

**T.C.**  
**TRAKYA ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMAN GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK DENKLEMLERİN  
SINIRLI ÇÖZÜMLERİ**

**BURCU CEYLAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

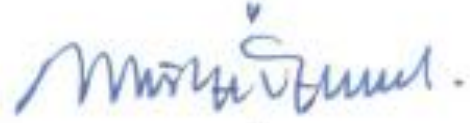
**HESAPLAMALI BİLİMLER ANABİLİM DALI**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. DENİZ AĞIRSEVEN**

**II. Tez Danışmanı: Prof. Dr. ALLABEREN ASHYRALYEV**

**EDİRNE-2016**

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı



Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.



Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN  
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV  
İkinci Tez Danışmanı



Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN  
Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Hesaplamalı Bilimler Anabilim Dalında bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN



Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV



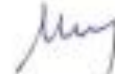
Doç. Dr. M. Tolga SAKALLI



Doç. Dr. Mehmet SEZGİN



Doç. Dr. Nuran GÜZEL



Tarih: 03/06/2016

**T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**HESAPLAMALI BİLİMLER YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**  
**DOĞRULUK BEYANI**

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

  
03/06/2016

Bureu CEYLAN

Yüksek Lisans Tezi

ZAMAN GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK DENKLEMLERİN

SINIRLI ÇÖZÜMLERİ

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Hesaplamalı Bilimler Anabilim Dalı

## ÖZET

Bu çalışmada,  $E$  Banach uzayında, pozitif tanımlı  $A$  operatörüne sahip lineer olmayan zaman gecikmeli parabolik

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(u(t), u(t-w)), t > 0 \\ u(t) = \varphi, -w \leq t \leq 0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi göz önüne alınmıştır. Bu problem için sınırlı tek çözümün varlığı üzerine teorem verilmiştir.

Lineer olmayan zaman gecikmeli parabolik denklemlerin, Fourier serileri ve değişkenlerine ayırma, Laplace ve Fourier dönüşüm metotları kullanılarak örnekler üzerinde analitik çözümleri elde edilmiştir.

Lineer olmayan zaman gecikmeli parabolik denklemlerin çözümleri için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kurulmuş ve nümerik sonuçlar elde edilerek hata analizi tablolar ile verilmiştir.

Yıl : 2016

Sayfa Sayısı : 62

Anahtar Kelimeler : Fark şemaları, gecikmeli parabolik denklem, başlangıç değer problemi

Master's Thesis

Bounded Solutions of Nonlinear Parabolic Equations With Time Delay

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Computational Science

## ABSTRACT

In this study, the initial value problem for nonlinear parabolic equations with time delay

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(u(t), u(t-w)), t > 0 \\ u(t) = \varphi, -w \leq t \leq 0 \end{cases}$$

in a Banach space  $E$  with strongly positive operator  $A$  is considered. Theorem on the existence of bounded unique solution of this problem is given.

Analytic solutions of nonlinear parabolic equations with time delay on examples are obtained by using methods of Fourier series and separation of variables, Laplace and Fourier transforms.

The first and second order of accuracy difference schemes for solutions of the nonlinear parabolic equation with time delay are presented, numerical results are found and error analysis is given by tables.

Year : 2016

Number of Pages : 62

Keywords : Difference scheme, Delay parabolic equation, Initial value problem

## TEŐEKKÜR

Bu tez çalıőması üzerinde kendimi geliőtirmemde büyük emekleri olan Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN'e ve Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV' e teőekkürlerimi borç bilirim.



## İÇİNDEKİLER

1.	GİRİŞ .....	1
2.	ZAMAN GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK DENKLEMLERİN SINIRLI ÇÖZÜMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMİ.....	6
3.	ZAMAN GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN FOURIER SERİLERİ VE DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....	15
3.1.	Fourier Serileri Metodu.....	15
3.2.	Bir Fonksiyonun Fourier Serisine Açılımı.....	17
3.3.	Değişkenlerine Ayırma Metodu.....	18
3.4.	Lineer Olmayan Gecikmeli Parabolik Denklemin Değişkenlerine Ayırma ve Fourier Serisi Metodu İle Çözümü.....	19
4.	ZAMAN GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....	23
4.1.	Laplace Dönüşümünün Tanımı.....	23
4.2.	Laplace Dönüşümü İle İlgili Bazı Özellikler.....	24
4.3.	Zaman Gecikmeli Lineer Olmayan Parabolik Bir Denklem İçin Başlangıç ve Sınır Değer Probleminin Laplace Dönüşüm Metodu ile Çözümü.....	32
5.	GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....	36
5.1.	Fourier Dönüşümü.....	36
5.2.	Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri.....	38
5.3.	Bir Gecikmeli Parabolik Başlangıç Değer Probleminin Fourier Dönüşümü Metodu İle Çözümü.....	41
6.	SAYISAL SONUÇLAR.....	45

6.1.	Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması.....	46
6.2.	İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması.....	48
6.3.	Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Hata Analizi.....	50
6.4.	İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Hata Analizi.....	54
7.	SONUÇLAR.....	60
	EKLER.....	
	KAYNAKLAR.....	
	ÖZGEÇMİŞ.....	
	TEZ ÖĞRENCİSİNE AİT TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER.....	



## TABLolar LİSTESİ

### Tablo Numarası

### Tablo Açıklaması

6.1

$t \in [n, n + 1]$ ,  $n=0,1,\dots$  için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için hatanın karşılaştırılması

6.2

$t \in [n, n + 1]$   $n = 0,1,2, \dots$  için ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması için hatanın karşılaştırılması



## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Şekil Numarası

### Şekil Açıklaması

6.1

Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için tam çözüm

6.2

Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=30$ ,  $M=30$

6.3

Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=60$ ,  $M=60$

6.4

Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=120$ ,  $M=120$

6.5

İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için tam çözüm

6.6

İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=30$ ,  $M=30$

6.7

İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=60$ ,  $M=60$

6.8

İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=120$ ,  $M=120$

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Diferansiyel denklemler teorisi, mühendislik, fizik, tıp, ekonomi ve biyoloji gibi birçok disiplinde önemli bir rol oynamaktadır. Nöronlar arasındaki etkileşimler, köprü tasarımı, gök cisimlerinin hareketi, atmosferde su, ısı ve sesin yayılması, tek ve çok boyutlu dinamik sistemler gibi hemen her fiziksel, teknik ya da biyolojik sürecin modellenmesi, elektrostatik, elektrodinamik, akışkan akışı, elastikiyet ya da kuantum mekaniğinin çeşitli fenomenlerini tanımlamak için adi ve kısmi diferansiyel denklemler kullanılır.

Örneğin diferansiyel denklemlerle biyolojik sistemleri modellerken çok karmaşık olayları daha iyi anlamak amacıyla oluşturulan basitleştirilmiş modeller, doğal sistemlerde gözlemlenen dinamiğin zengin çeşitliliğini yansıtmayabilir. Bu karmaşıklığın üstesinden gelmek için kısmi ve adi diferansiyel denklem sistemlerinin yani daha fazla sayıda denklemi içeren yöntemin kullanıldığı birçok olası yaklaşım oluşturulabilir. Bu sistemler, gözlemlenen davranışa yaklaşımda oldukça iyi olmasına rağmen, deneysel olarak belirlenemeyen nicelikleri simgeleyen birçok parametrenin gözden kaçırılması yüzünden problemler ortaya çıkar. Bu nedenle, önem kazanan başka bir yaklaşım, diferansiyel denklemlerde zaman gecikme terimlerinin içerilmesidir.

Çoğu zaman oluşturulan modellemede, sistemin gelecek durumu geçmişten bağımsızdır ve yalnızca şimdiki zaman tarafından kontrol edilir, bunun gerçek durum için sadece ilk yaklaşım olduğu akılda tutulmalıdır. Daha fazla gerçeğe uygun modeller bu

sistemlerin geçmiş durumlarının bir kısmını içerecektir, yani, ideal olarak, bir gerçek sistem, zaman gecikmeli diferansiyel denklem olarak modellenmelidir.

Rutin hayatta da gecikme elbette kaçınılmazdır. Herhangi bir sistemde saniyelerle dahi olsa mutlaka bir gecikme oluşmaktadır. Bilim, bazı olayları izleyerek, gelecekte meydana gelebilecek olaylar hakkında tahminde bulunur ve bunu yaparken incelediği olayın veya sistemin matematiksel modelini oluşturmayı amaçlar. Nitekim pek çok uygulamada yeni oluşturulan model, incelenen olay veya sistemin geçmişteki halinin gelecekteki halini etkilemeyeceği varsayımında bulunularak kurulur. Karşılaşılan problemlerde geçmişte meydana gelmiş durumları modele eklememek, oluşturulan sistemi geçersiz kılar. Dış dünyadan algılanan bilgiler hesaba katıldığında her oluşan etkiye karşı bir tepki söz konusudur ve bu sırada az dahi olsa bir gecikme vardır. Çünkü her etkiye karşı oluşan tepki bir sürece bağlıdır. Fiziksel olaylarda bir sistemin şu anki durumu geçmişteki durumuna göz önüne alınarak da düzenlenebilir. Sözü edilen sistemin nasıl davranacağını tahmin etmek için bu sistemi belirten diferansiyel denklem ile bu denklemin çözümlerinin bilinmesi gereklidir. Aşağıda, gecikmeli diferansiyel denklemler için birer örnek bulunmaktadır:

$$x' = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad \tau(t) > 0$$

$$x' = f(t, x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)), \quad \tau_1, \tau_2 > 0$$

$$x'' = f(t, x(t), x'(t), x(t - \tau(t)), x'(t - \tau(t)))$$

Örnekler incelendiğinde gecikmeli diferansiyel denklemler, bilinmeyen bir fonksiyon ve en yüksek basamaktan türev hariç olmak üzere o fonksiyonun türevlerinin, t zamanına ve t'den önceki zamanlara bağlı olduğu diferansiyel denklemlerdir.

Zaman gecikmeleri hemen hemen her durumda çok sık meydana gelir ve onları göz ardı etmek gerçeği göz ardı etmektir. Gecikmeler, gebelik süreleri, kuluçka dönemleri, ulaşım gecikmelerini vs. temsil edebilir. Doğadan basit bir örnek, yeniden ağaçlandırmadır. Bir ormandaki fidanların, yeniden ağaçlandırma sonrasında, olgunluğa erişmesi için 20 yıl geçmesi gerekir. Ağaçların belli türleri için bu zaman daha da uzun olabilir. Böylece orman hasadının ve yenilenmesinin herhangi bir matematiksel modeli açıkça zaman gecikmeleri içerir ve bunun üstüne inşa edilir. Hayvanların aktivitelerini

gerçekleştirmeden önce yiyeceklerini sindirmek için zamana ihtiyaçları olması diğer bir örneği oluşturur. Gecikmeli modeller, biyolojik modellemenin birçok dalında görülüp yaygınlaşmaya başlamıştır. Bu modeller, bulaşıcı hastalık dinamiği: birincil enfeksiyon [1], ilaç tedavisi [2], bağışıklık tepkisi [3] gibi bazı konuları tanımlamak için kullanılır. Ayrıca gecikmeler, kemostat modelleri [4], günlük ritim [5], salgın hastalıklar bilimi [6], solunum sistemi [7], tümör büyümesi [8], ve sinir ağları [9] gibi konularla ilgili çalışmalarda ortaya çıkar. Ekolojik verilerin istatistiksel analizi [10-11] , birçok türün popülasyon dinamiğinde gecikme etkilerinin kanıtının var olduğunu göstermiştir.

Gecikmeli adi ve kısmi diferansiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalarda [12-28] genel olarak çözümün salınım, kararlılık, periyodiklik, asimptotik olma gibi özelliklerine odaklanılmıştır. Gecikmeli kısmi denklemlerde, gecikme teriminin varlığı, denklemlerin analizinde zorluklara sebep olduğundan analitik çözümün verildiği az sayıda çalışma vardır. Bu yüzden nümerik yöntemlerdeki araştırmalar, teorik araştırmaların eksikliğini telafi eder. Özellikle bu alandaki çalışmalar için kullanılan başlıca yöntemlerden biri sonlu fark yöntemidir. Lu [29], gecikmeli parabolik denklemleri için monoton iteratif bir sonlu fark şeması vermiştir. Gu ve Wang [30], değişken katsayılı gecikmeli kısmi bir denklemin çözümü için lineerleştirilmiş Crank-Nicolson fark şemasını oluşturmuşlar ve bu şemanın koşulsuz kararlı ve hem uzay hem de zaman değişkeninde ikinci dereceden yakınsaklık derecesi ile yakınsak olduğunu göstermişlerdir.

Debnath ve Wiener [31], belli tipte süreksiz gecikmelerin kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışı üzerine etkisini çalışmışlardır. Parçalı sabit gecikmelere sahip lineer kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç değer probleminin çözümlerini integral dönüşümlerini kullanarak elde etmişlerdir.

Ashyralyev ve Sobolevskii [32], parabolik tipte lineer gecikmeli diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemini göz önüne almış ve bu problemde çözümün kararlılığı için gerekli koşulu vermişler, başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümleri için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının kararlılık kestirimlerini kurmuşlardır.

Berezansky ve Braverman [33] Caratheodory tipi non-otonom denklemler için kararlılığı incelemişler, bazı gecikmelere sahip lineer diferansiyel denklemler için yeni

açık kararlılık koşulları elde etmişler ve bazı gecikmelere sahip bir denklem için kararlılık problemini özel olarak oluşturulmuş tek bir gecikmeye sahip denklem için kararlılık problemine indirgeyip elde ettikleri sonuçları sabit olmayan katsayı ve gecikmelere sahip Mackey-Glass denkleminin yerel asimptotik kararlılığını çalışmak için uygulamışlardır.

Yeniçerioğlu ve Yalçınbaş [34], değişken katsayılı ikinci mertebeden lineer gecikmeli denklemlerin çözümlerinin kararlılığı için gerekli şartları kurmuşlardır.

Ashyralyev ve Ağırseven [35-41], gecikmeli parabolik kısmi diferansiyel denklemler için çeşitli başlangıç ve sınır değer problemlerini inceleyerek kararlılık ve yakınsaklık üzerine teoremler vermişler, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarını kullanarak problemler için yaklaşık çözümler bulup hata analizi yapmışlardır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(u(t), u(t-w)), t > 0, \\ u(t) = \varphi, -w \leq t \leq 0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin abstract formu göz önüne alınarak tek sınırlı çözümün varlığı için gerekli koşullar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, lineer olmayan gecikmeli parabolik

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = u(t, x) \cdot [u(t-1, x) \cdot \cos x - u_x(t-1, x) \cdot \sin x], t \geq 0, 0 < x < \pi, \\ u(t, x) = e^{-t} \cdot \sin x, -1 \leq t \leq 0, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

denklemini için başlangıç ve sınır değer problemi çalışılmış değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri metodu kullanılarak problemin analitik çözümü bulunmuştur.

Dördüncü bölümde,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + 2u(t, x) = u(t, x) \cdot [u(t-1, x) + u_x(t-1, x)], x, t \geq 0, \\ u(t, x) = e^{-t} e^{-x}, -1 \leq t \leq 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, u_x(t, 0) = -e^{-t}, t \geq 0 \end{cases}$$

gecikmeli lineer olmayan parabolik başlangıç ve sınır değer probleminin Laplace dönüşüm metodu ile çözümü elde edilmiştir.

