamik sistemlerde referans olarak çok sık kullanılır. Ayırık dinamik sistemlerde bu çatallaşma genellikle fold çatallaşma olarak adlandırılır. Eyer düğüm çatallaşmanın normal formu Denklem (3.1) şeklinde bir örnek ile açıklanabilir [8].

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2 \quad (3.1)$$

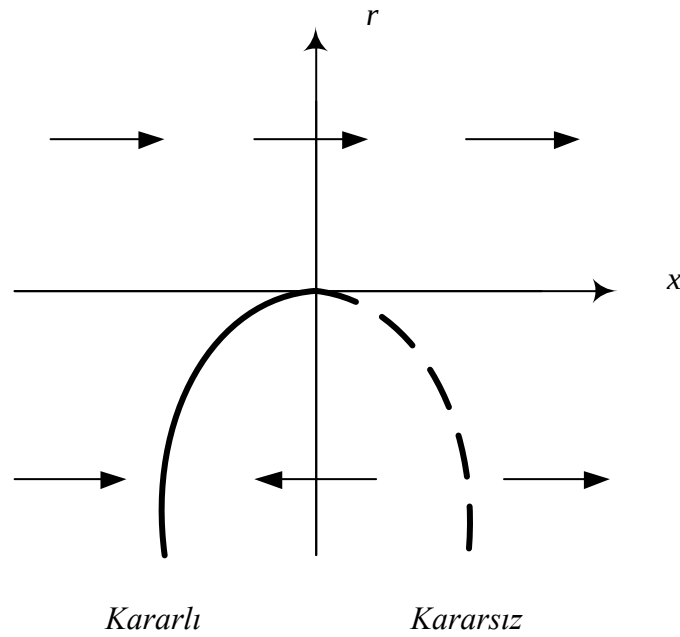
Burada x durum değişkeni, r çatallaşma parametresidir. Şekil 3.3'te, Denklem (3.1) için oluşan eyer düğümü çatallaşmasına ait farklı parametre durumlarının vektör alanları görülmektedir.

- $r < 0$ iken $-\sqrt{-r}$ 'de kararlı bir denge noktası ve $+\sqrt{-r}$ 'de kararsız bir denge noktası olmak üzere iki denge noktası vardır.
- $r = 0$ 'da (çatallaşma parametresi) bir tane denge noktası oluşur. Çünkü denge noktaları yarı kararlı sabit bir noktada birleşir. Bu durumda denge noktası bir eyer düğüm noktası olarak adlandırılır.
- $r > 0$ 'da denge noktaları yok olur.



Şekil 3.3. Eyer düğümü çatallaşmada farklı parametre durumları için vektör alanları

Şekil 3.4'te eyer düğüm çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı görülmektedir [8].



Şekil 3.4. Eyer düğüm çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı

3.2.2. Transkritik Çatallaşma

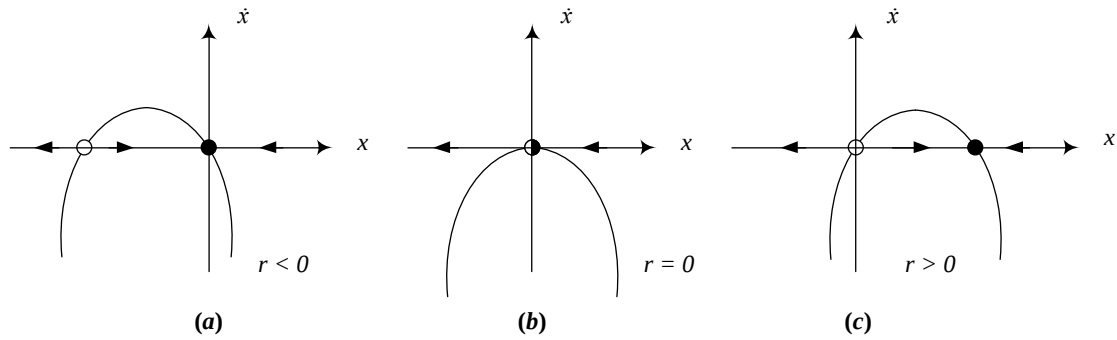
Tüm parametre değerleri için denge noktasının var olduğu ve asla yok edilemediği bazı durumlar vardır. Ancak parametre değiştiği zaman kararlılığı değişir. Yani bu çatallaşma türünde biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki denge noktası vardır ve bu iki denge noktası çatallaşma noktasından geçerken kararlılık yapılarını değiştirirler. Kararlı olan

denge noktası kararsız, kararsız olan denge noktası ise kararlı olur. Transkritik çatallaşmanın normal formu Denklem (3.2) şeklindeki bir örnek ile açıklanabilir [8].

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (3.2)$$

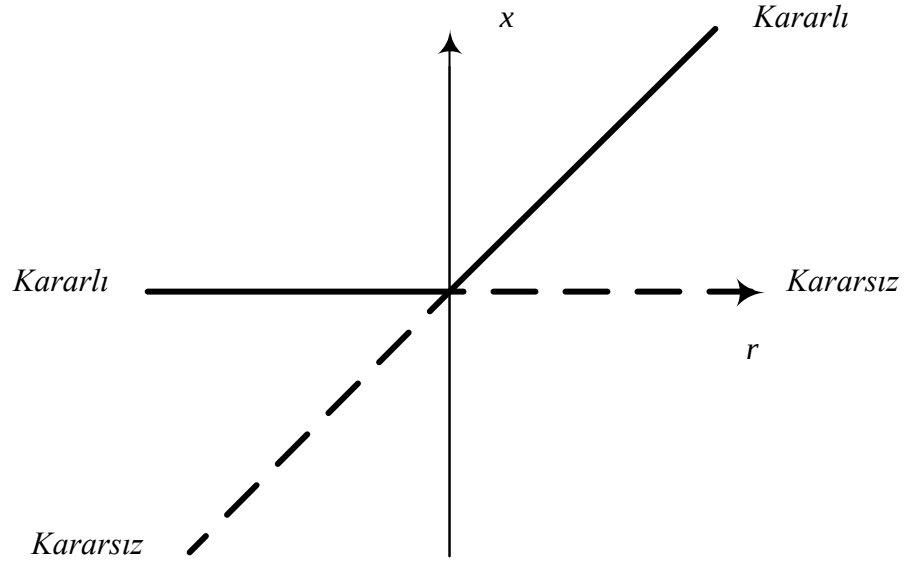
Denklem (3.2) için $x=0$ ve $x=r$ 'de iki tane denge noktası mevcuttur. Şekil 3.5'te Denklem (3.2) için oluşan transkritik çatallaşmasına ait farklı parametre durumlarının vektör alanları görülmektedir.

- $r < 0$ iken $x=0$ kararlı, $x=r$ ise kararsız denge noktası olur.
- $r=0$ 'da kararsız denge noktası orijine yaklaşır ve $r=0$ ile birleşir. Çatallaşma oluşur.
- $r > 0$ iken $x=0$ kararsız denge noktası, $x=r$ ise kararlı denge noktası olur.



Şekil 3.5. Transkritik çatallaşmada farklı parametre durumları için vektör alanları

Şekil 3.6'da transkritik çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı görülmektedir [8].



Şekil 3.6. Transkritik çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı

3.2.3. Tırmık Çatallaşma (Pitchfork Çatallaşma)

Tırmık çatallaşma genellikle simetrik sistemlerde oluşur. Bu çatallaşma türü, süperkritik tırmık çatallaşma ve subkritik tırmık çatallaşma olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

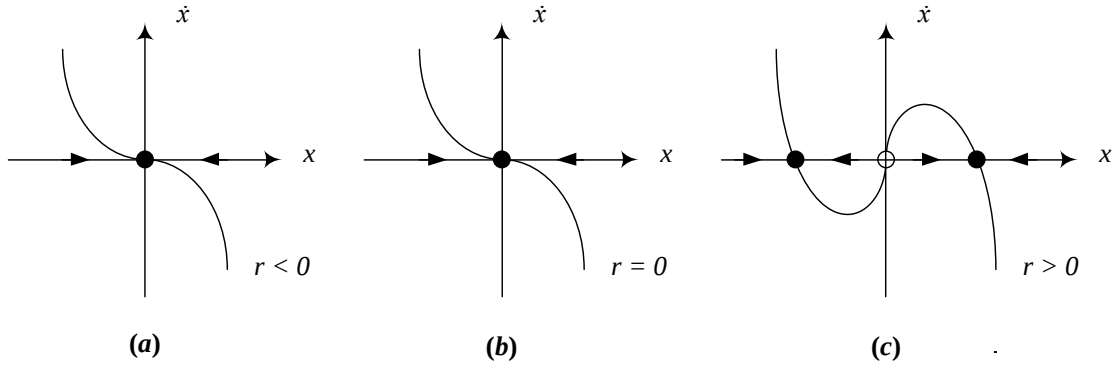
3.2.3.1. Süperkritik Tırmık Çatallaşma

Süperkritik tırmık çatallaşmanın normal formu Denklem (3.3) şeklindeki bir örnek ile verilebilir [8].

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3 \quad (3.3)$$

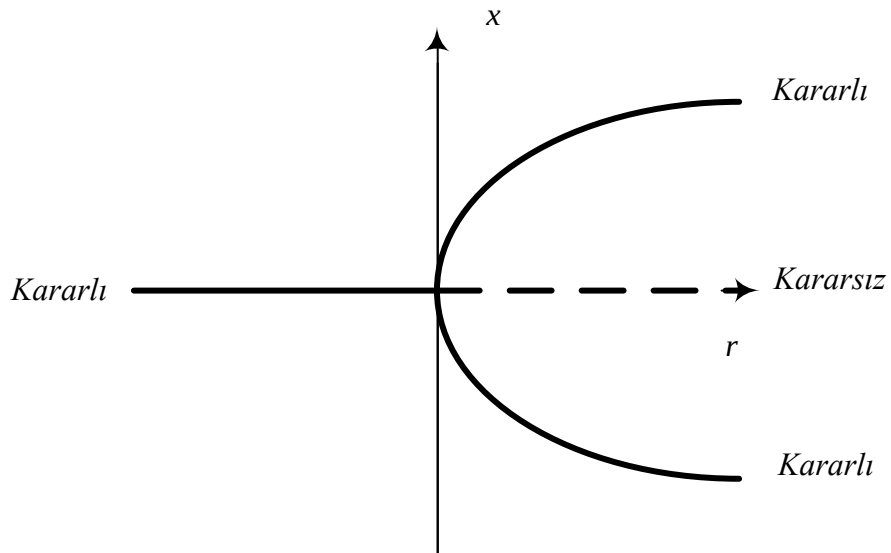
Sistemin $x=0$ ve $x=\pm\sqrt{r}$ olmak üzere üç tane denge noktası mevcuttur. Şekil 3.7’de Denklem (3.3) için oluşan süperkritik tırmık çatallaşmasına ait farklı parametre durumlarının vektör alanı görülmektedir.

- $r < 0$ için $x=0$ kararlı bir denge noktası olur.
- $r = 0$ için $x=0$ denge noktası hala kararlıdır fakat bu çok daha zayıf bir şekildedir.
- $r > 0$ için $x=0$ kararsız bir denge noktası olur ve $x=\pm\sqrt{r}$ olmak üzere iki kararlı denge noktası oluşur. Bu denge noktaları birbirine göre simetriktir.



Şekil 3.7. Süperkritik tırmık çatallaşmada farklı parametre durumları için vektör alanları

Şekil 3.8’de süperkritik tırmık çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı görülmektedir [8].



Şekil 3.8. Süperkritik tırmık çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı

3.2.3.2. Subkritik Tırmık Çatallaşma

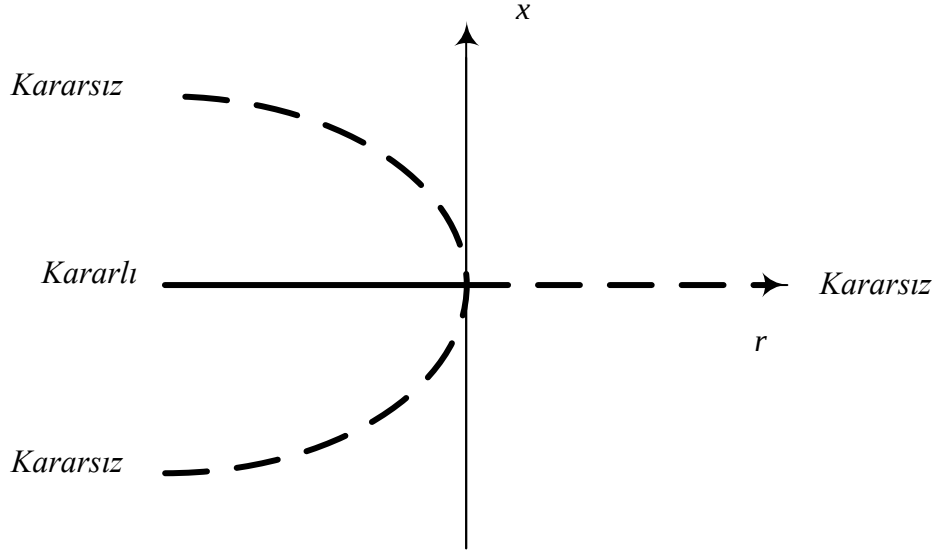
Subkritik tırmık çatallaşmanın normal formu Denklem (3.4) şeklindeki bir örnek ile verilebilir [8].

$$\frac{dx}{dt} = rx + x^3 \quad (3.4)$$

Sistemin $x = 0$ ve $x = \pm\sqrt{r}$ olmak üzere üç tane denge noktası mevcuttur.

- $r < 0$ için $x = 0$ ’da kararlı bir denge noktası ve $x = \pm\sqrt{-r}$ ’de iki tane kararsız denge noktası oluşur.
- $r > 0$ için $x = 0$ ’da kararsız bir denge noktası oluşur.

Şekil 3.9’da subkritik tırmık çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma diyagramı görülmektedir [8].

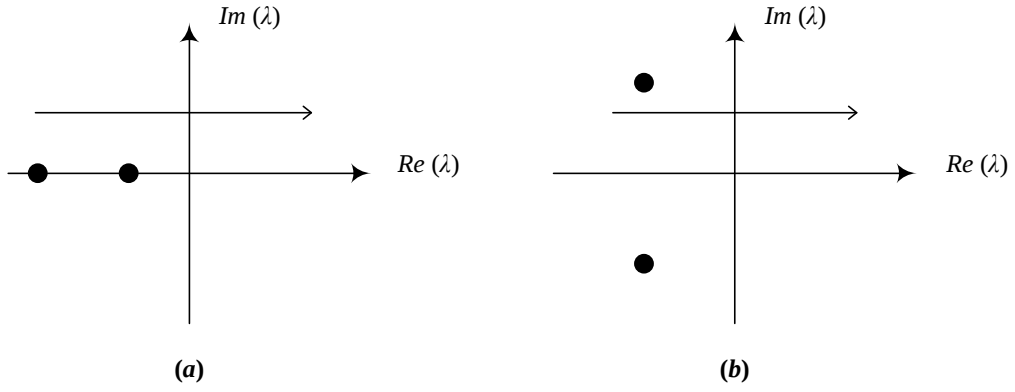


Şekil 3.9. Subkritik tırmık çatallaşması için r parametresine göre çizilen çatallaşma

3.2.4. Hopf Çatallaşma

İki veya daha fazla birinci mertebeden diferansiyel denklem içeren sistemlerde meydana gelen çatallaşma türüne “Hopf Çatallaşma” denir. Hopf çatallaşmada sistem parametresinin değeri değişirken, sistemin dinamiği kararlı spiralden merkeze, merkezden de kararsız spirale dönüşebilir [7,8].

Hopf çatallaşmada, sistem parametresi değiştiği zaman kompleks eşlenik kök imajiner eksende sağa ya da sola hareket eder. Bu durumda kararlı veya kararsız, sistem salınımları da denilen limit çevrimler gözükecek ya da gözden kaybolacaktır. Bu limit çevrimlerin kararlılığına bağlı olarak, hopf çatallaşmaları ya subkritik ya da süperkritik olabilir. Şekil 3.10(a)’da eyer noktası, transkritik ve pitchfork çatallaşmada öz değerlerin genel değişim profili, Şekil 3.10(b)’de ise hopf çatallaşmada bir çift imajiner öz değerlerin genel değişim profili görülmektedir [8].



Şekil 3.10. a) Eyer noktası, transkritik ve tırmık çatallaşmada öz değerlerin genel değişim profili
b) Hopf çatallaşmada öz değerlerin genel değişim profili

Denge noktasının kararlılığının bir limit çevrim hareketleri içinde kaybolmasına bağlı olarak iki tip hopf çatallaşması vardır. Bunlar süperkritik ve subkritik hopf çatallaşmalarıdır [7,8].

3.2.4.1. Süperkritik Hopf Çatallaşma

Sistemin kararlı denge noktası, değişen sistem parametresine bağlı olarak oluşan kararlı bir limit çevrim etrafında kararlılığını kaybedip kararsız bir denge noktasına dönüşürse oluşan çatallaşmaya süperkritik hopf çatallaşma denir. Denklem (3.5)'teki dinamik sistemin hopf çatallaşma analizi yapalım [8].

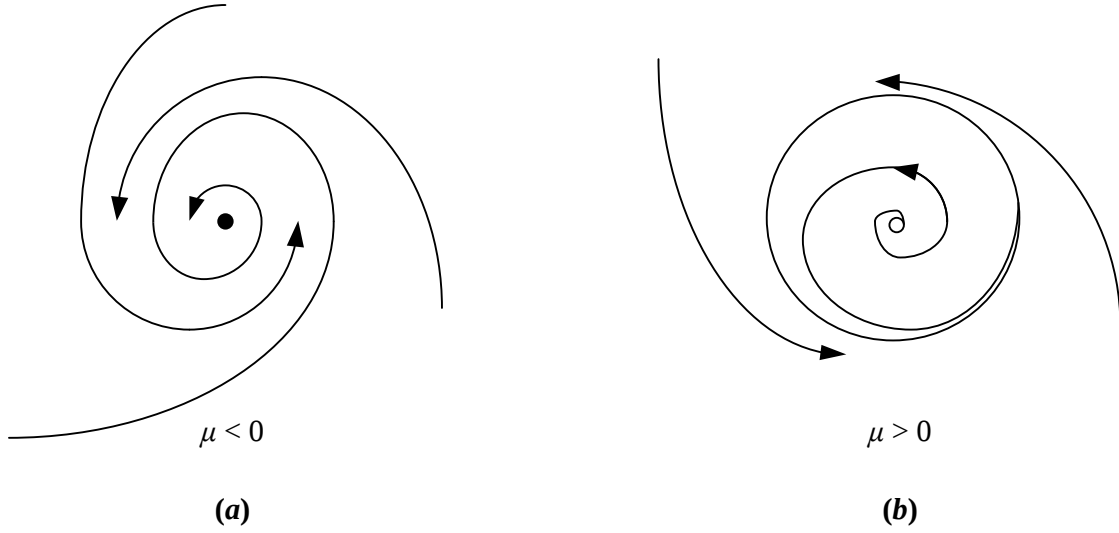
$$\dot{r} = \mu r - r^3 \quad (3.5)$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2$$

Bu dinamik sistemde üç tane parametre vardır. Bu parametrelerden denge noktasının kararlılığını μ parametresi belirlerken, ω parametresi salınımın frekans ve yönünü belirler ve b parametresi ise daha büyük salınımlarda frekansın genlik üzerindeki bağımlılığını belirler.

$\mu < 0$ olduğu zaman $r = 0$ 'da orijin kararlı spiraldir. $\mu = 0$ için orijin hala kararlı spiraldir fakat zayıftır. $\mu > 0$ 'da orijinde kararsız bir spiral vardır ve $r = \sqrt{\mu}$ 'de bir kararlı limit çevrim oluşur. Şekil 3.11'de süperkritik hopf çatallaşmaya ait farklı parametre

durumları görülmektedir. Şekil 3.11(a)'da kararlı bir denge noktası değişen sistem parametresine bağlı olarak Şekil 3.11(b)'de görüldüğü gibi kararlı bir limit çevrim etrafında kararlılığını kaybetmektedir.



Şekil 3.11. Süperkritik hopf çatallaşmada kararlılık değişimi ve oluşan limit çevrimler

Çatallaşma boyunca öz değerlerin davranışını görmek için kartezyan koordinat düzleminde sistemi tekrar yazıp jakobiyen matrisine bakalım [8].

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (3.6)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad (3.7)$$

$$\dot{x} = (\mu r - r^3) \cos \theta - r(\omega + br^2) \sin \theta \quad (3.8)$$

$$\dot{x} = (\mu - [x^2 + y^2])x - (\omega + b[x^2 + y^2])y \quad (3.9)$$

$$\dot{x} = \mu x - \omega y + \text{kübikterimler} \quad (3.10)$$

Benzer şekilde,

$$\dot{y} = \omega x + \mu y + \text{kübikterimler} \quad (3.11)$$

Bu yüzden orijindeki jakobiyen matrisi Denklem (3.12)'deki gibi olur.

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Öz değerler ise Denklem (3.13) biçimindedir.

$$\lambda = \mu \pm i\omega \quad (3.13)$$

Görüldüğü gibi μ negatif değerden pozitif değere arttırıldığı zaman öz değerler imajiner ekseninde soldan sağa geçer.

3.2.4.2. Subkritik Hopf Çatallaşma

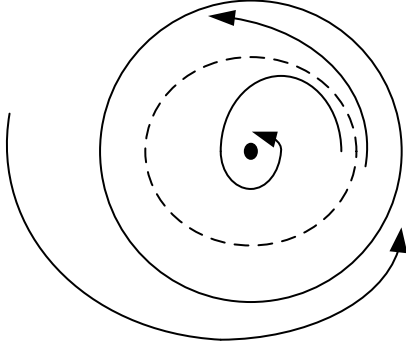
Subkritik hopf çatallaşmada kararlı denge noktası ile kararlı limit çevrim arasında kararsız bir limit çevrim bulunmaktadır. Çatallaşmadan önce var olan bu kararsız limit çevrim daralır ve çatallaşma sırasında kararlı denge noktasıyla birleşerek gözden kaybolur. Çatallaşmadan sonra denge noktası kararsız olmaktadır. Denklem (3.14)'te verilen dinamik sistemin hopf çatallaşma analizini gerçekleştirelim [8].

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$\mu < 0$ için orijinde kararlı bir denge noktası ve kararlı bir limit çevrim olmak üzere iki tane çekici vardır. Bu iki çekici arasında bir kararsız çevrim bulunur. Bu kararsız çevrim, senaryoyu izlemek için bir rol oynar. μ arttırıldığı zaman kararsız çevrim denge noktasının etrafında bir ilik gibi sıkılaşır. $\mu = 0$ 'da subkritik hopf çatallaşma oluşur. Kararsız çevrimin genliği sıfıra küçülür, orijini yutar ve onu kararsız kılar. $\mu > 0$ için büyük genlikli limit çevrim aniden tek çekici olur.

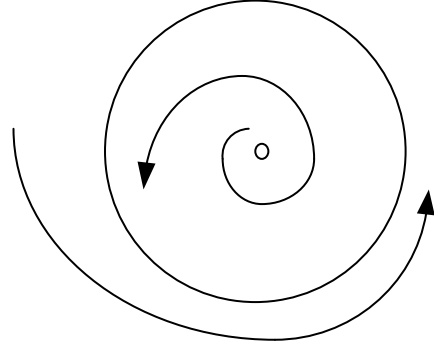
Şekil 3.12'de subkritik hopf çatallaşmaya ait çeşitli parametre durumları görülmektedir. Şekil 3.12(a)'da görüldüğü üzere kararlı bir denge noktası etrafında bir kararsız ve bir kararlı olmak üzere iki tane limit çevrim bulunmaktadır. Değişen sistem parametresine

bağlı olarak çatallaşma sırasında kararsız limit çevrim denge noktasını kararsız hale getirir. Bu durum Şekil 3.12(b)'de görülmektedir.



$$\mu < 0$$

(a)



$$\mu > 0$$

(b)

Şekil 3.12. Subkritik hopf çatallaşmada kararlılık değişimi ve oluşan limit çevrimler

4. ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER

Fiziksel, kimyasal, biyolojik yapıların matematiksel modelleri genellikle sistemlerin o andaki durumlarına bağlıdır. Fakat bazı yapıların matematiksel modelleri, sadece o andaki durumlarına değil aynı zamanda geçmişteki durumlarına da bağlı olabilmektedir. Bu tip sistemler zaman gecikmeli sistemler olarak adlandırılırlar. Zaman gecikmesi önemli bir kavramdır ve sistem davranışına etkisi oldukça fazladır. Gecikmenin varlığı sistem analizini ve kontrolünü çok daha fazla kompleks hale getirebilir. Sistemde kararsızlığa ve kötü performansa yol açabilir [9-11].

Zaman gecikmesi tabiatta fiziksel, kimyasal, biyolojik, ekolojik, toplumsal gibi pek çok sistemlerde yaygın olarak görülen bir durumdur. Örneğin, kanser oluşumu tipik olarak uzun yıllar radyasyona maruz kalma sonucunda oluşur. Ekonomide, bir ülkede merkez bankası genellikle faiz oranlarını ayarlayarak ekonomiyi yönlendirmeye çalışır, faiz oranlarında ki değişimin ekonomi üzerinde bir etkiye dönüşmesi aylar sürer. Siyasette, politikacılar kararlarını gerçekleştirmek için zamana ihtiyaç duyar ve onlar kararlarının doğru olup olmadığını anlamak için bir süre beklemek zorunda kalırlar. Tabiatta rastlanan zaman gecikmeli sistemler olduğu gibi mühendislik sistemlerinde de zaman gecikmeli sistemlerle karşılaşma durumu söz konusudur. İletişim ağları, kontrol sistemleri, kimyasal süreçler, biyosistemler ve sualtı araçları gibi pek çok sistem zaman gecikmeli sistemlere örnek olarak verilebilir [11].

Gerçek hayatta bir çok olayda gecikmenin varlığı kaçınılmazdır. Sistemler modellenirken genellikle bu gecikmeler ihmal edilir. Fakat modellenen sistemlerde ihmal edilen çok küçük gecikmeler bile sistemin mevcut durumunda büyük değişikliklere yol açabilir. Bu nedenle matematiksel modeller oluşturulurken fonksiyonel diferansiyel denklemlerden faydalanılır [12].

Bu bölümde, fonksiyonel diferansiyel denklemlerden bahsedilip türleri açıklanmış, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir alt sınıfı olan gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler üzerinde durulmuştur. Gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin kullanım alanlarına ve modellemesine yer verilmiştir. Zaman gecikmeli sistemlere birkaç örnek verilerek matematiksel modellerine değinilmiştir. Sistemin matematiksel modelinde kullanılan gecikme teriminin önemine vurgu yapılmıştır. Zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik denklemlerinin kararlılık analizi için önemli olduğu vurgusu yapıp,

gecikmenin döngü içindeki farklı durumları için sistemlerin karakteristik denklemleri çıkarılmıştır.

4.1. Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Sıradan diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece t anında hesaplanır. Gerçek hayatta bazı olaylar sadece o anki zamana değil aynı zamanda geçmiş ve gelecek zamana da bağlı olabilmektedir. Başka bir deyişle, bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece t anında değil $t - \tau$ veya $t + \tau$ ($\tau > 0$) anında da hesaplanabilir. Bu tür diferansiyel denklemlere fonksiyonel diferansiyel denklemler (FDD) denir [12].

4.1.1. Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

$\tau_{\max} = \text{sabit} \in [0, \infty)$ kabul edilsin ve $x(t)$, $t \in [t_1 - \tau_{\max}, t_1]$ zaman aralığı içinde bir işlemin davranışını tanımlayan n -boyutlu bir değişken olsun. $T_1(t)$ ve $T_2(t)$, tüm $t \in [t_0, t_1]$ için tanımlanan zamana bağlı gerçek sayılar kümesi olsun. $[t_0, t_1]$ aralığında x 'in sürekli fonksiyon olduğu kabul edilsin. $\dot{x}(t)$, $[t_0, t_1]$ için x 'in türevlerini belirtsin. Her bir $t \in [t_0, t_1]$ için x_t , $s \in T_1(t)$ şartıyla $x_t(s) = x(t+s)$ tarafından tanımlanır. Benzer olarak $\dot{x}_t$, $s \in T_2(t)$ olmak şartıyla $\dot{x}_t(s) = \dot{x}(t+s)$ olarak tanımlanır. Bu durumda x , hemen hemen her $t \in [t_0, t_1]$ için bir fonksiyonel diferansiyel denklemdir [12]. Genellikle bir FDD aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t, u(t)) \quad (4.1)$$

Burada kontrol $u(t)$, gerekli olan tüm zaman aralığı için verilmektedir. Yukarıdaki denklem fonksiyonel diferansiyel denklemin üç tipini içermektedir.

4.1.1.1. İleri (Advanced) Fonksiyonel Diferansiyel Denklem

Eğer $t \in [t_0, t_1]$ için $T_1(t) \subset [0, \infty)$ ve $T_2(t) = \emptyset$ ise FDD bir ileri (advanced) fonksiyonel diferansiyel denklem (İFDD) olarak isimlendirilir. İlerlemiş tip bir denklem,

durum değişme oranı şimdiki ve gelecekteki değerlere bağlı olan bir sistemi temsil eder. Denklem (4.2) İFDD'nin bir örneğidir.

$$\dot{x}(t) = x(t+1) + x(t) + u(t) \quad (4.2)$$

Burada en yüksek mertebeden türev t anında diğerleri t veya t 'den daha sonraki zamanlarda hesaplanır.

4.1.1.2. Nötral (Neutral) Fonksiyonel Diferansiyel Denklem

Eğer durum değişme oranı kendisinin geçmiş değerlerine bağlı ise sistem bir nötral (neutral) fonksiyonel diferansiyel denklem (NFDD) olarak adlandırılır. Yani, $t \in [t_0, t_1]$ için $T_1(t) \subset (-\infty, 0]$ ve $T_2(t) \subset (-\infty, 0]$ aralığındadır. Denklem (4.3)'teki doğrusal skalar sistem, NFDD'nin bir örneğidir.

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t-1) + x(t) + u(t) \quad (4.3)$$

Burada en yüksek mertebeden türev sadece t 'ye bağlı değil de hem geçmiş hem de gelecek zamana bağlı olabilir.

4.1.1.3. Gecikmeli (Retarded) Fonksiyonel Diferansiyel Denklem

Eğer $t \in [t_0, t_1]$ için $T_1(t) \subset (-\infty, 0]$ ve $T_2(t) = \emptyset$ ise FDD bir gecikmeli (retarded) fonksiyonel diferansiyel denklem (GFDD) olarak isimlendirilir. Başka bir değişle, Denklem (4.1)'in sağ tarafı x 'in türevine bağlı değildir. Denklem (4.4), GFDD'nin bir örneğidir.

$$\dot{x}(t) = ax(t-\tau) + u(t) \quad (4.4)$$

Burada en yüksek mertebeden türev t anında, diğerleri ise t veya t 'den daha önceki zamanlarda hesaplanır. Örneğin; doğrusal skaler birinci dereceden bir denklemin basit durumunu düşünelim.

$$a_0 \frac{dx(t)}{dt} + a_1 \frac{dx(t-\tau)}{dt} + b_0 x(t) + b_1 x(t-\tau) = f(t) \quad (4.5)$$

Burada a_0 , a_1 , b_0 ve b_1 sabit sayılar ve $f(t)$ bir zorlama fonksiyonudur. Eğer yukarıdaki denklemde $a_0 \neq 0$ ve $a_1 = 0$ ise Denklem (4.5) GFDD'dir. Eğer $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ ise NFDD, $a_0 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ ise İFDD'dir.

Bu tez çalışmasında, GFDD'lerle modellenen doğrusal olmayan zaman gecikmeli sistemler incelenecektir. GFDD'ler Denklem (4.6) şeklinde tanımlanır.

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau_i)) , \quad x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \quad (4.6)$$

Burada, $\tau_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, gecikme süresidir ve f sürekli fonksiyon vektörüdür. GFDD'ler,

1. Tek sabit gecikmeli ($\tau = \tau_i, i = 1$)
2. Farklı gecikmeli ($\tau_i, i = 1, 2, \dots$)
3. Dağıtılmış gecikmeli (Diferansiyel denklemin sağ tarafı, geçmiş durumlar üzerinde ağırlaştırılmış integralden oluşur.)
4. Durum bağımlı gecikmeli (τ_i 'ler $x(t)$ 'ye bağlıdır.)
5. Zamana bağımlı gecikmeli (τ_i 'ler t 'ye bağlı.)

olmak üzere sınıflandırılırlar [65].

4.1.1.3.1. Tek Sabit Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Tek sabit GFDD'ler aşağıdaki gibi genellikle temsil edilir.

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)) \quad (4.7)$$

Burada, τ pozitif sabittir. Optikte, ekonomi biliminde, ekolojide ve biyolojide birçok dinamik sistem tek sabit GFDD'ler ile tanımlanabilir.

4.1.1.3.2. Farklı Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Birden fazla gecikme içeren GFDD'ler, birden fazla gecikme sabiti ile $(\tau_i, i=1,2,\dots)$ Denklem (4.6)'daki gibi temsil edilir. Bu gecikme süreleri ayrıca farklı gecikmeler olarak adlandırılır. Birden fazla farklı gecikmeli dinamik sistemler biyolojide (nöroloji), kontrol teorisinde, ekonomide, popülasyon dinamiklerinde vb. bol miktarda bulunmaktadır.

4.1.1.3.3. Dağıtılmış Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Dağıtılmış veya sürekli GFDD'ler genellikle Denklem (4.8)'deki gibi ifade edilir.

$$\dot{x} = f\left(t, x(t), \int_0^\infty \mu(\tau) x(t-\tau) d_\tau\right) \quad (4.8)$$

4.1.1.3.4. Durum Bağımlı Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Nüfus dinamikleri ve salgın problemlerinde, zaman gecikmesi değişken durumun fonksiyonu olarak ayrıca kabul edilmiştir. Durum bağımlı GFDD'ler genel olarak Denklem (4.9)'daki gibi temsil edilir.

$$\dot{x} = f\left(t, x(t), x\left(t - \tau(t, x(t))\right)\right) \quad (4.9)$$

4.1.1.3.5. Zaman Bağımlı Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Zaman bağımlı GFDD'lerde, gecikme süresi $\tau(t)$ 'nin zamana bağımlı olduğu düşünülmektedir. Genellikle (4.10)'daki gibi bir ifade ile temsil edilirler.

$$\dot{x} = f\left(t, x(t), x\left(t - \tau(t)\right)\right) \quad (4.10)$$

4.2. Zaman Gecikmeli Sistemler ve Matematiksel Modelleri

Gerçek hayatta bir çok olayda gecikmenin varlığı kaçınılmazdır [65]. Fakat matematiksel modellemesi sıradan diferansiyel denklemlerle yapılan sistemlerde gecikmeler daima göz ardı edilir. Ancak gerçekçi bir matematiksel modelde, sistemin o

andaki durumunun geçmişteki durumdan bağımsız olmaması gerektiği aşıkardır. Sistemdeki çok küçük gecikme miktarı bile sistemin mevcut durumunda çok büyük değişiklikler görülmesine neden olabilir. Bu nedenle matematiksel modeller oluşturulurken fonksiyonel diferansiyel denklemlerden faydalanılır.

Bu başlık altında, matematiksel modelleri gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem kullanılarak oluşturulan sistemlere örnekler verilecektir. Matematiksel modelde kullanılan zaman gecikmesi terimine neden ihtiyaç duyulduğu örnekler üzerinden açıklanacaktır.

4.2.1. Karışım Problemi

Driver'ın [28] tuzlu su karışımı, gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem ile modellemede literatürde karşımıza çıkacak ilk problemlerden biridir. İçinde B litre tuzlu su karışımı bulunan bir tank düşünelim. Karışım sürekli karıştırılmaktadır ve tanka dakikada q litre saf su boşaltılmaktadır. Ayrıca tankın altında bulunan bir delikten dakikada q litre oranında karışım dışarı akmaktadır. $x(t)$, t anında karışımındaki tuz miktarını (kg) gösterebilir. Tanktan ayrılan karışım litre başına $x(t)/B$ kg oranında tuz içermektedir. Bu durumda belli bir t anında tank içinde tuz miktarının değişimini (4.11)'deki gibi diferansiyel denklem ile modelleyebiliriz.

$$\dot{x}(t) = -q \frac{x(t)}{B} \quad (4.11)$$

Ancak Driver, gerçekte karıştırma işleminin tank içerisinde homojen bir şekilde olamayacağını belirtmiştir. Bu durumda t anında tankı terk eden tuzlu su oranının önceki bir andaki $(t - \tau)$ tuzlu su oranına bağlı olacaktır. Sistem yeniden modellenirse,

$$\dot{x}(t) = -q \frac{x(t - \tau)}{B} \quad (4.12)$$

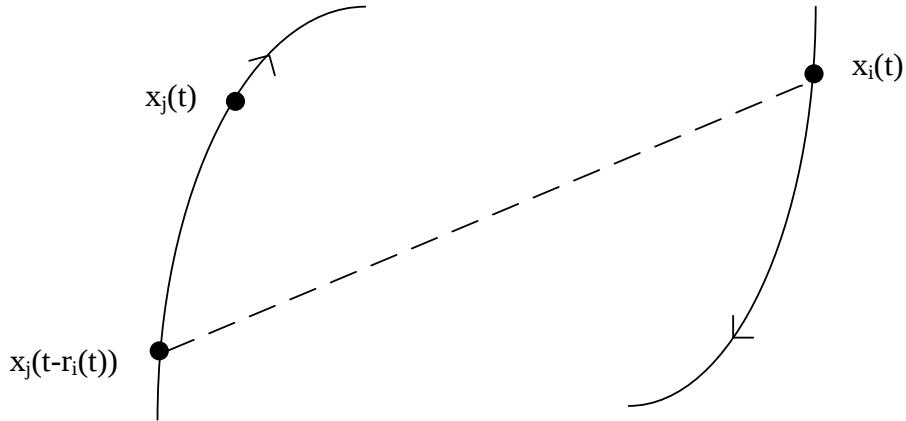
Denklem (4.12) gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemini elde ederiz. Burada τ bir zaman gecikmesidir ve $k = q/B$ olarak alınırsa Denklem (4.13)'teki gibi en sade hale dönüşür.

$$\dot{x}(t) = -kx(t - \tau) \quad (4.13)$$

4.2.2. Elektrodinamik

Aralarında belli bir mesafe bulunan iki yüklü parçacığın birbirleriyle etkileşimini ele alalım. Bu iki yüklü parçacık ışık hızıyla bir yörünge etrafında hareket etsin. Yükleri e_i ve e_j , durağan kütleleri m_i ve m_j olan bu iki yüklü parçacığın $x_i(t)$ ve $x_j(t)$ referans noktaları olsun. Bu iki yüklü parçacığın hareketlerini belli bir t anında gerçekleşen anlık bir olay gibi düşünmek mümkün değildir. Anlık t anında i parçacığına etkiyen alan, $(t-r_i(t))$ geçmiş zamanında j parçacığı tarafından üretilmiş olmalıdır. Burada $r_i(t)$ gecikme miktarının sabit olmadığı t 'ye bağlı olduğu açıktır. Şekil 4.1'den de görüldüğü üzere, t tanında j parçacığının etki alanı bu yükün $(t-r_i(t))$ anındaki konumunun etkisiyle $x_i(t)$ konumuna erişir. Bu durumda Denklem (4.14) sağlanır [29].

$$cr_i(t) = |x_i(t) - x_j(t-r_i(t))|, \quad i \neq j \quad (4.14)$$



Şekil 4.1. İki elektronun birbirleri üzerindeki etkisi

4.2.3. Mackey-Glass Denklemi

Birincil belirtileri, gözlemlenebilir kronik ve akut hastalıklar vardır. Cheyne-Stokes solunumuyla erişkinlerde düzensiz solunum şekilleri ve kronik granülositik lösemide beyaz kan hücre sayılarındaki dalgalanmalar buna örnek verilebilir. Mackey ve Glass, fizyolojik sistemlerde birinci dereceden gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin

dinamiklerindeki çatallaşmalar ile hastalığın başlangıcını ilişkilendirdi. Denklem dinamiklerindeki çatallaşmalar sistemin parametrelerindeki değişimler ile oluşur.

Fizyolojik kontrol sistemleri, prototip geribesleme sistemlerini temsil eder. Geribesleme sistemiyle temsil edilen basit diferansiyel denklem düşünelim.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - \gamma x \quad (4.15)$$

Denklemde x ilgili değişken, λ ve γ ise sırasıyla üretim ve bozulma oranlarını veren pozitif sabitlerdir. Denklem (4.15), x 'in sabit λ oranında üretildiği ve γx oranında imha edildiği bir sistemi temsil eder. Bu denklem için başlangıç şartı belirlendiğinde (özellikle $t=0$ 'da) çözüm tamamen belirlenir. $t \rightarrow \infty$ ve $x \rightarrow \lambda/\gamma$ olduğunda bu denklem için herhangi bir başlangıç şartından elde edilen bir kararlı sabit nokta vardır.

