

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KOMPLEKS GEOMETRİDE KONFORM SUBMERSİYONLAR

Mehmet Akif AKYOL

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

TEMMUZ 2015

Tezin Başlığı : Kompleks Geometride Konform Submersiyonlar

Tezi Hazırlayan : Mehmet Akif AKYOL

Sınav Tarihi : 23.07.2015

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bayram ŞAHİN
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
Uludağ Üniversitesi

Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN
İstanbul Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Cumali YILDIRIM
İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Müge KARADAĞ
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Alaaddin ESEN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Kompleks Geometride Konform Submersiyonlar" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mehmet Akif AKYOL

ÖZET

Doktora Tezi

Kompleks Geometride Konform Submersiyonlar

Mehmet Akif AKYOL

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

121+v sayfa

2015

Danışman: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi ve bu tezde ele alınan problemlerin tanıtımı yapılmaktadır. İkinci bölümde diğer bölümlere faydalı olacak temel tanım ve kavramlar ele alınmaktadır.

Üçüncü bölümde, konform anti-invaryant submersiyonlar çalışılmaktadır. Hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform anti-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Bu submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralellliği elde edilip, submersiyonun harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmektedir. Daha sonra bu tür submersiyonların belirlediği ayrışım teoremleri elde edilmektedir. Ayrıca, bir konform anti-invaryant submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin kesit eğrilikleri arasındaki ilişki araştırılmaktadır.

Dördüncü bölümde, konform yarı-invaryant submersiyonlar çalışılmaktadır. Hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform yarı-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Bu submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralellliği incelenmektedir. Ayrıca, bu tür submersiyonların harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmektedir.

Beşinci bölümde, konform slant submersiyonlar çalışılmaktadır. Hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform slant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Ayrıca bu tür submersiyonların harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları ile distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralellliği incelenmektedir.

ANAHTAR KELİMELELER: Hemen hemen Hermityen manifoldlar, konform submersiyon, konform anti-invaryant submersiyon, konform yarı-invaryant submersiyon, konform slant submersiyon.

ABSTRACT

Doctorate Thesis

Conformal Submersions on Complex Geometry

Mehmet Akif AKYOL

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

121+v pages

2015

Supervisors: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter the motivation of the problems and their background are presented. In the second chapter, basic definitions and theorems are presented and general facts have been given.

In the third chapter, we first define the concept of conformal anti-invariant submersion from almost Hermitian manifolds onto Riemannian manifolds, then we provide examples. After we find integrability conditions for distributions and investigate the geometry of their leaves, we obtain necessary and sufficient conditions for conformal anti-invariant submersions to be totally geodesic. We also check the harmonicity of such submersions and show that the total space has certain product structures. Finally, we obtain curvature relations between the base manifold and the total manifold.

In the fourth chapter, we define the concept of conformal semi-invariant submersion from almost Hermitian manifolds onto Riemannian manifolds, then we provide examples. We investigate the integrability and the geometry foliations of the distributions and check the harmonicity of such submersions and find certain conditions for a conformal semi-invariant submersion to be totally geodesic.

In the fifth chapter, we introduce conformal slant submersion from almost Hermitian manifolds onto Riemannian manifolds, then we give examples. Finally, we check the harmonicity of such submersions and find necessary and sufficient conditions for a conformal slant submersion to be totally geodesic.

KEYWORDS: Almost Hermitian manifold, conformal submersion, conformal anti-invariant submersion, conformal semi-invariant submersion, conformal slant submersion.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında yardım, öneri ve desteklerini esirgemedi beni yönlendiren danışman hocam sayın Prof. Dr. Bayram ŞAHİN'e müteşekkirim. Ayrıca doktora eğitimim boyunca beni yönlendiren Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e ve her zaman desteklerini gördüğüm Geometri Ana-bilim Dalı öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemen aileme, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan sevgili eşim Emine AKYOL'a ve canım kızım Zeynep Rana AKYOL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Akif AKYOL

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Riemann Manifoldları	4
2.2 Riemann Manifoldlarının Altmanifoldları	12
2.3 Vektör Demetleri ve Manifold Üzerinde Distribüsyon	14
2.4 Riemann Submersiyonları	17
2.5 Kompleks Manifoldlar	25
2.6 Konform Submersiyonlar	28
3 KONFORM ANTİ-İNVARYANT SUBMERSİYONLAR	33
3.1 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar	33
3.2 Harmonik ve Tamamen Jeodezik Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar	47
3.3 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar ve Ayrışım Teoremleri	53
3.4 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar İçin Eğrilik İlişkileri	58
4 KONFORM YARI-İNVARYANT SUBMERSİYONLAR	68
4.1 Konform Yarı-İnvaryant Submersiyonlar	68
4.2 Harmonik ve Tamamen Jeodezik Konform Yarı-İnvaryant Submersiyonlar	84
5 KONFORM SLANT SUBMERSİYONLAR	91
5.1 Konform Slant Submersiyonlar	91
KAYNAKLAR	116
ÖZGEÇMİŞ	121

SİMGELER VE KISALTMALAR

M	Manifold
g	Metrik Tensör
$T_p M$	Tanjant Uzay
TM	Tanjant Demet
$\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$	M manifoldunun Vektör Alanlarının Uzaı
F_*	Türev Dönüşümü
F^*	Adjoint Dönüşümü
$\mathcal{D}$	Distribüsyon
∇	Lineer Konneksiyon
∇F_*	Dönüşümün İkinci Temel Formu
∇^F	F -Dönüşümü Boyunca Geri Çekme Konneksiyonu
$\tau(F)$	Tensiyon Alanı
R	Riemann Christoffel Eğrilik Tensörü
K	Kesit Eğriliğı
$[,]$	Lie Braket (Parantez) Operatörü
Ω	Temel 2-form
$ $	Norm
A	Yatay Tensör Alanı
T	Dikey Tensör Alanı
J	Hemen Hemen Kompleks Yapı
λ	Konform Faktörü
$\text{çek}F_*$	Dikey Distribüsyon
$(\text{çek}F_*)^\perp$	Yatay Distribüsyon
H	Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

1. GİRİŞ

Manifoldlar arasındaki dönüşümler göz önüne alındığında, en temel dönüşümler izometrik immersiyon dönüşümüdür. İzometrik immersiyonlar Gauss'un yüzeyler üzerine olan çalışmaları ile başlar. Üç boyutlu Öklidyen uzaydaki her yüzey aynı zamanda ek boyutu 1 olan bir izometrik immersiyondur. Ek boyutun 1 den büyük olması durumu altmanifold olarak adlandırılır ve bu durumda klasik yüzeyler teorisinin yöntemleri yeterli olmaz. Altmanifoldlar üzerine çalışmalar 1950 ve 1960'lı yıllarda yoğunluk kazanır ve bu konu üzerine olan çalışmalar 1973 yılında Chen [10] tarafından bir kitapta bir araya getirilir. Bu aşamadan sonra altmanifoldlar teorisi büyük ivme kazanarak çalışılmaya başlanır. Bu teori kompleks manifoldlara, kontakt manifoldlara ve kuaterniyon Kaehler manifoldlara taşınır.

Bir kompleks manifoldun altmanifoldu, altmanifoldun bir noktasındaki tanjant uzayının manifoldun kompleks yapısı altındaki davranışına bağlı olarak tanımlanır. Eğer tanjant uzay invaryant ise holomorfik altmanifold, anti-invaryant ise tamamen reel altmanifold olarak tanımlanır. 1978 yılında Bejancu [3], bu iki altmanifold türünü içeren CR-altmanifoldları tanımlayarak özelliklerini inceledi. CR-altmanifoldun aynı zamanda CR-manifold olduğu Chen ve Blair [5] tarafından gösterildi. CR-altmanifoldlara en tipik örnek kompleks manifoldların reel hiperyüzeyleridir. Holomorfik ve tamamen reel altmanifoldların diğer bir genellemesi Chen [12] tarafından slant altmanifoldlar olarak sunuldu. Bu altmanifoldlar günümüzde de yoğun olarak çalışılmaktadır.

İzometrik immersiyonların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonlar O'Neill [40] ve Gray [22] tarafından bağımsız olarak tanımlandı ve çalışıldı. Bu tür dönüşümler esas olarak negatif eğrilikli manifoldların inşası için tanımlandı, fakat görüldü ki bu tür dönüşümler manifoldları karşılaştırmada çok kullanışlı dönüşümlerdir. İki hemen hemen Hermityen manifold verildiğinde, bunlar arasındaki dönüşüm hemen hemen kompleks dönüşüm ise Riemann submersiyonuna holomorfik submersiyon veya hemen hemen Hermityen submersiyon adı verilir. Hemen hemen Hermityen submersiyonlar ilk defa Watson [59] tarafından çalışıldı ve bu tür dönüşümler kullanılarak kaynak manifoldu belirli bir hemen hemen kompleks manifold sınıfında bulunuyorsa hedef mani-

foldunda aynı yapıya sahip olduğu çoğu durumda elde edildi. Holomorfik submersiyonların en temel özelliği, bu tür dönüşümlerin yatay ve dikey distribüsyonlarının kaynak manifoldun kompleks yapısı altında invaryant kalmalarıdır. Holomorfik submersiyonların hemen hemen kontakt manifoldlarda [15], kuaterniyon Kaehler manifoldlarda [33] ve diğer uzaylardaki karşılıkları çalışıldı.

2010 yılında Şahin [51] dikey distribüsyonu hemen hemen kompleks yapı altında anti-invaryant olan submersiyonları tanımladı ve temel özelliklerini inceledi. Gösterdi ki bu tür dönüşümler kaynak manifoldun özelliklerini incelemede oldukça kullanışlı olmaktadır. Bu fikir daha sonra geliştirilerek yarı-invaryant [55] ve eğik submersiyonlar [52] tanımlanarak, geometrik yapıları incelendi. Şahin'in bu çalışmalarından sonra bu tür submersiyonların geometrisi diğer uzaylarda çeşitli yazarlar tarafından da çalışıldı [1, 16, 27, 38, 43].

Riemann submersiyonların genelleştirilmiş olan konform Riemann submersiyonları Gundmundsson [23], tarafından doktora tezinde yoğun olarak çalışıldı ve harmonik morfizm olma durumları elde edildi. Ayrıca holomorfik submersiyonların genelleştirilmiş olan konform holomorfik dönüşümler Gundmundsson ve Wood tarafından incelendi ve özellikleri çeşitli yapıların transformasyonu incelenerek, harmonik morfizm olma şartları elde edildi. Bu durum Burel [8] tarafından kontakt manifoldlara uygulandı. Bu konudaki çalışmalar devam etmektedir [50].

Bu tezde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform submersiyonlar çalışılmaktadır. İkinci bölümde, tezin sonraki kısımlarında kullanılacak temel tanım ve teoremler sunuldu. Bunlar; Riemann manifoldlar, Riemann manifoldlarının altmanifoldları, Vektör demetleri ve distribüsyonlar, Riemann submersiyonlar, kompleks manifoldlar, kompleks manifold üzerinde tanımlı submersiyonlar ve konform submersiyonlar olarak sıralanabilir.

Tezin orijinal bölümleri üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerdir. Üçüncü bölümde konform anti-invaryant submersiyonlar çalışılmaktadır. Üçüncü bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform anti-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler veril-

mektedir. Ayrıca bu submersiyon için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği incelenmektedir. İkinci alt bölümde bu submersiyonun harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmektedir. Üçüncü alt bölümde bu submersiyon üzerindeki ayrışım teoremleri elde edilmektedir. Son olarak, dördüncü alt bölümde bir konform anti-invaryant submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin kesit eğrilikleri araştırılmaktadır.

Dördüncü bölümde, konform yarı-invaryant submersiyonlar çalışılmaktadır. Bu bölüm iki alt bölüme oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform yarı-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Ayrıca bu submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği incelenmektedir. İkinci alt bölümde ise bu submersiyonun harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmektedir.

Beşinci bölümde, konform slant submersiyonlar çalışılmaktadır. Bu bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform slant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Ayrıca bu submersiyonun harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları ile distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği araştırılmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm altı alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde Riemann manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmektedir. İkinci alt bölümde Riemann manifoldlarının altmanifoldları için indirgenen kavramlar tanıtılmaktadır. Üçüncü alt bölümde vektör demetleri ve onların özel durumları olan distribüsyonlar incelenmektedir. Dördüncü alt bölümde Riemann submersiyonları ve onların incelenmesinde önemli araçlar olan O'Neill tensörleri sunulmaktadır. Beşinci alt bölümde kompleks manifoldlar ve kompleks manifoldlar üzerinde tanımlanan çeşitli submersiyon türleri verilmektedir. Son alt bölümde ise Riemann submersiyonlarının genelleştirilmiş olan konform submersiyonlar tanıtılmakta ve temel özellikleri sunulmaktadır.

2.1 Riemann Manifoldları

Bu alt bölümde Riemann manifoldları ile ilgili temel kavramlar sunulmaktadır.

Tanım 2.1.1. M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $a, b \in R$ ve

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

olmak üzere

- 1) $g(X, Y) = g(Y, X)$, (simetriklik)
- 2) $g(X, X) \geq 0$, $\forall X$ için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, (pozitif tanımlılık)
- 3) ikilineer;

$$g(aX + bY, Z) = ag(X, Z) + bg(Y, Z)$$

$$g(X, aY + bZ) = ag(X, Y) + bg(X, Z)$$

şartları sağlanıyorsa, g dönüşümüne **Riemann metriği** (veya metrik tensör) ve (M, g) ikilisine de **Riemann manifoldu** adı verilir [24].

Tanım 2.1.2. Metrik tensörü g olan bir Riemann manifoldu M olsun. Bir $X_p \in T_p M$

tanjant vektörünün **uzunluğu**

$$\|X_p\| = \sqrt{g(X, X)_p} \quad (2.1.1)$$

reel sayısı ile tanımlanır [24].

Tanım 2.1.3. Metrik tensörü g olan bir Riemann manifoldu M olsun. Sıfırdan farklı iki $X_p, Y_p \in T_p M$ tanjant vektörleri arasındaki θ açısı

$$g(X_p, Y_p) = \|X_p\| \|Y_p\| \cos \theta \quad (2.1.2)$$

ile tanımlanır. Burada θ ölçüsünün $[0, \pi]$ kapalı aralığında kalacağını Cauchy-Schwarz eşitsizliği denen

$$|g(X_p, Y_p)| \leq \|X_p\| \|Y_p\|$$

den biliyoruz [31].

Tanım 2.1.4. M ve B manifoldları arasında bir

$$\pi : M \rightarrow B$$

C^∞ dönüşümünün türev dönüşümü

$$d\pi : \chi(M) \rightarrow \chi(B)$$

biçiminde gösterilir. Bu dönüşüm her $x \in M$ noktasında

$$d\pi_x : T_x M \rightarrow T_{\pi(x)} B$$

lineer dönüşümünü verir. Bu dönüşüm f bir fonksiyon ve V vektör alanı olmak üzere $\pi_*(p)(V)(f) = V(f \circ \pi)$ tanımlıdır ve buna π nin x noktasındaki **türev dönüşümü** denir [9].

Tanım 2.1.5. Bir $f \in \mathcal{F}(M)$ fonksiyonunun $gradf$ gradiyenti metrik olarak $df \in \chi^*(M)$ diferensiyeline denk olan vektör alanıdır. Buna göre $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\langle gradf, X \rangle = df(X) = X(f)$$

dir. $(x^1, \dots, x^n)$ lokal koordinatlarda $gradf$ vektör alanı

$$gradf = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ile gösterilir [41].

Tanım 2.1.6. M manifoldu üzerinde iki vektör alanı X ve Y olsun. $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonunu alalım.

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (2.1.3)$$

ile tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna X ve Y nin **Lie (parantez) operatörü** denir ve bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar [9]:

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M)$ olmak üzere

i) $[X, Y] = -[Y, X],$

ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad a, b \in R,$

iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$ (Jacobi özdeşliği)

iv) $[fX, gY] = f[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$

dır.

Tanım 2.1.7. M bir manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

fonksiyonu $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M)$ için

1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$

2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$

4) $\nabla_X (fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y$ özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üstünde bir **afin kon-**

neksiyonu denir [9].

Tanım 2.1.8. M bir manifold ve M üzerindeki konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun **torsiyon tensörü** denir [9].

Tanım 2.1.9. M bir manifold ve M üzerindeki ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü T olsun. Eğer $T = 0$ ise ∇ konneksiyonuna simetriktir veya sıfır torsiyonludur denir [9].

Tanım 2.1.10. M bir manifold, g simetrik, non-singüler bilinear form olsun. Eğer ∇ konneksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahipse **Riemann konneksiyon** veya **Levi-Civita konneksiyonu** adını alır [41]. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

- 1) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
- 2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

dır.

M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ &- g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

ile belirlenir. (2.1.4) denkleminde **Koszul eşitliği** adı verilir [41].

Teorem 2.1.1. *Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır [7, 10].*

Tanım 2.1.11. M bir Riemann manifoldu ve g de M nin Riemann metriği olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z \\ R_{XY}Z = R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

olarak tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun **eğrilik tensörü** denir [7].

Tanım 2.1.12. M bir Riemann manifoldu ve g de M nin Riemann metriği olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$(X, Y, Z, W) \rightarrow K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde **Riemann Christoffel eğrilik tensörü** denir [30].

Teorem 2.1.2. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki bağıntılar, M üzerinde geçerlidir [30]:

- 1) $K(X, Y, Z, W) + K(Y, Z, X, W) + K(Z, X, Y, W) = 0$,
- 2) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$,
- 3) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z)$,
- 4) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y)$.

Tanım 2.1.13. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve $F : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. F boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme konneksiyonu $\overset{2}{\nabla}^F$ olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(TM_1)$ için

$$\nabla F_* : \Gamma(TM_1) \times \Gamma(TM_1) \rightarrow \Gamma_F(TM_2)$$

ve

$$(\nabla F_*)(X, Y) = \overset{2}{\nabla}_X^F F_* Y - F_*(\overset{1}{\nabla}_X Y) \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlanan ∇F_* dönüşümüne F dönüşümünün **ikinci temel formu** denir [21, 53].

Önerme 2.1.1. $F : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM_1)$ için

$$(\nabla F_*)(X, Y) = (\nabla F_*)(Y, X)$$

dır. Yani ∇F_* simetriktir [21, 53].

Tanım 2.1.14. $F : (M_1^m, g_1) \rightarrow (M_2^n, g_2)$ bir dönüşüm olsun. $\{e_1, \dots, e_m\}$, $\Gamma(TM_1)$ için yerel ortonormal çatı olsun. F dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(F)$, ∇F_* ikinci temel formunun izine eşittir, yani

$$\tau(F) = \text{iz}(\nabla F_*) = \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(e_i, e_i) \quad (2.1.7)$$

dır. Bir $F : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ dönüşümünün tensiyon alanı F boyunca bir vektör alanıdır, yani $\tau(F) \in \Gamma_F(TM_2)$ dir [21, 53].

Tanım 2.1.15. Eğer $\tau(F) = 0$ ise $F : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ dönüşümüne **harmonik dönüşüm** denir [21, 53].

Tanım 2.1.16. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve $F : M_1 \rightarrow M_2$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün $p \in M_1$ noktasındaki türev dönüşümü F_{*p} olmak üzere $X \in T_p M_1$ ve $W \in T_{F(p)} M_2$ için

$$g_2(F_{*p}(X), W) = g_1(X, F^{*p}(W))$$

ile tanımlı F^{*p} dönüşümüne $p \in M_1$ noktasında F_{*p} dönüşümünün **adjoint dönüşümü** denir [53].

Tanım 2.1.17. M ve N Riemann manifoldları olsun. Bu durumda M ve N manifoldlarının kartezyen çarpımı olan $M \times N$ de bir Riemann manifoldudur. Üstelik aşağıdaki özellikler sağlanır [37, 41].

a)

$$\pi : M \times N \rightarrow M$$

$$(p, q) \rightarrow p$$

ve

$$\sigma : M \times N \rightarrow N$$

$$(p, q) \rightarrow q$$

izdüşümleri C^∞ dönüşümleridir.

b) Bir $\phi : P \rightarrow M \times N$ dönüşümünün C^∞ olması için gerek ve yeter şart hem $\pi \circ \phi$ hemde $\sigma \circ \phi$ dönüşümlerinin C^∞ olmasıdır.

c) Herbir $(p, q) \in M \times N$ için

$$M \times q = \{(r, q) \in M \times N : r \in M\}$$

$$p \times N = \{(p, r) \in M \times N : r \in N\}$$

alt kümeleri $M \times N$ nin altmanifoldlarıdır.

d) Herbir $(p, q) \in M \times N$ için $\pi|_{M \times q} : M \times q$ dan M ye bir diffeomorfizm ve $\sigma|_{p \times N} : p \times N$ den N ye bir diffeomorfizmdir.

(b) den

$$T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}(M \times q) \text{ ve } T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(p \times N)$$

uzayları (p, q) da $M \times N$ nin tanjant alt uzaylarıdır. Böylece

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_{(p,q)}M \oplus T_{(p,q)}N$$

dır. Buradan, her $Y \in T_{(p,q)}(M \times N)$ için $Y_1 \in T_{(p,q)}M$ ve $Y_2 \in T_{(p,q)}N$ olmak üzere $Y = Y_1 + Y_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

Tanım 2.1.18. B ve F Riemann manifoldları ve $f > 0$, B üzerinde C^∞ fonksiyon olsun. $M = B \times_f F$ çaprazık çarpım,

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

metrik tensörü ile oluşturulmuş $B \times F$ çarpım manifoldudur. Eğer $v, w \in T_{(p,q)}B \times F$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} g(v, w) &= \pi^*(g_B(v, w)) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F(v, w)) \\ &= g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + (f \circ \pi)^2 g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)) \end{aligned}$$

dır. Özel olarak, eğer $f = 1$ ise $B \times_f F$ bir $B \times F$ çarpım manifolduna indirgenir [41].

Önerme 2.1.2. B ve F Riemann manifoldları ve $M = B \times_f F$ çapraşık çarpım manifoldu olsun. M üzerinde $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ ve $V, W \in \mathcal{L}(F)$ ise

1) $D_X Y \in \mathcal{L}(B)$, B üzerinde $D_X Y$ nin liftidir.

2) $D_X V = D_V X = (X[f]/f)V$

3) $\text{nor} D_V W = II(V, W) = -(\langle V, W \rangle / f) \text{grad} f$

4) $\text{tan} D_V W \in \mathcal{L}(F)$, F üzerinde $D_V W$ nin liftidir [41]. Burada $\mathcal{L}(B)$ ve $\mathcal{L}(F)$ sırasıyla B ve F manifoldlarına yükseltilmiş vektör alanlarının kümesidir. Ayrıca nor ve tan sırasıyla normal kısmı ve teğet kısmı göstermektedir.

Tanım 2.1.19. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları, $\lambda : M_1 \times M_2 \rightarrow R$ bir pozitif diferensiyellenebilir fonksiyon ve $i = 1, 2$ için $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ doğal projeksiyon olsun. Bu durumda (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) nin $M_1 \times_\lambda M_2$ **bükümlü manifoldu** $M_1 \times M_2$ nin tüm X ve Y vektör alanları için

$$g(X, Y) = g_1(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) + \lambda g_2(\pi_{2*}X, \pi_{2*}Y)$$

ile tanımlanan g Riemann metriği ile oluşturulmuş $M_1 \times M_2$ diferensiyellenebilir manifolddur [47].

Bu tanıma göre $i = 1, 2$ için $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ doğal projeksiyon olmak üzere eğer $\lambda_i : M_1 \times M_2 \rightarrow R$ pozitif diferensiyellenebilir fonksiyonları alınırsa bu durumda (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) nin $M_1 \times_{(\lambda_1, \lambda_2)} M_2$ **çift katlı-bükümlü manifoldu**, X ve Y vektör alanları için

$$g(X, Y) = \lambda_1 g_1(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) + \lambda_2 g_2(\pi_{2*}X, \pi_{2*}Y)$$

ile tanımlanan g Riemann metriği ile oluşturulmuş $M_1 \times M_2$ diferensiyellenebilir manifolddur [47].

Önerme 2.1.3. B ve F Riemann manifoldları ve $M = B \times_f F$ bir çapraşık çarpım manifoldu olsun. Bu durumda $B \times q$ yaprakları tamamen jeodeziktir ve $p \times F$ lifleri tamamen umbiliktir [41].

Önerme 2.1.4. $M_1 \times M_2$ manifoldu üzerinde bir Riemann metriği g olsun. Kabul edelim ki L_1 ve L_2 foliasyonları her yerde dikey olarak kesişsinler. Bu durumda g metriği,

a) bir $M_1 \times_{(\lambda_1, \lambda_2)} M_2$ çift katlı bükümlü manifold metriğidir gerek ve yeter şart L_1 ve L_2 tamamen umbilik foliasyondur.

b) bir $M_1 \times_{\lambda} M_2$ bükümlü manifold metriğidir gerek ve yeter şart L_1 tamamen jeodezik ve L_2 tamamen umbilik foliasyondur.

c) bir $M_1 \times_{\lambda} M_2$ çapraşık çarpım manifold metriğidir gerek ve yeter şart L_1 tamamen jeodezik ve L_2 bir küresel(spherical) foliasyondur.

d) Riemann manifoldlarının bir doğal çarpım metriğidir gerek ve yeter şart L_1 ve L_2 tamamen jeodezik foliasyondur [47].

Tanım 2.1.20. M bir n - boyutlu Riemann manifoldu ve M nin bir p noktasındaki tanjant uzayının 2- boyutlu bir alt uzayı P olsun. P yi geren birim vektörler X_p, Y_p ve M üzerindeki Riemann Christoffel eğrilik tensörü K olmak üzere

$$K(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$$

değerine M nin p noktasındaki P düzlemine göre **kesit eğriliği** denir. K simetrik ve anti-simetrik olduğundan bu eğriliğin değeri sadece P alt uzayına bağlıdır [4].

M üzerinde metrik tensör g , X_p ve Y_p tanjant vektörleri üzerinde kurulan paralel kenarın alanı $\| X_p \wedge Y_p \|$ olmak üzere

$$K(P) = \frac{g(R(X_p, Y_p)X_p, Y_p)}{\| X_p \wedge Y_p \|} \quad (2.1.8)$$

dır [37].

2.2 Riemann Manifoldlarının Altmanifoldları

Bu alt bölümde Riemann manifoldlarının altmanifoldları için indirgenen kavramlar tanıtılmaktadır.

Tanım 2.2.1. M, M' sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsunlar. $f : M \rightarrow M', C^\infty$ dönüşümü için, $\text{boy}(f_*(T_p M)) = m$ ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı m olup, $\text{rank}(f) = m$ ile gösterilir. Eğer $\text{boy}(M) = \text{rank}(f)$ ise f ye **immersiyon** (daldırma) denir. Bu durumda M ye de M' nin **immersed alt manifoldu** denir.

f immersiyonu $1 - 1$ ise f ye **imbedding** (gömme), M ye de M' nin gömülen altmanifoldu ya da sadece altmanifoldu denir [10].

Tanım 2.2.2. (M, g) ve (M', g') sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları, $f : M \rightarrow M'$ immersiyon olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(T_p M)$ için

$$g(X, Y) = g'(f_*X, f_*Y)$$

ise f ye **izometrik immersiyon** (metrik koruyan immersiyon) adı verilir [10].

Tanım 2.2.3. M ve M' sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M' manifoldunun altmanifoldu M olsun. ∇ ve ∇' sırası ile M ve M' nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. Böylece X ve Y , M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.2.1)$$

yazılır. (2.2.1) denkleminde **Gauss denklemi** denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$, sırasıyla $\nabla'_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Burada h ya M nin **ikinci temel formu** adı verilir [10].

Tanım 2.2.4. $h = 0$ ise M ye **tamamen jeodezik altmanifoldu** denir [10].

Tanım 2.2.5. M ve M' sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M' manifoldunun altmanifoldu M olsun. M ye normal birim vektör alanı N ve $-A_N X$, $\nabla_X^\perp N$ sırasıyla $\bar{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere,

$$A : \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$\nabla'_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N \quad (2.2.2)$$

yazılır. (2.2.2) denkleminde **Weingarten denklemi** denir. Burada A_N ye N ye bağlı **şekil operatörü**, $\nabla^\perp$ konneksiyonuna da M nin $T^\perp M$ normal demetindeki **normal konneksiyon** adı verilir [10].

