T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKSİMAL, POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN MODİFİYE EDİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

HATİCE ARMUTCU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. YUSUF ZEREN

İSTANBUL, 2016

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKSİMAL, POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN MODİFİYE EDİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Hatice ARMUTCU tarafından hazırlanan tez çalışması 21.04.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Ahi Evran Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Yrd. Doç. Dr. Özgür YILDIRIM

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi ______________________

Bu çalışma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ nün 2015-01-03-YL02 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında Klasik Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Riesz potansiyeli ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörlerinin modifiye edilmiş Morrey uzayında sınırlılığı için gerek ve yeter şartları araştırılmıştır.

Tez çalışmam boyunca bana araştırma imkânı veren, yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın **Doç. Dr. Yusuf ZEREN** (Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, Bakü'deki lisans eğitimimden beri her türlü desteğini gördüğüm eş danışman hocam **Prof. Dr. Vagif S. Guliyev** (Ahi Evran Üniversitesi, Matematik Bölümü & Azerbaycan Milli İlimler Akademisi, Matematik ve Mekanik Enstitüsü)'e ve tez oluşumunda engin fikirleri ile yardımcı olan **Prof. Dr. Ayhan Şerbetci** (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) hocama saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmam süresince beni yüreklendiren kıymetli eşim ile oğlum Mehmed Mahsun Agâh Armutcu'ya bakarak bana en büyük desteği veren aileme teşekkür ederim.

Nisan, 2016

Hatice ARMUTCU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....vii

ÖZET vii

ABSTRACT.....ix

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 3
1.3 Hipotez 3

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1 Temel Tanım ve Teoremler 4

BÖLÜM 3

LEBESGUE UZAYINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL ve SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER 20

3.1 Lebesgue Uzayında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sınırlılığı20
3.2 Lebesgue Uzayında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı 24
3.3 Lebesgue Uzayında Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı 28

BÖLÜM 4

MORREY UZAYINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL ve SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER. 33

4.1 Morrey Uzayı ve Genel Özellikleri.....33
4.2 Morrey Uzayında Maksimal Operatörünün Sınırlılığı 36
4.3 Morrey Uzayında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı 37
4.4 Morrey Uzayında Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı 39

BÖLÜM 5

MODİFİYE EDİLMİŞ MORREY UZAYINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL ve SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER.......... 40

5.1 Modifiye Edilmiş Morrey Uzayı ve Genel Özellikleri.......... 40
5.2 Modifiye Edilmiş Morrey Uzayında Maksimal Operatörünün Sınırlılığı ... 42
5.3 Modifiye Edilmiş Morrey Uzayında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı 43
5.4 Modifiye Edilmiş Morrey Uzayında Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı.......... 50

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 52

KAYNAKLAR.......... 53

ÖZGEÇMİŞ 55

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel Öklid uzayı
A^c	A kümesinin tümleyeni
$\|f\|$	f in normu
L_p	Lebesgue uzayı
L_p^{loc}	Lokal integrallenebilir Lebesgue uzayı
$L_{p,\lambda}$	Morrey uzayı
$\tilde{L}_{p,\lambda}$	Modifiye edilmiş Morrey uzayı
WL_p	Zayıf Lebesgue uzayı
$WL_{p,\lambda}$	Zayıf Morrey uzayı
$W\tilde{L}_{p,\lambda}$	Zayıf modifiye edilmiş Morrey uzayı
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\mu(A)$	A kümesinin ölçüsü
$Q(x,r)$	x merkezli kenar uzunluğu r olan küp
$\mu(I) = \|I\|$	I aralığının ölçüsü
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
L_p^*	L_p uzayının duali
Mf	f in Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
$I_\alpha f$	f in Riesz potansiyeli
Tf	f in singüler integrali
Δf	f in Laplace operatörü
$\hat{f}$	f in Fourier dönüşümü
$suppf$	f in desteği
$f * g$	f ile g nin konvolüsyonu
$\mathbb{S}^{n-1}$	n-boyutlu birim küre
v_n	Birim yuvarın hacmi
ω_{n-1}	Birim kürenin yüzey alanı

ÖZET

MAKSİMAL, POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN MODİFİYE EDİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA SINIRLILIĞI

Hatice ARMUTCU

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Eş Danışman: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti, tezin amacı ve hipotez belirtilmiştir. İkinci bölümde, temel kavramlar, üçüncü bölümde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu, Riesz potansiyeli ve Calderon-Zygmund singüler integral operatör tanımları verilerek Lebesgue uzayında maksimal, Riesz potansiyel ve singüler integral operatörlerinin sınırlılığı, dördüncü bölümde Morrey uzayında maksimal, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerin sınırlılığı, beşinci bölümde modifiye edilmiş Morrey uzayında maksimal, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerin sınırlılığı, altıncı bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Maksimal operatör, Riesz potansiyeli, Calderon-Zygmund, Singüler integral, Modifiye edilmiş Morrey uzayı

ABSTRACT

THE BOUNDEDNESS OF MAXIMAL, POTENTIAL AND SINGULAR INTEGRAL OPERATORS IN THE MODIFIED MORREY SPACE

Hatice ARMUTCU

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Co-Advisor: Prof. Dr. Vagif S. GULİYEV

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is a summary of the literature, aim and hypothesis of the thesis. In the second chapter basic concepts are introduced. The basics and characteristics of maximal function, Riesz potential as well as singular integral operators are given, and their boundedness in the Lebesgue space are discussed in the third chapter. Maximal, Riesz potential and Calderon-Zygmund operators as well as their boundedness in the Morrey space are dealt with in the fourth chapter. Maximal, Riesz potential and Calderon-Zygmund operators as well as their boundedness in the modified Morrey space are discussed in the fifth chapter. The sixth and final chapter includes conclusions and recommendations.

Keywords: Maximal operator, Riesz potential, Calderon-Zygmund, Singular integral, Modified Morrey Space

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Maksimal fonksiyon, Hardy-Littlewood tarafından 1930 yılında $\mathbb{R}$ üzerinde bir boyutlu olarak ortaya konulmuş [1] ve Wiener tarafından ise, 1939 yılında $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayına genelleştirilmiştir.

Hardy-Littlewood maksimal operatörü $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $Mf : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ olmak üzere

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

ile tanımlanır. $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli,

$$0 < \alpha < n \text{ ve } \gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \text{ olmak üzere}$$

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır.

Tf Calderon-Zygmund singüler integrali, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve K Calderon-Zygmund çekirdeği olmak üzere

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K(y) f(x-y) dy$$

şeklinde tanımlanır.

L_p Lebesgue uzayı, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\Omega) = \left\{ f: \Omega \to \mathbb{R} : \ f \text{ ölçülebilir ve } \int_{\Omega} |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayıdır. Lebesgue uzayları, harmonik analizdeki maksimal, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörlerin sınırlılık koşullarının belirlenmesinde araştırmacılar için temel olarak alınmıştır.

$L_{p,\lambda}$ Morrey uzayı, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$ ve $f \in L_p^{loc}(\Omega)$ olmak üzere

$$L_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ f \in L_p(\Omega) : \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayıdır. Burada $B(x,t)$, x merkezli t yarıçaplı yuvarı belirtmektedir (Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]). Morrey uzayları 1938 yılında C.B. Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik denklemlerin çözümlerinin lokal davranışları ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemler araştırılırken ortaya çıkarılmıştır [3].

Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün sınırlılık koşulları F. Chierenza, M. Frasca [4] ve V.S. Guliyev [5] tarafından elde edilmiştir. Morrey uzaylarında Riesz potansiyelinin sınırlılık koşulları ise, Adams [6], Spanne [7] ve V.S. Guliyev [8] tarafından ispatlanmıştır. V.S. Guliyev doktora tezinde ortaya koyduğu yeni bir metot ile harmonik analizin integral operatörleri için Lie gruplarında ve $\mathbb{R}^n$ de sınırlılıkları elde edilmiştir. V.S. Guliyev ile birlikte V.I. Burenkov, H.V. Guliyev, S. Samko, Y. Zeren, H. Hasanov, A. Şerbetçi ve T. Tararykova gibi araştırmacılar Morrey tipli uzaylar başta olmak üzere diğer fonksiyon uzaylarında da yeni sonuçlar elde etmiştir [2], [9], [5], [8],[10].

$\tilde{L}_{p,\lambda}$ Modifiye edilmiş Morrey uzayı, $\forall f \in L_p^{loc}(\Omega)$ için $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$
ve $[t]_1 = \min\{1, t\}$ olmak üzere

$$\tilde{L}_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ f \in L_p(\Omega) : f \text{ ölçülebilir ve } \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} [t]_1^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayıdır. Modifiye edilmiş Morrey uzayı, Lebesgue uzayı ve Morrey uzayının kesişim kümesini ifade etmektedir. $[t]_1 = 1$ seçilirse Lebesgue uzayını, $[t]_1 = t$ seçilirse Morrey uzayını ifade etmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı, harmonik analizin integral operatörlerinden olan maksimal, potansiyel ve singüler operatörlerinin Lebesgue, Morrey ve modifiye edilmiş Morrey uzayındaki sınırlıkları için temel kaynak oluşturmaktır. Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Riesz potansiyeli ve Calderon-Zygmund singüler integral operatörlerinin sınırlılığı için gerek ve yeter koşullarını modifiye edilmiş Morrey uzayında incelemektir.

1.3 Hipotez

Fonksiyon uzaylarının modern teorisi, reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna ve diğer matematiksel disiplinler içinde kısmi diferansiyel denklemler ile matematiksel fizik gibi bir çok alana başarıyla uygulanmıştır. İntegral ve diferansiyel operatörlerin farklı norm eşitsizlikleri fonksiyon uzaylarının teorisinde ve onların uygulamalarında esaslı öneme sahiptir. Özellikle diferansiyellenebilir fonksiyonların klasik uzayları teorisi (Sobolev uzayları, Besov uzayları, ağırlıklı Besov tipi uzaylar, vb.) bu eşitsizlikler üzerine esaslı olarak inşa edilirler. Yakın zamanlarda integral ve diferansiyel operatörler için norm eşitsizlikleri ile ilgili birçok zor problemler çözülmüştür. Bu sonuçlar fonksiyonel analizin özellikle etkin ve geniş olarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları için temel araçlar olmuştur. Harmonik analizin integral operatörleri olan maksimal, potansiyel ve singüler operatörlerinin Lebesgue, Morrey ve modifiye edilmiş Morrey uzayındaki sınırlılığının araştırılması büyük öneme sahiptir. Bu operatörlerin fonksiyonel ve reel analizde ve matematiğin diğer alanlarında özellikle kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinde çok geniş uygulamalar vardır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 F cismi üzerinde X vektör uzayı olmak üzere

$\|x\| : X \to \mathbb{R}_+$, $x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde **norm** denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine **normlu uzay** denir.

3) şartı bir $K > 1$ sabiti için $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$ şeklinde sağlanıyorsa dönüşüme **quasi norm** denir.

Tanım 2.2 X ve Y aynı cisim üzerinde iki vektör uzayı olsun. $D(T)$ tanım bölgesi, $R(T)$ değer bölgesi olmak üzere bir $T: D(T) \subset X \to R(T) \subset Y$ dönüşümüne **operatör** denir.

Örneğin bir $T: C[a, b] \to C[a, b]$ integral operatörünü

$$Tf(x) = \int_a^x f(y)dy\,, \qquad x \in [a, b]$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

$T: D(T) \subset X \rightarrow R(T) \subset Y$ operatörü $\forall\, x, y \in D(T)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$ ve $T(\alpha x) = \alpha T x$ oluyorsa, T operatörüne **lineer operatör** denir.

$T: D(T) \subset X \rightarrow R(T) \subset Y$ lineer operatörü için $T(x+y) \leq T(x) + T(y)$ oluyorsa, T operatörüne **alt lineer operatör** denir.

T operatörün için $k, K > 0$ f ve g den bağımsız sabitler olmak üzere h.h.y $|T(f+g)(x)| \leq K(|Tf(x)| + |Tg(x)|)$ ve $|T(\lambda f)(x)| \leq k|\lambda||Tf(x)|$ oluyorsa, T operatörüne **yarı lineer operatör** denir [11].

$T: D(T) \subset X \rightarrow R(T) \subset Y$ lineer operatör ve $\forall\, x, y \in D(T)$ için $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ olacak şekilde $C > 0$ reel sayısı varsa, T ye **sınırlı lineer operatör** denir.