Gerçek geribesleme sistemlerinde, kontrol altında değişkenin değerinin algılanması ve uygun bir yanıt verilmesi arasında genellikle bir gecikme vardır. Bu gecikme fizyolojik sistemlerde önemli olabilir. Bu nedenle fizyolojik geribesleme sistemlerinin daha gerçekçi modelinde, λ ve γ oranları sabit olmamaktadır. Böylece t zamanındaki x 'in anlık değişimi, $(t-\tau)$ zamanındaki x_t 'ya bağlı olabilmektedir. τ kontrol sistemlerinden kaynaklı bir zaman gecikmesidir.

Mackey ve Glass fizyolojik sistemlerde kaotik dinamiklerin var olup olmadığını ve fizyolojide gözlemlenen karmaşık ritimlerin bazılarında kaotik dinamiklerin bir rol oynayıp oynamayacağını belirlemek için birlikte çalışırlar. Mackey kan hücresi üretim kontrolünü modellemeye ve Glass ise solunum kontrol çalışmalarına başlar. Her iki koşulda, zaman gecikmesi fizyolojik mekanizmalardan dolayı doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Böylece modellemelerinde gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemleri kullanmışlardır.

Olgun kan hücrelerinin kısa ömürleri nedeniyle “hematopoez” adı verilen bir süreç ile sürekli yenilerinin yerlerini alması gerekmektedir. Hematopoez, ilkel kök hücrelerini olgun kan hücresi üretmek için çoğaltan ve farklılaştıran bir süreçtir. Hematopoezin düzenlenmesi vücutta bulunan kan hücresi elemanlarının oluşumuyla ilgilidir. Kan hücreleri kemik iliğinde üretilir. Kırmızı kan hücresi üretilirken böbrekte eritropoez adı verilen hormon uyarılır. Eritropoezin yaklaşık %90'ı, kanda yeterli oksijen olmadığı zaman renal tübüler epitel hücreleri tarafından salgılanır. Kandaki oksijen seviyesi azaldığı

zaman bu kemik iliğinde kan elemanlarının salgısında bir artışa sebep olan bir maddenin salgılanmasına yol açar. Yani; kandan kemik iliğine bir geribesleme vardır. Geribeslemedeki anormallikler hematolojik hastalıklara neden olduğundan dikkate alınır.

Mackey ve Glass, x yoğunluklu olgun hücrelerin bir homojen popülasyonunu düşündüler ve Lösemili hastalarda kan üretimi için bir model ortaya çıkardılar. Mackey-Glass sistemi birinci dereceden doğrusal olmayan gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem tarafından ifade edilir.

$$\frac{dx}{dt} = \beta \frac{\theta^n x_\tau}{\theta^n + x_\tau^n} - \gamma x \quad (4.16)$$

Denklem (4.16) hematopoezin düzenlenmesini karakterize eder. $x(t)$, kan dolaşımı içinde olgun hücrelerin yoğunluğunu temsil eder. β , θ , n ve γ pozitif sabitlerdir. x_τ , $(t-\tau)$ zamanında değişken x 'in değerini yansıtır. τ , kemik iliğinde olgunlaşmamış hücrelerin üretimi ve bu hücrelerin olgunlaşarak kana salınması arasındaki zaman gecikmesidir. Michael C. Mackey ve Leon Glass Denklem (4.16)'daki çatallaşmalar ile hastalığın başlangıcını ilişkilendirdi. Bu yüzden Denklem (4.16)'nın dinamiklerini çalışmak medikal araştırmaları için önemlidir [30,65-69].

4.2.4. Zaman Gecikmeli Doğrusal Olmayan Kaotik Sistem

Kontrol sistemi üzerine çalışmaları sonucunda Uçar [31,32]'de verilen kaos çalışmaları için geliştirmiş olduğu bir model önerdi. Uçar Modeli olarak bilinen bu model, tek durum değişkenine sahip zaman gecikmeli doğrusal olmayan bir kaotik sistemdir. Uçar modeli (4.17)'deki gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem ile tanımlanmıştır.

$$\frac{dx}{dt} = \delta x(t-\tau) - \varepsilon [x(t-\tau)]^3, \quad (t \geq t_0) \quad (4.17)$$

Burada; δ ve ε pozitif parametreler ve t_0 başlangıç aralığıdır. τ (0'dan büyük olmak kaydıyla), sistemde bir noktadaki olayın başlangıcı ile başka bir noktada bu olayın oluşturduğu etki arasında geçen süreye karşılık gelen gecikme zamanıdır. Denklem (4.17)'de verilen sistem, kaotik bir sistemdir ve $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6$ için sistemde

kaos gözlenmektedir. Kaos çalışmaları için prototip model olarak kullanılabilir [32]. Bu sistem, zaman gecikmesi ve sistem parametrelerine bağlı olarak asimptotik kararlı, limit çevrim ve kaotik davranış türleri gösterebilmektedir.

4.2.5. Tek Hücreli Zaman Gecikmeli Hücresel Sinir Ağı

Hücresel sinir ağlarının elektronik uygulamalarında zaman gecikmesi kaçınılmazdır. Lu [33,34]'te incelenen modelde zaman gecikmesi mevcuttur ve zaman gecikmeli hücresel sinir ağı (ZGHSA) tek hücreli bir yapıya sahiptir. Lu [34]'te verilen model, Denklem (4.18) ile tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -ax + bf[x(t - \tau)] \\ f(x) &= 2(|x+1| - |x-1|) - \frac{3}{2} \left(\left| x + \frac{4}{3} \right| - \left| x - \frac{4}{3} \right| \right)\end{aligned}\tag{4.18}$$

Burada a , b sistem parametreleri, τ zaman gecikmesi ve $f(x)$ ise parçalı doğrusal yapıdaki tek simetrik bir fonksiyondur. Denklem (4.18) ZGHSA'nda bir hücre denklemi olarak incelenebilir. Bu denklem, GFDD'dir ve fonksiyonel diferansiyel denklemlerin özel bir çeşididir. Denklemin çözüm uzayı sonsuz boyutludur [34].

4.3. Zaman Gecikmeli Sistemlerin Karakteristik Denklemleri

Bu başlık altında, zaman gecikmeli sistemlerde karakteristik denklemin önemi vurgulanıp döngü içinde bulunan gecikmenin konumuna göre bazı zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik denklemi çıkarılacaktır.

4.3.1. Karakteristik Denklemin Önemi

Doğrusal gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çoğu özellikleri karakteristik denklem kullanılarak analiz ve karakterize edilebilir. Denklem (4.19) bir GFDD olsun.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + \dots + A_m x(t - \tau_m)\tag{4.19}$$

Karakteristik denklemi ise,

$$\det(-\lambda I + A_0 + A_1 e^{-\tau_1 \lambda} + \dots + A_m e^{-\tau_m \lambda}) = 0 \quad (4.20)$$

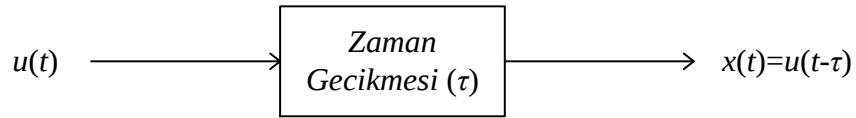
Denklem (4.20) ile ifade edilir. Karakteristik denklemin kökleri (λ), karakteristik kökler veya öz değerler olarak adlandırılır. Karakteristik denklemde bulunan exponansiyel ifadeden dolayı, gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin sıradan diferansiyel denklemlerden farkı karakteristik denklemin quasi-polinom olmasıdır. Bu yüzden karakteristik denklem sonsuz sayıda köklere sahiptir.

Karakteristik denklemin kökleri çözümün kararlılığını belirler. Spesifik olarak eğer tüm karakteristik köklerin reel kısmı negatif ise doğrusallaştırılmış sürekli durum asimptotik karardır. Eğer karakteristik köklerden en az bir tanesinin reel kısmı pozitif ise doğrusallaştırılmış sürekli durum kararsız olmaktadır [70,71].

4.3.2. Döngü İçindeki Gecikmenin Konumuna Göre Karakteristik Denklem

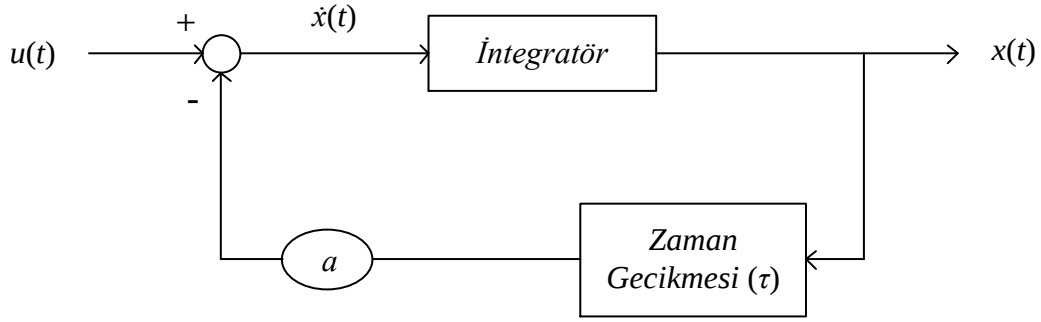
Bu kısımda, döngü içindeki gecikmenin farklı konumlarına göre zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik denklemleri çıkarılacaktır.

Zaman domeninde zaman gecikmesi, Şekil 4.2’de görülen blok diyagramında basitçe temsil edilebilir.



Şekil 4.2. Gecikme süresi gösterimi

Konuyu basitleştirmek için, birinci dereceden bir geri beslemeli sistem düşünelim. Gecikme, geri besleme döngüsü içerisinde mevcut olabilir ki genellikle bu gecikme sensör gecikmelerinden kaynaklıdır. Bu tür bir sistemin blok diyagramı Şekil 4.3’te gösterilmektedir.

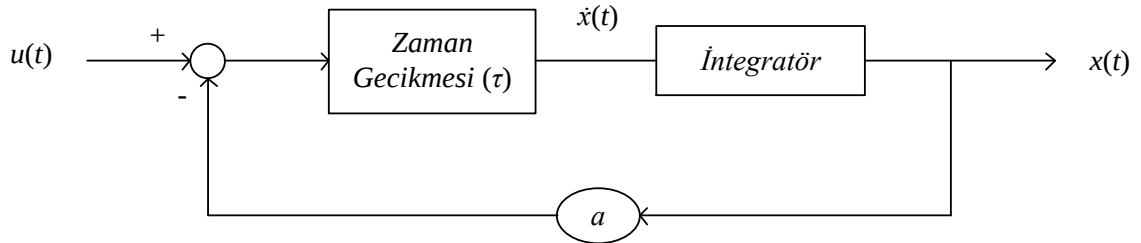


Şekil 4.3. Geri besleme döngüsü içinde bir gecikme ile birinci dereceden bir sistem

Şekil 4.3'te verilen birinci dereceden sisteminin giriş-çıkış denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) + u(t) \quad (4.21)$$

Alternatif olarak, döngü içinde de gecikme mevcut olabilir. Döngü içinde bir gecikmeye sahip olan birinci dereceden basit bir sistem Şekil 4.4'te gösterilmektedir.

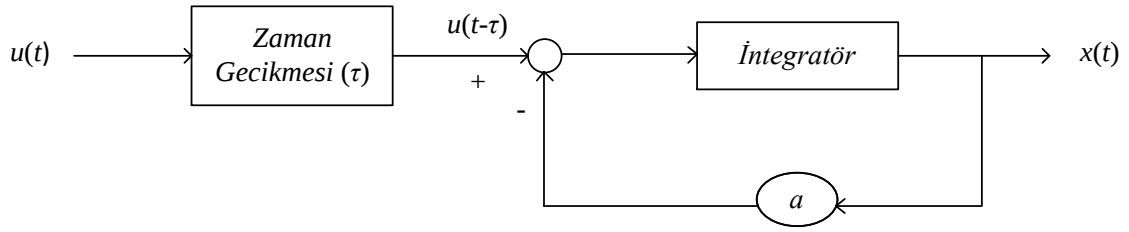


Şekil 4.4. Döngü içinde bir gecikme ile birinci dereceden bir sistem

Şekil 4.4'teki sistemin giriş çıkış denklemi, Denklem (4.22) ile ifade edilir.

$$\dot{x}(t) = -ax(t - \tau) + u(t - \tau) \quad (4.22)$$

Ayrıca, girişte gecikme olabilir. Böyle birinci dereceden geribeslemeli basit bir sistem Şekil 4.5'te gösterilmektedir.

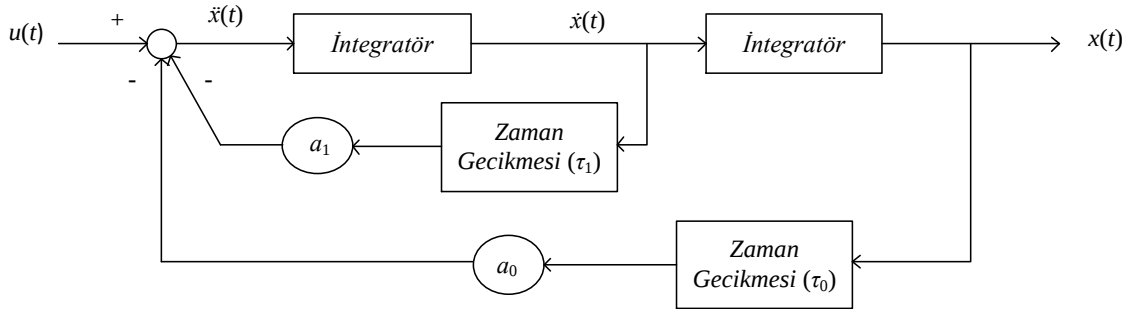


Şekil 4.5. Giriş içinde bir gecikme ile birinci dereceden bir sistem

Giriş içinde bir gecikmeyle birinci dereceden denklemin giriş çıkış denklemi, Denklem (4.23)'te gösterilmiştir.

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t - \tau) \quad (4.23)$$

Geribesleme döngüsü içinde gecikme bulunan ikinci dereceden bir sistem Şekil 4.6'da gösterilmektedir.



Şekil 4.6. Geri besleme döngüsü içinde gecikme bulunan ikinci dereceden bir sistem

Şekil 4.6'daki sistemin giriş çıkış denklemi, Denklem (4.24)'de gösterilmiştir.

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t - \tau_1) + a_0x(t - \tau_0) = u(t) \quad (4.24)$$

Geri besleme döngüsü içerisinde iki tane gecikme bulunan sistem durum-uzay formunda,

$$x(t) = y_1(t) \quad (4.25)$$

$$\dot{x}(t) = y_2(t) \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t-\tau_0) \\ y_2(t-\tau_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t-\tau_1) \\ y_2(t-\tau_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.27)$$

Denklem (4.27) şeklinde gösterilir.

Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığını belirlemek için $u(t) \equiv 0$ ve $x(t) = e^{st}$ alınarak bir çözüm yolu önerilir. Bu amaçla sistem (4.24)'ü inceleyelim.

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t - \tau_1) + a_0 x(t - \tau_0) = 0 \quad (4.28)$$

$$(s^2 + a_1 e^{-s\tau_1} s + a_0 e^{-s\tau_0}) e^{st} \equiv 0 \quad (4.29)$$

$$s^2 + a_1 e^{-s\tau_1} s + a_0 e^{-s\tau_0} = 0 \quad (4.30)$$

Denklem (4.30), Denklem (4.24)'ün karakteristik denklemidir. Bu denklemin köklerinin ve sıfırlarının yeri sistemin kararlılığını belirler. Eğer herhangi bir kök sağ yarı s düzleminde ise sistem kararsızdır.

Dikkat edilirse Denklem (4.24)'te en yüksek mertebedeki türevde gecikme bulunmamaktadır. Bu tür sistemlere geri tipli zaman gecikmeli sistemler (retarded type time delay system) denilir. Eğer türevin en yüksek mertebesi Denklem (4.31)'deki gibi gecikme terimi içerirse,

$$\ddot{x}(t - \tau_2) + a_1 \dot{x}(t - \tau_1) + a_0 x(t - \tau_0) = u(0) \quad (4.31)$$

bu tür sistemlere de nötral tip zaman gecikmeli sistemler (neutral type time delay system) denir. Denklem (4.31)'in karakteristik Denklemi (4.32)'de gösterilmektedir.

$$s^2 e^{-s\tau_2} + a_1 e^{-s\tau_1} s + a_0 e^{-s\tau_0} \equiv 0 \quad (4.32)$$

Gecikmeli sistemlerde kararlılık, karakteristik denklemin tüm köklerinin sol yarı s düzlemde olması şartıyla sağlanır. Gecikmeli sistemlerin kararlılığı, sağ yarı düzlemde köklerin olmayışına denktir [72].

5. ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ İÇİN LAMBERT W FONKSİYONU

Lambert W fonksiyonu, 1758 yılında Lambert W ve Euler tarafından önerilmiştir [13]. Zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik denklemleri genellikle transcendental yapıda olduğundan dolayı bu denklemleri analitik olarak çözmek zordur. Bu nedenle sabit katsayılı homojen doğrusal gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenirken Lambert W fonksiyonu kullanılır [14]. Bu fonksiyon aynı zamanda Omega fonksiyonu veya çarpım logaritması olarak da bilinen bir fonksiyon kümesidir [16].

Bu bölümde Lambert W fonksiyonu tanıtılacaktır. Birinci dereceden homojen doğrusal gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümü Lambert W fonksiyonu yardımıyla gerçekleştirilip genelleştirilecektir. Matris Lambert W fonksiyonunun kullanım amacına değinilecektir. Bazı örnek geri tipli zaman gecikmeli sistemlerin Lambert W fonksiyonu yardımıyla çözümü gerçekleştirilip kararlılığı incelenecektir.

5.1. Lambert W Fonksiyonu

Tanım 5.1: [13,49]'da $f(z) = ze^z$ ile tanımlanan kompleks değerli fonksiyonun ters fonksiyonu $W(z)$, Lambert W fonksiyonudur ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için $W(z)e^{W(z)} = z$ eşitliği sağlanır. Lambert W fonksiyonu kompleks değerlidir ve sonsuz sayıda dallara $(W_k, k = \dots -1, 0, 1, \dots)$ sahiptir. Lambert W fonksiyonunun ana dalı olan W_0 , Lagrange inversion teoremi kullanılarak Denklem (5.1)'deki gibi güç serisi açılımı ile verilir [13,15].

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n, \quad (k=0) \quad (5.1)$$

Lambert W fonksiyonunun diğer dalları ise Denklem (5.2)'deki eşitlik yardımıyla seriye açılarak bulunur.

$$W_k(z) = W_0(z) - W_0(W_0(z)) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{lm} \frac{(W_0(W_0(z)))^m}{(W_0(z))^{l+m}} \quad (5.2)$$

$$C_{lm} = \frac{1}{m!} (-1)^l \begin{bmatrix} l+m \\ l+1 \end{bmatrix}, \quad (k \neq 0) \quad (5.3)$$

$$In_k(z) = In(z) + 2\pi i k \quad (5.4)$$

Burada $In_k(z)$, k . logaritmik dalı gösterir ve C_{lm} katsayıları birinci tür negatif olmayan stirling sayıları açısından ifade edilebilir [13,15].

W , w düzlemine z düzlemini çizer ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Lambert W fonksiyonunu,

$$W(z) = f^{-1}(z) = w, \quad z = f(w) = we^w \quad (5.5)$$

$$w = x + iy, \quad z = u + iv \quad (5.6)$$

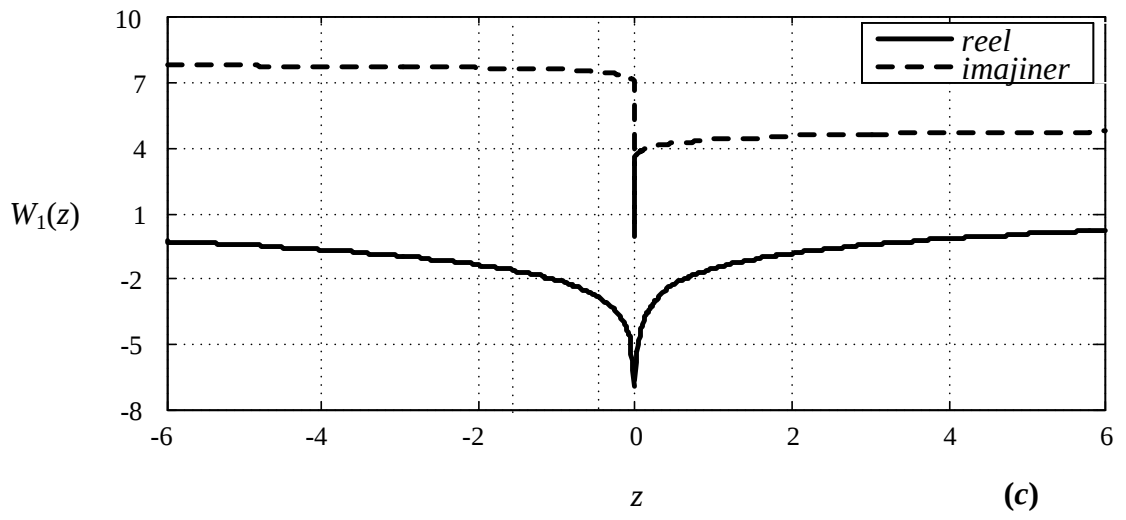
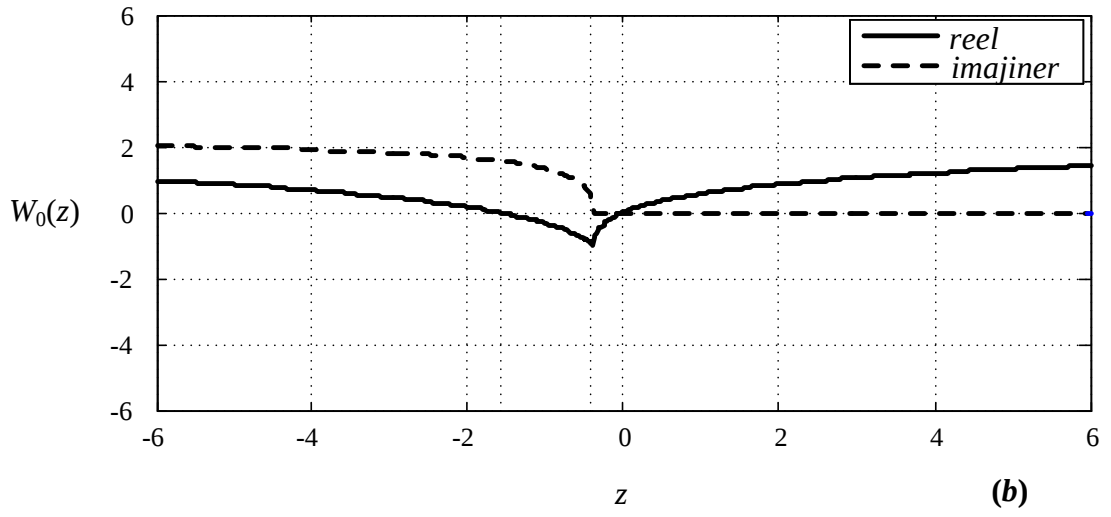
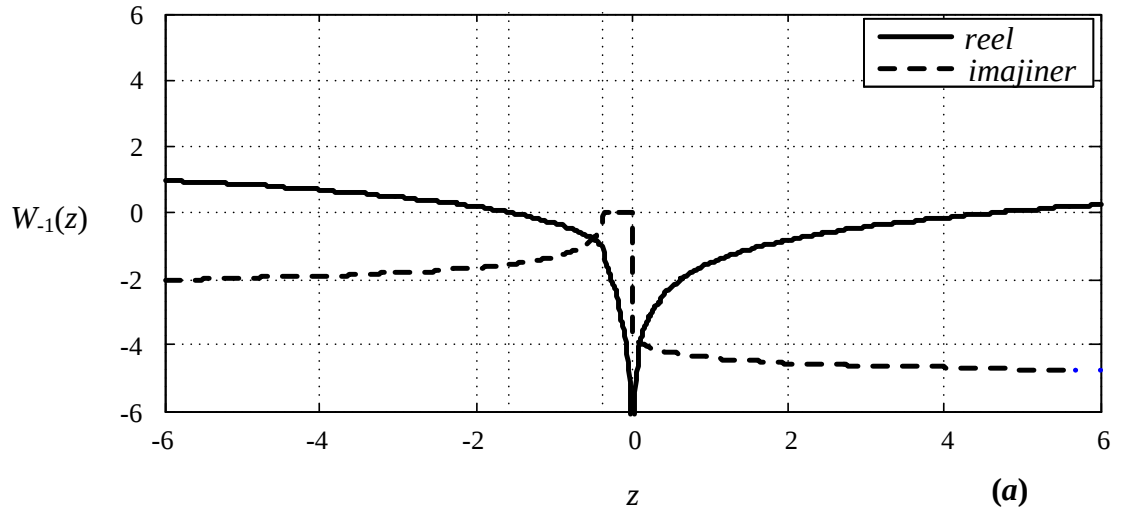
$$z = (x + iy)e^x (\cos y + i \sin y) \quad (5.7)$$

şeklinde tekrar tanımlayalım. z 'yi reel ve imajiner kısımlarına ayırarak, Denklem (5.8) ve Denklem (5.9)'daki eşitlikler elde edilir [49].

$$u = \text{Re}[z] = xe^x \cos y - ye^x \sin y \quad (5.8)$$

$$v = \text{Im}[z] = ye^x \cos y + xe^x \sin y \quad (5.9)$$

Şekil 5.1'de Lambert W fonksiyonunun -1., 0. ve 1. dalına ait reel ve imajiner kısımların çizimleri görülmektedir [49].



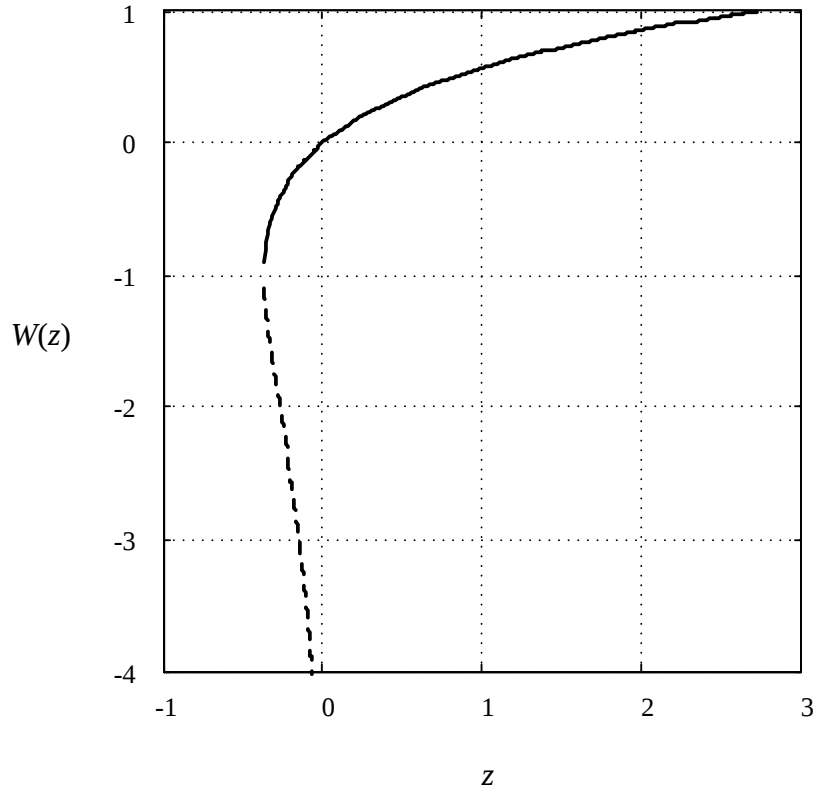
Şekil 5.1. Lambert W fonksiyonunun ; a) -1 , b) 0 . ve c) 1 . dalına ait reel ve imajiner kısımların çizimi

Şekil 5.1(b)'de görüldüğü üzere,

1. $z \in (-1/e, \infty)$ aralığında $W_0(z)$ reel ve artandır.
2. $z \in (-\pi/2, -1/e)$ aralığında $W_0(z)$ negatif reel kısma sahip kompleks değerlidir.
3. $z = -\pi/2$ 'de ise $W_0(z)$ saf imajiner kısma sahiptir.
4. $z \in (-\infty, -\pi/2)$ aralığında pozitif reel kısma sahip kompleks değerlidir.

Benzer şekilde, Şekil 5.1(a)'da Lambert W fonksiyonun $-1.$ dalının $z \in [-1/e, 0]$ aralığında sadece reel değerli olduğu görülmektedir [49].

Şekil 5.2'de Lambert W fonksiyonun 0. ve $-1.$ dallarına ait reel değerlerin birlikte çizimi gösterilmektedir. Şekil 5.2'den de görüldüğü üzere eğer z reel ve $-1/e \leq z < 0$ aralığında ise $W(z)$ 'in olası iki gerçek değeri vardır. $-1 \leq W(z)$ iken sadece $W_0(z)$ dalı mevcut iken $W(z) \leq -1$ olduğu durumda sadece $W_{-1}(z)$ dalı vardır. Lambert W fonksiyonunun ana dalı olarak $W_0(z)$ kabul edilir [13].



Şekil 5.2. Lambert W fonksiyonunun iki dalının reel değerleri (W_0 : düz çizgi W_{-1} :kesikli çizgi)

Tablo 5.1’de Lambert W fonksiyonunun -1.,0. ve 1. dalına ait bazı değerlerin karşılığı görülmektedir.

Tablo 5.1. Lambert W fonksiyonunun -1.,0. ve 1. dallarına ait bazı değerleri

z	$W_1(z)$	$W_0(z)$	$W_{-1}(z)$
$-i$	$-1.0896 + 2.7664i$	$0.3747 - 0.5764i$	$-1.8343 - 5.9858i$
$-e$	$-1.0528 + 7.7184i$	$0.3950 + 1.7882i$	$0.3950 - 1.7882i$
-1	$-2.0623 + 7.5886i$	$-0.3181 + 1.3372i$	$-0.3181 - 1.3372i$
$-1/e$	$-3.0888 + 7.4615i$	-1.0000	-1.0000
-0.1	$-4.4491 + 7.3071i$	-0.1118	-3.5772
0	Sonsuzluk	0	Sonsuzluk
0.1	$-4.0281 + 3.9124i$	0.0913	$-4.0281 - 3.9124i$
$1/e$	$-2.5883 + 4.1553i$	0.2785	$-2.5883 - 4.1553i$
1	$-1.5339 + 4.3752i$	0.5671	$-1.5339 - 4.3752i$
e	$-0.5321 + 4.5972i$	1	$-0.5321 - 4.5972i$
i	$-1.8343 + 5.9858i$	$0.3747 + 0.5764i$	$-1.0896 - 2.7664i$

$W(z)$ fonksiyonunun türevi Denklem (5.10) şeklinde ifade edilir [16].

$$W'(z) = \frac{1}{(1+W(z))\exp(W(z))} = \frac{W(z)}{z(1+W(z))}, \quad z \neq 0 \quad (5.10)$$

$W(z)$ fonksiyonunun integrali ise Denklem (5.11) şeklinde ifade edilir [16].

$$\int W(z)dz = z \left(W(z) - 1 + \frac{1}{W(z)} \right) + C \quad (5.11)$$

Lambert W fonksiyonunun ana ve diğer dalları analitik bir şekilde seri genişletme kullanılarak veya alternatif olarak Matlab, Maple ve Mathematica gibi çeşitli ticari yazılım paketlerinde gömülü olan komutlar kullanılarak hesaplanır [13].

5.2. Gecikmeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Lambert W Fonksiyonu Kullanımı

Bu başlık altında, gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümü için Lambert W fonksiyonu ve matris Lambert W fonksiyonunun kullanımına yönelik bir genelleştirme yapılacaktır.

Lambert W fonksiyonu, gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümü için analitik bir yaklaşım sunmaktadır. Bu analitik yaklaşımın temel avantajı, sıradan diferansiyel denklemlerin çözümlerine benzer bir kompakt formda homojen doğrusal gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerle sistemlere bir çözüm sunmaktır [14,15]. Birinci dereceden doğrusal ve homojen gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem aşağıdaki biçimde ifade edilsin.

$$\dot{x}(t) + Ax(t - \tau) + A_d x(t) = 0 \quad (5.12)$$

Burada A ve A_d , $n \times n$ tipinde t değişkenine bağlı reel değişkenli fonksiyonların matrisleri, $x(t)$ ise $n \times 1$ tipinde bir vektördür. $\tau > 0$ olmak üzere reel değerli bir sabittir. Denklem (5.12)'nin karakteristik denkleminin bulunabilmesi için özel çözüm olarak $x(t) = e^{st}$ kabul edilir. Özel çözüm verilen eşitliği sağlayacağından,

$$se^{st} + Ae^{s(t-\tau)} + A_d e^{st} = 0 \quad (5.13)$$

$$sI + Ae^{-s\tau} + A_d = 0 \quad (5.14)$$

$$sIe^{s\tau} = -A - A_d e^{s\tau} \quad (5.15)$$

Denklem (5.14) formunda doğrusal olmayan transcendental karakteristik denklem elde edilir. Burada I birim matristir. Eğer karakteristik denklemin kökleri bulunursa Denklem (5.12)'nin özel çözümü elde edilecektir. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin analizindeki zorluk bu transcendental denklemi çözmek için bir analitik metot bulmaya uzanmaktadır. Denklem (5.14)'ü çözmeye Lambert W fonksiyonu kolaylık sağlamaktadır. Bu bağlamda Denklem (5.15)'te verilen eşitliğin her iki tarafını τ ile çarpalım.

$$(s\tau)Ie^{s\tau} = (-A)\tau - A_d\tau e^{s\tau} \quad (5.16)$$

$I(e^{s\tau}) = e^{(s\tau)I}$ olduğundan,

$$A(e^{s\tau}) = A I e^{(s\tau)} = A e^{(s\tau I)} \quad (5.17)$$

$$(s\tau)I e^{(s\tau)I} = (-A)\tau - A_d\tau e^{s\tau I} \quad (5.18)$$

$$(sI + A_d)\tau e^{(s\tau)I} = (-A)\tau \quad (5.19)$$

Denklem (5.19) elde edilir. Denklem (5.19)'un her iki tarafı $e^{A_d\tau}$ ile çarpılırsa,

$$(sI + A_d)\tau e^{(sI + A_d)\tau} = (-A)\tau e^{A_d\tau} \quad (5.20)$$

Denklem (5.20) elde edilir. Lambert W fonksiyon tanımı Denklem (5.20)'ye uygulandığında,

$$(sI + A_d)\tau = W(-A\tau e^{A_d\tau}) \quad (5.21)$$

$$sI = \frac{1}{\tau} W(-A\tau e^{A_d\tau}) - A_d \quad (5.22)$$

Denklem (5.14)'teki karakteristik denklemin kökleri Denklem (5.22) ile elde edilir. Lambert W fonksiyonu sonsuz dalları olan karmaşık bir fonksiyon olduğundan dolayı burada W fonksiyonunun anadalı,

$$W_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} s^n \quad (5.23)$$

Denklem (5.23) yardımıyla hesaplanır. Lambert W fonksiyonunun diğer dalları $(k = -\infty, \dots, \infty)$ ise,

$$W_k(s) = In_k(s) - In(In_k(s)) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{lm} \frac{(In(In_k(s)))^m}{(In_k(s))^{l+m}} \quad (5.24)$$

Denklem (5.24) ile hesaplanır. Burada $In_k(s) = In(s) + 2\pi i k$ ve C_{lm} katsayısı ise stirling sayısı ile ifade edilir.

$$C_{lm} = \frac{1}{m!} (-1)^l \begin{bmatrix} l+m \\ l+1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Özel olarak $A_d = 0$ için,

$$sI = \frac{1}{\tau} W(-A\tau) \quad (5.26)$$

Denklem (5.26) bulunur. Karakteristik denklemin kökleri, elde edilen $\frac{1}{\tau} W(-A\tau e^{A_d \tau}) - A_d$ matrisinin öz değerleridir. Bu öz değerler gecikmeli diferansiyel denklem vektörünün kararlılığını tanımlar. Sistemin genel çözümü ise,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\left(\frac{1}{\tau} W_k(-A\tau e^{A_d \tau}) - A_d\right)t} \quad (5.27)$$

biçimindedir. Bu denklemde c_k , $n \times 1$ tipinde katsayılar matrisi olup başlangıç fonksiyonu yardımıyla hesaplanır.

Ancak bu durum A ve A_d matrisleri değiştirilebilir (commute) matris olduğu zaman geçerlidir. Yani $AA_d = A_dA$ olmalıdır. Bu yüzden Denklem (5.27), gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin genel sistemleri için kullanılmaz. Bu yüzden Denklem (5.27)'deki çözüm genelde doğru değildir. [41]'de matris Lambert W fonksiyonu yardımıyla gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümü gerçekleştirilmiştir.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad t > 0 \quad (5.28)$$

$$x(t) = x_0 \quad t = 0 \quad (5.29)$$

$$x(t) = g(t) \quad t \in [-\tau, 0) \quad (5.30)$$

Denklem (5.28) için aşağıdaki çözüm formu,

$$x(t) = e^{st} c^I \quad (5.31)$$

Denklem (5.31) biçiminde farzedilsin. s , $n \times n$ boyutunda bir matristir, c^I $n \times 1$ boyutunda sabit bir vektördür. Denklem (5.28)'e Denklem (5.31) yerleştirilirse,

$$se^{st} c^I - Ae^{st} c^I - A_d e^{s(t-\tau)} c^I = 0 \quad (5.32)$$

$$se^{st} c^I - Ae^{st} c^I - A_d e^{-s\tau} e^{st} c^I = 0 \quad (5.33)$$

$$(-sA - A_d e^{-s\tau}) e^{st} c^I = 0 \quad (5.34)$$

$$s - A - A_d e^{-s\tau} = 0 \quad (5.35)$$

Denklem (5.35) elde edilir. $A_d = 0$ olduğu durumda Denklem (5.28)'deki gecikme terimi yok olur ve Denklem (5.28) bir sıradan diferansiyel denkleme dönüşür. Bu durumda çözüm,

$$s - A = 0 \Leftrightarrow s = A \quad (5.36)$$

şeklinde olur. Denklem (5.31)'in içine Denklem (5.36) yerleştirilirse,

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (5.37)$$

genel çözümü elde edilir. Bu çözüm homojen sıradan diferansiyel denklemlerin iyi bilinen bir çözümüdür. Gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denkleminize döndüğümüzde, Denklem (5.35)'in her iki tarafını $\tau e^{s\tau} e^{-A\tau}$ ile çarpıp denklemini yeniden düzenlersek,

$$\tau(s - A) e^{s\tau} e^{-A\tau} = A_d \tau e^{-A\tau} \quad (5.38)$$

Denklem (5.38) elde edilir. Genelde, s ve A değiştirilebilir matrisler değildir. A ve A_d değiştirilebilir olduğu zaman s ve A_d ayrıca değiştirilebilir olur. Ancak genelde, A ve A_d değiştirilebilir değildir. Dolayısıyla,

$$\tau(s-A)e^{s\tau}e^{-A\tau} \neq \tau(s-A)e^{(s-A)\tau} \quad (5.39)$$

Denklem (5.39)'daki eşitsizlik oluşur. Denklem (5.39)'daki eşitsizliği gidermek için matris Lambert W fonksiyonu Denklem (5.40)'daki gibi tanımlanır.

$$W(H)e^{W(H)} = H \quad (5.40)$$

Ve Q bilinmeyen bir matris olmak kaydıyla,

$$\tau(s-A)e^{(s-A)\tau} = A_d\tau Q \quad (5.41)$$

Denklem (5.40) ve (5.41)'den yola çıkarak Denklem (5.43)'teki çözüm matrisi elde edilir.

$$(s-A)\tau = W(A_d\tau Q) \quad (5.42)$$

$$s = \frac{1}{\tau}W(A_d\tau Q) + A \quad (5.43)$$

Denklem (5.42) ve (5.43) kullanılarak Denklem (5.38) tekrardan düzenlenirse,

$$W(A_d\tau Q)e^{W(A_d\tau Q)+A\tau} = A_d\tau \quad (5.44)$$

Denklem (5.44) elde edilir. Matris Lambert W fonksiyonu, $W(H)$, kompleks değerlidir ve sonsuz dallara $(W_k(H_k), k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty)$ sahiptir. Burada $H_k = A_d\tau Q_k$ 'dır. Her bir dala karşılık W_k 'nın Denklem (5.44)'ten elde edilen bir Q_k çözümü vardır. $H_k = Z_k J_k Z_k^{-1}$ 'den J_k hesaplanır. $J_k = \text{diag}(J_{k1}(\hat{\lambda}_1), J_{k2}(\hat{\lambda}_2), \dots, J_{kp}(\hat{\lambda}_p))$ biçiminde olup $J_{ki}(\hat{\lambda}_i)$,

$m \times m$ boyutunda Jordan block ve m ise öz değerlerin $(\hat{\lambda}_i)$ çeşitliliğidir. Matris Lambert W fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$W_k(H_k) = Z_k \left\{ \text{diag} \left(W_k(J_{k1}(\hat{\lambda}_1)), \dots, W_k(J_{kp}(\hat{\lambda}_p)) \right) \right\} Z_k^{-1} \quad (5.45)$$

$$W_k(J_{ki}(\hat{\lambda}_i)) = \begin{bmatrix} W_k(\hat{\lambda}_i) & W'_k(\hat{\lambda}_i) & \dots & \frac{1}{(m-1)!} W_k^{(m-1)}(\hat{\lambda}_i) \\ 0 & W_k(\hat{\lambda}_i) & \dots & \frac{1}{(m-2)!} W_k^{(m-2)}(\hat{\lambda}_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_k(\hat{\lambda}_i) \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Denklem (5.45)'te verilen matris Lambert W fonksiyonu (W_k) ile Denklem (5.43)'ten S_k hesaplanır. Lambert W fonksiyonunun ana dalı ($k=0$) ve diğer dalları ($k \neq 0$) seri tanımından faydalanarak veya çeşitli ticari yazılım paketlerinde (Matlap, Maple, Mathematica gibi paketler) gömülü olan komutlar kullanılarak hesaplanabilir [13,40].

$$W_k(A_d \tau Q_k) e^{W_k(A_d \tau Q_k) + A \tau} = A_d \tau \quad (5.47)$$

Denklem (5.47)'den Q_k hesaplanır. Elde edilen Q_k Denklem (5.43)'te yerine konularak Denklem (5.48) elde edilir.

