T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İKİ BOYUTLU YÜZEYLERİN PEDALLARININ KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Engin AS
(10210506)

Tezin Savuma Tarihi : 22/01/2016

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Engin AS Tarafından Hazırlanan

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İKİ BOYUTLU YÜZEYLERİN PEDALLARININ KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 22/01/2016 tarihinde yapılan sınav ile DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU**
Gelişim Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL**
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Prof. Dr. Ayhan TUTAR
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Zuhal ÜNAN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

.../…/….

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bana tez konumu veren ve çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL'e ve çalışmalarım boyunca gösterdiği manevi destek için eşim Burcu AS'a ve her zaman beni destekleyen aileme teşekkür ederim.

Ocak 2016 Engin AS

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR

$\boldsymbol{E^3}$	**:** 3-boyutlu Öklid uzayı
$\boldsymbol{E^4}$	**:** 4- boyutlu Öklid uzayı
$\boldsymbol{T_M(P)}$	**:** M yüzeyinin P noktasındaki tanjant uzayı
$\boldsymbol{T_M^{\perp}(P)}$	**:** M yüzeyinin P noktasındaki normal uzayı
$\boldsymbol{K}$	**:** Gauss eğriliği
$\boldsymbol{K_n}$	**:** Gauss torsiyonu
$\boldsymbol{H}$	**:** Ortalama eğriliği
$\boldsymbol{\Gamma_{ij}^k}$	**:** II. tipten Christoffel sembolleri
$\boldsymbol{g_{ij}}$	**:** I. temel formunun katsayıları
$\boldsymbol{c_{ij}^k}$	**:** II. temel formunun katsayıları
$\boldsymbol{b_{ij}^k}$	**:** III. temel formunun katsayıları
2-d	**:** 2-boyutlu
3-d	**:** 3-boyutlu

DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İKİ BOYUTLU YÜZEYLERİN PEDALLARININ KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde tezin amacı ve literatür özeti verildi.

Genel bilgiler bölümünde diferensiyel geometriden bazı temel kavramlara yer verildi.

Materyal ve Metod bölümü iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, dört boyutlu Öklid uzayında iki boyutlu yüzeylerle ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verildi. İkinci bölümde ise üç boyutlu Öklid uzayında pedal yüzeyleri tanımlanarak, bazı karakteristik özellikleri verildi.

Dördüncü bölüm çalışmamızın orijinal kısmını meydana getirmektedir. Bu bölümde, dört boyutlu Öklid uzayında parametre eğrileri eğrilik çizgisi olan iki boyutlu bir M yüzeyinin $\overline{M}$ pedal yüzeyi incelendi. İlk olarak, M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin birinci, ikinci ve üçüncü temel formlarının katsayıları, Gauss eğrilikleri, ortalama eğrilikleri ve ortalama eğrilik vektörleri arasındaki bağıntılar elde edildi. Ayrıca, M yüzeyinin destek fonksiyonlarının sabit olması halinde aynı karakteristik özellikler tekrar ele alındı. Daha sonra, Aminov ve Monge tipindeki yüzeylerin pedal yüzeyleri bulundu. Aynı zamanda parametre eğrileri eğrilik çizgisi olan bir Aminov yüzeyin pedalının bir eğri olduğu görüldü. Son olarak da bazı özel yüzeylerin pedalları hesaplandı ve Maple 17 programında paralel ve perspektif izdüşüm kullanılarak bu yüzeyler çizildi.

Anahtar Kelimeler: Pedal yüzeyi, Destek fonksiyonu, Aminov yüzeyi, Gauss eğriliği, Gauss torsiyonu, Ortalama eğrilik, Temel formlar, II. tipten Christoffel sembolleri.

THE SOME CHARACTERISTIC PROPERTIES OF PEDALS OF 2-D SURFACES IN 4-D EUCLIDEAN SPACE

ABSTRACT

This study consists of seven chapters.

In Introduction chapter, the purpose of thesis and the summary of literature are given.

In General Information chapter, the basic concepts in differential geometry are given.

The Material and Methods chapter consists of two subsections. In the first section, some definitions and theorems about two dimensional (2-d) surfaces in the four-dimensional Euclidean space are given. In the second section, the pedal surfaces are defined in the three-dimensional Euclidean space and some characteristic properties of them are given.

The orginal part of our study is the fourth chapter. This section, pedal surface $\overline{M}$ of a 2-d surface M, the parameter lines of M are the lines of curvatures, is investigated in E^4. Firstly, the relations between coefficients of the first, the second and the third fundamental forms, Gauss curvatures, the mean curvatures and the mean curvature vectors of M and $\overline{M}$ are found. Also, it is dealed with the some properties in case M is a surface with the constant support function. Then, the pedal surfaces of Aminov and Monge surfaces are given. Furthermore, we proved that pedal of all Aminov surfaces, the parameter lines of them are the lines of curvatures, is a curve. Finally, we draw some special surfaces and pedals of them by using parallel and perspective projection on the Maple 17 software package programing.

Key Words: Pedal surface, Support function, Aminov surface, Gauss curvatures, Gauss torsion, Mean curvatures, Fundamental forms, Christoffel symbols of the second kind.

1. GİRİŞ

Üç boyutlu Öklid uzayında yüzeylerin diferensiyel geometrisiyle ilgili birçok çalışma yer almaktadır. Bunlardan bir tanesi üç boyutlu Öklid uzayında pedal yüzeylerdir. Bu çalışmada dört boyutlu Öklid uzayında iki boyutlu yüzeylerin pedallarının karakteristik özelliklerinin nasıl değişeceği sorusundan yola çıkarak E^4'te iki boyutlu yüzeylerin pedallarının karakteristik özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, esas yüzeylerin destek fonksiyonlarının sabit olması halinde bu karakteristik özellikler tekrar ele alınmıştır.

1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, ilk olarak dört boyutlu Öklid uzayı E^4'te iki boyutlu bir yüzeyin pedal yüzeyini tanımlamak ve pedal ile esas yüzeyin dayanak (destek) fonksiyonları, Gauss eğrilikleri, ortalama eğrilikleri ve birinci, ikinci ve üçüncü temel formlarının katsayıları arasındaki ilişkiyi incelemektir. İkinci olarak, esas yüzeyinin destek fonksiyonlarının sabit olması halinde bu yüzeylerin karakteristik özelliklerini yeniden ele almaktır. Ayrıca, E^4'te iki boyutlu bazı özel yüzeylerin pedallarının özelliklerini incelemektir.

1.2 Literatür Araştırması

n-boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey $(n-1)$-boyutlu bir alt manifold olup, literatürde hiperyüzeylerin geometrisi ile ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur. Buna karşın dört boyutlu uzayda iki boyutlu yüzeylerin geometrisine ilişkin çalışmalar oldukça yeni olup, son zamanlarda matematikçiler tarafından yaygın bir şekilde çalışılmaktadır [1-6]. Örneğin; Aminov ve Szajewska 2004'te yayımladıkları makalede [1], dört boyutlu Öklid uzayı E^4'te kapalı formda verilen iki boyutlu yüzeylerin Gauss torsiyonunu ve Gauss eğriliklerini incelemişlerdir. Diğer taraftan, Ganchev ve Milousheva [4], dört boyutlu Öklid uzayında iki boyutlu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerini incelemişler ve minimal yüzeylerin Gauss ve normal konneksiyonunun eğriliklerini araştırmışlardır [5]. Bulca ve Arslan [2], dört boyutlu Öklid uzayında Monge gösterimiyle verilen iki boyutlu yüzeylerin ortalama eğrilik vektörlerini, Gauss eğriliklerini ve Gauss torsiyonlarını hesaplamışlardır. Aynı zamanda bu yüzeylerin öteleme yüzeyler olması halinde bazı sonuçlar vermişlerdir. Aynı çalışmada Aminov yüzeylerin ortalama eğriliklerini, ortalama eğrilik vektörlerini, Gauss eğriliklerini ve Gauss torsiyonlarını da incelemişlerdir.

Üç boyutlu Öklid uzayında verilen bir yüzeyin pedalı literatürde sıklıkla ele alınan bir konudur [7-16]. 1983'te Georgiou ve diğ. [8], E^{n+1}'de verilen bir hiperyüzeyin pedalının eğriliklerini ve temel formlarını incelemişlerdir. 1986'da ise Kuruoğlu [12], E^3'te regüler bir yüzey ile bu yüzeyin pedalının Gauss ve ortalama eğriliklerini ve temel formlarının katsayıları arasındaki bağıntıları incelemiştir. Daha sonra Kuruoğlu ve Sarıoğlugil [13], E^3'te regüler bir yüzeyin a-pedal yüzeyini tanımlamış ve bu yüzeylerin destek fonksiyonları, Gauss eğrilikleri, ortalama eğrilikleri, alan elementleri ve I., II., ve III. temel formlarının katsayıları ile ilgili bazı bağıntılar elde etmişlerdir.

Sarıoğlugil, Kuruoğlu ve Çalışkan [15], konveks ve düzlemsel bir kapalı eğrinin pedal eğrisini tanımlamış ve bu eğrilerin destek fonksiyonları ile eğrilikleri arasındaki bağıntıları elde etmişlerdir. Ayrıca, aynı çalışmada pedal eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamışlardır. 1998'de Kuruoğlu ve Sarıoğlugil [14], E^{n+1}'de sabit destek fonksiyonlu regüler bir hiperyüzeyin a-pedal hiperyüzeyini tanımlayarak bu hiperyüzeylerin bazı karakteristik özelliklerini karşılaştırmışlardır. 2005'te ise Kasap, Sarıoğlugil ve Kuruoğlu [10] üç boyutlu Öklid uzayında açılabilir regle yüzeylerin pedalını incelemiş ve pedal koni yüzeyini tanımlamışlardır.

Kılıç ve Keleş [11], E^3'te $\pi : M \to \overline{M}$ dönüşümü yardımıyla M yüzeyinin pedalı olan $\overline{M}$ yüzeyinin Weingarten dönüşümünü ve temel formlarını incelemişlerdir. Baranova [7], dairesel eliptik pedal yüzeyleri tanımlamış ve bu yüzeylerin parametrik denklemlerini elde etmiştir. Ayrıca düzlemde seçilen bir P noktasının pozisyonuna göre dairesel eliptik pedal yüzeyleri sınıflandırmıştır. Soliman ve diğ. [16], $\mathbb{R}^{n+1}$'de pedal hiperyüzeylerin Gauss dönüşümünü incelemişler ve bu dönüşüme karşılık gelen jakobien matrisinin rankına göre pedal hiperyüzeyleri sınıflandırmışlardır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Afin Uzay ve Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. A boştan farklı bir küme ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$\begin{aligned} f \ &: A\, x\, A \to V \\ &(P,Q) \to f(P,Q) = \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

fonksiyonu varsa A'ya V ile birleşen bir **afin uzay** denir.

$A_1 : \forall\ P,Q,R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$,

$A_2 : \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [17].

Tanım 2.1.2. V reel vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P_0, P_1, P_2, ..., P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V reel vektör uzayının bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ kümesine A afin uzayında başlangıç noktası P_0 olan bir **afin çatı** denir [17].

Tanım 2.1.3. A bir afin uzay ve $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ A nın bir afin çatısı olsun. $P = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_i &: A \to \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le n \\ P &\to x_i(P) = a_i \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesine A afin uzayında başlangıç noktası P_0 olan bir $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ afin çatısına göre bir **afin koordinat sistemi** adı verilir [17].