$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ eşitsizliğini sağlayan $C > 0$ sayılarının en küçük alt sınırına T **sınırlı lineer operatörünün normu** denir [12] ve

$$\|T\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3 Bir $T: X \rightarrow Y$ operatörü için $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in D(T)$ ve $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa T operatörüne $x_0 \in D(T)$ noktasında **süreklidir** denir [12].

Teorem 2.4 Bir $T: X \rightarrow Y$ operatörünün $D(T)$ de sürekli olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün $D(T)$ de sınırlı olmasıdır [12].

Tanım 2.5 Bir X kümesinin alt kümelerinin bir Σ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, Σ ya bir ***σ*–cebir** (σ–cisim) denir.

a) $X \in \Sigma$

b) $S \in \Sigma \implies \mathrm{X} \backslash \mathrm{S} = S^c \in \Sigma$

c) $S_n \in \Sigma, \mathrm{n} = 1,2, \ldots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \Sigma$.

Bu durumda bir $S \in \Sigma$ kümesine **ölçülebilir küme** denir.

Tanım 2.6 X bir küme ve Σ, X in alt kümelerinin bir σ–cebiri olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mu\colon\Sigma \to[0,\infty]$ fonksiyonuna **ölçüm** denir.

a) $\mu(\emptyset) = 0,$

b) μ sayılabilir toplamsaldır. Eğer $S_j \in \Sigma,\ j = 1,2,\dots$, ikişer ikişer ayrık kümeler ise,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j).$$

(X, Σ, μ) üçlüsüne **ölçüm uzayı** denir. $(X, \Sigma\ )$ ikilisine ise, **ölçü uzayı** denir.

μ pozitif ölçü olmak üzere; Eğer $A, B \in \Sigma$ ve $A \subset B$ ise, $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Eğer $A_j \in \Sigma,\ j = 1,2,\dots$ ve $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ise, o zaman

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, A \subset \mathbb{R}\right\}$$

sayısına A kümesinin Lebesgue **dış ölçüsü** denir.

$E \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Her $A \subseteq \mathbb{R}$ için,

$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$

oluyorsa E kümesine Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir.

Teorem 2.7 (Lebesgue ölçüsünün varlığı) Aşağıdaki özelliklere sahip $\mathbb{R}^n$ nin alt kümelerinin bir Σ σ-cebiri ve Σ üzerinde bir pozitif μ ölçüsü vardır:

i) $\mathbb{R}^n$de her açık küme Σ ya aittir.

ii) Eğer $A \subset B,\ B \in \Sigma$ ve $\mu(B) = 0$ ise, o zaman $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = 0$ olur.

iii) Eğer $A = \{x \in \mathbb{R}^n\colon a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1,2,\dots,n\}$ ise, o zaman $A \in \Sigma$ ve

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{n} (\,b_j - a_j).$$

iv) Eğer $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \Sigma$ ise $x + A = \{x + y\colon y \in A\} \in \Sigma$ ve $\mu(x + A) = \mu(A)$ olur (öteleme değişmezliği).

Σ sınıfının elemanlarına $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue anlamında ölçülebilir alt kümeler denir. μ fonksiyonuna ise, $\mathbb{R}^n$de **Lebesgue anlamında ölçü** denir. Lebesgue ölçüsü, $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2)$ teki hacmin (uzunluğun, alanın) genellemesi olduğundan $A \in \Sigma$ için $\mu(A)$, A kümesinin hacmi (uzunluğu, alanı) yerine A kümesinin ölçüsü olarak adlandırılır (Adams ve Fournier [13]).

Tanım 2.8 Eğer $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ ve $\mu(B) = 0$ olmak üzere herhangi bir koşul B^c üzerinde sağlanıyorsa A üzerinde **hemen her yerde** doğrudur (h.h.y) denir [13].

Tanım 2.9 (X, Σ_1, μ_1) ve (X, Σ_2, μ_2) ölçüm uzayları olsun. Eğer $f: \Sigma_1 \to \Sigma_2$ fonksiyonu $A \subset \Sigma_2$ iken $f^{-1}(A) \subset \Sigma_1$ oluyorsa X üzerinde **ölçülebilir fonksiyon** olarak adlandırılır.

Teorem 2.10 (X, Σ, μ)ölçüm uzayları olsun. $f: X \to [0, \infty]$ fonksiyonu her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \in \Sigma$ özelliğini sağlıyorsa ölçülebilir fonksiyondur denir.

Tanım 2.11 $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu A kümesinin **karakteristik fonksiyonu** olarak adlandırılır.

Tanım 2.12 Bir s fonksiyonunun görüntü kümesi sonlu elemandan oluşuyorsa s ye **basit fonksiyon** denir.

$s: X \subset \mathbb{R}^n \to \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$

$$s = \sum_{J=1}^{n} a_j \chi_{A_j}(x), \qquad A_j = \{x \in \mathbb{R}^n: s(x) = a_j\} \subset X$$

Teorem 2.13 Aşağıdaki bütün fonksiyonlar ve kümeler ölçülebilir olmak üzere önermeler doğrudur.

a) f fonksiyonu A da sınırlı ve $\mu(A) < \infty$ ise, $f \in L_1(A)$

b) Eğer her $x \in A$ için $a \leq f(x) \leq b$ ve $\mu(A) < \infty$ ise,

$$a\mu(A) \leq \int_A f(x)dx \leq b\mu(A)$$

c) Eğer $\mu(A) = 0$ ise, o zaman

$$\int_A f(x)\, dx = 0$$

d) Eğer $f \in L_1(A)$ ise, o zaman $|f| \in L_1(A)$ ve

$$\left|\int_A f(x)\, dx\right| \leq \int_A |f(x)|\, dx$$

Tanım 2.14 $1 < p < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan p ile q iki reel sayısına **eşlenik indis** denir.

Teorem 2.15 (Young Eşitsizliği)

$\alpha, \beta \geq 0,\ 1 < p < \infty$, ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır [14].

Teorem 2.16 (Hölder Eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan p ile q iki reel sayı olmak üzere

Eğer $f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_q(\Omega)$ ise, $fg \in L_1(\Omega)$ ve

$$\int_\Omega |fg|\, dx = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır [14].

Teorem 2.17 (Cauchy (Bunyakovsky – Schwarz) Eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan p ile q iki reel sayı olmak üzere

$f, g \in L_2(\Omega)$ ise, $fg \in L_1(\Omega)$ ve

$$\left|\int_\Omega fg\, dx\right| \leq \int_\Omega |fg|\, dx = \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

eşitsizliği sağlanır [14].

Teorem 2.18 (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği)

$p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1,\ \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1,\ \ f_i \in L_{p_i}(\Omega)\ , i = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\int_{\Omega} |f_1(x) \dots f_n(x)| dx \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_n\|_{p_n}$$

sağlanır.

Teorem 2.19 (Minkowsky Eşitsizliği)

p ile $q, 1 \leq p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki reel sayı olmak üzere

eğer $f, g \in L_p(\Omega)$ ise $f + g \in L_p(\Omega)$ ve

$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

eşitsizliği sağlanır [14].

Teorem 2.20 (Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliği (Minkowsky integral eşitsizliği)) (X_1, Σ_1, μ_1) ve (X_2, Σ_2, μ_2) ölçüm uzayları ve $F: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. Bu durumda

$$\left(\int_{X_2} \left| \int_{X_1} F(x, y) d\mu_1 \right|^p d\mu_2 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{X_1} \left(\int_{X_2} |F(x, y)|^p d\mu_2 \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1$$

sağlanır, $p > 1$ için eşitsizliğin her iki tarafı sonludur.

Tanım 2.21 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir f fonksiyonu için h.h.y $|f(x)| < C$ olacak şekilde bir $C \geq 0$ sabit sayısı varsa, Ω üzerinde h.h.y **esas sınırlıdır** denir. C sabit sayılarının en büyük alt sınırına Ω üzerinde $|f|$ in **esas supremumu** denir.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ \mu(\Omega)=0}} |f(x)| = \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ \mu(\Omega)=0}} \{\, C : \ |f(x)| \leq C \,\}$$

veya ess sup $|f(x)| = \inf \{\, C : \ \mu(\{\, x : \ |f(x)| > C \,\}) = 0\}$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımdan Ω üzerinde h.h.y

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ \mu(\Omega)=0}} |f(x)|$$

elde edilir.

Tanım 2.22 $\mathbb{R}^n$ n boyutlu Öklid uzayında bir vektör (nokta) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olmak üzere x in normu

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2$$

ile tanımlanır. $\mathbb{R}^n$ de $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ de f fonksiyonun Lebesgue integrali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

ile gösterilir.

Çok katlı integrali küresel koordinatlarla ifade etmek kullanışlıdır. $r = |x|$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx$$

integralinin hesabı için

$$0 \le r < \infty, 0 \le \theta_1, \ldots, \theta_{n-2} \le \pi,\ \ 0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi$$

$$x_1 = r \cos\theta_1$$

$$x_2 = r \sin\theta_1 \cos\theta_2$$

$$x_3 = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots . \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1}$$

$$x_n = r \sin\theta_1 \ldots . \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(r)\, J(r, \theta) dr d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} =$$

$$= \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} (\sin\theta_j)^{n-1-j} \, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} =$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr$$

elde edilir. Genel olarak

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r \sin\theta_1, \dots, \sin\theta_{n-1})\, r^{n-1} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} =$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r,\theta) r^{n-1} d\sigma dr$$

biçiminde yazılır. Burada $d\sigma$, $\mathbb{S}^{n-1}$ üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey alanı elemanını belirtmektedir.

Tanım 2.23 $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere $B = B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ x merkezli r yarıçaplı açık yuvarı belirtmektedir. ${}^{c}B(x,r)$ ifadesi ile bu açık yuvarın tümleyenini göstereceğiz. Ayrıca $0 < x < \infty$ olmak üzere gama fonksiyonu $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ile tanımlanır.

$B(x,r)$ açık yuvarının ölçüsü $\mu\big(B(x,r)\big)$ ve $\mathbb{R}^n$ de birim yuvarın hacmini ifade etmektedir

$v_n = \mu\big(B(0,1)\big) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}$ olmak üzere

$$\mu\big(B(x,r)\big) = |B(x,r)| = |B| = \int_B dx = v_n r^n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{n} |\mathbb{S}^{n-1}| r^n$$

şeklinde verilir.

$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ $\mathbb{R}^n$ de $n-1$ boyutlu birim küre olmak üzere ω_{n-1}, $\mathbb{R}^n$ de birim kürenin yüzey alanını ifade etmektedir ve

$$\omega_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}| = n v_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

ile verilir. Açık olarak

$$\int_{B(x,r)} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{B(x,r)}\,dx$$

ifade etmektedir.

$x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olsun. $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$Q = Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \max\left(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\right) \le r\}$$

x merkezli, kenar uzunluğu r olan kübü ifade etmektedir [15]. $Q(x,r)$ küpünün ölçüsü

$$\mu\big(Q(x,r)\big) = |Q(x,r)| = |Q| = \int_Q dx$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.24 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı kümenin kapanışına, yani $supp\ f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ kümesine ***f* in desteği (dayanağı)** denir.

Eğer $supp\ f$ kümesi kompakt ise, f e **kompakt destekli fonksiyon** denir.

Tanım 2.25 $C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \colon \forall\, x \in \Omega \setminus K, K \text{ kompakt } f(x) = 0\}$ kompakt destekli bütün sürekli fonksiyonların uzayını ifade etmektedir [16].

$C_k(\Omega)$ uzayı ise, $k \ge 0$ olmak üzere Ω üzerinde k kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon uzayını ifade etmektedir.

Tanım 2.26 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ tanımlı olduğu küme üzerinde her mertebeden kısmi türevi olan sürekli f fonksiyonuna **düzgün fonksiyon** denir. $f \in C_\infty(\Omega)$ ve açık olarak

$$C_\infty(\Omega) = \bigcap_{k \ge 0} C_k(\Omega)$$

şeklindedir.

Tanım 2.27 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ ölçülebilir ve } \int_\Omega |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir. f fonksiyonunun L_p normu

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L_p ye Lebesgue uzayı denir [11],[17],[2],[8].