Aşağıdaki lemma ikinci temel form ve şekil operatörü arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Lemma 2.2.1. M ve M' sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve M, M' manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $N \in \chi^\perp(M)$ için

$$g(A_N X, Y) = g(h(X, Y), N)$$

dir [10].

Tanım 2.2.6. (M, g) ve (M', g') sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve M, M' manifoldunun altmanifoldu olsun. M üzerindeki bir $x \in M$ için $T_x M$ nin lokal ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. Bu durumda

$$H = \frac{1}{n} \text{tr} h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (2.2.3)$$

biçiminde tanımlı H normal vektörüne M nin **ortalama eğrilik vektörü** denir [10]. Eğer $H = 0$ ise M ye **minimal altmanifold** denir [10].

Tanım 2.2.7. (M, g) ve (M', g') sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve M, M' manifoldunun altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$h(X, Y) = g(X, Y)H \quad (2.2.4)$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye **tamamen umbilik altmanifold** adı verilir [10].

2.3 Vektör Demetleri ve Manifold Üzerinde Distribüsyon

Bu alt bölümde vektör demetleri ve vektör demetlerinin özel durumları olan distribüsyonlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1. E, B ve F, C^∞ manifoldlar ve $\pi : E \rightarrow B$ bir C^∞ dönüşüm olsun. B nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (I , indis kümesi) olmak üzere eğer

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(x, y) = x, \quad x \in U_\alpha, y \in F$$

olacak şekilde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi varsa π, F ye göre **lokal çarpım özelliğine sahiptir** denir ve $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine de π nin **lokal ayrışması** denir [49].

Tanım 2.3.2. $\pi : E \rightarrow B$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir **lif demeti** adı verilir [49].

Bir lif demetinde E ye **total uzay**, B ye **baz (taban) uzay**, F ye **lif modeli** ve π ye de **projeksiyon (izdüşüm)** adı verilir [49].

Lif demetini E veya π ile göstereceğiz.

Tanım 2.3.3. $\pi : E \rightarrow B$ lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{p \in E \mid \pi(p) = x\}$$

kümesine x üzerinde bir **lif** denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayını verir [49].

Tanım 2.3.4. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. π nin D lokal ayrışmasına ζ lif demetinin **lokal koordinat temsilcisi** denir [49].

$\zeta = (E, \pi, B, F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisini göz önüne alalım. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\psi_{\alpha,x} : F \rightarrow F_x$$

dönüşümü $y \in F$ için

$$\psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x, y)$$

şeklinde tanımlanırsa ψ_α lar diffeomorfizm olduklarından, $\psi_{\alpha,x}$ ler de diffeomorfizmdirler [49].

Tanım 2.3.5. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferansiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa ζ ya bir **vektör demeti** denir [49].

i) $\forall x \in B$ için F ve F_x bir $\mathcal{K}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır.

ii) $\forall x \in B$ için $\psi_{\alpha,x} : F \rightarrow F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ζ nin bir $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi vardır.

Tanım 2.3.6. $\pi : E \rightarrow B$ bir C^∞ lif demeti olsun. Bu durumda

$$\pi \circ S = I, (I, B \text{ nin birim dönüşümü})$$

olacak şekilde

$$S : B \rightarrow E$$

C^∞ dönüşümüne **lif demetinin kesiti** denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir [49].

Tanım 2.3.7. E bir vektör demeti olsun. $\forall p \in B$ için $T_p B$ tanjant uzayına bir X_p vektörü taşıyan dönüşüme **vektör demetinin kesiti** denir. E nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin uzayı $\mathcal{K}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır [49].

Tanım 2.3.8. $M, n-$ boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$\mathcal{D} : M \rightarrow T_x M$$

$$x \rightarrow \mathcal{D}_x \subset T_x M$$

ile tanımlanan $\mathcal{D}$ dönüşümüne bir **distribüsyon** denir [49].

$X \in \mathcal{X}(M)$ için $p \in M$ olmak üzere $X_p \in \mathcal{D}_p$ oluyorsa X vektör alanına $\mathcal{D}$ ye aittir denir. Eğer her p noktası için $\mathcal{D}$ ye ait $q-$ tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{D}$ ye diferansiyellenebilirdir denir [49].

Tanım 2.3.9. M bir C^∞ manifold; $\mathcal{D}, M$ üzerinde $q-$ boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve B, M nin altmanifoldu olsun. Eğer B nin her x noktasında, B nin tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_x$ aynı ise B ye $\mathcal{D}$ nin **integral manifoldu** denir [49]. Yani

$$\pi : B \rightarrow M$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in B$ için

$$\pi_*(T_x B) = \mathcal{D}_x$$

dir. Eğer $\mathcal{D}$ nin B yi kapsayan bir başka integral manifoldu yoksa B ye $\mathcal{D}$ nin bir **maksimal integral manifoldu** (veya **leaf**) denir [49].

Tanım 2.3.10. M bir C^∞ manifold ve B , M nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall x \in B$ için $\mathcal{D}$ nin x noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{D}$ distribüsyonuna **integrallenebilirdir** denir [49].

Tanım 2.3.11. (M, g) bir Riemann manifold ve ∇ , (M, g) üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer $X \in \chi(M)$ ve $Y \in \chi^v(M)$ için

$$\nabla_X Y \in \chi^v(M)$$

ise $\mathcal{D}$ distribüsyonuna **paraleldir** denir. Bu durumda $\mathcal{D}$ distribüsyonu tamamen jeodezik bir foliasyon belirler [49].

Önerme 2.3.1. (M, g) , $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{H}$ ortogonal distribüsyonlarına sahip bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{D}$ nin ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}$ nin paralel olmasıdır [49].

2.4 Riemann Submersiyonları

Bu alt bölümde Riemann submersiyonlar ile ilgili bazı temel tanım ve sonuçlar sunulacaktır.

Tanım 2.4.1. (M, g) ve (B, g') sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir örten C^∞ dönüşümü için

$$\text{rank} \pi_{*x} = \text{boy} B$$

oluyorsa π ye $x \in M$ noktasında bir **submersiyon** denir. $\forall x \in M$ için π bir submersiyon ise π ye M üzerinde bir submersiyon adı verilir [18].

Herhangi bir $b \in B$ için $F_b = \pi^{-1}(b)$ lifi, (M, g) manifoldunun $r = (m - n)$ - boyutlu bir altmanifoldudur. $\pi^{-1}(b)$ altmanifoldlarına submersiyonun **lifleri** denir [18]. Herhangi bir $p \in M$ için (M, g) deki $\mathcal{V}$ **integrallenebilir distribüsyonu**

$$\mathcal{V}_p = \text{çek} \pi_{*p}$$

ile tanımlanır ve $\mathcal{V}_p$ ye submersiyonun **dikey distribüsyonu** denir.

$$\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^\perp$$

ile tanımlanan distribüsyona ise submersiyonun **yatay distribüsyonu** denir [18].

Tanım 2.4.2. (M, g) ve (B, g') sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $x \in M$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\pi) = \text{çek} \pi_{*x} = \{X \in T_x M \mid \pi_{*x}(X) = 0\} \subset T_x M$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x(\pi) = \mathcal{V}_x^\perp \subset T_x M$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayına π nin x noktasındaki **dikey uzayı** denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyenini $\mathcal{H}_x$ uzayına ise π nin x noktasındaki **yatay uzayı** denir [2].

Böylece, M Riemann manifoldu $p \in M$ de

$$T_p M = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{V}_p^\perp$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

Tanım 2.4.3. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $x \in M$ noktasına $T_x M$ nin sırasıyla $\mathcal{V}_x$ ve $\mathcal{H}_x$ alt uzaylarını karşılık getiren

$$x \rightarrow \mathcal{V}_x \text{ ve } x \rightarrow \mathcal{H}_x$$

dönüşümleri $M \setminus C_\pi$ üzerinde sırasıyla $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ve $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ile gösterilen C^∞ distribüsyonları tanımlar. $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ ye π nin **dikey distribüsyonu** veya **dikey alt demeti**, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ye ise π nin **yatay distribüsyonu** veya **yatay alt demeti** denir [2].

Tanım 2.4.4. M üzerindeki bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise **yatay vektör alanı** olarak adlandırılır ve yatay vektör alanlarının kümesi $\chi^h(M)$ ile gösterilir [25].

Tanım 2.4.5. M üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise **dikey vektör alanı** olarak adlandırılır ve dikey vektör alanlarının kümesi $\chi^v(M)$ ile gösterilir [25].

Herhangi bir $E \in \chi(M)$ vektör alanı için, E nin dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile gösterilir.

Tanım 2.4.6. M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $X \in \Gamma(TM)$ ve $X' \in \Gamma(TN)$ olmak üzere, eğer $\pi_*(X) = X'$ ise X ve X' vektör alanlarına π —bağlı vektör alanları denir [53].

Tanım 2.4.7. M ve B Riemann manifoldları olsun. Eğer X yatay ve B üzerindeki X' vektör alanına π —bağlı ise M üzerindeki bu X vektör alanına **basic (temel) vektör alanı** denir [40].

Tanım 2.4.8. (M, g) ve (B, g') sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir örten C^∞ -submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa π ye bir **Riemann submersiyonu** denir [18, 40]:

- i) π dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

ii) Her $p \in M$ noktasında π_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur. Yani

$$g_p(u, v) = g'_{\pi(p)}(\pi_{*p}u, \pi_{*p}v), \quad u, v \in \mathcal{H}_p, \quad p \in M \quad (2.4.1)$$

dır. Bu ise, bir $p \in M$ noktasında π_* türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\pi(p)}B$ üzerine bir lineer izometri olduğunu söyler.

Önerme 2.4.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları,

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu, ∇ ve ∇' sırasıyla M ve B nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. M üzerindeki X, Y temel vektör alanları, X', Y' vektör alanlarına π -bağlı olsun. Bu durumda

$$i) \quad g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \pi,$$

$$ii) \quad h[X, Y] \text{ temel vektör alanı, } [X', Y'] \text{ vektör alanına } \pi\text{-bağlıdır.}$$

$$iii) \quad h(\nabla_X Y) \text{ temel vektör alanı ve } (\nabla'_{X'} Y') \pi\text{-bağlıdır.}$$

$$iv) \quad \text{Herhangi bir } V \in \chi^v(M) \text{ için, } [X, V] \text{ dikey vektör alanıdır [18].}$$

Şimdi O'Neill tarafından tanımlanan A ve T temel tensörleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.4.9. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1, 2)$ mertebeli T **temel tensör alanı**

$$T(E, F) = T_E F = h\nabla_{v_E} v_F + v\nabla_{v_E} hF, \quad E, F \in \chi(M) \quad (2.4.2)$$

ile tanımlanır [18, 40].

Burada, v ve h sembolleri sırasıyla $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ üzerinde ortogonal projeksiyonlar ve ∇ , (M, g) nin Levi-Civita konneksiyonudur.

T temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) $E \in \chi(M)$ için T_E anti-simetrik ve lineer operatördür.
- ii) $E \in \chi(M)$ için T_E yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.
- iii) T dikey tensör alanıdır. Yani, $E \in \chi(M)$ için, $T_E = T_{vE}$ dir.
- iv) T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $V, W \in \chi^v(M)$ için

$$T_V W = T_W V$$

dır.

Tanım 2.4.10. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1, 2)$ mertebeli A **temel tensör alanı**

$$A(E, F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF, \quad E, F \in \chi(M) \quad (2.4.3)$$

ile tanımlanır [18, 40].

A temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) $E \in \chi(M)$ için A_E anti-simetrik ve lineer operatördür.
- ii) $E \in \chi(M)$ için A_E yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.
- iii) A yatay tensör alanıdır. Yani, $E \in \chi(M)$ için, $A_E = A_{hE}$ dir.

iv) A yatay tensör alanı alterleyendir. Yani $X, Y \in \chi^h(M)$ için

$$A_X Y = -A_Y X$$

dır.

Lemma 2.4.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Herhangi bir $E, F, G \in \chi(M)$ için

$$g(T_E F, G) = -g(T_E G, F) \quad (2.4.4)$$

$$g(A_E F, G) = -g(A_E G, F) \quad (2.4.5)$$

dır [18, 25].

Önerme 2.4.2. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere, tensör alanları T ve A aşağıdaki özellikleri sağlar [40, 59]:

$$i) T_U W = T_W U, \quad U, W \in \chi^v(M),$$

$$ii) A_X Y = -A_Y X, \quad X, Y \in \chi^h(M),$$

$$iii) A_X Y = \frac{1}{2} \nabla [X, Y] \quad X, Y \in \chi^h(M)$$

dır.

Tanım 2.4.11. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve $\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. Eğer T tensör alanı sıfır ise π nin herhangi bir lifine M nin tamamen jeodezik altmanifoldu denir [18].

Bir Riemann submersiyonda dikey distribüsyon her zaman integrallenebilirdir [40]. Yatay distribüsyon için aşağıdaki durum geçerlidir.

Teorem 2.4.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları,

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu ve (M, g) üzerindeki yatay distribüsyon $\mathcal{H}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır [40].

(2.4.2) ve (2.4.3) eşitliklerinden aşağıdaki Lemma elde edilir.

Lemma 2.4.2. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere, $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W, \quad (2.4.6)$$

$$\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X, \quad (2.4.7)$$

$$\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V, \quad (2.4.8)$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y, \quad (2.4.9)$$

dir. Ayrıca, X temel vektör alanı ise $[X, V]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$h\nabla_X V = h\nabla_V X = A_X V \quad (2.4.10)$$

dir [18, 40].

Bu altbölümün son kısmında manifoldların eğrilikleri arasındaki bağıntılar Riemann submersiyonu aracılığıyla sunulacaktır.

Tanım 2.4.12. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve (M, g) manifoldunun yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ olsun. $\chi^h(M)$ üzerinde $(1, 3)$ - mertebeli eğrilik tensör alanını R^* ile gösterelim. Herhangi bir $X, Y, Z \in \chi^h(M)$ ve $p \in M$ için

$$R'_{\pi(p)}(\pi_{*p}X_p, \pi_{*p}Y_p, \pi_{*p}Z_p)$$

tensörünün yatay lifti $R^*(X, Y)Z$ ile ifade edilir. (B, g') manifoldunun R' **Riemann eğriliği** kısaca;

$$\pi_*(R^*(X, Y)Z) = R'(\pi_*X, \pi_*Y)\pi_*Z$$

ile tanımlanabilir. Ayrıca, herhangi bir $X, Y, Z, H \in \chi^h(M)$ için

$$\begin{aligned} R^*(X, Y, Z, H) &= g(R^*(X, Y)Z, H) \\ &= R'(\pi_*X, \pi_*Y, \pi_*Z, \pi_*H) \circ \pi \end{aligned}$$

dir [18].

Teorem 2.4.2. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları,

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu ve R, R' ve $\hat{R}$ sırasıyla M, B ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olsun. Bu durumda, herhangi bir $X, Y, Z, H \in \chi^h(M)$ ve $U, V, F, W \in \chi^v(M)$ için

$$\begin{aligned} R(U, V, W, F) &= \hat{R}(U, V, W, F) + g(T_U W, T_V F) \\ &\quad - g(T_V W, T_U F) \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

$$R(U, V, W, X) = g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X) \tag{2.4.12}$$

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, H) &= R'(X, Y, Z, H) + 2g(A_X Y, A_Z H) \\ &\quad - g(A_Y Z, A_X H) + g(A_X Z, A_Y H) \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

$$\begin{aligned} R(X, Y, V, W) &= g((\nabla_V A)_X Y, W) - g((\nabla_W A)_X Y, V) \\ &\quad + g(A_X V, A_Y W) - g(A_X W, A_Y V) \\ &\quad - g(T_V X, T_W Y) + g(T_W X, T_V Y) \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

dir. Burada $(\nabla_V A)_X Y = \nabla_V A_X Y - A_{\nabla_V X}(Y) - A_X(\nabla_V Y)$ ve $(\nabla_U T)_V W = \nabla_U(T_V W) - T_{\nabla_U V}(W) - T_V(\nabla_U W)$ ile verilir [18, 40].

Teorem 2.4.3. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları,

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyonu ve K, K' ve $\hat{K}$ sırasıyla M, B ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin kesit eğrilikleri olsun. X, Y ortonormal yatay vektörler ve U, V ortonormal dikey vektörler olmak üzere

$$K(U, V) = \hat{K}(U, V) + \|T_U V\|^2 - g(T_U U, T_V V), \quad (2.4.15)$$

$$K(X, Y) = K'(X', Y') \circ \pi - 3 \|A_X Y\|^2, \quad (2.4.16)$$

$$K(X, V) = g((\nabla_X T)_V V, X) - \|T_V X\|^2 + \|A_X V\|^2 \quad (2.4.17)$$

dır [18, 40].

2.5 Kompleks Manifolddlar

Bu alt bölümde kompleks manifoldlar ve kompleks manifoldlar üzerinde tanımlanan çeşitli submersiyon türleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.5.1. M , bir Hausdorff uzayı ve M de bir açık $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olsun. Eğer $\forall p \in M$ için

$$\psi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow W_\alpha \subset C^n$$

homeomorfizması var ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri holomorfik ise M ye **kompleks manifold** denir. C^n ile R^{2n} özdeş olduğundan M , $2n$ - boyutlu reel analitik manifolddur. Burada $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ya M nin holomorfik koordinat komşuluğu sistemi denir [39].

Tanım 2.5.2. M reel $2n$ - boyutlu manifold ve J, M üzerinde $(1, 1)$ mertebeli tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M$ için

$$J_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

lineer dönüşümü $T_p M$ üzerinde bir kompleks yapı ise yani $J^2 = -I$ sağlanıyorsa J ye M üzerinde **hemen hemen kompleks yapı** denir. M ye de J kompleks yapısı ile birlikte bir **hemen hemen kompleks manifold** denir [37, 49].

Sonuç 2.5.1. M hemen hemen kompleks manifold ise $n = 2m$ dir. Burada n , M nin kompleks boyutu, $2m$ ise M nin reel boyutudur [36].

Tanım 2.5.3. M hemen hemen kompleks manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı J olsun. M üzerinde bir Riemann metriği g olmak üzere $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad (2.5.1)$$

ise g fonksiyonuna **Hermityen metrik** denir [37].

Tanım 2.5.4. M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M ye **hemen hemen Hermityen manifold** denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M ye **Hermityen manifold** denir [37].

Tanım 2.5.5. M hemen hemen Hermityen manifold, g ve J , M üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY) \quad (2.5.2)$$

ile tanımlı tensöre **temel 2-form** denir [37].

Tanım 2.5.6. M bir hemen hemen kompleks manifold ve g , M üzerinde bir Hermityen metrik olsun. Eğer M üzerinde tanımlanan Ω temel 2- formu kapalı ise yani $d\Omega = 0$ ise g Hermityen metriğine **Kaehler metrik** denir [37].

Tanım 2.5.7. M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M ye **hemen hemen Kaehler manifold** denir. Eğer M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M ye **Kaehler manifold** denir [37].

Teorem 2.5.1. M bir Hermityen manifold olsun. Bu durumda M nin bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır [4].

Önerme 2.5.1. M bir Kaehler manifold olsun. Bu durumda M nin eğrilik tensörü ve Ricci tensörü $\forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir [37]:

- i) $R(X, Y)J = JR(X, Y)$
- ii) $R(JX, JY) = R(X, Y)$
- iii) $S(JX, JY) = S(X, Y)$
- iv) $S(X, Y) = \frac{1}{2}(izJR(X, JY))$.

Şimdi bir kompleks manifold üzerinde tanımlanan submersiyonlardan bahsedeceğiz.

Tanım 2.5.8. (M, g, J) ve (B, g', J') sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen Hermityen manifoldlar olsun. $F : (M, g, J) \rightarrow (B, g', J')$ bir C^∞ submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa F dönüşümüne bir **hemen hemen Hermityen submersiyon** veya **Holomorfik submersiyon** denir [37]:

- i) F bir Riemann submersiyon,
- ii) F bir hemen hemen kompleks dönüşümdür. Yani, $F_* \circ J = J' \circ F_*$ dır.

Holomorfik submersiyonlar 1970'lerden itibaren çalışılmaya başlandı ve bu tür dönüşümlerin manifoldlar üzerindeki yapıları koruduğu görüldü. 2010 yılında Şahin aşağıdaki yeni kavramları tanımladı ve inceledi.

Tanım 2.5.9. (M, g, J) ve (B, g') sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold olsun. $F : (M, g, J) \rightarrow (B, g')$ bir Riemann submersiyon olsun. Eğer dikey distribüsyon J ye göre invaryant ise F dönüşümüne bir **invaryant submersiyon** denir. Yani,

$$J(\text{çek}F_*) = \text{çek}F_*$$

dır [54].

Tanım 2.5.10. (M, g_M, J_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold olsun. $F : (M, g_M, J_M) \rightarrow (N, g_N)$ bir Riemann submersiyon olsun. Eğer $\text{çek}F_*$, J ye göre anti-invaryant yani,

$$J(\text{çek}F_*) \subseteq (\text{çek}F_*)^\perp$$

ise F dönüşümüne bir **anti-invariant Riemann submersiyon** denir [51].

Tanım 2.5.11. (M, g_M, J_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold olsun. $F : (M, g_M, J_M) \rightarrow (N, g_N)$ bir Riemann submersiyon olmak üzere, $D_1 \subseteq \text{çek}F_*$ distribüsyonu var,

$$\text{çek}F_* = D_1 \oplus D_2$$

ve

$$JD_1 = D_1, J(D_2) \subseteq (\text{çek}F_*)^\perp$$

ise F dönüşümüne bir **yarı-invariant Riemann submersiyon** denir [55]. Burada D_2 , $\text{çek}F_*$ da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır.

Tanım 2.5.12. (M_1, g_1, J_1) ve (M_2, g_2) sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold olsun. $F : (M_1, g_1, J_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir Riemann submersiyon olsun. Eğer $p \in M_1$ noktasında sıfırdan farklı $X \in (\text{çek}F_*)_p$ vektörü için $\text{çek}F_{*p}$ ve JX arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit yani, $p \in M_1$ ve $\text{çek}F_{*p}$ 'deki X tanjant vektörünün seçiminden bağımsız ise F dönüşümüne bir **slant submersiyon** denir [52]. θ açısına da slant submersiyonun **slant açısı** denir.

2.6 Konform Submersiyonlar

Riemann submersiyonlar yatay distribüsyon ile hedef manifoldun tanjant uzayı arasında bir izometrinin var olduğunu belirlemektedir. Bu alt bölümde bu şartın yerine daha genel durum olan konformluk şartı konulmaktadır.

Tanım 2.6.1. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu taktirde $x \in M$ ve $X, Y \in T_x M$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y)$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x)$ fonksiyonu varsa π dönüşümüne $x \in M$ noktasında **zayıf konform dönüşüm** denir [2].

Tanım 2.6.2. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

$x \in M$ noktasında bir zayıf konform dönüşüm olsun.

$$\Lambda(x) = \lambda(x)^2$$

olacak şekilde bir

$$\lambda : M \rightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonu için $\lambda(x)$ sayısına π nin **konform faktörü**, $\Lambda(x)$ sayısına da π nin **kare konform faktörü** denir [2].

Önerme 2.6.1. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu taktirde $x \in M$ noktasında π dönüşümünün zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

i) $d\pi_x = 0$ veya

ii) $d\pi_x : T_x M \rightarrow T_{\pi(x)} N$ dönüşümünün birebir konform olmasıdır [2].

Tanım 2.6.3. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. $d\pi_x = 0$ şartını sağlayan $x \in M$ noktasına π nin bir **branch noktası** denir [2].

Tanım 2.6.4. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. π nin türev dönüşümünün birebir ve konform olduğu $x \in M$ noktasına π nin bir **regüler noktası** denir [2].

Tanım 2.6.5. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olmak üzere konform faktörü sıfırdan farklı bir sabit olan

$$\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

zayıf konform dönüşümüne bir **homotetik immersiyon** denir. Bir diffeomorfizm olan homotetik immersiyona ise **homoteti** denir [2].

Tanım 2.6.6. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ için aşağıdaki şartlardan herhangi biri sağlanıyorsa π dönüşümüne x noktasında **yatay zayıf konform dönüşüm** denir:

i) $d\pi_x = 0$

veya

ii) $d\pi_x$ türev dönüşümü $\mathcal{H}_x = \{\text{çek}(d\pi_x)\}^\perp$ yatay uzayını $T_{\pi(x)}N$ üzerine konform olarak resmeder. Yani $d\pi_x$ örtendir ve $\forall X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y)$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x) \neq 0$ sayısı vardır [2, 58].

Önerme 2.6.2. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ noktasının π dönüşümünün kritik noktası olması için gerek ve yeter şart $d\pi_x = 0$ olmasıdır [2].

Tanım 2.6.7. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y)$$

şartını sağlayan $x \in M^m$ noktasına π nin bir regüler noktası denir [2].

Tanım 2.6.8. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ için

$$\text{rank} d\pi_x = \text{boy} N$$

ise π dönüşümüne x noktasında **submersiyon** denir [2]. Eğer π dönüşümünün hiç kritik noktası yoksa π dönüşümüne **konform submersiyon** denir.

Tanım 2.6.9. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

zayıf konform dönüşümü için regüler noktalarda λ konform faktörünün gradyenti dikey oluyorsa yani

$$\mathcal{H}(\text{grad} \lambda) = 0$$

ise bu dönüşüme **yatay homotetik dönüşüm** denir. Burada $\mathcal{H}(\text{grad} \lambda) = 0$ şartı λ konform faktörünün yatay eğriler boyunca sabit olduğunu gösterir [2].

Tanım 2.6.10. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ bir diferensiyellenebilir submersiyon olsun. Her $X, Y \in \Gamma((\ker d\pi_*)^\perp)$ için

$$\lambda^2 g(X, Y) = h(d\pi_*(X), d\pi_*(Y))$$

olacak şekilde bir pozitif λ fonksiyonu varsa π submersiyonuna **yatay konform submersiyon** denir [50].

$F : M \rightarrow N$ bir submersiyon olsun. $\forall x \in M$ için $F_*(E_x) = \check{E}_{F(x)}$ şartını sağlayan N üzerinde bir $\check{E}$ vektör alanı varsa M üzerindeki E vektör alanına **izdüşürülebilir** denir. Bu durumda E ve $\check{E}$ vektör alanlarına F -bağlantılıdır denir. (M, g) üzerindeki bir Y yatay vektör alanı izdüşürülebilir ise temel vektör alanıdır. Dolayısıyla $\check{Z}$, N üzerinde bir vektör alanıysa M üzerinde öyle bir tek temel vektör alanı vardır ki Z ve $\check{Z}$, F -bağlantılıdır. Z vektör alanı, $\check{Z}$ vektör alanının yatay lifti olarak adlandırılır [23].

Önerme 2.6.3. $F : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ dönüşümü konform faktörü λ olan bir yatay konform submersiyon olsun. $X, Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için

$$A_X Y = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}[X, Y] - \lambda^2 g(X, Y) \text{grad}_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}) \}$$

dır [23].

Lemma 2.6.1. $F : M \rightarrow N$ bir yatay konform submersiyon olsun. Bu durumda X, Y yatay vektör alanları ve V, W dikey vektör alanları için aşağıdaki eşitlikleri sağlanır [2];

$$(\nabla F_*)(X, Y) = X(\ln \lambda) F_* Y + Y(\ln \lambda) F_* X - g(X, Y) F_*(\text{grad} \ln \lambda); \quad (2.6.1)$$

$$(\nabla F_*)(V, W) = -F_*(T_V W); \quad (2.6.2)$$

$$(\nabla F_*)(X, V) = -F_*(\nabla_X V) = -F_*(A_X V). \quad (2.6.3)$$

Teorem 2.6.1. $m > n \geq 2$ ve (M^m, g) , (N^n, h) iki Riemann manifoldu olsun. Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla ∇ , ∇^N ve eğrilik tensörleri de R , R^N olsun. $F : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ dönüşümü konform faktörü $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ olan bir yatay konform submersiyon ve F -nin liflerinin eğrilik tensörü de $\hat{R}$ olsun. $X, Y, Z, H \in \Gamma(TM)^{\mathcal{H}}$ ve $U, V, W, G \in \Gamma(TM)^{\mathcal{V}}$ için

$$g(R(U, V)W, G) = g(\hat{R}(U, V)W, G) + g(T_U W, T_V G) - g(T_V W, T_U G), \quad (2.6.4)$$

$$g(R(U, V)W, X) = g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X), \quad (2.6.5)$$

$$\begin{aligned} g(R(U, X)Y, V) &= g((\nabla_U A)_X Y, V) + g(A_X U, A_Y V) - g((\nabla_X T)_U Y, V) \\ &\quad - g(T_V Y, T_U X) + \lambda^2 g(A_X Y, U) g(V, \text{grad}_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})), \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, H) &= \frac{1}{\lambda^2} h(R^N(\check{X}, \check{Y})\check{Z}, \check{H}) + \frac{1}{4} [g(\mathcal{V}[X, Z], \mathcal{V}[Y, H]) \\ &\quad - g(\mathcal{V}[Y, Z], \mathcal{V}[X, H]) + 2g(\mathcal{V}[X, Y], \mathcal{V}[Z, H])] \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} [g(X, Z)g(\nabla_Y \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), H) - g(Y, Z)g(\nabla_X \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), H) \\ &\quad + g(Y, H)g(\nabla_X \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), Z) - g(X, H)g(\nabla_Y \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), Z)] \\ &\quad + \frac{\lambda^4}{4} [((g(X, H)g(Y, Z) - g(Y, H)g(X, Z)) \parallel \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}))^2 \\ &\quad + g(X(\frac{1}{\lambda^2})Y - Y(\frac{1}{\lambda^2})X, H(\frac{1}{\lambda^2})Z - Z(\frac{1}{\lambda^2})H)] \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

dır [23].