Tanım 2.1.4. V, n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay ise A afin uzayına n-boyutlu bir **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [17].

Tanım 2.1.5. E^n, n-boyutlu Öklid uzayı olsun. $P_0, P_1, P_2, ..., P_n \in E^n$ olmak üzere, $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi E^n ile birleşen iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisine E^n'nin bir **dik çatısı** veya **Öklid çatısı** denir [17].

Tanım 2.1.6. E^n'de bir P noktası E^n'deki $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ standart Öklid çatısına göre

$$\overrightarrow{E_0P} = \sum_{i=1}^{n} P_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

biçiminde yazılır. O halde

$$\begin{aligned} x_i : E^n &\to \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le n \\ P &\to x_i(P) = P_i \end{aligned}$$

olarak alınırsa $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n-lisine E^n'de **Öklid koordinat sistemi** denir [17].

2.2 Topolojik Manifoldlar

Tanım 2.2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X kümesinin alt kümelerinin bir koleksiyonu τ olsun. I bir indeks kümesi olmak üzere aşağıdaki önermeleri sağlayan τ koleksiyonuna X üzerinde bir **topoloji** denir.

T1) $X, \emptyset \in \tau$

T2) $\forall A_1, A_2 \in \tau$ için $A_1 \cap A_2 \in \tau$

T3) $\forall A_i \in \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Bir X kümesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir **topolojik uzay** denir [17].

Tanım 2.2.2. X ve Y topolojik iki uzay olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli, f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna X'den Y'ye bir **homeomorfizm** denir [17].

Tanım 2.2.3. X bir topolojik uzay olsun. P ve Q, X 'in farklı iki noktası olmak üzere P ve Q noktalarının $A_P \cap A_Q = \varnothing$ olacak şekilde A_P ve A_Q komşulukları varsa X topolojik uzayına bir **Hausdorff uzayı** denir [17].

Tanım 2.2.4. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler sağlanıyor ise M topolojik uzayına **n-boyutlu topolojik manifold** adı verilir.

M1) M bir Hausdorff uzayıdır.

M2) M 'nin her bir açık alt kümesi E^n 'ye veya E^n 'nin bir açık alt kümesine homeomorftur.

M3) M sayılabilir çoklukta açık alt kümelerle örtülebilir [17].

Tanım 2.2.5. E^n 'de açık bir alt küme U olmak üzere $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun k. mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna C^k **sınıfından diferensiyellenebilirdir** denir [17].

Tanım 2.2.6. E^n 'nin iki açık alt kümesi U ve V olsun. Bir $\varphi : U \to V$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise, φ fonksiyonuna C^k**-sınıfından diffeomorfizm** adı verilir [17].

(D1) $\varphi \in C^k\left(U,V\right)$

(D2) $\varphi^{-1} : V \to U$ var ve $\varphi^{-1} \in C^k\left(V,U\right)$.

Tanım 2.2.7. M bir manifold ve başlangıç noktası $P \in M$ olan bir $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ vektörü verildiğinde, $\left(P,\vec{v}\right)$ ikilisine M 'nin P noktasındaki **tanjant vektörü** denir ve $\overrightarrow{v_p}$ ile gösterilir. M 'nin P noktasındaki bütün tanjant vektörlerinin kümesi $T_M\left(P\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \oplus : T_M(P) \times T_M(P) &\to T_M(P) \\ \left(\vec{v}_P,\ \vec{u}_P\right) &\to \vec{v}_P + \vec{u}_P = \left(P, \vec{v} + \vec{u}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_M(P) &\to T_M(P) \\ \left(\lambda,\ \vec{v}_P\right) &\to \lambda\vec{v}_P = \left(P, \lambda\vec{v}\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\oplus$, $\odot$ işlemleri ile birlikte $\{T_M(P),\oplus,\mathbb{R},+,\cdot,\odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya, M manifoldunun P noktasındaki **tanjant uzayı** denir [17].

Tanım 2.2.8. M bir manifold ve $P \in M$ noktasının bir komşuluğu V olmak üzere

$$X : V \to \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

şeklinde tanımlanan X fonksiyonu için $\pi \circ X = I : V \to V$ olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{P \in V} T_V(P) \to V$$

dönüşümü bulunabiliyorsa, X fonksiyonuna V üzerinde bir **vektör alanı** denir. M üzerindeki bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.2.9. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere, $\chi(M)$ üzerinde

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlı ise, M manifolduna bir **Riemann manifoldu** ve $\langle , \rangle$ fonksiyonuna M üzerinde **Riemann metriği veya metrik tensör** adı verilir [18].

Tanım 2.2.10. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

fonksiyonu,

1- 2-lineer
2- Simetrik
3- $\forall X \in \chi(M)$; $\langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0$,

aksiyomlarını sağlıyorsa M manifolduna **yarı-Riemann manifoldu** adı verilir [18].

Tanım 2.2.11. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, \; Y) \to D(X,Y) = D_X Y$$

ile tanımlı bir D fonksiyonu $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $\forall f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için,

1- $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z,$

2- $D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$

özelliklerini sağlıyorsa, D'ye M manifoldu üzerinde bir **afin konneksiyon** ve D_X 'e de X 'e göre **kovaryant türev operatörü** denir [18].

Tanım 2.2.12. M bir Riemann manifoldu ve M 'nin bir U koordinat komşuluğunda lokal koordinat fonksiyonları yardımıyla tanımlanan baz vektör alanlarının kümesi

$$\psi = \{X_1, X_{2,} ..., X_n\}$$

ve

$$\langle X_i, X_j \rangle = g_{ij},\ 1 \leq i,j \leq n$$

olsun. $\langle , \rangle$ metrik tensörünün ψ bazına göre matrisi $g = [g_{ij}]$ ve $\langle , \rangle$ bir iç çarpım fonksiyonu olduğundan regüler olup g^{-1} vardır. g^{-1}'in bileşenleri $g^{-1} = (g^{-1})_{ij}$ ve M üzerinde bir afin konneksiyon D olsun.

$$D_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k \tag{2.1}$$

olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^k : U \xrightarrow{C^{\infty}} \mathbb{R}$$

fonksiyonlarına D'nin **ikinci tipten Christoffel sembolleri** denir ve $g^{kr} = \left(g^{-1}\right)_{kr}$ ve $1 \leq i,j,k,r \leq n$ için

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right)$$

[19].

Tanım 2.2.13. M bir yarı-Riemann manifoldu ve D de M üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere

1- D, C^{∞} sınıfından,

2- M 'nin bir A bölgesi üzerinde C^{∞} olan her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$X_P \langle Y,Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle\big|_P + \langle Y, D_X Z \rangle\big|_P,\ \forall P \in A \text{ ve}$$

$$D_X Y - D_Y X = [X,Y]$$

ise D konneksiyonuna, M üzerinde bir **Riemann konneksiyonu** ve D_X 'e de X 'e göre **Riemann anlamında kovaryant türev operatörü** denir [18].

Tanım 2.2.14. M, n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $f: M \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$\nabla = grad : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \to \chi(M)$$

$$f \quad \to \nabla f = grad(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

biçiminde tanımlanan operatöre M üzerinde **gradient operatörü** denir [17].

Tanım 2.2.15. M, n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $f: M \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere

$$div : \chi(M) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

$$f \quad \to div(X) = \langle \nabla, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

biçiminde tanımlanan operatöre M üzerinde **divergens operatörü** denir [17].

Tanım 2.2.16. M, n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $f: M \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\Delta : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

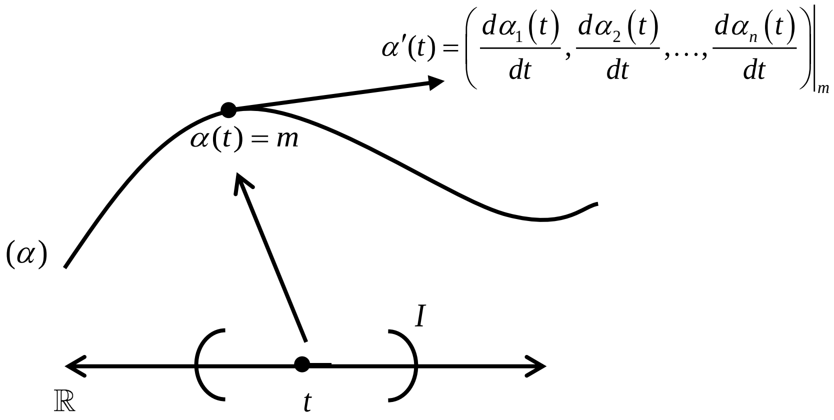
$$f \quad \to \Delta(f) = div(gradf)$$

biçiminde tanımlanan operatöre M üzerinde **Laplace operatörü** denir [20].

2.3 Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.3.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere; $\alpha : I \to E^n$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna n-boyutlu Öklid uzayında bir **eğri** denir [21].

Tanım 2.3.2. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ fonksiyonun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ olmak üzere $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}\Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right)$ tanjant vektörüne α eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t) = m$ noktasındaki **hız vektörü** denir [21].



Şekil 2.1. E^n ’deki bir α eğrisinin hız vektörü

Tanım 2.3.3. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ eğrisi verilsin. α eğrisinin $m \in \alpha$ noktasında α ’nın hız vektörlerini içine alan $T_\alpha(m)$ vektör uzayına α **eğrisinin** $m \in \alpha$ **noktasındaki tanjant uzayı** denir. $m \in \alpha$ seçilmiş bir nokta olmak üzere E^n ’nin $T_\alpha(m)$ ile birleşen alt afin uzayına da α eğrisinin $m \in \alpha$ noktasındaki **teğet doğrusu** denir [21].

Tanım 2.3.4. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\|\alpha'\| : I \to \mathbb{R}$, $\|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$ şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna **skalar hız fonksiyonu**, $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hızı** denir [21].

Tanım 2.3.5. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine **birim hızlı bir eğri,** $s \in I$ parametresine de **yay parametresi** denir [21].

Tanım 2.3.6. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ eğrisine **regülerdir** denir [22].

Tanım 2.3.7. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ eğrisi için

$$\begin{aligned} \alpha' : \alpha \quad &\to \bigcup_{\forall m \in \alpha} T_\alpha(m) \\ m = \alpha(t) &\to \alpha'(t) \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alırsak

$$\pi : \bigcup_{\forall m \in \alpha} T_\alpha(m) \quad \to \alpha$$
$$\alpha'(t) \to m = \alpha(t)$$

olmak üzere

$$\pi \circ \alpha' = I_\alpha : \alpha \xrightarrow{\text{özdeşlik}} \alpha$$

olduğundan α', α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. α' vektör alanına α **eğrisinin teğet vektör alanı** denir [17].

Tanım 2.3.8. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ bir eğri, $\psi = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$, $r < n$, sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere ψ 'den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, α eğrisinin **Serret-Frenet r-ayaklı alanı** ve $m \in \alpha$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye $m \in \alpha$ noktasındaki **Serret-Frenet r-ayaklısı** denir. Her bir, V_i, $1 \le i \le r$, vektörüne de **Serret-Frenet vektörü** adı verilir [17].

Tanım 2.3.9. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olmak üzere

$$k_i : I \to \mathbb{R} \quad , \quad 1 \le i < r$$
$$s \to k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \right\rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin **i-yinci eğrilik fonksiyonu**, $k_i(s) \in IR$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **i-yinci eğriliği** denir.