Tanım 2.28 (Lokal İntegrallenebilir Fonksiyon Uzayı)

$$L_p^{loc}(\Omega) = \left\{ f:\Omega \to \mathbb{R} : K \subset \Omega \text{ kompakt}, f \text{ ölçülebilir ve } \int\limits_{K} |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

$1 \le p \le \infty$ için $L_p(\Omega) \subset L_p^{loc}(\Omega) \subset L_1^{loc}(\Omega)$ olur.

Örnek 2.29 $f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. $f \in L_1^{loc}\big((0,1)\big)$ fakat $f \notin L_1\big((0,1)\big)$ olur.

Tanım 2.30 $p = \infty$ durumunda

$L_\infty(\Omega) = \{f:\Omega \to R : f \text{ ölçülebilir ve } |f(x)| < C \text{ h.h.y } x \in \Omega \text{ için } C > 0 \text{ vardır}\}$

uzayı

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \underset{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega \\ \mu(\Omega)=0}}{\text{ess sup}} |f(x)| < \infty$$

normu ile tanımlı sınırlı fonksiyon uzayına denir.

Lemma 2.31 $f \in L_\infty(\Omega)$ ve f sürekli ise, $\|f\|_{L_\infty} = \sup|f(x)|$. Eğer f sürekli değilse $f(x) > \|f\|_{L_\infty}$ olan bütün x lerin kümesi, sıfır kümesidir.

Örnek 2.32 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ olsun. h.h.y $|f(x)| \le 1$ olduğundan ess sup $|f(x)| = 1$

Böylece $f \in L_\infty(\Omega)$ elde edilir.

Lebesgue Uzayının Özellikleri

1) $1 \le p \le \infty$ olmak üzere L_p bir vektör uzaydır.

2) $1 \le p \le \infty$ olmak üzere L_p bir Banach uzayıdır.

3) L_p refleksif bir uzaydır.

Gerçekten, $1 < p < \infty$ iken $\left(L_p^*\right)^* = L_p$ olduğundan L_p refleksif bir uzaydır.

4) $1 \le p < \infty$ olmak üzere L_p ayrılabilir bir uzaydır.

Gerçekten, $1 \leq p < \infty$ için $C_c(\mathbb{R}^n)$ uzayı $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğundur. $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n), \forall \varepsilon > 0$ için $\|f - f_n\|_{L_p} < \varepsilon$ olacak şekilde $(f_n) \in C_c(\mathbb{R}^n)$ vardır [14],[16]. Sonuç olarak $C_c(\mathbb{R}^n)$ uzayı $L_p(\mathbb{R}^n)$ de yoğun ve sayılabilir olduğundan $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı ayrılabilirdir.

Tanım 2.33 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ölçülebilir f fonksiyonları için $\|f\|_{WL_p(\Omega)} = \sup_{\lambda>0} \lambda \left(\mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > \lambda\})\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ quasi normuna sahip uzaya zayıf Lebesgue uzayı denir. $WL_\infty(\Omega)$ veya $L_{p,\infty}(\Omega)$ şeklinde de gösterilir.

L_p normunun üçgen eşitsizliği yardımıyla $\|f + g\|_{WL_p} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_{WL_p} + \|g\|_{WL_p}\right)$ elde ederiz. Bu yüzden WL_p quasi normlu uzaydır (Hao [11]).

Teorem 2.34 $1 \leq p < \infty$ için $L_p(\Omega) \subset WL_p(\Omega)$ ve $\|f\|_{WL_p} \leq \|f\|_{L_p}$ sağlanır.

Örnek 2.35 $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ olsun. Bu durumda $f(x) \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ fakat $f(x) \in WL_p(\mathbb{R}^n)$ olur. Gerçekten, $p = 1$ iken $f(x) = |x|^{-n}$dir. $f \notin L_1(\mathbb{R}^n)$ fakat $f \in WL_1(\mathbb{R}^n)$ olur:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n}\, dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} t^{n-1} t^{-n} dt d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma \int_0^\infty t^{-1} dt = |\mathbb{S}^{n-1}| \ \ln t \,|_0^\infty = \infty, \ \ f \notin L_1(\mathbb{R}^n)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n: ||x|^{-n}| > t\}) = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\, |x|^{-n} > t\}} dx = \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:\, |x| < t^{-\frac{1}{n}}\right\}} dx = \int_{B(0,t^{-\frac{1}{n}})} dx =$$

$$= \mu\left(B(0, t^{-\frac{1}{n}})\right) = v_n \left(t^{-\frac{1}{n}}\right)^n = v_n t^{-1} \text{ olduğundan}$$

$$\|\, |x|^{-n}\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} \ t\, \mu(\{x \in \mathbb{R}^n: ||x|^{-n}| > t\}) =$$

$$= \sup_{t>0} t v_n t^{-1} = \sup_{t>0} v_n = v_n < \infty$$

ve buradan $f \in WL_1(\mathbb{R}^n)$elde edilir.

Tanım 2.36 $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir f fonksiyonu olsun. $f_*: [0,\infty) \to [0,\infty]$

$f_*(\lambda) = \mu(\{ x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > \lambda\}), \qquad \lambda \geq 0$

fonksiyonuna f nin **dağılım fonksiyonu** denir.

Dağılım Fonksiyonun Temel Özellikleri

1. $|f(x)| \leq |g(x)| \implies f_*(\lambda) \leq g_*(\lambda)$

2. $0 < p < \infty$ ve $\lambda > 0$ için

$$f_*(\lambda) \leq \lambda^{-p} \int\limits_{\{x: |f(x)| \geq \lambda\}} |f(x)|^p \, dx \leq \lambda^{-p} \|f\|_p^p$$

3. $1 \leq p < \infty, f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ iken

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^p f_*(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^p f_*(\lambda) = 0$$

Teorem 2.37

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Her $\alpha > 0$ için

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| \geq \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p$$

eşitsizliğine **Markov eşitsizliği** denir.

Teorem 2.38 Markov eşitsizliğinin özel hali olarak eğer $f \geq 0$ ise,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

eşitsizliğine **Chebyshev eşitsizliği** denir.

Teorem 2.39 $f(x)$ $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

1) $1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p}^p = p \int\limits_0^\infty t^{p-1} \mu(\{ x \in \Omega : \ |f(x)| > t \}) \, dt = p \int\limits_0^\infty t^{p-1} f_*(t) \, dt$$

sağlanır [11],[17], [18], [8].

2) $\|f\|_\infty = \inf \{t: f_*(t) = 0\}$ dir.

Teorem 2.40 (Lebesgue Diferansiyelleme Teoremi)

Eğer $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise, h.h.y $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

sağlanır (Grafakos [18]).

Tanım 2.41 (X, Σ, μ) ölçüm uzayı üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonları için

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : x \in X\,,\ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna **düzgün yakınsaktır** denir.

$\forall \varepsilon > 0, x \in X\ \ \exists\, N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna **noktasal yakınsaktır** denir.

$\exists\, M \subset X, \mu(M) = 0$ olsun. $\forall \varepsilon > 0,\ x \in X \setminus M : \exists\, N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna **h.h.y yakınsaktır** denir.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow\ \|f_n - f\|_p = \left(\int |f_n - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

oluyorsa $(f_n) \in L_p$ dizisi $f \in L_p$ fonksiyonuna $\boldsymbol{L_p}$ **yakınsaktır** denir.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow\ \|f_m - f_n\|_p = (\int |f_m - f_n|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ oluyorsa $(f_n) \in L_p$ dizisine $\boldsymbol{L_p}$ **Cauchy dizisidir** denir.

$\forall \lambda > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda\}) = 0$ oluyorsa (f_n) dizisi f e **ölçüsel yakınsaktır** denir.

$\forall \lambda > 0$ için $\lim\limits_{m,n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \lambda\}) = 0$ oluyorsa (f_n) dizisine **ölçüsel Cauchy dizisidir** denir. (Bartle [16]).

Örnek 2.42 $(f_n) = n^{-\frac{1}{p}} \chi_{[0,n]}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. L_p yakınsak değildir.

$(f_n) = \chi_{[\,n, n+1\,]}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna her yerde yakınsaktır. Ama ölçüsel yakınsak değildir.

$(f_n) = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna h.h.y yakınsaktır ve ölçüsel yakınsaktır [16].

Tanım 2.43 T alt lineer operatör ve $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. Eğer $T: L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow WL_q(\mathbb{R}^n)$ sınırlı bir operatör ise T, **zayıf (p, q) tiplidir** denir. Yani herhangi bir $\lambda > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_p\right)^q$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa

$T: L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$ sınırlı operatörü **kuvvetli (p, q) tiplidir** denir.

$p = q$ iken zayıf tipli veya kuvvetli tipli sağlanır ve T zayıf (p, p) tipi olarak adlanır.

Bir operatör kuvvetli (p, q) tipli ise, aynı zamanda zayıf (p,q) tiplidir. Tersi her zaman doğru değildir.

Eğer $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}$ alınırsa,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) = \int\limits_{E_\lambda} d\mu \leq \int\limits_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q d\mu \leq \frac{\|Tf\|_q^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_p\right)^q$$

elde edilir.

Tanım 2.44 $x = (x_1, \dots, x_n)$ olmak üzere

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

operatörüne $\mathbb{R}^n$ de **Laplace operatörü** denir.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ birinci ve ikinci mertebeden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli olsun. Bu durumda

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$$

denklemine **Laplace denklemi** veya **potansiyel denklemi** denir.

Bu denklemin çözümlerine **potansiyel fonksiyonlar** veya **harmonik fonksiyonlar** denir.

Tanım 2.45 $f \; ve \; g \; \mathbb{R}^n$ de ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$h(x) = (f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y) dy$$

ile tanımlanan h fonksiyonuna f ve g nın konvolüsyonu denir.

Örnek 2.46 $\mathbb{R}$ üzerinde $0 < b \leq a$ olmak üzere $f = \chi_{(-a,a)}$ ve $g = \chi_{(-b,b)}$ olsun [19].

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 2b, & |x| \leq a-b \\ a+b-|x|, & a-b \leq |x| \leq a+b \\ 0, & a+b \leq |x| \end{cases}$$

Teorem 2.47

$1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_1(\Omega)$ ve $f * g \in L_p(\Omega)$ olsun.

$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$

Tanım 2.48 $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ iç çarpımı olmak üzere $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}\, dx$$

ile tanımlı fonksiyona f in **Fourier dönüşümü** denir.

Fourier Dönüşümünün Özellikleri

$f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

1. $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$

2. $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

3. $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

Tanım 2.49 f ve $\hat{f}$ integrallenebilir olmak üzere

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}\, d\xi$$

ile tanımlı fonksiyona f in **ters Fourier dönüşümü** denir.

Teorem 2.50 (Hausdorf-Young eşitsizliği)

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $2 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\left\|\hat{f}\right\|_p \leq C_p \|f\|_q$ gerçekleşir.

Teorem 2.51 (Plancherel formülü)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\hat{f}(x)\,dx$$

$\langle f, g\rangle$ f ile g nin iç çarpımı olmak üzere

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\bar{\hat{g}}\,dx$$

$f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ ise, $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{L_2} = \left\|\hat{f}\right\|_{L_2}$ elde edilir.

Tanım 2.52 Bir A kümesinin konveks küme olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in A$ ise, $\forall\alpha \in [0,1]$ için $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$ olmasıdır.

Bir f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall\alpha \in [0,1]$ için $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ olmasıdır.

BÖLÜM 3

LEBESGUE UZAYINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL ve SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER

Bu bölümde ilk olarak Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörü tanımları verilecektir. Daha sonra Hardy-Littlewood maksimal, Riesz potansiyel ve singüler integral operatörlerinin Lebesgue uzayındaki sınırlılığına ilişkin teoremlere yer verilecektir.

3.1 Lebesgue Uzayında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu fonksiyonların diferansiyellenebilirlik özellikleri, singüler integraller ve kısmi diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir rol oynar. Genellikle bu alandaki problemlerin anlaşılmasında diğer yöntemlerden daha derin bir yaklaşım sağlar.

Eğer f, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ de tanımlı ve integrallenebilir ise bu durumda

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy\,, x \in [a,b] \text{ ve } F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

elde edilir. $h > 0$, $I = (x, x+h)$ ve $|I|$ bu aralığın ölçüsü olmak üzere

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy = \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy$$

ifadesi I aralığında f fonksiyonunun ortalama değeridir.

$|I| \to 0$ iken uygun x noktaları için limit $f(x)$ e yakınsar.

$$\lim_{|I|\to 0} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)\, dy = f(x)\,, x \in I$$

Daha yüksek boyutlarda ise, bir boyuttaki aralıklar yerine x merkezli r yarıçaplı $B(x,r)$ yuvarı alınır.