3. KONFORM ANTİ-INVARYANT SUBMERSİYONLAR

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform anti-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Ayrıca bu tip submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralellliği incelenmektedir. İkinci alt bölümde bu tip submersiyonların harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmektedir. Üçüncü alt bölümde bu tip submersiyonların belirlediği ayrışım teoremleri elde edilmektedir. Son olarak, dördüncü alt bölümde bir konform anti-invaryant submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin kesit eğrilikleri araştırılmaktadır.

3.1 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar

Bu alt bölümde konform anti-invaryant submersiyonlar tanımlanmakta, örnekler verilmekte ve distribüsyonların geometrisi incelenmektedir.

Tanım 3.1.1. (M, g, J) ve (N, g') sırasıyla m ve n boyutlu bir hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold olsun. Bu durumda $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ yatay konform submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa F dönüşümüne bir **konform anti-invaryant submersiyon** denir:

- (i) $\text{çek}F_*$ distribüsyonu, J 'ye göre anti-invaryant, yani $J(\text{çek}F_*) \subseteq (\text{çek}F_*)^\perp$,
 - (ii) $g'(F_*X, F_*Y) = \lambda^2 g(X, Y)$, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$
- dır.

$F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. İlk olarak, Tanım 3.1.1 den $J(\text{çek}F_*)^\perp \cap \text{çek}F_* \neq \{0\}$ dir. $(\text{çek}F_*)^\perp$ de $J(\text{çek}F_*)$ 'a tamamlayıcı ortogonal distribüsyon μ olsun. Bu durumda

$$(\text{çek}F_*)^\perp = J(\text{çek}F_*) \oplus \mu \quad (3.1.1)$$

yazabiliriz.

Önerme 3.1.1. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F :$

$(M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda μ distribüsyonu J hemen hemen kompleks yapısına göre invaryanttır.

İspat. $W \in \Gamma(\mu)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için (2.5.1) denklemini kullanılırsa

$$g(JW, V) = -g(W, JV)$$

ve $JV \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ olduğundan $g(JW, V) = 0$ olup $JW \notin \Gamma(\zeta ek F_*)$ dır. Benzer şekilde

$$g(JW, JV) = g(W, V) = 0$$

olup $JW \notin \Gamma(J(\zeta ek F_*))$ dır. Bu durumda $JW \in \Gamma(\mu)$ olur ki bu bize μ distribüsyonunun J ye göre invaryant olduğunu söyler. $\square$

Bu yüzden $X \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için

$$JX = BX + CX \tag{3.1.2}$$

yazılır. Burada $BX \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $CX \in \Gamma(\mu)$ dur. Diğer taraftan $F_*(\zeta ek F_*)^\perp = TN$ ve F bir konform submersiyon olduğu için (3.1.1) denklemini kullanırsak $\forall X \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için $\frac{1}{\lambda^2} g'(F_* JV, F_* CX) = 0$ elde edilir. Buradan da

$$TN = F_*(J\zeta ek F_*) \oplus F_*(\mu) \tag{3.1.3}$$

yazılır. Aşağıda konform anti-invaryant submersiyonlar için örnekler verilmektedir.

Örnek 3.1.1. Bir hemen hemen Hermityen manifoldundan bir Riemann manifolduna tanımlı her anti-invaryant Riemann submersiyon $\lambda = 1$ ile bir konform anti-invaryant submersiyondur [51].

Eğer $\lambda \neq 1$ ise bir konform anti-invaryant submersiyona **has konform anti-invaryant submersiyon** denir. Şimdi bir has konform anti-invaryant submersiyona örnek verelim. R^{2m} ile $2m$ - boyutlu standart metrikli Öklid uzayını gösterelim. Eğer (R^{2m}, J) , standart flat Kaehler metrikli C^m kompleks sayılar uzayına kompleks analitik olarak izometrik ise R^{2m} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı J ye uyumludur denir.

R^{2m} üzerinde standart iç çarpım ile uyumlu hemen hemen kompleks yapıyı

$$J(a^1, \dots, a^{2m}) = (-a^{2m-1}, -a^{2m}, \dots, a^1, a^2)$$

şeklinde tanımlayalım.

Örnek 3.1.2. R^4 ve R^2 standart iç çarpımları ile verilen Öklidyen uzaylar olsun. Bu durumda,

$$F : \begin{matrix} R^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} R^2 \\ (e^{x_3} \sin x_4, e^{x_3} \cos x_4) \end{matrix},$$

diferensiyellenebilir dönüşümü şeklinde tanımlansın. Burada, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ile R^4 uzayının bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$F_* \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{x_3} \sin x_4 & e^{x_3} \cos x_4 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \cos x_4 & -e^{x_3} \sin x_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $\text{rank} F_* = \text{boy} R^2 = 2$ bulunur. Böylece F bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\mathcal{V} = \ker F_* = \text{Span}\{Z_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, Z_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\}$$

ve

$$\mathcal{H} = (\ker F_*)^\perp = \text{Span}\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

elde edilir. Ayrıca R^4 üzerinde tanımlı J hemen hemen kompleks yapısı

$$J(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_3, -a_4, a_1, a_2)$$

olsun. Buradan $JZ_1 = X_1$ ve $JZ_2 = X_2$ olup $J(\ker F_*) = (\ker F_*)^\perp$ olur. $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, R^2 nin standart bazı olmak üzere, doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned} F_* X_1 &= e^{x_3} \sin x_4 \frac{\partial}{\partial y_1} + e^{x_3} \cos x_4 \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ F_* X_2 &= e^{x_3} \cos x_4 \frac{\partial}{\partial y_1} - e^{x_3} \sin x_4 \frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned}$$

bulunur. R^4 ve R^2 üzerindeki standart iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g'(F_*X_1, F_*X_1) = (e^{x_3})^2 g(X_1, X_1)$$

ve

$$g'(F_*X_2, F_*X_2) = (e^{x_3})^2 g(X_2, X_2)$$

olup F dönüşümü $\lambda = e^{x_3}$ olan bir konform anti-invaryant submersiyondur.

Lemma 3.1.1. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için

$$g(CY, JV) = 0 \quad (3.1.4)$$

ve

$$g(\nabla_X^M CY, JV) = -g(CY, JA_X V) \quad (3.1.5)$$

dır.

İspat. $Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için (3.1.2) denklemi kullanılırsa

$$g(CY, JV) = g(JY - \mathcal{B}Y, JV) = g(JY, JV) - g(\mathcal{B}Y, JV)$$

elde edilir. Burada $\mathcal{B}Y \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $JV \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ olduğundan $g(\mathcal{B}Y, JV) = 0$ dır. M bir Kaehler manifold olduğundan $g(JY, JV) = g(Y, V) = 0$ olup $g(CY, JV) = 0$ dır. Diğer taraftan $X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için (3.1.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M CY, JV) &= Xg(CY, JV) - g(CY, \nabla_X^M JV) \\ &= -g(CY, \nabla_X^M JV) \\ &= -g(CY, J\nabla_X^M V) \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan (2.4.8) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M CY, JV) &= -g(CY, JA_X V + J\mathcal{V}\nabla_X^M V) \\ &= -g(CY, JA_X V) - g(CY, J\mathcal{V}\nabla_X^M V) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $J\mathcal{V}\nabla_X^M V \in \Gamma(J\check{ek}F_*)$ ve $CY \in \Gamma(\mu)$ olduğundan $g(CY, J\mathcal{V}\nabla_X^M V) = 0$ olur. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi $(\check{ek}F_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilirliğini, $(\check{ek}F_*)$ ve $(\check{ek}F_*)^\perp$ distribüsyonlarının geometrisini araştıracağız. Öncelikle not edelim ki $(\check{ek}F_*)$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

Teorem 3.1.1. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\check{ek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\check{ek}F_*)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $(\check{ek}F_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

(ii) Aşağıdaki bağıntı sağlanır;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JV) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CX) g(Y, JV) \\ &\quad - 2g(CX, Y) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) \end{aligned}$$

dır.

İspat. $Y \in \Gamma((\check{ek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\check{ek}F_*)$ için, Tanım 3.1.1 den $JV \in \Gamma((\check{ek}F_*)^\perp)$ ve $JY \in \Gamma(\check{ek}F_* \oplus \mu)$ dır. M bir Kaehler manifold olduğundan $X \in \Gamma((\check{ek}F_*)^\perp)$ için, (2.5.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(J[X, Y], JV) \\ &= g(\nabla_X^M JY, JV) - g(\nabla_Y^M JX, JV) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.2) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(\nabla_X^M (\mathcal{B}Y + CY), JV) - g(\nabla_Y^M (\mathcal{B}X + CX), JV) \\ &= g(\nabla_X^M \mathcal{B}Y, JV) + g(\nabla_X^M CY, JV) - g(\nabla_Y^M \mathcal{B}X, JV) - g(\nabla_Y^M CX, JV) \end{aligned}$$

bulunur. F konform submersiyon olduğundan (2.4.8) ve (2.4.9) denklemleri kullanılırsa

$$g([X, Y], V) = g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) + \frac{1}{\lambda^2} g' (F_*(\nabla_X^M CY), F_* JV) - \frac{1}{\lambda^2} g' (F_*(\nabla_Y^M CX), F_* JV)$$

elde edilir. (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) + \frac{1}{\lambda^2} g' (-(\nabla F_*)(X, CY) + \nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g' (-(\nabla F_*)(Y, CX) + \nabla_Y^F F_* CX, F_* JV) \end{aligned}$$

olur. (2.6.1) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) + \frac{1}{\lambda^2} g' \{ -X(\ln \lambda) F_* CY - CY(\ln \lambda) F_* X \\ &\quad + g(X, CY) F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^F F_* CY, F_* JV \} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g' \{ -Y(\ln \lambda) F_* CX - CX(\ln \lambda) F_* Y \\ &\quad + g(Y, CX) F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_Y^F F_* CX, F_* JV \} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) g'(F_* CY, F_* JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g'(F_* X, F_* JV) + \frac{1}{\lambda^2} g(X, CY) g'(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_* JV) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) + \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, Y) g'(F_* CX, F_* JV) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CX) g'(F_* Y, F_* JV) - \frac{1}{\lambda^2} g(Y, CX) g'(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_* JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^F F_* CX, F_* JV) \end{aligned}$$

dır. Böylece ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) \lambda^2 g(CY, JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) \lambda^2 g(X, JV) + \frac{1}{\lambda^2} g(X, CY) \lambda^2 g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) + \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, Y) \lambda^2 g(CX, JV) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CX) \lambda^2 g(Y, JV) - \frac{1}{\lambda^2} g(Y, CX) \lambda^2 g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^F F_* CX, F_* JV) \end{aligned}$$

olup (3.1.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) - g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CX)g(Y, JV) - 2g(CX, Y)g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(\check{c}ek F_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JV) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CX)g(Y, JV) \\ &\quad - 2g(CX, Y)g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, JV) \end{aligned}$$

olmasıdır. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.1.1 den aşağıdaki ifade elde edilir.

Teorem 3.1.2. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\check{c}ek F_*)^\perp)$ için aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

- (i) $(\check{c}ek F_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirdir.
- (ii) F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.
- (iii) $g'(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JV) = \lambda^2 g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV)$ dir.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\check{c}ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\check{c}ek F_*)$ için, Teorem 3.1.1 den

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) - g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CX)g(Y, JV) - 2g(CX, Y)g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

dır. (i) ve (iii) eşitlikleri varsa

$$\begin{aligned} & -g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) + g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CX)g(Y, JV) \\ & -2g(CX, Y)g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, JV) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

olur. (3.1.6) denklemi $V \in \Gamma(\operatorname{çek}F_*)$ olmak üzere $Y = JV$ içinde doğrudur. Bu durumda (3.1.6) denkleminde $Y = JV$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & -g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, C(JV))g(X, JV) + g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CX)g(JV, JV) \\ & -2g(CX, JV)g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, JV) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.4) denklemi kullanılırsa $g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CX)g(JV, JV) = 0$ olup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (3.1.6) denklemi $X \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $Y = CX$ içinde doğrudur. O halde (3.1.6) denkleminde $Y = CX$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & -g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, C^2X)g(X, JV) + g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, CX)g(CX, JV) \\ & -2g(CX, CX)g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, JV) = 0 \end{aligned}$$

olup (3.1.4) denklemi kullanılırsa $g(CX, CX)g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, JV) = 0$ olur. Böylece $\lambda, \Gamma(\operatorname{çek}F_*)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir. $\square$

F bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Eğer $J(\operatorname{çek}F_*) = (\operatorname{çek}F_*)^\perp$ ise F submersiyonuna *konform Lagrangian submersiyon* denir. Eğer $\mu \neq 0$ ise, bu durumda F submersiyonuna bir *has konform anti-invaryant submersiyon* denir. Örnek 3.1.2 de verilen konform anti-invaryant submersiyon aynı zamanda konform Lagrangian submersiyondur. Teorem 3.1.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \rightarrow (N, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\operatorname{çek}F_*)^\perp)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $(\operatorname{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

(ii) $A_X JY = A_Y JX$

(iii) $(\nabla F_*)(Y, JX) = (\nabla F_*)(X, JY)$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için Tanım 3.1.1 den, $JV \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $JY \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ olur. Teorem 3.1.1 den

$$\begin{aligned} g([X, Y], V) &= g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CX)g(Y, JV) - 2g(CX, Y)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

dır. F konform Lagrangian submersiyon olduğundan $g([X, Y], V) = g(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, JV) = 0$ olup buradan (i) $\Leftrightarrow$ (ii) elde edilir. Diğer taraftan Tanım 3.1.1 ve (2.4.8) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - g(A_Y \mathcal{B}X, JV) &= \frac{1}{\lambda^2} g'(F_* A_X \mathcal{B}Y, F_* JV) - \frac{1}{\lambda^2} g'(F_* A_Y \mathcal{B}X, F_* JV) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} g'(F_*(\nabla_X^M \mathcal{B}Y), F_* JV) - \frac{1}{\lambda^2} g'(F_*(\nabla_Y^M \mathcal{B}X), F_* JV) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - g(A_Y \mathcal{B}X, JV) &= \frac{1}{\lambda^2} g'(-(\nabla F_*)(X, \mathcal{B}Y) + \nabla_X^F F_* \mathcal{B}Y, F_* JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g'(-(\nabla F_*)(Y, \mathcal{B}X) + \nabla_Y^F F_* \mathcal{B}X, F_* JV) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} g'((\nabla F_*)(Y, \mathcal{B}X) - (\nabla F_*)(X, \mathcal{B}Y), F_* JV) \end{aligned}$$

olup (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) elde edilir. Benzer şekilde (iii) $\Leftrightarrow$ (i) olduğu gösterilebilir. $\square$

Teorem 3.1.3. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \rightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.
- (ii) Aşağıdaki bağıntı sağlanır;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) &= -g(A_X \mathcal{B}Y, JV) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(X, CY) \end{aligned}$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için, M bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1), (2.4.8), (2.4.9), (3.1.1) ve (3.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X^M Y, V) = g(A_X \mathcal{B}Y, JV) + g(\mathcal{H} \nabla_X^M CY, JV)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğu için (2.1.6) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) + \frac{1}{\lambda^2} g' \{ -X(\ln \lambda) F_* CY - CY(\ln \lambda) F_* X \\ &\quad + g(X, CY) F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^F F_* CY, F_* JV \} \\ &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) g'(F_* CY, F_* JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g'(F_* X, F_* JV) + \frac{1}{\lambda^2} g(X, CY) g'(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_* JV) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \\ &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) \lambda^2 g(CY, JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) \lambda^2 g(X, JV) + \frac{1}{\lambda^2} g(X, CY) \lambda^2 g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.1.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) g(X, CY) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

elde edilir. $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) &= -g(A_X \mathcal{B}Y, JV) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g(X, JV) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) g(X, CY) \end{aligned}$$

olmasıdır. Buradan ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.3 den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 3.1.4. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma((\check{c}ekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ için aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

(i) $(\check{c}ekF_*)^\perp$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

(ii) F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.

(iii) $g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) = -\lambda^2 g(A_X \mathcal{B}Y, JV)$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\check{c}ekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ için, Teorem 3.1.3 den

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(X, CY) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

olduğundan, (i) ve (iii) eşitlikleri varsa

$$-g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(X, CY) = 0 \quad (3.1.7)$$

olur. (3.1.7) denklemi $Y \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $X = CY$ içinde doğrudur. Bu durumda (3.1.7) denkleminde $X = CY$ yazılırsa

$$-g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(CY, JV) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(CY, CY) = 0$$

olup burada (3.1.4) denklemi kullanılırsa $g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(CY, CY) = 0$ dır. Böylece $\lambda, \Gamma(J\check{c}ekF_*)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (3.1.7) denklemi $V \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ olmak üzere $X = JV$ içinde doğrudur. O halde (3.1.7) denkleminde $X = JV$ yazılırsa

$$-g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(JV, JV) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(JV, CY) = 0$$

bulunur. (3.1.4) denklemi kullanılırsa $g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(JV, JV) = 0$ olup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir. $\square$

Teorem 3.1.3 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in$

$\Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $(\zeta ek F_*)^\perp$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

(ii) $A_X JY = 0$

(iii) $(\nabla F_*)(X, JY) = 0$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için Tanım 3.1.1 den, $JV \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $JY \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ olur. Teorem 3.1.3 den

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(X, CY) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

dır. F bir konform Lagrangian submersiyon olduğundan

$$g(\nabla_X^M Y, V) = g(A_X \mathcal{B}Y, JV)$$

olur. Bu durumda (i) $\Leftrightarrow$ (ii) elde edilir. Diğer taraftan (2.4.8) denklemi kullanılırsa

$$g(A_X \mathcal{B}Y, JV) = g(\nabla_X^M \mathcal{B}Y, JV)$$

olur. F bir konform submersiyon olduğundan, (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_X \mathcal{B}Y, JV) &= \frac{1}{\lambda^2} g'(-(\nabla F_*)(X, \mathcal{B}Y) + \nabla_X^F F_* \mathcal{B}Y, F_* JV) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} g'((\nabla F_*)(X, \mathcal{B}Y), F_* JV) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) dir. Benzer işlemler yapılarak (iii) $\Leftrightarrow$ (i) olduğu gösterilebilir. $\square$

Teorem 3.1.5. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall V, W \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $(\zeta ek F_*)$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

(ii) Aşağıdaki bağıntı sağlanır;

$$-\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{JW}^F F_* JV, F_* JCX) = g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX)$$

dır.

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için, M bir Kaehler manifoldu olduğundan (2.5.1), (2.4.7) ve (3.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\mathcal{H}\nabla_V^M JW, \mathcal{B}X) + g(T_V JW, CX) \\ &\quad + g(\mathcal{H}\nabla_V^M JW, CX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\mathcal{H}\nabla_V^M JW, CX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\nabla_V^M JW, CX) \end{aligned}$$

elde edilir. ∇^M konneksiyonu torsiyonsuz ve $[V, JW] \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\nabla_{JW}^M V, CX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\nabla_{JW}^M JV, JCX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(A_{JW}JV + \mathcal{H}\nabla_{JW}^M JV, JCX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(A_{JW}JV, JCX) + g(\mathcal{H}\nabla_{JW}^M JV, JCX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\mathcal{H}\nabla_{JW}^M JV, JCX) \end{aligned}$$

olur. F bir konform submersiyon olduğundan, (2.1.6) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + \frac{1}{\lambda^2} g'(F_*(\nabla_{JW}^M JV), F_*JCX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + \frac{1}{\lambda^2} g'(-(\nabla F_*)(JW, JV) + \nabla_{JW}^F F_*JV, F_*JCX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + \frac{1}{\lambda^2} g'(-JW(\ln \lambda)F_*JV - JV(\ln \lambda)F_*JW \\ &\quad + g(JW, JV)F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_{JW}^F F_*JV, F_*JCX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JW) g'(F_*JV, F_*JCX) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) g'(F_*JW, F_*JCX) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(JW, JV) g'(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_*JCX) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{JW}^F F_*JV, F_*JCX) \end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.1.4) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{JW}^F F_*JV, F_*JCX) \end{aligned}$$

olur. $(\check{c}ekF_*)$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$-\frac{1}{\lambda^2}g'(\nabla_{JW}^F F_*JV, F_*JCX) = g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX)$$

olmasıdır. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.1.5 den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 3.1.6. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall V, W \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ ve $X \in \Gamma((\check{c}ekF_*)^\perp)$ için aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

(i) $(\check{c}ekF_*)$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

(ii) $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir.

(iii) $\frac{1}{\lambda^2}g'(\nabla_{JW}^F F_*JV, F_*JCX) = -g(T_V JW, JX)$

dır.

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ ve $X \in \Gamma((\check{c}ekF_*)^\perp)$ için, Teorem 3.1.5 den

$$g(\nabla_V^M W, X) = g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX) + \frac{1}{\lambda^2}g'(\nabla_{JW}^F F_*JV, F_*JCX)$$

olduğundan (i) ve (iii) eşitlikleri varsa $g(JW, JV)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX) = 0$ olur. Bu durumda $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir. $\square$

Eğer F bir konform Lagrangian submersiyon ise (3.1.3) denkleminde $TN = F_*(J\check{c}ekF_*)$ dır. Bu durumda Teorem 3.1.5 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.3. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall V, W \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $(\check{c}ekF_*)$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

(ii) $T_V JW = 0$

dır.

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(\zeta ekF_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta ekF_*)^\perp)$ için, Teorem 3.1.5 den

$$g(\nabla_V^M W, X) = g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV)g(\mathcal{H} \operatorname{grad} \ln \lambda, JCX) \\ + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{JW}^F F_* JV, F_* JCX)$$

dır. F bir konform Lagrangian submersion olduğu için $g(\nabla_V^M W, X) = g(T_V JW, \mathcal{B}X)$ olup $(i) \Leftrightarrow (ii)$ dir. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

3.2 Harmonik ve Tamamen Jeodezik Konform Anti-İnvariant Submersiyonlar

Bu alt bölümde ilk önce harmonikliği karakterize eden tensiyon alanı hesaplanacaktır.

Teorem 3.2.1. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M^{2m+2r}, g, J) \rightarrow (N^{m+2r}, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. ζekF_* distribüsyonunun ortalama eğrilik vektör alanı $\mu^{\zeta ekF_*}$ olmak üzere F dönüşümünün tensiyon alanı

$$\tau(F) = -mF_*(\mu^{\zeta ekF_*}) + (2 - m - 2r)F_*(\operatorname{grad} \ln \lambda) \quad (3.2.1)$$

dır.

İspat. $\Gamma(TM)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m, \mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olmak üzere $\Gamma(\zeta ekF_*)$ 'in ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m\}$, $\Gamma(J\zeta ekF_*)$ 'in ortonormal bazı $\{Je_1, \dots, Je_m\}$ ve $\Gamma(\mu)$ 'nun ortonormal bazı $\{\mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olsun. Bu durumda (2.1.7) denkleminde

$$\tau(F) = \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(Je_i, Je_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla F_*)(\mu_i, \mu_i)$$

dır. $(\zeta ekF_* \times \zeta ekF_*)$ üzerinde ikinci temel formun izi

$$i_Z^{\zeta ekF_*} \nabla F_* = \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(e_i, e_i)$$

olur. (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$i_Z^{\zeta ekF_*} \nabla F_* = \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}^F F_* e_i - F_*(\nabla_{e_i}^M e_i)) \\ = -mF_*(\mu^{\zeta ekF_*}) \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$i_Z^{(\zeta_{ek}F_*)^\perp} \nabla F_* = \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(Je_i, Je_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla F_*)(\mu_i, \mu_i)$$

olup (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} i_Z^{(\zeta_{ek}F_*)^\perp} \nabla F_* &= \sum_{i=1}^m \{Je_i(\ln \lambda)F_*Je_i + Je_i(\ln \lambda)F_*Je_i - g(Je_i, Je_i)F_*(\text{grad } \ln \lambda)\} \\ &+ \sum_{i=1}^{2r} \{\mu_i(\ln \lambda)F_*\mu_i + \mu_i(\ln \lambda)F_*\mu_i - g(\mu_i, \mu_i)F_*(\text{grad } \ln \lambda)\} \\ &= \sum_{i=1}^m 2g(\mathcal{H} \text{grad } \ln \lambda, Je_i)F_*Je_i - mF_*(\text{grad } \ln \lambda) \\ &+ \sum_{i=1}^{2r} 2g(\mathcal{H} \text{grad } \ln \lambda, \mu_i)F_*\mu_i - 2rF_*(\text{grad } \ln \lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. F bir konform submersiyon ve $p \in M$ için $T_{F(p)}N$ ' nin bir ortonormal bazı $\{\frac{1}{\lambda(p)}F_{*p}(Je_i), \frac{1}{\lambda(p)}F_{*p}(\mu_h)\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq h \leq r}$ olduğundan

$$\begin{aligned} i_Z^{(\zeta_{ek}F_*)^\perp} \nabla F_* &= \sum_{i=1}^m 2g'(F_*(\text{grad } \ln \lambda), \frac{1}{\lambda}F_*Je_i) \frac{1}{\lambda}F_*Je_i \\ &+ \sum_{i=1}^{2r} 2g'(F_*(\text{grad } \ln \lambda), \frac{1}{\lambda}F_*\mu_i) \frac{1}{\lambda}F_*\mu_i - (m+2r)F_*(\text{grad } \ln \lambda) \\ &= (2-m-2r)F_*(\text{grad } \ln \lambda) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

bulunur. (3.2.2) ve (3.2.3) denklemlerinden (3.2.1) denklemi elde edilir. $\square$

Teorem 3.2.1 den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 3.2.2. (M, g, J) ve (N, g') sırasıyla bir Kaehler manifold ve bir Riemann manifold olsun. $F : (M^{2m+2r}, g, J) \rightarrow (N^{m+2r}, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

- (i) F dönüşümü harmoniktir.
- (ii) Lifler minimaldir.
- (iii) F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.

İspat. Teorem 3.2.1 den

$$\tau(F) = -mF_*(\mu^{\zeta ekF_*}) + (2 - m - 2r)F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

olduğundan (i) ve (ii) varsa $(2 - m - 2r)F_*(\text{grad} \ln \lambda) = 0$ olup F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir. $\square$

Teorem 3.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M^{2m+2r}, g, J) \rightarrow (N^{m+2r}, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. F dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart liflerin minimal olmasıdır.

Şimdi konform anti-invariant submersiyonun tamamen jeodeziklik durumunu araştıracağız. İki Riemann manifold arasındaki bir F dönüşümü $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla F_*)(X, Y) = 0$ ise F dönüşümüne **tamamen jeodezik dönüşüm** denir. Bir tamamen jeodezik dönüşümün geometrik olarak ifadesi total uzaydaki her jeodeziğin baz uzayda da jeodezik olmasıdır.

Teorem 3.2.3. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \rightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma((\zeta ekF_*)^\perp)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için F dönüşümü tamamen jeodezik dönüşüm ise

$$\begin{aligned} -\nabla_X^F F_* Y &= F_* \{ J(A_X JY_1 + \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B}Y_2 + A_X CY_2) + \mathcal{C}(\mathcal{H} \nabla_X^M JY_1 \\ &+ A_X \mathcal{B}Y_2 + \mathcal{H} \nabla_X^M CY_2) \} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

dır.