Özel olarak $n = 3$ olması halinde k_1 ve k_2 eğriliklerine, sırasıyla, α eğrisinin **eğriliği** ve **burulması** denir [17].

Tanım 2.3.10. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^3$, eğriliği k_1, burulması k_2 ve Frenet 3-ayaklısı $\{t, n, b\}$ olan birim hızlı bir eğri olmak üzere

$$\begin{cases} t' = k_1 n \\ n' = -k_1 t + k_2 b \\ b' = -k_2 n \end{cases}$$

denklemlerine eğrinin **Serret-Frenet formülleri** denir [17].

Tanım 2.3.11. E^n, n-boyutlu Öklid uzayı ve U da E^n'de bir açık alt küme olsun. $\forall P \in M$ için $\nabla\varphi|_P \neq 0$ ve $c = sbt.$ olmak üzere

$$M = \{\forall x \in U \subset E^n \mid \varphi : U \xrightarrow{dif.bilir} \mathbb{R},\ \varphi(x) = c\}$$

ile tanımlanan boş olmayan bir M kümesine, E^n'de $(n-1)$-boyutlu bir **yüzey** veya **$(n$-$1)$-yüzey** denir. E^2'de $1-$yüzey **düzlemsel eğri**, E^3'de $2-$yüzey **yüzey**, E^n'de $(n-1)-$yüzey $n > 3$ olması halinde **hiperyüzey olarak** isimlendirilir [18].

Tanım 2.3.12. M, E^n'de bir hiperyüzey olsun. $(\chi(M))^{\perp}$ uzayının bir ortonormal bazı $\{N\}$ ise N'ye M hiperyüzeyinin **birim normal vektör alanı** denir [18].

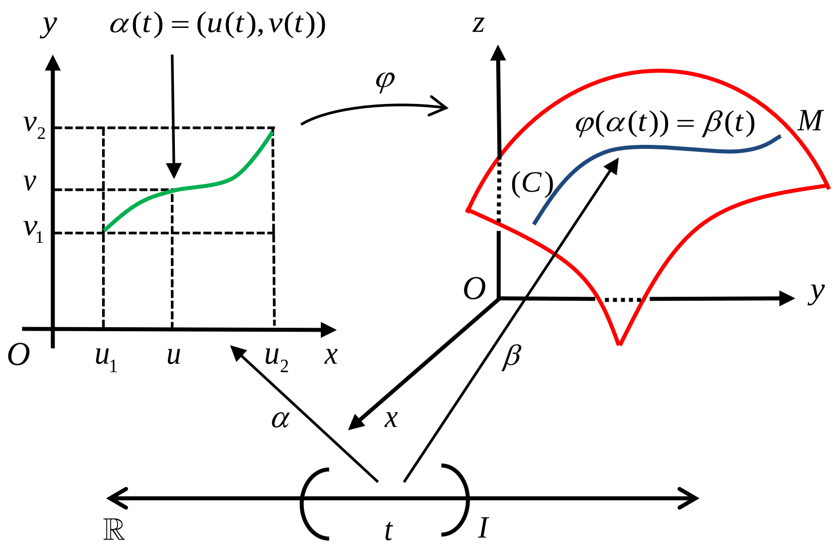
Tanım 2.3.13. $M = \{P = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U \subset E^n \mid \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = c = sbt\}$ hiperyüzeyi verilsin.

$$(C) \ ......\ \alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$$

eğrisi için

$$\beta = \varphi \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \to M \subset E^n$$
$$t \to \beta(t) = \varphi(\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$$

eğrisine M **hiperyüzeyi üzerinde bir eğri** adı verilir [23]. Özel olarak $n = 3$ için bir M yüzeyi üzerindeki bir eğriyi şekil üzerinde görelim:

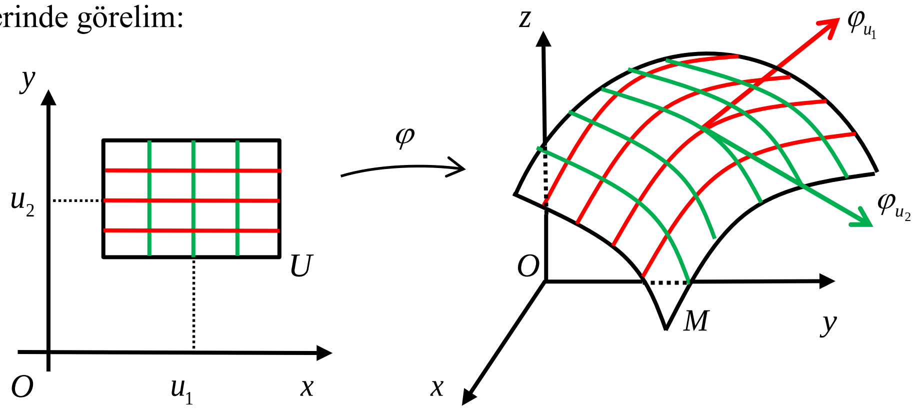


Şekil 2.2. E^3'te bir M yüzeyi üzerinde bir eğri

Tanım 2.3.14. E^n'de bir hiperyüzey M ve M hiperyüzeyinin parametrik denklemi de $(u_1,...,u_i,...u_{n-1}) \in U \subset E^{n-1}$ olmak üzere

$$\varphi(u_1,...,u_i,...u_{n-1}) = (\varphi_1(u_1,...,u_i,...u_{n-1}),...,\varphi_n(u_1,...,u_i,...u_{n-1}))$$

olsun. i-yinci u_i-parametresi hariç diğer parametreler sabit olarak alınırsa φ fonksiyonu bir tek u_i-parametresine bağlı olur. Bu ise M hiperyüzeyi üzerinde bir eğri tanımlar. Bu eğriye **i-yinci parametre eğrisi** veya kısaca u_i **-parametre eğrisi** adı verilir [23]. Özel olarak, $n=3$ için M yüzeyinin parametre eğrilerini bir şekil üzerinde görelim:



Şekil 2.3. E^3'te bir M yüzeyinin parametre eğrileri

Tanım 2.3.15. $f: U \subset E^{n-1} \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $(u_1,u_2,...,u_{n-1}) \in U$ olmak üzere

$$M = \{(u_1,u_2,...,u_{n-1}, f(u_1,u_2,...,u_{n-1})) : (u_1,u_2,...,u_{n-1}) \in U\}$$

eşitliğiyle belirli M kümesine E^n'de **Monge parametrizasyonu ile verilmiş bir hiperyüzey** denir. Özel olarak, $n=3$ için E^3'te Monge parametrizasyonu ile verilmiş bir M yüzeyi

$$M = \{(u_1,u_2, f(u_1,u_2)) : (u_1,u_2) \in U\}$$

şeklindedir. $f_1 : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{dif.bilir} \mathbb{R}$ ve $g_1 : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{dif.bilir} \mathbb{R}$, C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonları için $f_1 : U \subset E^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(u_1,u_2) = f_1(u_1) + g_1(u_2)$ şeklinde yazılabiliyorsa M yüzeyine E^3'te **öteleme yüzeyi** denir [23].

Tanım 2.3.16. M, E^n'de bir hiperyüzey ve p, M hiperyüzeyi üzerinde bir nokta olsun. E^n'de bir v_p tanjant vektörü, p noktasından geçen ve M hiperyüzeyi üzerinde bulunan bir eğrinin p noktasındaki hız vektörü ise v_p tanjant vektörüne M hiperyüzeyinin bir **teğet vektörü** denir [21].

Tanım 2.3.17. M, E^n'de bir hiperyüzey ve birim normal vektör alanı N olsun. E^n'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere her $X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} S : \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ X &\rightarrow S(X) = D_X N \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya **Weingarten dönüşümü** denir. Şekil operatörü lineer bir dönüşümdür [18].

Tanım 2.3.18. M, E^n'de şekil operatörü S olan bir hiperyüzey ve E^n'nin Riemann konneksiyonunu D olsun. $\forall X, Y \in \chi(M) \subset \chi(E^n)$ için

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N$$

biçiminde tanımlanan $\overline{D}$ operatörüne M üzerinde **Gauss anlamında kovaryant türev operatörü** ve bu eşitliğe de **Gauss denklemi** denir [18].

Tanım 2.3.19. M, E^n'de bir hiperyüzey olsun. M'nin bir P noktasındaki şekil operatörüne karşılık gelen matris $S(P)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} K : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan K fonksiyonuna M hiperyüzeyinin **Gauss eğrilik fonksiyonu** ve $K(P)$ değerine de M hiperyüzeyinin P noktasındaki **Gauss eğriliği** denir [18].

Tanım 2.3.20. E^n'de bir hiperyüzey M olsun. M'nin bir P noktasındaki şekil operatörüne karşılık gelen matris $S(P)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} H : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = izS(P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan H fonksiyonuna M'nin **ortalama eğrilik fonksiyonu** ve $H(P)$ değerine de M hiperyüzeyinin P noktasındaki **ortalama eğriliği** denir [18].

Tanım 2.3.21. E^n'de bir hiperyüzey M ve M'nin şekil operatörü S olsun. M'nin

P noktasına karşılık gelen $S(P)$ 'nin karakteristik değerleri M 'nin bu noktadaki **asli eğrilikleri,** asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denilen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M 'nin bu noktadaki **asli eğrilik doğrultuları** denir [18].

Tanım 2.3.22. E^n 'de bir hiperyüzey M ve M 'nin şekil operatörü S olsun. M üzerinde $\alpha : I \to M$ eğrisinin T teğet vektör alanı S 'nin karakteristik vektörü ise α eğrisine M üzerinde bir **eğrilik çizgisi** denir [18].

Teorem 2.3.23. E^n 'de bir M hiperyüzeyinin bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P), k_2(P), ..., k_{n-1}(P)$ ise

$$K(P) = \prod_{i=1}^{n-1} k_i(P) = k_1(P).k_2(P)....k_{n-1}(P)$$

dir [18].

Teorem 2.3.24. E^n 'de bir M hiperyüzeyinin bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P), k_2(P), ..., k_{n-1}(P)$ ise

$$H(P) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(P)$$

dir [18].

Tanım 2.3.25. E^n 'de bir M hiperyüzeyi için $1 \le q \le n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I^q : \chi(M) \times \chi(M) &\to C^\infty(M, \mathbb{R}), \\ (X\,,\ Y) &\to I^q(X,Y) = \left\langle S^{q-1}(X), Y \right\rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna M hiperyüzeyi üzerinde **q. temel form** adı verilir [18].

Teorem 2.3.26. E^3 'te $X = X(u,v)$ parametrik ifadesi ile verilen bir yüzey M olsun. M yüzeyinin I. temel formunun katsayıları g_{11}, g_{12}, g_{22}, II. temel formunun katsayıları c_{11}, c_{12}, c_{22} ve III. temel formunun katsayıları b_{11}, b_{12}, b_{22} olmak üzere

$$\begin{cases} g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle \\ g_{12} = \langle X_u, X_v \rangle \\ g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle \end{cases}, \quad \begin{cases} c_{11} = -\langle X_{uu}, N \rangle \\ c_{12} = -\langle X_{uv}, N \rangle \\ c_{22} = -\langle X_{vv}, N \rangle \end{cases}, \quad \begin{cases} b_{11} = \langle N_u, N_u \rangle \\ b_{12} = \langle N_u, N_v \rangle \\ b_{22} = \langle N_v, N_v \rangle \end{cases}$$

şeklindedir [19].