Beşinci bölümde

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \\ u(t, x)[u(t-1, x) - e^{-(t-1)}e^{-x^2}] - e^{-t}e^{-x^2} - (-2 + 4x^2)e^{-t}e^{-x^2}, x, t \geq 0, \\ u(t, x) = e^{-t} \cdot e^{-x^2}, -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

lineer olmayan gecikmeli parabolik denklem için başlangıç değer probleminin Fourier dönüşümü yöntemi kullanarak analitik çözümü verilmiştir.

Altıncı bölümde

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = u(t, x)[u(t-1, x)\cos x - u_x(t-1, x)\sin x], t \geq 0, 0 < x < \pi \\ u(t, x) = e^{-t}\sin x, -1 \leq t \leq 0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

lineer olmayan gecikmeli parabolik denklem için sonlu fark yöntemi çalışılmıştır. Problemin çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları oluşturularak elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümler arasındaki hata tablolar halinde verilmiştir.

Son olarak tezin yedinci bölümünde genel sonuçlar özetlenmiştir.

Yaklaşık çözümleri bulabilmek için yapılan MATLAB programları eklerde verilmiştir.

## BÖLÜM 2

### ZAMAN GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK DENKLEMLERİN SINIRLI ÇÖZÜMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMİ

Bu bölümde zaman gecikmeli lineer olmayan parabolik denklemlerin tek sınırlı çözümlerinin varlığı için gerekli koşullar bulunacaktır.

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(u(t), u(t-w)), t > 0 \\ u(t) = \varphi(t), \quad -w \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

başlangıç değer probleminin abstract halini göz önüne alalım.

$$u_n(t) = e^{-At}u(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(u_{n-1}(s), u_n(s-w))ds, n = 1, 2, \dots$$

$$u_0(t) = \varphi(t)$$

problemin yinelemeli (rekursif) çözümüdür.

#### **Teorem 2.1**

- (i)  $\varphi(t) \in C([0, \infty), E)$ ,  $\varphi(t) \in D(A)$  ve  $\|\varphi(t)\|_E \leq M$ ,  $-w \leq t \leq 0$
- (ii)  $f: E \times E \rightarrow E$  sürekli ve sınırlı fonksiyon yani  $\|f\| \leq \bar{M}$  olsun ve  $L$  pozitif sabit olmak üzere  $w$ 'ya göre Lipschitz koşulunu sağlasın. Yani

$$\|f(u, w) - f(v, w)\|_E \leq L \|u - v\|_E$$

eşitsizliği gerçekleştirilsin. Bu durumda (2.1), (2.2) probleminin  $D$ 'de sınırlı tek bir çözümü vardır.

**İspat:**  $0 \leq t \leq w$  aralığını göz önüne alalım. (2.1) problemi

$$u_t(t) + Au(t) = f(u(t), \varphi(t-w)), \quad u(0) = \varphi(0)$$

problemine dönüşür. Buradan da bu problem

$$u(t) = e^{-At}\varphi(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(u(s), \varphi(s-w))ds \quad (2.3)$$

integral formunda yazılabilir. Ardışık yaklaşımlar metoduna göre

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (u_{i+1}(t) - u_i(t))$$

ve

$$u_0(t) = e^{-tA}\varphi(0)$$

$$u_i(t) = e^{-At}\varphi(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(u_{i-1}(s), \varphi(s-w))ds, \quad i = 1, 2, \dots$$

olmak üzere;

$$\|u_0(t)\|_E = \|e^{-tA}\|_{E \rightarrow E} \|\varphi(0)\|_E \leq M \|e^{-tA}\|_{E \rightarrow E}$$

elde edilir.

$$\|e^{-tA}\|_{E \rightarrow E} \leq P e^{-\delta t}, \delta \geq 0 \quad (2.4)$$

olsun. Bu durumda

$$\|u_0(t)\|_E \leq M.P$$

bulunur. (2.4) ve  $f$ 'nin sınırlılığı kullanılırsa

$$\|u_1(t) - u_0(t)\|_E \leq \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\|_{E \rightarrow E} \|f(u_0(s), \varphi(s-w))\|_E ds \leq \bar{M}Pt$$

olduğundan

$$\|u_1(t)\|_E \leq MP + \bar{M}Pt$$

elde edilir. (ii)'den

$$\begin{aligned} \|u_2(t) - u_1(t)\|_E \\ \leq \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\|_{E \rightarrow E} \|f(u_1(s), \varphi(s-w)) - f(u_0(s), \varphi(s-w))\|_E ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq LP \int_0^t \|(u_1(s) - u_0(s))\|_E ds \\
&\leq LP^2 \bar{M} \int_0^t s ds \\
&= L^{-1} \bar{M} \frac{L^2 P^2 t^2}{2!} \\
&= \frac{\bar{M} (LPt)^2}{L \cdot 2!}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\|u_2(t)\|_E \leq MP + \frac{\bar{M} (LPt)^2}{L \cdot 2!}$$

olur. Tümevarım kullanılırsak

$$\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_E \leq \frac{\bar{M} (LPt)^n}{L \cdot n!}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
&\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_E \\
&\leq \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\|_{E \rightarrow E} \|f(u_n(s), \varphi(s-w)) - f(u_{n-1}(s), \varphi(s-w))\|_E ds \\
&\leq P \int_0^t L \|u_n(s) - u_{n-1}(s)\|_E ds \\
&\leq P \int_0^t L \frac{\bar{M} (LPs)^n}{L \cdot n!} ds \\
&= \bar{M} L^n P^{n+1} \int_0^t \frac{s^n}{n!} ds \\
&= \bar{M} L^n \frac{P^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{\bar{M} (LPs)^{n+1}}{L \cdot (n+1)!}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [u_{i+1}(t) - u_i(t)]$$

olduğundan

$$\|u\|_E \leq MP + \sum_{i=1}^{\infty} \|u_{i+1}(t) - u_i(t)\|_E$$

$$\begin{aligned} &\leq MP + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{M} (LPt)^{i+1}}{L (i+1)!} \\ &\leq MP + \frac{\bar{M}}{L} e^{LPt}, 0 \leq t \leq w \end{aligned}$$

bulunur. Bu da  $0 \leq t \leq w$  için (2.1) ve (2.2) probleminin sınırlı çözümünün varlığını gösterir. (2.1) ve (2.2) nin çözümü için  $w \leq t \leq 2w$  aralığını göz önüne alalım. Bu durumda  $0 \leq t - w \leq w$  olur.  $t$  'yi  $(t-w)$  ile yer değiştirirsek,

$$\|f(u_0(t), \varphi_w(t))\| \leq \bar{M}_w$$

ve

$$\|\varphi_w(t)\| \leq M_w$$

$$u(t) = \varphi_w, \quad w \leq t \leq 2w$$

olsun.

$$u(t) = e^{-At} \varphi_w(0) + \int_0^{t-w} e^{-A(t-s)} f(u(s), \varphi_w(s-w)) ds$$

ve

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (u_{i+1}(t) - u_i(t))$$

$$u_0(t) = e^{-tA} \varphi_w(0)$$

$$u_i(t) = e^{-tA} \varphi_w(0) + \int_0^{t-w} e^{-A(t-s)} f(u_{i-1}(s), \varphi_w(s-w)) ds, \quad i = 1, 2, \dots$$

olduğundan

$$\|u_0(t)\|_E = \|e^{-tA}\|_{E \rightarrow E} \|\varphi_w(0)\|_E \leq M_w \|e^{-tA}\|_{E \rightarrow E}$$

bulunur. (2.4) eşitsizliğinden

$$\|u_0(t)\|_E \leq M_w P$$

elde edilir.

$$\|u_1(t) - u_0(t)\|_E \leq \int_0^{t-w} \|e^{-A(t-s)}\|_{E \rightarrow E} \|f(u_0(s), \varphi_w(s-w))\|_E ds$$

$$\|u_1(t)\|_E \leq M_w P + \bar{M}_w P (t-w), \quad w \leq t \leq 2w$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\|u_2(t) - u_1(t)\|_E$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{t-w} \|e^{-A(t-s)}\|_{E \rightarrow E} \|f(u_1(s), \varphi_w(s-w)) - f(u_0(s), \varphi_w(s-w))\|_E ds \\
&\leq LP \int_0^{t-w} \|(u_1(s) - u_0(s))\|_E ds \\
&\leq LP^2 \overline{M}_w \int_0^{t-w} s ds \\
&= L^{-1} \overline{M}_w \frac{L^2 P^2 (t-w)^2}{2!} \\
&= \frac{\overline{M}_w (LP(t-w))^2}{L \cdot 2!}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\|u_2(t)\|_E \leq M_w P + \frac{\overline{M}_w (LP(t-w))^2}{L \cdot 2!}$$

olur. Böylece tümevarım kullanırsak

$$\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_E \leq \frac{\overline{M}_w (LP(t-w))^n}{L \cdot n!}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
&\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\|_E \\
&\leq \int_0^{t-w} \|e^{-A(t-s)}\|_{E \rightarrow E} \|f(u_n(s), \varphi_w(s-w)) - f(u_{n-1}(s), \varphi_w(s-w))\|_E ds \\
&\leq P \int_0^{t-w} L \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_E ds \\
&\leq P \int_0^{t-w} L \frac{\overline{M}_w (LPs)^n}{L \cdot n!} ds \\
&= \overline{M}_w L^n P^{n+1} \int_0^{t-w} \frac{s^n}{n!} ds \\
&= \overline{M}_w L^n P^{n+1} \frac{(t-w)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{\overline{M}_w (LP(t-w))^{n+1}}{L \cdot (n+1)!}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (u_{i+1}(t) - u_i(t))$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|u\|_E &\leq M_w P + \sum_{i=1}^{\infty} \|u_{i+1}(t) - u_i(t)\|_E \\
&\leq M_w P + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{M}_w (LP(t-w))^{i+1}}{L (i+1)!} \\
&\leq M_w P + \frac{\overline{M}_w}{L} e^{LP(t-w)}, \quad w \leq t \leq 2w
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da  $w \leq t \leq 2w$  için (2.1) ve (2.2) probleminin sınırlı çözümünün varlığını gösterir.

$$\|u\|_E \leq M_{2w} P + \frac{\overline{M}_{2w}}{L} e^{LP(t-2w)}, \quad 2w \leq t \leq 3w$$

·  
·  
·

$$\|u\|_E \leq M_{nw} P + \frac{\overline{M}_{nw}}{L} e^{LP(t-nw)}, \quad nw \leq t \leq (n+1)w$$

elde edilir. Böylece (2.1) ve (2.2) probleminin  $D'$  de sınırlı bir  $u(x,t)$  çözümü elde edilir.

(2.1) probleminin çözümünün tek olduğu ispatlanabilir. Problemin  $u(t)$  çözümünden farklı bir  $v(t)$  çözümü olsun. Bu durumda  $v(t)$  için

$$\begin{cases} v_t(t) + Au(t) = f(v(t), v(t-w)), t > 0, \\ v(t) = \varphi(t), \quad -w \leq t \leq 0 \end{cases}$$

olur.  $0 \leq t \leq w$  aralığı göz önüne alınsın. Bu durumda

$$v_t^1(t) + Av^1(t) = f(v^1(t), \varphi(t-w)), \quad 0 \leq t \leq w$$

$$v^1(0) = \varphi(0)$$

olur. (2.3) kullanılarak

$$v^1(t) = e^{-At} \varphi(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(v^1(s), \varphi(s-w)) ds$$

integral formunda yazılabilir. Ardışık yaklaşımlar metoduna göre

$$v^1(t) = v_0^1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (v_{i+1}^1(t) - v_i^1(t))$$

ve

$$v_0^1(t) = e^{-tA}\varphi(0) = u_0^1(t)$$

$$v_i^1(t) = e^{-At}\varphi(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(v_{i-1}^1(s), \varphi(s-w))ds, i = 1,2, \dots$$

olmak üzere;

$$u_0^1(t) - v_0^1(t) = 0,$$

$$u_i^1(t) - v_i^1(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} \left( f(u_{i-1}^1(s), \varphi(s-w)) - f(v_{i-1}^1(s), \varphi(s-w)) \right) ds, i = 1,2, \dots$$

elde edilir. (ii) 'den

$$\|u_i^1(t) - v_i^1(t)\|_E \leq P\|u_0^1(t) - v_0^1(t)\|_E + PL \int_0^t \|u_{i-1}^1(s) - v_{i-1}^1(s)\|_E ds, i = 1,2, \dots \quad (2.5)$$

olur. (2.5) formülü kullanılarak

$$0 \leq \|u_1^1(t) - v_1^1(t)\|_E \leq P\|\varphi(0) - \varphi(0)\|_E + PL \int_0^t \|u_0^1(s) - v_0^1(s)\|_E ds = 0$$

olur. Buradan

$$0 \leq \|u_2^1(t) - v_2^1(t)\|_E \leq P\|\varphi(0) - \varphi(0)\|_E + PL \int_0^t \|u_1^1(s) - v_1^1(s)\|_E ds = 0$$

elde edilir. Tümevarım yöntemi kullanılarak,

$$\|u_{i-1}^1(t) - v_{i-1}^1(t)\|_E = 0$$

olduğu kabul edilirse

$$0 \leq \|u_i^1(t) - v_i^1(t)\|_E \leq P\|\varphi(0) - \varphi(0)\|_E + PL \int_0^t \|u_{i-1}^1(s) - v_{i-1}^1(s)\|_E ds = 0$$

bulunur. Böylece

$$\|u_i^1(t) - v_i^1(t)\|_E = 0$$

olur.

$$u^1(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i^1(t)$$

$$v^1(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i^1(t)$$

olduğundan

$$u^1(t) = v^1(t), 0 \leq t \leq w$$

elde edilir. Bu da  $0 \leq t \leq w$  için (2.1) ve (2.2) probleminin sınırlı çözümünün tekliğini gösterir. (2.1) ve (2.2) nin çözümü için  $w \leq t \leq 2w$  aralığını göz önüne alalım. Bu durumda  $0 \leq t - w \leq w$  olur.  $t$  'yi  $(t-w)$  ile yer değiştirirsek, bu durumda

$$v_t^2(t) + Av^2(t) = f(v^2(t), \varphi_w(t-w)), 0 \leq t \leq w$$

$$v^2(0) = \varphi_w(0)$$

olur. (2.3) kullanılarak

$$v^2(t) = e^{-At}\varphi_w(0) + \int_0^{t-w} e^{-A(t-s)}f(v^2(s), \varphi_w(s-w))ds$$

integral formunda yazılabilir. Ardışık yaklaşımlar metoduna göre

$$v^2(t) = v_0^2(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (v_{i+1}^2(t) - v_i^2(t))$$

ve

$$v_0^2(t) = e^{-tA}\varphi_w(0) = u_0^2(t)$$

$$v_i^2(t) = e^{-At}\varphi_w(0) + \int_0^{t-w} e^{-A(t-s)}f(v_{i-1}^2(s), \varphi_w(s-w))ds, \quad i = 1, 2, \dots$$

olmak üzere;

$$u_0^2(t) - v_0^2(t) = 0,$$

$$u_i^2(t) - v_i^2(t) = \int_0^{t-w} e^{-A(t-s)} \left( f(u_{i-1}^2(s), \varphi_w(s-w)) - f(v_{i-1}^2(s), \varphi_w(s-w)) \right) ds, \quad i = 1, 2, \dots$$

elde edilir. (ii) 'den

$$\|u_i^2(t) - v_i^2(t)\|_E \leq P\|u_0^2(t) - v_0^2(t)\|_E + PL \int_0^{t-w} \|u_{i-1}^2(s) - v_{i-1}^2(s)\|_E ds, i = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

olur. (2.6) formülü kullanılarak

$$0 \leq \|u_1^2(t) - v_1^2(t)\|_E \leq P\|\varphi_w(0) - \varphi_w(0)\|_E + PL \int_0^{t-w} \|u_0^2(s) - v_0^2(s)\|_E ds = 0$$

olur. Buradan

$$0 \leq \|u_2^2(t) - v_2^2(t)\|_E \leq P\|\varphi_w(0) - \varphi_w(0)\|_E + PL \int_0^{t-w} \|u_1^2(s) - v_1^2(s)\|_E ds = 0$$

elde edilir. Tümevarım yöntemi kullanılarak,

$$\|u_{i-1}^2(t) - v_{i-1}^2(t)\|_E = 0$$

olduğu kabul edilirse

$$0 \leq \|u_i^2(t) - v_i^2(t)\|_E \leq P\|\varphi_w(0) - \varphi_w(0)\|_E + PL \int_0^{t-w} \|u_{i-1}^2(s) - v_{i-1}^2(s)\|_E ds = 0$$

bulunur. Böylece

$$\|u_i^2(t) - v_i^2(t)\|_E = 0$$

olur.

$$u^2(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i^2(t)$$

$$v^2(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i^2(t)$$

olduğundan

$$u^2(t) = v^2(t), \quad w \leq t \leq 2w$$

elde edilir. Bu da  $w \leq t \leq 2w$  için (2.1) ve (2.2) probleminin sınırlı çözümünün tekliğini gösterir. Benzer şekilde

$$u^n(t) = v^n(t), \quad (n-1)w \leq t \leq nw, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bulunur.