İspat. $\forall X \in \Gamma((\zeta ekF_*)^\perp)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için, M bir Kaehler manifoldu olduğundan (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla F_*)(X, Y) &= \nabla_X^F F_* Y - F_*(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla_X^F F_* Y + F_*(J \nabla_X^M JY) \end{aligned}$$

yazılır. $Y_1 \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $Y_2 \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için $Y = Y_1 + Y_2 \in \Gamma(TM)$ dir. (2.4.8), (2.4.9) ve (3.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla F_*)(X, Y) &= \nabla_X^F F_* Y + F_* \{ J A_X J Y_1 + \mathcal{B} \mathcal{H} \nabla_X^M J Y_1 + C \mathcal{H} \nabla_X^M J Y_1 \\ &+ \mathcal{B} A_X \mathcal{B} Y_2 + C A_X \mathcal{B} Y_2 + J \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B} Y_2 \\ &+ J A_X C Y_2 + \mathcal{B} \mathcal{H} \nabla_X^M C Y_2 + C \mathcal{H} \nabla_X^M C Y_2 \} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla F_*)(X, Y) &= \nabla_X^F F_* Y + F_* \{ J (A_X J Y_1 + \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B} Y_2 + A_X C Y_2) \\ &+ C (\mathcal{H} \nabla_X^M J Y_1 + A_X \mathcal{B} Y_2 + \mathcal{H} \nabla_X^M C Y_2) \} \end{aligned}$$

elde edilir. $(\nabla F_*)(X, Y) = 0$ ise (3.2.4) denklemi sağlanır. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Tanım 3.2.1. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. $U \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için $(\nabla F_*)(JU, X) = 0$ ise F dönüşümüne $(J\zeta ek F_*, \mu)$ tamamen jeodezik dönüşüm denir.

Şimdi üsteki tanımın konform submersiyonun karakterizasyonu üzerine önemli bir etkisi olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.2.4. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda F dönüşümünün $(J\zeta ek F_*, \mu)$ tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart F dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olmasıdır.

İspat. $U \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için, (2.6.1) denkleminde,

$$(\nabla F_*)(JU, X) = JU(\ln \lambda) F_* X + X(\ln \lambda) F_* JU - g(JU, X) F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

yazılır. Üsteki denklemden F yatay homotetik dönüşüm ise $(\nabla F_*)(JU, X) = 0$ dır. Tersine, $(\nabla F_*)(JU, X) = 0$ ise

$$JU(\ln \lambda) F_* X + X(\ln \lambda) F_* JU = 0 \quad (3.2.5)$$

olur. F bir konform submersiyon olduğu için (3.2.5) denkleminin her iki tarafı F_*JU ile çarpılırsa

$$g(\text{grad} \ln \lambda, JU)g'(F_*X, F_*JU) + g(\text{grad} \ln \lambda, X)g'(F_*JU, F_*JU) = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklemden $g(\text{grad} \ln \lambda, X) = 0$ olup λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (3.2.5) denkleminin her iki tarafı F_*X ile çarpılırsa

$$g(\text{grad} \ln \lambda, JU)g'(F_*X, F_*X) + g(\text{grad} \ln \lambda, X)g'(F_*JU, F_*X) = 0$$

elde edilir. Bu denklemden de $g(\text{grad} \ln \lambda, JU) = 0$ olup λ , $\Gamma(J\check{c}ekF_*)$ üzerinde sabittir. Bu durumda λ , $(\check{c}ekF_*)^\perp$ üzerinde sabit olup ispat biter. $\square$

Teorem 3.2.5. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ ve $X, Y \in \Gamma((\check{c}ekF_*)^\perp)$ için F dönüşümünün tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şartlar

- (i) $T_U JV = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_U^M JV \in \Gamma(J\check{c}ekF_*)$,
 - (ii) F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.
 - (iii) $\hat{\nabla}_V BX + T_V CX = 0$ ve $T_V BX + \mathcal{H}\nabla_V^M CX \in \Gamma(J\check{c}ekF_*)$
- dır.

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ için, M bir Kaehler manifold olduğundan, (2.1.6) denklemini kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(U, V) = F_*(J\nabla_U^M JV)$$

olur. (2.4.7) ve (3.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla F_*)(U, V) &= F_*(JT_U JV + \mathcal{B}\mathcal{H}\nabla_U^M JV + C\mathcal{H}\nabla_U^M JV) \\ &= F_*(JT_U JV + C\mathcal{H}\nabla_U^M JV) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemden $(\nabla F_*)(U, V) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $F_*(JT_U JV + C\mathcal{H}\nabla_U^M JV) = 0$ dır. Buradan da $T_U JV = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_U^M JV \in \Gamma(J\check{c}ekF_*)$ elde

edilir. Diğer taraftan $\forall X, Y \in \Gamma(\mu)$ için (2.6.1) denkleminde,

$$(\nabla F_*)(X, Y) = X(\ln \lambda)F_*Y + Y(\ln \lambda)F_*X - g(X, Y)F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

olur. Yukarıdaki denklemden F dönüşümü yatay homotetik dönüşüm ise $(\nabla F_*)(X, Y) = 0$ dır. Tersine, $(\nabla F_*)(X, Y) = 0$ ise yukarıdaki denklemde $Y = JX$ yazılırsa

$$(\nabla F_*)(X, JX) = X(\ln \lambda)F_*JX + JX(\ln \lambda)F_*X - g(X, JX)F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

olup

$$X(\ln \lambda)F_*JX + JX(\ln \lambda)F_*X = 0 \quad (3.2.6)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğu için (3.2.6) denkleminin her iki tarafı F_*JX ile çarpılırsa

$$X(\ln \lambda)g'(F_*JX, F_*JX) + JX(\ln \lambda)g'(F_*X, F_*JX) = 0$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(\text{grad} \ln \lambda, X)\lambda^2 g(JX, JX) + g(\text{grad} \ln \lambda, JX)\lambda^2 g(X, JX) = 0$$

dır. Bu durumda λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan $U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için, (2.6.1) denkleminde,

$$(\nabla F_*)(JU, JV) = JU(\ln \lambda)F_*JV + JV(\ln \lambda)F_*JU - g(JU, JV)F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

yazılır. Yukarıdaki denklemden F bir yatay homotetik dönüşüm ise bu durumda $(\nabla F_*)(JU, JV) = 0$ dır. Tersine $(\nabla F_*)(JU, JV) = 0$ ise yukarıdaki denklemde V yerine U yazılıp denklem düzenlenirse

$$2JU(\ln \lambda)F_*JU - g(JU, JU)F_*(\text{grad} \ln \lambda) = 0 \quad (3.2.7)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğu için (3.2.7) denkleminin her iki tarafı F_*JU ile çarpılırsa

$$2JU(\ln \lambda)g'(F_*JU, F_*JU) - g(JU, JU)g'(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_*JU) = 0$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa $g(JU, JU)\lambda^2 g(\text{grad} \ln \lambda, JU) = 0$ elde edilir. Buradan da $\lambda, \Gamma(J\check{cek}F_*)$ üzerinde sabittir. Bu durumda $\lambda, \Gamma(\check{cek}F_*)^\perp$ üzerinde sabittir. Son olarak $X \in \Gamma((\check{cek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\check{cek}F_*)$ için, M bir Kaehler manifold olduğundan ve (2.6.1) denkleminde

$$(\nabla F_*)(X, V) = F_*(J\nabla_V^M JX)$$

elde edilir. (2.4.7) ve (3.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla F_*)(X, V) &= F_*(\mathcal{B}T_V \mathcal{B}X + CT_V \mathcal{B}X + J\hat{\nabla}_V \mathcal{B}X + \mathcal{B}\mathcal{H}\nabla_V^M CX \\ &\quad + \mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_V^M CX + JT_V CX) \\ &= F_*(CT_V \mathcal{B}X + J\hat{\nabla}_V \mathcal{B}X + \mathcal{C}\mathcal{H}\nabla_V^M CX + JT_V CX) \\ &= F_*(J(\hat{\nabla}_V \mathcal{B}X + T_V CX) + \mathcal{C}(T_V \mathcal{B}X + \mathcal{H}\nabla_V^M CX)) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemden $(\nabla F_*)(X, V) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $F_*(J(\hat{\nabla}_V \mathcal{B}X + T_V CX) + \mathcal{C}(T_V \mathcal{B}X + \mathcal{H}\nabla_V^M CX))$ dır. Buradan da $\hat{\nabla}_V \mathcal{B}X + T_V CX = 0$ ve $T_V \mathcal{B}X + \mathcal{H}\nabla_V^M CX \in \Gamma(J\check{cek}F_*)$ elde edilir. $\square$

3.3 Konform Anti-İnvaryant Submersiyonlar ve Ayırışım Teoremleri

Bu alt bölümde konform anti-invaryant submersiyonun belirlediği ayırışım teoremlerini vereceğiz. İlk olarak Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.5 den aşağıdaki ayırışım teoremi elde edilir.

Teorem 3.3.1. *(M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\check{cek}F_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\check{cek}F_*)$ için M manifoldunun bir yerel çarpım manifoldu olması için*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) &= -g(A_X \mathcal{B}Y, JV) + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) \\ &\quad - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(X, CY) \end{aligned}$$

ve

$$-\frac{1}{\lambda^2}g'(\nabla_{JW}^F F_* JV, F_* J CX) = g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, J CX)$$

dır. Tersine M bir yerel çarpım manifoldu ise

$$\frac{1}{\lambda^2}g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) = g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY)g(X, JV) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV)g(X, CY)$$

ve

$$-\frac{1}{\lambda^2}g'(\nabla_{JW}^F F_* JV, F_* J CX) = g(JW, JV)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, J CX)$$

dır.

Sonuç 3.1.2 ve Sonuç 3.1.3 den aşağıdaki teorem bulunur.

Teorem 3.3.2. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \rightarrow (N, g')$ bir konform Lagrangian submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için $A_X JY = 0$ ve $T_V JW = 0$ ise M manifoldu bir yerel çarpım manifoldudur.

Şimdi, bükümlü çarpım manifoldları ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3.3. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \rightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için M manifoldunun $M = M_{\zeta ek F_*} \times_\lambda M_{(\zeta ek F_*)^\perp}$ şeklinde bir bükümlü çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $(\zeta ek F_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilir,

$$-\frac{1}{\lambda^2}g'(\nabla_{JW}^F F_* JV, F_* J CX) = g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV)g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, J CX) \quad (3.3.1)$$

ve

$$\begin{aligned} g(X, Y)H &= -\mathcal{B}A_X \mathcal{B}Y + CY(\ln \lambda)\mathcal{B}X - \mathcal{B}\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda g(X, CY) \\ &\quad - JF^*(\nabla_X^F F_* CY) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

olmasıdır.

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için, M bir Kaehler manifoldu olduğundan (2.5.1), (2.4.7) ve (3.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\mathcal{H}\nabla_V^M JW, \mathcal{B}X) + g(T_V JW, CX) \\ &\quad + g(\mathcal{H}\nabla_V^M JW, CX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\mathcal{H}\nabla_V^M JW, CX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\nabla_V^M JW, CX) \end{aligned}$$

elde edilir. ∇^M konneksiyonu torsiyonsuz ve $[V, JW] \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\nabla_{JW}^M V, CX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(A_{JW} JV, JCX) + g(\mathcal{H}\nabla_{JW}^M JV, JCX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(\mathcal{H}\nabla_{JW}^M JV, JCX) \end{aligned}$$

dır. F bir konform submersiyon olduğundan, (2.1.6) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + \frac{1}{\lambda^2} g'(-JW(\ln \lambda) F_* JV - JV(\ln \lambda) F_* JW \\ &\quad + g(JW, JV) F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_{JW}^F F_* JV, F_* JCX) \\ &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JW) g'(F_* JV, F_* JCX) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) g'(F_* JW, F_* JCX) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g(JW, JV) g'(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_* JCX) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{JW}^F F_* JV, F_* JCX) \end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.1.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_V^M W, X) &= g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{JW}^F F_* JV, F_* JCX) \end{aligned}$$

elde edilir. $(\zeta ek F_*)$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon belirlemesi için gerek ve yeter şart

$$-\frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_{JW}^F F_* JV, F_* JCX) = g(T_V JW, \mathcal{B}X) + g(JW, JV) g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX)$$

olup (3.3.1) denklemi elde edilir. Diğer taraftan $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için, M bir kaehler manifoldu olduğundan (2.5.1), (2.4.8), (2.4.9), (3.1.1) ve (3.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) + g(\mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B}Y, JV) + g(A_X CY, JV) + g(\mathcal{H} \nabla_X^M CY, JV) \\ &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) + g(\mathcal{H} \nabla_X^M CY, JV) \end{aligned}$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğu için (2.1.6) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) + \frac{1}{\lambda^2} g' \{ -X(\ln \lambda) F_* CY - CY(\ln \lambda) F_* X \\ &\quad + g(X, CY) F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^F F_* CY, F_* JV \} \\ &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) g'(F_* CY, F_* JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g'(F_* X, F_* JV) + \frac{1}{\lambda^2} g(X, CY) g'(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_* JV) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \\ &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, X) \lambda^2 g(CY, JV) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) \lambda^2 g(X, JV) + \frac{1}{\lambda^2} g(X, CY) \lambda^2 g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.1.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^M Y, V) &= g(A_X \mathcal{B}Y, JV) - g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, CY) g(X, JV) \\ &\quad + g(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JV) g(X, CY) + \frac{1}{\lambda^2} g'(\nabla_X^F F_* CY, F_* JV) \end{aligned}$$

elde edilir. $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen umbilik foliasyon belirlemesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} g(g(X, Y)H, V) &= g(-JA_X \mathcal{B}Y, V) + CY(\ln \lambda) g(\mathcal{B}X, V) - g(\mathcal{B} \mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, V) g(X, CY) \\ &\quad - g(JF^*(\nabla_X^F F_* CY), V) \\ &= g(-\mathcal{B}A_X \mathcal{B}Y + CY(\ln \lambda) \mathcal{B}X - \mathcal{B} \mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda g(X, CY) \\ &\quad - JF^*(\nabla_X^F F_* CY), V) \end{aligned}$$

dır. Buradan da (3.3.2) denklemi elde edilir. $\square$

Teorem 3.3.4. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için M manifoldunun $M = M_{(\zeta ek F_*)^\perp} \times_\lambda M_{(\zeta ek F_*)}$ şeklinde bir çapraşık çarpım manifoldu yoktur.

İspat. $U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ and $X \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için

$$-X(\ln \lambda)g(U, V) = JV(\ln \lambda)g(U, JX)$$

dır. $X \in \Gamma(\mu)$ için

$$-X(\ln \lambda)g(U, V) = 0$$

olup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. $X = JU \in \Gamma(J\zeta ek F_*)$ alınırsa

$$JU(\ln \lambda)g(U, V) = JV(\ln \lambda)g(U, U) \quad (3.3.3)$$

elde edilir. (3.3.3) denkleminde U ile V 'nin yerleri değiştirilirse

$$JV(\ln \lambda)g(U, V) = JU(\ln \lambda)g(V, V) \quad (3.3.4)$$

bulunur. Ayrıca (3.3.3) denkleminde

$$JV(\ln \lambda) = \frac{JU(\ln \lambda)g(U, V)}{g(U, U)} \quad (3.3.5)$$

olur. (3.3.5) denklemi (3.3.4) denkleminde yazılırsa

$$JU(\ln \lambda) = JU(\ln \lambda) \frac{g(U, V)^2}{|U|^2 |V|^2} \quad (3.3.6)$$

elde edilir. (3.3.6) denkleminde ya $\lambda, \Gamma(J\zeta ek F_*)$ üzerinde sabittir ya da $\Gamma(J\zeta ek F_*)$ 1-boyutludur. $\square$

3.4 Konform Anti-İnvariant Submersiyonlar İçin Eğrilik İlişkileri

Bu alt bölümde, bir konform anti-invariant submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerinin kesit eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmektedir.

(M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. R_M , R_N ve $\hat{R}$ sırasıyla M , N ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olsun.

Teorem 3.4.1. *(M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. K_M , K_N ve $\hat{K}$ ile sırasıyla M , N ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin kesit eğrilikleri olsun. X, Y birim yatay vektör ve U, V dikey vektör alanları için*

$$\begin{aligned} K_M(U, V) &= \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*JU, F_*JV) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[JU, JV] \|^2 \\ &- \frac{\lambda^2}{2} \{ g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) + g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV) \} \\ &+ \frac{\lambda^4}{4} \{ \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 + \| JU(\frac{1}{\lambda^2})JV - JV(\frac{1}{\lambda^2})JU \|^2 \}, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} K_M(X, Y) &= \hat{K}(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y) + \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*CX, F_*CY) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[CX, CY] \|^2 \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \{ g(CX, CY)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\ &- g(CY, CY)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) + g(CY, CX)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY) \\ &- g(CX, CX)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY) \} + \frac{\lambda^4}{4} \{ (g(CX, CX)g(CY, CY) \\ &- g(CY, CX)g(CX, CY)) \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 \\ &+ \| CX(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX \|^2 \} + \| T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}Y \|^2 - g(T_{\mathcal{B}Y}\mathcal{B}Y, T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}X) \\ &+ g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{CY}CY, \mathcal{B}X) + \| A_{CY}\mathcal{B}X \|^2 - g((\nabla_{CY}^M T)_{\mathcal{B}X}CY, \mathcal{B}X) \\ &- \| T_{\mathcal{B}X}CY \|^2 + g((\nabla_{\mathcal{B}Y}^M A)_{CX}CX, \mathcal{B}Y) + \| A_{CX}\mathcal{B}Y \|^2 \\ &- g((\nabla_{CX}^M T)_{\mathcal{B}Y}CX, \mathcal{B}Y) - \| T_{\mathcal{B}Y}CX \|^2, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) &= \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* CX, F_* JU) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[CX, JU] \|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CX) \\
&\quad g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) + g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX)\} + \frac{\lambda^4}{4} \{g(CX, CX) \\
&\quad \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 + \| CX(\frac{1}{\lambda^2})JU - JU(\frac{1}{\lambda^2})CX \|^2\} \\
&\quad + g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{JU} JU, \mathcal{B}X) + \| A_{JU} \mathcal{B}X \|^2 \\
&\quad - g((\nabla_{JU}^M T)_{\mathcal{B}X} JU, \mathcal{B}X) - \| T_{\mathcal{B}X} JU \|^2
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

dır.

İspat. M bir Kaehler manifold olduğunda U ve V dikey vektör alanları için $K_M(U, V) = K_M(JU, JV)$ elde edilir. (2.6.7) ve (2.1.8) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) &= K_M(JU, JV) = g(R_M(JU, JV)JV, JU) = \frac{1}{\lambda^2} g'(R_N(F_* JU, F_* JV)F_* JV, F_* JU) \\
&\quad + \frac{1}{4} \{g(\mathcal{V}[JU, JV], \mathcal{V}[JV, JU]) - g(\mathcal{V}[JV, JV], \mathcal{V}[JU, JU])\} \\
&\quad + 2g(\mathcal{V}[JU, JV], \mathcal{V}[JV, JU]) \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{2} \{g(JU, JV)g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) - g(JV, JV)g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) \\
&\quad + g(JV, JU)g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV) - g(JU, JU)g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV)\} \\
&\quad + \frac{\lambda^4}{4} \{(g(JU, JU)g(JV, JV) - g(JV, JU)g(JU, JV)) \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 \\
&\quad + g(JU(\frac{1}{\lambda^2})JV - JV(\frac{1}{\lambda^2})JU, JU(\frac{1}{\lambda^2})JV - JV(\frac{1}{\lambda^2})JU)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) &= \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* JU, F_* JV) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[JU, JV] \|^2 \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{2} \{g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) + g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV)\} \\
&\quad + \frac{\lambda^4}{4} \{\| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 + \| JU(\frac{1}{\lambda^2})JV - JV(\frac{1}{\lambda^2})JU \|^2\}
\end{aligned}$$

elde edilir. M bir Kaehler manifold olduğundan X ve Y yatay vektör alanları için, (3.1.2) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_M(X, Y) &= K_M(JX, JY) = K_M(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y) + K_M(CX, CY) \\
&\quad + K_M(\mathcal{B}X, CY) + K_M(CX, \mathcal{B}Y)
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

yazılır. (2.6.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_M(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y) &= g(R_M(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y)\mathcal{B}Y, \mathcal{B}X) = g(\hat{R}(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y)\mathcal{B}Y, \mathcal{B}X) \\
&+ g(T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}Y, T_{\mathcal{B}Y}\mathcal{B}X) - g(T_{\mathcal{B}Y}\mathcal{B}Y, T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}X) \\
&= \hat{K}(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y) + \|T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}Y\|^2 \\
&- g(T_{\mathcal{B}Y}\mathcal{B}Y, T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}X) \tag{3.4.5}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.6.7) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_M(CX, CY) &= g(R_M(CX, CY)CY, CX) = \frac{1}{\lambda^2} g'(R_N(F_*CX, F_*CY)F_*CY, F_*CX) \\
&+ \frac{1}{4} \{g(\mathcal{V}[CX, CY], \mathcal{V}[CY, CX]) - g(\mathcal{V}[CY, CY], \mathcal{V}[CX, CX])\} \\
&+ 2g(\mathcal{V}[CX, CY], \mathcal{V}[CY, CX])\} \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CY)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) - g(CY, CY) \\
&\quad g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) + g(CY, CX)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY) \\
&\quad - g(CX, CX)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY)\} + \frac{\lambda^4}{4} \{(g(CX, CX)g(CY, CY) \\
&\quad - g(CY, CX)g(CX, CY)) \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 \\
&+ g(CX(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX, CX(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX)\}
\end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
K_M(CX, CY) &= \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*CX, F_*CY) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[CX, CY] \|^2 + \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CY) \\
&\quad g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) - g(CY, CY)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\
&+ g(CY, CX)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY) - g(CX, CX)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY)\} \\
&+ \frac{\lambda^4}{4} \{g(CX, CX)g(CY, CY) - g(CY, CX)g(CX, CY) \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 \\
&+ \| CX(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX \|^2\} \tag{3.4.6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} K_M(\mathcal{B}X, CY) &= g(R_M(\mathcal{B}X, CY)CY, \mathcal{B}X) = g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{CY}CY, \mathcal{B}X) + g(A_{CY}\mathcal{B}X, A_{CY}\mathcal{B}X) \\ &\quad - g((\nabla_{CY}^M T)_{\mathcal{B}X}CY, \mathcal{B}X) - g(T_{\mathcal{B}X}CY, T_{\mathcal{B}X}CY) \\ &\quad + \lambda^2 g(A_{CY}CY, \mathcal{B}X)g(\mathcal{B}X, \text{grad}_\nu(\frac{1}{\lambda^2})) \end{aligned}$$

olup, A temel tensörü anti-simetrik olduğundan,

$$\begin{aligned} K_M(\mathcal{B}X, CY) &= g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{CY}CY, \mathcal{B}X) + \|A_{CY}\mathcal{B}X\|^2 - g((\nabla_{CY}^M T)_{\mathcal{B}X}CY, \mathcal{B}X) \\ &\quad - \|T_{\mathcal{B}X}CY\|^2 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

elde edilir. Son olarakta

$$\begin{aligned} K_M(CX, \mathcal{B}Y) &= K_M(\mathcal{B}Y, CX) = g((\nabla_{\mathcal{B}Y}^M A)_{CX}CX, \mathcal{B}Y) + g(A_{CX}\mathcal{B}Y, A_{CX}\mathcal{B}Y) \\ &\quad - g((\nabla_{CX}^M T)_{\mathcal{B}Y}CX, \mathcal{B}Y) - g(T_{\mathcal{B}Y}CX, T_{\mathcal{B}Y}CX) \\ &\quad + \lambda^2 g(A_{CX}CX, \mathcal{B}Y)g(\mathcal{B}Y, \text{grad}_\nu(\frac{1}{\lambda^2})) \end{aligned}$$

olup A temel tensörünün anti-simetrik olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} K_M(CX, \mathcal{B}Y) &= g((\nabla_{\mathcal{B}Y}^M A)_{CX}CX, \mathcal{B}Y) + \|A_{CX}\mathcal{B}Y\|^2 - g((\nabla_{CX}^M T)_{\mathcal{B}Y}CX, \mathcal{B}Y) \\ &\quad - \|T_{\mathcal{B}Y}CX\|^2 \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

elde edilir. (3.4.5), (3.4.6), (3.4.7) ve (3.4.8) denklemleri (3.4.4) denkleminde yerlerine yazılırsa (3.4.2) elde edilir.

M bir Kaehler manifold olduğundan X yatay ve U dikey vektör alanları için, (3.1.2) denklemi kullanılırsa

$$K_M(X, Y) = K_M(JX, JU) = K_M(\mathcal{B}X, JU) + K_M(CX, JU) \quad (3.4.9)$$

yazılır. (2.6.6) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} K_M(\mathcal{B}X, JU) &= g(R_M(\mathcal{B}X, JU)JU, \mathcal{B}X) = g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{JU}JU, \mathcal{B}X) + g(A_{JU}\mathcal{B}X, A_{JU}\mathcal{B}X) \\ &\quad - g((\nabla_{JU}^M T)_{\mathcal{B}X}JU, \mathcal{B}X) - g(T_{\mathcal{B}X}JU, T_{\mathcal{B}X}JU) \\ &\quad + \lambda^2 g(A_{JU}JU, \mathcal{B}X)g(\mathcal{B}X, \text{grad}_\nu(\frac{1}{\lambda^2})) \end{aligned}$$

olur. A temel tensörü anti-simetrik olduğundan

$$K_M(\mathcal{B}X, JU) = g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{JU} JU, \mathcal{B}X) + \|A_{JU} \mathcal{B}X\|^2 - g((\nabla_{JU}^M T)_{\mathcal{B}X} JU, \mathcal{B}X) - \|T_{\mathcal{B}X} JU\|^2 \quad (3.4.10)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} K_M(CX, JU) &= g(R_M(CX, JU)JU, CX) = \frac{1}{\lambda^2} g'(R_N(F_* CX, F_* JU)F_* JU, F_* CX) \\ &+ \frac{1}{4} \{g(\mathcal{V}[CX, JU], \mathcal{V}[JU, CX]) - g(\mathcal{V}[JU, JU], \mathcal{V}[CX, CX]) \\ &+ 2g(\mathcal{V}[CX, JU], \mathcal{V}[JU, CX])\} \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, JU)g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) - g(JU, JU)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\ &+ g(JU, CX)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) - g(CX, CX)g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU)\} \\ &+ \frac{\lambda^4}{4} \{(g(CX, CX)g(JU, JU) - g(JU, CX)g(CX, JU)) \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 \\ &+ g(CX(\frac{1}{\lambda^2})JU - JU(\frac{1}{\lambda^2})CX, CX(\frac{1}{\lambda^2})JU - JU(\frac{1}{\lambda^2})CX)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} K_M(CX, JU) &= \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* CX, F_* JU) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[CX, JU] \|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \{g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\ &- g(CX, CX)g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU)\} + \frac{\lambda^4}{4} \{(g(CX, CX) \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 \\ &+ \| CX(\frac{1}{\lambda^2})JU - JU(\frac{1}{\lambda^2})CX \|^2\} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

elde edilir. (3.4.10) ve (3.4.11) denklemleri (3.4.9) denkleminde yerlerine yazılırsa (3.4.3) denklemi elde edilir. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.4.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.4.1. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. U ve V dikey vektör alanları için

$$\begin{aligned} \hat{K}(U, V) &\leq \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* JU, F_* JV) - \frac{\lambda^2}{2} \{g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) + g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV)\} \\ &+ \frac{\lambda^4}{4} \{\| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 + \| JU(\frac{1}{\lambda^2})JV - JV(\frac{1}{\lambda^2})JU \|^2\} + g(T_V V, T_U U) \end{aligned}$$

dır. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart liflerin tamamen jeodezik olması ve $J\check{c}ekF_*$ distribüsyonunun integrallenebilir olmasıdır.