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(A_d \tau Q_k) + A \quad (5.48)$$

Daha sonra Denklem (5.28)'in genel çözümünü elde etmek için Denklem (5.31)'de s_k yerine konur.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k t} c_k^t \quad (5.49)$$

c_k^t 'nın hesaplanmasına dair nümerik metotlar [40]'da geliştirilmiştir.

5.3. Zaman Gecikmeli Sistemlerin Lambert W Fonksiyonu ile Kararlılık Analizi

Denklem (5.28)'de verilen bir gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem için sonsuz eigen-spektrumunda en sağdaki öz değerleri belirlemek oldukça zordur. Ancak en sağdaki öz değerler sistemin kararlılığını belirlediği için önemlidir.

Denklem (5.49)'da Lambert W fonksiyonuna dayalı çözüm yaklaşımından da görüldüğü üzere sistem (5.28) için kararlılık şartı s_k matrisinin öz değerlerine bağlıdır. Yani Denklem (5.28) formunda karakterize edilen zaman gecikmeli sistem ancak ve ancak s_k 'nın tüm öz değerleri negatif reel kısma sahip olduğu zaman asimptotik kararlı olur. Ancak sonsuz sayıda dallar için ($k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$) s_k veya e^{s_k} matrisini hesaplamak pratikte mümkün değildir. Eğer A_d katsayı matrisi tekrarlı sıfır öz değerlerine sahip değilse sadece anadal olan $k = 0$ kullanılarak elde edilen Denklem (5.28)'in karakteristik kökleri kompleks düzlemde en sağdaki köklerdir ve sistemin kararlılığını belirlerler. Genel bir kanıt olmadığından dolayı bu gözlemler varsayım şeklinde özetlenebilir. Eğer A_d tekrarlı sıfır öz değerlere sahip değil ise,

$$\max \{ \Re \{ \text{anadal } k = 0 \text{ için özdeğerler} \} \} \geq \Re \{ \text{tüm diğer özdeğerler} \}$$

eşitliği sağlanır. Skaler gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler için anadal kullanılarak elde edilen kökün kararlılığı belirlediği [46]'da kanıtlanmıştır. Böyle bir kanıt A ve A_d matrisleri değiştirilebilir olduğu gecikmeli fonksiyonel diferansiyel sistemler için kolaylıkla genişletilebilir. Ancak böyle bir kanıt genel matris vektör gecikmeli diferansiyel denklemler için kullanışlı değildir. Yine de aynı davranış bu bölümde verilen tüm örneklerde gözlemlenmiştir. Yani anadal kullanılarak elde edilen s_0 'ın öz değerleri imajiner eksene en yakın olanıdır [14]. Bu bağlamda Lambert W fonksiyonunun özelliği en sağdaki kutup yerleşimi için yararlı bir temel sağlar. Sonuç olarak, Lambert W fonksiyonuna dayalı çözüm yaklaşımının önemli bir avantajı şudur ki, sistemin kararlılığı sadece ana dala dayalı olarak belirlenebilir.

Birinci dereceden gecikmeli diferansiyel denklemin kararlılığını Lambert W fonksiyonu ile ele alalım.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad \tau > 0 \quad (5.50)$$

$A, A_d \in C^{n \times n}$, $x(t) \in C^n$ ve τ sabit zaman gecikmesidir. Denklem (5.50)'nin quasi-polinom karakteristik denklemi Denklem (5.51) ile gösterilir.

$$D(s) = \det(sI - A - A_d e^{-\tau s}) = \sum_{i,k=0}^{i+k=n} a_{ik} s^i e^{-k\tau s} \quad (5.51)$$

Burada I birim matris, $a_{ik} \in C$, $a_{n0} = 1$ dir. Denklem (5.51)'in yani quasi-polinomun kararlı olma şartı $D(s) = 0$ olduğu durumda $\text{Re}(s) < 0$ şartıyla sağlanır. $D(s)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$D(s) = (s - \alpha_1 - \beta_1 e^{-\tau s}) \dots (s - \alpha_n - \beta_n e^{-\tau s}) \quad (5.52)$$

$\alpha_i, \beta_i \in C$, $i = 1, \dots, n$ 'dir. Ancak bu durum belli şartlar altında oluşur. Eğer A ve A_d eş zamanlı üçgenselleştirilmiş (triangularizable) ise Denklem (5.51)'deki karakteristik denklem, Denklem (5.52) gibi çarpanlara ayrılabilir. Bir matris çiftinin eş zamanlı üçgenselleştirilme (triangularization) olması için üç şart vardır. Bunlar, matrisler değiştirilebilen (commutative), matrisler tarafından üretilen lie-algebra çözülebilir ve komütatörün rankı ise 1'e eşit olmalıdır [46]. Karakteristik denklemin kökleri Lambert W fonksiyonu aracılığıyla Denklem (5.53)'teki formdan elde edilir.

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(A_d \tau e^{-A\tau}) + A \quad (5.53)$$

Denklem (5.53)'ün asimptotik kararlı olma şartı Denklem (5.54) şeklindedir [46].

$$s_0 = \frac{1}{\tau} \text{Re}(W_0(A_d \tau e^{-A\tau})) + \text{Re}(A) < 0 \quad (5.54)$$

Örnek 5.1: Bu örnekte [40]'ta incelenen ve Denklem (5.55)'te verilen sistemin Lambert W fonksiyonu aracılığıyla karakteristik denklem çözümü gerçekleştirilecek ve karakteristik denklemin kökleri Matlab ortamında elde edilip sistemin kararlılığı ve kararlılık sınırı τ ve α parametrelerine göre belirlenecektir.

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t - \tau) = 0 \quad (5.55)$$

Denklem (5.55) için özel çözümün $x(t) = ce^{st}$ olduğu farzedilirse, doğrusal olmayan transcendental karakteristik denklem,

$$s + \alpha e^{-s\tau} = 0 \quad (5.56)$$

$$se^{s\tau} = -\alpha \quad (5.57)$$

Denklem (5.57) biçiminde elde edilir. Transcendental karakteristik denklemini çözmek için Lambert W fonksiyon konsepti gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denkleme uygulanır. Her iki taraf τ ile çarpılırsa,

$$\tau se^{s\tau} = -\alpha\tau \quad (5.58)$$

$$W(-\alpha\tau) = \tau s \quad (5.59)$$

$$s = \frac{1}{\tau} W(-\alpha\tau) \quad (5.60)$$

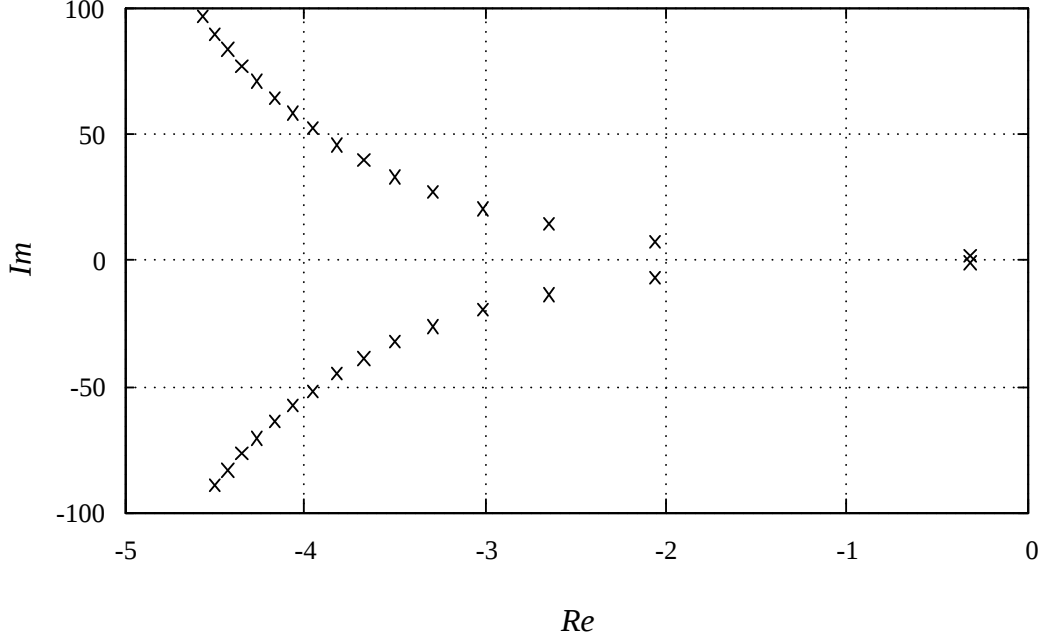
karakteristik denklemin kökleri Denklem (5.60) aracılığıyla elde edilir. Lambert W fonksiyonu sonsuz dallara sahip olduğu için karakteristik denklem,

$$s_k = \frac{1}{\tau} W(k, -\alpha\tau) \quad (5.61)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi bu karakteristik denklemin köklerini sistem parametreleri $\alpha = 1$ ve $\tau = 1$ için inceleyelim. Sistem parametreleri Denklem (5.61)'de yerine yazıldığı zaman,

$$s_k = W(k, -1) \quad (5.62)$$

Denklem (5.62) elde edilir. s_k 'nın kökleri kompleks düzlemde Şekil 5.3'te görülmektedir.



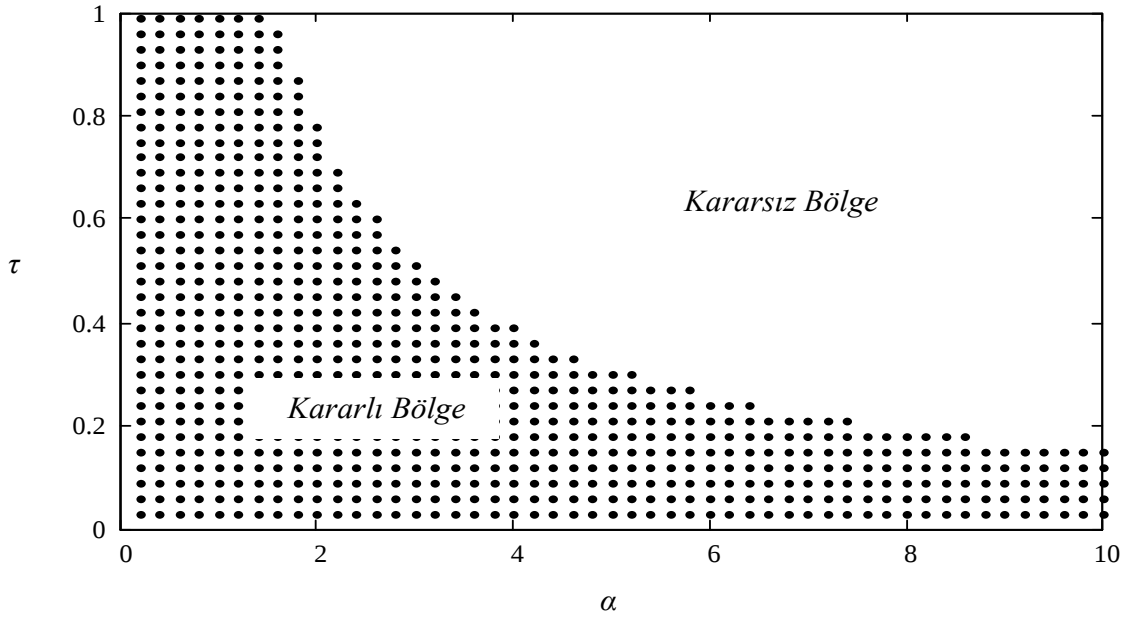
Şekil 5.3. $\alpha = 1$ ve $\tau = 1$ için Denklem (5.55)'in kutuplarının s-düzleminde konumları

Şekil 5.3 ayrıca sistemin kutuplarını da göstermektedir. Matlab ortamında $k = -10, \dots, 10$ aralığında alınıp s_k hesaplanmıştır. Kompleks köklerin herbir çifti, Lambert W fonksiyonunun dalları kullanılarak türetilmiştir. $\alpha = 1$ ve $\tau = 1$ iken anadal olan $k = 0$ için s_0 değeri $-0.3181 + 1.3372i$ çıkmaktadır. Görüldüğü üzere s_0 'ın reel kısmı negatiftir. Anadal olan $k = 0$ kararlılığı belirlediğinden dolayı sistem bu parametre değerlerinde kararlıdır.

Denklem (5.55)'in kararlılığını genel anlamda inceleyelim. Denklem (5.60)'taki karakteristik denklemin kökleri Denklem (5.63) biçimindedir.

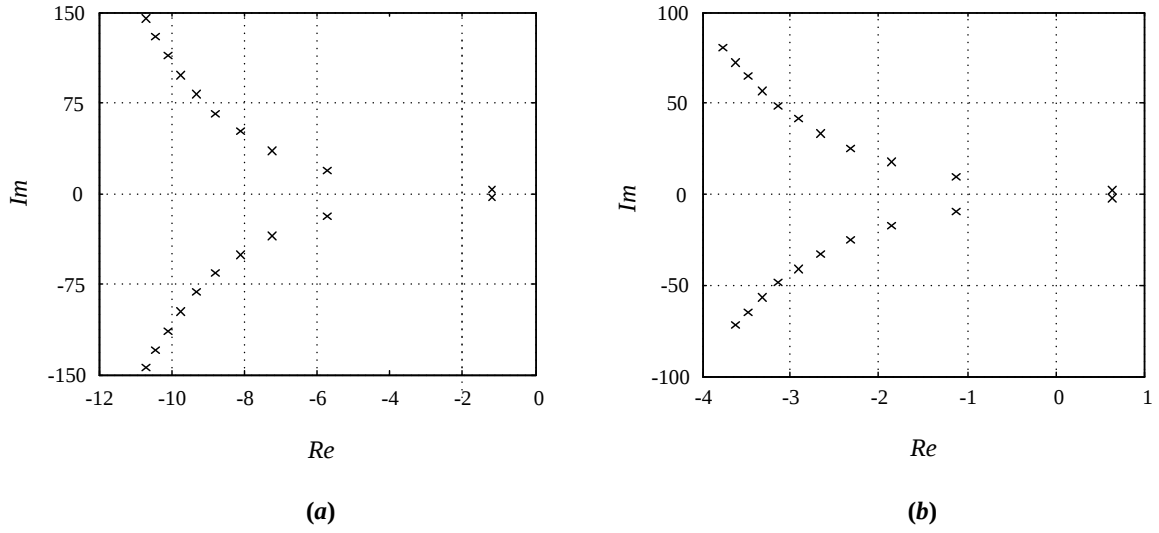
$$s = \frac{1}{\tau} W(-\alpha\tau) \quad (5.63)$$

Bu sistemin kararlı olabilmesi için $\text{Re}(\frac{1}{\tau}W(-\alpha\tau)) < 0$ olmalıdır. Bu durumda $\tau > 0$ olduğundan $W(-\alpha\tau)$ değerini negatif yapan değerler incelenmelidir. $\alpha\tau > \frac{\pi}{2}$ olduğu zaman Lambert W fonksiyonunun anadali daima pozitif reel kısma sahip değerler verdiği için dolayı kararsızlık oluşur. α ve τ parametrelerinin değişimine bağlı olarak kararlılık sınırı Şekil 5.4'te görülmektedir.



Şekil 5.4. Denklem (5.55) için kararlılık sınırı

Şekil 5.4'ten de görüldüğü üzere α ve τ parametrelerine bağlı olarak kararlı ve kararsız olmak üzere iki bölge oluşmaktadır. Kararlı bölgede $\alpha = 2, \tau = 0.4$ değerleri için Şekil 5.5(a)'da, kararsız bölgede ise $\alpha = 4, \tau = 0.8$ değerleri için Şekil 5.5(b)'de sistemin kutup yerleşimi elde edilmiştir. Görüldüğü üzere kararlı bir bölgede alınan sistem parametrelerinde karakteristik denklemin tüm kökleri sol yarı s-düzleminde iken kararsız bölgede alınan sistem parametrelerinde karakteristik denklemin bir çift kökü sağ yarı s-düzleminde bulunmaktadır.



Şekil 5.5. a) $\alpha = 2$ ve $\tau = 0.4$ b) $\alpha = 4$ ve $\tau = 0.8$ için Denklem (5.55)'in kutuplarının s-düzleminde konumları

Örnek 5.2: Bu örnekte [14]'te verilen ve Denklem (5.64) ile ifade edilen sistemin transcendental yapıda karakteristik denklemi elde edilecek ve Lambert W fonksiyonu yardımıyla kökleri Matlab kullanılarak bulunacaktır. Ayrıca farklı sistem parametresi değerleri için kararlılık kriteri incelenecektir.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad (5.64)$$

Denklem (5.64)'te verilen sistemin özel çözümü $x(t) = ce^{st}$ farzedilerek,

$$s = A + A_d e^{-\tau s} \quad (5.65)$$

$$s - A = A_d e^{-\tau s} \quad (5.66)$$

$$e^{\tau s} (s - A) = A_d \quad (5.67)$$

transcendental karakteristik denklemi elde edilir. Denklem (5.67)'nin her iki tarafı τe^{-Ar} ile çarpılıp Lambert W fonksiyonu uygulanırsa,

$$\tau e^{-Ar} e^{\tau s} (s - A) = A_d \tau e^{-Ar} \quad (5.68)$$

$$\tau(s-A)e^{\tau(s-A)} = A_d \tau e^{-A\tau} \quad (5.69)$$

$$W(A_d \tau e^{-A\tau}) = \tau(s-A) \quad (5.70)$$

$$s = \frac{1}{\tau} W(A_d \tau e^{-A\tau}) + A \quad (5.71)$$

karakteristik denklemin köklerini elde edeceğimiz Denklem (5.71) elde edilir. Bu örnekte sistem parametresi $A=-1$ ve $\tau=1$ olarak sabit alınıp farklı A_d parametrelerine göre sistemin kutupları ve kararlılığı incelenecektir. Sırasıyla $A_d=0.3033$, $A_d=1$ ve $A_d=2.4731$ olarak alınıp değerler Denklem (5.71)'de yerine konursa,

$$s_k = W(k, 0.3033e) - 1 \quad (5.72)$$

$$s_k = W(k, e) - 1 \quad (5.73)$$

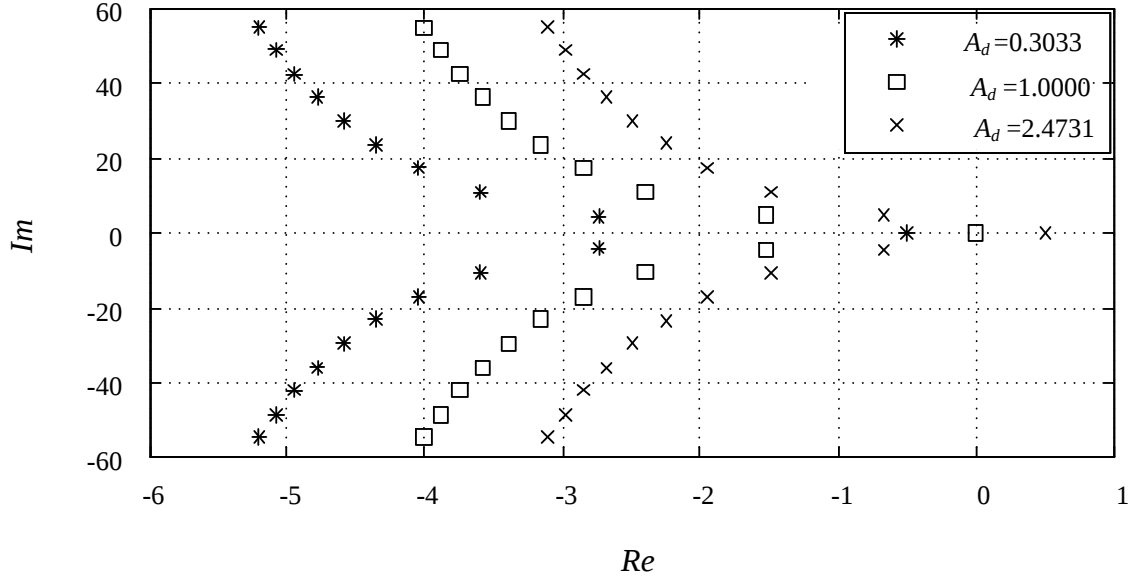
$$s_k = W(k, 2.4731e) - 1 \quad (5.74)$$

Denklem (5.72), (5.73) ve (5.74) elde edilir. Tablo 5.2'de farklı A_d parametrelerine karşılık gelen en sağdaki kutuplar görülmektedir.

Tablo 5.2. Farklı A_d parametrelerine karşılık gelen en sağdaki kutuplar

A_d	0.3033	1.0000	2.4731
s_0	-0.5	0	0.5

Şekil 5.6'da sistem parametreleri olan $A=-1$ ve $\tau=1$ olarak sabit alınıp farklı A_d parametrelerine göre Denklem (5.64)'ün kompleks düzlemde kutup yerleşimi Matlab ortamında çizilmiştir. Görüldüğü üzere, sistem artan A_d parametresiyle birlikte kararsızlığa geçiş yapmaktadır.



Şekil 5.6. Farklı A_d parametrelerine göre Denklem (5.64)'ün kutuplarının s-düzleminde konumları

Örnek 5.3: Bu örnekte [14,41]'de verilen ve Denklem (5.75) ile ifade edilen sistemin matris Lambert W fonksiyonunu kullanarak çözümünü gerçekleştirilecektir.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1.66 & -0.697 \\ 0.93 & -0.330 \end{bmatrix} x(t - \tau) \quad (5.75)$$

Denklem (5.75)'te A ve A_d matrislerini ayrı ayrı yazalım.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} 1.66 & -0.697 \\ 0.93 & -0.330 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Denklem (5.76)'daki A ve A_d matrisleri değiştirilebilir olmadığından dolayı yani $AA_d \neq A_dA$ olduğundan sistemin çözümü matris Lambert W fonksiyonu kullanılarak gerçekleştirilir. Bu durumda Q matrisi, Denklem (5.77)'den faydalanarak Matlab yardımıyla hesaplanır.

$$W_k(A_d \tau Q_k) e^{W_k(A_d \tau Q_k) + A \tau} = A_d \tau \quad (5.77)$$

Tablo 5.3'te Matlab yardımıyla hesaplanan Q_k matrisinin $k = 0$ ve $k = \pm 1$ için değerleri görülmektedir.

Tablo 5.3. Q_k matrisinin $k = 0$ ve $k = \pm 1$ için değerleri

	$k = 0$	$k = \mp 1$
Q_k	$\begin{bmatrix} -9.9183 & 14.2985 \\ -32.7746 & 6.5735 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -18.8024 \pm 10.2243i & 6.0782 \pm 2.2661i \\ -61.1342 \pm 23.6812i & 1.0161 \pm 0.2654i \end{bmatrix}$

Q_k matrisi hesaplandıktan sonra Denklem (5.78)'deki s_k 'nın hesaplanabilmesi için $W_k(A_d \tau Q_k)$ bulunması gerekecektir.

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(A_d \tau Q_k) + A \quad (5.78)$$

$\tau = 1$ olarak kabul edildiğinde $k = 0$ için $A_d \tau Q_k$ matrisi Denklem (5.79)'daki gibi olur.

$$A_d \tau Q_k = \begin{bmatrix} 6.3796 & 19.1537 \\ 1.5916 & 11.1283 \end{bmatrix}, \quad (k = 0) \quad (5.79)$$

$W_0(A_d \tau Q_0)$ 'ın hesaplanabilmesi için; $A_d \tau Q_0$ matrisinin öz değerleri (Y) ve öz vektörleri (V) bulunur. Bu değerler bulunduktan sonra Denklem (5.80)'de yerine konup ana dala ait Lambert W değeri hesaplanır.

$$W_0(A_d \tau Q_0) = VW(Y)V^{-1} \quad (5.80)$$

$A_d \tau Q_0$ 'ın öz değerleri (Y) ve öz vektörleri (V) hesaplanarak sırasıyla Denklem (5.81) ve (5.82)'deki gibi elde edilir.

$$Y = \begin{bmatrix} 2.7437 & 0 \\ 0 & 14.7642 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.9825 & -0.9161 \\ 0.1865 & -0.4010 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

$$W(Y) = \begin{bmatrix} 1.0047 & 0 \\ 0 & 1.9994 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

$W(Y)$ matrisi hesaplandıktan sonra Denklem (5.80)'de yerine konarak $W_0(A_d \tau Q_0)$ bulunur. Daha sonra karakteristik denklemin köklerini veren Denklem (5.78)'de değerler yerine konarak s_0 matrisi,

$$s_0 = \frac{1}{\tau} W_0(A_d \tau Q_0) + A = \begin{bmatrix} 0.3055 & -1.4150 \\ 2.1317 & -3.3015 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

Denklem (5.84)'teki gibi elde edilir. s_0 'ın öz değerleri ise;

$$\lambda_{00} = \begin{bmatrix} -1.0119 & 0 \\ 0 & -1.9841 \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

şeklindedir. $k = \mp 1$ için aynı işlemler yapılırsa;

$$A_d \tau Q_{\mp 1} = \begin{bmatrix} 11.3985 \pm 0.4665i & 9.3815 \pm 3.5768i \\ 2.6881 \pm 1.6938i & 5.3174 \pm 2.0199i \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

Denklem (5.86) elde edilir. $A_d \tau Q_{\mp 1}$ matrisinin öz değerleri ve öz vektörleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$W_{\mp 1}(A_d \tau Q_{\mp 1}) = VW(Y)V^{-1} \quad (5.87)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.9393 & 0.7558 \\ 0.3108 \pm 0.1454i & -0.6361 \pm 0.1554i \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 13.9486 \pm 3.1018i & 0 \\ 0 & 2.7673 \mp 0.6154i \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

$A_d \tau Q_{\mp 1}$ matrisinin öz değeri ve öz vektörleri bulunduğundan sonra $W_{\pm 1}(A_d \tau Q_{\pm 1})$ Denklem (5.90)'da olduğu gibi hesaplanır.

$$W_{\mp 1}(A_d \tau Q_{\mp 1}) = VW(Y)V^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6501 \mp 4.9801i & 1.3747 \pm 0.1459i \\ 0.4174 \pm 0.1309i & -0.1048 \mp 4.5592i \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

$W_{\pm 1}(A_d \tau Q_{\pm 1})$ hesaplandıktan sonra karakteristik denklemin köklerini veren Denklem (5.78)'de yerine konarak $s_{\pm 1}$ matrisi bulunur.

$$s_{\mp 1} = \frac{1}{\tau} W_{\mp 1}(A_d \tau Q_{\mp 1}) + A = \begin{bmatrix} -0.3499 \mp 4.9801i & -1.6253 \pm 0.1459i \\ 2.4174 \pm 0.1309i & -5.1048 \mp 4.5592i \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

$s_{\pm 1}$ 'in öz değeri ise,

$$\lambda_{\pm 1} = \begin{bmatrix} -1.3990 \mp 5.0935i & 0 \\ 0 & -4.0557 \mp 4.4458i \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Denklem (5.92) şeklindedir. Denklem (5.75)' deki sistemin genel çözümü,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k t} c_k^t = \dots + e^{s_{-1} t} c_{-1}^t + e^{s_0 t} c_0^t + e^{s_1 t} c_1^t + \dots \quad (5.93)$$

Denklem (5.93) formundadır. c_k^t katsayıları başlangıç fonksiyonu $g(t)$, başlangıç durumu x_0 ve zaman gecikmesi τ yardımıyla belirlenir [15] .

Tablo 5.4'de $k = 0$ ve $k = \pm 1$ için Q_k , s_k ve λ_{ki} değeri görülmektedir.

Tablo 5.4. $k = 0$ ve $k = \pm 1$ için Q_k , S_k ve λ_{ki} değerleri

	$k = 0$	$k = \mp 1$
Q_k	$\begin{bmatrix} -9.9183 & 14.2985 \\ -32.7746 & 6.5735 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -18.8024 \pm 10.2243i & 6.0782 \pm 2.2661i \\ -61.1342 \pm 23.6812i & 1.0161 \pm 0.2654i \end{bmatrix}$
S_k	$\begin{bmatrix} 0.3055 & -1.4150 \\ 2.1317 & -3.3015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.3499 \mp 4.9801i & -1.6253 \pm 0.1459i \\ 2.4174 \pm 0.1309i & -5.1048 \mp 4.5592i \end{bmatrix}$
λ_{ki}	$\begin{bmatrix} -1.0119 & 0 \\ 0 & -1.9841 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.3990 \mp 5.0935i & 0 \\ 0 & -4.0557 \mp 4.4458i \end{bmatrix}$

Tablo 5.4'ten de görüldüğü üzere, dominant öz değerlerin reel kısımları negatif olduğundan yani öz değerler sol yarı s-düzleminde bulunduklarından dolayı sistem (5.75) kararlıdır.

6. ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ İÇİN GENELLEŞTİRİLEN DEĞİŞTİRİLMİŞ MİKHAİLOV KARARLILIK KRİTERİ

1938’de Mikhailov [17]’de n . dereceden sabit katsayılı doğrusal sistemlerin kararlılığı için gerekli ve yeterli şartı sağlayacak bir frekans cevap kriterini tanıtmıştır [18]. Sistemlerin kararlılığı, Mikhailov hodograf olarak adlandırılan eğrinin şekline bağlı olmaktadır. Bu kriter, argüman prensibini temel almaktadır [54]. Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için Mikhailov’un iki tane kararlılık kriteri vardır [18]. Mikhailov’un birinci kriteri geri tipli zaman gecikmeli sistemlere uygulanabilirken, Mikhailov’un ikinci kriteri geri tipli zaman gecikmeli sistemlere uygulandığında güvenilir sonuçlar vermemektedir [52].

Bu bölümde Mikhailov eğrisinin özelliklerine ve Mikhailov’un kararlılık kriterlerine değinilecektir. Daha sonra [53]’te doğrusal sürekli zamanlı kesir dereceli sistemler için ve [19]’da doğrusal sürekli zamanlı geri tipli zaman gecikmeli kesir dereceli sistemler için önerilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterinin teoremlerine yer verilecektir.

6.1. Mikhailov Eğrisi

[18]’de gecikmesiz sistemler için Mikhailov eğrisinin özelliklerine değinilmiştir. Doğrusal bir sistemin karakteristik denklemi Denklem (6.1) biçiminde olsun.

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (6.1)$$

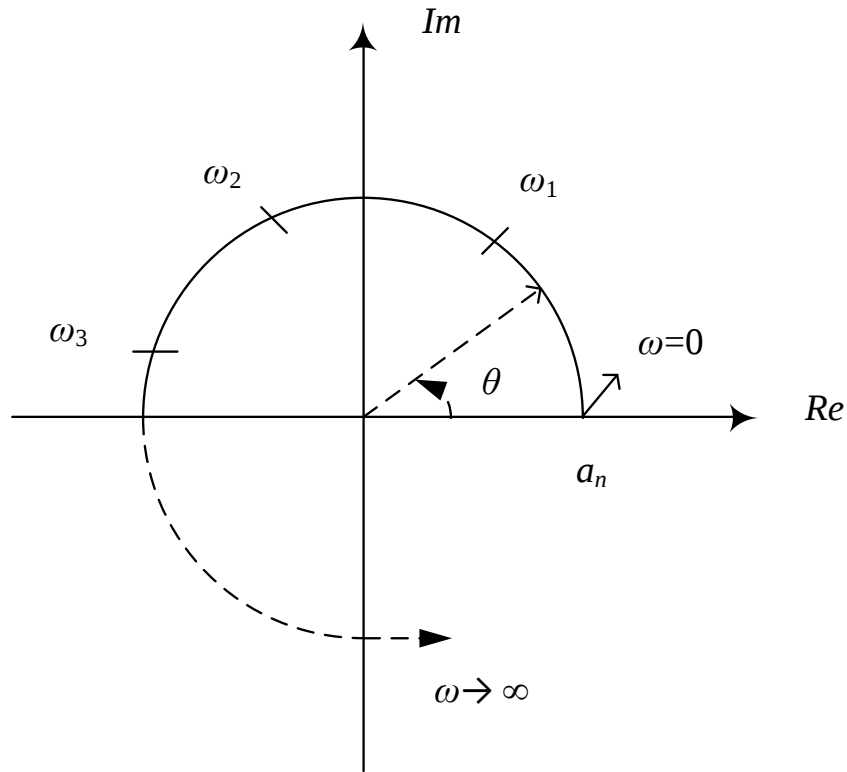
Denklem (6.1)’de $s = j\omega$ yazılırsa,

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) \quad (6.2)$$

$$\operatorname{Re}[D(j\omega)] = X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \quad (6.3)$$

$$\operatorname{Im}[D(j\omega)] = Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \quad (6.4)$$

$D(j\omega)$ 'nin reel ve imajiner kısımları elde edilir. Denklem (6.3) ve (6.4) aracılığıyla $D(j\omega)$, verilen bir ω için vektör formda kompleks düzlemde (X, jY) yansıtılabilir. $0 \leq \omega < \infty$ aralığında ω parametresini değiştirdiğimiz zaman bu vektörün tipi belli bir eğri tanımlar. ω değerini $0 \leq \omega < \infty$ aralığında değiştirerek kompleks düzlemde bu yolla elde edilen $D(j\omega)$ fonksiyonunun grafiği $D(s)$ polinomu için Mikhailov eğrisi olarak adlandırılır. Şekil 6.1'de Mikhailov eğrisi gösterilmektedir [18].



Şekil 6.1. Mikhailov eğrisi

Denklem (6.1)'i, Denklem (6.6) formunda yazabiliriz.

$$D(s) = a_0 (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (6.5)$$

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n) \quad (6.6)$$

$D(j\omega)$ 'nin açısı Denklem (6.6)'da verilen $(j\omega - s_1), (j\omega - s_2), \dots, (j\omega - s_n)$ vektörlerinin açılarının toplamına eşittir. Yani toplam açı,

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n \quad (6.7)$$

$$\arg D(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - s_i) \quad (6.8)$$

Denklem (6.8) şeklinde ifade edilebilir. $\theta(\omega)$ ve $\theta_i(\omega)$ sırasıyla ω , 0'dan sonsuza gittiği zaman $D(j\omega)$ ve $(j\omega - s_i)$ 'nin açılarının değişimini belirtsin. O zaman,

$$\theta(\omega) = \sum_{i=1}^n \theta_i(\omega) \quad (6.9)$$

olur. Tabi $a_0 > 0$ 'ın açısı sıfıra eşittir. $\tilde{\theta}$ ve $\tilde{\theta}_i$ sırasıyla ω , 0'dan sonsuza gittiği zaman $D(j\omega)$ ve $(j\omega - s_i)$ 'nin açılarının toplam değişimini belirtsin. Bu durumda,

$$\tilde{\theta} = \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i \quad (6.10)$$

olur. Kompleks kök düzleminde $(\sigma, j\omega)$ bu polinomun dört farklı tipte tek ve çift köklerini göz önüne alıp açılarını inceleyelim.

1. Negatif reel kök ($s_1 = \sigma_1 < 0$) durumunda; Şekil 6.2(a)'dan da görüldüğü üzere vektör çıkarma kuralından, $0 \leq \omega < \infty$ aralığı için $(j\omega - s_1) = AB$ vektörü θ_1 kadar saat yönünün tersinde döner.

$$\theta_1 = +\frac{\pi}{2} \quad (6.11)$$

2. Pozitif reel kök ($s_1 = \sigma_1 > 0$) durumunda; Şekil 6.2(b)'den de görüldüğü üzere vektör çıkarma kuralından, $0 \leq \omega < \infty$ aralığı için $(j\omega - s_1) = AB$ vektörü θ_1 kadar saat yönünde döner.

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad (6.12)$$

3. Negatif reel kısımlı kompleks eşlenik kökler ($s_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1, \sigma_1 < 0$) durumunda; Şekil 6.2(c)'den de görüldüğü üzere, $(j\omega - s_1) = A_1B$ ve $(j\omega - s_2) = A_2B$ olmak üzere iki vektör mevcuttur. $0 \leq \omega < \infty$ aralığı için ilk vektör θ_1 , ikinci vektör θ_2 kadar döner.

$$\theta_1 = +\frac{\pi}{2} + \gamma \quad (6.13)$$

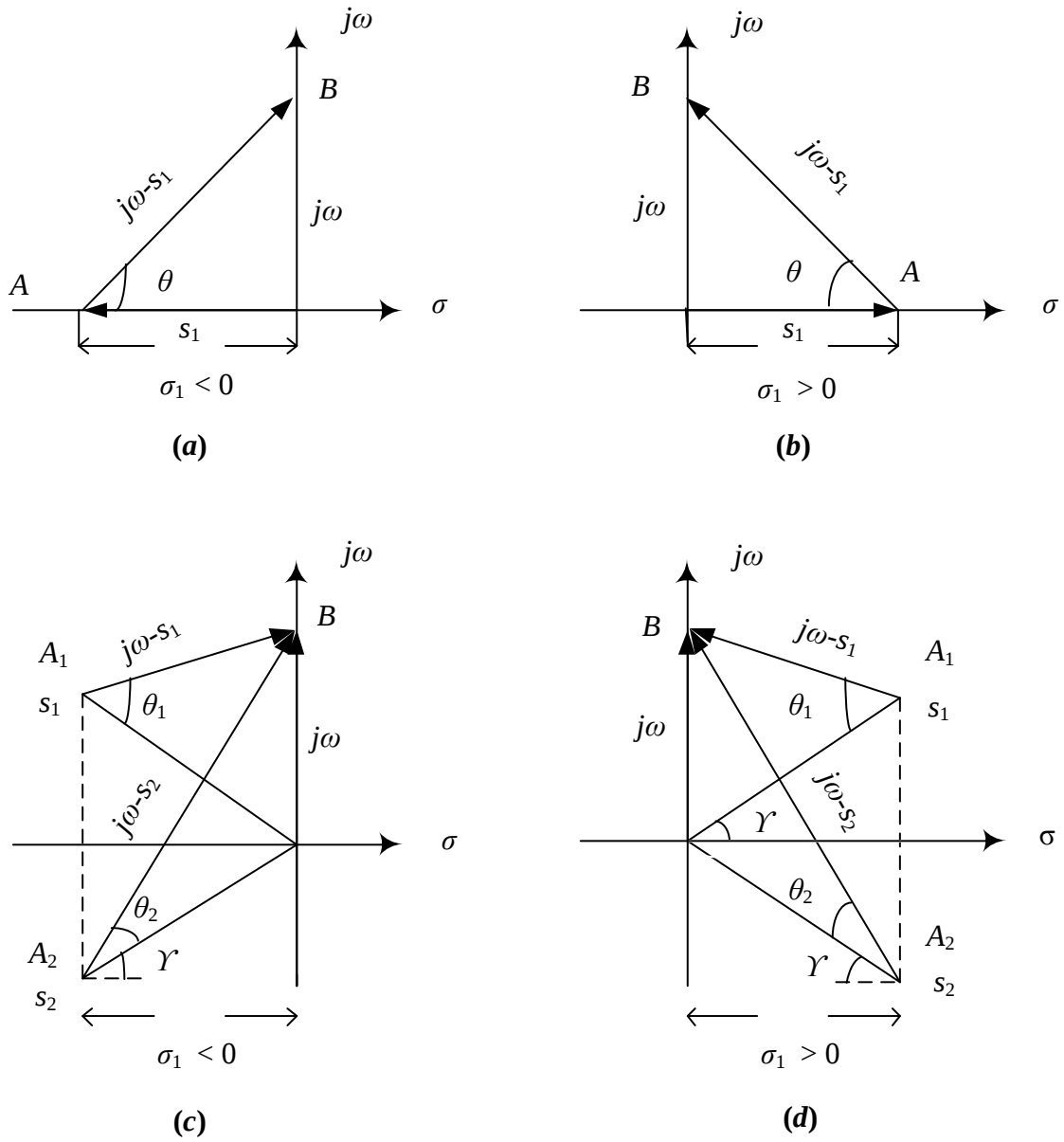
$$\theta_2 = +\frac{\pi}{2} - \gamma$$

4. Pozitif reel kısımlı kompleks eşlenik kökler ($s_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1, \sigma_1 > 0$) durumunda; Şekil 6.2(d)'den de görüldüğü üzere, $(j\omega - s_1) = A_1B$ ve $(j\omega - s_2) = A_2B$ olmak üzere iki vektör mevcuttur. $0 \leq \omega < \infty$ aralığı için ilk vektör θ_1 , ikinci vektör θ_2 kadar döner.

$$\theta_1 = -\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \quad (6.14)$$

$$\theta_2 = -\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

Denklem (6.11) - (6.14)'den de görüldüğü gibi reel köklerin her birinin toplamı $+\pi/2$ veya $-\pi/2$ ile uyumlu olacaktır. Dikkat edilirse, açılarının işareti köklerin işareti ile zıttır. Kompleks eşlenik köklerin her biri ise $+\pi$ veya $-\pi$ ile uyumludur. Kompleks eşlenik kökler durumunda açının işareti kompleks köklerin reel kısımlarının işareti ile zıttır.