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(t)$$

olur. Böylece (2.1) ve (2.2) probleminin D de sınırlı  $u(x,t)$  çözümünün tek olduğu görülür.

## BÖLÜM 3

# ZAMAN GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN FOURIER SERİLERİ VE DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA METODU İLE ÇÖZÜMÜ

### 3.1. Fourier Serilerine Ayırma Metodu

19. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi, fizikçi ve mühendis Jean Baptiste Joseph Fourier çarpıcı bir keşifte bulunmuştur. Cisimlerdeki ısı ve titreşim yayılımını modelleyen kısmi diferansiyel denklemler üzerine araştırmalarının bir sonucu olarak, Fourier, her fonksiyonunun sinüs ve kosinüs elemanter trigonometrik fonksiyonlarının bir sonsuz serisi ile temsil edilebildiği düşüncesini ortaya atmıştır. Örneğin piyano, keman, trompet, obua veya davul vs. gibi bir müzik aleti tarafından çıkarılan ses göz önüne alınırsa sinyali trigonometrik bileşenlerine ayırmak, kendine özgü ayırt edici ses tınılarını üretmek için birleştirilen ton ve ahenk sesi gibi temel frekansları meydana getirir. Fourier ayrışımı modern elektronik müziğin temelinde yatar. Bir sentezleyici, enstrümanların farklı seslerini yeniden üretebilmek için katkısız sinüs ve kosinüs tonlarını, Fourier'in genel kurallarına göre birleştirir.

Fourier'in iddiası o kadar şaşırtıcı ve beklenmedikti ki zamanın birçok matematikçisi bu sava inanmamıştır. Günümüzde Fourier analizi uygulamalı matematiğin gerekli araçlarından biridir ve geniş bir yelpazede farklı diferansiyel denklemlerin çözümü son derece kuvvetli analitik bir araç oluşturur. Bir fonksiyonun

Fourier temsili, adi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan öz vektör açılımlarının sürekli karşılığıdır. Sürekli ortamda ısı ve titreşimlerin yayılımını modelleyen temel kısmi diferansiyel denklemler, ayırık sistemlerin fonksiyon uzayındaki karşılığı gibi görülebilirler. Bu sürekli bölgede çözümler, bir sınır değer probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarından oluşturulan basit ayrılabilir çözümlerin lineer birleşimi olarak ifade edilebilir. Fourier analizinin etkinliği, trigonometrik fonksiyonların ortogonalite özelliğine dayanır. Fourier serileri, simetrik matrislerin ve ortogonal öz vektör tabanlarının sonlu boyutlu spektral teorisinin bir fonksiyon uzayı versiyonu gibi görülür.

Fourier serileri titreşim analizinde, elektrik mühendisliğinde, sinyal işleminde, akustiklerde, kuantum mekaniğinde, resim işleminde ve ekonomi hesaplamaları gibi çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Fourier serisi kavramının izlerine Euler ve Bernoulli'nin titreşen tellerle ilgili çalışmalarında rastlanmaktadır fakat Fourier teorisi ilk olarak 19. yüzyılın başlarında Fourier'ın ısı iletimi üzerine yaptığı çalışma ile başlar.

$T(0, t) = T(\pi, t) = 0$ , uçlarda sabit sıfır sıcaklığına sahip  $x = 0, x = \pi$  arasında gerilen  $\pi$  uzunluklu ince telin verdiği  $T(x, t)$  sıcaklığını tanımlayan problemde, Fourier,  $T(x, 0) = f(x)$  başlangıç ısını sinüs fonksiyon serisine açılabilirliğini ileri sürmüştür:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (3.1)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Fourier (3.1) denlemindeki sonsuz serinin yakınsaklığı hakkında tatmin edici bir ispat vermemiştir fakat her  $f$  fonksiyonu için yakınsaklığın sağlandığı varsayımını ileri sürmüştür. Dirichlet, Riemann, Lebesgue ve diğerlerinin gelecek iki yüzyıldaki çalışmalarında, tam olarak hangi fonksiyonların bu trigonometrik serilere açılabilirliğinin gösterilmesine ihtiyaç vardır. (3.1) ve (3.2) denkleminin ilaveten Fourier,  $T(x, t)$  sıcaklığının

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$T(0, t) = T(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

sınır koşullu ısı denkleminin çözümü olduğunu ileri sürmüştür. (3.1) denklemini kullanarak  $T(x, t)$  çözümünün

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad (3.3)$$

biçiminde olduğunu göstermiştir [42].

### 3.2 Bir Fonksiyonun Fourier Serisine Açılımı

**Tanım 3.1.**  $T$ , pozitif sabit olmak üzere;

$$f(x) = f(x + T), \quad -\infty < x < \infty$$

eşitliğini sağlanıyor ise  $f$  'ye  $T$  periyotlu periyodik fonksiyon ve bu eşitliği sağlayan en küçük pozitif  $T$  sayısına da  $f(x)$  in periyodu denir.

Periyodik bir  $f(x)$  fonksiyonu, periyodun içindeki sonlu sayıda nokta haricinde tanımlı, kendisi ve birinci türevi parçalı sürekli dolayısıyla tanım bölgesi içinde sınırlı bir aralıkta integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(wkx) + b_k \sin(wkx), \quad w = \frac{2\pi}{T}$$

olarak tanımlanan seri,  $f(x)$  fonksiyonuna yakınsar.  $f(x)$  fonksiyonun bu eşitliğine Fourier açılımı,  $a_k$  ve  $b_k$  katsayılarına Fourier katsayıları ve bu seriye de Fourier serisi adı verilir. Süreksizlik noktalarında bu seri fonksiyonun sağ ve sol değerlerinin ortalamasına yakınsamaktadır. Bu yakınsama şartlarına Dirichlet şartları denir. Verilen  $a_k$  ve  $b_k$  katsayıları

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(wkx) dx, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(wkx) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

olarak hesaplanırlar.

### 3.3 Değişkenlerine Ayırma Metodu

Başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan kullanışlı bir metot değişkenlerine ayırma metodudur. Lineer diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için uygulanır.

$A, B, C, D, E, F$  katsayıları  $x$  ve  $y$ 'nin fonksiyonları olmak üzere; iki bağımsız değişkenli

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0 \quad (3.4)$$

lineer diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemin

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.5)$$

biçiminde çözümlerini bulmak için (3.5), (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$AX''Y + 2BX'Y' + CXY'' + DX'Y + EXY' + FXY = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.5) denklemini

$$\frac{1}{X}f(x, D_x)X = \frac{1}{Y}g(y, D_y)Y \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilirse (3.4) denkleminde değişkenlerine ayrılabilir denir. (3.7) denkleminin sol tarafı yalnızca  $x$  değişkeninin bir fonksiyonu ve sağ tarafı yalnızca  $y$  değişkeninin bir fonksiyonudur. Farklı değişkenlere ait iki fonksiyonun birbirine eşit olması, yalnızca her iki fonksiyonun aynı  $\lambda$  sabitine eşit olması ile mümkündür. Buradan

$$\frac{1}{X}f(x, D_x)X = \frac{1}{Y}g(y, D_y)Y = \lambda$$

ve

$$f(x, D_x)X - \lambda X = 0, \quad g(y, D_y)Y - \lambda Y = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir.

Değişkenlerine ayırma metodu, sabit veya değişken katsayılı homojen lineer kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemlere uygulanabilir. Metodun uygulanabilirliği diferansiyel denkleme olduğu kadar sınır şekline ve sınır koşullarının tanımına da bağlıdır. Metodun uygulanabilmesi için denklemin oluşturduğu diferansiyel operatör ayrılabilir olmalı ve tüm başlangıç ve sınır koşulları değişkenlere bağlı olarak,

örneğin değişkenler  $x$  ve  $y$  ise  $x = \text{sabit}$ ,  $y = \text{sabit}$  doğruları boyunca verilmeli ve  $x = \text{sabit}$  için sınır koşullarını tanımlayan lineer operatörler, çözümün  $y$  ye göre kısmi türevlerini içermemeli ve katsayıları  $y$  den bağımsız olmalı, benzer şekilde  $y = \text{sabit}$  için sınır koşullarını tanımlayan lineer operatörler, çözümün  $x$  e göre kısmi türevlerini içermemeli ve katsayıları  $x$  den bağımsız olmalıdır [43].

### 3.4 Lineer Olmayan Gecikmeli Parabolik Denklemin Değişkenlerine Ayırma ve Fourier Serisi Metodu İle Çözümü

Bu alt bölümde lineer olmayan gecikmeli parabolik

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = u(t, x) \cdot [u(t-1, x) \cdot \cos x - u_x(t-1, x) \cdot \sin x], t \geq 0, 0 < x < \pi, \\ u(t, x) = e^{-t} \cdot \sin x, -1 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq \pi \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, t \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

denklemi için başlangıç ve sınır değer problemi çalışılmıştır. Bu problemin çözümü için değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri metodu kullanılacaktır.

$t \in [0, 1]$  için  $t-1 \in [-1, 0]$  olduğundan

$$u(t-1, x) = e^{-(t-1)} \cdot \sin x$$

ve

$$u_x(t-1, x) = e^{-(t-1)} \cdot \cos x$$

fonksiyonları (3.9) denklemde yerine yazılırsa lineer olmayan parabolik denklem için

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = u(t, x) \cdot [e^{-(t-1)} \cdot \sin x \cdot \cos x - e^{-(t-1)} \cdot \cos x \cdot \sin x], 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \sin x, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, t \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.10)$$

başlangıç ve sınır değer problemi elde edilir. (3.10) problemini çözmek için bu durumda (3.10) problemi,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0, 0 < t < 1, 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = \sin x, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,1] \end{cases} \quad (3.11)$$

problemine dönüşür. Değişkenlerine ayırma metoduyla

$$u(t,x) = T(t)X(x) \neq 0$$

biçiminde tanımlayıp denklemde yerine yazarsak

$$T'(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0$$

veya

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (3.12)$$

bulunur. (3.12) eşitliğinden

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

denklemleri elde edilir. Çözümü bulabilmek için  $\lambda$ 'nın aldığı değerlere göre üç durum söz konusudur.

i)  $\lambda = \eta^2 > 0$  için sadece aşıkâr çözüm vardır.

ii)  $\lambda = 0$  için  $c$  keyfi bir sabit sayı olmak üzere;  $X(x) = c$  çözümü elde edilir.

iii)  $\lambda = -\eta^2 < 0$  için  $\eta = k, k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere; çözümün

$$X_k(x) = c_k \cos kx + d_k \sin kx, k = 1, 2, \dots$$

biçiminde olduğu görülür. (3.12) eşitliğinden

$$T'(t) - k^2 T(t) = 0 \quad (3.14)$$

denklemleri yazılır. Bu denklemin çözümü

$$T_k(t) = C_k e^{-k^2 t}$$

bulunur.

Böylece  $a_k = c_k C_k, b_k = d_k C_k$  olmak üzere;

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx e^{-k^2 t} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx e^{-k^2 t} \quad (3.15)$$

elde edilir.

$$u(0, x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

başlangıç koşulu kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sin x$$

eşitliğinden

$$a_k = 0, \quad k \geq 0$$

$$b_1 = 1, \quad b_k = 0, \quad k \geq 2$$

katsayıları elde edilir. Bu katsayılar (3.15) çözümünde yerine yazıldığında (3.11) probleminin çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.16)$$

bulunur.

$t \in [m - 2, m - 1]$  için  $u(t, x) = e^{-t} \sin x$ ,  $m \in \mathbb{N}$  olsun.

$t \in [m - 1, m]$  için  $m - 2 \leq t - 1 \leq m - 1$  olduğundan

$$u(t - 1, x) = e^{-(t-1)} \cdot \sin x$$

ve

$$u_x(t - 1, x) = e^{-(t-1)} \cdot \cos x$$

fonksiyonları (3.9) denkleminde yerine yazılırsa zaman gecikmeli lineer olmayan parabolik denklem için

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0, \quad m - 1 < t < m, \quad 0 < x < \pi, \\ u(m - 1, x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \in [m - 1, m] \end{cases} \quad (3.17)$$

başlangıç ve sınır değer problemi elde edilir. Değişkenlerine ayırma metoduyla (3.17) problemin çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x, \quad m - 1 \leq t \leq m \quad (3.18)$$

biçiminde bulunur.

Tümevarım ile her  $t \in [m, m + 1]$ ,  $m=0,1,2,\dots$  için

$$u(t, x) = e^{-t} \cdot \sin x$$

verilen problemin çözümüdür.



## BÖLÜM 4

### ZAMAN GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

#### 4.1 Laplace Dönüşümünün Tanımı

Laplace dönüşümü, adını bir matematikçi ve astronom olan Pierre Simon Laplace'tan almıştır. 19. Yüzyılda Abel Lerch, Heaviside ve Bromwich tarafından kullanılmasına rağmen dönüşümün güncel yaygın kullanımı ikinci dünya savaşından sonra başlamıştır. Benzer integral dönüşümler Euler ve Lagrange gibi matematikçilerin çalışmalarında görülebilir. 1744 yılında Leonard Euler, diferansiyel denklemlerin çözümleri olan

$$z = \int X(x)e^{ax} dx, \quad z = \int X(x)x^A dx$$

biçimindeki integralleri bulmuştur fakat bu konu üzerine çalışmalarını sürdürmemiştir. Joseph Louis Lagrange, olasılık yoğunluk fonksiyonunun integralini alma üzerine yaptığı çalışmasında

$$\int X(x)e^{-ax} a^x dx$$

biçimindeki integrali araştırmıştır. 1782'de integraller denklemlerin çözümleri olarak Laplace'ın ilgisini çekmiştir. 1785'te denklem çözümünden ziyade dönüşümün kendisi

ile ilgilenmiş ve dönüştürülmüş denklemlerin çözümlerini aramak yerine fark denklemini tamamen dönüştüren Mellin dönüşümüne benzeyen

$$\int x^s \phi(x) dx$$

integral dönüşümü kullanmıştır. Laplace, Fourier 'in difüzyon denklemini çözmek için kullandığı Fourier serisi metodunun çözümler periyodik olduğundan yalnızca uzayın sınırlı bir bölgesine uygulanabildiğini fark etmiş ve 1809 yılında uzayda süresiz olarak yayılan çözümleri bulmak için kendi dönüşümünü uygulamıştır.