Lebesgue diferansiyelleme teoremine göre, h.h.y x için

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \tag{3.1}$$

ifadesi geçerlidir.

f fonksiyonu x noktasında sürekli iken limiti $f(x)$ olsun. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 :\ |x - y| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olur.

$$f(x) - \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (\, f(x) - f(y)\,)\, dy$$

olduğundan $r < \delta$ yarıçaplı bir $B(x,r)$ yuvarı bulduğumuzdan

$$\left| f(x) - \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy \right| \leq \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|\, dy < \varepsilon$$

elde ederiz.

(3.1) denkleminde lim yerine sup ve f yerine $|f|$ alınarak (merkezil) maksimal fonksiyon tanımlanır (Hao [11]).

Maksimal fonksiyon, 1930 yılında $\mathbb{R}^n$ üzerinde tek boyutlu olarak Hardy-Littlewood tarafından ilk defa ortaya konulmuştur [1] ve Wiener tarafından 1939 yılında n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir.

Tanım 3.1 Eğer $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise, f in maksimal fonksiyonu $Mf :\ \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

İle tanımlanır. $M\!: f \to Mf$ operatörü Hardy-Littlewood maksimal operatörü olarak adlandırılır.

Maksimal fonksiyon için yuvar yerine küp alınarak tanımlanabilir:

$Q(x,r)$, $[x-r,x+r]^n$ küpü olmak üzere, $M'f$ maksimal fonksiyonu

$$M'f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{(2r)^n}\int\limits_{Q(x,r)}|f(y)|dy\,,\qquad x\in\mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

$n=1$ için M ve M' fonksiyonları çakışır. $n>1$ olduğunda, n ye bağlı c_n ve $C_n$sabitleri vardır.

$$c_nM'f(x)\le Mf(x)\le C_nM'f(x) \tag{3.4}$$

Daha genel maksimal fonksiyonu şöyle tanımlayabiliriz:

$$M''f(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{\mu(Q)}\int\limits_{Q}|f(y)|dy\,,\qquad x\in\mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

Burada supremum, x noktasını içeren bütün küpler üzerinden alınır.

Bu tanıma alternatif olarak merkezil olmayan maksimal fonksiyon tanımı verilmiştir.

$$\widetilde{M}f(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_{B}|f(y)|dy\,,\qquad x\in\mathbb{R}^n \tag{3.6}$$

Burada supremum x noktasını içeren $\mathbb{R}^n$ deki B yuvarları üzerinden alınır (Hao [11]).

Örnek 3.2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\chi_{(0,1)}(x)$ olmak üzere $Mf(x), M'f(x), \widetilde{M}f(x), M''f(x)$ fonksiyonlarını ifade ediniz.

$$Mf(x)=M'f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & x>1,\\ 1, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{2(1-x)}, & x<0,\end{cases}$$

$$\widetilde{M}f(x)=M''f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>1,\\ 1, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x<0,\end{cases}$$

bulunur.

$x > 1$için

$$Mf(x) = M'f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \chi_{(0,1)}(y)dy$$

$$= max\left(\underset{x-h>0}{sup} \frac{1-x+h}{2h}, \sup_{x-h\leq 0} \frac{1}{2h} \right) = \frac{1}{2x},$$

$$\widetilde{M}f(x) = M''f(x) = \sup_{h_1,h_2>0} \frac{1}{h_1+h_2} \int_{x-h_1}^{x+h_2} \chi_{(0,1)}(y)dy$$

$$= max\left(\underset{0<x-h_1<1}{sup} \frac{1-x+h_1}{h_1}, \sup_{x-h_1\leq 0} \frac{1}{h_1} \right) = \frac{1}{x},$$

$0 \leq x \leq 1$ için

$$Mf(x) = M'f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \chi_{(0,1)}(y)dy$$

$$= max\left(\underset{0<x-h<x+h<1}{sup} \frac{2h}{2h}, \sup_{0<x-h<1\leq x+h} \frac{1-x+h}{2h}, \underset{x-h\leq 0<x+h<1}{sup} \frac{x+h}{2h}, \underset{x-h\leq 0<1\leq x+h}{sup} \frac{1}{2h} \right)$$

$$= max\left(1,1,1, \frac{1}{2} min\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x} \right) \right) = 1,$$

$$\widetilde{M}f(x) = M''f(x) = \sup_{h_1,h_2>0} \frac{1}{h_1+h_2} \int_{x-h_1}^{x+h_2} \chi_{(0,1)}(y)dy$$

$$= \max(\underset{0<x-h_1<x+h_2<1}{sup} \frac{h_1+h_2}{h_1+h_2}, \sup_{x-h_1<0<x+h_2<1} \frac{x+h_2}{h_1+h_2}, \underset{0<x-h_1<1<x+h_2}{sup} \frac{1-x+h_1}{h_1+h_2},$$

$$\underset{x-h_1<0<1<x+h_2}{sup} \frac{1}{h_1+h_2}) = 1,$$

$x < 0$ için

$$Mf(x) = M'f(x) = max\left(\underset{0<x+h<1,h>0}{sup} \frac{x+h}{2h}, \sup_{x+h\geq 1} \frac{1}{2h} \right) = \frac{1}{2(1-x)},$$

$$\widetilde{M}f(x) = M''f(x) = max\left(\underset{h_1,h_2>0,0<x+h_2<1}{sup} \frac{x+h_2}{h_1+h_2}, \sup_{h_1>0,x+h_2\geq 1} \frac{1}{h_1+h_2} \right) = \frac{1}{1-x}$$

elde edilir (Hao [11]).

Özellik 3.3 $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere maksimal fonksiyonun temel özellikleri:

i) Pozitiflik: $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $Mf(x) \geq 0$.

ii) Alt lineerlik: $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$

iii) Homojenlik: $M(\alpha f)(x) = |\alpha| Mf(x), \alpha \in \mathbb{R}$.

iv) $\forall\, f$ ve h.h.y $x \in \mathbb{R}^n$ için $|f(x)| \leq Mf(x)$.

v) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sıfıra denk değilse, o zaman $Mf \notin L_1(\mathbb{R}^n)$.

vi) Eğer $f \in L_\infty \mathbb{R}^n$ ise, o zaman $Mf \in L_\infty \mathbb{R}^n$ ve $\|Mf\|_\infty = \|f\|_\infty$ ([11], (Cruz-Uribe ve Fiorenza [20],[21]).

Aşağıdaki teorem ile Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki sınırlılığı verilmektedir.

Teorem 3.4 f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

a) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise, o zaman Mf h.h.y sonludur.

b) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise, o zaman her $\alpha > 0$ için

$$\mu\{x: (Mf)(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx$$

sağlanır, burada A sabiti sadece n boyutuna bağlıdır.

c) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise, o zaman $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

sağlanır, burada A_p sabiti sadece n ve p ye bağlıdır (Stein [22]).

Sonuç 3.5 Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n), p \in (1, \infty]$ ise, o zaman $\|f\|_p \leq \|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ [11].

3.2 Lebesgue Uzayında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

Riesz potansiyeli, diferansiyel denklemler, kesirli Laplace ve fiziksel olayların matematiksel modellemelerinde özellikle akışkanlar mekaniği ile yakından ilgilidir.

f yeterince düzgün fonksiyon ve sonlu olsun. Fourier dönüşümünden

$$(\widehat{-\Delta f})(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial y_n^2} \right) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} dy =$$

$$= -\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} dy + \cdots + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_n^2} e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} dy \right) =$$

$= -(I_1 + I_2 + \cdots + I_n)$ şeklinde ifade edildiğinde;

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} e^{-2\pi i (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} dy_1 dy_2 \ldots dy_n$$

ifadesini hesaplamak için

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} e^{-2\pi i x_1 y_1} dy_1$$

olsun. Bu integrale kısmi integrasyon uygulandığında ve f düzgün fonksiyonu sonsuzda sıfır değerini aldığından $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ de sonsuzda sıfır değerini alır. Böylece

$$I_1 = (2\pi i x_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1) e^{-2\pi i x_1 y_1} dy_1$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2 = (2\pi i x_2)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(y_2) e^{-2\pi i x_2 y_2} dy_2$$

$\vdots$

$$I_n = (2\pi i x_n)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(y_n) e^{-2\pi i x_n y_n} dy_n$$

bulunur. O halde $(\widehat{-\Delta f})(x) =$

$$= -\left((2\pi i x_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1) e^{-2\pi i x_1 y_1} dy_1 + \cdots + (2\pi i x_n)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(y_n) e^{-2\pi i x_n y_n} dy_n \right) =$$

$= -\left[(2\pi i x_1)^2 \hat{f}(x_1) + \cdots + (2\pi i x_n)^2 \hat{f}(x_n) \right]$ olur. Böylece

$(\widehat{-\Delta f})(x) = (2\pi |x|)^2 \hat{f}(x) = 4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x)$ elde edilir.

$|x|^2$ ifadesinde 2 kuvveti yerine genel β kuvveti alındığında Laplace operatörünün kesir kuvvetinin son hali

$$\left(\widehat{-\Delta^{\frac{\beta}{2}} f}\right)(x) = (2\pi|x|)^{\beta} \hat{f}(x)$$

olarak elde edilir.

$-n < \beta < 0$ aralığında negatif β kuvvetinin özel anlamı vardır. Böylece

$$\left(\widehat{(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f}\right)(x) = (2\pi|x|)^{-\alpha} \hat{f}(x) = \left(\widehat{I_\alpha f}\right)(x)$$

elde edilir. Riesz potansiyeli $I_\alpha(f) = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}(f)$, $0 < \alpha < n$ Laplace operatörünün negatif kuvvetli özel halini ifade etmektedir.

Eğer $0 < \alpha < n$ ise, $|x|^{-n+\alpha} \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. $|x|^{-n+\alpha}$ fonksiyonun Fourier dönüşümü $\left(\widehat{|.|^{-n+\alpha}}\right)(x) = \gamma(\alpha)(2\pi)^{-\alpha}|x|^{-\alpha}$ şeklindedir.

Tanım 3.6

$$0 < \alpha < n \text{ ve } \gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \text{ olmak üzere}$$

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = \frac{1}{\gamma(\alpha)} (|.|^{-n+\alpha} * f)(x)$$

şeklinde tanımlı olan fonksiyona Riesz potansiyeli denir [11], [21], [17], [8],[23] .

I_α Riesz Potansiyellerinin Özellikleri

1) $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta < n$ iken $I_\alpha\left(I_\beta f\right) = I_{\alpha+\beta}(f)$

2) $n > 3$ ve $2 \leq \alpha \leq n$ iken $\Delta(I_\alpha f) = I_\alpha(\Delta f) = -I_{\alpha-2}(f)$

Burada 1) in bir sonucu olarak $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta < n$ olmak üzere

$$B(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}^n} |1-y|^{-n+\alpha} |y|^{-n+\beta} dy = \frac{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)}{\gamma(\alpha+\beta)}$$

n boyutlu Beta fonksiyonu elde edilir (Stein [22]).

Aşağıdaki teoremde Riesz potansiyelinin Lebesgue uzayında sınırlılığını ifade eden Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi verilmektedir.

Teorem 3.7 (Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi)

$0 < \alpha < n, 1 \leq p < q < \infty$ ve $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ olsun.

a) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise,

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

integrali h.h.y x için mutlak yakınsaktır.

b) Eğer $1 < p$ ise,

$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$

eşitsizliği gerçekleşir.

c) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise, her $\lambda > 0$ için

$$\mu\{x: |I_\alpha f(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{A\|f\|_1}{\lambda}\right)^q$$

dir. Yani, $f \to I_\alpha f$ dönüşümü $(1, q)$ zayıf tiptendir $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}\right)$ (Stein [22]).

Not: $p = \frac{n}{\alpha}$ olduğunda $\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$ gerçekleşmez. Örneğin $\varepsilon > 0$ yeterince küçük olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha} \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)}, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

olsun. $p = \frac{n}{\alpha}$ için

$$\|f\|_{\frac{n}{\alpha}} = \left(\int\limits_{|x| \leq \frac{1}{2}} |x|^{-n} \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{-(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{n}{\alpha}} < \infty$$

olduğundan $f \in L_{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ olur.