Teorem 2.3.27. M, E^3'te $X=X(u,v)$ parametrik ifadesi ile verilen bir yüzey olsun. M'nin parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması durumunda

$$\begin{cases} S(X_u)=k_1X_u \\ S(X_v)=k_2X_v \end{cases}$$

bağıntısı vardır [18].

Teorem 2.3.28. M, E^3'te $X=X(u,v)$ parametrik ifadesi ile verilen bir yüzey olsun. M'nin parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması durumunda M'nin k_1 ve k_2 asli eğrilikleri

$$k_1=\frac{c_{11}}{g_{11}}\ ,\quad k_2=\frac{c_{22}}{g_{22}}$$

şeklindedir [19].

Teorem 2.3.29. M, E^3'te $X=X(u,v)$ parametrik ifadesi ile verilen bir yüzey olmak üzere M yüzeyinin w alan elementi ve Γ_{ij}^k ikinci tipten Christoffel sembolleri

$$w=\sqrt{g_{11}g_{22}-\left(g_{12}\right)^2} \qquad \textbf{(2.2)}$$

ve

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1=\dfrac{g_{22}(g_{11})_u-2g_{12}(g_{12})_u+g_{12}(g_{11})_v}{2w^2} \\ \Gamma_{12}^1=\dfrac{g_{22}(g_{11})_v-g_{12}(g_{22})_u}{2w^2} \\ \Gamma_{22}^1=\dfrac{2g_{22}(g_{12})_v-g_{22}(g_{22})_u-g_{12}(g_{22})_v}{2w^2} \\ \Gamma_{11}^2=\dfrac{2g_{11}(g_{12})_u-g_{11}(g_{11})_v-g_{12}(g_{12})_u}{2w^2} \\ \Gamma_{12}^2=\dfrac{g_{11}(g_{22})_u-g_{12}(g_{11})_v}{2w^2} \\ \Gamma_{22}^2=\dfrac{g_{11}(g_{22})_v-2g_{12}(g_{12})_v+g_{12}(g_{22})_u}{2w^2} \end{cases} \qquad \textbf{(2.3)}$$

şeklindedir [24].

Teorem 2.3.30. M , E^3 'te parametre eğrileri eğrilik çizgisi olan bir yüzey olmak üzere M 'nin ikinci tipten Christoffel sembolleri

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \dfrac{(g_{11})_u}{2g_{11}}, \ \Gamma_{12}^1 = \dfrac{(g_{11})_v}{2g_{11}}, \ \Gamma_{22}^1 = \dfrac{-(g_{22})_u}{2g_{11}} \\ \Gamma_{11}^2 = \dfrac{-(g_{11})_v}{2g_{22}}, \ \Gamma_{12}^2 = \dfrac{(g_{22})_u}{2g_{22}}, \ \Gamma_{22}^2 = \dfrac{(g_{22})_v}{2g_{22}} \end{cases} \tag{2.4}$$

şeklindedir [24].

3. MATERYAL VE METOD

3.1 Dört Boyutlu Öklid Uzayında İki Boyutlu Yüzeyler

M , E^4'te $X = X(u,v)$ parametrik gösterimiyle verilen iki boyutlu bir regüler yüzey olsun. M'nin keyfi bir P noktasındaki tanjant uzayı $T_M(P)$ ve $T_M(P)$ tanjant uzayının dik tümleyeni $T_M^{\perp}(P)$ olmak üzere $T_{E^4}(P) = T_M(P) \oplus T_M^{\perp}(P)$ şeklindedir. M yüzeyinin birim normal çatı alanı N_1 ve N_2, teğet vektör alanı X_u ve X_v olmak üzere $T_M(P) = Sp\{X_u, X_v\}$ ve $T_M^{\perp}(P) = Sp\{N_1, N_2\}$. O halde E^4'te $\{X_u, X_v, N_1, N_2\}$ dörtlüsü için; E^4'te Riemann konneksiyonu $\overline{D}$, M üzerinde Riemann konneksiyonu D olmak üzere

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{X_u} X_u &= X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v - c_{11}^1 N_1 - c_{11}^2 N_2, \\
\overline{D}_{X_u} X_v &= X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v - c_{12}^1 N_1 - c_{12}^2 N_2, \\
\overline{D}_{X_v} X_v &= X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v - c_{22}^1 N_1 - c_{22}^2 N_2
\end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindedir. (2.1) den

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{X_u} X_u &= X_{uu} = D_{X_u} X_u - c_{11}^1 N_1 - c_{11}^2 N_2, \\
\overline{D}_{X_u} X_v &= X_{uv} = D_{X_u} X_v - c_{12}^1 N_1 - c_{12}^2 N_2, \\
\overline{D}_{X_v} X_v &= X_{vv} = D_{X_v} X_v - c_{22}^1 N_1 - c_{22}^2 N_2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
h(X_u, X_u) &= c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2, \\
h(X_u, X_v) &= c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2, \\
h(X_v, X_v) &= c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ve X_u ve X_v teğet vektör alanları $X_1 = X_u$ ve $X_2 = X_v$ olarak alınırsa (3.2) ve (3.3) ifadesi

$$h(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{2} c_{ij}^k N_k, \quad 1 \le i, j \le 2 \tag{3.4}$$

$$\overline{D}_{X_i} X_j = D_{X_i} X_j - h(X_i, X_j) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılır. (3.5) denklemine Gauss denklemi denir. Burada

$$h:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi^{\perp}(M)$$

şeklinde tanımlanan h dönüşümü ikinci temel tensör dönüşümüdür. Bu dönüşüm simetrik ve bilineerdir. c_{ij}^{k} katsayıları da ikinci temel formun katsayılarıdır.

M 'nin $\{N_1, N_2\}$ ortonormal normal çatı alanı için şekil operatörü S olsun. $X_i \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &S:\chi^{\perp}(M)\times\chi(M)\to\chi(M) \\ &\qquad (N_i\ ,\ X_i)\to S_{N_i}X_i = -(\overline{D}_{X_i}N_i)^T \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklindedir. Burada $(\ )^T$ ifadesi teğet bileşen manasına gelmektedir. (3.4) ve (3.5) ifadelerinden

$$\left\langle S_{N_k}X_i, X_j\right\rangle = \left\langle h(X_i, X_j), N_k\right\rangle = c_{ij}^{k}, \quad 1\le i,j,k\le 2 \tag{3.7}$$

yazılabilir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği, Gauss torsiyonu, ortalama eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla, K, K_N, H ve $\overrightarrow{H}$ olmak üzere

$$K = \frac{1}{w^2}\sum_{k=1}^{2}(c_{11}^{k}c_{22}^{k} - (c_{12}^{k})^2) \tag{3.8}$$

$$K_N = \frac{1}{w^2}[g_{11}(c_{12}^{1}c_{22}^{2} - c_{12}^{2}c_{22}^{1}) - g_{12}(c_{11}^{1}c_{22}^{1} - c_{11}^{2}c_{22}^{1}) + g_{22}(c_{11}^{1}c_{12}^{2} - c_{11}^{2}c_{12}^{1})] \tag{3.9}$$

$$H = \frac{1}{2w^2}\sum_{k=1}^{2}(g_{22}c_{11}^{k} + g_{11}c_{22}^{k} - 2g_{12}c_{12}^{k}) \tag{3.10}$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{2w^2}\sum_{k=1}^{2}(c_{11}^{k}g_{22} + g_{11}c_{22}^{k} - 2g_{12}c_{12}^{k})N_k \tag{3.11}$$

biçimindedir. Özel olarak, M yüzeyinin parametre eğrileri eğrilik çizgisi ise M yüzeyinin Gauss eğriliği, Gauss torsiyonu, ortalama eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü, sırasıyla

$$K = \frac{1}{w^2}\sum_{k=1}^{2}c_{11}^{k}c_{22}^{k} \tag{3.12}$$

$$K_N = 0 \tag{3.13}$$

$$H = \frac{1}{2w^2}\sum_{k=1}^{2}(g_{22}c_{11}^{k} + g_{11}c_{22}^{k}) \tag{3.14}$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{2w^2}\sum_{k=1}^{2}(g_{22}c_{11}^{k} + g_{11}c_{22}^{k})N_k \tag{3.15}$$

şeklindedir [2,3,25,26].

Tanım 3.1.1. M, E^4'te $X = X(u,v)$ parametrik ifadesi ile verilmiş bir yüzey, $f: U \subset E^2 \xrightarrow{dif.bilir} \mathbb{R}$ ve $g: U \subset E^2 \xrightarrow{dif.bilir} \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$X(u,v) = (u, v, f(u,v), g(u,v)) \tag{3.16}$$

eşitliğiyle belirli M yüzeyine E^4'te **Monge parametrizasyonu ile verilen iki boyutlu bir yüzey** denir [2].

Teorem 3.1.2. M, E^4'te Monge parametrizasyonu ile verilen iki boyutlu bir yüzey olsun. O halde M nin ortalama eğrilik vektörü

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H} = {} & \frac{1}{2\sqrt{A}w^2}\left[g_{22} f_{uu} - 2g_{12} f_{uv} + g_{11} f_{vv}\right] N_1 + \frac{1}{2\sqrt{A}w^3}\left[g_{22}(-Bf_{uu} + Ag_{uu})\right. \\ & \left. -2g_{12}(-Bf_{uv} + Ag_{uv}) + g_{11}(-Bf_{vv} + Ag_{vv})\right] N_2 .\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{cases} A = 1 + f_u^2 + f_v^2 \\ B = f_u g_u + f_v g_v , \\ C = 1 + g_u^2 + g_v^2 \end{cases} \quad \begin{cases} E = 1 + f_u^2 + g_u^2 \\ F = f_u f_v + g_u g_v , \\ G = 1 + f_v^2 + g_v^2 \end{cases} \quad w = \sqrt{AC - B^2}$$

dır [2].

Teorem 3.1.3. M, E^4'te Monge parametrizasyonu ile verilen iki boyutlu bir yüzey olmak üzere M yüzeyinin Gauss eğriliği ve Gauss torsiyonu, sırasıyla

$$K = \frac{C(f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2) - B(f_{uu} g_{vv} - g_{uu} f_{vv} - 2 f_{uv} g_{uv}) + A(g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2)}{w^4}$$

$$K_N = \frac{E(f_{uv} g_{vv} - g_{uv} f_{vv}) - F(f_{uu} g_{vv} - g_{uu} f_{vv}) + G(f_{uu} g_{uv} - g_{uu} f_{uv})}{w^4}$$

dir [26].

Önerme 3.1.4. M, E^4'te

$$X(u,v) = (u, v, f(u,v), g(u,v))$$

Monge parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olmak üzere

$$\begin{cases} f(u,v) = X_u(u,v) \\ g(u,v) = X_v(u,v) \end{cases}$$

ise $K_N = K$ [2].

Tanım 3.1.5. M , E^4'te

$$X(u,v)=(u,v,\,f(u,v),g(u,v))$$

Monge parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. $f_3, f_4 : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{dif.bilir} \mathbb{R}$ ve $g_3, g_4 : J \subset \mathbb{R} \xrightarrow{dif.bilir} \mathbb{R}$, C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} f(u,v)=f_3(u)+g_3(v) \\ g(u,v)=f_4(u)+g_4(v) \end{cases} \qquad \textbf{(3.17)}$$

ise M yüzeyine E^4'te bir **öteleme (translation) yüzeyi** denir [2].