Laplace Dönüşümü lineer sınır değer problemlerini çözmek için ve olasılık teorisi ile mühendislik alanlarında zamandan bağımsız olan doğrusal sistemleri modellemek amacıyla kullanılan bir dönüşümdür. Diferansiyel denklemleri daha kolay çözülecek cebirsel yapılara dönüştürür. Sözü edilen yöntem, çözümü kolaylaştırmasına rağmen çözüm bulduktan sonra t uzayına geri dönüşte Laplace dönüşümünün tersini bulma sorunu ortaya çıkabilir. Laplace dönüşümü, başlangıç değer probleminin genel çözümünün ve keyfi sabitlerin bulunmasına gerek kalmadan başlangıç koşullarını kullanarak direkt çözüme götürür. Laplace dönüşümü ile ilgili literatürde birçok kaynak bulunmaktadır [44-47].

**Tanım 4.1.**  $f(t)$  fonksiyonu  $t \geq 0$  için tanımlı reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olsun.  $s$  reel veya kompleks bir parametre olmak üzere;

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt$$

has olmayan integrali yakınsak ise  $F(s)$  fonksiyonuna  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir

## 4.2 Laplace Dönüşümü İle İlgili Bazı Özellikler

### 4.2.1 Lineerlik

Laplace dönüşümünün temel özelliklerinden biri lineerliktir.  $\text{Re}(s) > \omega$  için  $f \in L$ ,  $\text{Re}(s) > \delta$  için  $g \in L$  ise  $\text{Re}(s) > \max\{\omega, \delta\}$  için  $f + g \in L$  ve keyfi  $c_1, c_2$  sabitleri için

$$L(c_1f+c_2g)= c_1L(f)+ c_2L(g)$$

eşitliği sağlanır. Laplace dönüşümü lineer olduğundan yalnızca lineer diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

#### 4.2.2 Benzerlik

$L\{ f(t) \} = F(s)$  ise keyfi  $\alpha > 0$  için

$$L\{ f(\alpha t) \} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

**İspat:** Tanımdan faydalanarak  $f(\alpha t)$  için Lplace dönüşümünü yazalım.

$$L\{ f(\alpha t) \} = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-st} dt$$

elde edilir. Burada  $\alpha t = u$  dersek

$$\alpha dt = du$$

bulunur.

$$L\{ f(\alpha t) \} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(u) e^{-\frac{s}{\alpha} u} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

#### 4.2.3 Laplace Dönüşümünün Varlığı

**Teorem 4.1.**  $f(t)$  fonksiyonu her sonlu  $0 \leq t < a$  aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon ise yani

$$|f(t)| < M e^{\alpha t}, t \geq t_0$$

sağlanıyorsa her bir  $s > \alpha$  için  $f(t)$  fonksiyonun Laplace dönüşümü vardır.

**İspat:**

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right| &= \left| \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} f(t) e^{-st} dt \right| \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} |f(t) e^{-st}| dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} |f(t)| e^{-st} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-st} dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{\tau} |f(t)| e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{t_0} |f(t)|e^{-st}dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{\tau} Me^{\alpha t}e^{-st}dt \\ &= \int_0^{t_0} |f(t)|e^{-st}dt + M \frac{e^{(\alpha-s)t_0}}{s-\alpha} = c, s > \alpha \end{aligned}$$

Böylece  $s > \alpha$  değerinde

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-st}dt + M \frac{e^{(\alpha-s)t_0}}{s-\alpha} = c$$

sağlanmaktadır. Yani verilen has olmayan integral yakınsaktır. Bu teoremin koşulları altında  $f(t)$ 'nin yanı sıra  $|f(t)|$ 'nin de Laplace dönüşümü vardır.

Bu teorem Laplace dönüşümünün varlığı için sadece yeter koşulu vermektedir. Bir fonksiyonun Laplace dönüşümü, bu koşul sağlanmasa da var olabilir.

Örneğin;

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t-1}} & , \quad 0 \leq t < 1, \\ t & , \quad t \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu verilen teoremin koşullarını sağlamamasına rağmen bu fonksiyonun Laplace dönüşümü mevcuttur.

#### 4.2.4 Laplace Dönüşümünün Tersisi:

Mevcut problemlere Laplace dönüşümünü uyguladıktan sonra bu dönüşümün tersini uygulamak gerekir.

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

ise o zaman orijinal fonksiyon Laplace dönüşümüne karşı gelen fonksiyonun ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t), t \geq 0$$

ile tanımlanır.  $[0, \infty)$  aralığında sürekli fonksiyonların ters Laplace dönüşümleri taktır.

#### 4.2.5 Laplace Dönüşümünün İntegrali

**Teorem 4.2:**  $f$ ,  $[0, \infty)$  aralığında parçalı sürekli ve  $\alpha$  üstel mertebeden bir fonksiyon ise

$L\{f(t)\} = F(s)$  ve  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$  iken

$$\int_s^\infty F(x) dx = L\left(\frac{f(t)}{t}\right), \quad s > \alpha$$

olur.

**İspat:**

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt, \quad (x \text{ reel})$$

Denklemin her iki tarafından  $s$ 'den  $\infty$ 'a  $x$  e göre integrali alınırsa

$$\int_s^\infty F(x) dx = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_s^w \left( \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \right) dx$$

elde edilir.

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt$$

integrali  $\alpha < s \leq x \leq w$  için düzgün yakınsak ise verilen integralin sırası ( $dx$  ile  $dt$ ) değiştirilebilir.

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F(x) dx &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_s^w \left( \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \right) dx \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left( \int_s^w e^{-xt} f(t) dx \right) dt \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-xt}}{-t} f(t) \right]_s^w dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-wt} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= L\left(\frac{f(t)}{t}\right) \end{aligned}$$

bulunur.

#### 4.2.6. Türev için Laplace Dönüşümü Teoremi

$f(t)$  fonksiyonu,  $[0, \infty]$  aralığında ve üstel mertebeden bir fonksiyon olsun.  $f'(t)$  sonlu bir  $[0, a]$  aralığında parçalı sürekli ve  $s > \gamma$  ( $reel(s) > \gamma$ ) iken  $f'(t)$  nin Laplace dönüşümü vardır. Bu dönüşüm

$$L\{f'(t)\} = s \cdot L\{f(t)\} - f(0)$$

ile tanımlanır.

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

**İspat:**

$$\frac{d}{dt}(f(t)e^{-st}) = -sf(t)e^{-st} + f'(t)e^{-st}$$

$$\int_0^R f'(t)e^{-st} dt = f(R)e^{-sR} - f(0) + s \int_0^R f(t)e^{-st} dt$$

$R \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f'(t)e^{-st} dt = 0 - f(0) + s \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t)e^{-st} dt$$

elde edilir. Sağ taraftaki limit  $s > \gamma$  için var olduğundan sol tarafında limit de vardır. Yani  $f'(t)$  nin Laplace dönüşümü vardır.

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = L\{f(t)\}$$

olduğundan

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

elde edilir.

#### 4.2.7. Yüksek Mertebeden Türevin Laplace Dönüşümü

**Teorem 4.3.**  $f(t)$  fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında  $(n-1)$ . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun.  $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$  fonksiyonlarının her biri üstel mertebeden ve  $f^{(n)}$  her

bir  $[0, a)$  aralığında parçalı sürekli olsun.  $f^{(n)}$  nin  $s > \gamma$  ( $reel(s) > \gamma$ ) iken Laplace dönüşümü vardır ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0),$$

$$L\{f'''(t)\} = s^3 L\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

**İspat:**

$$L\{f^{(n)}(t)\} = sL\{f^{(n-1)}(t)\} - f^{(n-1)}(0),$$

$$L\{f^{(n-1)}(t)\} = sL\{f^{(n-2)}(t)\} - f^{(n-2)}(0),$$

.

.

.

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0),$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

#### 4.2.8. Öteleme Özelliği

$\tau > 0$  olmak üzere  $L\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau}F(s)$  dir.

**İspat:**

$t < \tau$  için  $f(t)=0$  olduğundan

$$L\{f(t - \tau)\} = \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt$$

bulunur.

$t - \tau = u$  için  $dt=du$  değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\int_0^{\infty} f(u) e^{-s(u+\tau)} du = \int_0^{\infty} f(u) e^{-su} e^{-s\tau} du$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-s\tau} \int_0^{\infty} f(u) e^{-su} du \\
&= e^{-s\tau} F(s)
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 4.2.9. Kuvvet Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü

$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  eşitliğinde özel olarak  $f(t) = 1$  alırsak

$$L\{t^n \cdot 1\} = L\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

ve

$$L\{1\} = \frac{1}{s} = F(s) \text{ olduğundan}$$

$$L\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

#### 4.2.10 Laplace Dönüşümünün Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

$u=u(x,t)$  ve  $t \geq 0$  iken  $u$ 'nun  $x$ 'e göre Laplace dönüşümü  $U(s,t)$  olmak üzere

$$U(s, t) = L\{u(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x, t) dx$$

olarak yazılır.

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x, t) dx = \frac{\partial U(s, t)}{\partial t}$$

olur. Bu ifade türevin dönüşümünün, dönüşümün türevine eşit olduğunu gösterir.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x, t) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x, t_0) dx$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} U(s, t) = U(s, t_0)$$

$$\frac{\partial U(s, t)}{\partial t} = \frac{dU(s, t)}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

elde edilir.

Burada s parametresi sabit olarak ele alınır ve t'ye göre kısmi türev, adi türeve dönüştürülerek işlemler yapılır. Benzer şekilde ikinci mertebeden türev için de s parametresi sabit olarak alınır ve 2.mertebeden kısmi türevin Laplace dönüşümü de adi türevin Laplace dönüşümüne dönüşmüş olur. Bu dönüşüm

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2 U}{dt^2}$$

olarak yazılabilir. u(x,t)'nin x'e göre kısmi türevinin Laplace dönüşümü

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = sL(u(x, t)) - u(0^+, t) = sU(s, t) - u(0^+, t)$$

olarak yazılır. u(x,t)'nin x'e göre 2. mertebeden kısmi türevinin Laplace dönüşümü

$$L_x\left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}\right) = s^2 \cdot U(t, s) - s \cdot u(t, 0) - u_x(t, 0)$$

olarak yazılır.

### 4.3. Zaman Gecikmeli Lineer Olmayan Parabolik Bir Denklem İçin Başlangıç ve Sınır Değer Probleminin Laplace Dönüşüm Metodu ile Çözümü

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + 2u(t, x) = u(t, x) \cdot [u(t-1, x) + u_x(t-1, x)], x, t \geq 0, \\ u(t, x) = e^{-t}e^{-x}, -1 \leq t \leq 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-t}, t \geq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

gecikmeli lineer olmayan parabolik başlangıç ve sınır değer probleminin Laplace dönüşüm metodu ile çözümü bulunabilir. x değişkenine göre Laplace dönüşümü alınırsa

$$L_x(u(t, x)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} u(t, x) dx = U(t, s) \quad (4.2)$$

ve

$$L_x \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right) = \frac{dU(t, s)}{dt}, \quad (4.3)$$

$$L_x \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) = s \cdot U(t, s) - u(t, 0), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} L_x \left( \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right) &= s^2 \cdot L_x(u(t, x)) - s \cdot u(t, 0) - u_x(t, 0) \\ &= s^2 \cdot U(t, s) - s \cdot u(t, 0) - u_x(t, 0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

olarak tanımlansın.

Öncelikle  $t \in [0, 1]$  için  $t - 1 \in [-1, 0]$  olduğundan

$$u(t - 1, x) = e^{-(t-1)} \cdot e^{-x}$$

ve

$$u_x(t - 1, x) = -e^{-(t-1)} \cdot e^{-x}$$

elde edilir. Bunlar (4.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + 2u(t, x) = e^{-t} e^{-x} \cdot [e^{-(t-1)} \cdot e^{-x} - e^{-(t-1)} \cdot e^{-x}], x \geq 0, t \geq 0, \\ u(t, x) = e^{-t} e^{-x}, -1 \leq t \leq 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-t}, t \geq 0 \end{cases}$$

problemine dönüşür. Denklem düzenlenirse

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + 2u(t, x) = 0, x \geq 0, t \geq 0, \\ u(t, x) = e^{-t} e^{-x}, -1 \leq t \leq 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-t}, t \geq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

bulunur. (4.6) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} L_x \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right) - L_x \left( \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right) + L_x(2u(t, x)) = 0, x \geq 0, t \geq 0, \\ L_x(u(t, x)) = L_x(e^{-t} e^{-x}), -1 \leq t \leq 0, \\ L_x(u(t, 0)) = L_x(e^{-t}), \quad L_x(u_x(t, 0)) = L_x(-e^{-t}), t \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) ile tanımlanan dönüşümler denklemde yerine yazıldığında,

$$\begin{cases} \frac{\partial U(t,s)}{\partial t} - s^2 \cdot U(t,s) + s \cdot u(t,0) + u_x(t,0) + 2U(t,s) = 0, t \geq 0, \\ U(t,s) = \frac{1}{1+s} e^{-t}, -1 \leq t \leq 0, \\ U(t,0) = e^{-t}, \quad s \cdot U(t,0) - u(t,0) = -e^{-t}, t \geq 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

bulunur. Başlangıç koşullarını yerine yazarak denklem düzenlenirse,

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} + (2 - s^2)U(t,s) + se^{-t} - e^{-t} = 0$$

elde edilir.

Böylece

$$\frac{dU(t,s)}{dt} + (2 - s^2)U(t,s) = (1 - s)e^{-t} \quad (4.9)$$

adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada integrasyon çarpanı,

$$\mu = e^{\int_0^\infty (2-s^2)dt} = e^{(2-s^2)t}$$

olarak bulunur. İntegrasyon çarpanı kullanılarak

$$e^{(2-s^2)t} \cdot U(t,s) = \int e^{(2-s^2)t} (1-s) \cdot e^{-t} dt$$

ve

$$U(t,s) = e^{-(2-s^2)t} \left[ (1-s) \cdot \frac{1}{(1-s^2)} \cdot e^{(1-s^2)t} + c \right], (s \neq 1)$$

$$U(t,s) = \frac{1}{1+s} e^{-t} + ce^{-(2-s^2)t}$$

bulunur.

Başlangıç koşulu

$$U(t,0) = e^{-t} + ce^{-2t} = e^{-t}$$

kullanılarak  $c=0$  olur. Buradan

$$U(t,s) = \frac{1}{1+s} e^{-t} \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) eşitliğinin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L_x^{-1}(U(t, s)) = L_x^{-1}\left(\frac{1}{1+s}e^{-t}\right)$$

$$u(t, x) = e^{-x}e^{-t}, t \in [0, 1]$$

bulunur.

$t \in [m-1, m]$  için  $m-2 \leq t-1 \leq m-1$  olduğundan

$$u(t-1, x) = e^{-(t-1)} \cdot e^{-x}$$

ve

$$u_x(t-1, x) = -e^{-(t-1)} \cdot e^{-x}$$

değerleri (4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + 2u(t, x) = 0, x \geq 0, t \geq 0, \\ u(t, x) = e^{-t}e^{-x}, m-2 \leq t \leq m-1, \\ u(t, 0) = e^{-t}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-t}, t \geq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

başlangıç ve sınır değer problemi elde edilir. Laplace dönüşümünü denklemin her iki yanına uygulayarak

$$u(t, x) = e^{-x}e^{-t}, t \in [m-1, m]$$

çözümü bulunur.