İspat. U, V dikey vektör alanları için (3.4.1) denkleminde

$$\begin{aligned} K_M(U, V) &= \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*JU, F_*JV) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[JU, JV] \|^2 \\ &- \frac{\lambda^2}{2} \{ g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) + g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV) \} \\ &+ \frac{\lambda^4}{4} \{ \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 + \| JU(\frac{1}{\lambda^2})JV - JV(\frac{1}{\lambda^2})JU \|^2 \} \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan (2.4.15) denkleminde

$$K_M(U, V) = \hat{K}(U, V) + \| T_U V \|^2 - g(T_V V, T_U U)$$

olup bu denklem yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{K}(U, V) + \| T_U V \|^2 - g(T_V V, T_U U) &= \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*JU, F_*JV) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[JU, JV] \|^2 \\ &- \frac{\lambda^2}{2} \{ g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) \\ &+ g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV) \} + \frac{\lambda^4}{4} \{ \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 \\ &+ \| JU(\frac{1}{\lambda^2})JV - JV(\frac{1}{\lambda^2})JU \|^2 \} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \hat{K}(U, V) + \| T_U V \|^2 + \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[JU, JV] \|^2 &\leq \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*JU, F_*JV) - \frac{\lambda^2}{2} \{ g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) \\ &+ g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV) \} + \frac{\lambda^4}{4} \{ \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2 \\ &+ \| JU(\frac{1}{\lambda^2})JV - JV(\frac{1}{\lambda^2})JU \|^2 \} + g(T_V V, T_U U) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin olabilmesi için $\| T_U V \|^2 + \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[JU, JV] \|^2 = 0$ olup $\| T_U V \|^2 = 0$ ve $\frac{3}{4} \| \mathcal{V}[JU, JV] \|^2 = 0$ bulunur. Buradan da lifler tamamen jeodezik ve $J\check{c}ekF_*$ distribüsyonu integrallenebilirdir. $\square$

Benzer şekilde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.2. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. U ve V dikey vektör alanları için

$$\begin{aligned} \hat{K}(U, V) \geq & \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*JU, F_*JV) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[JU, JV] \|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \{g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) \\ & + g(\nabla_{JV}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JV)\} - \|T_U V\|^2 + g(T_V V, T_U U) \end{aligned}$$

dır. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart F dönüşümünün yatay homotetik submersiyon olmasıdır.

Sonuç 3.4.3. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invariant submersiyon olsun. X ve Y yatay vektör alanları için

$$\begin{aligned} K_M(X, Y) \geq & \hat{K}(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y) + \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*CX, F_*CY) - \frac{3}{4} \| \mathcal{V}[CX, CY] \|^2 \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CY)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\ & - g(CY, CY)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) + g(CY, CX)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY) \\ & - g(CX, CX)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY)\} \\ & + \frac{\lambda^4}{4} \{(g(CX, CX)g(CY, CY) - g(CY, CX)g(CX, CY)) \| \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) \|^2\} \\ & - g(T_{BY} \mathcal{B}Y, T_{BX} \mathcal{B}X) - g((\nabla_{CY}^M T)_{\mathcal{B}X} CY, \mathcal{B}X) \\ & + g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{CY} CY, \mathcal{B}X) - \|T_{BX} CY\|^2 + g((\nabla_{\mathcal{B}Y}^M A)_{CX} CX, \mathcal{B}Y) \\ & + \|A_{CX} \mathcal{B}Y\|^2 - g((\nabla_{CX}^M T)_{\mathcal{B}Y} CX, \mathcal{B}Y) - \|T_{BY} CX\|^2 \end{aligned}$$

dır. Eşitliğin olabilmesi için $T_{BX} \mathcal{B}Y = 0$, $A_{CY} \mathcal{B}X = 0$ ve $CX(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX = 0$ olup buradan ya μ 1-boyutludur ya da λ, μ üzerinde sabittir.

İspat. X, Y yatay vektör alanları için (3.4.2) denkleminde

$$\begin{aligned}
K_M(X, Y) &= \hat{K}(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y) + \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* CX, F_* CY) - \frac{3}{4} \|\mathcal{V}[CX, CY]\|^2 \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CY)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\
&- g(CY, CY)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) + g(CY, CX)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY) \\
&- g(CX, CX)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY)\} + \frac{\lambda^4}{4} \{(g(CX, CX)g(CY, CY) \\
&- g(CY, CX)g(CX, CY)) \|\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2})\|^2 \\
&+ \|\text{CX}(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX\|^2\} + \|T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}Y\|^2 - g(T_{\mathcal{B}Y}\mathcal{B}Y, T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}X) \\
&+ g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{CY}CY, \mathcal{B}X) + \|A_{CY}\mathcal{B}X\|^2 - g((\nabla_{CY}^M T)_{\mathcal{B}X}CY, \mathcal{B}X) \\
&- \|T_{\mathcal{B}X}CY\|^2 + g((\nabla_{\mathcal{B}Y}^M A)_{CX}CX, \mathcal{B}Y) + \|A_{CX}\mathcal{B}Y\|^2 \\
&- g((\nabla_{CX}^M T)_{\mathcal{B}Y}CX, \mathcal{B}Y) - \|T_{\mathcal{B}Y}CX\|^2
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
&K_M(X, Y) - \|T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}Y\|^2 - \|A_{CY}\mathcal{B}X\|^2 - \frac{\lambda^4}{4} \|\text{CX}(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX\|^2 \\
&\geq \hat{K}(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y) \\
&+ \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* CX, F_* CY) - \frac{3}{4} \|\mathcal{V}[CX, CY]\|^2 + \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CY)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\
&- g(CY, CY)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\
&+ g(CY, CX)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY) - g(CX, CX)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY)\} \\
&+ \frac{\lambda^4}{4} \{(g(CX, CX)g(CY, CY) - g(CY, CX)g(CX, CY)) \|\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2})\|^2\} \\
&- g(T_{\mathcal{B}Y}\mathcal{B}Y, T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}X) - g((\nabla_{CY}^M T)_{\mathcal{B}X}CY, \mathcal{B}X) + g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{CY}CY, \mathcal{B}X) + \|A_{CX}\mathcal{B}Y\|^2 \\
&- \|T_{\mathcal{B}X}CY\|^2 + g((\nabla_{\mathcal{B}Y}^M A)_{CX}CX, \mathcal{B}Y) - g((\nabla_{CX}^M T)_{\mathcal{B}Y}CX, \mathcal{B}Y) - \|T_{\mathcal{B}Y}CX\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin olabilmesi ise

$$\|T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}Y\|^2 + \|A_{CY}\mathcal{B}X\|^2 + \frac{\lambda^4}{4} \|\text{CX}(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX\|^2 = 0$$

olup buradan $T_{\mathcal{B}X}\mathcal{B}Y = 0$, $A_{CY}\mathcal{B}X = 0$ ve $\text{CX}(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX = 0$ olup buradan ya μ 1-boyutludur ya da λ, μ üzerinde sabittir. $\square$

Benzer şekilde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.4. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. X ve Y yatay vektör alanları için

$$\begin{aligned}
K_M(X, Y) \leq & \hat{K}(\mathcal{B}X, \mathcal{B}Y) + \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* CX, F_* CY) - \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CY)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) \\
& - g(CY, CY)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX) + g(CY, CX)g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY) \\
& - g(CX, CX)g(\nabla_{CY}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CY)\} \\
& + \frac{\lambda^4}{4} \{(g(CX, CX)g(CY, CY) - g(CY, CX)g(CX, CY)) \|\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2})\|^2 \\
& + \|CX(\frac{1}{\lambda^2})CY - CY(\frac{1}{\lambda^2})CX\|^2\} + \|T_{\mathcal{B}X} \mathcal{B}Y\|^2 \\
& - g(T_{\mathcal{B}Y} \mathcal{B}Y, T_{\mathcal{B}X} \mathcal{B}X) + g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{CY} CY, \mathcal{B}X) + \|A_{CY} \mathcal{B}X\|^2 \\
& - g((\nabla_{CY}^M T)_{\mathcal{B}X} CY, \mathcal{B}X) + g((\nabla_{\mathcal{B}Y}^M A)_{CX} CX, \mathcal{B}Y) + \|A_{CX} \mathcal{B}Y\|^2 \\
& - g((\nabla_{CX}^M T)_{\mathcal{B}Y} CX, \mathcal{B}Y) - \|T_{\mathcal{B}Y} CX\|^2
\end{aligned}$$

dır. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $T_{\mathcal{B}X} CY = 0$ ve $[CX, CY] \in \mathcal{H}$ dır.

Sonuç 3.4.5. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. X yatay ve U dikey vektör alanları için

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) \geq & \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* CX, F_* JU) - \frac{3}{4} \|\mathcal{V}[CX, JU]\|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CX)g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) \\
& + g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX)\} + g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{JU} JU, \mathcal{B}X) - g((\nabla_{JU}^M T)_{\mathcal{B}X} JU, \mathcal{B}X) \\
& - \|T_{\mathcal{B}X} JU\|^2
\end{aligned}$$

dır. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $A_{JU} \mathcal{B}X = 0$ ve $\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) = 0$ yani, F yatay homotetik submersiyondur. M bağlantılı ise λ sabit fonksiyondur.

İspat. X yatay ve U dikey vektör alanları için (3.4.3) denkleminde

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) = & \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_* CX, F_* JU) - \frac{3}{4} \|\mathcal{V}[CX, JU]\|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CX) \\
& g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) + g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^4}{4} \{g(CX, CX) \|\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2})\|^2 + \|CX(\frac{1}{\lambda^2})JU - JU(\frac{1}{\lambda^2})CX\|^2\} \\
& + g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{JU}JU, \mathcal{B}X) + \|A_{JU}\mathcal{B}X\|^2 - g((\nabla_{JU}^M T)_{\mathcal{B}X}JU, \mathcal{B}X) - \|T_{\mathcal{B}X}JU\|^2
\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
& K_M(X, U) - \|A_{JU}\mathcal{B}X\|^2 - \frac{\lambda^4}{4} \{g(CX, CX) \|\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2})\|^2 \\
& + \|CX(\frac{1}{\lambda^2})JU - JU(\frac{1}{\lambda^2})CX\|^2\} \\
& \geq \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*CX, F_*JU) - \frac{3}{4} \|\mathcal{V}[CX, JU]\|^2 \\
& - \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CX)g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) + g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX)\} \\
& + g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{JU}JU, \mathcal{B}X) - g((\nabla_{JU}^M T)_{\mathcal{B}X}JU, \mathcal{B}X) - \|T_{\mathcal{B}X}JU\|^2
\end{aligned}$$

olup eşitliğin olabilmesi için

$$\|A_{JU}\mathcal{B}X\|^2 + \frac{\lambda^4}{4} \{g(CX, CX) \|\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2})\|^2 + \|CX(\frac{1}{\lambda^2})JU - JU(\frac{1}{\lambda^2})CX\|^2\} = 0$$

olup buradan $A_{JU}\mathcal{B}X = 0$ ve $\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}) = 0$ yani, F yatay homotetik submersiyondur. M bağlantılı ise λ sabit fonksiyondur. $\square$

Son olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.6. (M, g, J) bir Kaehler manifold, (N, g') bir Riemann manifold ve $F : (M, g, J) \longrightarrow (N, g')$ bir konform anti-invaryant submersiyon olsun. X yatay ve U dikey vektör alanları için

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) & \leq \frac{1}{\lambda^2} K_N(F_*CX, F_*JU) - \frac{\lambda^2}{2} \{g(CX, CX)g(\nabla_{JU}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), JU) \\
& + g(\nabla_{CX}^M \text{grad}(\frac{1}{\lambda^2}), CX)\} \\
& + \frac{\lambda^4}{4} \{g(CX, CX) \|\text{grad}(\frac{1}{\lambda^2})\|^2 + \|CX(\frac{1}{\lambda^2})JU - JU(\frac{1}{\lambda^2})CX\|^2\} \\
& + g((\nabla_{\mathcal{B}X}^M A)_{JU}JU, \mathcal{B}X) + \|A_{JU}\mathcal{B}X\|^2 - g((\nabla_{JU}^M T)_{\mathcal{B}X}JU, \mathcal{B}X)
\end{aligned}$$

dır. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $T_{\mathcal{B}X}JU = 0$ ve $[CX, JU] \in \mathcal{H}$ dır.

4. KONFORM YARI-INVARYANT SUBMERSİYONLAR

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform yarı-invaryant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Ayrıca bu tip submersiyonlar için distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralelliği incelenmektedir. İkinci alt bölümde ise bu tip submersiyonların harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmektedir.

4.1 Konform Yarı-İnvaryant Submersiyonlar

Tanım 4.1.1. (M, g_M, J_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n boyutlu bir hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold olsun. Bu durumda $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir yatay konform submersiyon olmak üzere, $D_1 \subseteq \text{çek}F_*$ distribüsyonu var,

$$\text{çek}F_* = D_1 \oplus D_2 \quad (4.1.1)$$

ve

$$J(D_1) = D_1, \quad J(D_2) \subseteq (\text{çek}F_*)^\perp \quad (4.1.2)$$

ise F dönüşümüne bir **konform yarı-invaryant submersiyon** denir. Burada D_2 distribüsyonu $\text{çek}F_*$ da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır.

Öncelikle not edelim ki $\text{çek}F_*$ distribüsyonu integrallenebilirdir. Bu yüzden, Tanım 4.1.1'den $\text{çek}F_*$ 'ın $F^{-1}(q)$, $q \in N$ integral manifoldu (lif) M manifoldunun bir CR -alt-manifoldudur.

Aşağıda, yukarıda verilen konform yarı-invaryant submersiyonlar için örnekler verilmektedir.

Örnek 4.1.1. Bir hemen hemen Hermityen manifoldundan bir hemen hemen Hermityen manifolduna tanımlı her Hermityen submersiyon $D_2 = \{0\}$ olan bir konform yarı-invaryant submersiyondur [59].

Örnek 4.1.2. Bir hemen hemen Hermityen manifoldundan bir Riemann manifolduna tanımlı her konform anti-invaryant submersiyon $D_1 = \{0\}$ olan bir konform yarı-invaryant submersiyondur [55].

Eğer $\lambda \neq 1$ ise bir konform yarı-invaryant submersiyona **has konform yarı-invaryant submersiyon** denir. Şimdi bir has konform yarı-invaryant submersiyona örnek verelim. R^{2m} ile $2m$ -boyutlu standart metrikli Öklid uzayını gösterelim. Eğer (R^{2m}, J) , standart flat Kaehler metrikli C^m kompleks sayılar uzayına kompleks analitik olarak izometrik ise R^{2m} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı J ye uyumludur denir.

R^{2m} üzerinde standart iç çarpım ile uyumlu hemen hemen kompleks yapı J 'yi

$$J(a^1, \dots, a^{2m}) = (-a^2, a^1, \dots, -a^{2m}, a^{2m-1})$$

şeklinde tanımlayalım.

Örnek 4.1.3. R^6 ve R^2 standart iç çarpımları ile verilen Öklidyen uzaylar olsun. Bu durumda

$$F : \begin{matrix} R^6 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} R^2 \\ (e^{x_3} \cos x_5, e^{x_3} \sin x_5) \end{matrix},$$

diferensiyellenebilir dönüşümü şeklinde tanımlansın. Burada $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ile R^6 uzayının bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$F_* \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{x_3} \cos x_5 & 0 & -e^{x_3} \sin x_5 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \sin x_5 & 0 & e^{x_3} \cos x_5 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $rank F_* = boy R^2 = 2$ bulunur. Böylece F bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\mathcal{V} = \text{çek} F_* = \text{Span}\{V_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, V_3 = \frac{\partial}{\partial x_4}, V_4 = \frac{\partial}{\partial x_6}\}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = (\text{çek} F_*)^\perp = \text{Span}\{X_1 = e^{x_3} \cos x_5 \frac{\partial}{\partial x_3} - e^{x_3} \sin x_5 \frac{\partial}{\partial x_5}, \\ X_2 = e^{x_3} \sin x_5 \frac{\partial}{\partial x_3} + e^{x_3} \cos x_5 \frac{\partial}{\partial x_5}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca R^6 üzerinde tanımlı J hemen hemen kompleks yapısı

$$J(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (-a_2, a_1, -a_4, a_3, -a_6, a_5)$$

olsun. Buradan $JV_1 = V_2$ olup $D_1 = \{V_1, V_2\}$ distribüsyonu invaryanttır. Aynı şekilde $JV_3 = -e^{-x_3} \cos x_5 X_1 - e^{-x_3} \sin x_5 X_2$ ve $JV_4 = e^{-x_3} \sin x_5 X_1 - e^{-x_3} \cos x_5 X_2$ bulunur. Buradan da $D_2 = \{V_3, V_4\}$ distribüsyonu anti-invaryanttır. $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, R^2 nin standart bazı olmak üzere, doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned} F_* X_1 &= (e^{x_3})^2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ F_* X_2 &= (e^{x_3})^2 \frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned}$$

bulunur. R^6 ve R^2 üzerindeki standart iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g'(F_* X_1, F_* X_1) = (e^{x_3})^2 g(X_1, X_1)$$

ve

$$g'(F_* X_2, F_* X_2) = (e^{x_3})^2 g(X_2, X_2)$$

olup F dönüşümü $\lambda = e^{x_3}$ olan bir konform yarı-invaryant submersiyondur.

Şimdi D_1 ve D_2 distribüsyonlarının integrallenebilirliğini inceleyeceğiz.

Lemma 4.1.1. (M, g_M, J_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n boyutlu bir hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold, $F : (M, g_M, J_M) \rightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için

- i) D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için dönüşümün ikinci temel formu $(\nabla F_*)(Y, JX) - (\nabla F_*)(X, JY) \in \Gamma(F_*(\mu))$ şartını sağlamalıdır.
- ii) D_2 distribüsyonu her zaman integrallenebilirdir.

İspat. (i) D_1 distribüsyonunun integrallenebilmesi için $X, Y \in \Gamma(D_1)$, $Z \in \Gamma(D_2)$ ve $W \in \Gamma((\text{çek} F_*)^\perp)$ için $g_M([X, Y], Z) = 0$ ve $g_M([X, Y], W) = 0$ dır. $\text{çek} F_*$ distribüsyonu

integrallenebilir olduğu için $g_M([X, Y], W) = 0$ dır. Bu yüzden D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $g_M([X, Y], Z) = 0$ olmasıdır. $X, Y \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için (2.5.1) denklemi kullanılırsa

$$g_M([X, Y], Z) = g_M(\mathcal{H}\nabla_X^M JY, JZ) - g_M(\mathcal{H}\nabla_Y^M JX, JZ)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğundan, (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$g_M([X, Y], Z) = \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(Y, JX) - (\nabla F_*)(X, JY), F_* JZ)$$

olur. $[X, Y] \in D_1$ ise D_1 integrallenebilirdir $\Leftrightarrow (\nabla F_*)(Y, JX) - (\nabla F_*)(X, JY) \in \Gamma(F_*(\mu))$ dır.

(ii) M bir Kaehler manifold olduğu için, temel 2-form Ω kapalıdır. $X \in \Gamma(D_1)$ ve $Y, Z \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned} 3d\Omega(X, Y, Z) &= X\Omega(Y, Z) - Y\Omega(X, Z) - Z\Omega(X, Y) \\ &\quad - \Omega([X, Y], Z) + \Omega(Y, [X, Z]) + \Omega(X, [Y, Z]) \\ &= Xg_M(Y, JZ) - Yg_M(X, JZ) - Zg_M(X, JY) \\ &\quad - g_M([X, Y], JZ) - g_M(JY, [X, Z]) - g_M(JX, [Y, Z]) \\ &= -g_M(JX, [Y, Z]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $[Y, Z] \in \Gamma(D_2)$ olup D_2 her zaman integrallenebilirdir. $\square$

$F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. $\text{çek}F_*$ da JD_2 ye tamamlayıcı ortogonal distribüsyonu μ ile gösterelim. Kolayca görülür ki, μ distribüsyonu J altında $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonunun invaryant distribüsyonudur. $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için,

$$JV = \phi V + \omega V \tag{4.1.3}$$

yazılır, burada $\phi V \in \Gamma(D_1)$ ve $\omega V \in \Gamma(JD_2)$ dir. Ayrıca $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için,

$$JX = \mathcal{B}X + CX \tag{4.1.4}$$

yazılır. Burada da $\mathcal{B}X \in \Gamma(D_2)$ ve $CX \in \Gamma(\mu)$ dır. Bu durumda $\forall V, W \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ için (2.4.6), (2.4.7), (4.1.3) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_V^M \phi)W &= \mathcal{B}T_V W - T_V \omega W \\ (\nabla_V^M \omega)W &= C T_V W - T_V \phi W\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$(\nabla_V^M \phi)W = \hat{\nabla}_V \phi W - \phi \hat{\nabla}_V W$$

ve

$$(\nabla_V^M \omega)W = \mathcal{H} \nabla_V^M \omega W - \omega \hat{\nabla}_V W$$

dır.

Şimdi $(\check{c}ekF_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilirliğini, $\check{c}ekF_*$ ve $(\check{c}ekF_*)^\perp$ distribüsyonlarının liflerinin geometrisini inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.1. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\check{c}ekF_*)^\perp)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $(\check{c}ekF_*)^\perp$ distribüsyonunun integralenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}&\lambda^2 \{g_M(A_Y \mathcal{B}X - A_X \mathcal{B}Y - CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y + 2g_M(X, CY)grad \ln \lambda, JW)\} \\ &= g_N(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JW)\end{aligned}$$

ve

$$A_Y \omega \mathcal{B}X - A_X \omega \mathcal{B}Y + J(A_Y CX - A_X CY) \notin \Gamma(D_1)$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\check{c}ekF_*)^\perp)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, Tanım 4.1.1 den $(\check{c}ekF_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $g_M([X, Y], V) = 0$ ve $g_M([X, Y], W) = 0$ dır. M bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$g_M([X, Y], V) = g_M(\nabla_X^M \mathcal{B}Y, JV) + g_M(\nabla_X^M CY, JV) - g_M(\nabla_Y^M \mathcal{B}X, JV) - g_M(\nabla_Y^M CX, JV)$$

elde edilir. (2.4.9) denkleminde

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], V) &= -g_M(\mathcal{B}Y, \nabla_X^M JV) + g_M(A_X CY, JV) + g_M(\mathcal{B}X, \nabla_Y^M JV) - g_M(A_Y CX, JV) \\ &= g_M(J\mathcal{B}Y, \nabla_X^M V) + g_M(A_X CY, JV) - g_M(J\mathcal{B}X, \nabla_Y^M V) - g_M(A_Y CX, JV) \end{aligned}$$

olur. (2.4.8) ve (4.1.3) denklemleri gözönüne alınır

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], V) &= g_M(A_X V, \omega \mathcal{B}Y) - g_M(A_Y V, \omega \mathcal{B}X) + g_M(A_X CY, JV) - g_M(A_Y CX, JV) \\ &= g_M(A_Y \omega \mathcal{B}X - A_X \omega \mathcal{B}Y - JA_X CY + JA_Y CX, V) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.5.1) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], W) &= g_M(\nabla_X^M \mathcal{B}Y, JW) + g_M(\nabla_X^M CY, JW) \\ &\quad - g_M(\nabla_Y^M \mathcal{B}X, JW) - g_M(\nabla_Y^M CX, JW) \end{aligned}$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], W) &= \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(\nabla_X^M \mathcal{B}Y), F_* JW) + \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(\nabla_X^M CY), F_* JW) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(\nabla_Y^M \mathcal{B}X), F_* JW) - \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(\nabla_Y^M CX), F_* JW) \end{aligned}$$

bulunur. Burada (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], W) &= \frac{1}{\lambda^2} g_N(-(\nabla F_*)(X, \mathcal{B}Y) + \nabla_X^F F_* \mathcal{B}Y, F_* JW) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_N(-(\nabla F_*)(X, CY) + \nabla_X^F F_* CY, F_* JW) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_N(-(\nabla F_*)(Y, \mathcal{B}X) + \nabla_Y^F F_* \mathcal{B}X, F_* JW) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_N(-(\nabla F_*)(Y, CX) + \nabla_Y^F F_* CX, F_* JW) \end{aligned}$$

olur. (2.6.1) denkleminde

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], W) &= -\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X, \mathcal{B}Y), F_* JW) + \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(Y, \mathcal{B}X), F_* JW) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_N\{-X(\ln \lambda)F_* CY - CY(\ln \lambda)F_* X \\ &\quad + g_M(X, CY)F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^F F_* CY, F_* JW\} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_N\{-Y(\ln \lambda)F_* CX - CX(\ln \lambda)F_* Y \\ &\quad + g_M(Y, CX)F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_Y^F F_* CX, F_* JW\} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= -g_M(A_X \mathcal{B}Y, JW) + g_M(A_Y \mathcal{B}X, JW) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_N(F_* CY, F_* JW) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_N(F_* X, F_* JW) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(X, CY) g_N(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_* JW) + \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_X^F F_* CY, F_* JW) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, Y) g_N(F_* CX, F_* JW) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, CX) g_N(F_* Y, F_* JW) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(Y, CX) g_N(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_* JW) - \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_Y^F F_* CX, F_* JW)
\end{aligned}$$

bulunur. Tanım 4.1.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], W) &= g_M(A_Y \mathcal{B}X - A_X \mathcal{B}Y, JW) - g_M(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_M(X, JW) \\
&\quad + g_M(\text{grad} \ln \lambda, CX) g_M(Y, JW) + 2g_M(X, CY) g_M(\text{grad} \ln \lambda, JW) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JW) \\
&= g_M(A_Y \mathcal{B}X - A_X \mathcal{B}Y - CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y \\
&\quad + 2g_M(X, CY) \text{grad} \ln \lambda, JW) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JW) \tag{4.1.6}
\end{aligned}$$

dır. (4.1.5) ve (4.1.6) denklemlerinden ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.2. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon ve $(\text{çek} F_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek} F_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için F dönüşümünün yatay homotetik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 g_M(A_Y \mathcal{B}X - A_X \mathcal{B}Y, JW) = g_N(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JW) \tag{4.1.7}$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, (4.1.6) denkleminde

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], W) &= g_M(A_Y \mathcal{B}X - A_X \mathcal{B}Y - CY(\ln\lambda)X + CX(\ln\lambda)Y \\ &\quad + 2g_M(X, CY)\text{grad}\ln\lambda, JW) - \frac{1}{\lambda^2}g_N(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* JW) \end{aligned}$$

dır. Eğer F bir yatay homotetik dönüşüm ise (4.1.7) denklemi elde edilir. Benzer şekilde (4.1.7) denklemi varsa,

$$\begin{aligned} &-g_M(\text{grad}\ln\lambda, CY)g_M(X, JW) + g_M(\text{grad}\ln\lambda, CX)g_M(Y, JW) \quad (4.1.8) \\ &+ 2g_M(X, CY)g_M(\text{grad}\ln\lambda, JW) = 0 \end{aligned}$$

olur. (4.1.8) denklemi $W \in \Gamma(D_2)$ olmak üzere $Y = JW$ içinde doğrudur. Bu durumda (4.1.8) denkleminde $Y = JW$ yazılırsa $g_M(\text{grad}\ln\lambda, CX)g_M(JW, JW) = 0$ olur. Buradan λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (4.1.8) denklemi $X \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $Y = CX$ içinde doğrudur. Bu durumda (4.1.8) eşitliğinde $Y = CX$ yazılırsa

$$2g_M(X, C^2X)g_M(\text{grad}\ln\lambda, JW) = 2g_M(X, X)g_M(\text{grad}\ln\lambda, JW) = 0$$

olup λ , $\Gamma(JD_2)$ üzerinde sabittir. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Bir konform yarı-invaryant submersiyon için $JD_2 = (\text{çek}F_*)^\perp$ ise bir **konform anti-holomorfik yarı-invaryant submersiyon** denir. Bir konform anti-holomorfik yarı-invaryant submersiyon için aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Sonuç 4.1.1. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform anti-holomorfik yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilir.
 - ii) $g_N(F_* JW_1, (\nabla F_*)(V, JW_2)) = g_N(F_* JW_2, (\nabla F_*)(V, JW_1))$
- dır.