Şekil 6.2. Köklerin konumuna göre açının belirlenmesi

Eğer n . dereceden $D(s)$ polinomu m tane pozitif reel kısmılı köke sahipse (hem kompleks hem de reel kök) ve $(n-m)$ tane negatif reel köke sahip ise $0 \leq \omega < \infty$ aralığında $D(j\omega)$ vektörünün açısı Denklem (6.15) gibi olur.

$$\theta = (n-m) \frac{\pi}{2} - m \frac{\pi}{2} = (n-2m) \frac{\pi}{2} \quad (6.15)$$

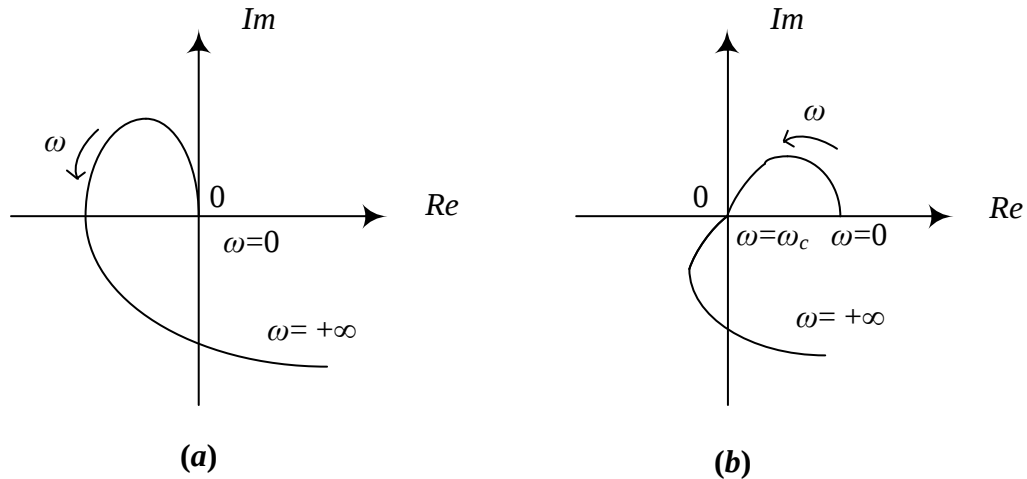
Denklem (6.15) ile verilen ifadede 3 özel durum düşünülmemiştir. Bunlar; sıfır kök, sonsuz kök ve saf imajiner köklerin olduğu durumdur.

- Sıfır kök durumunda, Denklem (6.1)'de verilen polinomun sabit terimi a_n yok olur ve böylece Mikhailov eğrisi kompleks düzlemde orijinden başlar. Bu durum Şekil 6.3(a)'da görülmektedir.
- Denklem (6.1)'de verilen polinomun bir sonsuz kökü ($s = \infty$) Denklem (5.11)'deki polinomun $1/s$ değişkeni için bir sıfır kök gibi düşünülebilir.

$$a_0 + a_1 \frac{1}{s} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{s^{n-1}} + a \frac{1}{s^n} \quad (6.16)$$

Bu yüzden sonsuz kök, Denklem (6.1)'de verilen $L(s)$ polinomunun en yüksek dereceli terimi için a_0 katsayısı yok edildiği zaman elde edilir.

- Saf imajiner kökler ($s = \pm j\omega_0$) durumunda, Denklem (6.1)'de verilen polinomda $s = j\omega_0$ yazılarak denklem yok edilir. Bu yüzden Mikhailov eğrisi, $\omega = \omega_0$ 'a uygun noktada koordinatların orijininden geçer. Bu durum Şekil 6.3(b)'de görülmektedir. Bu durumda Mikhailov eğrisi sadece saf imajiner köklerin varlığını belirtmez ayrıca onların değerlerini de verir.



Şekil 6.3. Mikhailov eğrisinin; a) sıfır kök durumu ve b) saf imajiner kök durumu

Verilen $D(s)$ polinomu için çizilen $D(j\omega)$ Mikhailov eğrisinden pozitif ve negatif reel kısma sahip olan köklerin sayısı ve ayrıca eğer varsa saf imajiner kökler ve onların

değerleri belirlenebilir. Diğer bir deyişle koordinatların orijinine göre Mikhailov eğrisinin pozisyonunu, kök düzleminde imajiner eksene göre polinomun köklerinin dağılımı belirler.

Denklem (6.3) ve Denklem (6.4)'ün ω 'ye göre türevleri alınır,

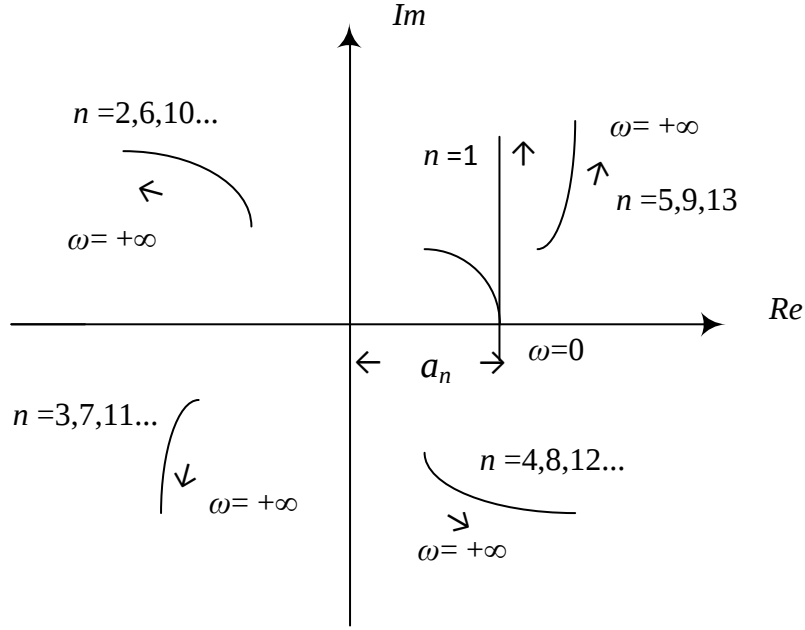
$$\frac{dX}{d\omega} = -2a_{n-2}\omega + 4a_{n-4}\omega^3 - \dots \quad (6.17)$$

$$\frac{dY}{d\omega} = a_{n-1} - 3a_{n-3}\omega^2 + 5a_{n-5}\omega^4 - \dots \quad (6.18)$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{d\omega}}{\frac{dX}{d\omega}} \quad (6.19)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler göz önüne alındığında pozitif katsayılı polinomlar için çizilen Mikhailov eğrisinin genel özellikleri aşağıda verilmiştir. Şekil 6.4'te Mikhailov eğrisinin özellikleri görülmektedir. Şekil 6.4'e göre;

1. $\omega = 0$ 'da eğrinin başlangıcı daima reel x eksenini üzerinde koordinatların orijininin a_n kadar uzaklığa yerleştirilir ve bu eğri sola doğru iç bükeydir.
2. $\omega = +\infty$ 'da eğrinin sonu daima sonsuza gider.
3. $\text{Re}[D(j\omega)] = 0$ ve $\text{Im}[D(j\omega)] = 0$ noktaları yani koordinat eksenleri ile kesişen noktaların sayısı polinomun derecesi n 'i geçemez.
4. $dX/d\omega = 0$ ve $dY/d\omega = 0$ noktaları yani yatay ve dikey teğetli noktaların toplam sayısı n 'i geçemez.
5. Özellik 3 ve 4'ten de görüldüğü gibi $0 \leq \omega < \infty$ aralığında Mikhailov eğrisinin koordinatların orijini etrafında kuadrantları (koordinat çeyrekleri) geçme sayısı n 'i geçemez.
6. Eğer eğri n kuadrant boyunca birbirini takip ederse monoton bir spiral şekil oluşur.



Şekil 6.4. Mikhailov eğrisinin özellikleri

6.2. Mikhailov'un Kararlılık Kriterleri

Doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin kararlılığı için Mikhailov'un iki tane kararlılık kriteri bulunmaktadır [18].

6.2.1. Mikhailov'un Birinci Kararlılık Kriteri

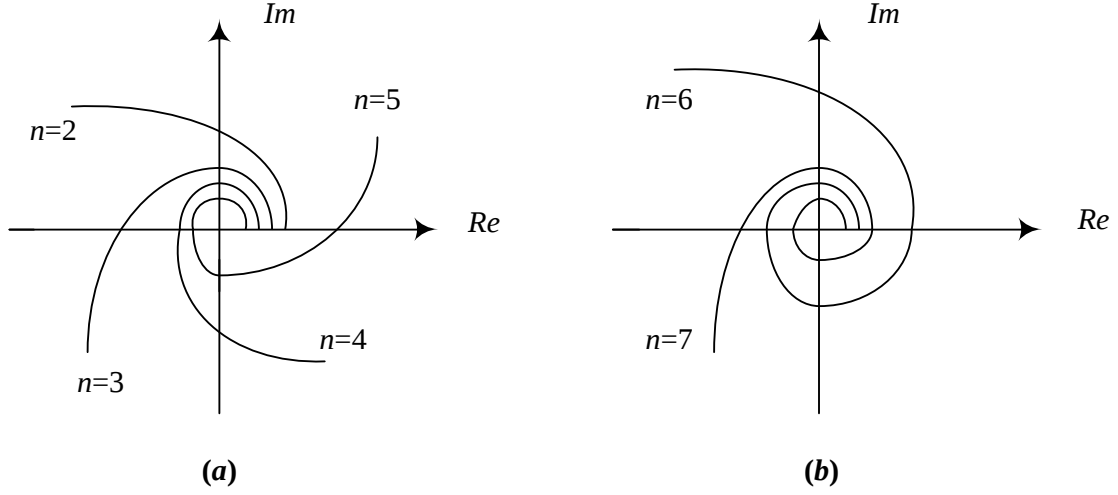
Sistemin kararlı olabilmesi için yeterli ve gerekli şart karakteristik denklemin ($D(s)=0$) tüm köklerinin negatif reel kısma sahip olmasıdır. Bu durumda, Denklem (6.15)'de $m=0$ olmalıdır. Yani, $0 \leq \omega < \infty$ aralığında n . dereceden doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistemin kararlılığı için $D(j\omega)$ vektörünün açısı,

$$\theta = n \frac{\pi}{2} \quad (6.20)$$

olmalıdır. Eğer $\theta = n\pi/2$ ise sistem kararlıdır, $\theta < n\pi/2$ ise sistem kararsızdır.

Şekil 6.5'te n . dereceden bir sistemin kararlı olduğu Mikhailov eğrileri verilmiştir. n . dereceden bir doğrusal sistemin kararlılığı için gerekli ve yeterli şart verilen sistemin

karakteristik denklemi için çizilen Mikhailov eğrisinin koordinatların orijinini çevreleyerek saat yönünün tersinde n . kuadrant boyunca art arda geçmesidir.



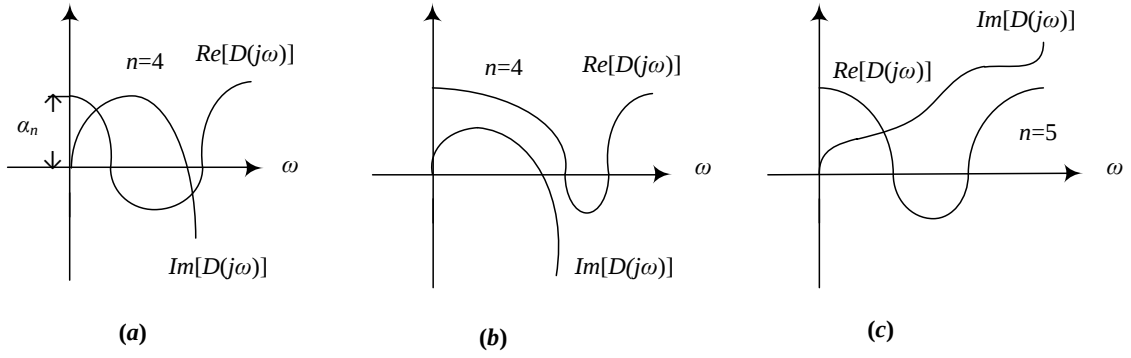
Şekil 6.5. n . dereceden bir sistemin kararlı Mikhailov eğrisi

6.2.2. Mikhailov'un İkinci Kararlılık Kriteri

Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterinde eğri sıra ile koordinat ekseninde kesişir. Yani, Mikhailov eğrisinin $X(\omega)$ ve $Y(\omega)$ koordinatları dönüşümlü olarak kararlı bir sistem için yok edilir.

n . dereceden doğrusal sistemin kararlılığı için Denklem (6.3) ve Denklem (6.4)'te verilen reel ve imajiner ifadelerin sıfıra eşitlenip tüm köklerinin ayrı ayrı alınması gerekli ve yeterli şarttır.

$0 \leq \omega < +\infty$ aralığında Mikhailov eğrisi için Denklem (6.1)'in reel ve imajiner kısımlarını tanımlayan $\text{Re}[D(j\omega)]$ ve $\text{Im}[D(j\omega)]$ eğrileri $\omega=0$ noktasını da içeren apsis ekseninde n kez kesişir ve bu kesişim sıra ile olursa sistem kararlıdır denir. Şekil 6.6'da farklı dereceli sistemlerin reel ve imajiner kısımlarının çizimi gösterilmektedir. Şekil 6.6(a)'da Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterine göre dördüncü dereceden bir sistemin kararlı olduğu örneği gösterilirken Şekil 6.6(b)'de ise dördüncü dereceden bir sistemin kararsız olduğu örneği gösterilmiştir. Şekil 6.6(c)'de ise kararsız beşinci dereceden bir sistem için $\text{Re}[D(j\omega)]$ ve $\text{Im}[D(j\omega)]$ eğrileri gösterilmiştir.



Şekil 6.6. Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterine göre; **a)** $n = 4$ için kararlı bir sistem, **b)** $n = 4$ için kararsız bir sistem ve **c)** $n=5$ için kararsız bir sistem

6.3. Geri Tipli Zaman Gecikmeli Sistemler için Mikhailov Kararlılık Kriteri

Gecikmeli sistemler için [52]'de Mikhailov kararlılık kriterine değinilmiştir. [52]'de Mikhailov'un birinci kararlılık kriterinin geri tipli zaman gecikmeli sistemler için geçerli olduğunun fakat Mikhailov'un ikinci kararlılık kriterinin gecikmeli sistemlerde güvenilir sonuçlar vermediği vurgulanılmıştır.

Mikhailov'un birinci kararlılık kriteri aşağıdaki özellikleri sağlayan karakteristik denklemler için geçerlidir.

1. $D(s)$ saf imajiner köklere sahip değildir.
2. $D^*(s) = D(s^*)$, * işareti kompleks eşlenik anlamına gelmektedir.
3. Sağ yarı s – düzleminde $s \rightarrow \infty$ gittiği zaman $D(s)$, as^{-k} gibi davranır. Yani,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{D(s)}{s^{-k}} = a \neq 0 \quad (6.21)$$

Burada a sıfır olmayan bir sabit sayıdır ve k bir tam sayıdır. ω , 0'dan ∞ aralığında değiştiği zaman $D(j\omega)$ vektörü $\tilde{\theta}$ kadar döner. Bu açı miktarı aşağıdaki ifadeyle hesaplanır.

$$\tilde{\theta} = (-k - 2m) \frac{\pi}{2} \quad (6.22)$$

Burada m , pozitif reel kısmı köklerin sayısıdır. $m = 0$ olduğu durumda Denklem (6.23) kararlı bir sistemi gösterir. Yani,

$$\tilde{\theta} = -k \frac{\pi}{2} \quad (6.23)$$

Denklem (6.1)'de verilen karakteristik polinoma göre $k = -n$ alınarak Denklem (6.23),

$$\tilde{\theta} = n \frac{\pi}{2} \quad (6.24)$$

Denklem (6.24) biçiminde olur.

Karakteristik denklemini quasi-polinom formunda olan Denklem (6.25)'teki gibi bir sistemi ele alalım.

$$D(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j + \sum_{j=0}^{n-1} b_j s^j e^{-\tau_j s} \quad (6.25)$$

Burada $a_n \neq 0$ ve $\tau_j \geq 0$ dir. $s \rightarrow \infty$ gittiği zaman Denklem (6.25)'teki dominant terim $a_n s^n$ dir.

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \left| \frac{a_j s^j}{a_n s^n} \right| = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left| \frac{a_j}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{|s|^{n-j}} = 0 \quad (6.26)$$

Burada $n - j > 0$ dir. Ayrıca,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \left| \frac{b_j s^j}{a_n s^n} e^{-\tau_j s} \right| = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \left| \frac{b_j}{a_n} \right| \cdot \frac{e^{-\tau_j \sigma}}{|s|^{n-j}} = 0 \quad (6.27)$$

olur. Burada σ , s 'in reel kısmıdır. Geri tipli zaman gecikmeli sistemler,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{D(s)}{s^n} = a_n \neq 0 \quad (6.28)$$

Denklem (6.28) şartını sağlar. Yani, geri tipli zaman gecikmeli sistemler ancak ve ancak $k = -n$ olduğu durumda,

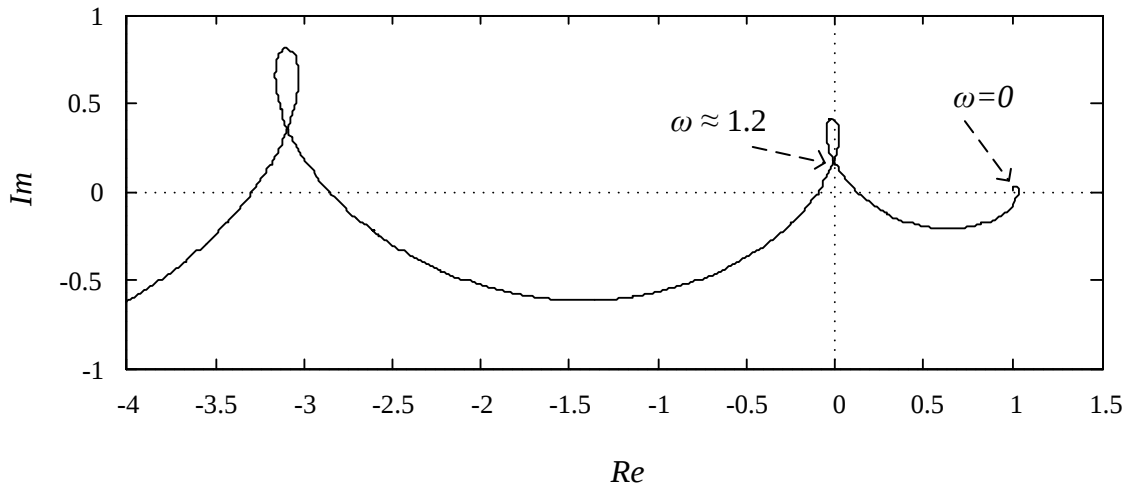
$$\tilde{\theta} = n \frac{\pi}{2} \quad (6.29)$$

Denklem (6.29) şartı sağlanırsa kararlı olur [52].

Örnek 6.1: Bu örnekte [52]'de verilen ve Denklem (6.30) ile ifade edilen geri tipli zaman gecikmeli bir sistemin Mikhailov'un birinci kararlılık kriterine göre kararlılığını sistem parametreleri $\tau = 6.2s$ ve $\xi = 0.2$ için inceleyelim.

$$D(s) = s^2 + 2\xi s e^{-\tau s} + 1 \quad (6.30)$$

Dikkat edilirse Denklem (6.30), Denklem (6.1)'in aksine zaman gecikmesini tanımlayan exponansiyel ifadeden dolayı sonsuz köklere sahiptir. Denklem (6.29)'da da belirtildiği gibi sistemin kararlı olabilmesi için $D(j\omega)$ 'nin $2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ kadar dönmesi gerekir. Şekil 6.7'de sistem parametreleri $\tau = 6.2s$ ve $\xi = 0.2$ için Denklem (6.30)'da verilen ifadenin Matlab ortamında Mikhailov eğrisi elde edilmiştir. Şekil 6.7'den de görüldüğü üzere $D(j\omega)$ 'nin reel kısmı imajiner kısımdan daha hızlı artmaktadır. Bu yüzden $\omega, 0$ ile ∞ arasında değiştiği zaman $D(j\omega)$ 'nin açısındaki değişimin π 'ye yaklaştığı görülmektedir ve sistemin kararlı olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 6.7. Denklem (6.30)'da verilen sistemin $\tau = 6.2s$ ve $\xi = 0.2$ için Mikhailov eğrisi

Denklem (6.30) için Mikhailov'un birinci kararlılık kriteri aşağıda cebirsel olarak doğrulanmaktadır [52]. Denklem (6.30)'da s yerine $j\omega$ yazılıp,

$$D(j\omega) = (1 - \omega^2 + 2\xi\omega \sin \omega\tau) + j(2\xi\omega \cos \omega\tau) \quad (6.31)$$

$D(j\omega)$ 'nin reel kısmı,

$$\text{Re}[D(j\omega)] = X(\omega) = 1 - \omega^2 + 2\xi\omega \sin \omega\tau \quad (6.32)$$

Denklem (6.32) şeklinde ifade edilebilir. Sistemin kararlı olabilmesi için $X(\omega) < 0$ olmalıdır. Bu durumda;

$$\omega^2 > 1 + 2\xi\omega \sin \omega\tau \quad (6.33)$$

olmalıdır. Denklem (6.33),

$$\omega^2 > 1 + 2\xi\omega \quad (6.34)$$

olması durumunda doğru olur. Denklem (6.34)'ün sağ tarafı, $\omega \rightarrow 0$ 'a yaklaştığı zaman sol taraftan daha baskındır. Ancak ω artırıldığı zaman eşitsizliğin sol tarafı, sağ taraftan daha baskın olacaktır. Denklem (6.34), tüm $\omega > \omega_m$ için geçerlidir ki ω_m polinomal denklemin en büyük pozitif reel köküdür. ω_m değeri,

$$\omega^2 - 2\xi\omega - 1 = 0 \quad (6.35)$$

$$\omega_m = \xi + \sqrt{\xi^2 + 1} \quad (6.36)$$

Denklem (6.36) kullanılarak elde edilir. Bu spesifik örnek için sistem parametreleri $\tau = 6.2s$ ve $\xi = 0.2$ alındığında $\omega_m \cong 1.2$ olarak bulunur. Şekil 6.7'den de görüldüğü üzere $\omega > \omega_m$ olduğunda $X(\omega)$ değeri negatif kalmaktadır. Başka bir deyişle, eğer ω değeri artmaya devam ettikçe Şekil 6.7'deki Mikhailov eğrisi sol yarı düzlemde (ikinci ve

üçüncü bölgede) kalmaktadır. Şekil 6.7’deki eğri orijini çevrelemediğinden dolayı ω , 0 ile ∞ arasında değiştiği zaman $D(j\omega)$ ’nin açısındaki değişim,

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (6.37)$$

aralığına uzanır. $\omega = 0$ ’da $D(j\omega)$ ’nin açısı sıfırdır. $\theta(\omega) = \arg[D(j\omega)]$ olduğundan,

$$\cos \theta(\omega) = \frac{1 - \omega^2 + 2\xi\omega \sin \omega\tau}{\sqrt{(2\xi\omega \cos \omega\tau)^2 + (1 - \omega^2 + 2\xi\omega \sin \omega\tau)^2}} \quad (6.38)$$

$D(j\omega)$ ’nin açısı Denklem (6.38) aracılığıyla bulunur.

Denklem (6.37)’deki eşitsizlikle birlikte Denklem (6.39), $\omega \rightarrow \infty$ gittiği zaman $\theta(\omega) \rightarrow \pi$ gideceğini vurgular. Bu yüzden $\tau = 6.2$ ve $\xi = 0.2$ için sistem kararlıdır.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \cos \theta(\omega) = -1 \quad (6.39)$$

6.4. Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri

Busłowicz, [53]’te doğrusal zamanla değişmeyen kesir dereceli sistemler için Mikhailov kararlılık kriteri ve değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine dayalı bir yöntem önermiştir. Aynı zamanda Busłowicz [19]’da geri tipli zaman gecikmeli kesir dereceli sistemler için bu yöntemi kullanmıştır. [19]’da geri tipli zaman gecikmeli sistemler için önerilen yöntem genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kriteri olarak adlandırılmıştır. Bu başlık altında [19]’da geri tipli zaman gecikmeli sistemler için önerilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine değinilecektir.

$$D(s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{m_1} p_i(s) e^{(-s^r h_i)} \quad (6.40)$$

$$p_i(s) = \sum_{k=0}^n a_{ik} s^{a_k} \quad i = 0, 1, \dots, m_1 \quad (6.41)$$

Teorem 6.1: Denklem (6.40) ile tanımlanan kesir dereceli quasi-polinomal karakteristik denklem,

$$\Delta \arg D(j\omega) = n\pi/2 \quad (6.42)$$

$0 \leq \omega < \infty$

olması durumunda kararlıdır. Yani, kompleks düzlemde ω , 0'dan ∞ 'a arttırıldığı zaman $D(j\omega)$ 'nın çizimi genelleştirilen Mikhailov eğrisi olarak adlandırılır [19]. Ancak,

- ω sonsuza gittiği zaman $D(j\omega)$ 'nın sonsuza hızlı bir şekilde meyilli olması
- $D(s)$ 'in içerdiği zaman gecikmesi terimi $\omega \in [0, \infty)$ için sonsuz sayıda eğriye sebep olması

gibi durumlardan dolayı Teorem (6.1)'in uygulanması zorlaşmaktadır ve güvenilir değildir. Bu yüzden Busłowicz [19]'da kesir dereceli geri tipli zaman gecikmeli sistemler için genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterini önermiştir. [19]'da önerilen yöntem şu şekildedir.

Yukarıda bahsedilen zorlukları gidermek için [19]'da Denklem (6.43) ile ifade edilen bir rasyonel fonksiyon tanıtılır.

$$\psi(s) = \frac{D(s)}{w_r(s)} \quad (6.43)$$

$w_r(s)$, Denklem (6.40) ile ifade edilen quasi-polinomla aynı dereceye sahip kesir dereceli referans bir quasi-polinomdur. $w_r(s)$, $\text{Re } s \geq 0$ için $w_r(s) \neq 0$ olması durumunda kararlıdır.

Teorem 6.2: Denklem (6.40) ile ifade edilen kesir dereceli polinom ancak ve ancak,

$$\Delta \arg \psi(j\omega) = 0 \quad (6.44)$$

$\omega \in (-\infty, \infty)$

olması durumunda kararlıdır. Bu yüzden referans quasi-polinom,

$$w_r(s) = a_{0n} (s + c)^{a_n}, \quad c > 0 \quad (6.45)$$

biçiminde seçilir. Burada a_{0n} , $i=0$ için $p_0(s)$ polinomundaki s^{a_n} 'nin katsayısıdır. $c > 0$ için Denklem (6.45) karardır. O yüzden, $c > 0$ olacak şekilde keyfi olarak seçilir. Çizdirilen $\psi(s)$ 'in daha düzgün bir formda belirgin bir şekil oluşturması için c 'nin büyüklüğü veya küçüklüğü ayarlanabilir. $\omega \in (-\infty, \infty)$ aralığında $\psi(j\omega)$ 'nın çizimi genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi olarak adlandırılır. Denklem (6.44) ancak ve ancak $-\infty < \omega < \infty$ aralığında genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisinin kompleks düzlemde koordinatların orijinini çevrelememesi durumunda geçerlidir. Genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine göre Örnek 6.1'i tekrar inceleyelim.

Örnek 6.2: Bu örnekte Denklem (6.30)'da verilen geri tipli zaman gecikmeli sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine göre kararlılığını sistem parametreleri $\tau = 6.2s$ ve $\xi = 0.2$ için inceleyelim.

Denklem (6.30)'da verilen quasi-polinom karakteristik denklemle aynı dereceye sahip bir referans fonksiyon belirlenir. $n = 2$ ve $c = 5$ alınarak belirleyeceğimiz referans fonksiyon,

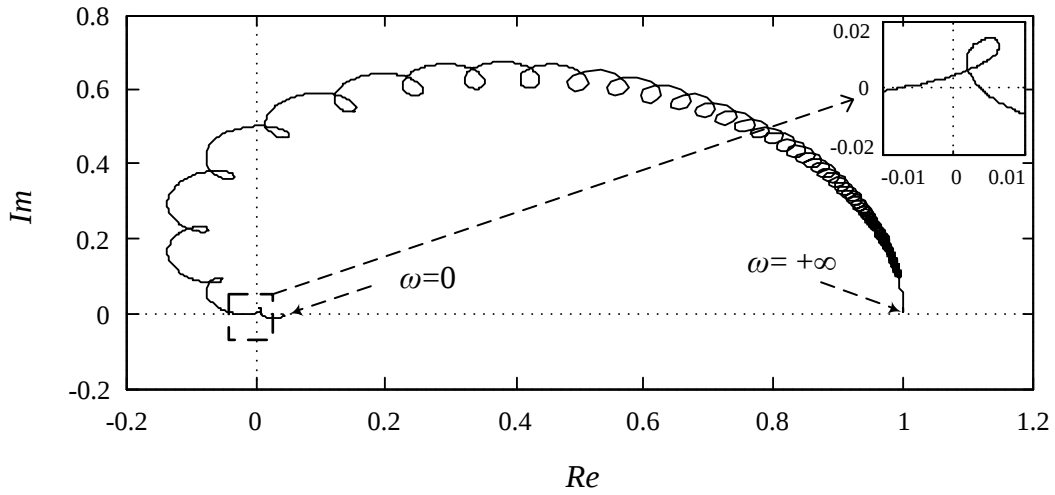
$$w_r(s) = (s + 5)^2 \quad (6.46)$$

biçiminde olsun. Bu durumda rasyonel fonksiyon;

$$\psi(s) = \frac{D(s)}{w_r(s)} = \frac{s^2 + 2\xi s e^{-\tau s} + 1}{(s + 5)^2} \quad (6.47)$$

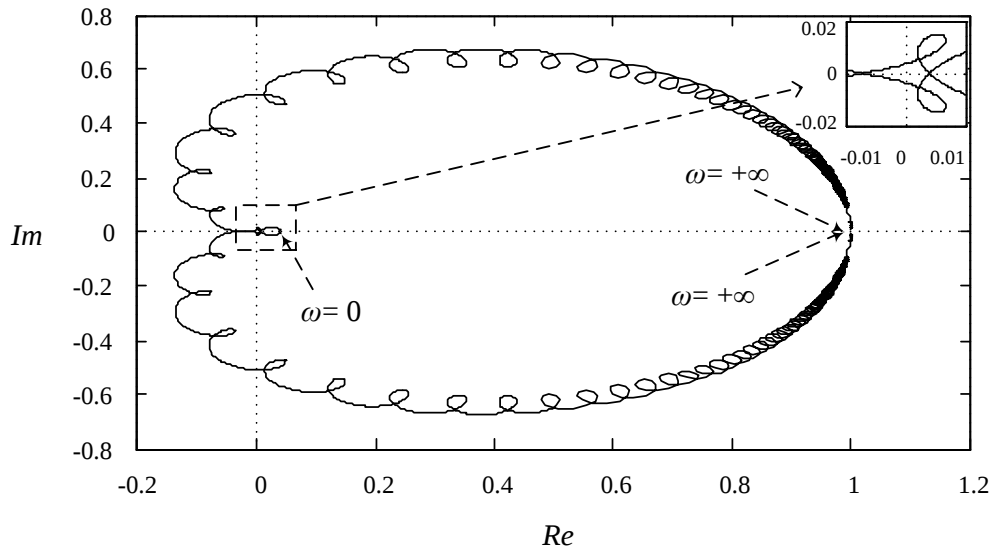
Denklem (6.47) şeklinde olur. Matlab ortamında $0 \leq \omega < \infty$ aralığında sistem parametreleri $\tau = 6.2s$ ve $\xi = 0.2$ için çizdirilen $\psi(s)$ genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi Şekil 6.8'de görülmektedir.

Şekil 6.8'den de görüldüğü üzere, eğri orijini sistem parametreleri $\tau = 6.2s$ ve $\xi = 0.2$ için çevrelemediğinden dolayı sistem karardır. Dikkate edilirse, eğri daha düzgün ve kapalı bir forma sahiptir.



Şekil 6.8. Denklem (6.47) için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında çizilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi

Şekil 6.9'da ω 'nin hem negatif değerleri hem de pozitif değerleri için $(-\infty < \omega < \infty)$ genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi çizilmiştir. ω 'nin negatif ve pozitif değerleri birbirinin simetrisi halinde bir şekil oluşturmuştur. Yine bu şekilde de eğrinin orijini çevreleme ya da çevrelememe durumuna göre kararlılık analizi gerçekleştirilebilir. Şekil 6.9'da eğri orijini çevrelemediğinden dolayı sistem kararlıdır denir.



Şekil 6.9. Denklem (6.47) için $-\infty < \omega < \infty$ aralığında çizilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi

[19]'da önerilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterine göre çizdirilen $D(j\omega)$ eğrisi daha düzgün ve kapalı bir formda şekil elde etmemizi sağlar. Bu durumda eğrinin koordinatların orijinini çevreleme ve çevrelememe durumuna göre sistemin kararlı olup olmadığına karar verilir. Eğer genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi orijini çevrelemiyorsa kararlı aksi taktirde kararsız bir sistemdir denir.

Bu tez çalışmasında, [19]'da geri tipli zaman gecikmeli kesir dereceli sistemler için önerilen genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriterini tam dereceli doğrusal olmayan geri tipli zaman gecikmeli sistemlere uygulanması amaçlanmıştır.

7. ZAMAN GECİKMELİ DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERİN KARARLILIK VE ÇATALLAŞMA ANALİZLERİNİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde üç farklı uygulama yapılacaktır. Birincisi, [31,32]'de verilen zaman gecikmeli doğrusal olmayan kaotik bir sistemin farklı sistem parametresi ve zaman gecikmesi değerine göre kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilecektir. İkincisi, [31,32]'de verilen zaman gecikmeli doğrusal olmayan özdeş iki kaotik sistemin (biri Master Verici - diğeri Slave Alıcı olmak üzere) farklı başlangıç şartları için kaos senkronizasyonu gerçekleştirilecektir. Üçüncüsü ise [34]'de verilen tek hücreli zaman gecikmeli hücresel sinir ağının (ZGHSA) farklı sistem parametresi ve zaman gecikmesi değerine göre kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilecektir. Elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek için de Matlab ortamında oluşturulan sisteme ait simülasyon sonuçları verilecektir.

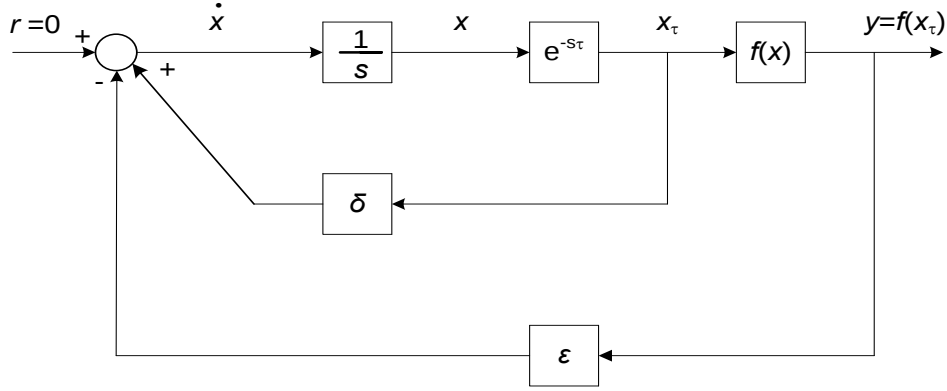
7.1. Zaman Gecikmeli Doğrusal Olmayan Bir Sistemin Kararlılık ve Çatallaşma Analizi

Bu başlık altında [31,32]'de verilen zaman gecikmeli doğrusal olmayan kaotik bir sistemin kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilecektir. Sistemin denge noktalarının doğrusallaştırılmış modelinden faydalanılarak, zaman gecikmesi τ değerine göre sistemde çatallaşmanın varlığı ve çatallaşma noktası analitik olarak hesaplanacaktır. Daha sonra çatallaşmanın yönü Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile farklı sistem parametreleri için belirlenecektir. Elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek için de sistemin Matlab ortamında nümerik analizi gerçekleştirilecektir. Zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin çatallaşma analizi [73]'te gerçekleştirilmiştir.

Kontrol sistemi üzerine çalışmaları sonucunda Uçar, [31,32]'de verilen kaos çalışmaları için geliştirmiş olduğu bir model önermiştir. Uçar Modeli olarak bilinen bu model, tek durum değişkenine sahip zaman gecikmeli doğrusal olmayan bir kaotik sistemdir. Uçar modeli (7.1)'de bir boyutlu GDD ile tanımlanmıştır.

$$\frac{dx}{dt} = \delta x(t - \tau) - \varepsilon [x(t - \tau)]^3, \quad (t \geq t_0) \quad (7.1)$$

Burada; δ ve ε pozitif parametreleri ve t_0 : başlangıç aralığıdır. τ , zaman gecikmesidir. Denklem (7.1)'de verilen sistemin blok diyagramı Şekil 7.1'de gösterilmiştir.



Şekil 7.1. Denklem (7.1)'de verilen zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin blok diyagramı

Şekil 7.1'de blok diyagramı verilen sistemin herhangi bir denge noktasının x^* olduğu kabul edilsin. Bu durumda, x^* denge noktası civarındaki doğrusal olmayan sistemin doğrusallaştırılmış transfer fonksiyonu Denklem (7.2)'deki gibi ifade edilebilir.

$$T(s) = \frac{e^{-s\tau} f(x^*)}{s + (-\delta + \varepsilon f'(x^*))e^{-s\tau}} \quad (7.2)$$

Denklem (7.1)'de verilen sistemin karakteristik denklemi ise Denklem (7.3) biçiminde olur.

$$D(s) = s + (-\delta + \varepsilon f'(x^*))e^{-s\tau} \quad (7.3)$$

Doğrusal olmayan fonksiyonun denge noktası civarındaki doğrusal modeli aşağıdaki denklem ile elde edilir.

$$f'(x_\tau^*) = \left. \frac{\partial f(x_\tau)}{\partial x_\tau} \right|_{x_\tau = x^*} \quad (7.4)$$

Denklem (7.1)' de verilen sistemin,

$$\delta x_\tau - \varepsilon (x_\tau)^3 = 0 \quad (7.5)$$

$$\delta x_\tau = \varepsilon (x_\tau)^3 \quad (7.6)$$

$$x_\tau^0 = 0 \quad x_\tau^\pm = \pm \sqrt{(\delta/\varepsilon)} \quad (7.7)$$

$x_\tau^0 = 0$ ve $x_\tau^\pm = \pm \sqrt{(\delta/\varepsilon)}$ olmak üzere 3 tane denge noktası vardır. Bu denge noktaları için karakteristik denklem tek ifade ile gösterilebilir.

$$D(s) = s + (-\delta + \varepsilon (3x_\tau^2)) \Big|_{x_\tau = \begin{Bmatrix} x_\tau^+ \\ x_\tau^0 \\ x_\tau^- \end{Bmatrix}} e^{-s\tau} = 0 \quad (7.8)$$

Denklem (7.8)'in kökleri, her bir denge noktası için doğrusal olmayan sistemin kutupları olduğundan denge noktalarının kararlılıklarıyla ilgili bilgi verecektir. Her bir denge noktası için karakteristik denklemin kutuplarını analiz edelim.