Tümevarım ile her  $t \in [m, m+1]$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$  için (4.1) probleminin çözümünün

$$u(t, x) = e^{-x}e^{-t}$$

olduğu görülür.

## BÖLÜM 5

### GEÇİKMELİ LİNEER OLMAYAN PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ METODU İLE ÇÖZÜMÜ

#### 5.1. Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümüne dayanan metotlar, mühendislik ve fen bilimlerinin devre tasarımı, spektroskopi, kristalografi, sinyal işleme ve haberleşme, görüntüleme vs. gibi birçok alanında kullanılır. Fourier serileri, yalnızca periyodik fonksiyonlara uygulanabildiğinden sonsuz aralıkta tanımlanmış periyodik olmayan fonksiyonlar, Fourier serisi açılımlarıyla verilemezler. Bu durumda Fourier serisi yalnızca sonlu aralıkta tanımlanan fiziksel problemlere ve dolayısıyla bu tür diferansiyel denklemlere uygulanabilir. Sonsuz aralıkta tanımlanan, periyodik olmayan fonksiyonlar için periyodun limitini sonsuza götürerek oluşturulan Fourier dönüşümü kullanılabilir. Fourier dönüşümü ile ilgili literatürde birçok kaynak bulunmaktadır [48-51].

$(-T, T), T > 0$  aralığında tanımlanmış  $2T$ -periyodlu  $f_T(x)$  fonksiyonu göz önüne alınsın.  $f_T(x)$ , mutlak integrallenebilen bir fonksiyon olsun yani

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} |f_T(x)| < \infty \quad (5.1)$$

sağlansın. Bu fonksiyonun Fourier serisine açılımı:

$$f_T(x) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_T(s) ds + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T}^T f_T(s) \cos \frac{\pi k(s-x)}{T} ds \quad (5.2)$$

olarak yazılabilir.  $T \rightarrow \infty$  için

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) \quad (5.3)$$

fonksiyonu tanımlansın.  $(-T, T)$ , aralığında  $f(x) \equiv f_T(x)$  ve  $f, f_T$  fonksiyonları  $(-\infty, \infty)$  da tanımlı olmasına rağmen  $f(x)$  periyodik olmayan bir fonksiyondur. (5.2) nin sağ tarafındaki toplam

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\alpha \int_{-T}^T f_T(s) \cos \alpha_k(x-s) ds, \quad \Delta\alpha = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{T}, \alpha_k = \frac{\pi k}{T}$$

olarak yazılırsa bu seri  $\alpha \in (0, \infty)$  değişkenine göre has olmayan integrale karşılık gelen sonsuz Riemann toplamı olarak yorumlanabilir.

$$f_T(x) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_T(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\alpha \int_{-T}^T f_T(s) \cos \alpha_k(x-s) ds$$

olur.  $T \rightarrow \infty$  olarak limite geçilirse (5.1) koşulundan

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_T(s) ds \right| \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f_T(s)| ds \leq \frac{Q}{2T} \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$$

eşitsizliği elde edilir. (5.3) ile tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \alpha(x-s) ds \right\} d\alpha \quad (5.4)$$

olarak bulunur.

Has olmayan integralin tanımından ve

$$\cos w = \frac{1}{2} [e^{iw} + e^{-iw}]$$

formülünden yararlanarak (5.4) integrali

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \alpha(x-s) ds \right\} d\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} f(s) [e^{i\alpha(x-s)} + e^{-i\alpha(x-s)}] ds d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^R e^{i\alpha(x-s)} d\alpha + \int_0^R e^{-i\alpha(x-s)} d\alpha \right] f(s) ds
\end{aligned}$$

biçiminde yeniden yazılır.  $z = -\alpha$  değişken dönüşümü ile bu integral gösterim

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^R e^{i\alpha(x-s)} d\alpha + \int_0^R e^{-i\alpha(x-s)} d\alpha \right] f(s) ds$$

veya

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha s} f(s) ds d\alpha \quad (5.5)$$

biçimini alır.

### Tanım 5.1.

$$F[f(x)](s) = F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \quad (5.6)$$

integraline  $f(x)$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$F^{-1}(f(x)) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} F(s) ds \quad (5.7)$$

integraline de  $F(x)$  fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü denir. Fourier dönüşümü  $F(f)$ , ters Fourier dönüşümü ise  $F^{-1}(f)$  ile gösterilir.

Bu dönüşüm diferansiyel denklemleri çözmek için bir kolaylık sağlar. Dönüşüm ile verilen diferansiyel denklem  $\alpha$  parametresine bağlı cebirsel denklem olarak yazılabilir. Denklemin çözümünü yapıldıktan sonra ters dönüşüm uygulanarak orijinal denklemin çözümü elde edilir.

## 5.2. Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri

### 5.2.1. Lineerlik

Fourier dönüşümü lineer bir dönüşümdür.  $f(x)$  ve  $g(x)$  integrallenebilir fonksiyonlar,  $c_1, c_2$  keyfi sabitler olmak üzere;

$$F(c_1f(x) + c_2g(x)) = c_1F(f(x)) + c_2F(g(x))$$

sağlanır. Fourier dönüşümü lineer olduğu için lineer diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

### 5.2.2. Öteleme

(i) Fourier dönüşümü zaman değişkenine göre öteleme özelliğine sahiptir. Yani

$$F[f(x - a)](s) = e^{-isa} F[f(x)](s)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**

$$F(f(x - a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-isx} dx$$

olur. İntegralde  $x - a = u$  değişken dönüşümü yapılırsa

$$F(f(x - a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-is(u+a)} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-isa} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-isu} du = e^{-isa} F(s)$$

elde edilir.

(ii) Fourier dönüşümü frekans öteleme özelliğine de sahiptir. Yani

$$F(f(x)e^{iax}) = F(s - a)$$

olur.

**İspat:**

$$F(f(x)e^{iax}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(s-a)x} dx = F(s - a)$$

elde edilir.

### 5.2.3. Türevin Fourier Dönüşümü

$$F\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = isF(s)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} F(s) ds$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} F(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [e^{isx} F(s)] ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ise^{isx} F(s) ds = isf(x) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$F\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = F(isf(x)) = isF(f(x)) = isF(s)$$

elde edilir. İkinci mertebeden türeve benzer biçimde Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$F\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right) = isF\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = -s^2F(s)$$

elde edilir. Böylece n. Mertebeden türevin Fourier dönüşümü

$$F\left(\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right) = (is)^n F(f(x)) = (is)^n F(s)$$

olur.

### 5.2.4. Fourier Dönüşümünün Türevi

$$\frac{dF(s)}{ds} = -iF(xf(x))$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**

$$\begin{aligned}\frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{ds} e^{-isx} dx \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-isx} dx = -iF(xf(x))\end{aligned}$$

elde edilir.

### 5.3. Bir Gecikmeli Parabolik Başlangıç Değer Probleminin Fourier Dönüşümü Metodu İle Çözümü

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \\ u(t, x)[u(t-1, x) - e^{-(t-1)}e^{-x^2}] - e^{-t}e^{-x^2} - (-2 + 4x^2)e^{-t}e^{-x^2}, x, t \geq 0, \\ u(t, x) = e^{-t} \cdot e^{-x^2}, -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

gecikmeli parabolik başlangıç değer probleminin çözümü için Fourier dönüşümü metodunu kullanalım.

$-1 \leq t \leq 0$  için

$$u(t-1, x) = e^{-(t-1)} \cdot e^{-x^2}$$

elde edilir.

$$u_{m+1}(mw, x) = u_m(mw, x)$$

$$u(t, x) = u_m(t, x), (m-1)w \leq t \leq mw, m = 0, 1, 2, \dots$$

olarak alınırsa

$w=1$  için

$$u_{m+1}(m, x) = u_m(m, x), u(t, x) = u_m(t, x), (m-1) \leq t \leq m$$

olur. (5.8) denklemi,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{m+1}(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{m+1}(t, x)}{\partial x^2} = \\ u_{m+1}(t, x) [u_m(t-1, x) - e^{-(t-1)} e^{-x^2}] - e^{-t} e^{-x^2} - (-2 + 4x^2) e^{-t} e^{-x^2} \\ x \in \mathbb{R}, m \leq t \leq m+1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.9)$$

biçiminde yeniden yazılırsa

$m=0$  için,  $-1 \leq t \leq 0$  ve  $x \in \mathbb{R}$  iken

$$u_0(t, x) = e^{-t} \cdot e^{-x^2}$$

$$u_0(t-1, x) = e^{-(t-1)} \cdot e^{-x^2}$$

bulunur.  $m=1$  için  $0 \leq t \leq 1$  olur ve (5.9) denklemi

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} = u_1(t, x) [u_0(t-1, x) - e^{-(t-1)} e^{-x^2}] - e^{-t} e^{-x^2} - (-2 + 4x^2) e^{-t} e^{-x^2}, \\ x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (5.10)$$

olarak yazılır. Gecikmeli terimler yerine yazılırsa

$$\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} = u_1(t, x) [e^{-(t-1)} e^{-x^2} - e^{-(t-1)} e^{-x^2}] - e^{-t} e^{-x^2} - (-2 + 4x^2) e^{-t} e^{-x^2}$$

ve böylece

$$\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} = -e^{-t} e^{-x^2} - (-2 + 4x^2) e^{-t} e^{-x^2} \quad (5.11)$$

denklemi elde edilir. (5.11) denkleminin Fourier dönüşümü uygulanırsa

$U(t, s) = F\{u(t, x)\}$  ve

$$F\left\{\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}\right\} = -s^2 U(t, s),$$

$$F\{e^{-t} e^{-x^2}\} = e^{-t} \sqrt{\pi} e^{-s^2/4},$$

$$F\{x^2 e^{-x^2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-s^2/4} (2 - s^2)$$

dönüşümler yerlerine yazılıp denklem yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{\partial U_1(t, s)}{\partial t} + s^2 U_1(t, s) = F\{-(1 - 2 + 4x^2)e^{-t}e^{-x^2}\}$$

ve buradan

$$\frac{\partial U_1(t, s)}{\partial t} + s^2 U_1(t, s) = F\{(1 - 4x^2)e^{-t}e^{-x^2}\} \quad (5.12)$$

elde edilir. Fourier dönüşümü alındığında

$$\frac{\partial U_1(t, s)}{\partial t} + s^2 U_1(t, s) = e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-s^2/4} - 4\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{-t}e^{-s^2/4}(2 - s^2)$$

ve denklem t değişkenine bağlı

$$\frac{dU_1(t, s)}{dt} + s^2 U_1(t, s) = e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-s^2/4}(s^2 - 1) \quad (5.13)$$

lineer adi diferansiyel denkleme dönüşür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu = e^{s^2 t}$$

kullanılarak

$$U_1(t, s)e^{s^2 t} = \int_0^t e^{s^2 t} e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-s^2/4}(s^2 - 1)dt$$

ve

$$U_1(t, s)e^{s^2 t} = \sqrt{\pi}e^{-s^2/4}(s^2 - 1) \int_0^t e^{s^2 t} e^{-t} dt$$

denklemden integral çözülerek

$$U_1(t, s)e^{s^2 t} = \sqrt{\pi}e^{-s^2/4}(s^2 - 1) \frac{1}{s^2 - 1} e^{s^2 t} e^{-t}$$

bulunur. Buradan

$$U_1(t, s) = e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-s^2/4} \quad (5.14)$$

çözümü elde edilir. (5.14) çözümüne ters Fourier dönüşümü uygulanarak, (5.10) denkleminin çözümü

$$F^{-1}\{U_1(t, s)\} = F^{-1}\{e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-s^2/4}\}$$

$$u_1(t, x) = e^{-t}e^{-x^2}, -1 \leq t \leq 0 \quad (5.15)$$

bulunur. Tümevarım yöntemi kullanılarak her  $t \in [m, m + 1]$ ,  $m=0,1,2,\dots$  için

$$u_m(t, x) = e^{-t}e^{-x^2}$$

bulunur. Buradan (5.8) probleminin çözümünün

$$u(t, x) = e^{-t}e^{-x^2}$$

olduğu görülebilir.



## BÖLÜM 6

### SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde  $h(t,x)$ , ( $t \in (-\infty, 0)$ ,  $x \in [0, l]$ ),  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  verilen sınırlı düzgün fonksiyonlar ve  $a(x) \geq a > 0$  olmak üzere;

$$\begin{cases} u_t(t,x) - a(x)u_{xx}(t,x) = \\ \quad d(t)u(t,x)(b(x)u(t-w,x) + c(x)u_x(t-w,x)), t \geq 0, x \in (0, l) \\ u(t,x) = h(t,x), -w \leq t \leq 0, x \in [0, l], \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, t \geq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

lineer olmayan gecikmeli parabolik başlangıç ve sınır değer probleminin çözümü için sonlu fark yöntemi çalışılmıştır.

(6.1) probleminin çözümü için birinci ve ikinci basamaktan (mertebeden) doğruluklu fark şemaları oluşturulmuştur.

$[0,L]_h = \{x=x_n : x_n=nh, 0 \leq n \leq M, Mh=L\}$  ağ uzayını tanımlayalım.  $\varphi^h = \{\varphi_n\}_{n=1}^{M-1}$ ,  $\varphi_0 = \varphi_M = 0$ ,  $[0,L]_h$  ağ uzayı fonksiyonları olmak üzere (6.1) problemi için  $A_h^x$  fark operatörü

$$A_h^x \varphi^h(x) = \left\{ -a(x_n) \frac{\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}}{h^2} \right\}$$

ile tanımlanmak üzere

$$\begin{cases} \frac{du^h(t,x)}{dt} + A_h^x u^h(t,x) = f(u^h(t,x), u^h(t-w,x)), & 0 < t < \infty, 0 < x < L \\ u^h(t,x) = g^h(t,x), & -w \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (6.2)$$

başlangıç değer problemini göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} (u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)) + A_h^x u_k^h(x) = f(u_k^h(x), u_{k-1}^h(x)), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k, N\tau = w, \\ u_k^h(x) = g^h(t_k, x), t_k = k\tau, -N \leq k \leq 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ele alınsa

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = u(t,x)[u(t-1,x)\cos x - u_x(t-1,x)\sin x], & t \geq 0, 0 < x < \pi, \\ u(t,x) = e^{-t}\sin x, & -1 \leq t \leq 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

lineer olmayan değişken katsayılı gecikmeli parabolik denklemin tam çözümü

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x$$

şeklinindedir. (6.4) başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünü bulmak için (6.3) birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılmıştır. Katsayıları k değişkenlerinden oluşan fark denklemleri elde edilmiştir.