İspat. $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için, M bir Kaehler manifold olduğundan

$$g_M([JW_1, JW_2], V) = -g_M(JW_2, \nabla_V^M JW_1) + g_M(JW_1, \nabla_V^M JW_2)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğundan, (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$g_M([JW_1, JW_2], V) = \frac{1}{\lambda^2} \{g_N(F_*JW_2, (\nabla F_*)(V, JW_1)) - g_N(F_*JW_1, (\nabla F_*)(V, JW_2))\}$$

olur. $[JW_1, JW_2] \in (\text{çek}F_*)^\perp$ olması için gerek ve yeter şart $g_N(F_*JW_1, (\nabla F_*)(V, JW_2)) = g_N(F_*JW_2, (\nabla F_*)(V, JW_1))$ dır. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.3. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 \{g_M(A_X \mathcal{B}Y - CY(\ln \lambda)X + g_M(X, CY) \text{grad} \ln \lambda, JW)\} = g_N(\nabla_X^F F_* JW, F_* CY)$$

ve

$$A_X CY + \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B}Y \in \Gamma(D_2)$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$, $V \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için Tanım 4.1.1 den $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $g_M(\nabla_X^M Y, V) = 0$ ve $g_M(\nabla_X^M Y, W) = 0$ dır. M bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\nabla_X^M Y, V) = g_M(-J \nabla_X^M JY, V)$$

elde edilir. Burada (2.4.8), (2.4.9) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X^M Y, V) &= -g_M(\mathcal{B}A_X \mathcal{B}Y, V) - g_M(\phi \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B}Y, V) \\ &\quad - g_M(\phi A_X CY, V) - g_M(\mathcal{B} \mathcal{H} \nabla_X^M CY, V) \\ &= -g_M(\phi(A_X CY + \mathcal{V} \nabla_X^M \mathcal{B}Y), V) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

bulunur. Diğer taraftan, $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için (2.5.1) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$g_M(\nabla_X^M Y, W) = -g_M(\mathcal{B}Y, \nabla_X^M JW) - g_M(CY, \nabla_X^M JW)$$

olur. F bir konform submersiyon olduğundan, (2.4.9), (2.1.6) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X^M Y, W) &= -g_M(\mathcal{B}Y, A_X JW) - \frac{1}{\lambda^2} g_N\{-X(\ln\lambda)F_*JW - JW(\ln\lambda)F_*X \\
&\quad + g_M(X, JW)F_*(\text{grad}\ln\lambda) + \nabla_X^F F_*JW, F_*CY\} \\
&= -g_M(\mathcal{B}Y, A_X JW) + \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad}\ln\lambda, X)g_N(F_*JW, F_*CY) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad}\ln\lambda, JW)g_N(F_*X, F_*CY) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(X, JW)g_N(F_*(\text{grad}\ln\lambda), F_*CY) - \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_X^F F_*JW, F_*CY)
\end{aligned}$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılır ve Tanım 4.1.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X^M Y, W) &= g_M(A_X \mathcal{B}Y - CY(\ln\lambda)X + g_M(X, CY)\text{grad}\ln\lambda, JW) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_X^F F_*JW, F_*CY)
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

elde edilir. (4.1.9) ve (4.1.10) denklemlerinden ispat tamamlanır. $\square$

Aşağıdaki kavram homotetik dönüşüm kavramında önemli bir rol oynamaktadır.

Tanım 4.1.2. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $\nabla_X^M W \in \Gamma(D_2)$ ise D_2 distribüsyonuna $(\text{çek}F_*)^\perp$ boyunca paraleldir denir.

Yukarıdaki tanımı sağlayan konform yarı-invaryant submersiyonlar için aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Sonuç 4.1.2. (M, g_M, J_M) ve (N, g_N) sırasıyla bir Kaehler manifold ve Riemann manifold olsun. $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon ve D_2 , $(\text{çek}F_*)^\perp$ boyunca paralel olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için F dönüşümünün yatay homotetik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 g_M(A_X \mathcal{B}Y, JW) = g_N(\nabla_X^F F_*JW, F_*CY) \tag{4.1.11}$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, (4.1.10) denkleminde

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X^M Y, W) &= g_M(A_X \mathcal{B}Y - CY(\ln \lambda)X + g_M(X, CY) \text{grad} \ln \lambda, JW) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_X^F F_* JW, F_* CY) \end{aligned}$$

dır. F yatay homotetik dönüşüm ise yukarıdaki eşitlikten (4.1.11) denklemi elde edilir. Eğer (4.1.11) denklemi var ise

$$-g_M(\text{grad} \ln \lambda, CY)g_M(X, JW) + g_M(X, CY)g_M(\text{grad} \ln \lambda, JW) = 0 \quad (4.1.12)$$

olur. (4.1.12) denklemi $W \in \Gamma(D_2)$ olmak üzere $X = JW$ içinde doğrudur. Bu durumda (4.1.12) denkleminde $X = JW$ yazılırsa $g_M(\text{grad} \ln \lambda, CY)g_M(JW, JW) = 0$ elde edilir. Buradan $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde (4.1.12) denklemi $Y \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $X = CY$ içinde doğrudur. (4.1.12) denkleminde $X = CY$ yazılırsa $g_M(CY, CY)g_M(\text{grad} \ln \lambda, JW) = 0$ elde edilir. Bu durumda $\lambda, \Gamma(JD_2)$ üzerinde sabit olup F bir yatay homotetik dönüşümdür. $\square$

Konform anti-holomorfik durumunda aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Sonuç 4.1.3. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform anti-holomorfik yarı-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) $(\zeta ek F_*)^\perp$ distribüsyonu M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

ii) $(\nabla F_*)(V, JW_1) \in \Gamma(F_*(\mu))$

dır.

İspat. $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için, $JW_1 \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ olup M bir Kaehler manifold olduğundan

$$g_M(\nabla_{JW_1}^M JW_2, V) = -g_M(JW_2, \nabla_V^M JW_1)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğundan (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{JW_1}^M JW_2, V) = \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_* JW_2, (\nabla F_*)(V, JW_1))$$

bulunur. Bu durumda (i) $\Leftrightarrow$ (ii) dir. $\square$

Teorem 4.1.4. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$, $X \in \Gamma(\mu)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $\text{çek}F_*$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 \{g_M(CT_U \phi V + A_{\omega V} \phi U + g_M(\omega V, \omega U) \text{grad} \ln \lambda, X)\} = g_N(\nabla_{\omega V}^F F_* X, F_* \omega U)$$

ve

$$T_V \omega U + \hat{\nabla}_V \phi U \in \Gamma(D_1)$$

dır.

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$, $X \in \Gamma(\mu)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, Tanım 4.1.1 den $\text{çek}F_*$ distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $g_M(\nabla_U^M V, X) = 0$ ve $g_M(\nabla_U^M V, JW) = 0$ dır. M bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1) ve (4.1.3) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U^M V, X) &= g_M(\nabla_U^M \phi V, JX) + g_M(JU, \nabla_{\omega V}^M X) \\ &= g_M(\nabla_U^M \phi V, JX) + g_M(\phi U, \nabla_{\omega V}^M X) + g_M(\omega U, \nabla_{\omega V}^M X) \end{aligned}$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğundan (2.4.6), (2.4.9), (2.1.6) and (2.6.1) denklemleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U^M V, X) &= g_M(T_U \phi V + \hat{\nabla}_U \phi V, JX) + g_M(\phi U, A_{\omega V} X + \mathcal{H} \nabla_{\omega V}^M X) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(\nabla_{\omega V}^M X), F_* \omega U) \\ &= g_M(T_U \phi V, JX) + g_M(\phi U, A_{\omega V} X) + \frac{1}{\lambda^2} g_N\{-\omega V(\ln \lambda) F_* X \\ &\quad - X(\ln \lambda) F_* \omega V + g_M(\omega V, X) F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_{\omega V}^F F_* X, F_* \omega U\} \\ &= g_M(T_U \phi V, JX) + g_M(\phi U, A_{\omega V} X) - \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, \omega V) g_N(F_* X, F_* \omega U) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_N(F_* \omega V, F_* \omega U) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_M(\omega V, X) g_N(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_* \omega U) + \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_{\omega V}^F F_* X, F_* \omega U) \end{aligned}$$

bulunur. Tanım (4.1.1) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_U^M V, X) &= g_M(T_U \phi V, JX) + g_M(\phi U, A_{\omega V} X) - g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) g_M(\omega V, \omega U) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_{\omega V}^F F_* X, F_* \omega U) \\
&= g_M(-CT_U \phi V - A_{\omega V} \phi U - g_M(\omega V, \omega U) \text{grad} \ln \lambda, X) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_{\omega V}^F F_* X, F_* \omega U)
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

dır. Diğer taraftan $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için (2.5.1) ve (4.1.3) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_U^M V, JW) &= -g_M(J(\nabla_V^M \phi U + \omega U), JW) \\
&= -g_M(\mathcal{B}T_V \phi U + CT_V \phi U + \phi \hat{\nabla}_V \phi U + \omega \hat{\nabla}_V \phi U \\
&\quad + \phi T_V \omega U + \omega T_V \omega U + \mathcal{B}\mathcal{H}\nabla_V^M \omega U + C\mathcal{H}\nabla_V^M \omega U, JW) \\
&= -g_M(CT_V \phi U, JW) - g_M(\omega \hat{\nabla}_V \phi U, JW) \\
&\quad - g_M(\omega T_V \omega U, JW) - g_M(C\mathcal{H}\nabla_V^M \omega U, JW) \\
&= -g_M(\omega(\hat{\nabla}_V \phi U + T_V \omega U), JW)
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

elde edilir. (4.1.13) ve (4.1.14) denklemlerinden ispat tamamlanır. $\square$

Aşağıdaki kavram dönüşümün μ distribüsyonu üzerinde sabit olması durumu için oldukça kullanışlıdır.

Tanım 4.1.3. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $U \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için $\nabla_U^M X \in \Gamma(\mu)$ ise μ distribüsyonuna $\text{çek}F_*$ boyunca paraleldir denir.

Sonuç 4.1.4. (M, g_M, J_M) ve (N, g_N) sırasıyla bir Kaehler manifold ve Riemann manifold olsun. $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon ve $\mu, \text{çek}F_*$ distribüsyonu boyunca paralel olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için F dönüşümünün μ distribüsyonu üzerinde sabit olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 g_M(CT_U \phi V + A_{\omega V} \phi U, X) = g_N(\nabla_{\omega V}^F F_* X, F_* \omega U) \tag{4.1.15}$$

dır.

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için, (4.1.13) denkleminde

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U^M V, X) &= g_M(-CT_U \phi V - A_{\omega V} \phi U - g_M(\omega V, \omega U) \text{grad} \ln \lambda, X) \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_{\omega V}^F F_* X, F_* \omega U) \end{aligned}$$

dır. F dönüşümü μ distribüsyonu üzerinde sabit ise (4.1.15) denklemi elde edilir. Eğer (4.1.15) denklemi var ise $g_M(\omega V, \omega U) g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) = 0$ olup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.5. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $U, V, W \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için M manifoldunun $M = M_{\zeta ek F_*} \times_\lambda M_{(\zeta ek F_*)^\perp}$ şeklinde bir yerel çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda^2 \{g_M(CT_U \phi V + A_{\omega V} \phi U + g_M(\omega V, \omega U) \text{grad} \ln \lambda, X)\} = g_N(\nabla_{\omega V}^F F_* X, F_* \omega U),$$

$$T_V \omega U + \hat{\nabla}_V \phi U \in \Gamma(D_1)$$

ve

$$A_X CY + \mathcal{V} \nabla_X^M BY \in \Gamma(D_2),$$

$$\lambda^2 \{g_M(A_X BY - CY(\ln \lambda)X + g_M(X, CY) \text{grad} \ln \lambda, JW)\} = g_N(\nabla_X^F F_* JW, F_* CY)$$

olmasıdır.

(M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invariant submersiyon olsun. $(\zeta ek F_*)^\perp = J(D_2) \oplus \mu$ olduğundan $X \in \Gamma(D_2)$ ve $Y \in \Gamma(\mu)$ için

$$\frac{1}{\lambda^2} g_N(F_* JX, F_* Y) = g_M(JX, Y) = 0$$

dır. Bu ifade $F_*(JD_2)$ ve $F_*(\mu)$ distribüsyonlarının ortogonal olduğunu gösterir. Şimdi D_1 ve D_2 distribüsyonlarının liflerinin geometrisini inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.6. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invariant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X_1, Y_1 \in \Gamma(D_1), X_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için D_1 distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla F_*)(X_1, JY_1) \in \Gamma(F_*(\mu))$$

ve

$$\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X_1, JY_1), F_*CX) = g_M(Y_1, T_{X_1} \omega BX)$$

dır.

İspat. $\forall X_1, Y_1 \in \Gamma(D_1), X_2 \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için Tanım 4.1.1 den D_1 distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X_2) = 0$ ve $g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X) = 0$ dır. M bir Kaehler manifold olduğundan, (2.5.1) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X_2) = g_M(\mathcal{H}\nabla_{X_1}^M JY_1, JX_2)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğundan (2.1.6) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X_2) = -\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X_1, JY_1), F_*JX_2) \quad (4.1.16)$$

olur. Diğer taraftan M bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X) &= -g_M(JY_1, \nabla_{X_1}^M BX) + g_M(\mathcal{H}\nabla_{X_1}^M JY_1, CX) \\ &= g_M(Y_1, \nabla_{X_1}^M JBX) + g_M(\mathcal{H}\nabla_{X_1}^M JY_1, CX) \end{aligned}$$

bulunur. F bir konform submersiyon olduğundan, Tanım 4.1.1, (2.4.7), (2.6.1) ve (4.1.3) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_{X_1}^M Y_1, X) &= g_M(Y_1, T_{X_1} \omega BX + \mathcal{H}\nabla_{X_1}^M \omega BX) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_N(-(\nabla F_*)(X_1, JY_1) + \nabla_{X_1}^F F_*JY_1, F_*CX) \\ &= g_M(Y_1, T_{X_1} \omega BX) - \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X_1, JY_1), F_*CX) \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

elde edilir. (4.1.16) ve (4.1.17) denklemlerinden ispat biter. $\square$

Benzer şekilde D_2 distribüsyonu için aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 4.1.7. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X_2, Y_2 \in \Gamma(D_2)$, $X_1 \in \Gamma(D_1)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için D_2 distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla F_*)(X_2, JX_1) \in \Gamma(F_*(\mu))$$

ve

$$-\frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_{JY_2}^F F_* JX_2, F_* JCX) = g_M(Y_2, \mathcal{B}T_{X_2} \mathcal{B}X) + g_M(X_2, Y_2) g_M(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX)$$

dır.

İspat. $\forall X_2, Y_2 \in \Gamma(D_2)$, $X_1 \in \Gamma(D_1)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için, Tanım 4.1.1 den D_2 distribüsyonunun M manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X_1) = 0$ ve $g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X) = 0$ dır. M bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X_1) = -g_M(JY_2, \mathcal{H} \nabla_{X_2}^M JX_1)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğu için, (2.1.6) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X_1) = \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X_2, JX_1), F_* JY_2) \quad (4.1.18)$$

bulunur. Diğer taraftan M bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1), (2.4.6) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X) = -g_M(JY_2, T_{X_2} \mathcal{B}X) + g_M(\nabla_{JY_2}^M JX_2, JCX)$$

dır. F bir konform submersiyon olduğundan, Tanım 4.1.1 ve (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_{X_2}^M Y_2, X) &= -g_M(JY_2, T_{X_2} \mathcal{B}X) + \frac{1}{\lambda^2} g_N\{-JY_2(\ln \lambda)F_* JX_2 - JX_2(\ln \lambda)F_* JY_2 \\
&\quad + g_M(JY_2, JX_2)F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_{JY_2}^F F_* JX_2, F_* JCX\} \\
&= g_M(Y_2, \mathcal{B}T_{X_2} \mathcal{B}X) + g_M(Y_2, X_2)g_M(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_{JY_2}^F F_* JX_2, F_* JCX)
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

elde edilir. (4.1.18) ve (4.1.19) denklemlerinden ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.6 ve Teorem 4.1.7 den aşağıdaki sonuç bulunur.

Teorem 4.1.8. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X_1, Y_1 \in \Gamma(D_1)$, $X \in \Gamma((\text{çek} F_*)^\perp)$ ve $X_2, Y_2 \in \Gamma(D_2)$ için F dönüşümünün lifleri D_1 ve D_2 distribüsyonlarının yerel çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla F_*)(X_1, JY_1) \in \Gamma(F_*(\mu)),$$

$$\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X_1, JY_1), F_* CX) = g_M(Y_1, T_{X_1} \omega \mathcal{B}X)$$

ve

$$(\nabla F_*)(X_2, JX_1) \in \Gamma(F_*(\mu)),$$

$$-\frac{1}{\lambda^2} g_N(\nabla_{JY_2}^F F_* JX_2, F_* JCX) = g_M(Y_2, \mathcal{B}T_{X_2} \mathcal{B}X) + g_M(X_2, Y_2)g_M(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, JCX)$$

dır.

4.2 Harmonik ve Tamamen Jeodezik Konform Yarı-İnvaryant Submersiyonlar

Bu alt bölümde bir konform yarı-invaryant submersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir. Ayrıca bu submersiyonun tamamen jeodezik olma durumları incelenecektir.

Teorem 4.2.1. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M^{2(m+n+r)}, g_M, J_M) \rightarrow (N^{n+2r}, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. $\zeta ek F_*$ distribüsyonunun ortalama eğrilik vektör alanı $\mathcal{H}^v$ olmak üzere F dönüşümünün tensiyon alanı

$$\tau(F) = -(2m+n)F_*(\mathcal{H}^v) + (2-n-2r)F_*(\text{grad} \ln \lambda) \quad (4.2.1)$$

dır.

İspat. $\Gamma(TM)$ 'nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m, e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n, \mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olmak üzere $\Gamma(D_1)$ 'in ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m\}$, $\Gamma(D_2)$ 'nin ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(JD_2)$ 'nin ortonormal bazı $\{Je_1, \dots, Je_n\}$ ve $\Gamma(\mu)$ 'nin ortonormal bazı $\{\mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olsun. Bu durumda (2.1.7) denkleminde

$$\tau(F) = \sum_{i=1}^{2m+n} (\nabla F_*)(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^n (\nabla F_*)(Je_i, Je_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla F_*)(\mu_i, \mu_i)$$

elde edilir. $(\zeta ek F_* \times \zeta ek F_*)$ üzerinde ikinci temel formun izi

$$i_Z^{\zeta ek F_*} \nabla F_* = \sum_{i=1}^{2m+n} (\nabla F_*)(e_i, e_i)$$

olur. (2.1.6) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} i_Z^{\zeta ek F_*} \nabla F_* &= \sum_{i=1}^{2m+n} (\nabla_{e_i}^F F_* e_i - F_*(\nabla_{e_i}^M e_i)) \\ &= -(2m+n)F_*(\mathcal{H}^v) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

dır. Benzer şekilde

$$i_Z^{(\zeta ek F_*)^\perp} \nabla F_* = \sum_{i=1}^n (\nabla F_*)(Je_i, Je_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla F_*)(\mu_i, \mu_i)$$

olup (2.6.1) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} i_Z^{(\zeta ek F_*)^\perp} \nabla F_* &= \sum_{i=1}^n \{Je_i(\ln \lambda)F_*Je_i + Je_i(\ln \lambda)F_*Je_i - g_M(Je_i, Je_i)F_*(\text{grad} \ln \lambda)\} \\ &+ \sum_{i=1}^{2r} \{\mu_i(\ln \lambda)F_*\mu_i + \mu_i(\ln \lambda)F_*\mu_i - g_M(\mu_i, \mu_i)F_*(\text{grad} \ln \lambda)\} \\ &= \sum_{i=1}^n 2g_M(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, Je_i)F_*Je_i - nF_*(\text{grad} \ln \lambda) \\ &+ \sum_{i=1}^{2r} 2g_M(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mu_i)F_*\mu_i - 2rF_*(\text{grad} \ln \lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. F bir konform submersiyon ve $p \in M$ için $T_{F(p)}N$ 'nin bir ortonormal bazı $\{\frac{1}{\lambda(p)}F_{*p}(Je_i), \frac{1}{\lambda(p)}F_{*p}(\mu_h)\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq h \leq r}$ olduğundan

$$\begin{aligned} i_Z^{(\zeta_{ekF_*})^\perp} \nabla F_* &= \sum_{i=1}^n 2g_N(F_*(\text{grad } \ln \lambda), \frac{1}{\lambda} F_* Je_i) \frac{1}{\lambda} F_* Je_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2r} 2g_N(F_*(\text{grad } \ln \lambda), \frac{1}{\lambda} F_* \mu_i) \frac{1}{\lambda} F_* \mu_i - (n+2r)F_*(\text{grad } \ln \lambda) \\ &= (2-n-2r)F_*(\text{grad } \ln \lambda) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

bulunur. (4.2.2) ve (4.2.3) denklemlerinden (4.2.1) denklemi elde edilir. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.1 den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 4.2.2. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M^{2(m+n+r)}, g_M, J_M) \rightarrow (N^{n+2r}, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

- (i) F dönüşümü harmoniktir.
- (ii) Lifler minimaldir.
- (iii) F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.

İspat. Teorem 4.2.1 den

$$\tau(F) = -(2m+n)F_*(\mathcal{H}^v) + (2-n-2r)F_*(\text{grad } \ln \lambda)$$

olduğundan (i) ve (ii) eşitlikleri varsa $(2-n-2r)F_*(\text{grad } \ln \lambda) = 0$ olup F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir. $\square$

Ayrıca, Teorem 4.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M^{2(m+n+r)}, g_M, J_M) \rightarrow (N^{n+2r}, g_N)$ bir konform anti-holomorfik submersiyon olsun. F dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart liflerin minimal olmasıdır.

Şimdi konform yarı-invaryant submersiyonun tamamen jeodeziklik durumunu araştıracağız.

Tanım 4.2.1. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall U \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için $(\nabla F_*)(JU, X) = 0$ ise F dönüşümüne (JD_2, μ) -tamamen jeodezik dönüşüm denir.

Şimdi üsteki tanımın konform submersiyonun karakterizasyonu üzerine önemli bir etkisi olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.2.3. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda F dönüşümünün (JD_2, μ) -tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart F dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olmasıdır.

İspat. $U \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için, (2.6.1) denkleminde

$$(\nabla F_*)(JU, X) = JU(\ln \lambda)F_*X + X(\ln \lambda)F_*JU - g_M(JU, X)F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

yazılır. Yukarıdaki denklemden F bir yatay homotetik dönüşüm ise $(\nabla F_*)(JU, X) = 0$ dır. Tersine, $(\nabla F_*)(JU, X) = 0$ ise

$$JU(\ln \lambda)F_*X + X(\ln \lambda)F_*JU = 0 \quad (4.2.4)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğu için (4.2.4) denkleminin her iki tarafı F_*JU ile çarpılırsa

$$g_M(\text{grad} \ln \lambda, JU)g_N(F_*X, F_*JU) + g_M(\text{grad} \ln \lambda, X)g_N(F_*JU, F_*JU) = 0$$

dır. Yukarıdaki denklemden $g_M(\text{grad} \ln \lambda, X) = 0$ olup λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (4.2.4) denkleminin her iki tarafı F_*X ile çarpılırsa

$$g_M(\text{grad} \ln \lambda, JU)g_N(F_*X, F_*X) + g_M(\text{grad} \ln \lambda, X)g_N(F_*JU, F_*X) = 0$$

bulunur. Buradan da $g_M(\text{grad} \ln \lambda, JU) = 0$ olup λ , $\Gamma(JD_2)$ üzerinde sabittir. Bu durumda λ , $(\text{çek} F_*)^\perp$ üzerinde sabit olup ispat biter. $\square$

Teorem 4.2.4. (M, g_M, J_M) bir Kaehler manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ bir konform yarı-invaryant submersiyon olsun. Bu durumda F dönüşümünün tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şartlar

- (i) $CT_U JV + \omega \hat{\nabla}_U JV = 0, \quad U, V \in \Gamma(D_1)$
- (ii) $C\mathcal{H}\nabla_U^M JW + \omega T_U JW = 0, \quad U \in \Gamma(D_1), W \in \Gamma(D_2)$
- (iii) F dönüşümünün yatay homotetik dönüşüm olmasıdır.

İspat. $U, V \in \Gamma(D_1)$ için, (2.5.1) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(U, V) = F_*(J\nabla_U^M JV)$$

elde edilir. (2.4.6) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(U, V) = F_*(J(T_U JV + \hat{\nabla}_U JV))$$

dır. Üsteki denklemde (4.1.3) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(U, V) = F_*(\mathcal{B}T_U JV + CT_U JV + \phi \hat{\nabla}_U JV + \omega \hat{\nabla}_U JV)$$

olur. $\mathcal{B}T_U JV + \phi \hat{\nabla}_U JV \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ olduğundan

$$(\nabla F_*)(U, V) = F_*(CT_U JV + \omega \hat{\nabla}_U JV)$$

bulunur. F dönüşümü $(\text{çek}F_*)^\perp$ ve TN arasında bir lineer izometri olduğu için, $(\nabla F_*)(U, V) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $CT_U JV + \omega \hat{\nabla}_U JV = 0$ dır. Diğer taraftan $U \in \Gamma(D_1)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için, (2.5.1) ve (2.6.1) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(U, W) = F_*(J\nabla_U^M JW)$$

elde edilir. (2.4.7) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(U, W) = F_*(J(T_U JW + \mathcal{H}\nabla_U^M JW))$$

olur. Yukarıdaki denklemde (4.1.3) ve (4.1.4) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(U, W) = F_*(\phi T_U JW + \omega T_U JW + \mathcal{B}\mathcal{H}\nabla_U^M JW + C\mathcal{H}\nabla_U^M JW)$$

dır. $\phi T_U JW + \mathcal{BH}\nabla_U^M JW \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ olduğundan

$$(\nabla F_*)(U, W) = F_*(\omega T_U JW + \mathcal{CH}\nabla_U^M JW)$$

olur. Benzer şekilde F dönüşümü $(\zeta ek F_*)^\perp$ ve TN arasında bir lineer izometri olduğu için, $(\nabla F_*)(U, W) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\omega T_U JW + \mathcal{CH}\nabla_U^M JW = 0$ dır. Son olarak $X, Y \in \Gamma(\mu)$ için (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(X, Y) = X(\ln \lambda) F_* Y + Y(\ln \lambda) F_* X - g_M(X, Y) F_*(grad \ln \lambda)$$

yazılır. Üsteki deklemden $X \in \Gamma(\mu)$ için $Y = JX$ yazılırsa

$$(\nabla F_*)(X, JX) = X(\ln \lambda) F_* JX + JX(\ln \lambda) F_* X$$

elde edilir. Eğer $(\nabla F_*)(X, JX) = 0$ ise

$$X(\ln \lambda) F_* JX + JX(\ln \lambda) F_* X = 0 \quad (4.2.5)$$

olup F bir konform submersiyon olduğu için (4.2.5) denkleminin her iki tarafı $F_* X$ ile çarpılırsa

$$g_M(grad \ln \lambda, X) g_N(F_* JX, F_* X) + g_M(grad \ln \lambda, JX) g_N(F_* X, F_* X) = 0$$

olur. Yukarıdaki denklemden $g_M(grad \ln \lambda, JX) = 0$ olup λ , $\Gamma(J\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (4.2.5) denkleminin her iki tarafını $F_* JX$ ile çarpılırsa

$$g_M(grad \ln \lambda, X) g_N(F_* JX, F_* JX) + g_M(grad \ln \lambda, X) g_N(F_* X, F_* JX) = 0$$

elde edilir. Buradan da $g_M(grad \ln \lambda, X) = 0$ olup λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde $U, V \in \Gamma(D_2)$ için (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(JU, JV) = JU(\ln \lambda) F_* JV + JV(\ln \lambda) F_* JU - g_M(JU, JV) F_*(grad \ln \lambda)$$

olup burada $V = U$ alınırsa

$$(\nabla F_*)(JU, JU) = 2JU(\ln \lambda) F_* JU - g_M(JU, JU) F_*(grad \ln \lambda) \quad (4.2.6)$$

dır. F bir konform submersiyon olduğu için (4.2.6) denkleminin her iki tarafı F_*JU ile çarpılırsa

$$2g_M(\text{grad} \ln \lambda, JU)g_N(F_*JU, F_*JU) - g_M(JU, JU)g_N(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_*JU) = 0$$

olur. Buradan da $g_M(\text{grad} \ln \lambda, JU)g_M(JU, JU) = 0$ olup λ , $\Gamma(JD_2)$ üzerinde sabittir. Bu durumda λ , $\Gamma((\text{çek} F_*)^\perp)$ üzerinde sabit olup ispat biter. $\square$

5. KONFORM SLANT SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform slant submersiyon tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Ayrıca bu tip submersiyonların harmonikliği ve tamamen jeodezik olma durumları ile distribüsyonların integrallenebilirliği ve paralellliği incelenmektedir.

5.1 Konform Slant Submersiyonlar

Bu alt bölümde ilk olarak konform slant submersiyonların tanımı verilecektir.