Fakat $\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon) \leq 1$ şartını sağlayan $\varepsilon > 0$ alındığında

$$I_\alpha(f)(0) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{|x|\leq\frac{1}{2}} |x|^{-n}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)} dx = \infty$$

ve $I_\alpha(f)$ orijinde esas sınırlı değildir. Böylece $I_\alpha(f) \notin L_\infty(\mathbb{R}^n)$ bulunur [11],[21].

3.3 Lebesgue Uzayında Calderon-Zygmund Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı

Calderon-Zygmund singüler integral operatörü Riesz ve Hilbert dönüşümlerinin genelleştirilmesidir. Hilbert dönüşümü singüler integrallerin ilk örneği olup üst yarı düzlem üzerinde eşlenik harmonik fonksiyonların sınır değer problemlerinin araştırmalarında kullanılmaktadır. Riesz dönüşümü de ikinci mertebeden eliptik denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında ortaya çıkmaktadır.

Tanım 3.9 $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$Hf(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}dt$$

dönüşümüne **Hilbert dönüşümü** denir.

$$R_j f(x) = p.v. C_n \int_{\mathbb{R}} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy, \qquad 1 \leq j \leq n \quad , \quad C_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

biçiminde tanımlı $R_j f$ dönüşümlerine de, **Riesz dönüşümleri** denir [21].

Riesz dönüşümleri $(1 < p < \infty)$ kuvetli (p,p) tipli ve zayıf $(1,1)$ tiplidirler.

Hilbert dönüşümü 1 boyutlu Riesz dönüşümü olduğundan $(1 < p < \infty)$ kuvvetli (p,p) tipli ve zayıf $(1,1)$ tiplidir.

Tanım 3.10 Her $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için eğer $K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$ ise, $K(x)$ çekirdeğine α dereceden **homojen fonksiyon** denir.

$x \neq 0$ olmak üzere birim yuvarda x in izdüşümünü x' ile gösterelim. Yani $x' = \frac{x}{|x|}$ olur. $K(x)$ α dereceli homojen ise,

$$K(x) = |x|^{\alpha} K\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^{\alpha} K(x')$$

$\Omega(x) = K\left(\frac{x}{|x|}\right), \Omega(x) = \Omega(x')$ sıfır dereceli homojen fonksiyondur.

$\Omega(x)$ fonksiyonu bazen $K(x)$ çekirdeğinin karakteristiği olarak adlandırılır.

f $\mathbb{R}^n$ de tanımlı ve ölçülebilir fonksiyon $K(x)$ –α negatif dereceli homojen çekirdek olsun.

$$h(x) = (f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy$$

şeklindeki h fonksiyonuna f ve K nın konvolüsyonu denir.

1) $0 < \alpha < n$ ise, h fonksiyonuna zayıf singüler integral,

2) $\alpha = n$ ise, h fonksiyonuna singüler integral,

3) $\alpha > n$ ise, h fonksiyonuna hiper singüler integral denir

Newton potansiyelleri $n > 2$, $f * |x|^{-n+2}$ ve daha genel olarak Riesz potansiyelleri $0 < \alpha < n$, $f * |x|^{-\alpha}$ zayıf singüler integral örnekleridir (Neri [24]).

Singüler integral operatörleri kısmi türevli denklemler teorisinde, analitik fonksiyonların sınır değer problemleri teorisinde, Fourier serilerinde, matematiksel fizik ve matematiğin diğer dallarında birçok uygulamaları olan güncel bir konudur. Bugüne kadar B. Muckenhoupt, R. Wheeden, C. Fefferman, D. S. Kurtz, S. Samko, V. Burenkov, V. Kokilashvili, V.S. Guliyev, Y. Ding, S.Z. Lu gibi matematiğin önemli isimleri bu alanda çalışmış ve birçok problemin çözümü için önemli sonuçlar elde etmiştir.

Tanım 3.11 $K(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ olsun.

$|K(x)| \le B|x|^{-n}, \forall x \neq 0$

$$\int_{r \le |x| \le R} K(x) dx = 0, \forall\, 0 < r < R < \infty$$

$$\int_{|x| \ge 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \le B, \qquad \forall y \neq 0 \qquad \text{(Hömander şartı)}$$

B, x ve y den bağımsız bir sabit olmak üzere yukarıdaki şartları sağlayan K ya Calderon-Zygmund çekirdeği denir [11],[21].

Teorem 3.12 K Calderon-Zygmund çekirdeği olsun.

$1 < p < \infty,\ \varepsilon > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)dy$$

olduğunda aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

i) $\|T_\varepsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$

A_p, ε ve f den bağımsız bir sabittir.

ii) Herhangi $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için L_p anlamında $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f$ vardır. Yani

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K(y)f(x-y)dy$$

iii) $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ eşitsizliği sağlanır.

ii) de tanımlanan T lineer operatörü **Calderon-Zygmund singüler integral operatörü** ve T_ε ise, ***T* nin kesilmiş operatörü** olarak adlandırılır [21].

$x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de $\delta_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x)$ şeklinde dilation operatörü tanımlanır [21].

$Tf = K * f$ ve $\delta_{\varepsilon^{-1}} T \delta_\varepsilon = T$ ise, $K(\varepsilon x) = \varepsilon^{-n} K(x)$ olur. Başka bir ifadeyle Ω sıfır dereceli fonksiyonu olmak üzere

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.13 $\Omega \in L_\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ sıfırıncı dereceden homojen olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın [21].

a) Her $x' \in \mathbb{S}^{n-1}$için $|\Omega(x')| \leq B$,

b) Ω , $\mathbb{S}^{n-1}$ üzerinde sıfır anlamındadır. $x' = \frac{x}{|x|}$, $x \neq 0$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(x')\, d\sigma(x') = 0$$

c) Hömander şartı veya yerine daha güçlü olan L_∞- Dini şartı :

$\omega_\infty = \sup_{\substack{x',\, y' \in \mathbb{S}^{n-1} \\ |x'-y'|<\infty}} |\Omega(x') - \Omega(y')|$ olmak üzere

$$\int_0^1 \frac{\omega_\infty(\delta)}{\delta} d\delta < \infty$$

olsun. Ayrıca, $1 < p < \infty, f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy$$

olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) $\|T_\varepsilon f\|_p \leq A_p \|f\|_p$ olacak biçimde ε ve f den bağımsız bir A_p sabiti vardır.

ii) L_p anlamında $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f = Tf(x)$ vardır.

iii) $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$elde edilir.

Tanım 3.14 Ω sıfır dereceli homojen ve

$K(x) = \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$ olmak üzere

$$T_\Omega f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy$$

ile tanımlanan T_Ω ya **homojen çekirdekli singüler integral operatör** denir [21].

Tanım 3.15 Ω, $\mathbb{R}^n$ de sıfır dereceli bir homojen fonksiyon olsun ve Teorem 3.13 deki şartları sağlasın. T_Ω homojen çekirdekli singüler integral operatörü olsun.

Her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$T_\Omega^* f(x) = \sup_{\epsilon>0} \left|T_{\Omega,\epsilon} f(x)\right|$$

ile tanımlı T_Ω^* operatörüne **maksimal singüler integral operatörü** denir.

Öyle ki $\varepsilon > 0$ iken

$$T_{\Omega,\epsilon}f(x) = \int\limits_{|y|\geq\epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy$$

operatörü, T_Ω operatörünün kesik operatörüdür [21].

Sonuç 3.17 Her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için L_p anlamında $\lim_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon}f = T_\Omega f(x)$ vardır [21].

BÖLÜM 4

MORREY UZAYINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL ve SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER

Bu bölümde Morrey uzayının tanımı ve genel özellikleri ile Morrey uzayında maksimal operatör, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörünün sınırlılığı verilecektir.

4.1 Morrey Uzayı ve Genel Özellikleri

$L_{p,\lambda} = L_{p,\lambda}(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Morrey uzayı 1938 yılında C.B. Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzaylarının kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin regülerlik özelliklerinin çalışması ve kesin ön eşitsizliklerinin bulunması gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Daha sonraları Morrey uzaylarının Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisinde önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

Tanım 4.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$ ve $f \in L_p^{loc}(\Omega)$ olmak üzere

$$L_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ f \in L_p(\Omega) : \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\Omega)} = \|f\|_{L_{p,\lambda}} = \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} \left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} < \infty$$

normu ile tanımlı fonksiyonların uzayına **Morrey uzayı** denir [2],[5],[9],[10],[15],[25].

$\|f\|_{L_{p,\lambda}}$ normu $L_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayında quasi normdur (f sabit olduğunda $\|f\|_{L_{p,\lambda}} = 0$ olur). Morrey uzayındaki fonksiyonlar sabit farkıyla eşit fonksiyonlar olarak alındığında $\|f\|_{L_{p,\lambda}}$ normu ile $L_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzayının Özellikleri

1) $\lambda = 0$ iken $L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ dır: $\lambda = 0$ ve $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\|f\|_{L_{p,0}} = \sup_{\substack{t>0, \\ x\in\mathbb{R}^n}} \left(t^{-0} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\substack{t>0, \\ x\in\mathbb{R}^n}} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

ve dolayısıyla $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ elde edilir.

2) $\lambda < 0$ ve $\lambda > n$ iken $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ dır, burada Θ, $\mathbb{R}^n$ deki sıfıra denk olan bütün fonksiyonların kümesidir: $\lambda < 0$ ve $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\substack{t>0, \\ x\in\mathbb{R}^n}} \left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{\lambda}{p}}$$

$$0 \leq \|f\|_{L_p(B(x,t))} \leq \|f\|_{L_{p,\lambda}} t^{\frac{\lambda}{p}}$$

$t \to \infty$ iken her tarafın limiti alındığında;

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L_{p,\lambda}} \lim_{t\to\infty} t^{\frac{\lambda}{p}}$$

$\lambda < 0$ ve $\|f\|_{L_{p,\lambda}}$ sonlu olduğundan $0 \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ bulunur.

Dolayısıyla $\lambda < 0$ iken $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ elde edilir.

$\lambda > n$ ve $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$0 \leq |f(x)| = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\mu(B(x,t))}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\nu_n t^n}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\nu_n^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t^\lambda}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{\lambda-n}{p}} \leq \nu_n^{-\frac{1}{p}}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^\lambda}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\lim_{t\to 0} t^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$= \nu_n^{-\frac{1}{p}}\sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}}\left(t^{-\lambda}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\lim_{t\to 0} t^{\frac{\lambda-n}{p}} = \nu_n^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_{p,\lambda}}\lim_{t\to 0} t^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$\lambda > n$ ve $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sonlu olduğundan

$0 \leq |f(x)| \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ bulunur.

$\lambda > n$ iken $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ elde edilir.

3) $\lambda = n$ iken $L_{p,n}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$:

$\lambda = n$ ve $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$0 \leq |f(x)| = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\mu\big(B(x,t)\big)}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\nu_n t^n}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}}\left(\frac{1}{\nu_n t^n}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \nu_n^{-\frac{1}{p}}\sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}}\left(t^{-n}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \nu_n^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_{p,n}} = \nu_n^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

$$0 \leq |f(x)| \leq \nu_n^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

$f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve sınırlı olduğundan $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ bulunur.

Örnek 4.2 $\lambda > 0$ iken $f(x) = |x|^{\frac{\lambda-n}{p}}$ fonksiyonu $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olur [26].

Örnek 4.3 $f(x) = |x|^{\frac{-n}{p}}\chi_{B(0,1)}$ fonksiyonu $f \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olur:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{-n}{p}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

şeklindedir. $f \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ göstermek için

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int\limits_{B(0,1)} |x|^{-n} dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} t^{n-1} t^{-n} dt d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} d\sigma \int\limits_0^1 t^{-1} dt = |\mathbb{S}^{n-1}| \ \ln t \,|_0^1 = \infty$$

olduğundan $f \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ bulunur.

$f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ göstermek için

$$\sup_{\substack{t>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\lambda} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy = \sup_{t>0} \left(\frac{1}{n}\right)^{-\lambda} \int\limits_{B\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\subset B(0,1)} |y|^{-n} dy$$

$$= \sup_{t>0} n^{\lambda} |\mathbb{S}^{n-1}| \ \ln t \Big|_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} < \infty$$

ve dolayısıyla $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ bulunur.

Tanım 4.4 $\forall f \in L_p^{loc}(\Omega)$ için $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda \le n$ olsun.