### 6.1 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması

(6.3) uygulanarak (6.4) probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k [u_n^{k-N} \cos x_n] + u_n^k \left[ \frac{u_{n+1}^{k-N} - u_{n-1}^{k-N}}{2h} \right] \sin x_n = 0, \\ t_k = k\tau, x_n = nh, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq n \leq m-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n) = \sin x_n, \quad x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, \\ u_0^M = u_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N \end{cases} \quad (6.5)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması oluşturulmuştur. Elde edilen (M+1) x (N+1) lik doğrusal denklem sistemi matris formunda yazılırsa,

$$a = -\frac{1}{h^2}, \quad b = -\frac{1}{\tau}$$

$1 \leq n \leq M - 1$  için

$$c_n^k = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} - e^{-t_k-N} \sin x_n \cos x_n + \sin x_n \left( e^{-t_k-N} \sin x_{n+1} - \frac{e^{-t_k-N} \sin x_{n-1}}{2h} \right),$$

D, (N+1) x (N+1) lik birim,  $\theta$ , (N+1) x 1 lik sıfır matris olmak üzere

$$u^k = \begin{bmatrix} u_1^s \\ u_1^s \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{M+1}^s \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, \quad s = k, k-1, \quad u^1 = \begin{bmatrix} \sin x_1 \\ \sin x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sin x_{M+1} \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} a & c_1^k & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & c_2^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & c_{M-1}^k & a \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ve

$$\begin{cases} Au^k + Bu^{k-1} = D\theta, & 2 \leq k \leq N+1 \\ u^1 = \varphi, & 1 \leq n \leq M+1 \end{cases} \quad (6.6)$$

katsayıları matrislerden oluşan k değişkenli fark denklemleri bulunur. Bu denklemleri

$$\begin{cases} u^k = A^{-1}D\theta^k - A^{-1}Bu^{k-1} \\ k = 2, \dots, N+1 \\ u^0 = \varphi = \sin x_n, 0 \leq n \leq M \end{cases} \quad (6.7)$$

ile çözüp farklı N ve M değerleri için (6.4) probleminin sayısal çözümleri ve MATLAB programı kullanılarak bu çözümlerden ortaya çıkan hata bulunur. Sayısal çözümleri elde etmek için yapılan MATLAB programı ektedir.

## 6.2. İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması

$$\begin{cases} \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_h^x \left( I + \frac{\tau A_h^x}{2} \right) u_k^h = \left( I + \frac{\tau A_h^x}{2} \right) f \left( t_k - \frac{\tau}{2}, u \left( t_k - \frac{\tau}{2} \right), u \left( t_k - \frac{\tau}{2} - 1 \right) \right) \\ u_k = g^h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, -N \leq k \leq 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması ele alınsın. (6.8) ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması uygulanarak (6.4) probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \tau \frac{u_{n+2}^k - 4u_{n+1}^k + 6u_n^k - 4u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{2h^4} \\ - \frac{1}{2} \left[ u_n^k [u_n^{k-N} \cos x_n] - u_n^k \left[ \frac{u_{n+1}^{k-N} - u_{n-1}^{k-N}}{2h} \sin x_n \right] \right] \\ - \frac{1}{2} \left[ u_n^{k-1} [u_n^{(k-1)-N} \cos x_n] - u_n^{k-1} \left[ \frac{u_{n+1}^{(k-1)-N} - u_{n-1}^{(k-1)-N}}{2h} \sin x_n \right] \right] \\ + \frac{\tau}{4} \frac{u_{n+1}^k [u_{n+1}^{k-N} \cos x_{n+1}] - u_{n+1}^k \left[ \frac{u_{n+2}^{k-N} - u_n^{k-N}}{2h} \sin x_{n+1} \right]}{h^2} \\ + \frac{\tau}{4} \frac{-2u_n^k [u_n^{k-N} \cos x_n] + 2u_n^k \left[ \frac{u_{n+1}^{k-N} - u_{n-1}^{k-N}}{2h} \sin x_n \right]}{h^2} \\ + \frac{\tau}{4} \frac{u_{n-1}^k [u_{n-1}^{k-N} \cos x_{n-1}] - u_{n-1}^k \left[ \frac{u_n^{k-N} - u_{n-2}^{k-N}}{2h} \sin x_{n-1} \right]}{h^2} \\ + \frac{\tau}{4} \frac{u_{n-1}^{k-1} [u_{n+1}^{k-1-N} \cos x_{n+1}] - u_{n+1}^{k-1} \left[ \frac{u_{n+2}^{k-1-N} - u_n^{k-1-N}}{2h} \sin x_{n+1} \right]}{h^2} \\ + \frac{\tau}{4} \frac{-2u_n^{k-1} [u_n^{k-1-N} \cos x_n] + 2u_n^{k-1} \left[ \frac{u_{n+1}^{k-1-N} - u_{n-1}^{k-1-N}}{2h} \sin x_n \right]}{h^2} \\ + \frac{\tau}{4} \frac{u_{n-1}^{k-1} [u_{n+1}^{k-1-N} \cos x_{n-1}] - u_{n-1}^{k-1} \left[ \frac{u_n^{k-1-N} - u_{n-2}^{k-1-N}}{2h} \sin x_{n-1} \right]}{h^2} = 0, \\ t_k = k\tau, x_n = nh, \quad 1 \leq k \leq N-1, 2 \leq n \leq M-2, \\ u_n^0 = \phi(x_n) = \sin x_n, 0 \leq n \leq M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \leq k \leq N, \\ u_3^k = 4u_2^k - 5u_1^k; u_{M-3}^k = 4u_{M-2}^k - 5u_{M-1}^k, 0 \leq k \leq N. \end{cases} \quad (6.9)$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kurulmuştur. Denklem sistemi matris formunda yazılarak elde edilen

$$\begin{cases} Au^k + Bu^{k-1} = D\theta, & 2 \leq k \leq N+1 \\ u^1 = \varphi, & 1 \leq n \leq M+1 \end{cases} \quad (6.6)$$

sistemi kullanılır. Bu sistemde;

$$u_n^k = e^{t_k} \cdot \sin x_n$$

ve

$$a = \frac{\tau}{2h^4}$$

$$b_n^k = -\frac{1}{h^2} - \frac{2\tau}{h^4} + \frac{\tau}{4h^2} u_{n-1}^{k-N} \cos x_{n-1} - \frac{\tau}{8h^3} u_n^{k-N} \sin x_{n-1} + \frac{\tau}{8h^3} u_{n-2}^{k-N} \sin x_{n-1}$$

$$c_n^k = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + \frac{3\tau}{h^4} - \frac{1}{2} u_n^{k-N} \cos x_n + \frac{1}{4h} u_{n+1}^{k-N} \sin x_n - \frac{1}{4h} u_{n-1}^{k-N} \sin x_n \\ - \frac{\tau}{2h^2} u_n^{k-N} \cos x_n + \frac{\tau}{4h^3} u_{n+1}^{k-N} \sin x_n - \frac{\tau}{4h^3} u_{n-1}^{k-N} \sin x_n$$

$$d_n^k = -\frac{1}{h^2} - \frac{2\tau}{h^4} + \frac{\tau}{4h^2} u_{n+1}^{k-N} \cos x_{n+1} - \frac{\tau}{8h^3} u_{n+2}^{k-N} \sin x_{n+1} + \frac{\tau}{8h^3} u_n^{k-N} \sin x_{n+1}$$

$$e_n^k = \frac{\tau}{4h^2} u_{n-1}^{k-N} \cos x_{n-1} - \frac{\tau}{8h^3} u_n^{k-1-N} \sin x_{n-1} + \frac{\tau}{8h^3} u_{n-2}^{k-1-N} \sin x_{n-1}$$

$$f_n^k = -\frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{2h^2} u_n^{k-1-N} \cos x_n + \frac{\tau}{4h^3} u_{n+1}^{k-1-N} \sin x_n - \frac{\tau}{4h^3} u_{n-1}^{k-1-N} \sin x_n \\ - \frac{1}{\tau} u_n^{k-1-N} \cos x_n + \frac{1}{4h} u_{n+1}^{k-1-N} \sin x_n - \frac{1}{4h} u_{n-1}^{k-1-N} \sin x_n$$

$$g_n^k = \frac{\tau}{4h^2} u_{n+1}^{k-1-N} \cos x_{n+1} - \frac{\tau}{8h^3} u_{n+2}^{k-1-N} \sin x_{n+1} + \frac{\tau}{8h^3} u_n^{k-1-N} \sin x_{n+1}$$

olmak üzere:

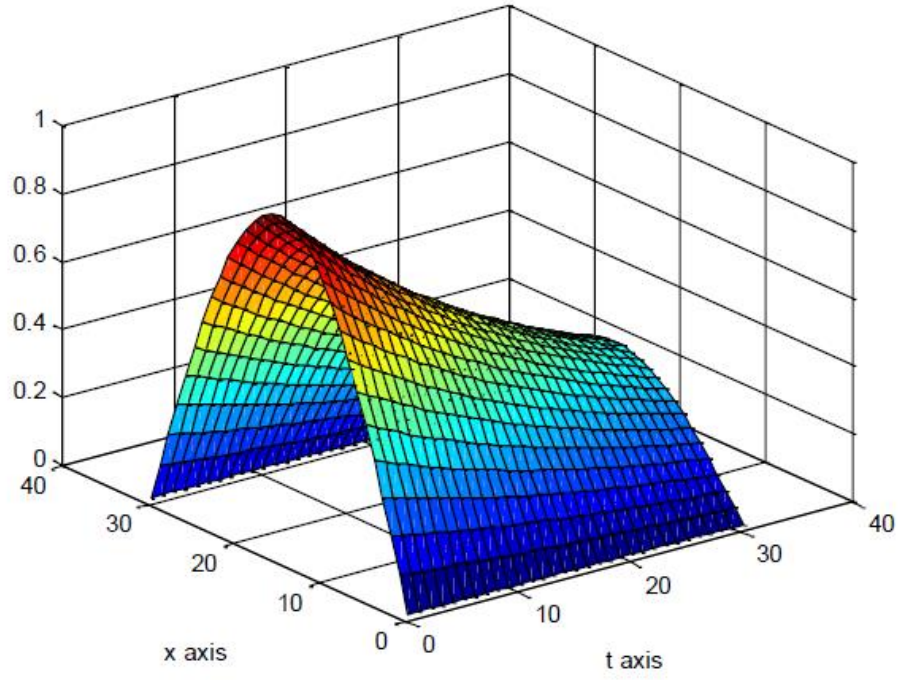
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & & & & & 1 \\ a & b_1^k & c_1^k & d_1^k & a & \dots & & & 0 \\ 0 & a & b_2^k & c_2^k & d_2^k & a & \dots & & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a & b_{m-1}^k & c_{m-1}^k & d_{m-1}^k & a & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & & & & \dots 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & & & & & 0 \\ 0 & e_1^k & f_1^k & g_1^k & \dots & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & e_2^k & f_2^k & g_2^k & \dots & & & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_{m-1}^k & f_{m-1}^k & g_{m-1}^k & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & & \dots 0 \end{bmatrix}$$

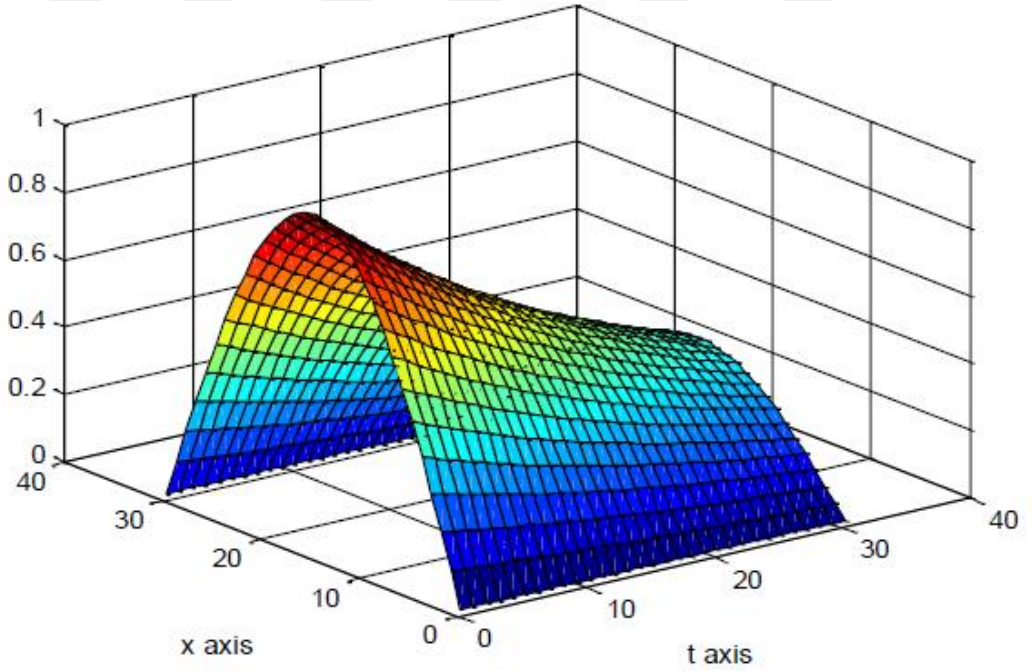
olarak alınır. Bu denklemler (6.7) ile çözülüp N ve M değerleri için (6.4) probleminin çözümleri ve bu çözümlerden ortaya çıkan hata oluşturulan MATLAB programı ile bulunur. İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yapılan program ektedir.

### 6.3 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Hata Analizi

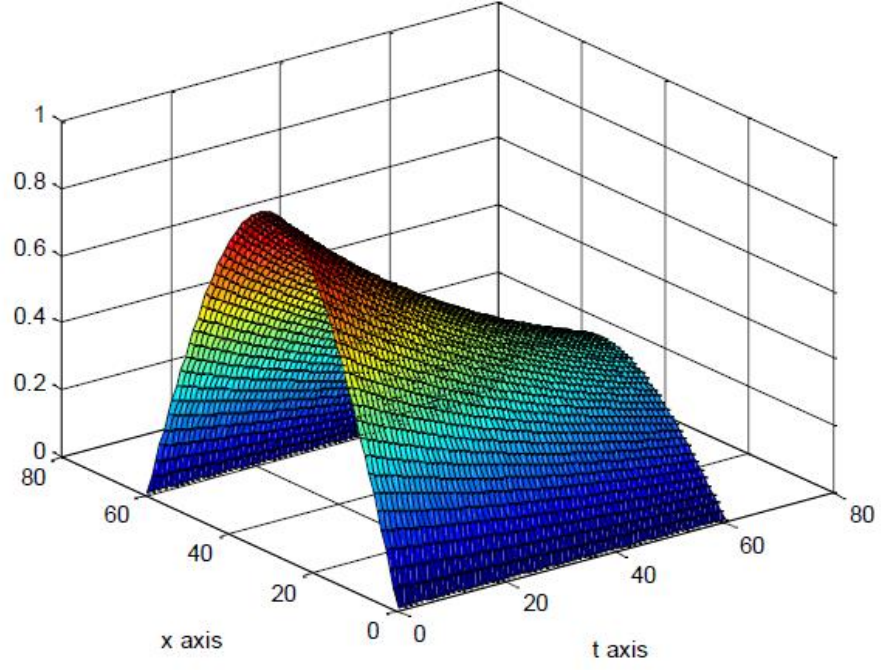
(6.4) probleminin yaklaşık çözümleri için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılmıştır. Şekil 6.1 ve 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 da yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki fark görülür olmadığından hata analizi tablo ile verilmiştir.