- $x_\tau^0 = 0$ denge noktası için sistemin kutupları,

$$D(s) = s + \left(-\delta + \varepsilon 3(x_\tau^0)^2 \right) e^{-s\tau} \quad (7.9)$$

$$D(s) = s - \delta e^{-s\tau} \quad (7.10)$$

karakteristik Denklem (7.10)'un kökleri olacaktır. $s = j\omega$ yazılırsa;

$$D(j\omega) = j\omega - \delta e^{-j\omega\tau} \quad (7.11)$$

Denklem (7.11) elde edilir. Denklem (7.11), reel ve imajiner kısımlarına ayrılıp ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse;

$$\operatorname{Re}\left[D(j\omega, \tau)\right] = -\delta \cos \omega\tau = 0 \quad (7.12)$$

$$\operatorname{Im}\left[D(j\omega, \tau)\right] = \omega + \delta \sin \omega\tau = 0 \quad (7.13)$$

denklemleri elde edilecektir. Denklem (7.12) ve (7.13)'ün çözümünden zaman gecikmesi değerine göre çatallaşma noktası,

$$\tau_{c(k)} = \frac{\pi}{2\omega_c} (2k-1), \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (7.14)$$

ve bu noktadaki frekans değeri,

$$\omega_{c(k)} = \begin{cases} -\delta, & k=1, 2, 5, \dots \\ \delta, & k=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (7.15)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü üzere, ilk çatallaşma değerinde $\tau_c = -\pi/2\delta s$ ve $\omega_c = -\delta$ *rad/s* olmaktadır. τ_c değeri negatif olduğundan $x_\tau^0 = 0$ denge noktasında bir çatallaşma söz konusu değildir.

- $x_\tau^\pm = \pm\sqrt{(\delta/\varepsilon)}$ denge noktası için sistemin kutupları,

$$D(s) = s + \left(-\delta + \varepsilon 3(x_\tau^\pm)^2\right) e^{-s\tau} \quad (7.16)$$

$$D(s) = s + \left(-\delta + 3\varepsilon \left(\sqrt{\delta/\varepsilon}\right)^2\right) e^{-s\tau} = s + (-\delta + 3\delta) e^{-s\tau} \quad (7.17)$$

$$D(s) = s + (2\delta) e^{-s\tau} \quad (7.18)$$

karakteristik Denklem (7.18)'in kökleri olacaktır. Denklem (7.18)'den faydalanarak sistemde zaman gecikmesi değerine göre çatallaşmanın varlığı ve çatallaşma noktası τ_c tespit edilecektir. Bu amaçla Denklem (7.18)'in köklerinin sadece kompleks bileşeni olması durumu için zaman gecikmesi değerinin tespit edilmesi gerekecektir. $s = j\omega$ için Denklem (7.18) aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$D(j\omega, \tau) = j\omega + (2\delta)e^{-j\omega\tau} = 0 \quad (7.19)$$

Denklem (7.19)'un reel ve imajiner bileşenleri,

$$\text{Re}[D(j\omega, \tau)] = 2\delta \cos(\omega\tau) = 0 \quad (7.20)$$

$$\text{Im}[D(j\omega, \tau)] = \omega - 2\delta \sin(\omega\tau) = 0 \quad (7.21)$$

olarak elde edilecektir. Denklem (7.20) ve (7.21)'in çözümünden, zaman gecikmesi parametresine göre çatallaşma noktası,

$$\tau_{c(k)} = \frac{\pi}{4\delta}(2k-1), \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (7.22)$$

ve bu noktadaki frekans değeri,

$$\omega_{c(k)} = \begin{cases} +2\delta, & k=1, 3, 5, \dots \\ -2\delta, & k=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (7.23)$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse çatallaşma noktası sadece δ parametresine bağlıdır. $x_r^\pm$ denge noktası için çatallaşma olayı ilk olarak $\tau_c = \frac{\pi}{4\delta}$ s ve $\omega_c = 2\delta$ rad/s'te gerçekleşecektir. Bu nokta aynı zamanda çatallaşma noktasıdır.

7.1.1. Çatallaşmanın Yönü

Çatallaşmanın yönü, çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde denge noktalarının kararlılığını kaybedip kaybetmemesiyle ilgilidir. Denklem (7.1)'de verilen sistemin çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılığı Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile tespit edilecektir.

7.1.1.1. Lambert W Fonksiyonu ile Çatallaşma Yönünün Belirlenmesi

Denklem (7.1)'de verilen sistemin çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılığı Lambert W fonksiyonu ile tespit edilebilir. Lambert W fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle ifade edilmektedir [13].

$$W(x)e^{W(x)} = x \quad (7.24)$$

$x_r^\pm$ denge noktaları için doğrusal modele ait karakteristik Denklem (7.18), Denklem (7.24)'e uyarlanmak maksadıyla aşağıdaki eşitliğe dönüştürülebilir.

$$(\tau s)e^{s\tau} = -2\delta\tau \quad (7.25)$$

Eşitliğin Lambert W fonksiyonu alınırsa,

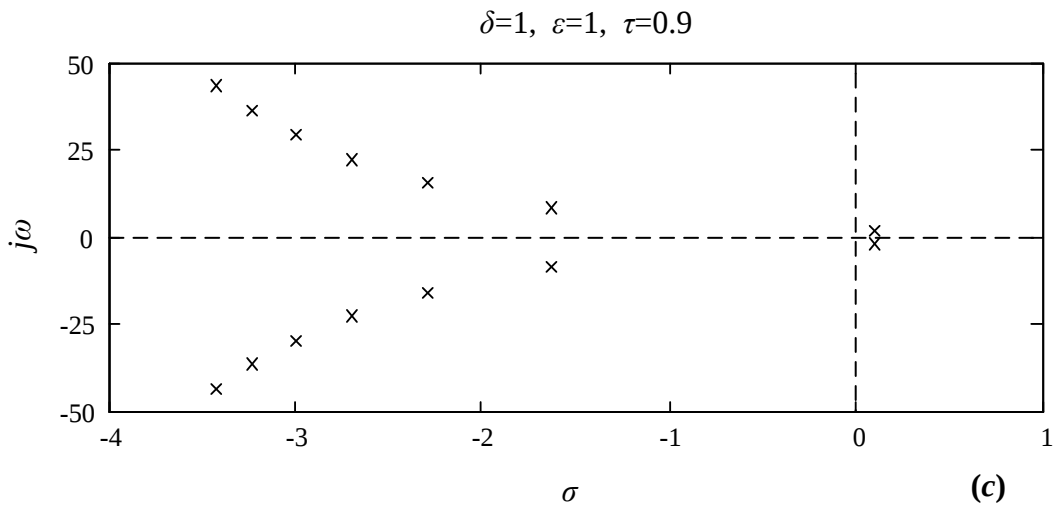
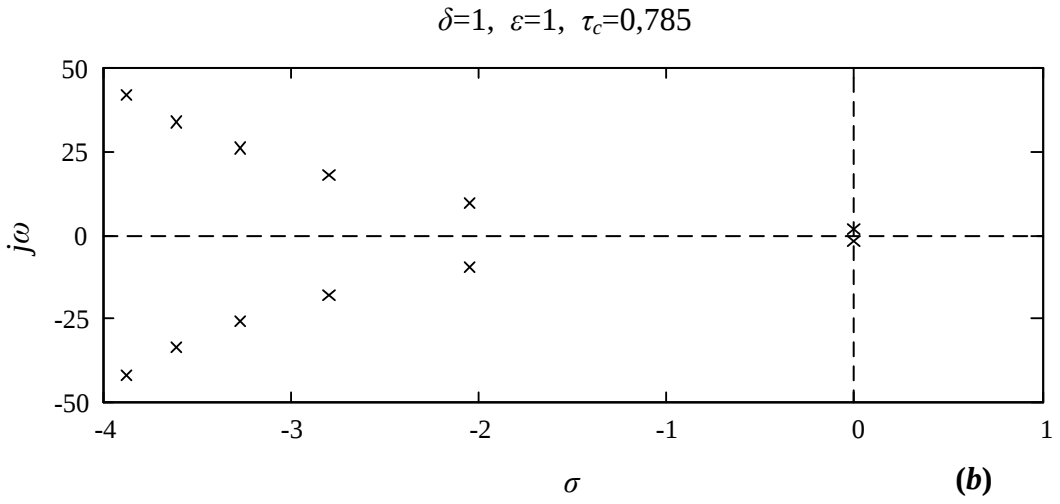
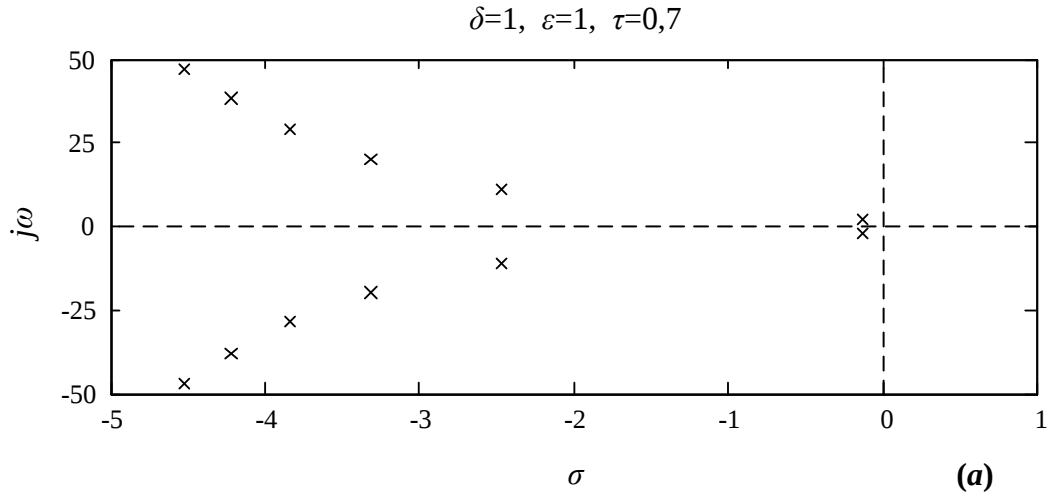
$$W(-2\delta\tau) = \tau s \quad (7.26)$$

elde edilir. Bu durumda, $x_r^\pm$ denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin kutupları Denklem (7.27) ile elde edilebilecektir.

$$s = \frac{1}{\tau} W(-2\delta\tau) \quad (7.27)$$

Matlab ortamında farklı sistem parametresi ve zaman gecikmesi değerleri için Denklem (7.27) çözülebilir. Elde edilen sonuçlara göre çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde denge noktalarının kararlılıklarını kaybedip kaybetmemelerine bakılarak çatallaşmanın yönü belirlenebilir.

$\delta = \varepsilon = 1$ için çatallaşma noktası $\tau_c = \pi/4 = 0.785s$ olarak bulunur. Çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.7s$ ve çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.9s$ için $x_r^\pm$ denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin s-düzlemindeki kutup yerleşimi Şekil 7.2'de elde edilmiştir [73].

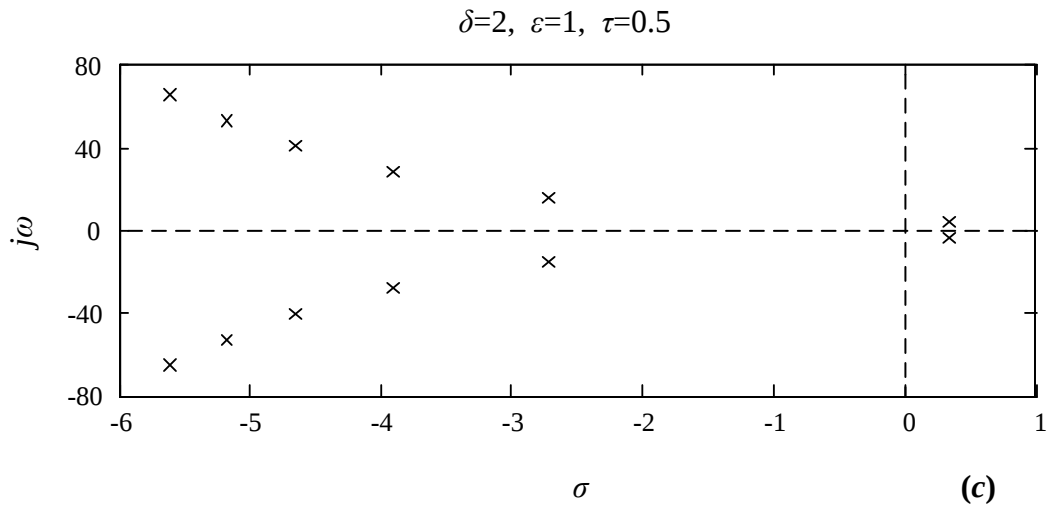
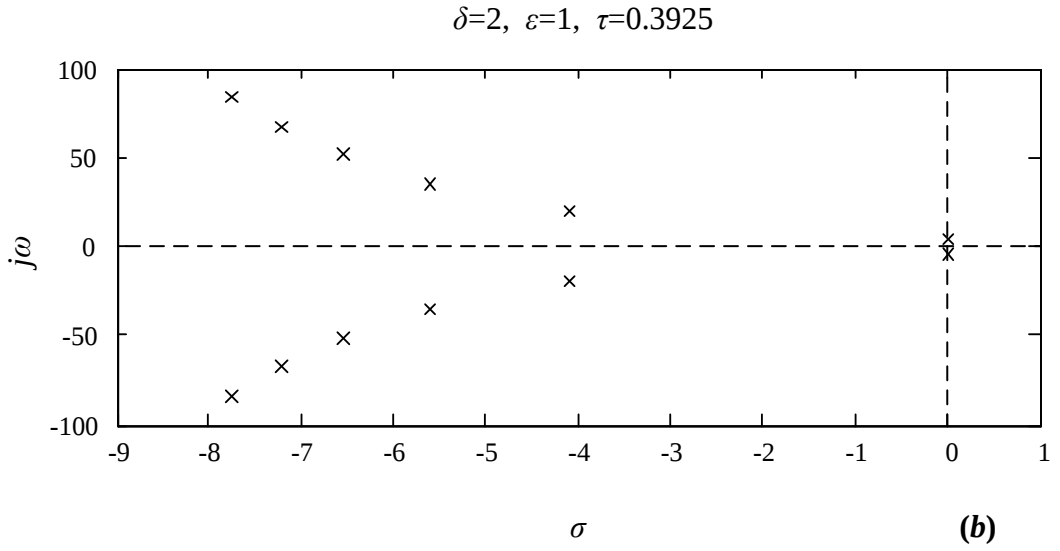
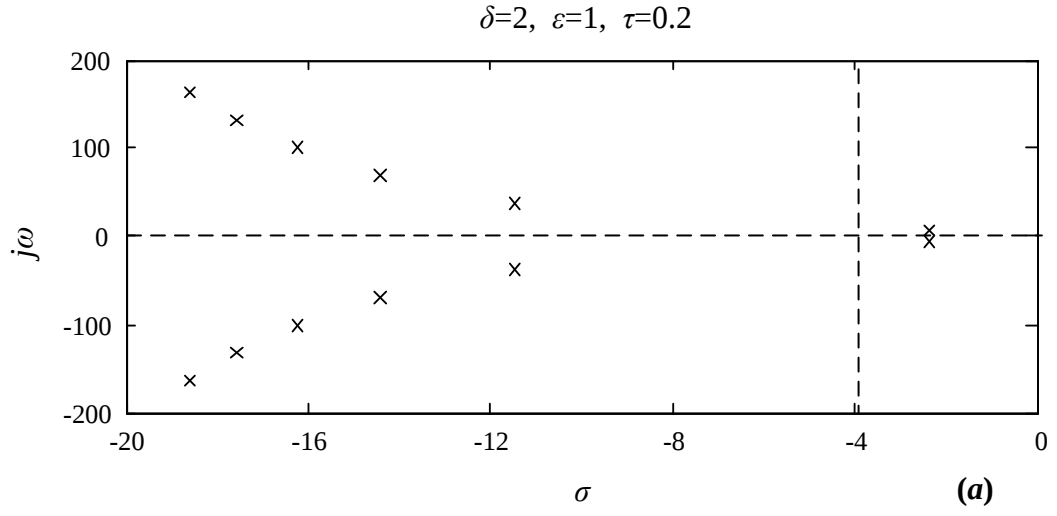


Şekil 7.2. $\delta = \varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin kutuplarının s-düzleminde konumları: **a)** $\tau = 0.7s$, **b)** $\tau_c = 0.785s$ ve **c)** $\tau = 0.9s$

Şekil 7.2’den de görüldüğü üzere çatallaşma noktasında kutuplar $j\omega$ eksenini üzerindedir. Çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.7\text{ s}$ için tüm kökler sol yarı s -düzleminde olduğundan $x_r^\pm$ denge noktaları karardır. Bu yüzden sistem yörüngesinin başlangıç şartına bağılı olarak asimptotik bir şekilde denge noktalarından birine yönelmesi ve orada sonlanması beklenebilir. Çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.9\text{ s}$ için sağ yarı s -düzleminde iki tane kök olduğu için $x_r^\pm$ denge noktaları kararsızdır. Bu durumda başlangıç şartına bağılı olarak $x_r^\pm$ denge noktalarından birini kapsayan bir limit çevrim davranış beklenebilir. $x_r^\pm$ denge noktaları zaman gecikmesi değeri arttıkça kararlılığını kaybetmesinden dolayı sistemde “süperkritik hopf çatallaşma” oluşmaktadır.

$\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ için çatallaşma noktası $\tau_c = \pi/8 = 0.3925\text{ s}$ olarak bulunur. Çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.2\text{ s}$ ve çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.5\text{ s}$ için $x_r^\pm$ denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin s -düzlemindeki kutup yerleşimi Şekil 7.3’te verilmiştir [73].

Şekil 7.3’teki sonuçlar incelendiğinde benzer durumun bu sistem parametreleri için de geçerli olduğu görülmektedir. Çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.2\text{ s}$ için tüm kökler sol yarı s -düzleminde olduğundan $x_r^\pm$ denge noktaları karardır. Çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.5\text{ s}$ için sağ yarı s -düzleminde iki tane kök olduğu için $x_r^\pm$ denge noktaları kararsızdır. Zaman gecikmesi değeri arttıkça $x_r^\pm$ denge noktaları kararlı durumdan kararsız duruma geçmektedir. Bu durumda çatallaşmanın yönü “süper kritik hopf çatallaşma” olduğu görülmektedir.



Şekil 7.3. $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin kutuplarının s-düzleminde konumları: **a)** $\tau = 0.2s$, **b)** $\tau_c = 0.3925s$ ve **c)** $\tau = 0.5s$

7.1.1.2. Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile Çatallaşma Yönünün Belirlenmesi

Denklem (7.1)'de verilen sistemin çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılığı genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile tespit edilebilir. Denklem (7.18)'de verilen karakteristik denklem için rasyonel fonksiyon Denklem (7.28)'de verilmiştir.

$$\psi(s) = \frac{D(j\omega)}{a_0(j\omega + c)^n}, \quad c > 0 \quad (7.28)$$

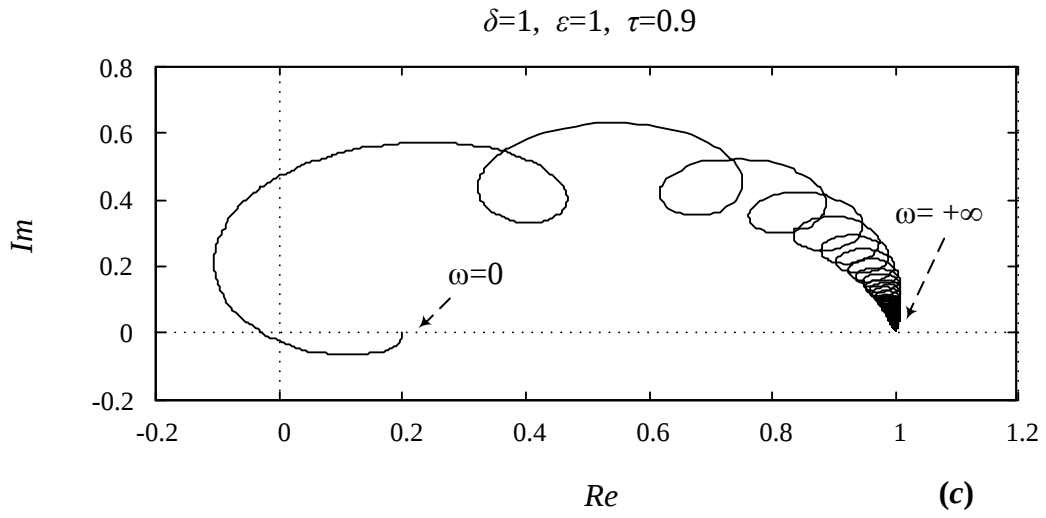
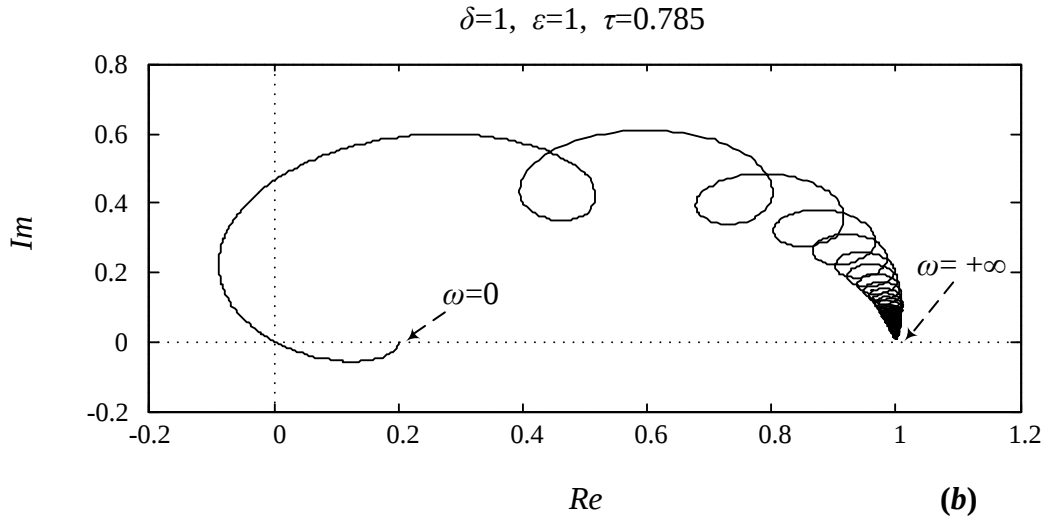
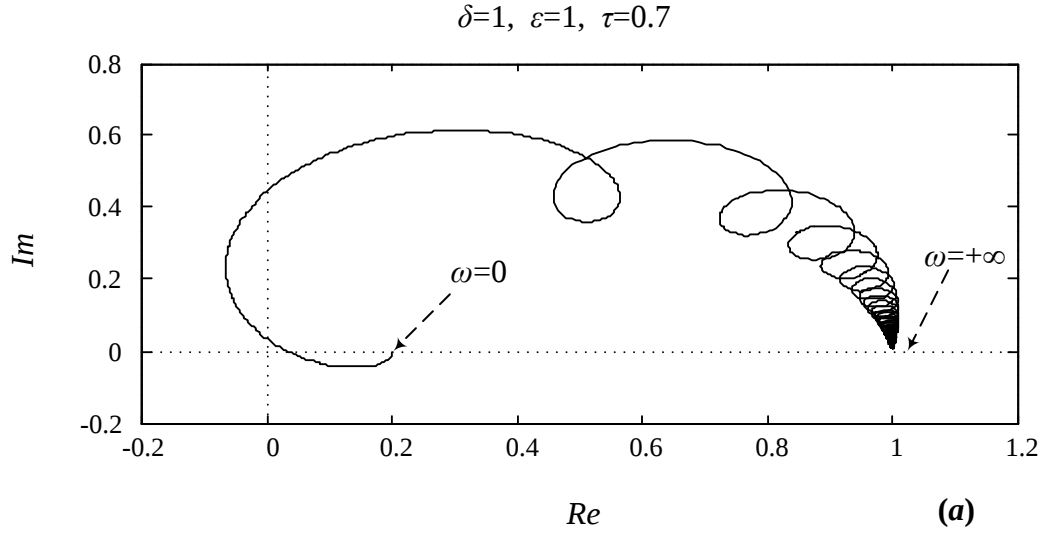
Burada n , Denklem (7.18)'deki s 'in en yüksek derecesi; a_0 ise en yüksek dereceli s teriminin önündeki katsayıdır. Dikkat edilirse, Denklem (7.28)'in paydası $c > 0$ için kararlıdır. $n=1$, $a_0=1$ ve $c=10$ olarak alınıp karakteristik Denklem (7.18) için rasyonel fonksiyon açık bir şekilde ifade edilirse,

$$\psi(s) = \frac{D(s)}{a_0(j\omega + c)^n} = \frac{s + (2\delta)e^{-s\tau}}{(s+10)} \quad (7.29)$$

Denklem (7.29) elde edilir. Matlab ortamında $\omega=0$ ile $\omega=\infty$ frekans aralığında farklı sistem parametreleri ve zaman gecikmesi değerleri için Denklem (7.29) çizdirilebilir. Elde edilen sonuçlara göre çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde denge noktalarının kararlılıklarını kaybedip kaybetmemelerine bakılarak çatallaşmanın yönü belirlenebilir.

Denklem (7.1)'de verilen sistemin iki farklı sistem parametresi değerleri için denge noktalarının kararlılıkları farklı zaman gecikmesi değerlerine göre incelenecek ve çatallaşmanın yönü tespit edilecektir.

$\delta = \varepsilon = 1$ iken çatallaşma noktası $\tau_c = 0,785$ s, çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.7$ s ve çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.9$ s için $x_r^\pm$ denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi Şekil 7.4'te elde edilmiştir.

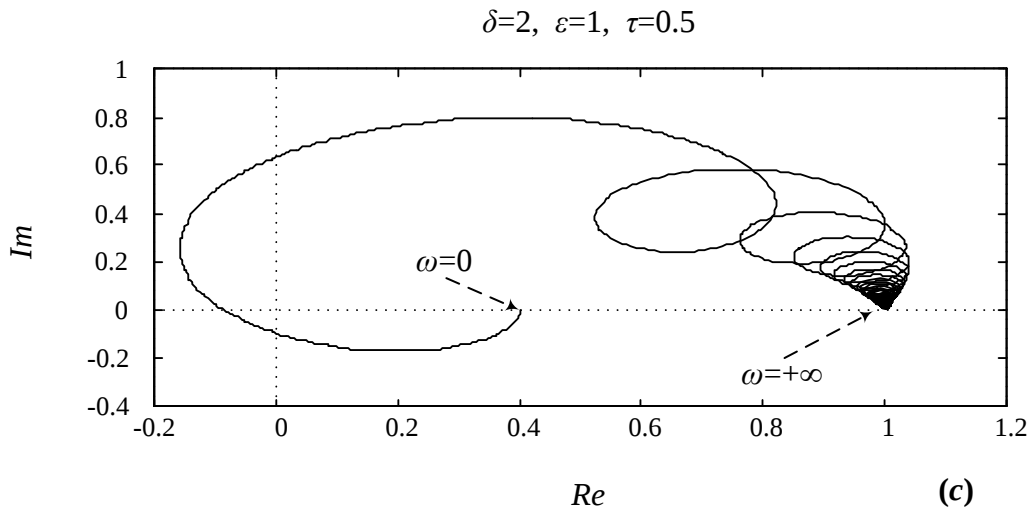
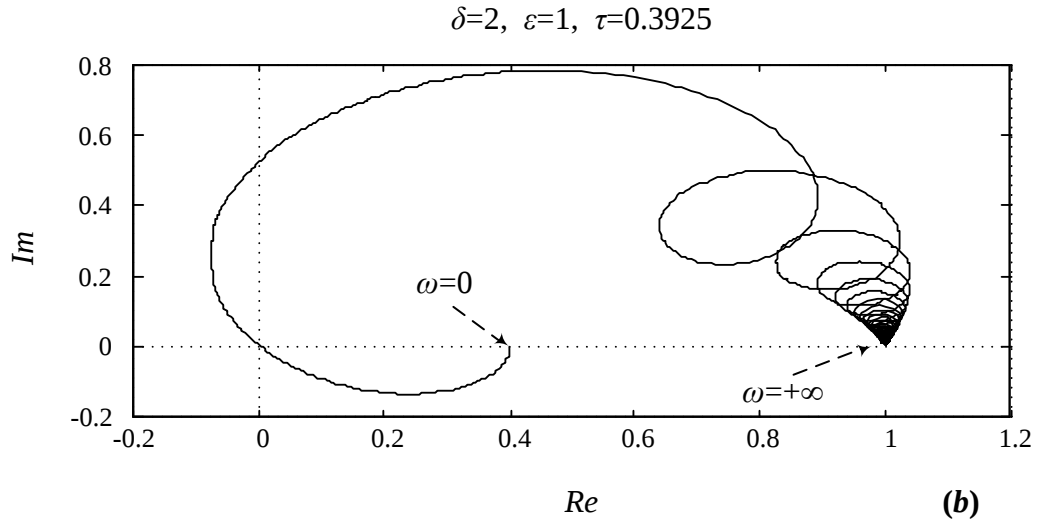
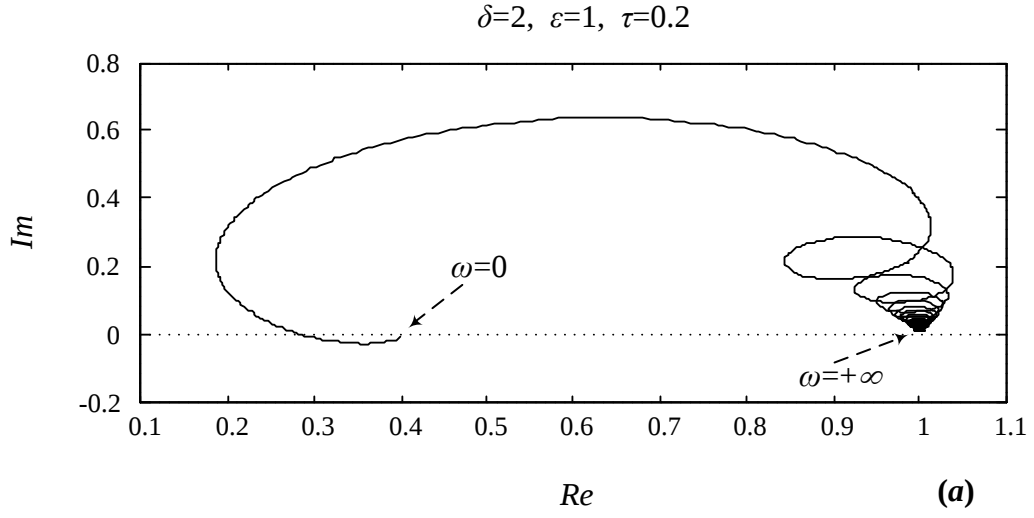


Şekil 7.4. $\delta = \varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: **a)** $\tau = 0.7s$, **b)** $\tau_c = 0.785s$ ve **c)** $\tau = 0.9s$

Şekil 7.4'e bakıldığında çatallaşma noktası $\tau_c = 0.785s$ için genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi orijinden geçmektedir. Bu durum, $j\omega$ ekseninde köklerin var olabileceğine işaretler. $\tau = 0.7s$ için eğri orijini çevrelemediğinden dolayı tüm kutupların sol yarı s -düzleminde olduğuna işaretler. Böylece $x_r^\pm$ denge noktaları kararlıdır. Bu yüzden sistem yörüngesinin başlangıç şartına bağlı olarak asimptotik bir şekilde denge noktalarından birine yönelmesi ve orada sonlanması beklenebilir. $\tau = 0.9s$ için eğri orijini çevrelediğinden dolayı sağ yarı s -düzleminde kutup ya da kutupların olacağına işaretler. Bu yüzden $x_r^\pm$ denge noktaları kararsızdır. Bu durumda başlangıç şartına bağlı olarak $x_r^\pm$ denge noktalarından birini kapsayan bir limit çevrim davranış beklenebilir. $x_r^\pm$ denge noktaları zaman gecikmesi değeri arttıkça kararlılığını kaybetmesinden dolayı sistemde “süperkritik hopf çatallaşma” oluşacaktır.

$\delta = 2$, $\varepsilon = 1$ iken çatallaşma noktası $\tau_c = 0,3925s$, çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.2s$ ve çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.5s$ için $x_r^\pm$ denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi Şekil 7.5'te elde edilmiştir.

Şekil 7.5'teki sonuçlar incelendiğinde benzer durumun bu sistem parametreleri için de geçerli olduğu görülmektedir. Çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.2s$ için genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi orijini çevrelememektedir. Çatallaşma değerinde eğrisi orijinden geçmektedir. Çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.5s$ için genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi orijini çevrelemektedir. Bu durum sistemin artan zaman gecikmesi değerinde kararsızlaştığını göstermektedir. $x_r^\pm$ denge noktaları zaman gecikmesi değeri arttıkça kararlılığını kaybetmesinden dolayı sistemde “süperkritik hopf çatallaşma” olduğu görülmektedir.

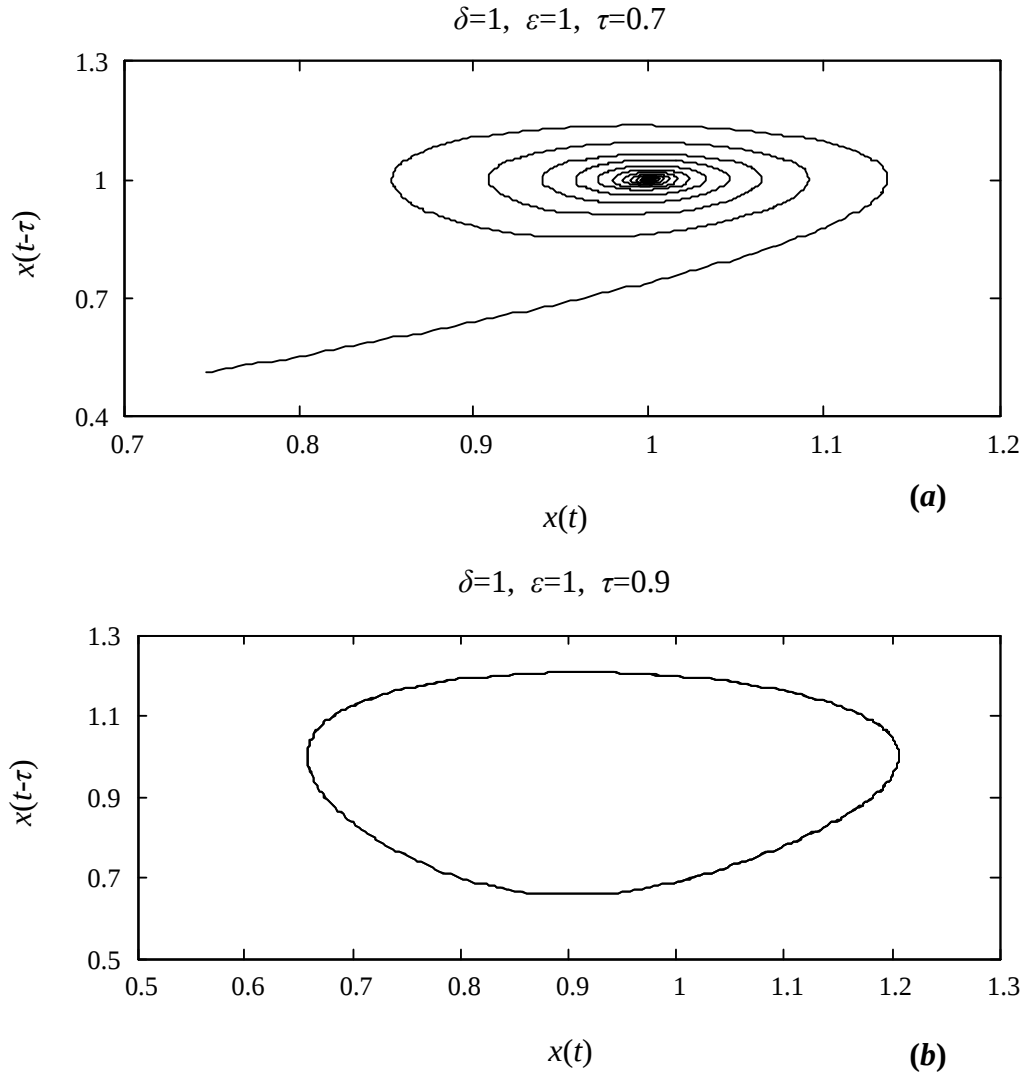


Şekil 7.5. $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi:
a) $\tau = 0.2s$, **b)** $\tau_c = 0.3925s$ ve **c)** $\tau = 0.5s$

7.1.2. Nümerik Sonuçlar

Bu başlık altında analitik olarak hesaplanan çatallaşma noktasının üstündeki ve altındaki zaman gecikmesi değerleri için sistemin *Matlab/Simülink* ortamında elde edilen nümerik sonuçları verilecektir. Sisteme ait nümerik sonuçlar elde edilirken tüm uygulamalarda başlangıç şartı $x(0) = 0.1$ olarak alınmıştır.

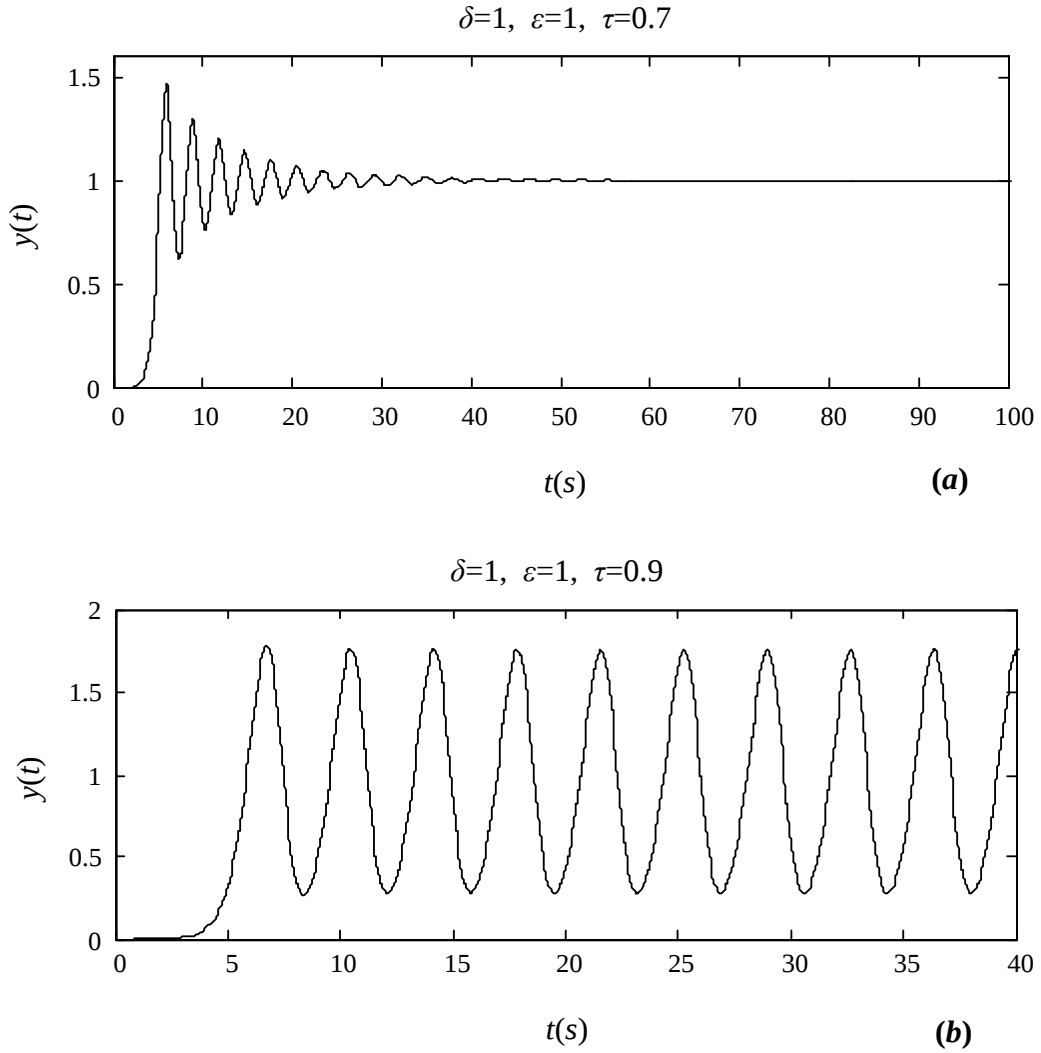
$\delta = \varepsilon = 1$ için çatallaşma noktasının altındaki $\tau_c > \tau = 0.7s$ ve çatallaşma noktasının üstündeki $\tau_c < \tau = 0.9s$ zaman gecikmesi değerlerinde sistemin durum-uzay diyagramları Şekil 7.6'da elde edilmiştir.



Şekil 7.6. $\delta = \varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı: **a)** $\tau = 0.7s$ ve **b)** $\tau = 0.9s$

Şekil 7.6(a)'ya bakıldığında, çatallaşma noktası altında sistemin asimptotik kararlı bir davranış sergilediği görülmektedir. Başlangıç şartı olarak $x(0) = 0.1$ seçildiğinden sistem yörüngesi $x_r^+ = 1$ 'deki denge noktasına yönelmekte ve bu noktada sonlanmaktadır. Şekil 7.6(b)'de ise çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değerinde $x_r^\pm = \pm 1$ denge noktaları kararlılığını kaybettiğinden dolayı, başlangıç şartına bağlı olarak $x_r^+ = 1$ denge noktasını çevreleyen bir limit çevrim davranış gerçekleştiği görülmektedir.