Teorem 3.1.6. M , E^4'te bir öteleme yüzeyi olsun. O halde M yüzeyinin Gauss eğriliği, Gauss torsiyonu ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla,

$$K=\frac{f_3''(u)g_3''(v)C-(f_3''(u)g_4''(v)+f_4''(u)g_3''(v))B+f_4''(u)g_4''(v)A}{w^4}$$

$$K_N=\frac{g_{12}(f_4''(u)g_3''(v)-f_3''(u)g_4''(v))}{w^4}$$

$$\overrightarrow{H}=\frac{f_3''(u)g_{22}+g_3''(v)g_{11}}{2w^2\sqrt{A}}N_1$$
$$+\frac{(f_4''(u)A-f_3''(u)B)g_{22}+(g_4''(v)A-g_3''(v)B)g_{11}}{2w^3\sqrt{A}}N_2$$

dir [2].

Tanım 3.1.7. M , E^4'te

$$X(u,v)=(u,v,\,f(u,v),g(u,v))$$

Monge parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. Eğer

$$\begin{cases} f(u,v)=r(u)\cos v \\ g(u,v)=r(u)\sin v \end{cases} \qquad \textbf{(3.18)}$$

ise M yüzeyine E^4'te bir **Aminov yüzeyi** denir [2].

Teorem 3.1.8. M , E^4'te bir Aminov yüzeyi olmak üzere M yüzeyinin Gauss eğriliği, Gauss torsiyonu ve ortalama eğrilik vektörü, sırasıyla

$$K=-\frac{r(u)r''(u)(1+r^2(u))+(r'(u))^2(1+\left(r'(u)\right)^2)}{(1+r^2(u))^2(1+\left(r'(u)\right)^2)^2}$$

$$K_N = \frac{r'(u)r''(u)(1+r^2(u)) + r(u)r'(u)(1+\left(r'(u)\right)^2)}{(1+r^2(u))^2(1+\left(r'(u)\right)^2)^2}$$

$$\overrightarrow{H} = \frac{r''(u)g_{22} - r(u)g_{11}}{2w^2\sqrt{A}}\left\{\cos vN_1 + \frac{A\sin v - B\cos v}{w}N_2\right\}$$

dir [2].

Teorem 3.1.9. M , E^4 'te bir Aminov yüzeyi olmak üzere M yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{r''(u)(1+r^2(u)) - r(u)(1+\left(r'(u)\right)^2)}{2(1+r^2(u))(1+\left(r'(u)\right)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dir [2].

Sonuç 3.1.10. M , E^4 'te bir Aminov yüzeyi olsun. M minimal bir yüzey ise

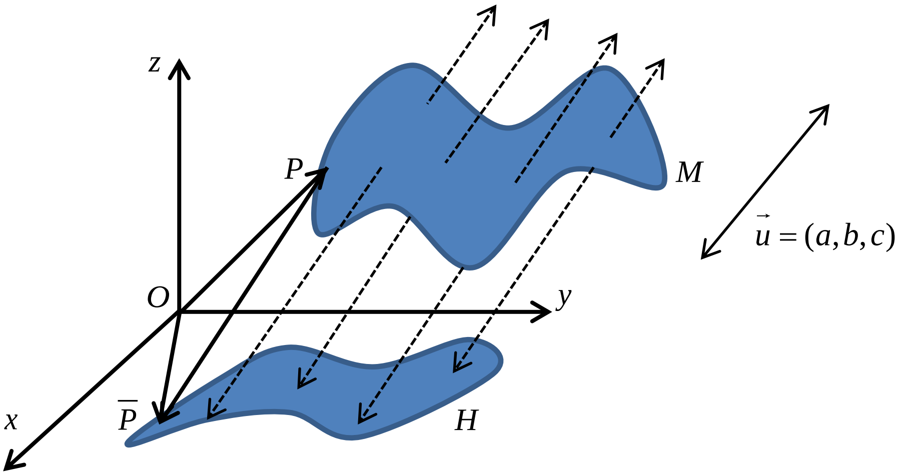
$$r(u) = \frac{1}{2a}(a^2 e^{\pm 2\frac{(a+b)}{a}} + a^2 - 1)e^{\pm\frac{(a+b)}{a}}$$

dir [2].

Yüksek boyutlu uzaylarda yüzeylerin geometrisi çalışılırken karşılaşılan önemli sorunlardan bir tanesi yüzey grafiklerinin çizilmesidir. Bu yüzden, yüzey grafiklerinin çizilmesi düşük boyutlu uzaylarda mümkündür. Bu nedenle, yüzey denkleminin düşük boyutlu uzaylara indirgenmesi gerekir. Yüksek boyutlu uzaylarda yüzeylerin grafiğinin düşük boyutlu uzaylarda çizilebilmesi için izdüşüm adı verilen dönüşümlere gereksinim vardır. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1.11. Üç boyutlu bir uzayda bir yüzeyin iki boyutlu uzaydaki görüntüsüne **yüzeyin izdüşümü** denir. Genel olarak izdüşüm, n-boyutlu uzaydaki bir hiperyüzeyin m-boyutlu uzaydaki görüntüsüdür $(m < n)$.

Üç boyutlu bir uzayda, bir M yüzeyinin üzerindeki noktalardan geçen ve verilen bir u doğrultusuna paralel olan doğruların düzlemle arakesit noktalarının geometrik yerine yüzeyin düzlem üzerindeki **paralel izdüşümü** denir (3d-2d paralel izdüşüm) [27].



Şekil 3.1. E^3 'te bir M yüzeyinin paralel izdüşümü

M yüzeyi üzerindeki $P=(x,y,z)\in M$ noktalarının $x\circ y$ düzlemi üzerindeki izdüşüm noktaları $\overline{P}=(\overline{x},\overline{y},0)\in H$ olmak üzere Şekil 3.1 den

$$O\overline{P}=OP+P\overline{P},$$

$$O\overline{P}=OP+\lambda u,$$

$$(\overline{x},\overline{y},0)=(x,y,z)+\lambda(a,b,c)$$

yazılır. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{cases}\overline{x}=x+\lambda a\\ \overline{y}=y+\lambda b\end{cases},\quad \lambda=-\frac{z}{c}\quad (c\neq 0)$$

bulunur. Bu durumda M yüzeyinin u doğrultusu boyunca paralel izdüşümü

$$(x,y,z)\rightarrow\left(\frac{xc-az}{c},\frac{yc-bz}{c}\right)$$

ile temsil edilir. Özel olarak, u doğrultusu yerine $z=(0,0,1)$ doğrultusu alınırsa M yüzeyinin z ekseni boyunca paralel izdüşümü

$$(x,y,z)\rightarrow(x,y)$$

şeklinde bulunur. Yani, yüzeyin noktalarından z koordinatı kaldırılarak elde edilir.

Eğer, izdüşüm ışınlarının merkezi z ekseni üzerinde ve orjinden pz kadar uzaklıkta ise o zaman yüzeyin $z=0$ düzlemi üzerindeki izdüşümü

$$(x,y,z)\rightarrow\left(\frac{x.pz}{pz-z},\frac{y.pz}{pz-z}\right)$$

şeklinde bulunur. Bu izdüşüme **perspektif izdüşüm** (3d-2d perspektif izdüşüm) denir [27].

Benzer şekilde, dört boyutlu uzaydaki bir yüzeyin üç boyutlu uzay üzerindeki paralel izdüşümü veya perspektif izdüşümü alınabilir. O halde dört boyutlu uzayda bir yüzeyin $w=0$ hiperdüzlemi üzerindeki paralel ve perspektif izdüşümleri

4d-3d paralel izdüşüm: $(x,y,z,w)\to(x,y,z)$ **(3.19)**

4d-3d perspektif izdüşüm: $(x,y,z,w)\to\left(\frac{x.pw}{pw-w},\frac{y.pw}{pw-w},\frac{z.pw}{pw-w}\right)$ **(3.20)**

şeklindedir [27].

Bu çalışmada, dört boyutlu Öklid uzayında verilen yüzey örnekleri ve pedalları paralel veya perspektif izdüşüm kullanılarak Maple programında çizilmiştir.

3.2 Üç Boyutlu Öklid Uzayında Pedal Yüzeyleri

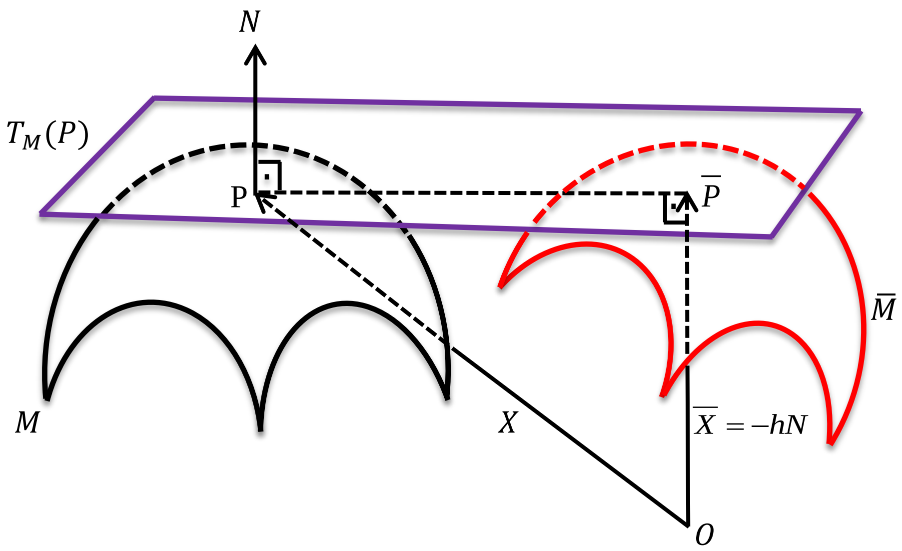
M, E^3'te $X=X(u,v)$ parametrik ifadesi ile verilen kapalı ve regüler bir yüzey olsun. M yüzeyinin O orjin noktasına göre $P\in M$ noktasındaki pozisyon vektörü X ve birim normal vektörü N olmak üzere O orjin noktasına göre pozisyon vektörü

$$\overline{X}=-hN \quad \textbf{(3.21)}$$

olan yüzeye M'nin **pedal yüzeyi** denir. Burada h, M yüzeyinin $P\in M$ noktasındaki destek fonksiyonu

$$h=-\langle X,N\rangle \quad \textbf{(3.22)}$$

şeklinde tanımlanır [12].



Şekil 3.2. E^3'te Pedal yüzeyi

Şekil 3.2 den de görülebileceği gibi bir M yüzeyinin pedalı, O orjin noktasından M yüzeyinin teğet düzlemine indirilen dikme ayaklarının geometrik yeri olarak açıklanabilir. Bu çalışmada M yüzeyinin pedal yüzeyi $\overline{M}$ ile gösterilecektir.