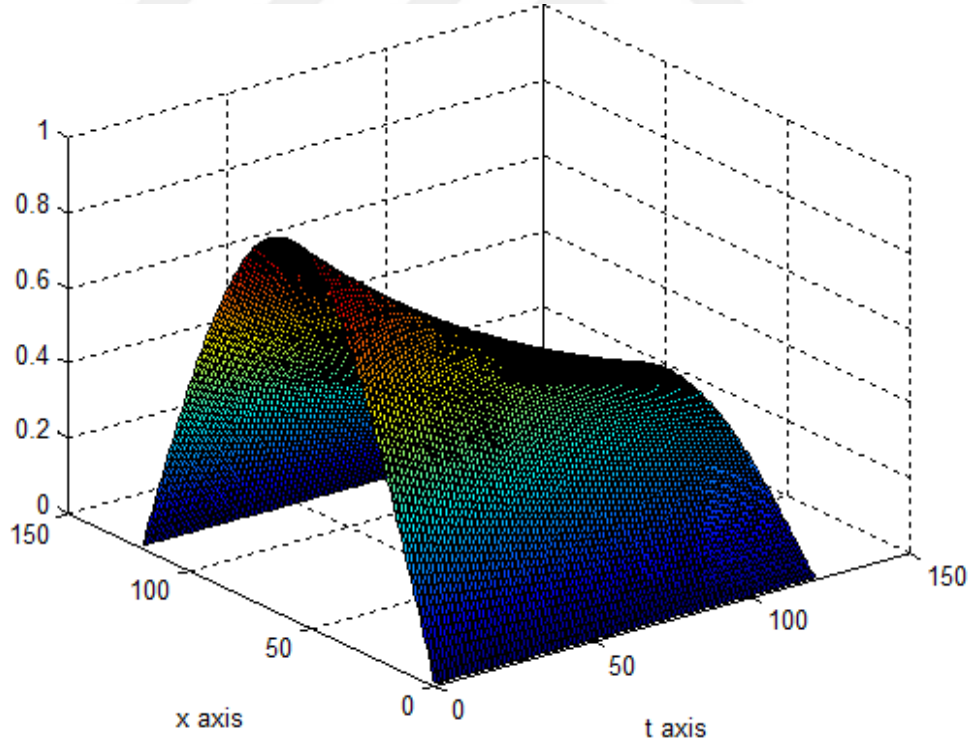
Şekil 6.1 Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için tam çözüm



Şekil 6.2 Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=30$ ,  $M=30$



Şekil 6.3 Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=60, M=60$



Şekil 6.4 Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=120, M=120$

Hatalar,

$$E_M^N = \max_{1 \leq k \leq N \leq -1} \left( \sum_{n=1}^{M-1} (u(t_k, x_n) - u_n^k t^2 h) \right)^{1/2}$$

formülüyle hesaplanmıştır.  $u(t_k, x_n)$ , (6.4) probleminin tam çözümü,  $u_n^k$  ise  $(t_k, x_n)$  noktasında sayısal çözümü temsil etmektedir.

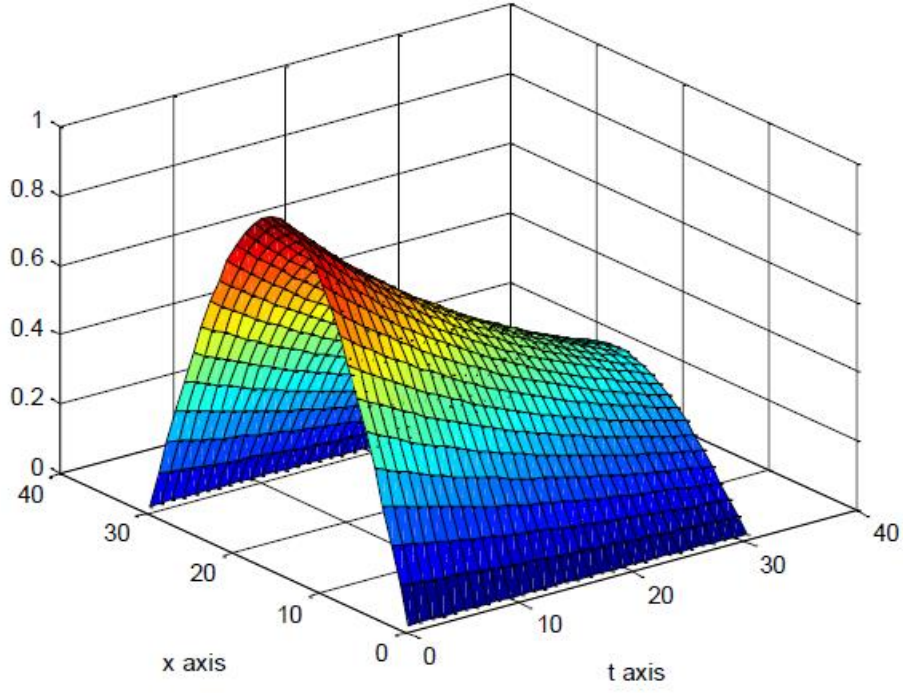
**Tablo 6.1.**  $t \in [n, n + 1]$ ,  $n=0,1,\dots$  için Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Hatanın Karşılaştırılması

Yöntem	N=M=30	N=M=60	N=M=120
Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması	0,0064	0,0031	0,0015

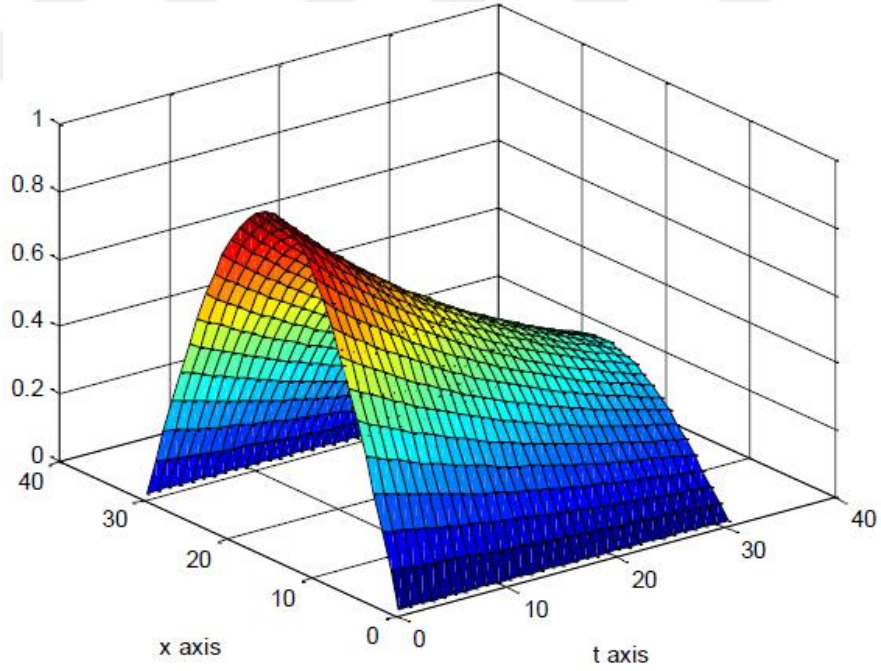
#### 6.4 İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Hata Analizi

(6.4) probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamaktan doğruluklu (6.8) fark şeması kullanılmıştır.

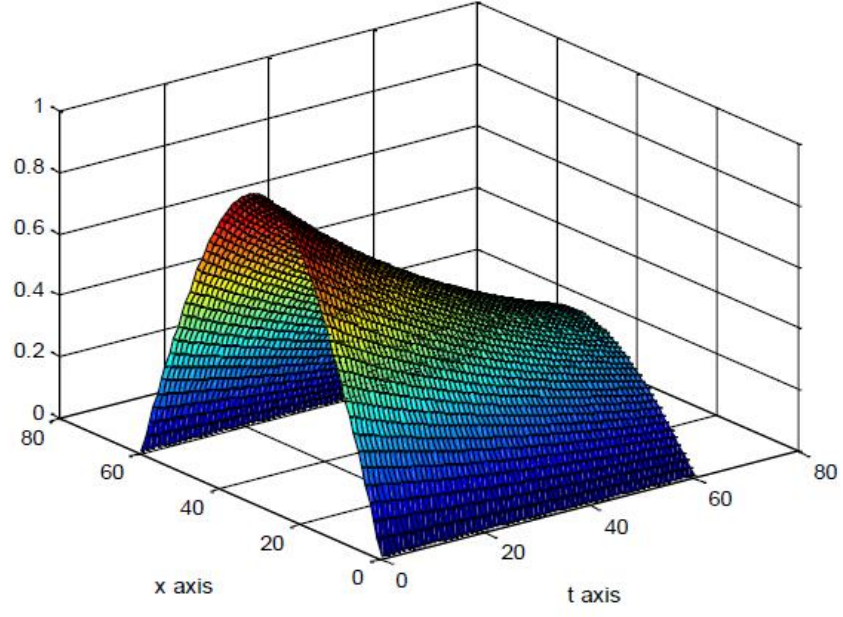
Şekil 6.7 ve 6.8, 6.9, 6.10 da yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki fark, fark edilir derecede olmadığından hata analizi Tablo 6.2 de verilmiştir.



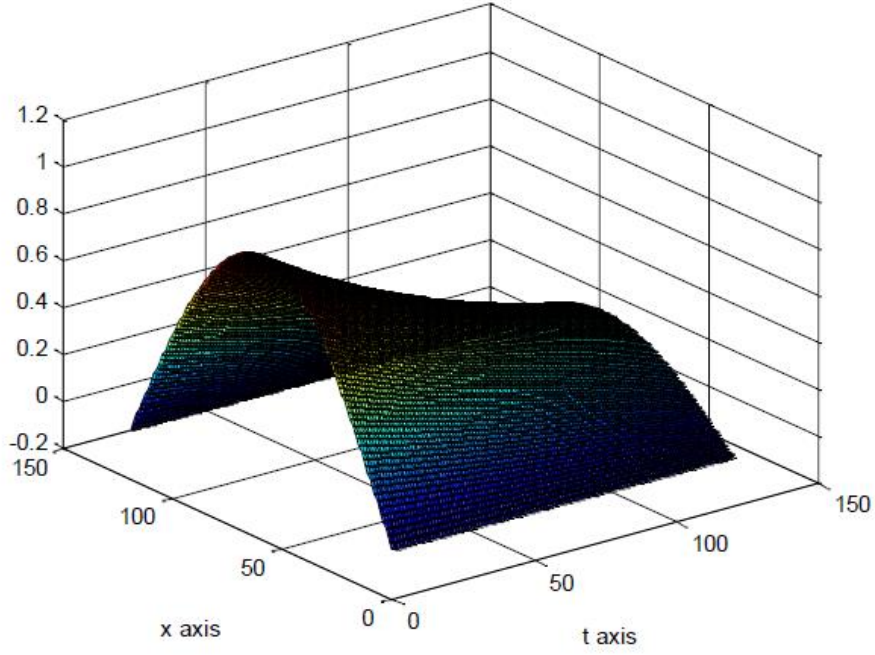
**Şekil 6.5** İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için tam çözüm



**Şekil 6.6** İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=30$ ,  $M=30$



Şekil 6.7 İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=60$ ,  $M=60$



Şekil 6.8 İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması için yaklaşık çözüm  $N=120$ ,  $M=120$

**Tablo 6.2.**  $t \in [n, n + 1]$   $n = 0, 1, 2, \dots$  için İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İçin Hatanın Karşılaştırılması

Yöntem	N=M=30	N=M=60	N=M=120
İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması	$4.5864 \times 10^{-4}$	$1.1212 \times 10^{-4}$	$2.7577 \times 10^{-5}$

Tablolardan da görüldüğü gibi ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları yöntemi birinci basamaktaki ile karşılaştırıldığında tam çözüme daha yakın sonuçlar vermektedir. İkinci basamaktan fark şeması yönteminde bulunan hata dörtte bir oranında azalırken birinci basamaktan fark şeması yönteminde bulunan hata yarıya düşmektedir. N ve M değerleri arttıkça her iki yöntemde de hata azalmaktadır.

## BÖLÜM 7

### SONUÇLAR

Bu çalışmada zaman gecikmeli lineer olmayan parabolik denklemler incelenmiştir.

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f(u(t), u(t-w)), t > 0 \\ u(t) = \varphi, -w \leq t \leq 0 \end{cases}$$

lineer olmayan zaman gecikmeli parabolik denklemin abstarct hali göz önüne alınarak tek sınırlı çözümün varlığı için gerekli koşulları belirleyen teorem verilmiştir.

Lineer olmayan parabolik gecikmeli denklemler için örnek problemler oluşturularak bu problemlerin analitik çözümleri üzerinde durulmuştur. Gecikme terimi sayesinde denklemler lineer denklemlere dönüştürülebildiğinden Fourier serileri ve değişkenlerine ayırma, Laplace ve Fourier dönüşümü metotları ile istenen çözümler elde edilebilmiştir.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = u(t,x) \cdot [u(t-1,x) \cdot \cos x - u_x(t-1,x) \cdot \sin x], t \geq 0, 0 < x < \pi \\ u(t,x) = e^{-t} \cdot \sin x, -1 \leq t \leq 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

denklemin için başlangıç ve sınır değer probleminin çözümü değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri metodu kullanılarak,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 2u(t,x) = u(t,x) \cdot [u(t-1,x) + u_x(t-1,x)], x, t \geq 0, \\ u(t,x) = e^{-t} e^{-x}, -1 \leq t \leq 0 \\ u(t,0) = e^{-t}, u_x(t,0) = -e^{-t}, t \geq 0 \end{cases}$$

gecikmeli lineer olmayan parabolik başlangıç ve sınır değer probleminin çözümü Laplace dönüşüm metodu ile

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = u(t,x)[u(t-1,x) - e^{-(t-1)}e^{-x^2}] - e^{-t}e^{-x^2} - (-2 + 4x^2)e^{-t}e^{-x^2}, x, t \geq 0, \\ u(t,x) = e^{-t} \cdot e^{-x^2}, -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

lineer olmayan gecikmeli parabolik denklem için başlangıç değer probleminin çözümü ise Fourier dönüşümü metodu kullanılarak bulunmuştur.

Bu tür metotların kullanılmasında bazı kısıtlamalar ile karşılaşıldığından, özellikle denklem değişken katsayılı ise genel olarak bu metotların kullanılmasında problemler ortaya çıktığından daha kullanışlı ve bu türdeki daha genel problemlere de uygulanabilen bir yöntem olan sonlu fark şemaları yöntemi kullanılmış ve yöntemin doğruluğu bir örnek verilerek hata analizi ile gösterilmiştir.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = u(t,x)[u(t-1,x)\cos x - u_x(t-1,x)\sin x], t \geq 0, 0 < x < \pi \\ u(t,x) = e^{-t}\sin x, -1 \leq t \leq 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

lineer olmayan gecikmeli parabolik denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak için sonlu fark yöntemi kullanılmıştır. Birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları oluşturularak elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümler arasındaki hata tablolar halinde verilmiştir.