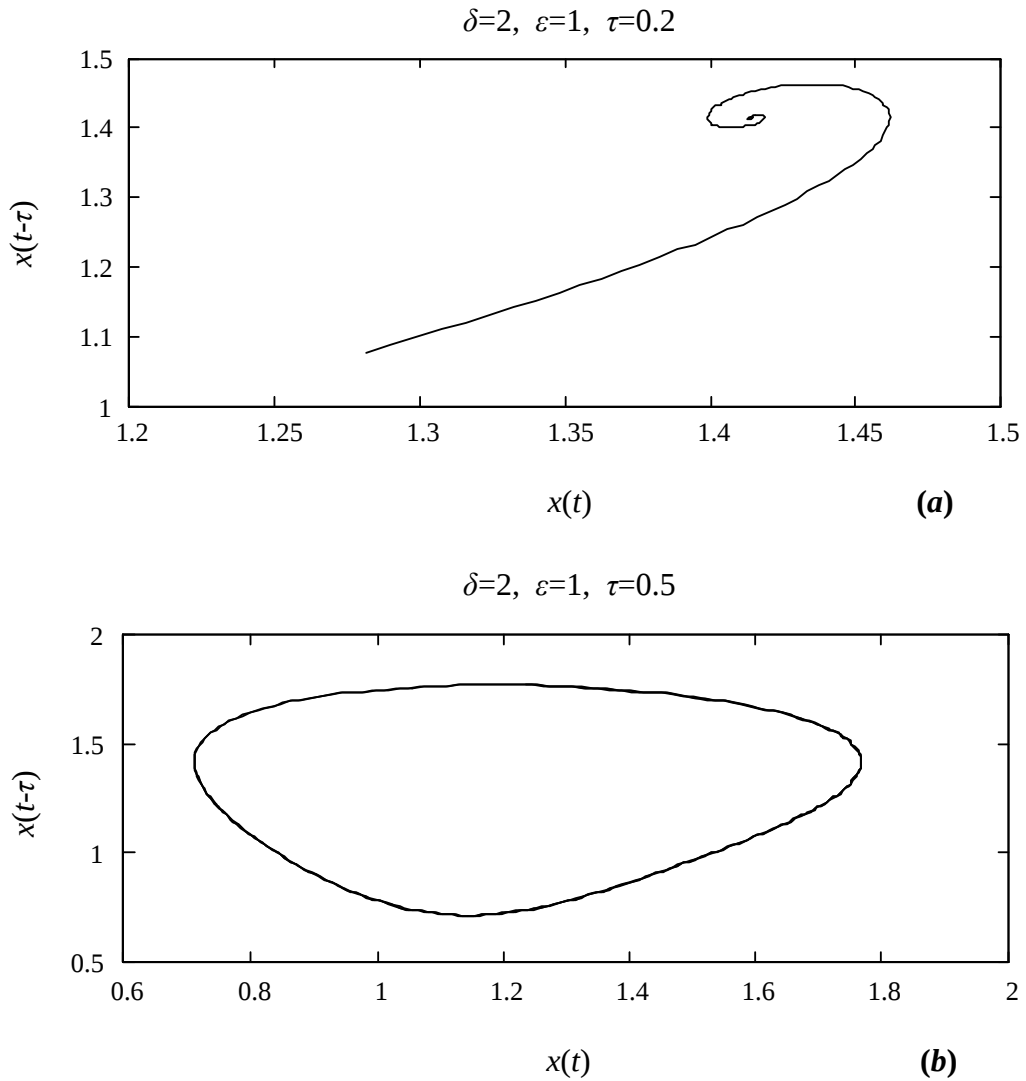
Ayrıca $\delta = \varepsilon = 1$ için çatallaşma noktasının altındaki $\tau_c > \tau = 0.7s$ ve üstündeki $\tau_c < \tau = 0.9s$ değerler için doğrusal olmayan sistemin çıkışının zaman göre değişimi Şekil 7.7'de elde edilmiştir.



Şekil 7.7. $\delta = \varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin çıkışının zamana göre değişimi: **a)** $\tau = 0.7s$ ve **b)** $\tau = 0.9s$

Şekil 7.7’de görüldüğü gibi çatallaşma noktasının altındaki bir zaman gecikmesi değeri için sistemin zaman cevabı, sönümlü bir salınım yaparak $[x_\tau^+]^3 = 1$ değerine yaklaşmakta ve değişmeden devam etmektedir. Ancak, çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değeri için sistemdeki tüm denge noktaları kararsız olmasına rağmen $[x_\tau^+]^3 = 1$ değerini çevreleyen bir salınım gerçekleşmektedir.

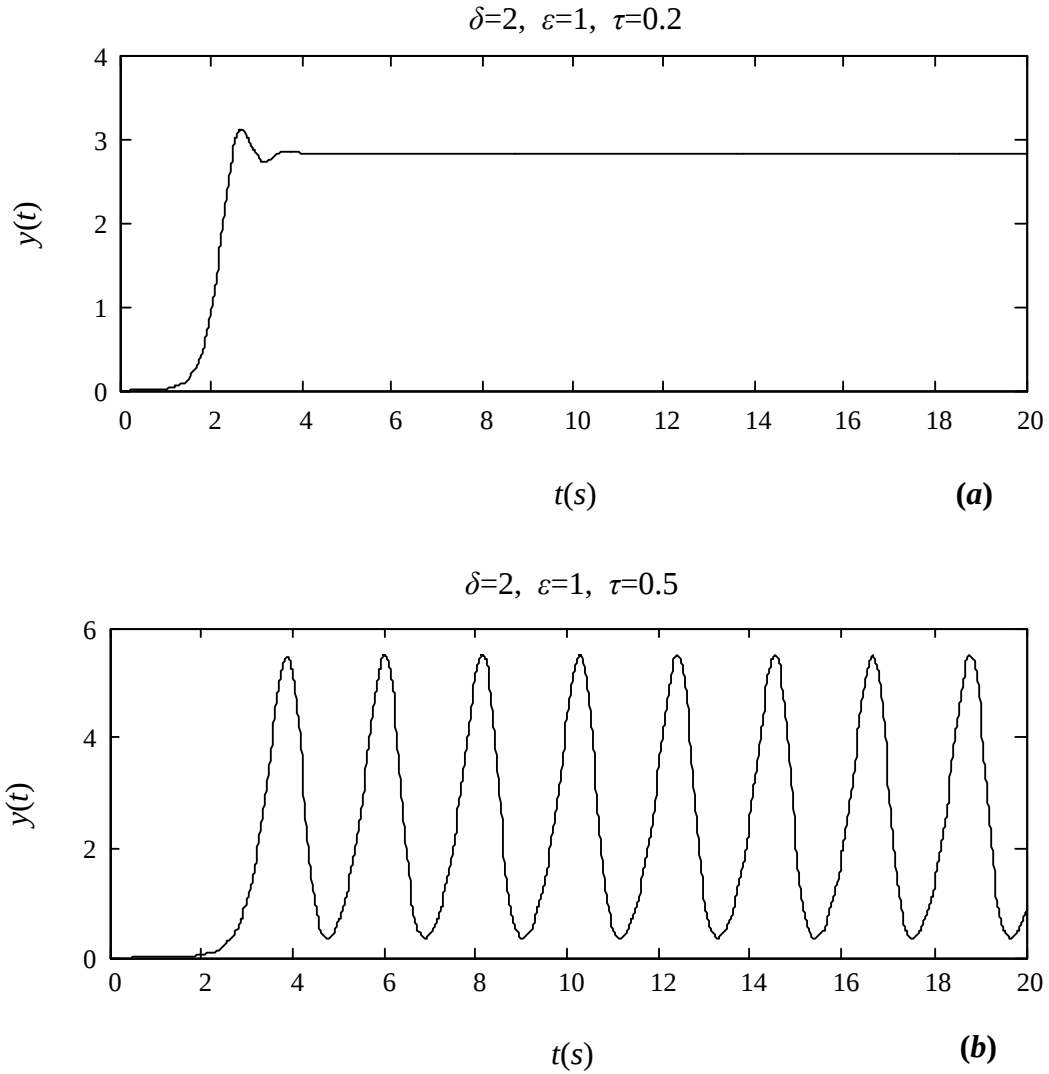
$\delta = 2$, $\varepsilon = 1$ için çatallaşma noktasının altındaki $\tau_c > \tau = 0.2$ s ve çatallaşma noktasının üstündeki $\tau_c < \tau = 0.5$ s zaman gecikmesi değerlerinde sistemin durum-uzay diyagramları Şekil 7.8’de elde edilmiştir.



Şekil 7.8. $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin durum uzay diyagramı: **a)** $\tau = 0.2$ s ve **b)** $\tau = 0.5$ s

Şekil 7.8’de görüldüğü gibi çatallaşma noktası altında sistem asimptotik kararlı bir davranış sergileyerek $x_r^+ \cong 1.41$ ’deki denge noktasına yönelmekte ve bu noktada sonlanmaktadır. Çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değeri için $x_r^\pm \cong 1.41$ denge noktaları kararlılığını kaybettiğinden dolayı, başlangıç şartına bağlı olarak $x_r^+ \cong 1.41$ ’deki noktasını çevreleyen bir limit çevrim davranış gerçekleşmektedir.

Ayrıca $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ için çatallaşma noktasının altındaki $\tau_c > \tau = 0.2$ s ve üstündeki $\tau_c < \tau = 0.5$ s değerler için doğrusal olmayan sistemin çıkışının zamana göre değişimi Şekil 7.9’da verilmiştir.



Şekil 7.9. $\delta = 2$ ve $\varepsilon = 1$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin çıkışının zamana göre değişimi: **a)** $\tau = 0.2$ s ve **b)** $\tau = 0.5$ s

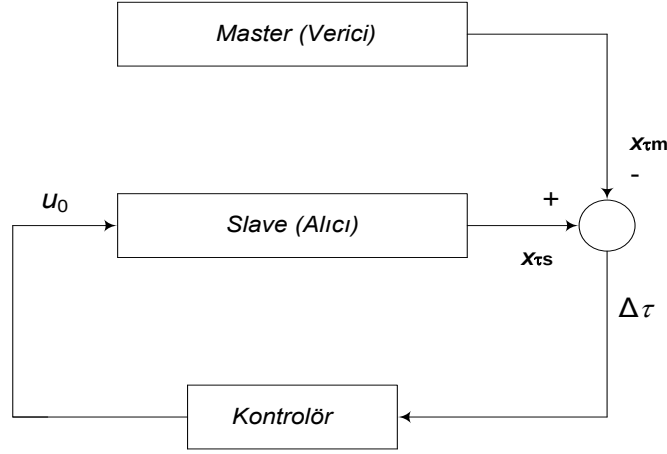
Şekil 7.9’a bakıldığında çatallaşma noktasının altındaki bir zaman gecikmesi değeri için sistemin zaman cevabı, sönümlü bir salınım yaparak $\left[x_r^+ \right]^3 \cong 2.82$ değerine yaklaşmakta ve değişmeden devam etmektedir. Buna karşın, çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değeri için sistemdeki tüm denge noktaları kararsız olmasına rağmen $\left[x_r^+ \right]^3 \cong 2.82$ değerini çevreleyen bir limit çevrim davranış sergilemektedir.

Bu uygulamada, çatallaşma noktasının sistemde sadece δ parametresine bağlı olduğu ve zaman gecikmesi τ değeri arttıkça $x^\pm = \pm\sqrt{\delta/\varepsilon}$ denge noktalarının kararlılıklarını kaybettiği ve çatallaşmanın gerçekleştiği gösterildi. Elde edilen bu sonuçlar ile nümerik sonuçlar kıyaslandığında çatallaşma noktası altındaki bir zaman gecikmesi değerinde, sistem asimptotik davranış gösteriyorken çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değerinde limit çevrim davranış gösterdiği farklı iki sistem parametresi için gözlemlenmiştir. Bu sonuçlara göre, sistemde gerçekleşen çatallaşmanın “süperkritik hopf çatallaşma” olduğu tespit edilmiştir.

7.2. Zaman Gecikmeli Kaotik Bir Sistemin Aktif Kontrol İle Senkronizasyonu

Bu başlık altında, Denklem (7.1)’de verilen zaman gecikmeli doğrusal olmayan özdeş iki kaotik sistemin (biri Master-Verici diğeri Slave-Alıcı olmak üzere) farklı başlangıç şartları için kaos senkronizasyonu gerçekleştirilecektir. Bu amaçla Master ve Slave sistemlerinin çıkışındaki hatayı sıfıra götürebilmek için Slave sisteme uygun bir kontrol işareti uygulanmasını sağlayacak bir oransal kontrolör, aktif kontrol yöntemi kullanılarak tasarlanacaktır. Elde edilen kontrolörün etkinliği Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak test edilecek ve uygun kazanç parametresi seçilecektir. Elde edilen sonuçlar, sisteme ait Matlab ortamında oluşturulan simülasyon sonuçlarıyla doğrulanacaktır. Zaman gecikmeli kaotik bir sistemin aktif kontrol ile senkronizasyonu [74]’te gerçekleştirilmiştir.

Şekil 7.10’da özdeş zaman gecikmeli doğrusal olmayan iki kaotik sistemin kaos senkronizasyon blok diyagramı görülmektedir.



Şekil 7.10. Kaos senkronizasyon blok diyagramı

Şekil 7.10’da verilen özdeş zaman gecikmeli doğrusal olmayan iki kaotik sistemin [58,60]’ta verilen aktif kontrolle senkronizasyonu gerçekleştirmek amacıyla farklı başlangıç şartlarında çıkışlarının hata dinamiğinin elde edilmesi gerekecektir. Denklem (7.1)’de verilen ifadede $x(t - \tau) = x_\tau$ olmak kaydıyla, Denklem (7.30)’da Master ve (7.31)’de Slave sistem ve kontrol fonksiyonundan oluşan sistemin modelleri verilmiştir.

$$\dot{x}_m = \delta x_{tm} - \varepsilon (x_{tm})^3 \quad (7.30)$$

$$\dot{x}_s = \delta x_{ts} - \varepsilon (x_{ts})^3 + \mu_0(t) \quad (7.31)$$

Burada $\mu_0(t)$ kontrol fonksiyonudur. Bu özdeş iki sistemin hata dinamiğini tanımlayan ifade Denklem (7.32)’de ifade edilmektedir.

$$\dot{x}_s - \dot{x}_m = \delta (x_{ts} - x_{tm}) - \varepsilon ((x_{ts})^3 - (x_{tm})^3) + \mu_0(t) \quad (7.32)$$

Eğer $\dot{\Delta}_\tau = \dot{x}_s - \dot{x}_m$, $\Delta_\tau = x_{ts} - x_{tm}$, $u_0(t) = -\varepsilon ((x_{ts})^3 - (x_{tm})^3) + \mu_0(t)$ alınırsa hata dinamiği, Denklem (7.33) biçiminde olur.

$$\dot{\Delta}_\tau = \delta \Delta_\tau + u_0(t) \quad (7.33)$$

$\mu_0(t) = u_0(t) + \varepsilon \left((x_{rs})^3 - (x_{rm})^3 \right)$ olmak kaydıyla, $u_0(t) = -K\Delta_\tau$ olarak seçildiğinde Denklem (7.33) aşağıdaki forma dönüşür.

$$\dot{\Delta}_\tau = (\delta - K)\Delta_\tau \quad (7.34)$$

Denklem (7.34)'te elde edilen hata dinamiğinin karakteristik denklemi aşağıdaki biçimde olacaktır ve bu ifadenin kökleri hata dinamiğinin kutuplarını verecektir. Senkronizasyonun gerçekleşebilmesi için hatanın sifıra gitmesi gerekir ve bu, ancak Denklem (7.35)'teki ifadenin köklerinin, yani hata dinamiğinin kutuplarının, sol yarı s-düzleminde olmasıyla sağlanabilecektir.

$$D(s) = s - (\delta - K)e^{-s\tau} = 0 \quad (7.35)$$

$s = j\omega$ için Denklem (7.35)'i sıfır yapacak K kazanç değerleri belirlenecektir. $s = j\omega$ alındığında Denklem (7.35)'ten reel ve imajiner olmak üzere iki ifade elde edilecektir.

$$j\omega - (\delta - K)e^{-j\omega\tau} = 0 \quad (7.36)$$

$$(K - \delta)\cos(\omega\tau) = 0 \quad (7.37)$$

$$\omega + (\delta - K)\sin(\omega\tau) = 0 \quad (7.38)$$

Denklem (7.37)'de $\cos(\omega\tau) = 0$ olduğundan dolayı,

$$\omega = \frac{\pi}{2\tau}(2k-1) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (7.39)$$

olarak bulunur. $k=1$ için bu değer Denklem (7.38)'de yerine konulursa Denklem (7.42) elde edilir.

$$\frac{\pi}{2\tau} + (\delta - K)\sin\left(\frac{\pi}{2\tau}\tau\right) = 0 \quad (7.40)$$

$$\frac{\pi}{2\tau} + (\delta - K) = 0 \quad (7.41)$$

$$K = \delta + \frac{\pi}{2\tau} \quad (7.42)$$

Ayrıca Denklem (7.37)' den de,

$$K - \delta = 0 \Rightarrow K = \delta \quad (7.43)$$

elde edilir. Kaotik davranış gözlemlendiği $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ sistem parametreleri altında K kazanç aralığı,

$$(K - \delta) = 0 \Rightarrow K = \delta = 1 \quad \wedge \quad K = \delta + \frac{\pi}{2\tau} = 1 + \frac{\pi}{2 \times 1.6} = 1.981 \quad (7.44)$$

$1 < K < 1.981$ olarak bulunmaktadır. $K = 1$ ve $K = 1.981$ kazanç değerleri Denklem (7.37) ve Denklem (7.38)'i sağlamaktadır.

7.2.1. Kazanç Aralığının Belirlenmesi

Kazanç aralığı, Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile tespit edilecektir.

7.2.1.1. Lambert W Fonksiyonu ile Kararlı Olunan Kazanç Aralığının Belirlenmesi

$s = j\omega$ için Denklem (7.35)'i sıfır yapacak K kazanç değerleri belirlendikten sonra Denklem (7.35)'in köklerinin sol yarı s-düzleminde olduğu K kazanç aralığını bulmak için Lambert W fonksiyonu kullanılabilir. Denklem (7.24)'teki Lambert W fonksiyonu Denklem (7.35)'e uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilecektir.

$$s = (\delta - K)e^{-s\tau} \quad (7.45)$$

$$se^{s\tau} = (\delta - K) \quad (7.46)$$

Her iki taraf τ ile çarpılırsa Denklem (7.49) elde edilir.

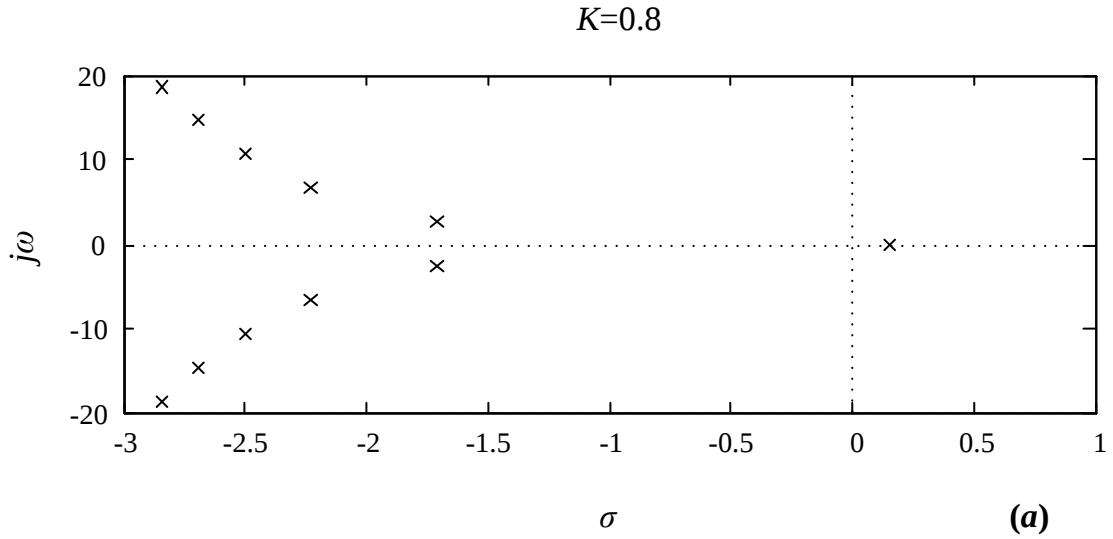
$$s\tau e^{s\tau} = (\delta - K)\tau \quad (7.47)$$

$$W(\tau(\delta - K)) = s\tau \quad (7.48)$$

$$s = \frac{1}{\tau} W(\tau(\delta - K)) \quad (7.49)$$

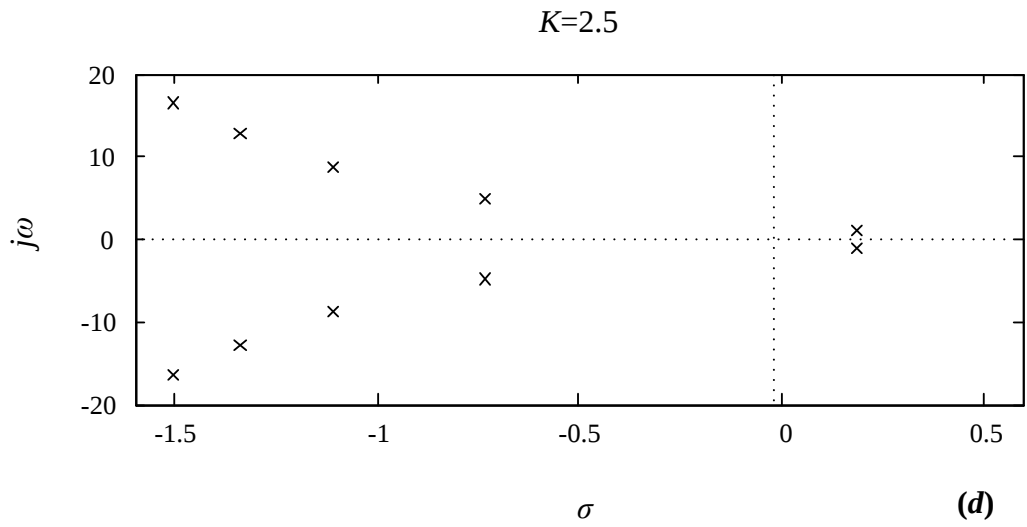
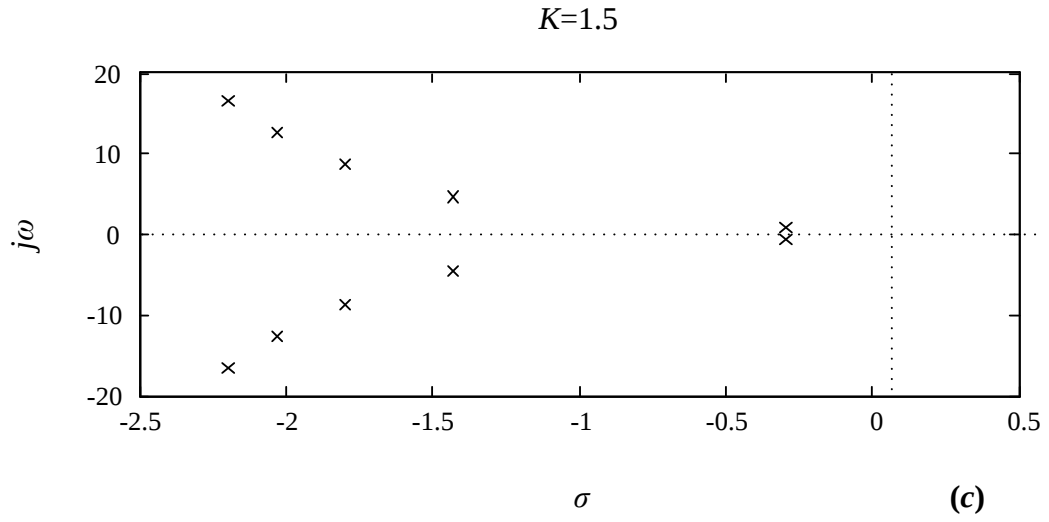
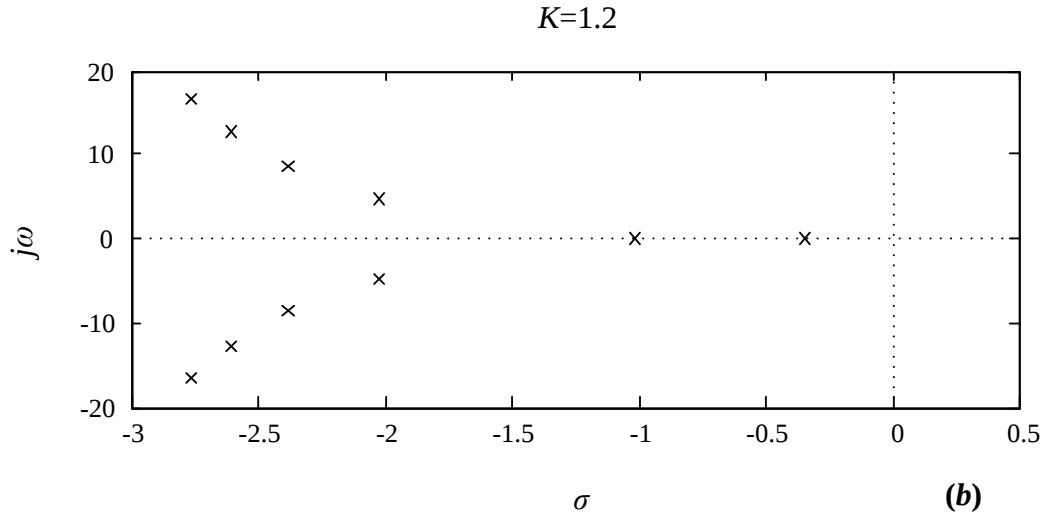
Matlab ortamında farklı sistem parametresi ve zaman gecikmesi değerleri için Denklem (7.49) çözülebilir. Elde edilen sonuçlara göre kararlı olunan kazanç değerleri tespit edilebilir.

Farklı K kazanç değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin hata dinamiğinin kutup yerleşimi Lambert W fonksiyonu yardımıyla Şekil 7.11’de verilmiştir [74].



Şekil 7.11. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin kutuplarının s-düzlemindeki konumları: **a)** $K = 0.8$

“Şekil 7.11’nin devamı”



Şekil 7.11. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin kutuplarının s-
düzlemindeki konumları: **b)** $K = 1.2$, **c)** $K = 1.5$ ve **d)** $K = 2.5$

Şekil 7.11'e bakıldığında, $1 < K < 1.981$ aralığındaki değerler için hata dinamiğinin tüm kutupları sol yarı s - düzleminde. Bu Slave sistemin Master sistemi belirli bir süre sonra takip edeceği anlamına gelir. $K=1.5$ için kutuplar kompleks eşlenik olduğundan belirli bir osilasyon sonunda hata sıfıra ulaşırken, $K=1.2$ için dominant kutup reel eksen üzerinde olduğu için sönümsüz bir şekilde üssel olarak sıfıra gidecektir. Bundan dolayı oransal kontrolörün kazanç değeri $K=1.2$ alınarak senkronizasyon osilasyonsuz bir şekilde sağlanabilecektir.

7.2.1.2. Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile Kararlı Olunan Kazanç Aralığının Belirlenmesi

$s = j\omega$ için Denklem (7.35)'i sıfır yapacak K kazanç değerleri belirlendikten sonra Denklem (7.35)'in köklerinin sol yarı s -düzleminde olduğu K kazanç aralığını bulmak için genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri kullanılabilir. Denklem (7.35)'te verilen karakteristik denklem için rasyonel fonksiyon Denklem (7.50)'de verilmiştir.

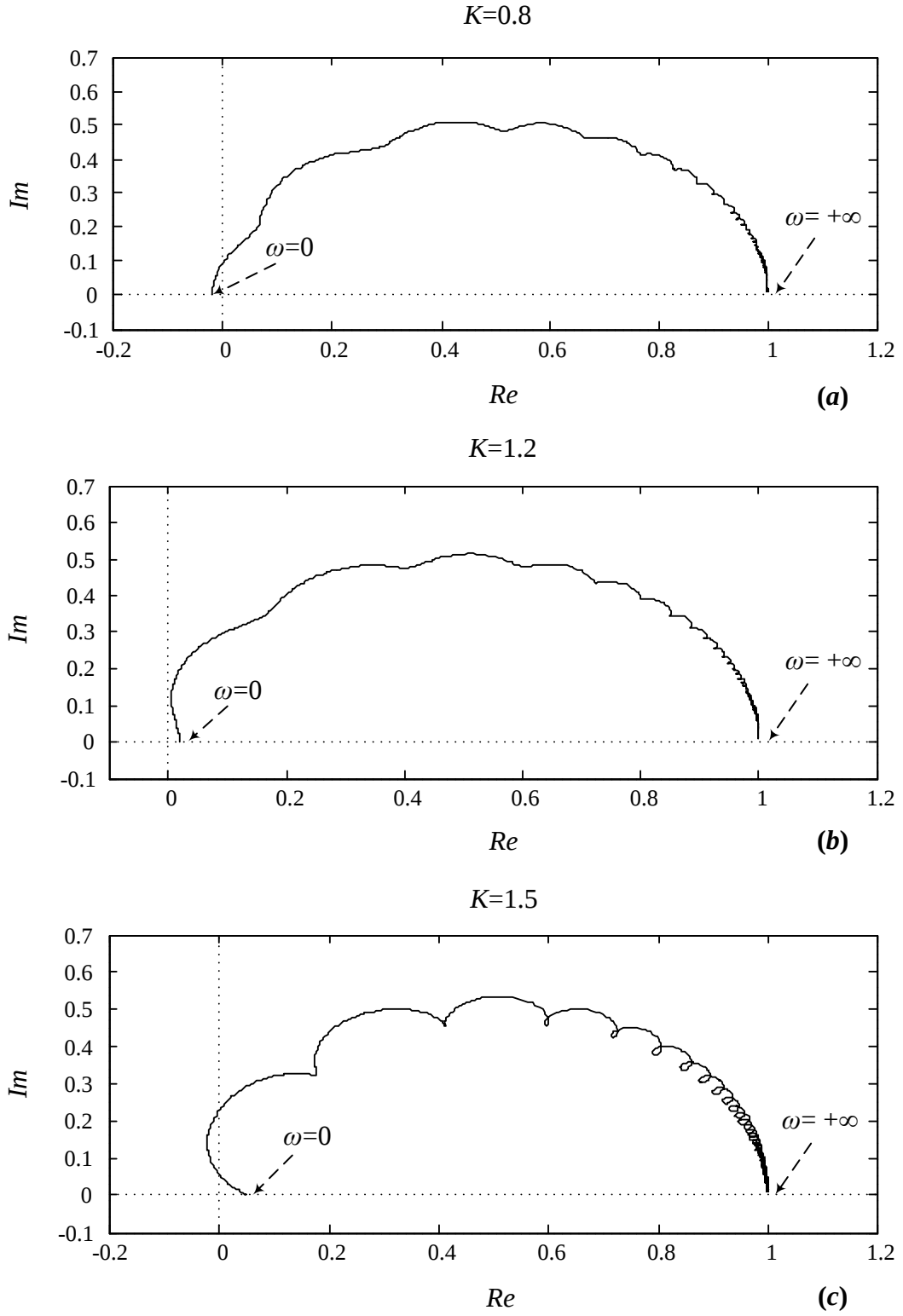
$$\psi(s) = \frac{D(j\omega)}{a_0(j\omega + c)^n}, \quad c > 0 \quad (7.50)$$

Burada n , Denklem (7.35)'teki s 'in en yüksek derecesi; a_0 ise en yüksek dereceli s teriminin önündeki katsayıdır. Dikkat edilirse, Denklem (7.50)'nin paydası $c > 0$ için kararlıdır. $a_0 = 1$ ve $c = 10$ olarak alınıp karakteristik Denklem (7.35) için rasyonel fonksiyon açık bir şekilde ifade edilirse,

$$\psi(s) = \frac{D(s)}{a_0(j\omega + c)} = \frac{s - (\delta - K)e^{-s\tau}}{(s + 10)} \quad (7.51)$$

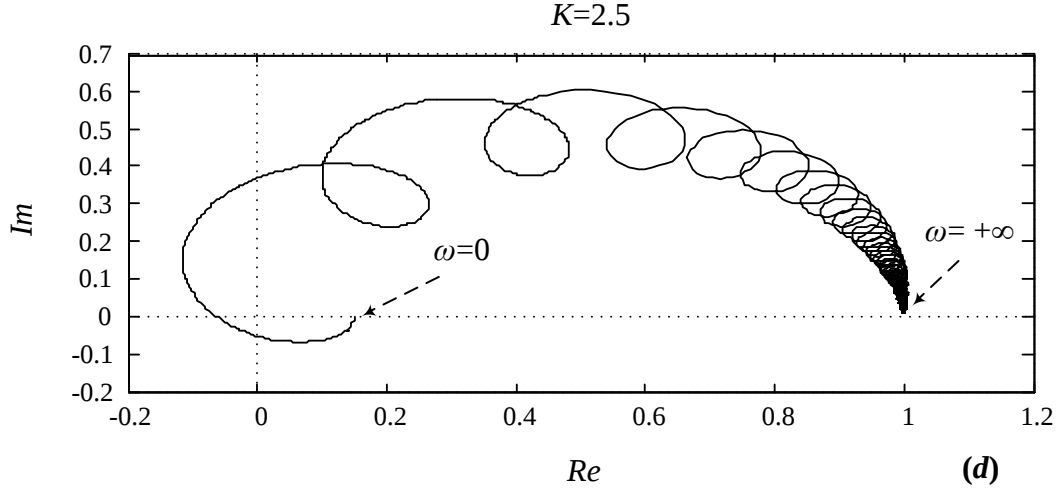
Denklem (7.51) elde edilir. Matlab ortamında $\omega = 0$ ile $\omega = \infty$ frekans aralığında farklı sistem parametreleri ve zaman gecikmesi değerleri için Denklem (7.51) çizdirilerek kararlı olunan K kazanç aralığı tespit edilebilir.

Farklı K kazanç değerleri için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin hata dinamiğinin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi Şekil 7.12'de verilmiştir.



Şekil 7.12. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: **a)** $K = 0.8$, **b)** $K = 1.2$ ve **c)** $K = 1.5$

“Şekil 7.12’nin devamı”



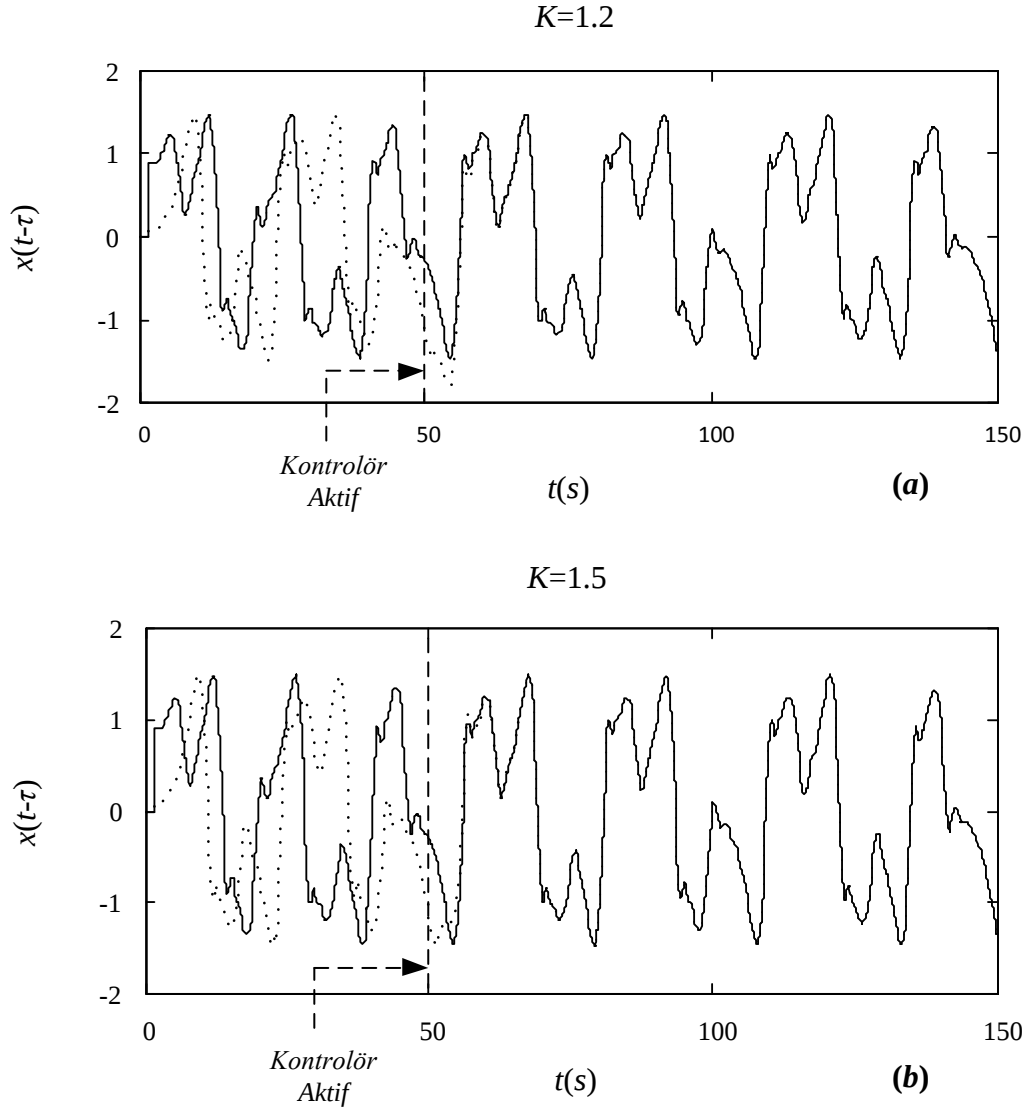
Şekil 7.12. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan sistemin genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: **d)** $K = 2.5$

Şekil 7.12’ye bakıldığında $1 < K < 1.981$ aralığındaki kazanç değerleri için genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi orijini kapsamamaktadır. Bu durum, kutup yerleşiminin $1 < K < 0.981$ için sol yarı s-düzleminde olduğunun göstergesidir. Yani, Slave sistem Master sistemi belirli bir süre sonra takip edecektir. $K < 1$ ve $K > 1.981$ olması durumundaki kazanç değerleri için genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi orijini kapsamaktadır. Bu durum, kutup yerleşiminin bu kazanç değerleri için sağ yarı s-düzleminde olduğunun göstergesidir. Başka bir deyişle, hata dinamiği kararsızdır ve özdeş iki kaotik sistem arasında senkronizasyon gerçekleşmemektedir.

7.2.2. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde, aktif kontrol yöntemiyle senkronizasyonu sağlamak amacıyla kullanılan oransal kontrolörün farklı kazanç değerleri için özdeş iki kaotik sistemin *Matlab/Simulink* ortamında elde edilen nümerik sonuçları sunulacaktır. Sisteme ait nümerik sonuçlar elde edilirken tüm uygulamalarda Master sistemin başlangıç şartı $x_{0m} = 0.9$ ve Slave sistemin başlangıç şartı $x_{0s} = 0.1$ olarak alınacaktır ve senkronizasyonu sağlayacak olan kontrolör 50. saniyede devreye alınacaktır.

Kontrolörün hata dinamiğini kararlı yapacağı kazanç değerleri $K = 1.2$ ve $K = 1.5$ için Master ve Slave çıkışlarının zamana göre değişimleri Şekil 7.13’te elde edilmiştir.