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{r>0} r \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t>0}} \left(t^{-\lambda} \mu(\{y \in B(x,t) : |f(y)| > r\})\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{r>0 \\ t>0 \\ x\in\Omega}} r \left(t^{-\lambda} \mu(\{y \in B(x,t) : |f(y)| > r\})\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(\mathrm{B(x,t)})}$$

sonlu normuna sahip f fonksiyonlarının uzayına **zayıf Morrey uzayı** denir [2],[5].

Sonuç 4.5 $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{WL_{p,\lambda}} \le \|f\|_{L_{p,\lambda}}$ olur [2],[5].

4.2 Morrey Uzayında Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Aşağıdaki teorem ile maksimal operatörünün Morrey uzayındaki sınırlılığı verilecektir.

Teorem 4.6

1) $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, $0 < \lambda < n$ için Mf, $\mathbb{R}^n$ de h.h.y sonludur.

2) $1 < p < \infty,\ 0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\|Mf\|_{p,\lambda} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$ sağlanır, burada C, f den bağımsız bir sabittir.

3) $p = 1$ olsun. Bu takdirde $t\,\mu(\{Mf > t\} \cap B_r(x)) \leq Cr^{\lambda}\|f\|_{1,\lambda}$ sağlanır, burada C sabiti x, r, t ve f den bağımsızdır (Chiarenza ve Frasca [4]).

Aşağıdaki lemma ile Morrey uzayında maksimal operatör için Lokal Guliyev eşitsizliğini verelim.

Lemma 4.7 (Maksimal operatör için Lokal Guliyev Eşitsizliği)

$1 \leq p \leq \infty, f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_p(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\, dr$$

eşitsizliği gerçekleşir. $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WL_1(B(x,t))} \leq Ct^{n} \int_t^{\infty} r^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x,r))}\, dr$$

sağlanır, burada C sabiti, f , $t > 0$ ve x den bağımsızdır (Guliyev [5]).

4.3 Morrey Uzayında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

Aşağıdaki teorem ile Riesz potansiyelinin Morrey uzayındaki sınırlılığını ifade eden Adams teoremi verilecektir.

Teorem 4.8 (Adams Teoremi)

$\forall f \in L_{p,\lambda}$ için $0 < \alpha < n,\ 1 < p < \frac{n}{\alpha},\ 0 < \lambda < n - \alpha p$ olsun.

Bu durumda $\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$

sağlanır, burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$ dir.

$p = 1$ için $t\mu\{x\colon \{I_\alpha f(x) > t\} \cap B_r\} \leq Cr^{\lambda}\|f\|_{1,\lambda}$

sağlanır, burada C sadece $\mathrm{n}, \lambda, p, \alpha$ ya bağlı sabittir (Adams [6]).

Şimdi de Morrey uzayında Riesz potansiyeli için noktasal Guliyev eşitsizliğini ifade eden lemmayı verelim.

Lemma 4.9 (Riesz Potansiyeli için Noktasal Guliyev Eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$olsun.

Bu durumda C sabiti f, x, ve t den bağımsız olmak üzere

$$|I_\alpha f(x)| \leq Ct^\alpha Mf(x) + C\int_t^\infty r^{\alpha-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr$$

eşitsizliği gerçekleşir (Guliyev [5]).

Aşağıdaki teorem ile Riesz potansiyelinin Morrey uzayındaki sınırlılığını ifade eden Spanne teoremi verilecektir.

Teorem 4.10 (Spanne Teoremi)

$0 < \alpha < n, \qquad 1 < p < \dfrac{n}{\alpha}, \qquad 0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\forall f \in L_{p,\lambda}$ için

$$\mu = \frac{n\lambda}{n-\lambda}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda} \quad \text{ve} \quad \frac{\lambda}{q} = \frac{\mu}{p}$$

olsun. Bu durumda $\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$

eşitsizliği gerçekleşir (Peetre [7]).

Aşağıdaki lemma ile Morrey uzayında Riesz potansiyeli için lokal Guliyev eşitsizliğini verelim.

Lemma 4.11 (Riesz Potansiyeli için Lokal Guliyev Eşitsizliği)

$f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty, 0 < \alpha < \dfrac{n}{p}$ ve $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ olsun.

Bu durumda $p > 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{q}}\int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr$$

eşitsizliği gerçekleşir. $p = 1$ için

$$\|I_\alpha f\|_{WL_q(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{q}}\int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1}\|f\|_{L_1(B(x,r))}\,dr$$

sağlanır. Burada C sabiti $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ve f e bağlı olmayan bir sabittir (Guliyev [17],[8],[5]).

4.4 Morrey Uzayında Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı

Aşağıdaki teorem ile Calderon-Zygmund singüler integral operatörünün Morrey uzayındaki sınırlılığı verilecektir.

Teorem 4.12

$1 < p < \infty, 0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Tf\|_{p,\lambda} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$$

sağlanır, burada C, f den bağımsız bir sabittir.

$p = 1$ olsun. Bu takdirde

$$t\,\mu\big\{\{Tf > t\} \cap B_r(x)\big\} \leq Cr^{\lambda}\|f\|_{1,\lambda}$$

sağlanır, burada C sabiti x, r, t ve f den bağımsızdır.

$f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \lambda < n$ için Tf, $\mathbb{R}^n$ de h.h.y sonludur (Chiarenza ve Frasca [4]).

Aşağıdaki lemma ile singüler integral operatör için Lokal Guliyev Eşitsizliği verilecektir.

Lemma 4.13 (Singüler İntegral operatör için Lokal Guliyev Eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty, f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|Tf\|_{L_p(B(x,t))} \leq Ct^{\frac{n}{p}} \int_t^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr$$

eşitsizliği gerçekleşir. $p = 1$ için

$$\|Tf\|_{WL_1(B(x,t))} \leq Ct^n \int_t^{\infty} r^{-n-1}\|f\|_{L_1(B(x,r))}\,dr$$

sağlanır, burada C ise, f , $t > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ e bağlı olmayan bir sabittir (Guliyev [17], [8], [5]).

BÖLÜM 5

MODİFİYE EDİLMİŞ MORREY UZAYINDA MAKSİMAL, POTANSİYEL ve SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER

Bu bölümde $\tilde{L}_{p,\lambda} = \tilde{L}_{p,\lambda}(\Omega)$ modifiye edilmiş Morrey uzayının tanımı ve genel özellikleri ile modifiye edilmiş Morrey uzayında maksimal operatör, Riesz potansiyeli ve singüler integral operatörünün sınırlılığını ifade eden teoremler ispatları ile verilecektir.

5.1 Modifiye Edilmiş Morrey Uzayı ve Genel Özellikleri

Tanım 5.1 $\forall f \in L_p^{loc}(\Omega)$ için $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$, $[t]_1 = \min\{1, t\}$ olmak üzere

$$\tilde{L}_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ ölçülebilir ve } \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} [t]_1^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

$$\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}(\Omega)} = \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} = \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} \left([t]_1^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))} < \infty$$

normu ile tanımlanan fonksiyon uzayına **modifiye edilmiş Morrey uzayı** denir

(Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

Sonuç 5.2 $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\max\left\{ \|f\|_{L_{p,\lambda}}, \|f\|_{L_p} \right\} \leq \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$

(Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

Lemma 5.3 $1 \leq p < \infty,\ 0 \leq \lambda \leq n$ olsun.

$$\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} = \max\left\{ \|f\|_{L_{p,\lambda}}, \|f\|_{L_p} \right\}$$

elde edilir (Guliyev ve Rahimova [25]).

İspat : $f \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Sonuç 5.2 den $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$\max \left\{ \|f\|_{L_{p,\lambda}}, \|f\|_{L_p} \right\} \leq \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$ olur.

Şimdi $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman

$$\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} = \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} \left([t]_1^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \max \left\{ \sup_{\substack{0<t\leq 1 \\ x\in\mathbb{R}^n}} \left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}, \sup_{\substack{t>1 \\ x\in\mathbb{R}^n}} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$\leq \max \left\{ \|f\|_{L_{p,\lambda}}, \|f\|_{L_p} \right\}$$

Bu yüzden $f \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ gömmesi geçerlidir.

Böylece $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} = \max \left\{ \|f\|_{L_{p,\lambda}}, \|f\|_{L_p} \right\}$ elde edilir (Guliyev ve Rahimova [25]).

Modifiye edilmiş Morrey Uzayının Özellikleri

1) $\lambda = 0$ iken $\tilde{L}_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ elde edilir.

2) Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise, Θ, $\mathbb{R}^n$de sıfıra denk olan fonksiyonların kümesi olmak üzere $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$ olur (Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

Tanım 5.4 $\forall f \in L_p^{loc}(\Omega)$ için $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$, $[t]_1 = \min\{1, t\}$ olsun.

$$\|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda}(\Omega)} = \|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda}} = \sup_{r>0} r \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t>0}} \left([t]_1^{-\lambda} \mu(\{y \in B(x,t) : |f(y)| > r\}) \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{\substack{t>0 \\ x\in\Omega}} [t]_1^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,t))}$$

sonlu normuna sahip f ölçülebilir fonksiyonlarının uzayına **zayıf modifiye edilmiş Morrey uzayı** denir (Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

Sonuç 5.5 $\lambda = 0$ için $W\tilde{L}_{p,0}(\mathbb{R}^n) = WL_{p,0}(\mathbb{R}^n) = WL_p(\mathbb{R}^n)$ [2].

Sonuç 5.6 $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subset W\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $\|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda}} \leq \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$ [2].

Lemma 5.7 $1 \leq p < \infty,\ \ 0 \leq \lambda \leq n$ olsun.

$W\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap WL_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda}} = \max\left\{\|f\|_{WL_{p,\lambda}}, \|f\|_{WL_p}\right\}$$

bulunur.

Lemma 5.7 nin ispatı Lemma 5.3 deki gibi yapılır (Guliyev ve Rahimova [25]).

5.2 Modifiye Edilmiş Morrey Uzayında Maksimal Operatörünün Sınırlılığı

Aşağıdaki teorem ile M maksimal operatörünün $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki sınırlılığı verilecektir.

Teorem 5.8 1) Eğer $f \in \tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n), 0 \leq \lambda \leq n,$ o zaman $Mf \in W\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_{W\tilde{L}_{1,\lambda}} \leq C_{1,\lambda}\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}$$

sadece λ ve n ye bağlı olacak bir şekilde $C_{1,\lambda}$ sabiti vardır.

2) Eğer $f \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty, 0 \leq \lambda < n,$ o zaman $Mf \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \leq C_{p,\lambda}\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$$

sadece p, λ ve n ye bağlı olacak bir şekilde $C_{p,\lambda}$ sabiti vardır.

(Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

İspat: Fefferman-Stein eşitsizliği

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(Mf(y)\big)^p g(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p Mg(y)dy$$

yardımıyla negatif olmayan bütün $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları için geçerlidir. Böylece

$$\int_{B(x,t)} (Mf(y))^p dy = \int_{\mathbb{R}^n} \big(Mf(y)\big)^p \chi_{B(x,t)}(y)dy \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p M\chi_{B(x,t)}(y)dy$$

elde edilir.

Burenkov ve H.V. Guliyev [10] de verildiği üzere $\forall\, t > 0$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^n \leq M\chi_{B(x,t)}(y) \leq \left(\frac{4t}{|x-y|+t}\right)^n$$

sağlanır. Böylece aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_{B(x,t)} (Mf(y))^p dy \leq C_1 \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}t)\setminus B(x,2^j t)} \frac{t^n |f(y)|^p dy}{(|x-y|+t)^n} \right)$$

$$\leq C_1 \left([t]_1^\lambda \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}^p + \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[2^{j+1}t\right]_1^\lambda}{(2^j+1)^n} \right)$$

$$\leq C_1 \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}^p \left([t]_1^\lambda + \begin{cases} \left(2^\lambda t^\lambda \sum\limits_{j=0}^{\left[\log_2 \frac{1}{2t}\right]} 2^{(\lambda-n)j} + \sum\limits_{j=\left[\log_2 \frac{1}{2t}\right]+1}^{\infty} 2^{-nj} \right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^{-nj} \right)^{\frac{1}{p}}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \right)$$

$$\leq C_1 \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}^p \left([t]_1^\lambda + \begin{cases} (C_2 t^\lambda + C_3 t^n)^{\frac{1}{p}}, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ C_3^{\frac{1}{p}}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \right) \leq C_4 [t]_1^\lambda \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}^p \text{ [2].}$$

5.3 Modifiye Edilmiş Morrey Uzayında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

$\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliği aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 5.9 $0 < \alpha < n,\ 0 \leq \lambda < n - \alpha$ ve $1 \leq p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ olsun.