## EKLER

### EK1. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İle Yaklaşık Çözümün Bulunduğu Matlab Programı

```
function burcuk(N,M)
h=pi/M; tau=1/N;
for j=1:M;
    for k=1:N+1;
a=-1/(h^2);
c=1/tau+2/(h^2)-cos(j*h)*exp(-(k-1-N)*tau)*sin(j*h)+sin(j*h)*(exp(-(k-1-
N)*tau)*sin((j+1)*h)-exp(-(k-1-N)*tau)*sin((j-1)*h))*1/(2*h);
b=-1/tau;
end;
end;
A=zeros(M+1,M+1);
A(M,1)=1;A(M+1,M+1)=1;
for j=1:M-1;
    for k=1:N+1;
        c=1/tau+2/(h^2)-cos(j*h)*exp(-(k-1-N)*tau)*sin(j*h)+sin(j*h)*(exp(-(k-1-
N)*tau)*sin((j+1)*h)-exp(-(k-1-N)*tau)*sin((j-1)*h))*1/(2*h);
A(j,j)=a;
A(j,j+1)=c;
A(j,j+2)=a;
end;
end;
A;
R=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M+1;
R(n,n)=1;
end;
B=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
```

```

B(n,n+1)=b;
end;
B;
fii=zeros(M+1,M+1) ;
G=inv(A);
for n=1:M+1; U(n,1)=sin((n-1)*h);
end;
for k=2:N+1; U(:,k)=-G*B*U(:,k-1);
end;
%%\%\%\%\%\%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE'\%\%\%\%\%\%\%\%\%
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(j,k)=exp(-t)*sin(x);
end;
end;
% ABSOLUTE DIFFERENCES ;
absdiff=max(max(abs(es-U)))
%GRAPH OF THE SOLUTION ;
figure; surf(U); title('first order accuracy for N=90 M=90');xlabel('t axis');
ylabel('x axis'); rotate3d ;
figure; surf(es); title('exact solution'); xlabel('t axis'); ylabel('x axis');rotate3d ;
%%\%\%\%\%\%\% END GRAPH %%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%
%%\%\%\%\%\%\%\%\%\% END GRAPH %%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%

```

## EK2. İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması İle Yaklaşık Çözümün Bulunduğu Matlab Programı

```

function burcus(N,M)
h=pi/M; tau=1/N;
A=zeros(M+1,M+1);
A(1,1)=1;A(2,M+1)=1;A(M,M)=-5;A(M,M-1)=4;A(M,M-2)=-1;A(M+1,2)=-
5;A(M+1,3)=4;A(M+1,4)=-1;
for j=1:M-3;
for k=1:N+1;
a=tau/(2*(h^4));
b=-1/(h^2)-2*tau/(h^4)+tau/(4*(h^2))*cos((j-1)*h)*sin((j-1)*h)*exp(-(k-1-N)*tau)-
tau/(8*(h^3))*sin((j-1)*h)*sin((j)*h)*exp(-(k-1-N)*tau)+tau/(8*(h^3))*sin((j-
1)*h)*sin((j-2)*h)*exp(-(k-1-N)*tau);
c=1/tau+2/(h^2)+3*tau/(h^4)-1/2*cos(j*h)*exp(-(k-N-
1)*tau)*sin(j*h)+1/(4*h)*sin((j+1)*h)*exp(-(k-N-1)*tau)*sin((j)*h)-1/(4*h)*exp(-(k-1-
N)*tau)*sin((j-1)*h)*sin(j*h)-tau/(2*(h^2))*exp(-(k-1-
N)*tau)*sin((j)*h)*cos((j)*h)+tau/(4*(h^3))*exp(-(k-1-N)*tau)*sin((j+1)*h)*sin((j)*h)-
tau/(4*(h^3))*exp(-(k-1-N)*tau)*sin((j-1)*h)*sin((j)*h);
d=-1/(h^2)-2*tau/(h^4)+tau/(4*(h^2))*cos((j+1)*h)*sin((j+1)*h)*exp(-(k-1-N)*tau)-
tau/(8*(h^3))*sin((j+1)*h)*sin((j+2)*h)*exp(-(k-1-
N)*tau)+tau/(8*(h^3))*sin((j+1)*h)*sin((j)*h)*exp(-(k-1-N)*tau);
A(j+2,j)=a;
A(j+2,j+1)=b;
A(j+2,j+2)=c;
A(j+2,j+3)=d;
A(j+2,j+4)=a;
end;
end;
A;
R=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M+1;

```

```

R(n,n)=1;
end;
B=zeros(M+1,M+1);
    for k=1:N+1;
for j=1:M-3;
    e=tau/(4*(h^2))*cos((j-1)*h)*sin((j-1)*h)*exp(-(k-2-N)*tau)-tau/(8*(h^3))*sin((j-1)*h)*sin((j)*h)*exp(-(k-2-N)*tau)+tau/(8*(h^3))*sin((j-1)*h)*sin((j-2)*h)*exp(-(k-2-N)*tau);

f=-1/tau-1/2*cos(j*h)*exp(-(k-2-N)*tau)*sin(j*h)+1/(4*h)*sin((j+1)*h)*exp(-(k-2-N)*tau)*sin((j)*h)-1/(4*h)*exp(-(k-2-N)*tau)*sin((j-1)*h)*sin(j*h)-tau/(2*(h^2))*exp(-(k-2-N)*tau)*sin((j)*h)*cos((j)*h)+tau/(4*(h^3))*exp(-(k-2-N)*tau)*sin((j+1)*h)*sin((j)*h)-tau/(4*(h^3))*exp(-(k-2-N)*tau)*sin((j-1)*h)*sin((j)*h);

g=tau/(4*(h^2))*cos((j+1)*h)*sin((j+1)*h)*exp(-(k-2-N)*tau)-tau/(8*(h^3))*sin((j+1)*h)*sin((j+2)*h)*exp(-(k-2-N)*tau)+tau/(8*(h^3))*sin((j+1)*h)*sin((j)*h)*exp(-(k-2-N)*tau);

B(j+2,j+1)=e;
B(j+2,j+2)=f;
B(j+2,j+3)=g;
end;
    end;
B;
fii=zeros(M+1,M+1) ;
G=inv(A);
for n=1:M+1; U(n,1)=sin((n-1)*h);
end;
for k=2:N+1; U(:,k)=-G*B*U(:,k-1);
end;
%%\%\%\%\%\%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE'\%\%\%\%\%\%\%\%
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;

```

```

t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(j,k)=exp(-t)*sin(x);
end;
end;
% ABSOLUTE DIFFERENCES ;
absdiff=max(max(abs(es-U)))
%GRAPH OF THE SOLUTION ;
figure; surf(U); title('first order accuracy for N=90 M=90');xlabel('t axis');
ylabel('x axis'); rotate3d ;
figure; surf(es); title('exact solution'); xlabel('t axis'); ylabel('x axis');rotate3d ;
%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%

```



## KAYNAKLAR

- [1] S. M. Ciupe, B. L. de Bivort, D. M. Bortz, P. W. Nelson, *Estimates of kinetic parameters from HIV patient data during primary infection through the eyes of three different models*, Math. Biosci... 2006 Mar, 200(1):1-27. Epub 2006 Feb 9.
- [2] P. W. Nelson, J. D. Murray, A. S. Perelson, *A model of HIV-1 pathogenesis that includes an intracellular delay*, Math. Biosci., 163:201–215, 2000.
- [3] K. Cooke, Y. Kuang, B. Li. *Analyses of an antiviral immune response model with time delays*, Canad. Appl. Math. Quart., 6(4):321–354, 1998.
- [4] T. Zhao. *Global periodic solutions for a differential delay system modeling a microbial population in the chemostat*, J. Math. Anal. Appl., 193:329–352, 1995.
- [5] P. Smolen, D. Baxter, J. Byrne, *A reduced model clarifies the role of feedback loops and time delays in the Drosophila circadian oscillator*, Biophys. J., 83:2349–2359, 2002.
- [6] K. L. Cooke, P. van den Driessche, X. Zou, *Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models*, J. Math. Biol., 39:332–352, 1999.
- [7] B. Vielle, G. Chauvet, *Delay equation analysis of human respiratory stability*, Math. Biosci., 152(2):105–122, 1998.
- [8] M. Villasana, A. Radunskaya, *A delay differential equation model for tumor growth*, J. Math. Biol., 47(3):270–294, 2003.
- [9] S. A. Campbell, R. Edwards, P. van den Driessche, *Delayed coupling between two neural network loops*, SIAM J. Appl. Math., 65(1):316–335, 2004.
- [10] P. Turchin, *Rarity of density dependence or population regulation with lags*, Nature, 344:660–663, 1990.
- [11] P. Turchin, A. D. Taylor, *Complex dynamics in ecological time series*, Ecology, 73:289–305, 1992.

- [12] A. Ashyralyev, H. Akca, *"On difference schemes for semilinear delay differential equations with constant delay"*, *Proceeding of the Conference TSU: Actual Problems of Applied Mathematics*, Physics and Eng.. Ashgabat, pp.18-27, 1999.
- [13] A. Ashyralyev, H. Akca, U. Guray. *"Second order of accuracy difference scheme for approximate solutions of delay differential equations"*, *Functional Differential Equations*, vol. 6, no.3-4, pp. 223-231, 1999.
- [14] A. F. Yenicierioglu, *"The behavior of solutions of second order delay differential equations"*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 332, no. 2, pp. 1278-1290, 2007.
- [15] S. Mohamad, H. Akca, V. Covachev, *"Discrete-time Cohen-Grossberg neural networks with transmission delays and impulses"*, *Differential and Difference Equations and Applications Book Series: Tatra Mountains Mathematical Publications*, vol. 43, pp. 145-161, 2009.
- [16] A. N. Al-Mutib, *"Stability properties of numerical methods for solving delay differential equations"*, *J. Comput. and Appl. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 71-79, 1984.
- [17] A. Bellen, Z. Jackiewicz, M. Zennaro, *"Stability analysis of one-step methods for neutral delay-differential equations"*, *Numer. Math.*, vol. 52, no. 6, pp. 605-619, 1988.
- [18] L. Torelli, *"Stability of numerical methods for delay differential equations"*, *J. Comput. And Appl. Math.*, vol. 25, pp. 15-26, 1989.
- [19] A. Ashyralyev, H. Akca, *"Stability estimates of difference schemes for neutral delay differential equations"*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, vol. 44, no. 4, pp. 443-452, 2001.
- [20] A. Ashyralyev, H. Akca, A. F. Yenicierioglu, *"Stability properties of difference schemes for neutral differential equations"*, *Differential Equations and Applications*, vol. 3, pp. 57-66, 2003.
- [21] A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhauser Verlag: Basel, Boston, Berlin, 2004.

- [22] J.H. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [23] B. Li, M. Bohner, F. Meng, *Periodic solutions of functional dynamic equations with infinite delay*, *Nonlinear Anal.* 68 (2008) 1226-1245.
- [24] D.Y. Xu, S.Y. Li, X.P. Zhou, Z.L. Pu, *Invariant set and stable region of a class of partial differential equations with time delays*, *Nonlinear Anal.. Real World Appl.* 2 (2001) 161-169.
- [25] C.C. Travis, G.F. Webb, *Existence and stability for partial functional differential equations*, *Tran. Amer. Math. Soc.* 200 (1974) 395-418.
- [26] V. Wolfgang, *Nonlinear parabolic differential-functional inequalities with boundary-functional conditions*, *Beitrge Anal.* 18 (1981) 85-89.
- [27] Y. Liang, T.J. Xiao, *Solvability of the Cauchy problem for infinite delay equations*, *Nonlinear Anal.* 58 (2004) 271297.
- [28] J.A. Ferreira, *Energy estimates for delay diffusion-reaction equations*, *J. Comput. Math.* 26 (4) (2008) 536-553.
- [29] X. Lu, *Combined iterative methods for numerical solutions of parabolic problems with time delays*, *Appl. Math. Comput.* 89, pp. 213 -224, 1998.
- [30] Wei Gu, Peng Wang, *A Crank-Nicolson Difference Scheme for Solving a Type of Variable Coefficient Delay Partial Differential Equations*, *Journal of Applied Mathematics*, Volume 2014, Article ID 560567, 6 pages, 2014.
- [31] J.Wiener, L. Debnath, *Partial Differential Equations with Piecewise Constant Delay*, *Internat. J. Math. & Math. Sci.* Vol. 14 No. 3, 485-496, 1991.
- [32] A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii , *Abstract and Applied Analysis*, Volume 6 (2001), Issue 5, Pages 267-297, *On the stability of the linear delay differential and difference equations*, *Abstract and Applied Analysis*, 2001.
- [33] Leonid Berezansky, Elena Braverman, *J. Math. Anal. Appl. On stability of some linear and nonlinear delay differential equations*, 314, 391–411, 2006.

- [34] Ali Fuat Yenicierioglu, Salih Yalcinbas, *Applied Mathematics and Computation, On the Stability of the Second Order Delay Differential Equations with Variable Coefficients*, 152 (2004) 667–673, 2004.
- [35] A. Ashyralyev, D. Agirseven, *Stability of Parabolic Equations with Unbounded Operators Acting on Delay Terms*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014 (2014), No. 160, pp. 1-13.
- [36] A. Ashyralyev, D. Agirseven, *On source identification problem for a delay parabolic equation*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol 19, No 3, pp.335-349, 2014.
- [37] A. Ashyralyev, D. Agirseven, *Stability of Delay Parabolic Difference Equations*, Filomat, 28:5 (2014), 995–1006,2014.
- [38] Ashyralyev and Agirseven: *Well-posedness of delay parabolic equations with unbounded operators acting on delay terms*, Boundary Value Problems 2014, 2014:126
- [39] Ashyralyev and Agirseven: *Well-posedness of delay parabolic difference equations. Advances in Difference Equations* 2014, 2014:18.
- [40] A. Ashyralyev, D. Agirseven, *On Convergence of Difference Schemes for Delay Parabolic Equations*, Computers and Mathematics with Applications, 66(7), 1232-1244.
- [41] Deniz Agirseven, *Approximate Solutions of Delay Parabolic Equations with the Dirichlet Condition*, Abstract And Applied Analysis (2012) Article Number: 682752.
- [42] J. Fourier, *The Analytical Theory of Heat (transl. by A. Freeman)*, New York: Dover Publications, Inc., 1955.
- [43] Prof. Dr. Mehmet Çağlıyan, Prof. Dr. Okay Çelebi, *Kısmi Diferensiyel Denklemler*, Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı, Yayın no 196, Vipaş a.ş., yayın no 72, Bursa, 2002.
- [44] G. Doetsch, *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transform*, Springer-Verlag, 1970.

- [45] G. Doetsch, *Guide to the Applications of Laplace Transforms*, Van Nostrand Co., 1963.
- [46] Joel L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [47] P.P.G. Dyke, *An Introduction to Laplace Transform and Fourier Series*, Springer-Verlag, Great Britain, 3rd printing 2004.
- [48] Alemdar Hasanođlu Hasanov, *Kısmi türevli Diferansiyel Denklemler*, Literatür Yayınları, İstanbul, 2010.
- [49] Prof. Dr. Yaşar Pala, *Modern Uygulamalı Diferensiyel Denklemler*, Nobel Yayınevi, Ankara, 2006.
- [50] Ronald N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 3.rd edition, 1999
- [51] R.J. Beerends, H.G. ter Morsche, J.C. van den Berg, E.M. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, Netherlands, 2003.

## ÖZGEÇMİŞ

Burcu Ceylan  
Taşköprü Köyü/ no:14  
Babaeski, Kırklareli  
(0288) 563 92 89 – 0506 387 72 42  
E-mail : brc.cyln@hotmail.com

### KİŞİSEL BİLGİLER

Doğum Tarihi 03.04.1990  
Doğum Yeri Kırklareli  
Medeni Durum Bekar

### EĞİTİM BİLGİLERİ

09.2008- 06.2012 Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli  
Lisans, Matematik Bölümü  
09.2004- 06.2008 Babaeski Anadolu Lisesi, Kırklareli

### İŞ DENEYİMİ

09.2015-06.2015 Atatürk Ortaokulu, Havsa  
Matematik Öğretmeni  
09.2013- 05.2015 Fen Bilimleri Dershanesi, Babaeski  
Matematik Öğretmeni  
08.2012- 12.2012 Bizim Dershane, Babaeski  
Matematik Öğretmeni

### SEMİNER ve KURSLAR

Pedagojik Formasyon Sertifika Programı, 2012, Kocaeli Üniversitesi

### BİLGİSAYAR BİLGİSİ

Microsoft Office Programları,  
Algoritma Kurma, C++,  
Visual Basic, Matlab, Fortran

## **TEZ ÖĞRENCİSİNE AİT TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER**

16 Th International Conference Computational And Mathematical Methods In Science And Engineering (CMMSE-2016/6-7 Temmuz,İspanya ) konferansına sözlü sunum yapmak üzere kabul edilmiştir. Bounded Solutions of Nonlinear Parabolic Equations with Time Delay başlığı ile konferansın proceeding bölümünde basılıp makale haline getirilecektir.