Tanım 5.1.1. (M_1, g_1, J_1) ve (M_2, g_2) sırasıyla m ve n ($m > n$) boyutlu hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold olsun. $F : (M_1, g_1, J_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir yatay konform submersiyon olsun. Eğer $p \in M_1$ noktasında sıfırdan farklı $X \in (\text{çek}F_*)_p$ vektörü için $\text{çek}F_{*p}$ ve JX arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit yani, $p \in M_1$ ve $\text{çek}F_{*p}$ 'deki X tanjant vektörünün seçiminden bağımsız ise F dönüşümüne bir **konform slant submersiyon** denir. θ açısına da konform slant submersiyonun **slant açısı** denir.

Öncelikle not edelim ki $\text{çek}F_*$ distribüsyonu integrallenebilirdir. Bu yüzden, Tanım 5.1.1 den $\text{çek}F_*$ 'ın $F^{-1}(q)$, $q \in M_2$ integral manifoldu olup M_1 manifoldunun bir slant altmanifoldudur.

Aşağıda, yukarıda verilen konform slant submersiyonlar için örnekler verilmektedir.

Örnek 5.1.1. Bir hemen hemen Hermityen manifoldundan bir hemen hemen Hermityen manifolduna tanımlı her Hermityen submersiyon $\theta = \{0\}$ ve $\lambda = 1$ olan bir konform slant submersiyondur [59].

Örnek 5.1.2. Bir hemen hemen Hermityen manifoldundan bir Riemann manifolduna tanımlı her konform anti-invaryant submersiyon $\theta = \frac{\pi}{2}$ ile bir konform slant submersiyondur [51].

Holomorfik submersiyonlar, anti-invaryant submersiyonlar ve slant submersiyonlar özel konform submersiyon olduklarından bu dönüşümlerin hepsi konform slant submersiyon örnekleridir.

Hermityen submersiyon ve konform anti-invaryant submersiyon olmayan bir konform slant submersiyona **has konform slant submersiyon** denir. Şimdi has konform slant submersiyonlar için örnekler verelim.

R^4 üzerinde standart iç çarpım ile uyumlu hemen hemen kompleks yapı J_α ' yı

$$J_\alpha(a, b, c, d) = (\cos \alpha)(-c, -d, a, b) + (\sin \alpha)(-b, a, d, -c), \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

şeklinde tanımlayalım.

Örnek 5.1.3. R^4 ve R^2 standart iç çarpımları ile verilen Öklidyen uzaylar olsun. Bu durumda

$$F : \begin{matrix} R^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} R^2 \\ (e^{x_1} \sin x_2, e^{x_1} \cos x_2) \end{matrix},$$

diferensiyellenebilir dönüşümü şeklinde tanımlansın. Burada $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ile R^4 uzayının bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$F_* \simeq \begin{bmatrix} e^{x_1} \sin x_2 & e^{x_1} \cos x_2 & 0 & 0 \\ e^{x_1} \cos x_2 & -e^{x_1} \sin x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $\text{rank} F_* = \text{boy} R^2 = 2$ bulunur. Böylece F bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\mathcal{V} = \ker F_* = \text{Span}\{V_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

ve

$$\mathcal{H} = (\ker F_*)^\perp = \text{Span}\{X_1 = e^{x_1} \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_1} \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ X_2 = e^{x_1} \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - e^{x_1} \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\}$$

elde edilir. Ayrıca R^4 üzerinde tanımlı J_α hemen hemen kompleks yapısı

$$J_\alpha(a, b, c, d) = (\cos \alpha)(-c, -d, a, b) + (\sin \alpha)(-b, a, d, -c), \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

olsun. $JV_2 = (0, -\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{g_1(JV_2, V_1)}{\|JV_2\| \|V_1\|} = \frac{\langle (0, -\cos \alpha, \sin \alpha, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle}{1.1} = \sin \alpha$$

dır. Buradan $\theta = \arccos(\sin \alpha)$ olup F bir slant submersiyondur. $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, R^2 nin standart bazı olmak üzere, doğrudan hesaplamalarla

$$F_*X_1 = (e^{x_1})^2 \frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$F_*X_2 = (e^{x_1})^2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

bulunur. R^4 ve R^2 üzerindeki standart iç çarpımlar g_1 ve g_2 ile gösterilirse doğrudan işlemlerle

$$g_2(F_*X_1, F_*X_1) = (e^{x_1})^2 g_1(X_1, X_1),$$

$$g_2(F_*X_2, F_*X_2) = (e^{x_1})^2 g_1(X_2, X_2)$$

olup F dönüşümü $\lambda = e^{x_1}$ olan bir konform slant submersiyondur.

Örnek 5.1.4. R^4 ve R^2 standart iç çarpımları ile verilen Öklidyen uzaylar olsun. Bu durumda

$$F : \quad R^4 \quad \longrightarrow \quad R^2$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (\cosh x_1 \sin x_3, \sinh x_1 \cos x_3),$$

diferensiyellebilir dönüşümü şeklinde tanımlansın. Burada $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ile R^4 uzayının bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$F_* \simeq \begin{bmatrix} \sinh x_1 \sin x_3 & 0 & \cosh x_1 \cos x_3 & 0 \\ \cosh x_1 \cos x_3 & 0 & -\sinh x_1 \sin x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $\text{rank} F_* = \text{boy} R^2 = 2$ bulunur. Böylece F bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\mathcal{V} = \ker F_* = \text{Span}\{V_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

ve

$$\mathcal{H} = (\text{çek}F_*)^\perp = \text{Span}\left\{X_1 = \sinh x_1 \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cosh x_1 \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},\right. \\ \left.X_2 = \cosh x_1 \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - \sinh x_1 \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$$

elde edilir. Ayrıca R^4 üzerinde tanımlı J_α hemen hemen kompleks yapısı

$$J_\alpha(a, b, c, d) = (\cos \alpha)(-c, -d, a, b) + (\sin \alpha)(-b, a, d, -c), \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

olsun. $JV_1 = (-\sin \alpha, 0, 0, \cos \alpha)$ olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{g_1(JV_1, V_2)}{\|JV_1\| \|V_2\|} = \frac{\langle (-\sin \alpha, 0, 0, \cos \alpha), (0, 0, 0, 1) \rangle}{1.1} = \cos \alpha$$

dır. Buradan $\theta = \alpha$ olup F bir slant submersiyondur. $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, R^2 nin standart bazı olmak üzere, doğrudan hesaplamalarla

$$F_*X_1 = (\sinh^2 x_1 \sin^2 x_3 + \cosh^2 x_1 \cos^2 x_3) \frac{\partial}{\partial y_1}$$

ve

$$F_*X_2 = (\sinh^2 x_1 \sin^2 x_3 + \cosh^2 x_1 \cos^2 x_3) \frac{\partial}{\partial y_2}$$

bulunur. R^4 ve R^2 üzerindeki standart iç çarpımlar g_1 ve g_2 ile gösterilirse doğrudan işlemlerle

$$g_2(F_*X_1, F_*X_1) = (\sinh^2 x_1 \sin^2 x_3 + \cosh^2 x_1 \cos^2 x_3)g_1(X_1, X_1), \\ g_2(F_*X_2, F_*X_2) = (\sinh^2 x_1 \sin^2 x_3 + \cosh^2 x_1 \cos^2 x_3)g_1(X_2, X_2)$$

olup F dönüşümü $\lambda^2 = \sinh^2 x_1 \sin^2 x_3 + \cosh^2 x_1 \cos^2 x_3$ olan bir konform slant submersiyondur.

$F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için,

$$JV = \phi V + \omega V \quad (5.1.1)$$

yazılır. Burada $\phi V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $\omega V \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ dır. Ayrıca $X \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için,

$$JX = \mathcal{B}X + CX \quad (5.1.2)$$

yazılır. Burada da $\mathcal{B}X \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $CX \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ dır. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için (2.4.6), (2.4.7), (5.1.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla_U^{M_1} \omega)V = CT_U V - T_U \phi V \quad (5.1.3)$$

$$(\nabla_U^{M_1} \phi)V = \mathcal{B}T_U V - T_U \omega V \quad (5.1.4)$$

elde edilir. Burada

$$(\nabla_U^{M_1} \omega)V = \mathcal{H} \nabla_U \omega V - \omega \hat{\nabla}_U V$$

ve

$$(\nabla_U^{M_1} \phi)V = \hat{\nabla}_U \phi V - \phi \hat{\nabla}_U V$$

dır.

$F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için, $(\nabla_U^{M_1} \omega)V = 0$ ise ω ya $\Gamma(\zeta ek F_*)$ üzerinde ∇^{M_1} Levi-Civita konneksiyonuna göre paraleldir denir. Bu durumda

$$\nabla_U^{M_1} \omega V = \omega \nabla_U^{M_1} V$$

dır.

Teorem 5.1.1. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform submersiyon olsun. Bu durumda F dönüşümünün konform slant submersiyon olması için gerek ve yeter şart $\lambda \in [-1, 0]$ olmak üzere $U \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için

$$\phi^2 U = \lambda U \quad (5.1.5)$$

dır. Eğer F bir konform slant submersiyon ise, $\lambda = -\cos^2 \theta$ dır.

İspat. F bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $U \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için $\cos \theta = \frac{\|\phi U\|}{\|JU\|}$ dur. Diğer taraftan (2.5.1) denklemi kullanılırsa

$$g_1(\phi^2 U, U) = -g_1(\phi U, \phi U) = -\cos^2 \theta g_1(JU, JU) = -\cos^2 \theta g_1(U, U)$$

yazılır. Polarizasyondan,

$$g_1(\phi^2 V, W) + g_1(\phi^2 W, V) = -2 \cos^2 \theta g_1(V, W)$$

olup buradan da

$$2g_1(\phi^2 V, W) = -2 \cos^2 \theta g_1(V, W)$$

elde edilir. g_1 , Riemann metriği olduğundan (5.1.5) denkleminde $\phi^2 V = \lambda V$ elde edilir.

Tersine kabul edelim ki $\lambda \in [-1, 0]$ olmak üzere $\forall U \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için $\phi^2 U = \lambda U$ olsun. Bu durumda $U \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{g_1(JU, \phi U)}{\|JU\| \|\phi U\|} = -\frac{g_1(U, J\phi U)}{\|JU\| \|\phi U\|} = -\frac{g_1(U, \phi^2 U)}{\|JU\| \|\phi U\|} \\ &= -\frac{\lambda g_1(U, U)}{\|JU\| \|\phi U\|} \\ &= -\frac{\lambda g_1(JU, JU)}{\|JU\| \|\phi U\|} \\ &= -\lambda \frac{\|JU\|}{\|\phi U\|} \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

dır. $\cos \theta = \frac{\|\phi U\|}{\|JU\|}$ olduğundan (5.1.6) denkleminde $\lambda = -\cos^2 \theta$ olur. Bu durumda θ sabit ve F dönüşümü bir konform slant submersiyondur. $\square$

Teorem 5.1.1 kullanılarak aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 5.1.1. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için

$$g_1(\phi U, \phi V) = \cos^2 \theta g_1(U, V) \quad (5.1.7)$$

$$g_1(\omega U, \omega V) = \sin^2 \theta g_1(U, V) \quad (5.1.8)$$

dır.

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için (2.5.1) denklemi kullanılırsa

$$g_1(\phi U, V) = -g_1(U, \phi V)$$

yazılır. Yukarıdaki denklemde V yerine ϕV alınır ve (5.1.5) denklemi kullanılırsa

$$g_1(\phi U, \phi V) = \cos^2 \theta g_1(U, V)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.5.1) ve (5.1.1) denklemleri kullanılırsa

$$g_1(JU, JV) = g_1(U, V) = g_1(\phi U, \phi V) + g_1(\omega U, \omega V)$$

bulunur. (5.1.7) denklemi kullanılırsa

$$g_1(U, V) = \cos^2 \theta g_1(U, V) + g_1(\omega U, \omega V)$$

ve

$$\sin^2 \theta g_1(U, V) = g_1(\omega U, \omega V)$$

olur. Buradan (5.1.8) denklemi elde edilir. $\square$

$(\check{c}ekF_*)^\perp$ de $\omega(\check{c}ekF_*)$ distribüsyonuna ortogonal tamamlayıcı distribüsyonunu μ ile gösterelim. μ distribüsyonu aşağıdaki özelliğe sahiptir.

Önerme 5.1.1. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda μ distribüsyonu J_1 hemen hemen kompleks yapısına göre invaryanttır.

İspat. $W \in \Gamma(\mu)$ ve $U \in \Gamma(\check{c}ekF_*)$ için (2.5.1) ve (5.1.1) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1(JW, \omega U) &= g_1(W, U) - g_1(JW, \phi U) \\ &= -g_1(JW, \phi U) \\ &= g_1(W, J\phi U) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (5.1.1) denklemi kullanılırsa

$$g_1(JW, \omega U) = g_1(W, \phi^2 U) + g_1(W, \omega \phi U)$$

olur. (5.1.5) denklemden

$$g_1(JW, \omega U) = -\cos^2 \theta g_1(W, U) + g_1(W, \omega \phi U) = 0$$

olup $JW \notin \Gamma(\omega(\zeta ekF_*))$ dır. Diğer taraftan $V \in \Gamma(\zeta ekF_*)$ için (5.1.1) denklemi kullanılırsa

$$g_1(JW, V) = -g_1(W, JV) = -g_1(W, \phi V) - g_1(W, \omega V) = 0$$

olup buradan da $JW \notin \Gamma(\zeta ekF_*)$ dır. Bu durumda $JW \in \Gamma(\mu)$ olup μ distribüsyonu invarianttır. $\square$

Sonuç 5.1.1. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. $\Gamma(\zeta ekF_*)$ in bir lokal ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_{m-n}\}$ olsun. Bu durumda $\{\csc \theta \omega e_1, \dots, \csc \theta \omega e_{m-n}\}$ bazıda $\omega(\zeta ekF_*)$ 'in ortonormal bazıdır.

İspat. $g_1(\csc \theta \omega e_i, \csc \theta \omega e_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, \frac{m-n}{2}\}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$g_1(\csc \theta \omega e_i, \csc \theta \omega e_j) = \csc^2 \theta g_1(\omega e_i, \omega e_j),$$

olup (5.1.8) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1(\csc \theta \omega e_i, \csc \theta \omega e_j) &= \csc^2 \theta \sin^2 \theta g_1(e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta \delta_{ij} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\{\csc \theta \omega e_1, \dots, \csc \theta \omega e_{m-n}\}$ bazı, $\Gamma(\omega(\zeta ekF_*))$ 'in lokal ortonormal bazıdır. $\square$

Önerme 5.1.1 den μ ve $(\zeta ekF_*) \oplus \omega(\zeta ekF_*)$ distribüsyonları çift boyutludur. Bu durumda (ζekF_*) distribüsyonunda çift boyutludur. Şimdi aşağıdaki ifadeyi verelim.

Lemma 5.1.2. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_{\frac{m-n}{2}}\}$, (ζekF_*) distribüsyonunun ortonormal birim vektör alanları ise bu durumda $\{e_1, \sec \theta \phi e_1, e_2, \sec \theta \phi e_2, \dots, e_{\frac{m-n}{2}}, \sec \theta \phi e_{\frac{m-n}{2}}\}$ bazıda (ζekF_*) 'in ortonormal bazıdır.

$F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\{e_1, \sec \theta \phi e_1, e_2, \sec \theta \phi e_2, \dots, e_n, \sec \theta \phi e_n, \csc \theta \omega e_1, \csc \theta \omega e_2, \dots, \csc \theta \omega e_n\}$ bazı, konform slant submersiyon için bir slant çatıdır.

Konform slant submersiyon, distribüsyonlar ve tanım manifoldunun boyutları üzerine kısıtlamalar getirmektedir.

Önerme 5.1.2. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1^m, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2^n, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\text{boy}(\mu) = 2n - m$ dir. Eğer $\mu = \{0\}$ ise $n = \frac{m}{2}$ dir.

İspat. İlk olarak $\text{boy}(\text{çek}F_*) = m - n$ dir. Bu durumda Sonuç 5.1.1 den $\text{boy}((\text{çek}F_*) \oplus \omega(\text{çek}F_*)) = 2(m - n)$ dir. M_1 manifoldu m boyutlu olduğu için $\text{boy}TM_1 = \text{boy}((\text{çek}F_*) \oplus \omega(\text{çek}F_*)) \oplus \text{boy}(\mu)$ olup buradan $\text{boy}(\mu) = 2n - m$ elde edilir. $\mu = \{0\}$ ise $n = \frac{m}{2}$ dir. $\square$

Şimdi, konform slant submersiyonun harmoniklik durumunu inceleyeceğiz. İlk olarak aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 5.1.3. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Eğer $\omega, (\text{çek}F_*)$ distribüsyonu üzerinde ∇^{M_1} , Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise, bu durumda $U \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için

$$T_{\phi U} \phi U = -\cos^2 \theta T_U U \quad (5.1.9)$$

dir.

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için, ω paralel ise (5.1.3) denkleminde

$$CT_U V = T_U \phi V \quad (5.1.10)$$

elde edilir. U ile V 'nin yerleri değiştirilirse

$$CT_V U = T_V \phi U \quad (5.1.11)$$

olur. (5.1.10) denkleminde (5.1.11) denklemini çıkarılırsa

$$C(T_U V - T_V U) = T_U \phi V - T_V \phi U$$

olup T dikey vektör alanı simetrik olduğundan

$$T_U \phi V = T_V \phi U \quad (5.1.12)$$

dır. (5.1.12) denkleminde V yerine ϕU yazılırsa

$$T_U \phi^2 U = T_{\phi U} \phi U$$

olup burada (5.1.5) denklemini kullanırsak

$$T_{\phi U} \phi U = -\cos^2 \theta T_U U$$

elde edilir. □

Teorem 5.1.2. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1^{2(m+r)}, g_1, J_1) \rightarrow (M_2^{m+2r}, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda F dönüşümünün tensiyon alanı

$$\tau(F) = -F_* (T_{e_i} e_i + \sec^2 \theta T_{\phi e_i} \phi e_i) + (2 - m - 2r) F_* (\text{grad} \ln \lambda) \quad (5.1.13)$$

dır.

İspat. $\Gamma(TM_1)$ 'in ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m, \sec \theta \phi e_1, \dots, \sec \theta \phi e_m, \csc \theta \omega e_1, \dots, \csc \theta \omega e_m, \mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ olmak üzere $\Gamma(\zeta_{ek} F_*)$ 'in ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m, \sec \theta \phi e_1, \dots, \sec \theta \phi e_m\}$, $\Gamma(\omega(\zeta_{ek} F_*))$ 'in ortonormal bazı $\{\csc \theta \omega e_1, \dots, \csc \theta \omega e_m\}$, $\Gamma(\mu)$ 'nin ortonormal bazı $\{\mu_1, \dots, \mu_{2r}\}$ ve θ slant açısı olmak üzere F dönüşümünün tensiyon alanı

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(e_i, e_i) + (\nabla F_*)(\sec \theta \phi e_i, \sec \theta \phi e_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(\csc \theta \omega e_i, \csc \theta \omega e_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla F_*)(\mu_i, \mu_i) \end{aligned}$$

şeklindedir. $(\zeta_{ek} F_* \times \zeta_{ek} F_*)$ üzerinde ikinci temel formun izi

$$\begin{aligned} i_{\zeta_{ek} F_*} \nabla F_* &= \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(e_i, e_i) + (\nabla F_*)(\sec \theta \phi e_i, \sec \theta \phi e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(e_i, e_i) + \sec^2 \theta (\nabla F_*)(\phi e_i, \phi e_i) \\ &= -F_*(T_{e_i} e_i) - F_*(\sec^2 \theta T_{\phi e_i} \phi e_i) \\ &= -F_*(T_{e_i} e_i + \sec^2 \theta T_{\phi e_i} \phi e_i) \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{Z}}^{(\zeta_{ek}F_*)^\perp} \nabla F_* &= \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(\csc \theta \omega e_i, \csc \theta \omega e_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla F_*)(\mu_i, \mu_i) \\ &= \csc^2 \theta \sum_{i=1}^m (\nabla F_*)(\omega e_i, \omega e_i) + \sum_{i=1}^{2r} (\nabla F_*)(\mu_i, \mu_i) \end{aligned}$$

bulunur. (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{Z}}^{(\zeta_{ek}F_*)^\perp} \nabla F_* &= \csc^2 \theta \sum_{i=1}^m \{ \omega e_i (\ln \lambda) F_* \omega e_i + \omega e_i (\ln \lambda) F_* \omega e_i - g_1(\omega e_i, \omega e_i) F_*(\text{grad} \ln \lambda) \} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2r} \{ \mu_i (\ln \lambda) F_* \mu_i + \mu_i (\ln \lambda) F_* \mu_i - g_1(\mu_i, \mu_i) F_*(\text{grad} \ln \lambda) \} \\ &= \csc^2 \theta \sum_{i=1}^m 2g_1(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \omega e_i) F_* \omega e_i - \csc^2 \theta g_1(\omega e_i, \omega e_i) F_*(\text{grad} \ln \lambda) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2r} 2g_1(\mathcal{H} \text{grad} \ln \lambda, \mu_i) F_* \mu_i - 2r F_*(\text{grad} \ln \lambda) \end{aligned}$$

olur. F bir konform submersiyon ve $p \in M_1$ için $T_{F(p)}M_2$ 'nin bir ortonormal bazı $\{ \frac{1}{\lambda(p)} \csc \theta F_{*p}(\omega e_i), \frac{1}{\lambda(p)} F_{*p}(\mu_h) \}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq h \leq r}$ olduğundan

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{Z}}^{(\zeta_{ek}F_*)^\perp} \nabla F_* &= \csc^2 \theta \sum_{i=1}^m 2g_2(F_*(\text{grad} \ln \lambda), \frac{1}{\lambda} F_* \omega e_i) \frac{1}{\lambda} F_* \omega e_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2r} 2g_2(F_*(\text{grad} \ln \lambda), \frac{1}{\lambda} F_* \mu_i) \frac{1}{\lambda} F_* \mu_i - (m+2r) F_*(\text{grad} \ln \lambda) \\ &= (2-m-2r) F_*(\text{grad} \ln \lambda) \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

elde edilir. (5.1.14) ve (5.1.15) denklemlerinden (5.1.13) denklemi elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.2 den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 5.1.3. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1^{2(m+r)}, g_1, J_1) \rightarrow (M_2^{m+2r}, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdakilerden ikisi üçüncüyü belirler:

- (i) F dönüşümü harmoniktir.
- (ii) ω , $(\zeta_{ek}F_*)$ üzerinde ∇^{M_1} konneksiyonuna göre paraleldir.
- (iii) F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.

İspat. Teorem 5.1.2 den

$$\tau(F) = -F_*(T_{e_i}e_i + \sec^2 \theta T_{\phi e_i} \phi e_i) + (2 - m - 2r)F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

olduğundan (i) ve (ii) eşitlikleri varsa $(2 - m - 2r)F_*(\text{grad} \ln \lambda) = 0$ olup buradan λ , $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonu üzerinde sabittir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir. $\square$

Ayrıca, Teorem 5.1.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.2. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1^{2(m+r)}, g_1, J_1) \rightarrow (M_2^{m+2r}, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. F dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart ω 'nın $(\text{çek}F_*)$ distribüsyonu üzerinde ∇^{M_1} konneksiyonuna göre paralel olmasıdır.

Şimdi $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilirliğini, $\text{çek}F_*$ ve $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonlarının liflerinin geometrisini inceleyeceğiz.

Teorem 5.1.4. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

ii) Aşağıdaki bağıntı sağlanır;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \{ g_2(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V) - g_2(\nabla_Y^F F_* X - \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) \} = g_1(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X \\ - CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y \\ - 2g_1(CX, Y) \ln \lambda, \omega V) \end{aligned}$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için, M_1 bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1), (5.1.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1([X, Y], V) = -g_1(\nabla_X^{M_1} Y, \phi^2 V) - g_1(\nabla_X^{M_1} Y, \omega \phi V) + g_1(\nabla_X^{M_1} \mathcal{B}Y, \omega V) + g_1(\nabla_X^{M_1} CY, \omega V) \\ + g_1(\nabla_Y^{M_1} X, \phi^2 V) + g_1(\nabla_Y^{M_1} X, \omega \phi V) - g_1(\nabla_Y^{M_1} \mathcal{B}X, \omega V) - g_1(\nabla_Y^{M_1} CX, \omega V) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.8) ve (2.4.9) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
g_1([X, Y], V) &= -g_1([X, Y], \phi^2 V) - g_1(\mathcal{H}\nabla_X^{M_1} Y, \omega\phi V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) \\
&\quad + g_1(\mathcal{H}\nabla_X^{M_1} CY, \omega V) + g_1(\mathcal{H}\nabla_Y^{M_1} X, \omega\phi V) - g_1(A_Y \mathcal{B}X, \omega V) \\
&\quad - g_1(\mathcal{H}\nabla_Y^{M_1} CX, \omega V)
\end{aligned}$$

bulunur. F bir konform submersiyon olduğundan, (5.1.5) ve (2.1.6) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_1([X, Y], V) &= \cos^2 \theta g_1([X, Y], V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_X^{M_1} Y), F_* \omega\phi V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_X^{M_1} CY), F_* \omega V) + \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_Y^{M_1} X), F_* \omega\phi V) \\
&\quad - g_1(A_Y \mathcal{B}X, \omega V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_Y^{M_1} CX), F_* \omega V) \\
&= \cos^2 \theta g_1([X, Y], V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \omega V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(X, Y) \\
&\quad + \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega\phi V) + \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(X, CY) + \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(Y, X) + \nabla_Y^F F_* X, F_* \omega\phi V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(Y, CX) + \nabla_Y^F F_* CX, F_* \omega V)
\end{aligned}$$

olur. Burada (2.6.1) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_1([X, Y], V) &= \cos^2 \theta g_1([X, Y], V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \omega V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(X, Y) + \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega\phi V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2\{-X(\ln \lambda) F_* CY - CY(\ln \lambda) F_* X + g_1(X, CY) F_*(\text{grad} \ln \lambda) \\
&\quad + \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V\} + \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(Y, X) + \nabla_Y^F F_* X, F_* \omega\phi V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2\{-Y(\ln \lambda) F_* CX - CX(\ln \lambda) F_* Y + g_1(Y, CX) F_*(\text{grad} \ln \lambda) \\
&\quad + \nabla_Y^F F_* CX, F_* \omega V\}
\end{aligned}$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
g_1([X, Y], V) &= \cos^2 \theta g_1([X, Y], V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \omega V) \\
&+ \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(X, Y), F_* \omega \phi V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) \\
&- g_1(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_1(X, \omega V) + g_1(X, CY) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega V) \\
&+ \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(Y, X), F_* \omega \phi V) \\
&+ \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_Y^F F_* X, F_* \omega \phi V) + g_1(\text{grad} \ln \lambda, CX) g_1(Y, \omega V) \\
&- g_1(Y, CX) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_Y^F F_* CX, F_* \omega V)
\end{aligned}$$

elde edilir. (∇F_*) simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g_1([X, Y], V) &= g_1(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X - CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y \\
&- 2g_1(CX, Y) \ln \lambda, \omega V) + \frac{1}{\lambda^2} \{g_2(\nabla_Y^F F_* X - \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) \\
&- g_2(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2} \{g_2(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V) - g_2(\nabla_Y^F F_* X - \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V)\} &= g_1(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X \\
&- CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y \\
&- 2g_1(CX, Y) \ln \lambda, \omega V)
\end{aligned}$$

dır. □

Teorem 5.1.4 den aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 5.1.5. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için aşağıdaki ifadelerden ikisi üçüncüyü belirler:

- i) $(\text{çek}F_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirdir.
- ii) F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.

$$\text{iii)} \quad \frac{1}{\lambda^2} \{g_2(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V) - g_2(\nabla_Y^F F_* X - \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V)\} = g_1(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X, \omega V)$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için, Teorem 5.1.4 den