$\overline{M}$ pedal yüzeyinin birim normali $\overline{N}$ olsun. Bu durumda $\overline{M}$'nin birim normali

$$\overline{N} = \frac{\overline{X}_i \wedge \overline{X}_j}{\left\| \overline{X}_i \wedge \overline{X}_j \right\|}.$$

Burada $\overline{X}_i$ ve $\overline{X}_j$, sırasıyla, u ve v parametrelerine göre kısmi türevleridir. Aynı zamanda $\overline{M}$ pedal yüzeyinin $\overline{P} \in \overline{M}$ noktasındaki destek fonksiyonu $\overline{h}$ ise

$$\overline{h} = -\left\langle \overline{X}, \overline{N} \right\rangle.$$

Bu son eşitlikte (3.21) yerine yazılırsa, M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin destek fonksiyonları

$$\overline{h} = h\left\langle N, \overline{N} \right\rangle$$

şeklindedir. Diğer taraftan (3.21) deki $\overline{X}$ pozisyon vektörünün u ve v parametrelerine göre türevleri alınırsa

$$\overline{X}_i = -h_i N - hN_i, \quad i = u, v$$

bulunur. O halde X pozisyon vektörü

$$X = -hN - \sum_{i,k} b^{ik} h_i N_k, \quad i,k = u,v \qquad \textbf{(3.23)}$$

olarak ifade edilebilir. Burada, (b^{ik}), M'nin üçüncü temel formu olan $III = (b_{ik})$'nın invers (ters) tensörüdür [12]. Ayrıca, M'nin üçüncü temel formunun katsayıları b_{ij} $(1 \le i, j \le 2)$ olmak üzere, üçüncü temel forma göre, $\overset{III}{\nabla}\left(h,h\right)$ ikinci Beltrami operatörü

$$\overset{III}{\nabla}\left(h,h\right) = \frac{h_i^2 b_{22} + h_j^2 b_{11} - 2h_i h_j b_{12}}{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}, \quad i = u, \quad j = v \qquad \textbf{(3.24)}$$

şeklindedir [28]. Bu durumda (3.23) ve (3.24) ten

$$\rho^2 = h^2 + \overset{III}{\nabla}(h,h)$$

yazılabilir. Burada ρ, X pozisyon vektörünün uzunluğudur [12].

Teorem 3.2.1. $\overline{M}$ pedal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları $\overline{g}_{ij}$ $(1 \le i, j \le 2)$ olsun. Bu durumda,

$$\overline{g}_{11} = h_i^2 + h^2 b_{11}$$
$$\overline{g}_{12} = h_i h_j + h^2 b_{12} \qquad i = u, \quad j = v$$
$$\overline{g}_{22} = h_j^2 + h^2 b_{22}$$

dir [12].

Sonuç 3.2.2. $\overline{M}$ pedal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları $\overline{g}_{ij}$ $(1 \le i, j \le 2)$, M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları ve Gauss eğriliği, sırasıyla, g_{ij} ve K olmak üzere

$$\overline{g}_{11}\overline{g}_{22} - (\overline{g}_{12})^2 = \rho^2 h^2 (b_{11}b_{22} - (b_{12})^2)$$

veya

$$\overline{g}_{11}\overline{g}_{22} - (\overline{g}_{12})^2 = \rho^2 h^2 K^2 (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2)$$

dir [12].

Teorem 3.2.3. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin destek fonksiyonları, sırasıyla, h ve $\overline{h}$ olmak üzere, h ve $\overline{h}$ arasındaki bağıntı

$$\overline{h} = \frac{h^2}{\rho}$$

şeklindedir [12].

Teorem 3.2.4. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin ikinci temel formlarının katsayıları, sırasıyla, c_{ij} ve $\overline{c}_{ij}$ $(1 \le i, j \le 2)$ olmak üzere c_{ij} ve $\overline{c}_{ij}$ katsayıları arasında

$$\overline{c}_{11} = \frac{1}{\rho h}(-h^2 c_{11} + 2h\overline{g}_{11}),$$
$$\overline{c}_{12} = \overline{c}_{21} = \frac{1}{\rho h}(-h^2 c_{12} + 2h\overline{g}_{12}),$$
$$\overline{c}_{22} = \frac{1}{\rho h}(-h^2 c_{22} + 2h\overline{g}_{22})$$

bağıntısı vardır [12].

Sonuç 3.2.5. $\overline{M}$ pedal yüzeyinin birinci ve ikinci temel formu, sırasıyla, $\overline{I}$ ve $\overline{II}$, M 'nin ikinci temel formu II ise

$$\overline{II} = \frac{1}{\rho h}(-h^2 II + 2h\overline{I})$$

dir [12].

Sonuç 3.2.6. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin ortalama eğrilikleri, sırasıyla, H ve $\overline{H}$ olsun. Bu durumda ortalama eğrilikleri arasında

$$\overline{H} = \frac{1}{2\rho^2 hK}(4\rho^2 hK - \overset{II}{\nabla}(h,h) - 2h^2 H)$$

bağıntısı vardır [12].

Sonuç 3.2.7. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin Gauss eğrilikleri, sırasıyla, K ve $\overline{K}$ olsun. Bu durumda Gauss eğrilikleri arasında

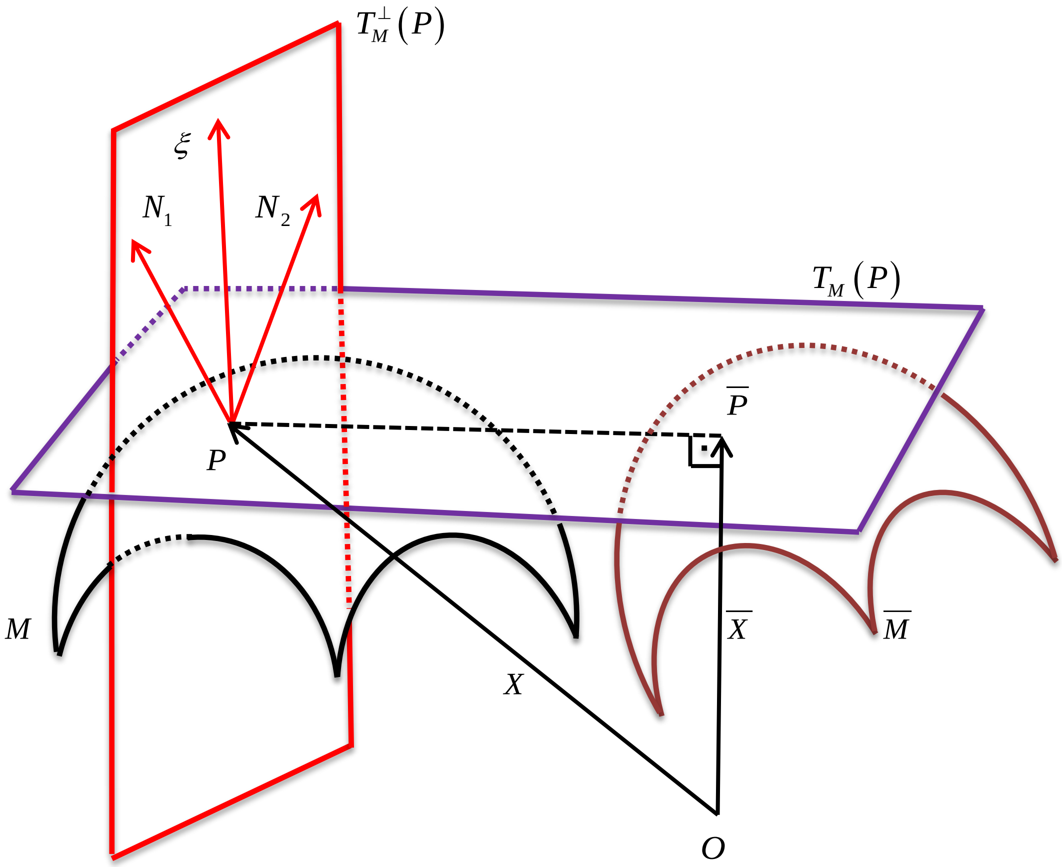
$$\overline{K} = \frac{1}{\rho^2 h^2 K^2}(4h^2K^2 + \frac{h^2K}{\rho^2} - \frac{2hK}{\rho^2}\overset{II}{\nabla}(h,h) - \frac{4h^3HK}{\rho^2})$$

bağıntısı vardır [12].

4. BULGULAR

4.1 Dört Boyutlu Öklid Uzayında İki Boyutlu Yüzeylerin Pedallarının Karakteristik Özellikleri

M, E^4'te $X = X(u,v)$ parametrik ifadesi ile verilen iki boyutlu regüler bir yüzey olsun. M yüzeyinin birim normal çatı alanı N_1 ve N_2, teğet vektör alanı X_u ve X_v olmak üzere M'nin bir P noktasındaki tanjant uzayı ve normal uzayı, sırasıyla, $T_M(P) = Sp\{X_u, X_v\}$ ve $T_M^{\perp}(P) = Sp\{N_1, N_2\}$ olsun.



Şekil 4.1. Dört boyutlu Öklid uzayında iki boyutlu pedal yüzeyi

Şimdi, E^4'te O orjin noktasına göre iki boyutlu bir yüzeyin pedalının denklemini araştıralım. $N_1, N_2 \in T_M^{\perp}(P)$ olduğundan $\overline{X} \in T_M^{\perp}(P)$ vektörü

$$\overline{X} = \langle \overline{X}, N_1 \rangle N_1 + \langle \overline{X}, N_2 \rangle N_2$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 4.1 den $\overline{X}$ vektörü için

$$\overline{X} = X + P\overline{P}$$

yazılır. Ayrıca $P\overline{P} \in T_M(P)$ olup, $P\overline{P} \perp N_1$ ve $P\overline{P} \perp N_2$. O halde $\overline{X}$ vektörü

$$\overline{X} = \langle X, N_1 \rangle N_1 + \langle X, N_2 \rangle N_2$$

olarak yazılır. Diğer taraftan, $h_1 = -\langle X, N_1 \rangle$ ve $h_2 = -\langle X, N_2 \rangle$ ile gösterilirse M nin pedal yüzeyinin pozisyon vektörü

$$\overline{X} = -h_1 N_1 - h_2 N_2 \tag{4.1}$$

olarak elde edilir. Burada h_1 ve h_2 M nin destek fonksiyonlarıdır. O halde M üzerindeki bütün P noktalarına karşılık gelen bütün $\overline{P}$ noktalarının geometrik yeri M nin pedal yüzeyini oluşturur ve $\overline{M}$ ile gösterilir.

M yüzeyi parametre eğrileri eğrilik çizgisi olan bir yüzey olsun. Bu durumda

$$\langle X_u, X_v \rangle = 0. \tag{4.2}$$

Çalışmamız boyunca, M yüzeyi, parametre eğrileri eğrilik çizgisi olan bir yüzey olarak ele alınacaktır.

$\overline{X}$ pozisyon vektörünün u ve v parametrelerine göre türevleri alınırsa

$$\begin{cases} \overline{X}_u = -(h_1)_u N_1 - h_1 (N_1)_u - (h_2)_u N_2 - h_2 (N_2)_u \\ \overline{X}_v = -(h_1)_v N_1 - h_1 (N_1)_v - (h_2)_v N_2 - h_2 (N_2)_v \end{cases} \tag{4.3}$$

bulunur. M yüzeyinin parametre eğrileri eğrilik çizgisi olduğundan

$$\begin{cases} (N_1)_u = k_1^1 X_u \ , \quad (N_1)_v = k_2^1 X_v \\ (N_2)_u = k_1^2 X_u \ , \quad (N_2)_v = k_2^2 X_v \end{cases}. \tag{4.4}$$

Burada k_1^1, k_1^2, k_2^1 ve k_2^2 M nin asli eğrilikleridir. O halde (4.4), (4.3) de yerlerine yazılır ve elde edilen eşitlikler düzenlenirse

$$\begin{cases} \overline{X}_u = (-h_1 k_1^1 - h_2 k_1^2) X_u - (h_1)_u N_1 - (h_2)_u N_2 \\ \overline{X}_v = (-h_1 k_2^1 - h_2 k_2^2) X_v - (h_1)_v N_1 - (h_2)_v N_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

elde edilir . Bu son eşitlikte, $\eta \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \eta = -h_1 k_1^1 - h_2 k_1^2 \\ \mu = -h_1 k_2^1 - h_2 k_2^2 \end{cases} \tag{4.6}$$

ile gösterilirse

$$\begin{cases} \overline{X}_u = \eta X_u - (h_1)_u N_1 - (h_2)_u N_2 \\ \overline{X}_v = \mu X_v - (h_1)_v N_1 - (h_2)_v N_2 \end{cases} \quad \textbf{(4.7)}$$

bulunur.