1) Eğer $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise, o zaman I_α operatörünün $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olmasıdır.

2) Eğer $p = 1 < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise, o zaman I_α operatörünün $\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\frac{\alpha}{n} \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olmasıdır.

(Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

İspat: 1) Yeter şartı: $0 < \alpha < n,\ \ 0 < \lambda < n - \alpha, f \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ olsun.

$$I_\alpha f(x) = \left(\int_{B(x,t)} + \int_{^c B(x,t)} \right) |x-y|^{\alpha-n} dy \equiv A(x,t) + C(x,t).$$

$A(x,t)$ için

$$|A(x,t)| \le \int_{B(x,t)} |f(y)|\,|x-y|^{\alpha-n} dy \le \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{-j} t\right)^{\alpha-n} \int_{B(x,2^{-j+1}t)\backslash B(x,2^{-j}t)} |f(y)| dy\,.$$

elde edilir. Böylece

$$C_5 = \frac{v_n 2^n}{2_\alpha - 1} \text{ sabitiyle } |A(x,t)| \le C_5 t^\alpha M f(x) \tag{5.1}$$

İkinci integralde Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$|C(x,t)| \le \left(\int_{^c B(x,t)} |x-y|^{-\beta} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{^c B(x,t)} |x-y|^{\left(\frac{\beta}{p}+\alpha-n\right)p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} = J_1 J_2$$

elde edilir. $\lambda < \beta < n - \alpha p$ olsun. J_1 için

$$J_1 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}t)\backslash B(x,2^j t)} |x-y|^{-\beta} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \le t^{-\frac{\beta}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\beta j} \left[2^{j+1} t\right]_1^\lambda \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= t^{-\frac{\beta}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \begin{cases} \left(2^\lambda t^\lambda \sum\limits_{j=0}^{\left[\log_2 \frac{1}{2t}\right]} 2^{(\lambda-\beta)j} + \sum\limits_{j=\left[\log_2 \frac{1}{2t}\right]+1}^{\infty} 2^{-\beta j} \right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < t < \dfrac{1}{2}\,, \\ \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^{-\beta j} \right)^{\frac{1}{p}}, & t \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$= t^{-\frac{\beta}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \begin{cases} \left(C_6 t^\lambda + C_7 t^\beta\right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < t < \dfrac{1}{2}\,, \\ C_7^{\frac{1}{p}}, & t \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \begin{cases} (C_6 + C_7)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{\lambda-\beta}{p}}, & 0 < t < \dfrac{1}{2}\,, \\ C_7^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{\beta}{p}}, & t \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$= C_8 [2t]_1^{\frac{\lambda}{p}} t^{-\frac{\beta}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \quad , \tag{5.2}$$

$$C_6 = \frac{2^{\beta}}{2^{\beta-\lambda} - 1}\,, C_7 = \frac{2^{2\beta}}{2^{\beta} - 1}\,,$$

$$C_8 = \begin{cases} 2^{-\frac{\lambda}{p}} (C_2 + C_3)^{\frac{1}{p}}, & 0 < t < \dfrac{1}{2}\,, \\ C_6^{\frac{1}{p}}, & t \geq \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

olacak şekilde elde ederiz. J_2 için

$$J_2 = \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\xi \int_t^{\infty} r^{n-1+\left(\frac{\beta}{p}+\alpha-n\right)p'} \, dr \right)^{\frac{1}{p'}} = C_9 t^{\frac{\beta}{p}+\alpha-\frac{n}{p}}\,. \tag{5.3}$$

(5.2) ve (5.3) den

$$|C(x,t)| \leq C_{10} [t]_1^{\frac{\lambda}{p}} t^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \tag{5.4}$$

elde ederiz. Bu takdirde,

$$|I_\alpha f(x)| \leq C_{11} \left(t^{\alpha} Mf(x) + [t]_1^{\frac{\lambda}{p}} t^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \right)$$

$$\leq C_{11} \min \left\{ t^{\alpha} Mf(x) + t^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}\,,\; t^{\alpha} Mf(x) + t^{\alpha-\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \right\}, \quad t > 0\,.$$

$t = \left[(Mf(x))^{-1} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \right]_1^{\frac{p}{(n-\lambda)}}$ ve $t = \left[(Mf(x))^{-1} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \right]_1^{\frac{p}{n}}$

olacak şekilde t indirgenirse,

$$|I_\alpha f(x)| \leq C_{11} \min \left\{ \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}} \right)^{1-\frac{p\alpha}{n-\lambda}}, \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}} \right)^{1-\frac{p\alpha}{n}} \right\} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$$

elde edilir. Bu durumda

$|I_\alpha f(x)| \leq C_{11}\big(Mf(x)\big)^{\frac{p}{q}}\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}^{1-\frac{p}{q}}$ olur.

Böylece Teorem 5.8 in yardımıyla

$$\int\limits_{B(x,t)} |I_\alpha f(x)|^q dy \leq C_{12}\,\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}^{q-p} \int\limits_{B(x,t)} (Mf(y))^q dy \leq C_{13}[t]_1^\lambda \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}^q ,$$

I_α operatörünün $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlı olduğu elde edilir.

Gerek şart: $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ $f \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ve I_α operatörünün $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlı olsun.

$f_t(x) =: f(tx),\ [t]_{1,+} = \max\,\{1, t\}$ tanımlı olsun. O zaman

$$\|f_t\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} = \sup_{\substack{r>0,\\ x\in\mathbb{R}^n}} \left([r]_1^{-\lambda} \int_{B(x,r)} |f_t(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = t^{-\frac{n}{p}} \sup_{\substack{r>0,\\ x\in\mathbb{R}^n}} \left([r]_1^{-\lambda} \int_{B(x,tr)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= t^{-\frac{n}{p}} \sup_{r>0} \left(\frac{[tr]_1}{[r]_1}\right)^{\frac{\lambda}{p}} \sup_{\substack{r>0,\\ x\in\mathbb{R}^n}} \left([tr]_1^{-\lambda} \int_{B(x,tr)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = t^{-\frac{n}{p}}\, [t]_{1,+}^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} ,$$

ve $I_\alpha f_t(x) = t^{-\alpha} I_\alpha f(tx)$

$$\|I_\alpha f_t\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} = t^{-\alpha} \sup_{\substack{r>0,\\ x\in\mathbb{R}^n}} \left([r]_1^{-\lambda} \int_{B(x,r)} |I_\alpha f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= t^{-\alpha-\frac{n}{q}} \sup_{r>0} \left(\frac{[tr]_1}{[r]_1}\right)^{\frac{\lambda}{q}} \sup_{\substack{r>0,\\ x\in\mathbb{R}^n}} \left([tr]_1^{-\lambda} \int_{B(tx,tr)} |I_\alpha f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} = t^{-\alpha-\frac{n}{q}}\, [t]_{1,+}^{\frac{\lambda}{q}} \|I_\alpha f\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} .$$

I_α operatörünün $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlılığı yardımıyla

$$\|I_\alpha f_t\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} = t^{\alpha+\frac{n}{q}}\, [t]_{1,+}^{-\frac{\lambda}{q}} \|I_\alpha f_t\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} \leq$$

$$\leq t^{\alpha+\frac{n}{q}}\, [t]_{1,+}^{-\frac{\lambda}{q}} \|f_t\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} \leq C_{p,q,\lambda}\, t^{\alpha+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\, [t]_{1,+}^{\frac{\lambda}{p}-\frac{\lambda}{q}} \|f\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}}$$

sadece p, q, λ ya bağlı bir $C_{p,q,\lambda}$ sabiti vardır.

Eğer $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n}$ ise, o zaman t → 0 , $\forall f \in \tilde{L}_{p,\lambda}$ için $\|I_\alpha f\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} = 0$

Bunun yanında $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n-\lambda}$ ise, o zaman t → ∞ , $\forall f \in \tilde{L}_{p,\lambda}$ için $\|I_\alpha f\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} = 0$

Bu nedenle $\frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$ bulunur.

2) Yeter şartı: $f \in \tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\mu(\{y \in B(x,t) : |I_\alpha f(y)| > 2\beta\}) \leq$$
$$\leq \mu(\{y \in B(x,t) : |A(y,t)| > \beta\}) + \mu(\{y \in B(x,t) : |C(y,t)| > \beta\})$$

elde ederiz. O halde

$$C(y,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(y,2^{j+1}t)\setminus B(y,2^j t)} |f(z)||y-z|^{\alpha-n} dz \leq$$

$$\leq t^{\alpha-n}\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(n-\alpha)j}\left[2^{j+1}t\right]_1^{\lambda} =$$

$$= t^{\alpha-n}\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} \begin{cases} 2^\lambda t^\lambda \displaystyle\sum_{j=0}^{\left[\log_2 \frac{1}{2t}\right]} 2^{(\lambda-n+\alpha)j} + \sum_{j=\left[\log_2 \frac{1}{2t}\right]+1}^{\infty} 2^{-(n-\alpha)j}, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(n-\alpha)j}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= t^{\alpha-n}\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} \begin{cases} (C_{14}t^\lambda + C_{15}t^{n-\alpha})^{\frac{1}{p}}, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ C_{15}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} \begin{cases} (C_{14} + C_{15})t^{\lambda+\alpha-n}, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ C_{15}t^{\alpha-n}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= C_{16}[2t]_1^\lambda t^{\alpha-n}\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} \quad ,$$

$$C_{14} = \frac{2^{n-\alpha}}{2^{n-\alpha-\lambda}-1}, C_{15} = \frac{2^{2(n-\alpha)}}{2^{n-\alpha}-1} \text{ ve } C_{16} = \begin{cases} 2^{-\lambda}(C_{14} + C_{15}), & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ C_{15}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

(5.1) ve Teorem 5.9 dikkate alınarak

$$\mu(\{y \in B(x,t) : |A(y,t)| > \beta\}) \le \mu\left(\left\{y \in B(x,t) : Mf(y) > \frac{\beta}{C_5 t^{\alpha}}\right\}\right) \le$$

$$\le \frac{C_{17} t^{\alpha}}{\beta} [t]_1^{\lambda} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}$$

$C_{17} = C_5 C_{1,\lambda}$ olacak şekilde elde edilir.

Eğer $C_{16}[2t]_1^{\lambda} t^{\alpha-n} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} = \beta$ ise, o zaman $|C(y,t)| \le \beta$ ve sonuç olarak

$\mu(\{y \in B(x,t) : |C(y,t)| > \beta\}) = 0$ olur.

Eğer $2t < 1$ ise,

$$\mu(\{y \in B(x,t) : |I_{\alpha} f(y)| > 2\beta\}) \le \frac{C_{17}}{\beta} [t]_1^{\lambda} t^{\alpha} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} \le C_{18} [t]_1^{\lambda} \left(\frac{\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}}{\beta}\right)^{\frac{n-\lambda}{n-\lambda-\alpha}}$$

ve $2t \ge 1$ olduğunda ise,

$$\mu(\{y \in B(x,t) : |I_{\alpha} f(y)| > 2\beta\}) \le \frac{C_{17}}{\beta} [t]_1^{\lambda} t^{\alpha} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} \le C_{19} [t]_1^{\lambda} \left(\frac{\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}}{\beta}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

$C_{18} = C_{17} C_{16}^{\frac{\alpha}{n-\lambda-\alpha}}$ ve $C_{19} = C_{17} C_{16}^{\frac{\alpha}{n-\alpha}}$ olacak şekilde elde edilir.

Son olarak;

$$\mu(\{y \in B(x,t) : |I_{\alpha} f(y)| > 2\beta\}) \le C_{20} [t]_1^{\lambda} \min\left\{\left(\frac{\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}}{\beta}\right)^{\frac{n-\lambda}{n-\lambda-\alpha}}, \left(\frac{\|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}}{\beta}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right\} \le$$

$$\le C_{20} [t]_1^{\lambda} \left(\frac{1}{\beta} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}\right)^{q},$$

$C_{20} = \max\{C_{18}, C_{19}\}$ bulunur.