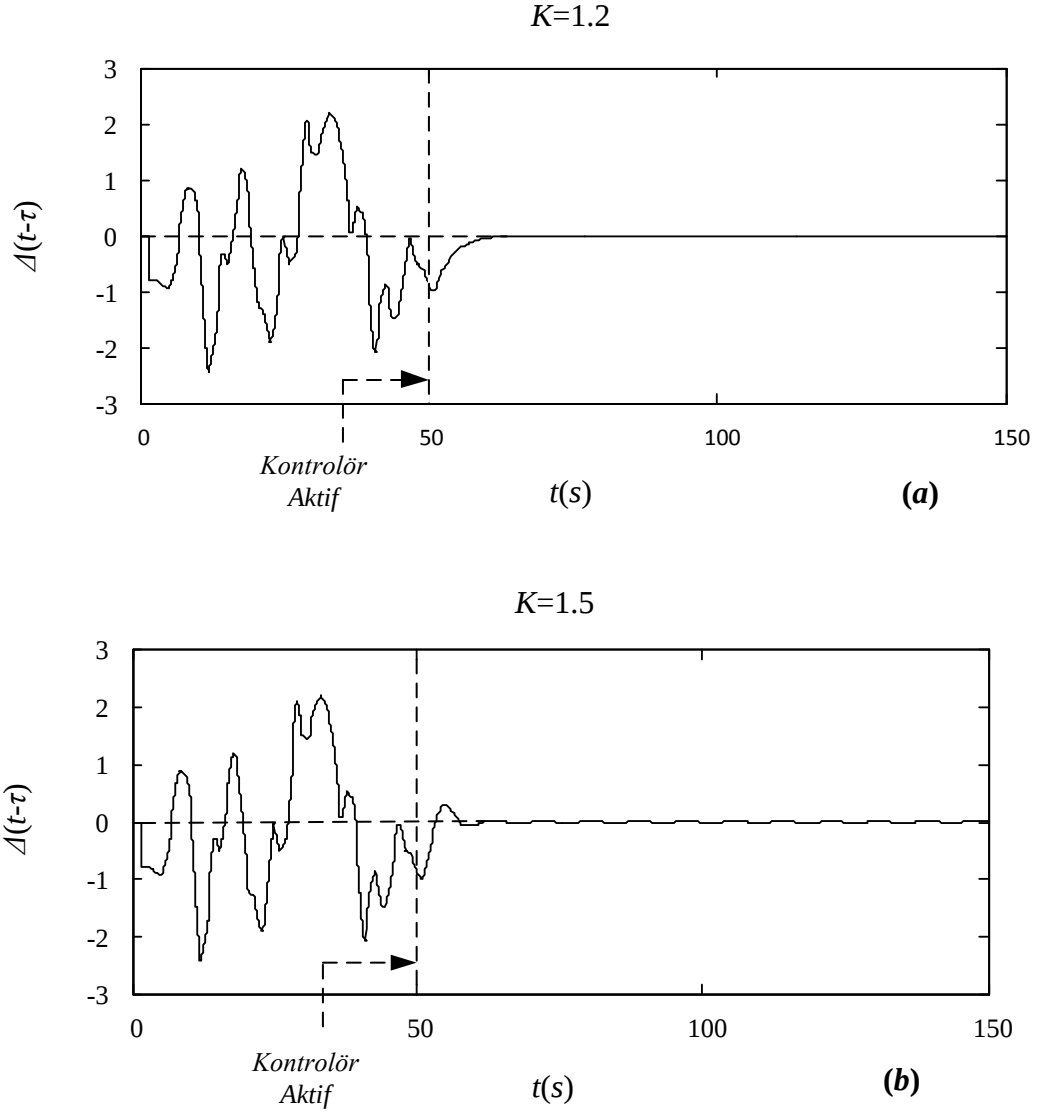


Şekil 7.13. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan özdeş Master ve Slave sistemlerin çıkışı: **a)** $K = 1.2$ ve **b)** $K = 1.5$ (Düz çizgi: Master, Kesikli çizgi: Slave)

Şekil 7.13'e bakıldığında, her iki kontrol kazancı için de kontrolör devreye girdikten sonra senkronizasyonun gerçekleştiği görülmektedir.

Kontrolörün hata dinamiğini kararlı yapacağı kazanç değerleri $K = 1.2$ ve $K = 1.5$ için Master ve Slave çıkışlarının arasındaki hatanın değişimi Şekil 7.14'te elde edilmiştir.

Şekil 7.14'te $K=1.2$ için aradaki hata üssel sıfıra giderken, $K=1.5$ için osilasyon yaparak sıfıra gittiği görülmektedir. Benzetim sonuçlarına bakıldığında kontrolör kazancı olarak $K=1.2$ seçilmesinin uygun olduğu görülmüştür.



Şekil 7.14. $\delta = \varepsilon = 1$ ve $\tau = 1.6s$ için zaman gecikmeli doğrusal olmayan özdeş Master ve Slave sistemlerin çıkışı: **a)** $K = 1.2$ ve **b)** $K = 1.5$ (Düz çizgi: Master, Kesikli çizgi: Slave)

7.3. Tek Hücreli Zaman Gecikmeli Hücresel Sinir Ağıнын Kararlılık ve Çatallaşma Analizi

Bu uygulamada [34]'te verilen tek hücreli zaman gecikmeli doğrusal olmayan hücresel sinir ağıнын kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilecektir. Sistemin denge noktalarının doğrusallaştırılmış modelinden faydalanılarak, zaman gecikmesi değerine göre sistemde çatallaşmanın varlığı ve çatallaşma noktası analitik olarak hesaplanacaktır. Çatallaşmanın yönü ise Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık kriteri kullanılarak farklı sistem parametreleri için belirlenecektir. Elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek için sisteme ait nümerik sonuçlar verilecektir.

Lu [34]'te incelenen modelde zaman gecikmesi mevcuttur ve ZGHSA tek hücreli bir yapıya sahiptir. Lu [34]'te verilen model,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -ax + bf[x(t-\tau)] \\ f(x) &= 2(|x+1| - |x-1|) - \frac{3}{2} \left(\left| x + \frac{4}{3} \right| - \left| x - \frac{4}{3} \right| \right)\end{aligned}\tag{7.52}$$

ile tanımlanır. Burada a , b parametreler, τ zaman gecikmesi ve $f(x)$ ise parçalı doğrusal yapıdaki tek simetrik bir fonksiyondur. Denklem (7.52) ZGHSA'nda bir hücre denklemi olarak incelenebilir.

Denklem (7.52)'deki parçalı doğrusal fonksiyon x 'in belirli aralıkları için analiz edilirse,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{4}{3} \\ -3x-4, & -\frac{4}{3} < x \leq -1 \\ x, & -1 < x \leq 1 \\ -3x+4, & 1 < x \leq \frac{4}{3} \\ 0, & x > \frac{4}{3} \end{cases}\tag{7.53}$$

Denklem (7.53) elde edilir. x^* , sistemin denge noktası olarak kabul edilsin. Her bir aralık için parçalı doğrusal fonksiyonu Denklem (7.52)'de yerine yazarak sistemin denge noktalarını bulalım.

- $x \leq -\frac{4}{3}$ için,

$$\dot{x}(t) = -ax + bf[x(t-\tau)] = -ax + b(0) = -ax = 0$$

$$x_\tau^0 = 0$$

- $-\frac{4}{3} < x \leq -1$ için,

$$\dot{x}(t) = -ax + b[f(t - \tau)] = -ax + b(-3x - 4) = 0$$

$$x_{\tau}^{-} = -\frac{4b}{a + 3b}$$

- $-1 < x \leq 1$ için,

$$\dot{x}(t) = -ax + b[f(t - \tau)] = -ax + b(x) = 0$$

$$x_{\tau}^0 = 0$$

- $1 < x \leq \frac{4}{3}$ için,

$$\dot{x}(t) = -ax + b[f(t - \tau)] = -ax + b(-3x + 4) = 0$$

$$x_{\tau}^{+} = \frac{4b}{a + 3b}$$

- $x > \frac{4}{3}$ için,

$$\dot{x}(t) = -ax + b[f(t - \tau)] = -ax + b(0) = 0$$

$$x_{\tau}^0 = 0$$

Sistemin $x_{\tau}^0 = 0$, $x_{\tau}^{+} = \frac{4b}{a + 3b}$ ve $x_{\tau}^{-} = -\frac{4b}{a + 3b}$ olmak üzere 3 tane denge noktası vardır.

Sistemin karakteristik denklemi ise,

$$D(s) = s + a - bf(x_{\tau})e^{-s\tau} \quad (7.54)$$

biçiminde ifade edilir. Denge noktası etrafında doğrusallaştırılmış sistemin karakteristik denklemi ise Denklem (7.55) biçiminde ifade edilir.

$$D(s) = s + a - b \left(\frac{\partial f(x_\tau)}{\partial x_\tau} \bigg|_{x_\tau = x^*} \right) e^{-s\tau} \quad (7.55)$$

Denklem (7.55)'in kökleri, her bir denge noktası için doğrusal olmayan sistemin kutupları olduğundan, her bir denge noktasının kararlılığı hakkında bilgi verir. Her bir denge noktasını doğrusallaştırılmış sistemin karakteristik denkleminde yerine yazalım.

- $x_0^* = 0$ denge noktası için karakteristik denklem,

$$D(s) = s + a - b(x)' e^{-s\tau} = 0 \quad (7.56)$$

$$D(s) = s + a - be^{-s\tau} = 0 \quad (7.57)$$

şeklinde olur. Sistemin kutupları $s + a - be^{-s\tau} = 0$ 'ın kökleri olacaktır. $s = j\omega$ alınıp analitik olarak kökler hesaplanırsa Denklem (7.58) elde edilir.

$$j\omega + a - be^{-j\omega\tau} = 0 \quad (7.58)$$

Denklem (7.58)'in reel ve kompleks bileşenleri,

$$\text{Re}[D(j\omega, \tau)] = a - b \cos \omega\tau = 0 \quad (7.59)$$

$$\text{Im}[D(j\omega, \tau)] = \omega + b \sin \omega\tau = 0 \quad (7.60)$$

Denklem (7.59) ve Denklem (7.60) olarak elde edilecektir. Denklem (7.59) ve (7.60)'ın çözümünden, zaman gecikmesi parametresine göre çatallaşma noktası,

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_c} \arccos\left(\frac{a}{b}\right) \quad (7.61)$$

ve bu noktadaki frekans değeri ise,

$$\omega_c = \sqrt{b^2 - a^2} \quad (7.62)$$

olarak elde edilir. Çatallaşma noktasının a ve b parametrelerine bağlı olduğu görülmektedir.

- $x_{\pm}^* = \pm \frac{4b}{a+3b}$ denge noktaları için karakteristik denklem,

$$D(s) = s + a - b(-3x \pm 4)' e^{-s\tau} = 0 \quad (7.63)$$

$$D(s) = s + a - b(-3) e^{-s\tau} = 0 \quad (7.64)$$

şeklinde olur. Sistemin kutupları $s + a - b(-3) e^{-s\tau} = 0$ 'ın kökleri olacaktır. $s = j\omega$ alınıp analitik olarak kökler hesaplanırsa Denklem (7.65) elde edilir.

$$j\omega + a + 3be^{-j\omega\tau} = 0 \quad (7.65)$$

Denklem (7.65)'nin reel ve kompleks bileşenleri,

$$\text{Re}[D(j\omega, \tau)] = a + 3b \cos \omega\tau = 0 \quad (7.66)$$

$$\text{Im}[D(j\omega, \tau)] = \omega - 3b \sin \omega\tau = 0 \quad (7.67)$$

olarak elde edilecektir. Denklem (7.66) ve (7.67)'nin çözümünden, zaman gecikmesi değerine göre çatallaşma noktası,

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_c} \arccos\left(-\frac{a}{3b}\right) \quad (7.68)$$

ve bu noktadaki frekans değeri ise,

$$\omega_c = \sqrt{9b^2 - a^2} \quad (7.69)$$

olarak elde edilir. Çatallaşma noktasının a ve b parametrelerine bağlı olduğu görülmektedir. $a = 2$ iken $b = 3$ ve $b = -5$ alınarak çatallaşmanın yönü hesaplanacaktır. $a = 2$ ve $b = 3$ iken çatallaşma olayı $\tau_c = 0.20454s$ ve $\omega_c = 8.77501 \text{ rad/s}$ 'de gerçekleşecektir. $a = 2$ ve $b = -5$ iken çatallaşma olayı $\tau_c = 0.432s$ ve $\omega_c = 4.5825 \text{ rad/s}$ 'de gerçekleşecektir.

7.3.1. Çatallaşmanın Yönü

Çatallaşmanın yönü, çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde denge noktasının kararlılığını kaybedip kaybetmemesiyle ilgilidir. Denklem (7.52)'de verilen sistemin çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde x_r^0 ve $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılığı Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile tespit edilecektir.

7.3.1.1. Lambert W Fonksiyonu ile Çatallaşma Yönünün Belirlenmesi

Denklem (7.52)'de verilen sistemin çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde x_r^0 ve $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılığı Lambert W fonksiyonu ile tespit edilebilir.

- x_r^0 denge noktası için doğrusal modele ait karakteristik Denklem (7.57), Denklem (7.24)'e uyarlanmak maksadıyla aşağıdaki eşitliğe dönüştürülebilir.

$$s + a - be^{-s\tau} = 0 \quad (7.70)$$

$$(s + a) = be^{-s\tau} \quad (7.71)$$

$$(s + a)e^{s\tau} = b \quad (7.72)$$

Denklem (7.72)'nin her iki tarafı $\tau e^{a\tau}$ ile çarpılırsa Denklem (7.73) elde edilir.

$$\tau(s + a)e^{s\tau}e^{a\tau} = b\tau e^{a\tau} \Rightarrow \tau(s + a)e^{\tau(s+a)} = b\tau e^{a\tau} \quad (7.73)$$

Denklem (7.73)'ün Lambert W fonksiyonu alınırsa Denklem (7.74) elde edilir.

$$W(b\tau e^{a\tau}) = \tau(s + a) \quad (7.74)$$

Bu durumda, x_τ^0 denge noktasına göre doğrusallaştırılmış sistemin kutupları Denklem (7.75) ile elde edilebilecek.

$$s = \frac{1}{\tau} W(b\tau e^{a\tau}) - a \quad (7.75)$$

- $x_\tau^\pm$ denge noktaları için doğrusal modele ait karakteristik Denklem (7.64), Denklem (7.24)'e uyarlanmak maksadıyla aşağıdaki eşitliğe dönüştürülebilir.

$$s + a + 3be^{-s\tau} = 0 \quad (7.76)$$

$$(s + a) = -3be^{-s\tau} \quad (7.77)$$

$$(s + a)e^{s\tau} = -3b \quad (7.78)$$

Denklem (7.78)'in her iki tarafı $\tau e^{a\tau}$ ile çarpılırsa,

$$\tau(s + a)e^{s\tau}e^{a\tau} = -3b\tau e^{a\tau} \Rightarrow \tau(s + a)e^{(s+a)\tau} = -3b\tau e^{a\tau} \quad (7.79)$$

elde edilir. Eşitliğin Lambert W fonksiyonu alınırsa,

$$W(-3b\tau e^{a\tau}) = \tau(s + a) \quad (7.80)$$

Denklem (7.80) elde edilir. Bu durumda, $x_\tau^\pm$ denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin kutupları Denklem (7.81) ile elde edilebilecek.

$$s = \frac{1}{\tau} W(-3b\tau e^{a\tau}) - a \quad (7.81)$$

Matlab ortamında farklı sistem parametreleri ve zaman gecikmesi değerleri için Denklem (7.75) ve Denklem (7.81) çözülebilir. Elde edilen sonuçlara göre çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde denge noktalarının kararlılıklarını kaybedip kaybetmemelerine bakılarak çatallaşmanın yönü belirlenebilir.

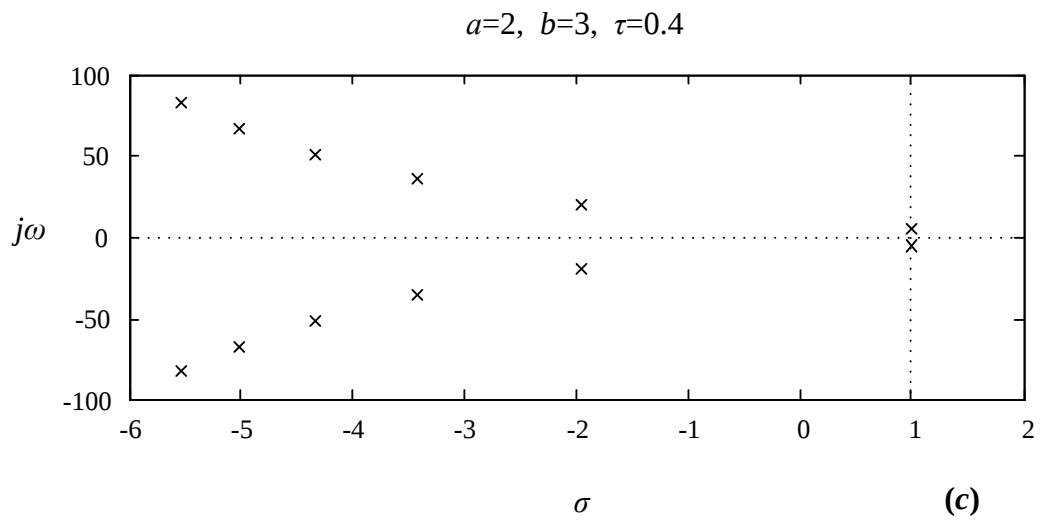
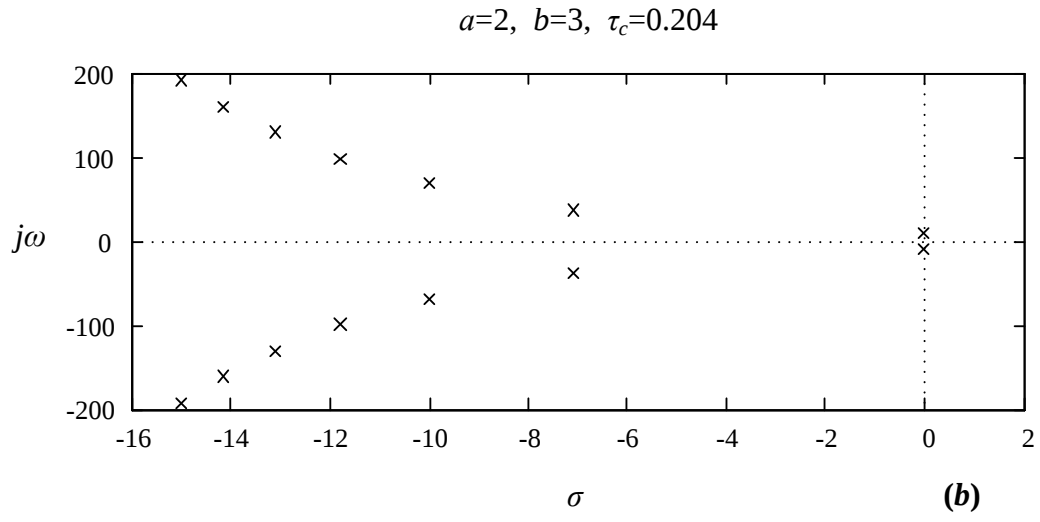
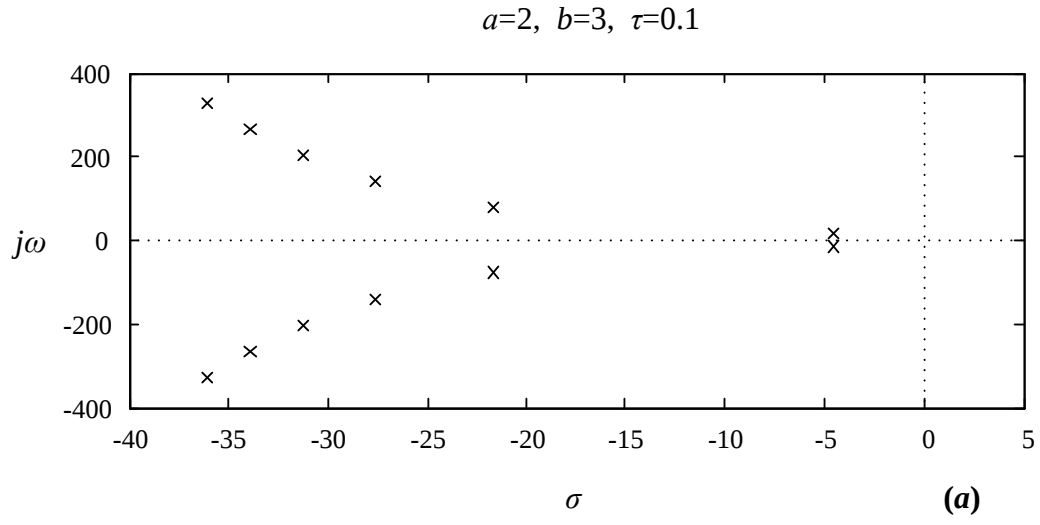
Denklem (7.52)'de verilen sistemin iki farklı sistem parametresi değerleri için denge noktalarının kararlılıkları farklı zaman gecikmesi değerlerine göre incelenecek ve çatallaşmanın yönü tespit edilecektir.

$a = 2$, $b = 3$ iken çatallaşma noktası $\tau_c = 0,204 s$, çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.1 s$ ve çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.4 s$ için $x_r^\pm$ denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin s -düzlemindeki kutup yerleşimi Şekil 7.15'te elde edilmiştir.

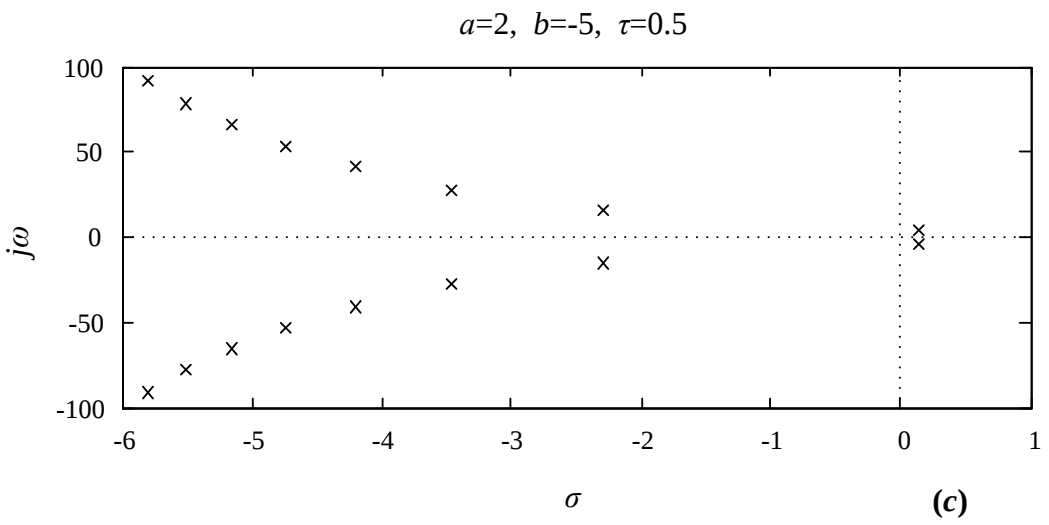
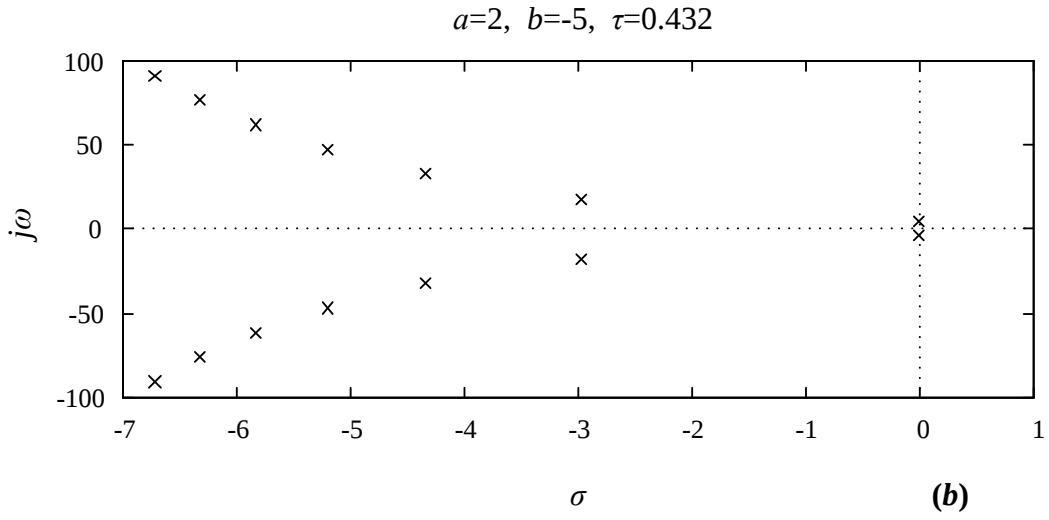
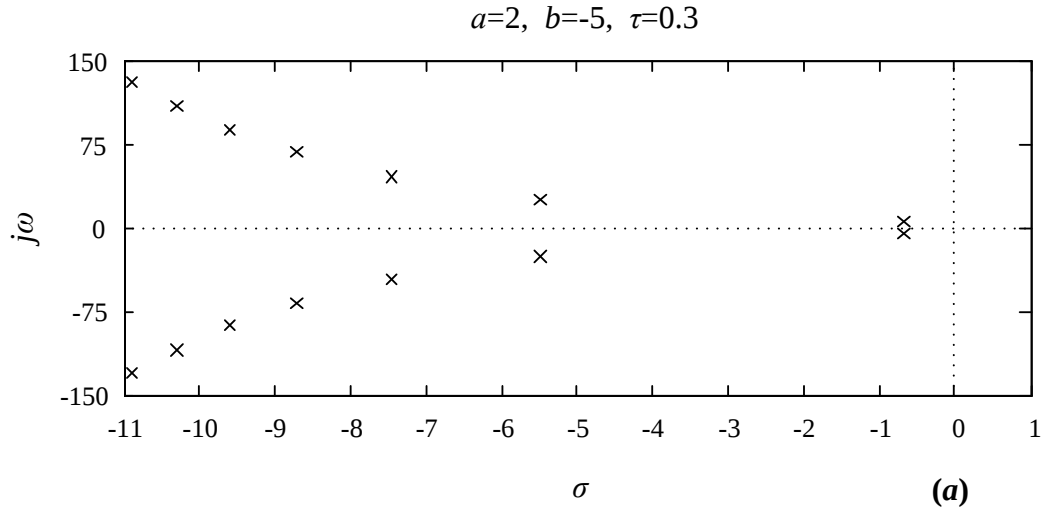
Şekil 7.15'e bakıldığında beklendiği gibi çatallaşma noktasında kutuplar $j\omega$ eksenindedir. Çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.1 s$ için tüm kutuplar sol yarı s -düzleminde olduğu için $x_r^\pm$ denge noktaları kararlıdır. Bu yüzden sistem yörüngesinin başlangıç şartına bağlı olarak asimptotik bir şekilde denge noktalarından birine yönelmesi ve orada sonlanması beklenebilir. Çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.4 s$ için sağ yarı s -düzleminde iki tane kutup vardır. Bu yüzden $x_r^\pm$ denge noktaları kararsızdır. Bu durumda başlangıç şartına bağlı olarak $x_r^\pm$ denge noktalarından birini kapsayan bir limit çevrim davranış beklenebilir. $x_r^\pm$ denge noktaları zaman gecikmesi değeri arttıkça kararlılığını kaybetmesinden dolayı sistemde “süperkritik hopf çatallaşma” oluşacaktır.

$a = 2$, $b = -5$ iken çatallaşma noktası $\tau_c = 0.432 s$, çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.3 s$ ve çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.5 s$ için x_r^0 denge noktasına göre doğrusallaştırılmış sistemin s -düzlemindeki kutup yerleşimi Şekil 7.16'da elde edilmiştir.

Şekil 7.16'daki sonuçlar incelendiğinde benzer durumun bu sistem parametreleri için de geçerli olduğu görülmektedir. Çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.3 s$ için tüm kutuplar sol yarı s -düzleminde olduğu için $x_r^\pm$ denge noktaları kararlıdır. Çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.5 s$ için sağ yarı s -düzleminde iki tane kutup vardır. Bu yüzden $x_r^\pm$ denge noktaları kararsızdır. Zaman gecikmesi değeri arttıkça x_r^0 denge noktası kararlı durumdan kararsız duruma geçmektedir. Bu durumda çatallaşmanın yönü “süperkritik hopf çatallaşma” olduğu görülmektedir.



Şekil 7.15. $a = 2$ ve $b = 3$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA' nın kutupları:
a) $\tau = 0.1s$, **b)** $\tau_c = 0.204s$ ve **c)** $\tau = 0.4s$



Şekil 7.16. $a=2$ ve $b=5$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA' nın kutupları:
a) $\tau = 0.3s$ ve **b)** $\tau_c = 0.432s$ **c)** $\tau = 0.5s$

7.3.1.2. Genelleştirilen Değiştirilmiş Mikhailov Kararlılık Kriteri ile Çatallaşma Yönünün Belirlenmesi

Denklem (7.52)'de verilen sistemin çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde $x_r^\pm$ ve x_r^0 denge noktalarının kararlılığı genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile tespit edilebilir. Karakteristik denklem için rasyonel fonksiyon Denklem (7.82)'de verilmiştir.

$$\psi(s) = \frac{D(j\omega)}{a_0(j\omega + c)^n}, \quad c > 0 \quad (7.82)$$

Burada n karakteristik denklemdeki s 'in en yüksek derecesi, a_0 ise en yüksek dereceli s teriminin önündeki katsayıdır. $n=1$, $a_0=1$ ve $c=10$ olarak alınıp x_r^0 ve $x_r^\pm$ denge noktaları için rasyonel fonksiyonu açık bir şekilde ifade edelim. x_r^0 denge noktası için,

$$\psi(s) = \frac{D(s)}{a_0(j\omega + c)^n} = \frac{s + a - be^{-s\tau}}{(s+10)} \quad (7.83)$$

Denklem (7.83) elde edilir. $x_r^\pm$ denge noktaları için,

$$\psi(s) = \frac{D(s)}{a_0(j\omega + c)^n} = \frac{s + a + 3be^{-s\tau}}{(s+10)} \quad (7.84)$$

Denklem (7.84) elde edilir. Matlab ortamında $\omega=0$ ile $\omega=\infty$ frekans aralığında farklı sistem parametreleri ve zaman gecikmesi değerleri için Denklem (7.83) ve Denklem (7.84) çizdirilebilir. Elde edilen sonuçlara göre çatallaşma noktasının altındaki ve üstündeki değerlerde x_r^0 ve $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılıklarını kaybedip kaybetmemelerine bakılarak çatallaşmanın yönü belirlenebilir.

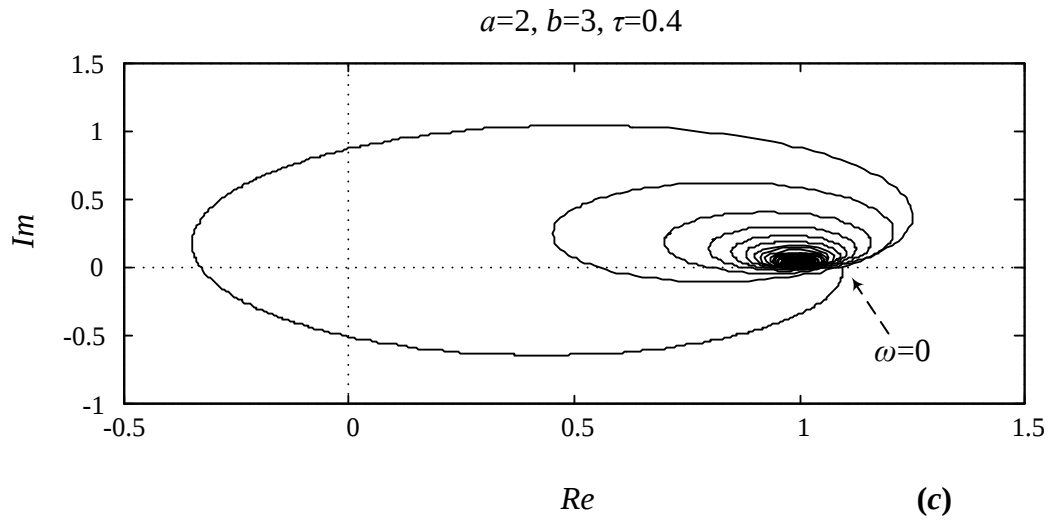
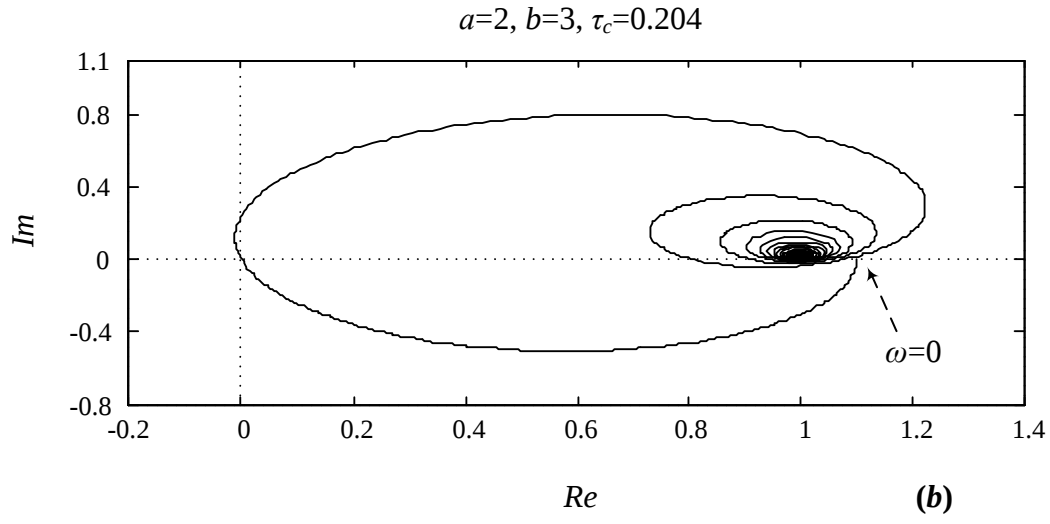
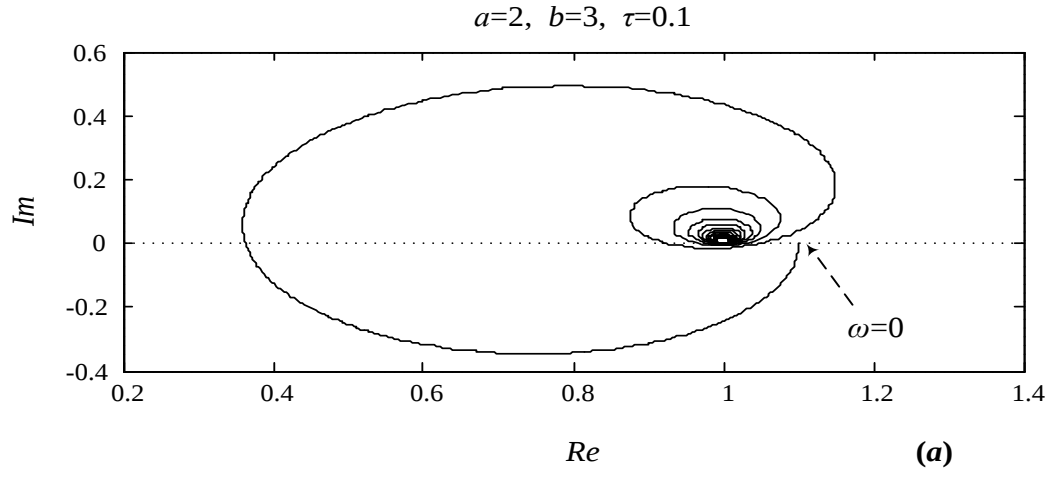
Denklem (7.83) ve Denklem (7.84)'te verilen sistemlerin iki farklı sistem parametresi değerleri için denge noktalarının kararlılıkları farklı zaman gecikmesi değerlerine göre incelenecek ve çatallaşmanın yönü tespit edilecektir.

$a = 2$, $b = 3$ iken çatallaşma noktası $\tau_c = 0,204 s$, çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.1 s$ ve çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.4 s$ için $x_r^\pm$ denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi Şekil 7.17’de elde edilmiştir.

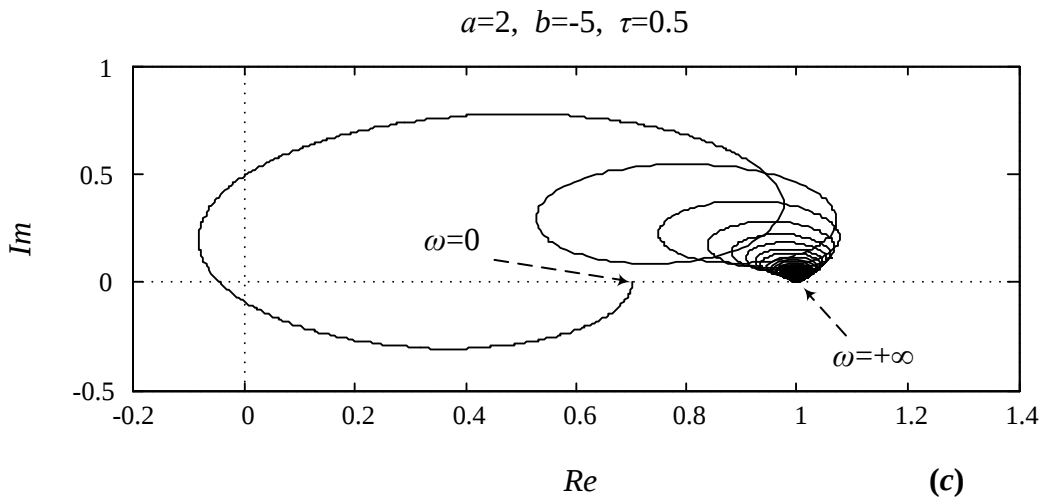
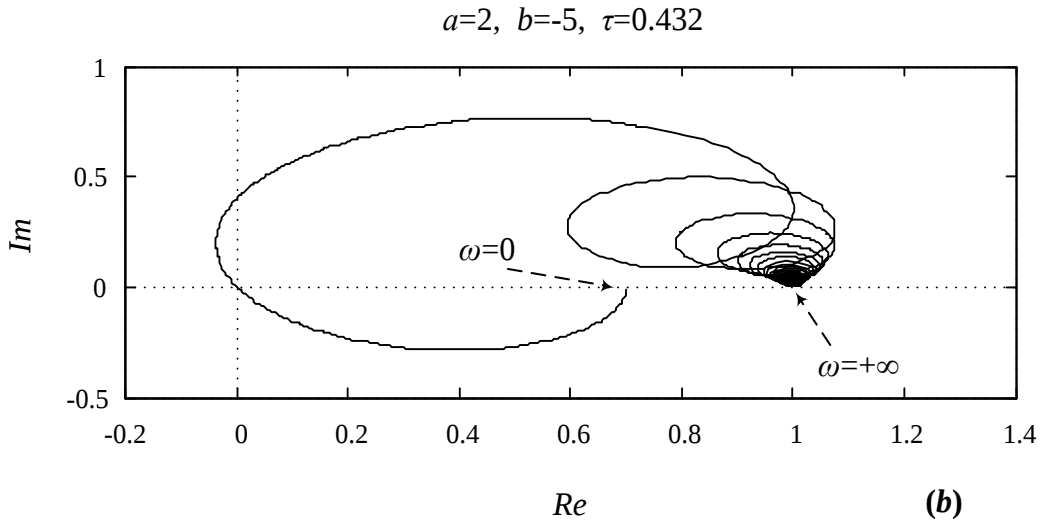
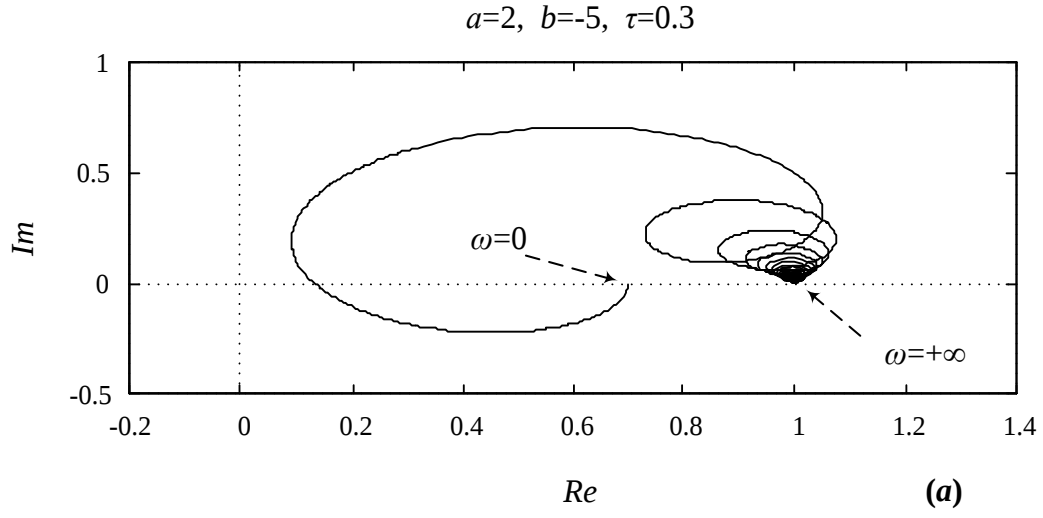
Şekil 7.17’ye bakıldığında, çatallaşma noktası $\tau_c = 204 s$ için genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi orijinden geçmektedir. Bu durum, $j\omega$ eksenini üzerinde köklerin var olabileceğine işaretler. $\tau = 0.1 s$ için eğri orijini çevrelemediğinden dolayı tüm kutupların sol yarı s -düzleminde olduğuna işaretler. Böylece $x_r^\pm$ denge noktaları kararlıdır. $\tau = 0.4 s$ için eğri orijini çevrelediğinden dolayı sağ yarı s -düzleminde kutup ya da kutupların olacağına işaretler. Bu yüzden $x_r^\pm$ denge noktaları kararsızdır. $x_r^\pm$ denge noktaları zaman gecikmesi değeri arttıkça kararlılığını kaybetmesinden dolayı sistemde “süperkritik hopf çatallaşma” oluşacaktır.

$a = 2$, $b = -5$ iken çatallaşma noktası $\tau_c = 0,432 s$, çatallaşma noktasının altında $\tau = 0.3 s$ ve çatallaşma noktasının üstünde $\tau = 0.5 s$ için x_r^0 denge noktasına göre doğrusallaştırılmış genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi Şekil 7.18’de elde edilmiştir.