Teorem 4.1.1. M , E^4'te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M nin pedal yüzeyi olsun. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin I. temel formlarının, sırasıyla, g_{ij} ve $\overline{g}_{ij}$ katsayıları arasında

$$\begin{cases} \overline{g}_{11} = \eta^2 g_{11} + U \\ \overline{g}_{12} = (h_1)_u (h_1)_v + (h_2)_u (h_2)_v \\ \overline{g}_{22} = \mu^2 g_{22} + V \end{cases} \quad \textbf{(4.8)}$$

bağıntısı vardır. Burada $U = (h_1)_u^2 + (h_2)_u^2$ ve $V = (h_1)_v^2 + (h_2)_v^2$.

İspat: M ve $\overline{M}$'nin I. temel formlarının katsayıları, sırasıyla g_{ij} ve $\overline{g}_{ij}$ $(1 \le i, j \le 2)$ olmak üzere

$$g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle,\ g_{12} = \langle X_u, X_v \rangle,\ g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle \quad \textbf{(4.9)}$$

ve

$$\overline{g}_{11} = \langle \overline{X}_u, \overline{X}_u \rangle,\ \overline{g}_{12} = \langle \overline{X}_u, \overline{X}_v \rangle,\ \overline{g}_{22} = \langle \overline{X}_v, \overline{X}_v \rangle. \quad \textbf{(4.10)}$$

$\overline{g}_{11} = \langle \overline{X}_u, \overline{X}_u \rangle$ denkleminde (4.7) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{g}_{11} &= \langle \eta X_u - (h_1)_u N_1 - (h_2)_u N_2\ ,\ \eta X_u - (h_1)_u N_1 - (h_2)_u N_2 \rangle, \\ \overline{g}_{11} &= \eta^2 \langle X_u, X_u \rangle - 2\eta (h_1)_u \langle X_u, N_1 \rangle - 2\eta (h_2)_u \langle X_u, N_2 \rangle \\ &\quad + (h_1)_u^2 \langle N_1, N_1 \rangle + 2 (h_1)_u (h_2)_u \langle N_1, N_2 \rangle + (h_2)_u^2 \langle N_2, N_2 \rangle \end{aligned} \quad \textbf{(4.11)}$$

bulunur. $T_M(P) = Sp\{X_u, X_v\}$ ve $T_M^{\perp}(P) = Sp\{N_1, N_2\}$ olduğundan

$$\langle X_u, N_1 \rangle = \langle X_u, N_2 \rangle = \langle X_v, N_1 \rangle = \langle X_v, N_2 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0 \quad \textbf{(4.12)}$$

ve

$$\langle N_1, N_1 \rangle = \langle N_2, N_2 \rangle = 1. \quad \textbf{(4.13)}$$

O halde, (4.9), (4.12) ve (4.13) eşitlikleri (4.11) de yerlerine yazılırsa

$$\overline{g}_{11} = \eta^2 g_{11} + (h_1)_u^2 + (h_2)_u^2 \quad \textbf{(4.14)}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte, kısalık için $U = (h_1)_u^2 + (h_2)_u^2$ olarak alınırsa

$$\overline{g}_{11} = \eta^2 g_{11} + U$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $\overline{g}_{12}$ ve $\overline{g}_{22}$ katsayılarını hesaplayalım. $\overline{g}_{12} = \left\langle \overline{X}_u, \overline{X}_v \right\rangle$ denkleminde (4.7) eşitliği yerine yazılırsa

$$\overline{g}_{12} = \left\langle \eta X_u - (h_1)_u N_1 - (h_2)_u N_2 \ , \ \mu X_v - (h_1)_v N_1 - (h_2)_v N_2 \right\rangle,$$

$$\begin{aligned}\overline{g}_{12} = {} & \eta\mu \left\langle X_u, X_v \right\rangle - \eta(h_1)_v \left\langle X_u, N_1 \right\rangle - \eta(h_2)_v \left\langle X_u, N_2 \right\rangle \\ & - \mu(h_1)_u \left\langle N_1, X_v \right\rangle + (h_1)_u (h_1)_v \left\langle N_1, N_1 \right\rangle + (h_1)_u (h_2)_v \left\langle N_1, N_2 \right\rangle \\ & - \mu(h_2)_u \left\langle N_2, X_v \right\rangle + (h_2)_u (h_1)_v \left\langle N_2, N_1 \right\rangle + (h_2)_u (h_2)_v \left\langle N_2, N_2 \right\rangle\end{aligned}$$

bulunur. (4.2), (4.12) ve (4.13) eşitlikleri bu son denklemde yerlerine yazılırsa

$$\overline{g}_{12} = (h_1)_u (h_1)_v + (h_2)_u (h_2)_v \tag{4.15}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\overline{g}_{22} = \left\langle \overline{X}_v, \overline{X}_v \right\rangle$ denkleminde (4.7) eşitliği yerine yazılırsa

$$\overline{g}_{22} = \left\langle \mu X_v - (h_1)_v N_1 - (h_2)_v N_2, \ \mu X_v - (h_1)_v N_1 - (h_2)_v N_2 \right\rangle,$$

$$\begin{aligned}\overline{g}_{22} = {} & \mu^2 \left\langle X_v, X_v \right\rangle - 2\mu(h_1)_v \left\langle X_v, N_1 \right\rangle - 2\mu(h_2)_v \left\langle X_v, N_2 \right\rangle \\ & + (h_1)_v^2 \left\langle N_1, N_1 \right\rangle + 2(h_1)_v (h_2)_v \left\langle N_1, N_2 \right\rangle + (h_2)_v^2 \left\langle N_2, N_2 \right\rangle\end{aligned}$$

bulunur. O halde (4.12) ve (4.13) eşitliklerinden

$$\overline{g}_{22} = \mu^2 g_{22} + (h_1)_v^2 + (h_2)_v^2 \tag{4.16}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte, kısalık için $V = (h_1)_v^2 + (h_2)_v^2$ olarak alınırsa

$$\overline{g}_{22} = \mu^2 g_{22} + V$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.1.2. M , E^4 'te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M 'nin pedal yüzeyi olsun. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin, sırasıyla, w ve $\overline{w}$ alan elementleri arasında

$$\overline{w}^2 = \eta^2 \mu^2 w^2 + \eta^2 g_{11} V + \mu^2 g_{22} U + [(h_1)_u (h_2)_v - (h_2)_u (h_1)_v]^2$$

bağıntısı vardır.

Teorem 4.1.3. M , E^4 'te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M nin pedal yüzeyi olsun. $\overline{M}$ yüzeyinin $\overline{N}_1$ ve $\overline{N}_2$ birim normalleri

$$\overline{N}_1 = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}, 1, 0 \right) \quad \text{ve} \quad \overline{N}_2 = \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}, 1, 0 \right)$$

şeklindedir. Burada $\rho_1=\sqrt{\frac{(h_1)_u^2}{\eta^2}+\frac{(h_1)_v^2}{\mu^2}+1}$ ve $\rho_2=\sqrt{\frac{(h_2)_u^2}{\eta^2}+\frac{(h_2)_v^2}{\mu^2}+1}$.

İspat: M yüzeyinin $P\in M$ noktasındaki tanjant ve normal uzayları, sırasıyla, $T_M(P)$ ve $T_M^{\perp}(P)$, $\overline{M}$ pedal yüzeyinin $\overline{P}\in\overline{M}$ noktasındaki tanjant ve normal uzayları, sırasıyla, $T_{\overline{M}}(\overline{P})$ ve $T_{\overline{M}}^{\perp}(\overline{P})$ olsun. $T_M(P)=Sp\{X_u,X_v\}$ ve $T_M^{\perp}(P)=Sp\{N_1,N_2\}$ olmak üzere $T_{E^4}(P)=Sp\{X_u,X_v,N_1,N_2\}$ yazılabilir. Diğer taraftan $\overline{\xi}\in T_{\overline{M}}^{\perp}(\overline{P})$ vektörü için $T_{\overline{M}}^{\perp}(\overline{P})\subset T_{E^4}(P)$ olduğundan

$$\overline{\xi}=(a,b,c,d)=aX_u+bX_v+cN_1+dN_2 \quad \textbf{(4.17)}$$

yazılır. Şimdi a, b, c ve d katsayılarını hesaplayalım. $\overline{\xi}\in T_{\overline{M}}^{\perp}(\overline{P})$ ve $\overline{X}_u,\overline{X}_v\in T_{\overline{M}}(\overline{P})$ olduğundan

$$\left\langle\overline{\xi},\overline{X}_u\right\rangle=0 \text{ ve } \left\langle\overline{\xi},\overline{X}_v\right\rangle=0.$$

(4.7) ve (4.17), $\left\langle\overline{\xi},\overline{X}_u\right\rangle=0$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&a\left\langle X_u,\eta X_u-(h_1)_uN_1-(h_2)_uN_2\right\rangle+b\left\langle X_v,\eta X_u-(h_1)_uN_1-(h_2)_uN_2\right\rangle\\&+c\left\langle N_1,\eta X_u-(h_1)_uN_1-(h_2)_uN_2\right\rangle+d\left\langle N_2,\eta X_u-(h_1)_uN_1-(h_2)_uN_2\right\rangle=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a\eta\left\langle X_u,X_u\right\rangle-c(h_1)_u\left\langle N_1,N_1\right\rangle-d(h_2)_u\left\langle N_2,N_2\right\rangle=0$$

bulunur. O halde (4.9) ve (4.13) ten

$$\eta g_{11}a-(h_1)_uc-(h_2)_ud=0 \quad \textbf{(4.18)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.7) ve (4.17), $\left\langle\overline{\xi},\overline{X}_v\right\rangle=0$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&a\left\langle X_u,\mu X_v-(h_1)_vN_1-(h_2)_vN_2\right\rangle+b\left\langle X_v,\mu X_v-(h_1)_vN_1-(h_2)_vN_2\right\rangle\\&+c\left\langle N_1,\mu X_v-(h_1)_vN_1-(h_2)_vN_2\right\rangle+d\left\langle N_2,\mu X_v-(h_1)_vN_1-(h_2)_vN_2\right\rangle=0,\end{aligned}$$

$$b\mu\left\langle X_v,X_v\right\rangle-c(h_1)_v\left\langle N_1,N_1\right\rangle-d(h_2)_v\left\langle N_2,N_2\right\rangle=0$$

bulunur. Bu durumda (4.9) ve (4.13) ten

$$\mu g_{22}b-(h_1)_vc-(h_2)_vd=0 \quad \textbf{(4.19)}$$

elde edilir. (4.18) ve (4.19) birleştirilirse

$$\begin{cases}\eta g_{11}a-(h_1)_uc-(h_2)_ud=0\\ \mu g_{22}b-(h_1)_vc-(h_2)_vd=0\end{cases} \quad \textbf{(4.20)}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi çözülürse