Gerek şartı : I_{α} operatörünün $\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlı olsun.

$$\|I_{\alpha} f_t\|_{\widetilde{WL}_{q,\lambda}} = \sup_{r>0} r \sup_{\substack{\tau>0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left([\tau]_1^{-\lambda} \int\limits_{\{y \in B(x,\tau) : |I_{\alpha} f_t(y)| > r\}} dy\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \sup_{r>0} r \sup_{\substack{\tau>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} \left([\tau]_1^{-\lambda} \int\limits_{\{y\in B(tx,\tau): |I_\alpha f(ty)|>rt^\alpha\}} dy \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= t^{-\alpha-\frac{n}{q}} \sup_{r>0} \left(\frac{[t\tau]_1}{[\tau]_1} \right)^{\frac{\lambda}{q}} \sup_{r>0} rt^\alpha \sup_{\substack{\tau>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} \left([t\tau]_1^{-\lambda} \int\limits_{\{y\in B(x,t\tau): |I_\alpha f(y)|>rt^\alpha\}} dy \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= t^{-\alpha-\frac{n}{q}} [t]_{1,+}^{\frac{\lambda}{q}} \|I_\alpha f\|_{W\tilde{L}_{q,\lambda}} .$$

I_α operatörünün $\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlı olmasından

$$\|I_\alpha f\|_{W\tilde{L}_{q,\lambda}} \leq C_{1,q,\lambda} t^{\alpha+\frac{n}{q}-n} [t]_{1,+}^{\lambda-\frac{\lambda}{q}} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}} ,$$

sadece λ, q ve n ye bağlı bir $C_{1,q,\lambda}$ sabiti elde edilir.

Eğer $1 < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n}$ ise, $t \to 0$, $\forall f \in \tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için $\|I_\alpha f\|_{W\tilde{L}_{q,\lambda}} = 0$ elde ederiz.

Benzer şekilde

Eğer $1 > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n-\lambda}$ ise, $t \to \infty$, $\forall f \in \tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ için $\|I_\alpha f\|_{W\tilde{L}_{q,\lambda}} = 0$ elde ederiz.

Bundan dolayı $\frac{\alpha}{n} \leq 1 - \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{n-\lambda}$ bulunur (Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

Aşağıda Riesz potansiyelinin çeşitli operatörlere uygulamalarından bir örnek verilecektir.

Örnek 5.10 L operatörü, bir Gauss üst sınırına sahip $p_t(x,y)$ çekirdekli analitik bir yarı grup e^{-tL} tarafından üretilen L_2 üzerinde bir lineer operatör olsun. $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ için

$$|p_t(x,y)| \leq \frac{C_1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-C_2\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{5.5}$$

x, y ve t den bağımsız $C_1, C_2 > 0$ sabitleri vardır.

$0 < \alpha < n$ için L operatörünün kesirli kuvveti $L^{-\frac{\alpha}{2}}$ tanımlanır.

$$L^{-\frac{\alpha}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-tL} f(x) \frac{dt}{t^{-\frac{\alpha}{2}+1}}$$

Eğer $L = -\Delta$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde Laplace operatörü ise, $L^{-\frac{\alpha}{2}}$ operatörü I_α Riesz potansiyelidir (Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

Aşağıdaki teorem ile , $L^{-\frac{\alpha}{2}}$ operatörünün modifiye edilmiş Morrey uzayındaki sınırlılığı verilecektir.

Teorem 5.11 $0 < \alpha < n,\ \ 0 \le \lambda < n$ ve (5.5) şartı olsun.

1) Eğer $1 < p < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise, o zaman $L^{-\frac{\alpha}{2}}$ operatörünün $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlı olması için $\frac{\alpha}{n} \le \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{\alpha}{n-\lambda}$ şartı yeterlidir.

2) Eğer $p = 1 < \frac{n-\lambda}{\alpha}$ ise, o zaman $L^{-\frac{\alpha}{2}}$ operatörünün $\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ den $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ya sınırlı olması için $\frac{\alpha}{n} \le 1 - \frac{1}{q} \le \frac{\alpha}{n-\lambda}$ şartı yeterlidir.

(Guliyev, Hasanov ve Zeren [2]).

İspat : Yarı grup e^{-tL}, (5.5) şartını sağlayan $p_t(x,y)$ çekirdekli olduğundan bütün

$x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left|L^{-\frac{\alpha}{2}} f(x)\right| \le C I_\alpha |f|(x)$$

x den bağımsız $C > 0$ sabiti vardır. Böylece Teorem 5.2 yardımıyla

$$\left\|L^{-\frac{\alpha}{2}} f\right\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} \le C\|I_\alpha|f|\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}} \le C\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$$

f den bağımsız $C > 0$ sabitini elde ederiz [2].

(5.5) özelliği diferansiyel operatörlerin geniş sınıflarını sağlar [2], [4].

5.4 Modifiye Edilmiş Morrey Uzayında Singüler İntegral Operatörünün Sınırlılığı

Aşağıdaki teorem ile singüler integral operatörler için modifiye edilmiş Morrey uzayındaki sınırlılığını ifade eden teorem verilmiştir.

Teorem 5.12

$1 \le p < \infty,\ \ 0 \le \lambda < n$ ve $\Omega \in L_q(S^{n-1})$ sıfır dereceli homojen fonksiyon olmak üzere

$1 < p < \infty$ iken $\|T_\Omega f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \leq C\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$ gerçekleşir. Burada C, f den bağımsız bir sabittir.

$1 \leq p < \infty$ iken T_Ω homojen çekirdekli singüler integral operatörü $\tilde{L}_{p,\lambda} \to W\tilde{L}_{p,\lambda}$ sınırlıdır.

İspat : $1 < p < \infty$ için T_Ω operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki sınırlılığı ve Teorem 4.12 den

$\|T_\Omega f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \leq \max \ \{C_p, C_{p,\lambda}\} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$ elde edilir.

$1 \leq p < \infty$ için T_Ω operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $WL_p(\mathbb{R}^n)$ üzerine sınırlı olması ayrıca Teorem 4.12 den

$\|T_\Omega f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda}} \leq \max \ \{C_p, C_{p,\lambda}\} \|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda}}$ elde edilir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Fonksiyon uzayların modern teorisi S.L.Sobolev, A. Zygmund, S.M. Nikolskii, A. Calderon, V. Maz'ya, L. D. Kudryavtsev, N. Aronszayn, E. M. Stein, O. V. Besov, P. I. Lizorkin, H. Triebel, V.I. Burenkov ve diğerleri gibi dünyaca ünlü matematikçiler tarafından incelenmiştir. Bu teori reel ve fonksiyonel analizin birçok konusuna ve diğer matematiksel disiplinler içinde kısmi diferansiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi birçok alanlara başarıyla uygulanmıştır. İntegral ve diferansiyel operatörlerin farklı norm eşitsizlikleri fonksiyon uzaylarının teorisinde ve onların uygulamalarında esaslı öneme sahiptir. Özellikle diferansiyellenebilir fonksiyonların klasik uzayları teorisi (Sobolev uzayları, Besov uzayları, ağırlıklı Besov tipi uzaylar, vb.) bu eşitsizlikler üzerine esaslı olarak inşa edilirler. Yakın zamanlarda integral ve diferansiyel operatörler için norm eşitsizlikleri ile ilgili birçok zor problemler çözülmüştür. Bu sonuçlar fonksiyonel analizin özellikle etkin ve geniş olarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları için temel araçlar olmuştur.

Tezde harmonik analizin integral operatörleri olan maksimal, potansiyel ve singüler operatörlerinin Lebesgue, Morrey ve modifiye edilmiş Morrey uzayındaki sınırlıkları araştırılmış, bu operatörlerinin sınırlılığı için gerek ve yeter koşullar verilmiştir ve böylece daha ileri düzeyde araştırmalar yapmak için temel oluşturulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Hardy, G.H. ve Littlewood, J. E., (1930). A maximal theorem with function-theoretic applications. Act. Math. 54, 81-116.

[2] Guliyev, V.S. Hasanov,J. ve Zeren,Y., (2011). “Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Riesz Potential in Modified Morrey Spaces”, Journal Mathematical İnequalities, 5(4): 491-506.

[3] Morrey, C.B., (1938). On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society, 43(1), 126-166.

[4] Chiarenza, F. ve Frasca., M., (1987). Morrey Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Function, Rend. Math., 31(2): 1-39.

[5] Guliyev, V.S., (2009). “Boundedness of the maximal, Potansiyel and Singüler İntegral Operators in Generalized Morrey Spaces”, Journal of Inequalities and Applications (Art. ID 503948), 1- 20.

[6] Adams, D.R., (1975). A Note on Riesz Potentials, Duke Math. J. 42, 765-778

[7] Peetre, J., (1966). “On convolution operators leaving Lp,λ spaces invariant”, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 72: 295–304.

[8] Guliyev, V.S., (1999). Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups, Some applications, Baku, 1-332.

[9] Burenkov, V., Guliyev, V.S. ve Guliyev., G.V., (2007). “Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Riesz potential in Local Morrey-type spaces”, In Doklady Mathematics, MAIK Nauka/Interperiodica, 75(1): 103-107.

[10] Burenkov, V. I. ve Guliyev, H. V., (2004).” Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces”, Studia Mathematica, 163(2): 157-176.

[11] Hao, C., (2012). Lecture Notes on Introduction to Harmonic Analysis.

[12] Musayev, B. ve Alp, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya.

[13] Adams, R.A. ve Fournier, J.J.F., (2003). Sobolev Spaces, Second Edition, Elsevier Academic Press, Amsterdam.

[14] Brezis,H., (2010). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations, Springer.

[15] Guliyev, V.S. ve Sawano, Y., (2013). "Linear and sublinear operators on Generalized Morrey spaces with non-doubling measures," Publicationes Mathematicae Debrecen, 83(3): 1–17.

[16] Barttle, R.G., (1995). The Elements of İntegration and Lebesgue Measure, Wiley Classics Library Edition Published.

[17] Guliyev, V.S., (1994). Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in Rn, Doctor's degree dissertation, Moscow, Mat. Inst. Steklov, 1-329.

[18] Grafakos, L., (2004). Classical and Modern Fourier Analysis, Pearson Education. Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 931.

[19] Jones F., (2001). Lebesgue İntegration on Euclidiean Space, https://books.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=3U7tresTD1AC&oi=fnd&pg=PR11&dq=on+Euclidean+space&ots=ZHszFXNOT8&sig=kF8BAQ26HpDdQWorTpWy6LK1e58&redir_esc=y#v=onepage&q&f=true, 28 Ocak 2016.

[20] Cruz-Uribe, D. ve Fiorenza, A., (2013). Variable Lebesgue Spaces, Birkhauser, London.

[21] Lu, S. Ding Y. ve Yan D., (2007). Singular Integrals and Related Topics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

[22] Stein, E.M., (1970). Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, N.J.

[23] Zeren, Y., (2008). " On the Riesz Potential in Morrey Spaces, Associated with the Laplace-Bessel Differential Operator ", Integral Transforms and Special Functions, 19(8): 607-612.

[24] Neri, U., (1971). Singuler İntegrals, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 272.

[25] Guliyev, V.S. ve Rahimova, K.R., (2012). "Parabolic Fractional Maximal Operator in Modified Parabolic Morrey Spaces", Journal of Function Spaces and Applications.

[26] Natasha, S., (2012). " Weighted Hardy and Potential Operators in Morrey Spaces ", Journal of Function Spaces and Applications, Volume 2012, Article ID 678171, 21.

[27] Feffermann, C. ve Stein, E., (1971). Some Maximal İnequalities, Amer. J. Math. 93: 107-115.

[28] Kurdila, A. ve Zabarankin M., (2005). Convex Functional Analysis.

[29] Kuzu, O., (2014). Schrödinger Operatörüne Karşılık gelen Marcinkiewicz İntegral Operatörünün Morrey Uzaylarında Sınırlılığı, Doktora Tezi, Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Hatice ARMUTCU
Doğum Tarihi ve Yeri	: Koyulhisar 01.10.1983
Yabancı Dili	: Rusça & İngilizce & Azerbaycan Dili
E-posta	: haticexarmutcu@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Bakü Devlet Üniversitesi	2005
Lise	TM	Kazım Karabekir İHL	2000

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2012-2013	Birikim Koleji	Matematik Öğretmeni
2011-2012	Eksen Yayıncılık	Geometri Soru Yazarlığı
2006-2012	Kültür Dershanesi	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. Konferans MADEA7	Rough Singular İntegral Operators and its Commutators on Modified Morrey Spaces 08-13 EYLÜL 2015 Bakü-AZERBAYCAN

Proje

1.BAP / YÜLAP	Maksimal, Potansiyel ve Singüler İntegral Operatörlerin Modifiye Edilmiş Morrey Uzayında Sınırlılığı 01.07.2015