Şekil 7.18’deki sonuçlar incelendiğinde benzer durumun bu sistem parametreleri için de geçerli olduğu görülmektedir. Çatallaşma değerinde genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi koordinatların orijininden geçmektedir. $\tau = 0.3 s$ ’de genelleştirilmiş değiştirilmiş Mikhailov eğrisi koordinatların orijinini çevrelememektedir. $\tau = 0.5 s$ ’de ise eğri orijini çevrelemektedir. Bu durum sistemin artan zaman gecikmesi değerinde kararsızlaştığını göstermektedir. x_r^0 denge noktası zaman gecikmesi değeri arttıkça kararlılığını kaybettiğinden dolayı sistemde “süperkritik hopf çatallaşma” oluşacaktır.



Şekil 7.17. $a = 2$ ve $b = 3$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında ZGHSA' nın genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: **a)** $\tau = 0.1s$ **b)** $\tau_c = 0.204s$ ve **c)** $\tau = 0.4s$

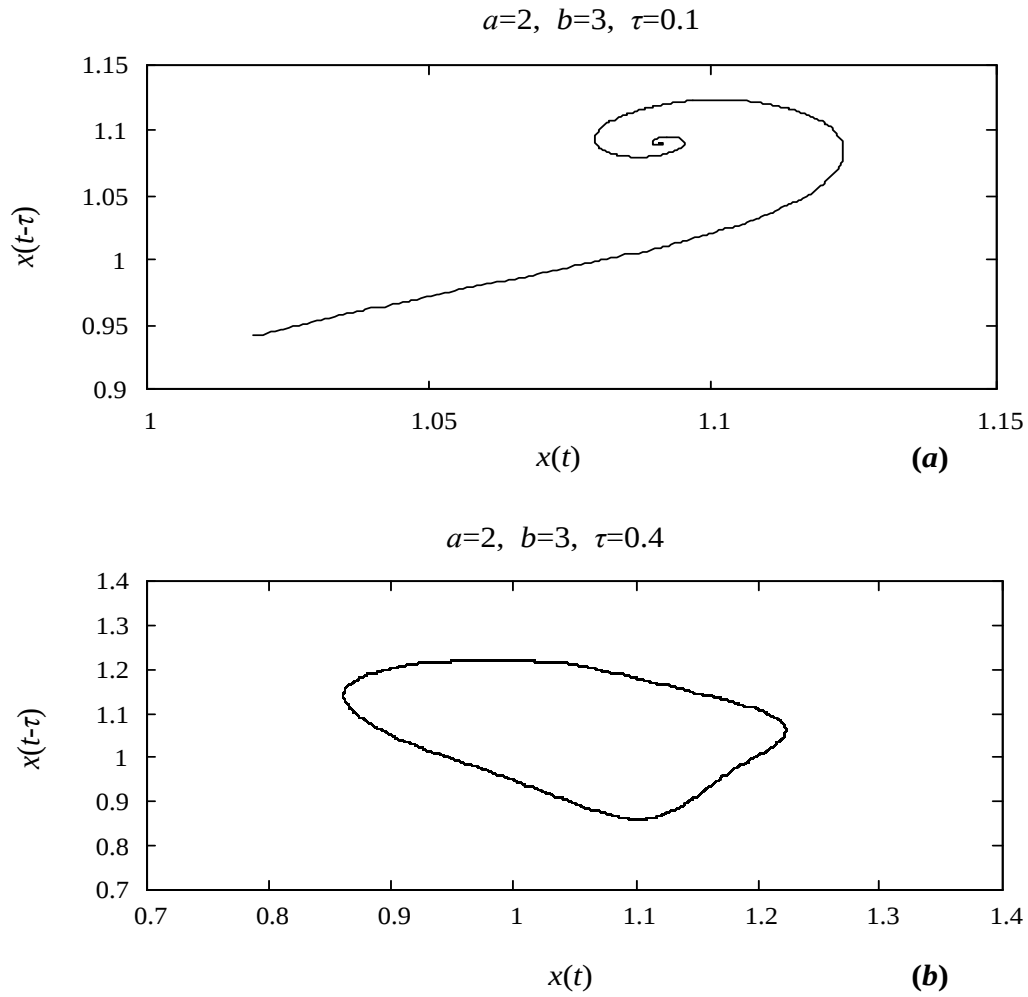


Şekil 7.18. $a = 2$ ve $b = -5$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için $0 \leq \omega < \infty$ aralığında ZGHSA' nın genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov eğrisi: **a)** $\tau = 0.3s$, **b)** $\tau_c = 0.432s$ ve **c)** $\tau = 0.5s$

7.3.2. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde analitik olarak hesaplanan çatallaşma noktasının üstündeki ve altındaki zaman gecikmesi değerleri için (7.52)'de verilen sistemin *Matlab/Simulink* ortamında elde edilen nümerik sonuçları sunulacaktır. Sisteme ait nümerik sonuçlar elde edilirken $a = 2$ ve $b = 3$ için başlangıç şartı $x(0) = 0.01$, $a = 2$ ve $b = -5$ için ise başlangıç şartı $x(0) = 0.9$ olarak alınmıştır.

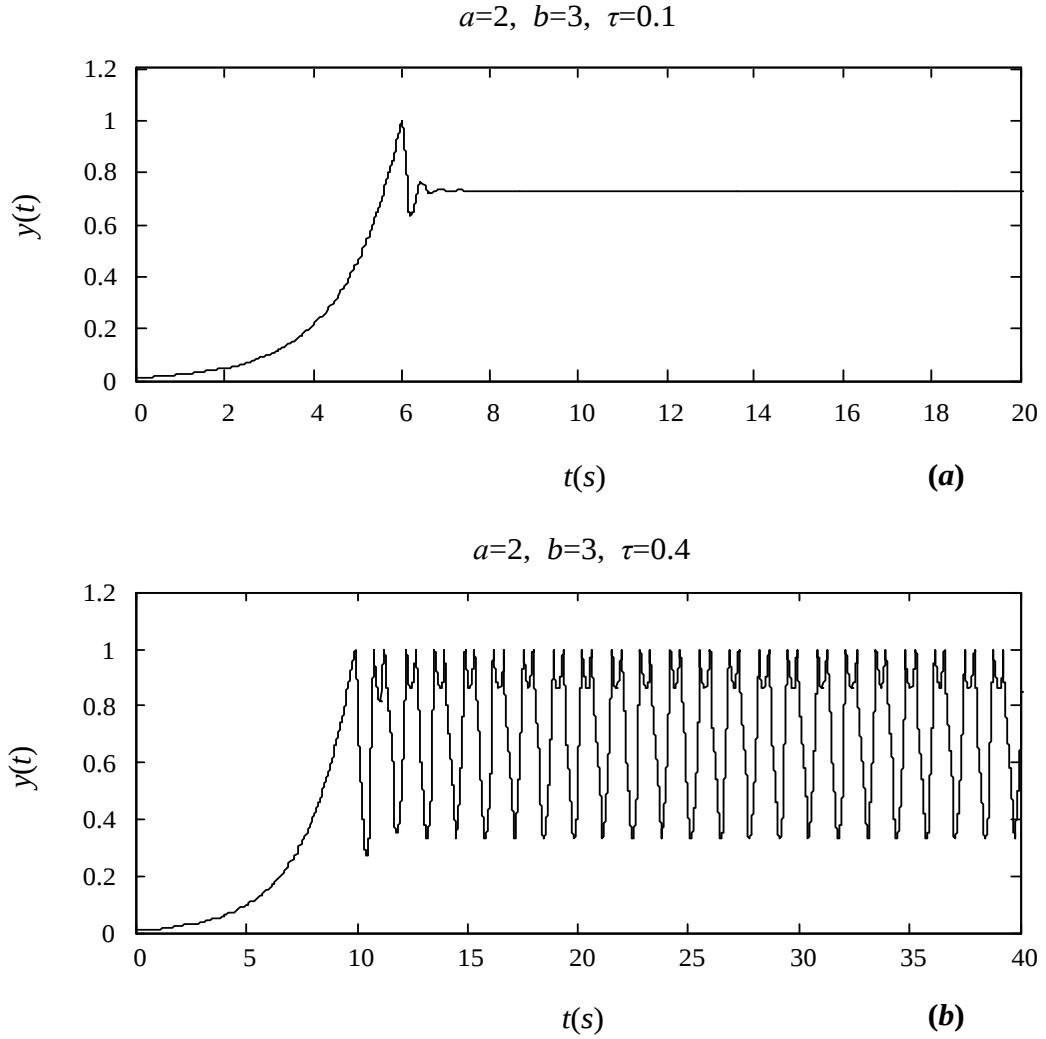
$a = 2$ ve $b = 3$ için çatallaşma noktasının altındaki $\tau_c > \tau = 0.1s$ ve çatallaşma noktasının üstündeki $\tau_c < \tau = 0.4s$ zaman gecikmesi değerlerinde sistemin durum-uzay diyagramları Şekil 7.19'da elde edilmiştir.



Şekil 7.19. $a = 2$ ve $b = 3$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA'nın durum uzay diyagramları: **a)** $\tau = 0.1s$ ve **b)** $\tau = 0.4s$

Şekil 7.19'a bakıldığında, çatallaşma noktası altında sistemin asimptotik kararlı bir davranış sergilediği görülmektedir. Başlangıç şartı olarak $x(0) = 0.01$ seçildiğinden sistem yörüngesi $x_r^+ = 1.09$ 'daki denge noktasına yönelmekte ve bu noktada sonlanmaktadır. Benzer şekilde çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değeri seçildiğinde $x_r^\pm = \pm 1.09$ denge noktaları kararlılığını kaybettiğinden dolayı, başlangıç şartına bağlı olarak $x_r^+ = 1.09$ 'daki noktasını çevreleyen bir limit çevrim davranış gerçekleşmektedir.

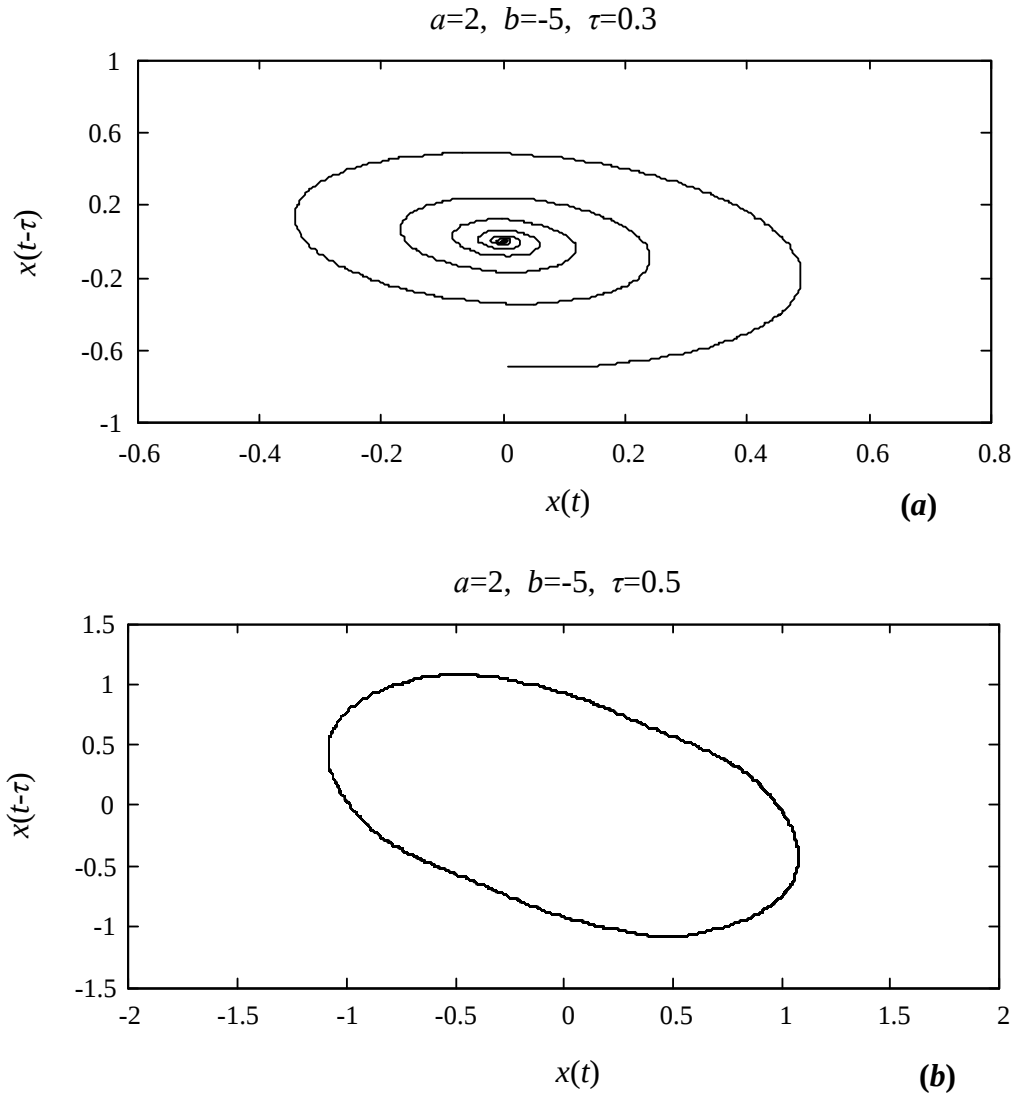
Ayrıca $a = 2$ ve $b = 3$ için çatallaşma noktasının altındaki $\tau_c > \tau = 0.1s$ ve üstündeki $\tau_c < \tau = 0.4s$ değerler için doğrusal olmayan sistemin çıkışının zaman göre değişimi Şekil 7.20'de elde edilmiştir.



Şekil 7.20. $a = 2$ ve $b = 3$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA'nın çıkışının zamana göre değişimi: **a)** $\tau = 0.1s$ ve **b)** $\tau = 0.4s$

Şekil 7.20’de görüldüğü gibi çatallaşma noktasının altındaki bir zaman gecikmesi değeri için sistemin zaman cevabı, sönümlü bir salınım yaparak $[-3x^+ + 4] = 0.73$ değerine yaklaşmakta ve değişmeden devam etmektedir. Ancak, çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değeri için sistemdeki tüm denge noktaları kararsız olmasına rağmen $[-3x^+ + 4] = 0.73$ değerini çevreleyen bir salınım gerçekleştirmektedir.

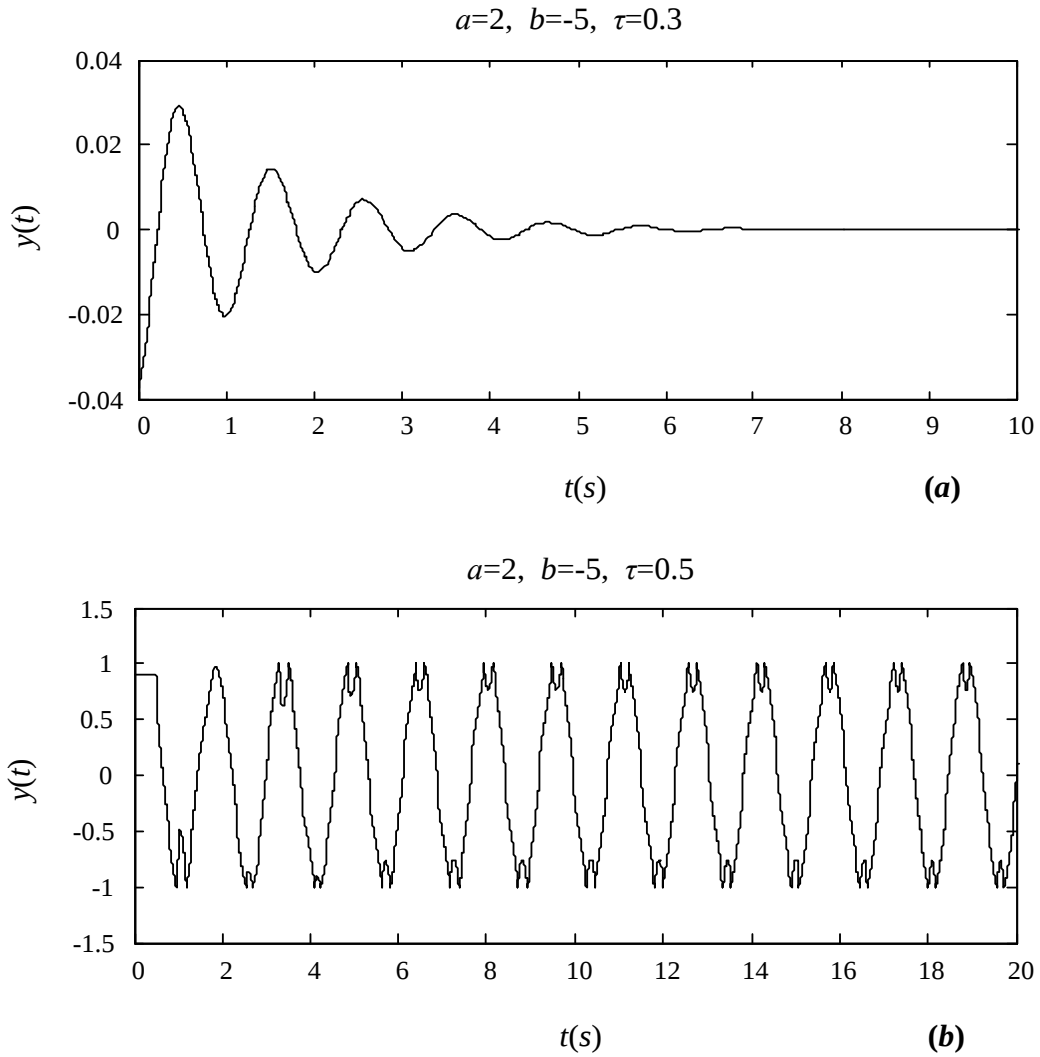
$a = 2$ ve $b = -5$ için çatallaşma noktasının altındaki $\tau_c > \tau = 0.3s$ ve çatallaşma noktasının üstündeki $\tau_c < \tau = 0.5s$ zaman gecikmesi değerlerinde sistemin durum-uzay diyagramları Şekil 7.21’de elde edilmiştir.



Şekil 7.21. $a = 2$ ve $b = -5$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA’ nın durum uzay diyagramları: **a)** $\tau = 0.3s$ ve **b)** $\tau = 0.5s$

Şekil 7.21'e bakıldığında, çatallaşma noktası altında sistemin asimptotik kararlı bir davranış sergilediği görülmektedir. Başlangıç şartı olarak $x(0)=0.9$ seçildiğinden sistem yörüngesi $x_r^0=0$ denge noktasına yönelmekte ve bu noktada sonlanmaktadır. Benzer şekilde çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değeri seçildiğinde $x_r^0=0$ denge noktası kararlılığını kaybettiğinden dolayı, başlangıç şartına bağlı olarak $x_r^0=0$ denge noktasını çevreleyen bir limit çevrim davranış gerçekleşmektedir.

$a=2$ ve $b=-5$ için çatallaşma noktasının altındaki $\tau_c > \tau=0.3s$ ve üstündeki $\tau_c < \tau=0.5s$ değerler için doğrusal olmayan sistemin çıkışının zaman göre değişimi Şekil 7.22'de elde edilmiştir.



Şekil 7.22. $a=2$ ve $b=-5$ iken farklı zaman gecikmesi değerleri için ZGHSA'nın çıkışının zamana göre değişimi: **a)** $\tau=0.3s$ ve **b)** $\tau=0.5s$

Şekil 7.22’de görüldüğü gibi çatallaşma noktasının altındaki bir zaman gecikmesi değeri için sistemin zaman cevabı, sönümlü bir salınım yaparak $[x_\tau^0]=0$ değerini yaklaştırmakta ve değişmeden devam etmektedir. Ancak, çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değeri için sistemdeki tüm denge noktaları kararsız olmasına rağmen $[x_\tau^0]=0$ değerini çevreleyen bir salınım gerçekleştirmektedir.

Bu uygulamada, çatallaşma noktasının sistemde b parametresine bağlı olduğu, zaman gecikmesi τ değeri arttıkça x_τ^0 ve $x_\tau^\pm$ denge noktalarının kararlılıklarını kaybettiği ve çatallaşmanın gerçekleştiği gösterilmiştir. Elde edilen analitik sonuçlar ile sisteme ait nümerik sonuçlar kıyaslandığında çatallaşma noktasının altındaki bir zaman gecikmesi değerinde sistem asimptotik davranış gösteriyorken, çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değerinde limit çevrim davranış gösterdiği farklı iki sistem parametresi için gözlemlenmiştir. Bu sonuçlara göre sistemde oluşan çatallaşmanın “süperkritik hopf çatallaşma” olduğu tespit edilmiştir.

8. SONUÇLAR

Gerçek hayatta gecikmeli sistemler çok fazla karşımıza çıkmaktadır. Zaman gecikmesi önemli bir kavramdır ve sistem davranışına etkisi oldukça fazladır. Herhangi bir sistemde gecikmenin varlığı sistemde kararsızlığa yol açtığından bu tip sistemlerin kararlılık ve performans analizleri teorik ve pratik açıdan önem kazanmıştır. Bu yüzden bu tür sistemler modellenirken zaman gecikmesi göz önünde bulundurulur. Zaman gecikmesi içeren dinamik sistemlerin gerçeğe yakın matematiksel modelleri oluşturulurken fonksiyonel diferansiyel denklemlerden faydalanılır. Ayrıca durum değişkeninde gecikme bulunan zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik denklemleri e^{-sr} terimini içerisinde barındırdığından dolayı kökleri sonsuz sayıda olan bir quasi-polinomdur. Bu polinomu analitik olarak çözmek oldukça zordur. Bu tez kapsamında, zaman gecikmeli sistemlerin (geri tipli zaman gecikmeli sistemlerin) karakteristik denklemleri frekans tabanlı Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile analiz edilmiştir. Kullanılan iki yöntemde de, quasi-polinomlu karakteristik denklemin analizinin kolaylaştığı görülmüştür. Aynı zamanda bu tür sistemlerde mutlaka bir zaman gecikmesi parametresi bulunduğundan parametre değişiminin sistem üzerinde yarattığı etki irdelenmiştir. Sistemlerin zaman gecikmesi parametresine bağlı olarak asimptotik kararlılık ve limit çevrim davranış gösterdiği gözlemlenilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle, doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin kararlılıkları, limit çevrim, çatallaşma ve türleri gibi konu başlıkları üzerinde durulmuştur. Fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir alt sınıfı olan gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler ve türleri incelenmiştir. Döngü içinde bulunan gecikmenin farklı konumlarına bağlı olarak zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik denklemleri çıkarılmıştır ve önemine vurgu yapılmıştır. Matematik modelleri gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler kullanılarak oluşturulan bazı zaman gecikmeli sistemlere örnek verilmiştir. Zaman gecikmeli sistemler için frekans bölgesinde bir yaklaşım olan Lambert W fonksiyonu tanıtılıp, birinci dereceden, homojen, doğrusal gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü Lambert W fonksiyonu ile gerçekleştirilmiştir. Gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerle ifade edilen bazı örnek zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik denklemlerinin kökleri Lambert W fonksiyonu aracılığıyla elde edilip, kararlılık analizleri incelenmiştir. Doğrusal

sistemlerin kararlılığı için gerekli ve yeterli şartı sağlayacak olan Mikhailov'un kararlılık kriterlerinden bahsedilmiş ve geri tipli zaman gecikmeli sistemler için de uygulama olasılığı bulunan genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri üzerinde durulmuştur. Ele alınan bu konular ışığında tezin uygulama kısmında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- Zaman gecikmeli doğrusal olmayan kaotik bir sistemin kararlılık ve çatallaşma analizi zaman gecikmesi değerine göre yapılmıştır. Çatallaşmanın varlığı ve çatallaşma noktası, denge noktalarına göre doğrusallaştırılmış sistemin analitik çözümünden faydalanılarak hesaplanmıştır. Sistemin x_r^0 ve $x_r^\pm$ olmak üzere üç tane denge noktası vardır. x_r^0 denge noktası için çatallaşma noktası negatif olduğundan bu noktada bir çatallaşma söz konusu değildir. Fakat $x_r^\pm$ denge noktaları için ilk çatallaşma olayının gerçekleştiği kritik zaman gecikmesi değeri ve frekansı hesaplanmıştır. Çatallaşma noktasının sadece δ parametresine bağlı olduğu ve zaman gecikmesi τ değeri arttıkça $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılıklarını kaybettiği ve çatallaşmanın gerçekleştiği gösterilmiştir. Sistemin iki farklı sistem parametresi değerleri için $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılıkları ve çatallaşmanın yönü farklı zaman gecikmesi değerlerine göre Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar ile nümerik sonuçlar kıyaslandığında çatallaşma noktasının altındaki bir zaman gecikmesi değerinde sistem asimptotik davranış gösteriyorken, çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değerinde limit çevrim davranış gösterdiği farklı iki sistem parametresi için gözlemlenmiştir. Bu sonuçlara göre sistemde gerçekleşen çatallaşmanın “süperkritik hopf çatallaşma” olduğu tespit edilmiştir.

- Zaman gecikmeli doğrusal olmayan özdeş iki kaotik sistemin (biri Master Verici - diğeri Slave Alıcı olmak üzere) farklı başlangıç şartları için kaos senkronizasyonu gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, Master ve Slave sistemlerinin çıkışındaki hatayı sıfıra götürebilmek için Slave sisteme uygun bir kontrol işareti uygulanmasını sağlayacak bir oransal kontrolör, aktif kontrol yöntemi kullanılarak tasarlanmıştır. Kontrolörün kazanç değerleri Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri kullanılarak test edilmiştir. Sistemin zaman domeni simülasyonlarında Master ve Slave sisteminin sadece başlangıç şartları farklı alınmıştır. Senkronizasyonu sağlayacak kontrolör ise belirli bir zamanda devreye alınmıştır. Kontrolör devreye girdikten sonra senkronizasyonun gerçekleştiği görülmüştür. Osilasyonsuz bir hata dinamiğinin oluşması

için uygun kontrolör kazancı tespit edilmiştir. Elde edilen sonuçlar sisteme ait simülasyon sonuçlarıyla karşılaştırıldığında beklendiği biçimde senkronizasyonun gerçekleştiği görülmüştür.

- Tek hücreli zaman gecikmeli doğrusal olmayan hücresel sinir ağının farklı sistem parametrelerine göre kararlılık ve çatallaşma analizi gerçekleştirilmiştir. Sistemde x_r^0 ve $x_r^\pm$ olmak üzere üç denge noktası mevcuttur. Sistemin denge noktalarının doğrusallaştırılmış modelinden faydalanarak her üç denge noktası için çatallaşmanın varlığı ve çatallaşma noktası analitik olarak hesaplanmıştır. Çatallaşma noktasının sistem parametrelerine bağlı olduğu ve zaman gecikmesi τ değeri arttıkça x_r^0 ve $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılıklarını kaybettiği ve çatallaşmanın gerçekleştiği gösterilmiştir. Sistemin iki farklı sistem parametresi değerleri için x_r^0 ve $x_r^\pm$ denge noktalarının kararlılıkları ve çatallaşmanın yönü farklı zaman gecikmesi değerlerine göre Lambert W fonksiyonu ve genelleştirilen değiştirilmiş Mikhailov kararlılık kriteri ile belirlenmiştir. Elde edilen analitik sonuçlar ile nümerik sonuçlar kıyaslandığında çatallaşma noktasının altındaki bir zaman gecikmesi değerinde sistem asimptotik davranış gösteriyorken, çatallaşma noktasının üstündeki bir zaman gecikmesi değerinde limit çevrim davranış gösterdiği farklı iki sistem parametresi için gözlemlenmiştir. Bu sonuçlara göre sistemde gerçekleşen çatallaşmanın “süperkritik hopf çatallaşma” olduğu tespit edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Slotine, J. J. E. ve Li, W.**, 1991. Applied Nonlinear Control, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 199, New Jersey.
- [2] **Williams, R. L. ve Lawrence, D. A.**, 2007. Linear State-Space Control Systems, John Wiley & Sons, Canada.
- [3] **Khalil, H. K.**, 1996. Nonlinear Systems, Second Edition, New Jersey: Prentice Hall, USA.
- [4] **Bakshi, U. A. ve Bakshi, M. V.**, 2008. Modern Control Theory, Technical Publications.
- [5] **Sastry, S.**, 1999. Nonlinear Systems Analysis, Stability and Control, Springer- Verlag, 10, New York.
- [6] **Hirsch, M. W., Smale, S. ve Devaney, R. L.**, 2004. Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos, Pure and Applied Mathematics, USA.
- [7] **Wiggins, S.**, 2003. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer Science & Business Media.
- [8] **Strogatz, S. H.**, 1994. Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering, Addison-Wesley Publishing Company.
- [9] **Mahmoud, M. S.**, 2000. Robust Control and Filtering for Time-delay Systems, Marcel Dekker, New York.
- [10] **Kepin, G., Kharitonov, V. L. ve Chen, J.**, 2003. Stability of Time-Delay Systems, Springer Science & Business Media.
- [11] **Zhong, Q. C.**, 2006. Robust Control of Time-Delay Systems, Springer Science & Business Media, Germany.
- [12] **Schoen. G. M.**, 1995. Stability and Stabilization of Time-Delay Systems, PhD Dissertation, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Zurich.
- [13] **Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J. ve Knuth, D.E.**, 1996. On the Lambert W function, Advances in Computational Mathematics, 5, 329-359.
- [14] **Yi, S., Nelson, P. W. ve Ulsoy A. G.**, 2010. Time Delay Systems: Analysis and Control Using the Lambert W Function, World Scientific, Singapore.

- [15] **Asl, F. M. ve Ulsoy, A. G.**, 2003. Analysis of a Systems of Linear Delay Differential Equations, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, **125**, 215-223.
- [16] http://tr.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_fonksiyonu, 22.01.2015
- [17] **Mikhailov, A. V.**, 1938. The Methods of Harmonic Analysis in the Theory of Control, Avtomat. i Telemekh., **3**, 27-81.
- [18] **Popov E. P.**, 1962. The Dynamics of Automatic Control Systems, Pergamon Press, New York.
- [19] **Buslowicz M.**, 2008. Stability of Linear Continuous-Time Fractional Order Systems With Delays of the aRetarded Type, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences, **56**, 319-324.
- [20] **Çavuşoğlu, Ü., Uyaroğlu, Y. ve Pehlivan, İ.**, 2014. Sürekli Zamanlı Otonom Kaotik Devre Tasarımı ve Sinyal Gizleme Uygulaması, Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, **29**, 79-87.
- [21] **Riaz, A. ve Ali, M.**, 2008. Chaotic Communications, their Applications and Advantages over Traditional Methods of Commutation, In Communication Systems, Networks and Digital Signal Processing, 6th International Symposium on. IEEE, July, 21-24.
- [22] **Pecora, L. M. ve Carrol, T. L.**, 1990. Synchronization in Chaotic Systems, Physical Review Letters, **64**, 821.
- [23] **Wei, J. ve Li, M. Y.**, 2005. Hopf Bifurcation Analysis in a Delayed Nicholson Blowflies Equation, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **60**, 1351-1367.
- [24] **Wei, J.**, 2007. Bifurcation Analysis in a Scaler Delay Differential Equation, Nonlinearity, **20**, 2483-2498.
- [25] **Yan, X. P. ve Li, W. T.**, 2006. Hopf Bifurcation and Global Periodic Solutions in a Delayed Predator-Prey System, Applied Mathematics and Computation, **177**, 427-445.
- [26] **He, X. , Liao, M. ve Xu, C.**, 2011. Stability and Hopf Bifurcation Analysis for a Lotka- Volterra Predator-Prey Models with Two Delays, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, **21**, 97- 107.
- [27] **Hu, J., Cao, J. ve Hayat, T.**, 2014. Stability and Hopf Bifurcation Analysis for an Energy Resource System, Nonlinear Dynamics, **78**, 219-234.
- [28] **Driver, R.D.**, 1977. Ordinary and Delay Differential Equations, Applied Mathematic Sciences, **20**.

- [29] **Kuang, Y.**, 1993. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Academic Press, Boston.
- [30] **Mackey, M. C. ve Glass, L.**, 1977. Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems, Science, **197**, 287-289.
- [31] **Uçar, A.**, 2002. A Prototype Model for Chaos Studies, International Journal of Engineering Science, **40**, 251-258.
- [32] **Uçar, A.**, 2003. On the Chaotic Behavior of a Prototype Delayed Dynamical System, Chaos, Solitons and Fractals, **16**, 187-194.
- [33] **Lu, H. ve He, Z.**, 1996. Chaotic Behavior in First-Order Autonomous Continuous - Time System with Delay, IEEE Trans. CAS-I, **43**, 700-702.
- [34] **Lu, H., He Y. ve He, Z.**, 1998. A Chaos Generator: Analysis of Complex Dynamics of a Cell Equation in Delayed Cellular Neural Networks, IEEE Trans. on Circuits and Systems, **45**, February, 178-181.
- [35] **Kolmanovskii, V. B., Niclescu, S. I. ve Richard, J. P.**, 1998. Some Remarks on the Stability of Linear Systems with Delayed State, Decision and Control, Proceedings of the 37th IEEE Conference, **1**, 229-304.
- [36] **Wu, S. ve Ren, G.**, 2004. Delay-Independent Stability Criteria for a Class of Retarded Dynamical Systems with Two Delays, Journal of Sound and Vibration, **270**, 625-638.
- [37] **Han, Q. L.**, 2001. On Delay Dependent Stability for Neutral Delay-Differential Systems, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci, **11**, 965-976.
- [38] **Park, G. S., Choi, H. L. ve Lim, J. T.**, 2008. On Stability of Linear Time-Delay Systems with Multiple Delays, International Journal of Systems Science, **39**, 839-852.
- [39] **Jankovic, M. ve Member, S.**, 2001. Control Lyapunov-Razumikhin Functions and Robust Stabilization of Time Delay Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **46**, 1048-1060.
- [40] **Asl, F. M. ve Ulsoy, A. G.**, 2000. Analytical Solution of a Systems of Homogeneous Delay Differential Equations via the Lambert Function, Proceedings of the American Control Conference, Chicago, **4**, 2496-2500.
- [41] **Yi, S. ve Ulsoy, A. G.**, 2006. Solution of a System of Linear Delay Differential Equations Using the Matrix Lambert Function, In Proceedings of the American Control Conference, USA, June, 14-16, 2433-2438.
- [42] **Yi, S., Nelson, P. W., ve Ulsoy, A. G.**, 2007. Delay Differential Equations via the Matrix Lambert W function and Bifurcation Analysis: Application to Machine Tool Chatter, Mathematical Biosciences and Engineering, **4**, 355-368.

- [43] **Yi, S., Nelson, P. W. ve Ulsoy, A. G.,** 2008. Controllability and Observability of Systems of Linear Delay Differential Equations via the Matrix Lambert W Function, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**, 854-860.
- [44] **Gomez, R. C. ve Michiels, W.,** 2014. Some Special Cases in the Stability Analysis of Multi-Dimensional Time-Delay Systems Using the Matrix Lambert W Function, *Automatica*, **53**, 339-345.
- [45] **Chen, Y., ve Moore, K. L.,** 2002. Analytical Stability Bound for Delayed Second-Order Systems with Repeating Poles Using Lambert function W , *Automatica*, **38**, 891-895.
- [46] **Shinozaki, H. ve Mori, T.,** 2006. Robust Stability Analysis of Linear Time-Delay Systems by Lmabert W Function: Some Extreme Point Results, *Automatica*, **42**, 1791-1799.
- [47] **Wang, Z. H. ve Hu, H. Y.,** 2008. Calculation of the Rightmost Characteristic Root of Retarded Time-Delay Systems via Lmabert W Function, *Journal of Sound and Vibration*, **318**, 757-767.
- [48] **Yi, S., Yu, S. ve Kim, J. H.,** 2011. Analysis of Neural Networks with Time-Delays Using the Lambert W function, *American Control Conference (ACC)*, IEEE, June 29- July 01, 3221-3226.
- [49] **Jadlovská, I.,** 2014. Application of Lambert W Function in Oscillaton Theory, *Acta Electrotechnica et Informatica*, **14**, 9-17.
- [50] **Chen, Y. ve Moore, K. L.,** 2002. Analytical Stability Bound for a Class of Delayed Fractional-Order Dynamic Systems, *Nonlinear Dynamics*, **29**, 191-200.
- [51] **Hwang, C. ve Cheng, Y. C.,** 2005. A Note on the Use of the Lambert W Function in the Stability Analysis of Time-Delay systems, *Automatica*, **41**, 1979-1985.
- [52] **Barker L. K.,** 1979. Mikhailov Stability Criterion for Time-Delayed Systems, Nasa.
- [53] **Busłowicz M.,** 2009. Stability Analysis of Linear Continuous-Time Fractional Systems of Commensurate Order, *Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems*, **3**, 12-17.
- [54] **Foryś U.,** 2004. Biological Delay Systems and the Mikhailov Criterion of Stability, *Journal of Biological Systems*, **12**, 45-60.
- [55] **Sourdille P., O'Dwyer, A. ve Coyle, E.,** 2005. Smith Predictor Structure Stability Analysis Using Mikhailov Stability Criterion, *Proceedings of the 4th Wismarer Automatisierungs Symposium*, Wismar, 22-23 September.
- [56] **Pekaş L. ve Prokop, R.,** 2010. Argument Principle Based Stability Conditions of a Retarded Quasipolynomial with Two Delays, *Last Trends on Systems*, 14th WSEAS International Conference on Systems, Corfu Island, Greece, **1**, 276-281.

- [57] **Pekaş L. ve Prokop, R.**, 2010. Stabilization of a Delayed System by a Proportional Controller, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **4**, 282-290.
- [58] **Bai, E. W. ve Lonngren K. E.**, 1997. Synchronization of Two Lorenz Systems Using Active Control, *Chaos, Solution & Fractals*, **8**, 51-58.
- [59] **Liao, T. L. ve Lin, S. H.**, 1999. Adaptive Control and Synchronization of Lorenz Systems, *Journal of the Franklin Institute*, **336**, 925-937.
- [60] **Uçar, A., Lonngren, K.E. ve Bai, E.W.**, 2003. Synchronization of Chaotic Behavior in Nonlinear Bloch Equation, *Physics Letters A*, **314**, 96-101.
- [61] **Huang, L., Feng, R. ve Wang, M.**, 2004. Synchronization of Chaotic Systems via Nonlinear Control, *Physics Letters A*, **320**, 271-275.
- [62] **Park, J.H.**, 2005. Chaos Synchronization of a Chaotic System via Nonlinear Control. *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, 579-584.
- [63] **Wang, F. ve Liu, C.**, 2007. Synchronization of Unified Chaotic System Based on Passive Control, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **225**, 55–60.
- [64] **Giles, J. R.**, 20009. **Introduction to the Analysis of Normed Linear Spaces**, Cambridge University Press, No: 13.
- [65] **Lakshmanan, M. ve Senthilkumar, D. V.**, 2011. *Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems*, Springer-Verlag.
- [66] **Ruan, S.**, 2006. *Delay Differential Equations in Single Species Dynamics*, *Delay Differential Equations and Applications*, Springer, Berlin, 477–517.
- [67] **Su, H. ve Ding, X.**, 2008. Dynamics of a Nonstandard Finite-Difference Scheme for Mackey–Glass System, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **344**, 932-941.
- [68] **Junges, L. ve Gallas, J. A. C.**, 2012. Intricate Routes to Chaos in the Mackey–Glass Delayed Feedback System, *Physics Letters A*, **376**, 2109-2116.
- [69] [http://www.scholarpedia.org/article/Mackey-Glass equation](http://www.scholarpedia.org/article/Mackey-Glass_equation), 23 Ekim 2014.
- [70] [http://en.wikipedia.org/wiki/Delay_differential equation](http://en.wikipedia.org/wiki/Delay_differential_equation), 20 Ekim 2014.
- [71] **Bellman R. ve Cooke K. L.**, 1963. *Differential-Difference Equations*, United States of America.
- [72] **Silva G. J., Datta A. ve Bhattacharyya S. P.**, 2005. *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Boston.

- [73] **Çetintaş, G. ve Çelik, V.**, 2014. Zaman Gecikmeli Doğrusal Olmayan Sistemin Çatallaşma Analizi, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı, 11-13 Eylül, Kocaeli, 786-790.
- [74] **Çetintaş, G. ve Çelik, V.**, 2014. Zaman Gecikmeli Kaotik Bir Sistemin Aktif Kontrol İle Senkronizasyonu, URSI-TÜRKİYE VII. Bilimsel Kongresi, 28-30 Ağustos, Elazığ, 223-226.

ÖZGEÇMİŞ

Gülten ÇETİNTAŞ, 22.05.1990 yılında Elazığ'ın Alacakaya ilçesinde doğdu. Ortaokulu Elazığ Vali M. Lütfullah Bilgin İlköğretim Okulunda ve lise eğitimini Elazığ Hıdır Sever Lisesinde tamamladı. 2008 yılında girdiği Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden 2012 yılında mezun oldu. 2013'ün bahar döneminde Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Ana Bilim dalı, Devreler ve Sistemler Bilim dalında yüksek lisans yapma hakkı kazandı. 2014 yılının şubat ayında Muş Alparslan Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.