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_1([X, Y], V) &= g_1(A_X \mathcal{B}Y - A_Y \mathcal{B}X - CY(\ln \lambda)X + CX(\ln \lambda)Y \\ &\quad - 2g_1(CX, Y) \ln \lambda, \omega V) + \frac{1}{\lambda^2} \{g_2(\nabla_Y^F F_* X - \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) \\ &\quad - g_2(\nabla_Y^F F_* CX - \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V)\}, \end{aligned}$$

olduğundan (i) ve (iii) eşitlikleri varsa

$$\begin{aligned} &-g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, CY)g_1(X, \omega V) + g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, CX)g_1(Y, \omega V) \\ &-2g_1(CX, Y)g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \omega V) = 0 \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

elde edilir. (5.1.16) denklemi $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ olmak üzere $Y = JV$ içinde sağlanır. Bu durumda (5.1.16) denkleminde $Y = JV$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &-g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, C(JV))g_1(X, \omega V) + g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, CX)g_1(JV, \omega V) \\ &-2g_1(CX, JV)g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \omega V) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, CX)g_1(\omega V, \omega V) = 0$ olup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Diğer taraftan (5.1.16) denklemi $X \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $Y = CX$ içinde sağlanır. Bu durumda (5.1.16) denkleminde $Y = CX$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &-g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, C^2 X)g_1(X, \omega V) + g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, CX)g_1(CX, \omega V) \\ &-2g_1(CX, CX)g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \omega V) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $g_1(CX, CX)g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, \omega V) = 0$ olup $\lambda, \Gamma(\omega(\zeta ek F_*))$ distribüsyonu üzerinde sabittir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir. $\square$

Teorem 5.1.6. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in$

$\Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için $(\zeta ek F_*)^\perp$ distribüsyonunun M_1 manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \{g_2(\nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) - g_2(\nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V)\} &= g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) \\ &+ g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_1(Y, \omega \phi V) \\ &+ g_1(\text{grad} \ln \lambda, Y) g_1(X, \omega \phi V) \\ &- g_1(X, Y) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega \phi V) \\ &- g_1(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_1(X, \omega V) \\ &+ g_1(X, CY) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega V) \end{aligned}$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için, M_1 bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1), (5.1.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) &= -g_1(\nabla_X^{M_1} Y, J\phi V) + g_1(\nabla_X^{M_1} JY, \omega V) \\ &= -g_1(\nabla_X^{M_1} Y, \phi^2 V) - g_1(\nabla_X^{M_1} Y, \omega \phi V) + g_1(\nabla_X^{M_1} \mathcal{B}Y, \omega V) + g_1(\nabla_X^{M_1} CY, \omega V) \end{aligned}$$

olur. (2.4.8) ve (2.4.9) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) &= -g_1(\nabla_X^{M_1} Y, \phi^2 V) - g_1(A_X Y + \mathcal{H} \nabla_X^{M_1} Y, \omega \phi V) \\ &+ g_1(A_X \mathcal{B}Y + \mathcal{V} \nabla_X^{M_1} \mathcal{B}Y, \omega V) + g_1(A_X CY + \mathcal{H} \nabla_X^{M_1} CY, \omega V) \\ &= -g_1(\nabla_X^{M_1} Y, \phi^2 V) - g_1(\mathcal{H} \nabla_X^{M_1} Y, \omega \phi V) \\ &+ g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) + g_1(\mathcal{H} \nabla_X^{M_1} CY, \omega V) \end{aligned}$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğundan, (5.1.5) ve (2.1.6) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) &= \cos^2 \theta g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_X^{M_1} Y), F_* \omega \phi V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_X^{M_1} CY), F_* \omega V) \\ &= \cos^2 \theta g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(X, Y) \\ &+ \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) + \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(X, CY) + \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V) \end{aligned}$$

bulunur. (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) &= \cos^2 \theta g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) - \frac{1}{\lambda^2} g_2 \{ -X(\ln \lambda) F_* Y \\
&\quad - Y(\ln \lambda) F_* X + g_1(X, Y) F_*(\text{grad} \ln \lambda) + \nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V \} \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2 \{ -X(\ln \lambda) F_* CY - CY(\ln \lambda) F_* X + g_1(X, CY) F_*(\text{grad} \ln \lambda) \\
&\quad + \nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V \}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) &= \cos^2 \theta g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) + g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) + g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_1(Y, \omega \phi V) \\
&\quad + g_1(\text{grad} \ln \lambda, Y) g_1(X, \omega \phi V) - g_1(X, Y) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega \phi V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) - g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_1(CY, \omega V) \\
&\quad - g_1(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_1(X, \omega V) + g_1(X, CY) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega V) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g_1(\nabla_X^{M_1} Y, V) &= g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) + g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_1(Y, \omega \phi V) \\
&\quad + g_1(\text{grad} \ln \lambda, Y) g_1(X, \omega \phi V) - g_1(X, Y) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega \phi V) \\
&\quad - g_1(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_1(X, \omega V) + g_1(X, CY) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega V) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} \{ g_2(\nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) - g_2(\nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V) \}
\end{aligned}$$

dır. $(\text{çek} F_*)^\perp$ distribüsyonunun M_1 manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2} \{ g_2(\nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) - g_2(\nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V) \} &= g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) \\
&\quad + g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_1(Y, \omega \phi V) \\
&\quad + g_1(\text{grad} \ln \lambda, Y) g_1(X, \omega \phi V) \\
&\quad - g_1(X, Y) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega \phi V) \\
&\quad - g_1(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_1(X, \omega V) \\
&\quad + g_1(X, CY) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega V)
\end{aligned}$$

olmasıdır. Buradan ispat tamamlanır. $\square$

Benzer şekilde aşağıdaki ifade söylenebilir.

Teorem 5.1.7. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $Z \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için $\zeta ek F_*$ distribüsyonunun M_1 manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \{ g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) - g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* J C Z) \} = g_1(A_{\omega V} \phi U \\ + g_1(\omega U, \omega V) grad \ln \lambda, J C Z) \\ + g_1(T_U \mathcal{B} Z, \omega V) \end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $Z \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için, M_1 bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1), (5.1.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) &= -g_1(\nabla_U^{M_1} \phi^2 V, Z) - g_1(\nabla_U^{M_1} \omega \phi V, Z) + g_1(\nabla_U^{M_1} \omega V, \mathcal{B} Z) - g_1(\nabla_{\omega V}^{M_1} J U, J C Z) \\ &= -g_1(\nabla_U^{M_1} \phi^2 V, Z) - g_1(\nabla_U^{M_1} \omega \phi V, Z) + g_1(\nabla_U^{M_1} \omega V, \mathcal{B} Z) - g_1(\nabla_{\omega V}^{M_1} \phi U, J C Z) \\ &\quad - g_1(\nabla_{\omega V}^{M_1} \omega U, J C Z) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.6) ve (2.4.7) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) &= -g_1(\nabla_U^{M_1} \phi^2 V, Z) - g_1(\mathcal{H} \nabla_U^{M_1} \omega \phi V, Z) + g_1(T_U \omega V, \mathcal{B} Z) \\ &\quad - g_1(A_{\omega V} \phi U, J C Z) - g_1(\mathcal{H} \nabla_{\omega V}^{M_1} \omega U, J C Z) \end{aligned}$$

dır. F bir konform submersiyon olduğundan, (5.1.5) ve (2.1.6) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) &= \cos^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_U^{M_1} \omega \phi V), F_* Z) + g_1(T_U \omega V, \mathcal{B} Z) \\ &\quad - g_1(A_{\omega V} \phi U, J C Z) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_{\omega V}^{M_1} \omega U), F_* J C Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) &= \cos^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) + g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) - g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(U, \omega \phi V) + \nabla_U^F F_* \omega \phi V, F_* Z) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(\omega V, \omega U) + \nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) &= \cos^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) + g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) - g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2\{-\omega V(\ln \lambda) F_* \omega U - \omega U(\ln \lambda) F_* \omega V + g_1(\omega V, \omega U) F_*(grad \ln \lambda) \\
&\quad + \nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ\} \\
&= \cos^2 \theta g_1(\nabla_U V, Z) + g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) - g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) + g_1(grad \ln \lambda, \omega V) g_1(\omega U, JCZ) \\
&\quad + g_1(grad \ln \lambda, \omega U) g_1(\omega V, JCZ) - g_1(\omega V, \omega U) g_1(grad \ln \lambda, JCZ) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ)
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) &= \cos^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) + g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) - g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) \\
&\quad - g_1(\omega V, \omega U) g_1(grad \ln \lambda, JCZ) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ)
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) &= g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) - g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\
&\quad - g_1(\omega V, \omega U) g_1(\mathcal{H} grad \ln \lambda, JCZ) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} \{g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) - g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. ($\check{c}ek F_*$) distribüsyonunun M_1 manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon

tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \{g_2((\nabla F_*)(U, \omega\phi V), F_*Z) - g_2(\nabla_{\omega V}^F F_*\omega U, F_*JCZ)\} &= g_1(A_{\omega V}\phi U \\ &+ g_1(\omega U, \omega V)grad \ln \lambda, JCZ) \\ &+ g_1(T_U \mathcal{B}Z, \omega V) \end{aligned}$$

dır. □

Teorem 5.1.7 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.1.8. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $Z \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için aşağıdaki ifadelerden ikisi üçüncüyü belirler:

i) $\zeta ek F_*$ distribüsyonu M_1 manifoldu üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

ii) $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir.

iii) Aşağıdaki bağıntı sağlanır;

$$\frac{1}{\lambda^2} \{g_2((\nabla F_*)(U, \omega\phi V), F_*Z) - g_2(\nabla_{\omega V}^F F_*\omega U, F_*JCZ)\} = g_1(A_{\omega V}\phi U, JCZ) + g_1(T_U \mathcal{B}Z, \omega V)$$

dır.

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $Z \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için, Teorem 5.1.7 den

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) &= g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) - g_1(A_{\omega V}\phi U, JCZ) \\ &- g_1(\omega V, \omega U)g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, JCZ) \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} \{g_2((\nabla F_*)(U, \omega\phi V), F_*Z) - g_2(\nabla_{\omega V}^F F_*\omega U, F_*JCZ)\} \end{aligned}$$

olduğundan, (i) ve (iii) eşitlikleri varsa $g_1(\omega V, \omega U)g_1(\mathcal{H}grad \ln \lambda, JCZ) = 0$ olup $\lambda, \Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gösterilebilir. □

Teorem 5.1.6 ve Teorem 5.1.7 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1.9. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in$

$\Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için M_1 manifoldunun bir yerel çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \{g_2(\nabla_X^F F_* Y, F_* \omega \phi V) - g_2(\nabla_X^F F_* CY, F_* \omega V)\} &= g_1(A_X \mathcal{B}Y, \omega V) \\ &+ g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_1(Y, \omega \phi V) \\ &+ g_1(\text{grad} \ln \lambda, Y) g_1(X, \omega \phi V) \\ &- g_1(X, Y) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega \phi V) \\ &- g_1(\text{grad} \ln \lambda, CY) g_1(X, \omega V) \\ &+ g_1(X, CY) g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega V) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \{g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) - g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ)\} &= g_1(A_{\omega V} \phi U \\ &+ g_1(\omega U, \omega V) \text{grad} \ln \lambda, JCZ) \\ &+ g_1(T_U \mathcal{B}Z, \omega V) \end{aligned}$$

olmasıdır.

Son olarak konform slant submersiyonlar için tamamen jeodeziklik durumu araştırılmaktadır.

Teorem 5.1.10. (M_1, g_1, J_1) bir Kaehler manifold, (M_2, g_2) bir Riemann manifold ve $F : (M_1, g_1, J_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ bir konform slant submersiyon olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için F dönüşümünün tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şartlar

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \{g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) - g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ)\} &= g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\ &+ g_1(\omega U, \omega V) g_1(\text{grad} \ln \lambda, JCZ) \\ &- g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z), \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \{g_2((\nabla F_*)(U, \omega \mathcal{B}X), F_* Y) - g_2((\nabla F_*)(U, CX), F_* CY)\} &= g_1(T_U \phi \mathcal{B}X, Y) \\ &- g_1(T_U CX, \mathcal{B}Y) \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

ve

F dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olmasıdır.

İspat. $\forall U, V \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ ve $Z \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ için, M_1 bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1), (5.1.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, V), F_* Z) &= g_1(\nabla_U^{M_1} \phi^2 V, Z) + g_1(\nabla_U^{M_1} \omega \phi V, Z) \\ &\quad - g_1(\nabla_U^{M_1} \omega V, \mathcal{B}Z) + g_1(\nabla_{\omega V}^{M_1} \phi U, JCZ) + g_1(\nabla_{\omega V}^{M_1} \omega U, JCZ) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.6), (2.4.7) ve (5.1.5) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, V), F_* Z) &= -\cos^2 \theta g_1(\nabla_U V, Z) + g_1(\mathcal{H} \nabla_U^{M_1} \omega \phi V, Z) - g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) \\ &\quad + g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) + g_1(\mathcal{H} \nabla_{\omega V}^{M_1} \omega U, JCZ) \end{aligned}$$

bulunur. F bir konform submersiyon olduğundan, (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, V), F_* Z) &= -\cos^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) - g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) + g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(U, \omega \phi V) + \nabla_U^F F_* \omega \phi V, F_* Z) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(\omega V, \omega U) + \nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ) \end{aligned}$$

dır. (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, V), F_* Z) &= -\cos^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) - g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) + g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) + \frac{1}{\lambda^2} g_2\{-\omega V(\ln \lambda) F_* \omega U \\ &\quad - \omega U(\ln \lambda) F_* \omega V + g_1(\omega V, \omega U) F_* (grad \ln \lambda) + \nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ\} \\ &= -\cos^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) - g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) + g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) - g_1(grad \ln \lambda, \omega V) g_1(\omega U, JCZ) \\ &\quad - g_1(grad \ln \lambda, \omega U) g_1(\omega V, JCZ) + g_1(\omega V, \omega U) g_1(grad \ln \lambda, JCZ) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, V), F_* Z) &= -\cos^2 \theta g_1(\nabla_U^{M_1} V, Z) - g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) + g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) + g_1(\omega V, \omega U) g_1(\text{grad} \ln \lambda, JCZ) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, V), F_* Z) &= g_1(A_{\omega V} \phi U, JCZ) + g_1(\omega V, \omega U) g_1(\text{grad} \ln \lambda, JCZ) \\ &\quad - g_1(T_U \omega V, \mathcal{B}Z) + \frac{1}{\lambda^2} \{ g_2(\nabla_{\omega V}^F F_* \omega U, F_* JCZ) \\ &\quad - g_2((\nabla F_*)(U, \omega \phi V), F_* Z) \} \end{aligned}$$

dır. Böylece $(\nabla F_*)(U, V) = 0$ olması için gerek ve yeter şart (5.1.17) denkleminin sağlanmasıdır.

Benzer şekilde $\forall X, Y \in \Gamma((\zeta ek F_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(\zeta ek F_*)$ için, M_1 bir Kaehler manifold olduğundan (2.5.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, X), F_* Y) &= g_1(\nabla_U^{M_1} \phi \mathcal{B}X, Y) + g_1(\nabla_U^{M_1} \omega \mathcal{B}X, Y) \\ &\quad - g_1(\nabla_U^{M_1} CX, \mathcal{B}Y) - g_1(\nabla_U^{M_1} CX, CY) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.6) ve (2.4.7) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, X), F_* Y) &= g_1(T_U \phi \mathcal{B}X + \mathcal{V} \nabla_U^{M_1} \phi \mathcal{B}X, Y) + g_1(T_U \omega \mathcal{B}X + \mathcal{H} \nabla_U^{M_1} \omega \mathcal{B}X, Y) \\ &\quad - g_1(T_U CX + \mathcal{H} \nabla_U^{M_1} CX, \mathcal{B}Y) - g_1(T_U CX + \mathcal{H} \nabla_U^{M_1} CX, CY) \\ &= g_1(T_U \phi \mathcal{B}X, Y) + g_1(\mathcal{H} \nabla_U^{M_1} \omega \mathcal{B}X, Y) - g_1(T_U CX, \mathcal{B}Y) \\ &\quad - g_1(\mathcal{H} \nabla_U^{M_1} CX, CY) \end{aligned}$$

bulunur. F bir konform submersiyon olduğundan, (2.1.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^2} g_2((\nabla F_*)(U, X), F_* Y) &= g_1(T_U \phi \mathcal{B}X, Y) + \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_U^{M_1} \omega \mathcal{B}X), F_* Y) \\
&\quad - g_1(T_U CX, \mathcal{B}Y) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(F_*(\nabla_U^{M_1} CX), F_* CY) \\
&= g_1(T_U \phi \mathcal{B}X, Y) + \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(U, \omega \mathcal{B}X) + \nabla_U^F \omega \mathcal{B}X, F_* Y) \\
&\quad - g_1(T_U CX, \mathcal{B}Y) - \frac{1}{\lambda^2} g_2(-(\nabla F_*)(U, CX) + \nabla_U^F CX, F_* CY) \\
&= g_1(T_U \phi \mathcal{B}X, Y) - g_1(T_U CX, \mathcal{B}Y) \\
&\quad + \frac{1}{\lambda^2} \{g_2((\nabla F_*)(U, CX), F_* CY) - g_2((\nabla F_*)(U, \omega \mathcal{B}X), F_* Y)\}
\end{aligned}$$

dır. Böylece $(\nabla F_*)(U, X) = 0$ olması için gerek ve yeter şart (5.1.18) denkleminin sağlanmasıdır.

Son olarak $X, Y \in \Gamma(\mu)$ için (2.6.1) denkleminde

$$(\nabla F_*)(X, Y) = X(\ln \lambda) F_* Y + Y(\ln \lambda) F_* X - g_1(X, Y) F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

yazılır. Üsteki deklemdde $X \in \Gamma(\mu)$ için $Y = JX$ yazılırsa

$$(\nabla F_*)(X, JX) = X(\ln \lambda) F_* JX + JX(\ln \lambda) F_* X$$

elde edilir. Eğer $(\nabla F_*)(X, JX) = 0$ ise

$$X(\ln \lambda) F_* JX + JX(\ln \lambda) F_* X = 0 \quad (5.1.19)$$

olur. F bir konform submersiyon olduğu için (5.1.19) denkleminin her iki tarafı $F_* X$ ile çarpılırsa

$$g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_2(F_* JX, F_* X) + g_1(\text{grad} \ln \lambda, JX) g_2(F_* X, F_* X) = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklemden $g_1(\text{grad} \ln \lambda, JX) = 0$ olup $\lambda, \Gamma(J\mu)$ üzerinde sabittir.

Diğer taraftan (5.1.19) denkleminin her iki tarafı $F_* JX$ ile çarpılırsa

$$g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_2(F_* JX, F_* JX) + g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) g_2(F_* X, F_* JX) = 0$$

elde edilir. Buradan da $g_1(\text{grad} \ln \lambda, X) = 0$ olup λ , $\Gamma(\mu)$ üzerinde sabittir. Benzer şekilde $U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için (2.6.1) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla F_*)(\omega U, \omega V) = \omega U(\ln \lambda)F_*\omega V + \omega V(\ln \lambda)F_*\omega U - g_1(\omega U, \omega V)F_*(\text{grad} \ln \lambda)$$

dır. Burada $V = U$ alınırsa

$$(\nabla F_*)(\omega U, \omega U) = 2\omega U(\ln \lambda)F_*\omega U - g_1(\omega U, \omega U)F_*(\text{grad} \ln \lambda) \quad (5.1.20)$$

elde edilir. F bir konform submersiyon olduğu için (5.1.20) denkleminin her iki tarafı $F_*\omega U$ ile çarpılırsa

$$2g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega U)g_2(F_*\omega U, F_*\omega U) - g_1(\omega U, \omega U)g_2(F_*(\text{grad} \ln \lambda), F_*\omega U) = 0$$

olur. Bu denklemden de $g_1(\text{grad} \ln \lambda, \omega U)g_1(\omega U, \omega U) = 0$ olup λ , $\Gamma(\omega(\text{çek}F_*))$ üzerinde sabittir. Bu durumda λ , $\Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ distribüsyonu üzerinde sabit olur. $\square$

KAYNAKLAR

- [1] S. Ali and T. Fatima, *Anti-invariant Riemannian submersions from nearly Kaehler manifolds*, **Filomat**. 27(7) (2013), 1219-1235.
- [2] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs, No.29, Oxford University Press, The Clarendon Press, Oxford, (2003).
- [3] A. Bejancu, *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I*, **Proc. Amer. Math. Soc.** 69(1978), 134-142.
- [4] A. Bejancu, *Geometry of CR-submanifolds*, D.Reidel publishing company, Dordrecht Holland, (1986).
- [5] D. Blair and B. Y. Chen, *On CR-submanifolds of Hermitian manifolds*, **Israel J. Math.** 34(1979), no. 4, 353-363.
- [6] J. P. Bourguignon and H. B. Lawson, *A mathematicians's visit to Kaluza-Klein theory*, **Rend. Sem. Mat. Univ. Politec.** Torino, Special Issue (1989) 143-163.
- [7] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press Inc, (1986).
- [8] J. M. Burel, *Almost contact structures and harmonic maps with minimal fibres*, **Houston J. Math.** 30(2), (2004), 393-411.
- [9] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser Boston, (1992).
- [10] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, (1973).
- [11] B. Y. Chen and K. Ogiue, *On totally real submanifolds*, **Trans. Amer. Math. Soc.** 193(1974), 257-266.

- [12] B. Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, (1990).
- [13] D. Chinea, *Harmonicity on maps between almost contact metric manifolds*, **Acta Math. Hungar.** 126(4), (2010) 352-365.
- [14] D. Chinea, *Harmonicity of holomorphic maps between almost Hermitian manifolds*, **Canad. Math. Bull.** 52(1), (2009) 18-27.
- [15] D. Chinea, *On horizontally conformal (φ, φ') - holomorphic submersions*, **Houston J. Math.** 34(3), (2008) 721-737.
- [16] İ. K. Erken and C. Murathan, *On slant Riemannian submersions for cosymplectic manifolds*, **Bull. Kor. Math. Soc.** 51(6), (2014), 1749-1771.
- [17] C. Murathan and İ. K. Erken, *Anti-invariant Riemannian submersions from cosymplectic manifolds onto Riemannian manifolds*, **Filomat.** 29(7), (2015), 1429-1444.
- [18] M. Falcitelli, S. Ianus and A. M. Pastore, *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific (2004).
- [19] T. Fatima, *On a study of geometry of submanifolds and submersions*, PhD Thesis, Aligarh Muslim University, India, 2013.
- [20] B. Fuglede, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, **Ann. Inst. Fourier.** (Grenoble) (1978) 107-144.
- [21] E. Garcia-Rio and D. N. Kupeli, *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers, (1999).
- [22] A. Gray, *Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions*, **J. Math. Mech.** 16, (1967) 715-737.
- [23] S. Gudmundsson, *The Geometry of Harmonic Morphisms*, P.H.D. Thesis, University of Leeds, (1992).

- [24] S. Gundmundsson, *An Introduction to Riemannian Geometry*, Lectures Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science, (2006).
- [25] Yılmaz Gündüzalp, *Riemann submersiyonlarının Geometrisi üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, (2007).
- [26] Y. Gündüzalp, *Anti-invariant Riemannian submersions from almost product Riemannian manifolds*, **Mathematical Science and Applications E-notes**. 1(1), (2013), 58-66.
- [27] Y. Gündüzalp, *Anti-invariant semi-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds*, **Journal of Function Spaces and Applications**. 1-7, (2013), Doi:10.1155/2013/720623.
- [28] Y. Gündüzalp, *Slant submersions from almost product Riemannian manifolds*, **Turkish Journal of Mathematics**. 37(5), (2013), 863-873.
- [29] Y. Gündüzalp, *Slant submersions from almost paracontact Riemannian manifolds*, **Kuwait Journal of Science**. 42(1), (2015), 17-29.
- [30] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi. Fen-Ed.Fak.Mat. No:2, (1982).
- [31] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Cilt:1, 2, 3, Ankara Üniv. Fen Fakültesi, (2003).
- [32] S. Ianuş, R. Mazzocco and G. E. Vilcu, *Harmonic maps between quaternionic Kähler manifolds*, **J. Nonlinear Math. Phys.** 15(1) (2008), 1-8.
- [33] S. Ianuş, R. Mazzocco and G. E. Vilcu, *Riemannian submersions from quaternionic manifolds*, **Acta Appl. Math.**, 104(1) (2008), 83-89.
- [34] S. Ianuş, A. Ionescu, R. Mocanu and G. E. Vilcu, *Riemannian submersions from almost contact metric manifolds*, **Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.** 81(2011), no. 1, 101-114.

- [35] T. Ishihara, *A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions*, **J. Math. Kyoto Uni.** 11(2) (1997) 185-197.
- [36] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol:1, I-II, New York, (1963).
- [37] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1984).
- [38] J. W. Lee, *Anti-invariant $\xi^\perp$ - Riemannian submersions from almost contact manifolds*, **Hacettepe J. Math. Stat.** 42(2), (2013), 231-241.
- [39] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcell Dekker Inc Newyork, (1972).
- [40] B. O'Neill, *The Fundamental Equations of a Submersions*, **Michigan Math. J.** 13, (1966) 458-469.
- [41] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, (1983).
- [42] L. Ornea and G. Romani, *The fundamental equations of a conformal submersions*, **Beitrague Z. Algebra and Geometrie Contributions Algebra and Geometry.** 34(2), (1993) 233-243.
- [43] K. S. Park, *h-semi-invariant submersions*, **Taiwanese J. Math.** 16(2012), no. 5, 1865-1878.
- [44] K. S. Park, *h-slant submersions*, **Bull. Korean Math. Soc.** 49(2012), no. 2, 329-338.
- [45] K. S. Park, *Almost h-semi slant Riemannian maps*, **Taiwanese J. Math.** 17(3), (2013), 937-956.
- [46] K. S. Park and R. Prasad, *Semi-slant submersions*, **Bull. Korean Math. Soc.** 50(3), (2013), 951-962.

- [47] R. Ponge and H. Reckziegel, *Twisted products in pseudo-Riemannian geometry*, **Geom. Dedicata.** 48(1) (1993) 15-25.
- [48] M. Svensson, *Polynomial Harmonic Morphisms*, Master Thesis, Lund Universitet, November, (1998).
- [49] Bayram Şahin, *CR-Altmanifoldların Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, (1996).
- [50] B. Şahin, *Contact Horizontally Conformal Submersions*, **Demonstratio Mathematica.** Vol. XL.II No:4. (2009).
- [51] B. Şahin, *Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds*, **Central European J. Math.** 8(3), (2010) 437-447.
- [52] B. Şahin, *Slant submersions from almost Hermitian manifolds*, **Bull. Math. Soc. Sci. Math.** Roumanie Tome, No. 1, 54(102), (2011) 93-105.
- [53] B. Şahin, *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayınevi, (2012).
- [54] B. Şahin, *Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds*, **Taiwanese J.Math.** 17(2), (2013) 629-659.
- [55] B. Şahin, *Semi-invariant submersions from almost Hermitian manifolds*, **Canad. Math. Bull.** 56(1), (2013) 173-183.
- [56] H. M. Taştan, *On Lagrangian submersions*, **Hacet. J. Math. Stat.** 43(6), (2014), 993-1000.
- [57] H. M. Taştan, *Anti-holomorphic semi-invariant submersion from Kaehlerian manifolds*, **arXiv: 1404.2385**.
- [58] Şener Yanan, *Riemann Manifoldları Arasındaki Konform Dönüşümler*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, (2012).
- [59] B. Watson, *Almost Hermitian Submersions*, **J. Diff. Geom.** 11(1), (1976) 147-165.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Mehmet Akif AKYOL

Doğum Yeri ve Tarihi : Van, 07.06.1985

Adres : Bingöl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, BİNGÖL

E-Posta : makyol@bingol.edu.tr

Lisans : Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü (2004-2008).

Yüksek Lisans : Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı

Geometri Bilim Dalı (2008-2011).

Mesleki Deneyim ve Ödüller :

1- Bingöl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2009-Halen),

2- Yüksek Lisans Tez Araştırma Desteği (Yök Bursu)

3- Tübitak Bilimsel Yayın Teşvik Ödülü (2013-2014) (2-Adet)

Yayın Listesi :

1. **Akyol M. A**, Vanlı A. T and Fernandez L. M., (2013): Curvtaure Properties of a semi-symmetric metric connection defined on S-manifolds, Annales Polonici Mathematici. 107(1) (2013), 71-86.

2. **Akyol M. A**, Fernandez L. M and Martin A. P, The L-sectional curvature of S-manifolds, arXiv:1302.1973.

3. **Akyol M. A**, Vanlı A. T and Fernandez L. M., (2014): Semi-symmetric properties of S-manifolds endowed with a semi-symmetric non-metric connection, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University, Mathematics. DOI: 10.2478/aicu-2013-0039.

4. Şahin B. **Akyol M. A**, (2014): Golden maps between Golden Riemannian manifolds and constancy of certain maps, Math. Commun., 19(2) (2014), 333-342.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR:

1. **Akyol M. A**, Şahin B., (2015): Conformal anti-invariant submersions from almost Hermitian manifolds, Turkish Journal of Mathematics. DOI: 10.3906/mat-1408-20.