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta g_{11} & 0 \\ 0 & \mu g_{22} \end{vmatrix} = \eta\mu g_{11} g_{22}, \qquad \Delta \neq 0$$

olmak üzere

$$a = \frac{1}{\eta g_{11}}\left(c(h_1)_u + d(h_2)_u\right)$$

ve

$$b = \frac{1}{\mu g_{22}}\left(c(h_1)_v + d(h_2)_v\right)$$

bulunur. a ve b değerleri (4.17) de yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\bar{\xi} = c\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}, 1, 0\right) + d\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}, 0, 1\right) \tag{4.21}$$

elde edilir. O halde,

$$T_{\overline{M}}^{\perp}(\overline{P}) = Sp\left\{\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}, 1, 0\right), \left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}, 0, 1\right)\right\}$$

yazılabilir. $T_{\overline{M}}^{\perp}(\overline{P}) = Sp\left\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\right\}$ olarak alınırsa, $\overline{M}$ yüzeyinin normalleri

$$\bar{n}_1 = \left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}, 1, 0\right)$$

ve

$$\bar{n}_2 = \left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}, 0, 1\right)$$

olup birim normal vektörleri

$$\overline{N}_1 = \frac{\bar{n}_1}{\left\|\bar{n}_1\right\|} = \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}, 1, 0\right) \tag{4.22}$$

$$\overline{N}_2 = \frac{\bar{n}_2}{\left\|\bar{n}_2\right\|} = \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}, \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}, 1, 0\right) \tag{4.23}$$

şeklindedir. Burada

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{(h_1)_u^2}{\eta^2} + \frac{(h_1)_v^2}{\mu^2} + 1}$$

ve

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{(h_2)_u^2}{\eta^2} + \frac{(h_2)_v^2}{\mu^2} + 1}\,.$$

Teorem 4.1.4. M , E^4 'te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M 'nin pedal yüzeyi olsun. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin II. temel formlarının, sırasıyla, c_{jk}^i ve $\overline{c}_{jk}^{\,i}$ $(i, j, k = 1, 2)$ katsayıları arasında

$$\begin{cases} \overline{c}_{11}^{\,i} = \dfrac{1}{\rho_i}\left[\eta c_{11}^i - \dfrac{(h_i)_u}{\eta}\left(\eta_u - (h_1)_u k_1^1 - (h_2)_u k_1^2\right) - \dfrac{\eta}{2}\left[\dfrac{(h_i)_u (g_{11})_u}{\eta g_{11}} - \dfrac{(h_i)_v (g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right] + (h_i)_{uu}\right] \\ \overline{c}_{12}^{\,i} = \dfrac{1}{\rho_i}\left[\dfrac{-\eta_v (h_i)_u}{\eta} + \dfrac{(h_i)_v}{\mu}\left((h_1)_u k_2^1 + (h_2)_u k_2^2\right) - \dfrac{\eta}{2}\left[\dfrac{(h_i)_u (g_{11})_v}{\eta g_{11}} + \dfrac{(h_i)_v (g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right] + (h_i)_{uv}\right] \\ \overline{c}_{22}^{\,i} = \dfrac{1}{\rho_i}\left[\mu c_{22}^i - \dfrac{(h_i)_v}{\mu}\left(\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_2)_v k_2^2\right) + \dfrac{\mu}{2}\left[\dfrac{(h_i)_u (g_{22})_u}{\eta g_{11}} - \dfrac{(h_i)_v (g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right] + (h_i)_{vv}\right] \end{cases} \quad \textbf{(4.24)}$$

bağıntısı vardır. Burada c_{jk}^i ve $\overline{c}_{jk}^{\,i}$ katsayıları, sırasıyla M ve $\overline{M}$ 'nin N_i ve $\overline{N}_i$ normal vektörlerine göre II. temel formlarının katsayılarıdır.

İspat: $\overline{M}$ 'nin $\overline{c}_{jk}^{\,1}$ ve $\overline{c}_{jk}^{\,2}$ II. temel formunun katsayılarını hesaplayalım. (4.7) eşitliğindeki

$$\overline{X}_u = \eta X_u - (h_1)_u N_1 - (h_2)_u N_2$$

ve

$$\overline{X}_v = \mu X_v - (h_1)_v N_1 - (h_2)_v N_2$$

denklemlerinin u ve v parametrelerine göre türevleri alınırsa

$$\overline{X}_{uu} = \left(\eta_u - (h_1)_u k_1^1 - (h_2)_u k_1^2\right) X_u - (h_1)_{uu} N_1 - (h_2)_{uu} N_2 + \eta X_{uu} \quad \textbf{(4.25)}$$

$$\overline{X}_{uv} = \eta_v X_u + \left(-(h_1)_u k_2^1 - (h_2)_u k_2^2\right) X_v - (h_1)_{uv} N_1 - (h_2)_{uv} N_2 + \eta X_{uv} \quad \textbf{(4.26)}$$

$$\overline{X}_{vv} = \left(\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_2)_v k_2^2\right) X_v - (h_1)_{vv} N_1 - (h_2)_{vv} N_2 + \mu X_{vv} \quad \textbf{(4.27)}$$

bulunur. İlk olarak $\overline{c}_{jk}^{\,1}$ katsayılarını hesaplayalım. Teorem 2.3.26 dan

$$\overline{c}_{11}^{\,1} = -\left\langle \overline{X}_{uu}, \overline{N}_1 \right\rangle$$

şeklindedir. Bu son eşitlikte (4.22) ve (4.25) yerlerine yazılırsa

$$\overline{c}_{11}^{\,1} = -\frac{1}{\rho_1}\left\langle (\eta_u - (h_1)_u k_1^1 - (h_2)_u k_1^2) X_u - (h_1)_{uu} N_1 - (h_2)_{uu} N_2 + \eta X_{uu}, \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle,$$

$$\overset{-1}{c}_{11}=\frac{1}{\rho_1}\left[\begin{array}{l}\dfrac{-(h_1)_u}{\eta g_{11}}(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2)\left\langle X_u,X_u\right\rangle+\left(h_1\right)_{uu}\left\langle N_1,N_1\right\rangle\\ -\eta\left\langle X_{uu},\dfrac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\dfrac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right\rangle\end{array}\right]$$

bulunur. Burada $\left\langle X_u,X_u\right\rangle=g_{11}$ ve $\left\langle N_1,N_1\right\rangle=1$ olduğundan

$$\overset{-1}{c}_{11}=\frac{1}{\rho_1}\left[\frac{-(h_1)_u}{\eta}\left(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2\right)+\left(h_1\right)_{uu}-\eta\left\langle X_{uu},\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right\rangle\right] \quad \textbf{(4.28)}$$

yazılır. Diğer taraftan $\left\langle X_{uu},\dfrac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\dfrac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right\rangle$ iç çarpımını hesaplamak için (3.1) denklemi burada yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\left\langle X_{uu},\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right\rangle=\Gamma_{11}^1\frac{(h_1)_u}{\eta}+\Gamma_{11}^2\frac{(h_1)_v}{\mu}-c_{11}^1$$

elde edilir. (2.4) burada yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\left\langle X_{uu},\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right\rangle=\frac{1}{2}\left[\frac{(h_1)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_1)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right]-c_{11}^1$$

bulunur. Bu son eşitlikten (4.28) denklemi

$$\overset{-1}{c}_{11}=\frac{1}{\rho_1}\left[\eta c_{11}^1\frac{-(h_1)_u}{\eta}\left(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2\right)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_1)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_1)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right)+\left(h_1\right)_{uu}\right]$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\overset{-1}{c}_{12}$ katsayısını hesaplayalım. Teorem 2.3.26 dan

$$\overset{-1}{c}_{12}=-\left\langle\overline{X}_{uv},\overline{N}_1\right\rangle$$

şeklinde olup bu son eşitlikte (4.26) ve (4.22) yerlerine yazılırsa

$$\overset{-1}{c}_{12}=-\frac{1}{\rho_1}\left\langle\eta_v X_u+\left(-(h_1)_u k_2^1-(h_2)_u k_2^2\right)X_v-(h_1)_{uv}N_1-(h_2)_{uv}N_2+\eta X_{uv},\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right\rangle,$$

$$\overset{-1}{c}_{12}=\frac{1}{\rho_1}\left[\begin{array}{l}-\dfrac{\eta_v(h_1)_u}{\eta g_{11}}\left\langle X_u,X_u\right\rangle+\left((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2\right)\dfrac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\left\langle X_v,X_v\right\rangle+(h_1)_{uv}\left\langle N_1,N_1\right\rangle\\ -\eta\left\langle X_{uv},\dfrac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\dfrac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right\rangle\end{array}\right]$$

bulunur. Burada $\left\langle X_u,X_u\right\rangle=g_{11}$, $\left\langle X_v,X_v\right\rangle=g_{22}$ ve $\left\langle N_1,N_1\right\rangle=1$ olduğundan

$$\overset{-1}{c}_{12}=\frac{1}{\rho_1}\left[-\frac{\eta_v(h_1)_u}{\eta}+\frac{(h_1)_v}{\mu}\left((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2\right)+(h_1)_{uv}-\eta\left\langle X_{uv},\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right\rangle\right] \quad \textbf{(4.29)}$$

elde edilir. (3.1) den

$$\left\langle X_{uv}, \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle = \Gamma_{12}^1 \frac{(h_1)_u}{\eta} + \Gamma_{12}^2 \frac{(h_1)_v}{\mu} - c_{12}^1$$

olup M 'nin parametre eğrileri eğrilik çizgisi olduğundan

$$\left\langle X_{uv}, \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle = \Gamma_{12}^1 \frac{(h_1)_u}{\eta} + \Gamma_{12}^2 \frac{(h_1)_v}{\mu}.$$

(2.4) ten bu son eşitlik tekrar düzenlenirse

$$\left\langle X_{uv}, \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{(h_1)_u (g_{11})_v}{\eta g_{11}} + \frac{(h_1)_v (g_{22})_u}{\mu g_{22}} \right]$$

bulunur. O halde, bu son eşitlik (4.29) da yerine yazılırsa

$$\overset{-1}{c}_{12} = \frac{1}{\rho_1}\left[-\frac{\eta_v (h_1)_u}{\eta} + \frac{(h_1)_v}{\mu}\left((h_1)_u k_2^1 + (h_2)_u k_2^2 \right) + (h_1)_{uv} - \frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_1)_u (g_{11})_v}{\eta g_{11}} + \frac{(h_1)_v (g_{22})_u}{\mu g_{22}} \right) \right]$$

elde edilir.

Şimdi $\overset{-1}{c}_{22}$ katsayısını hesaplayalım. Teorem 2.3.26 dan

$$\overset{-1}{c}_{22} = -\left\langle \overline{X}_{vv}, \overline{N}_1 \right\rangle.$$

Bu son eşitlikte (4.22) ve (4.27) yerlerine yazılırsa

$$\overset{-1}{c}_{22} = -\frac{1}{\rho_1}\left\langle \left(\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_1)_v k_2^2 \right) X_v - (h_1)_{vv} N_1 - (h_2)_{vv} N_2 + \mu X_{vv}, \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle,$$

$$\overset{-1}{c}_{22} = \frac{1}{\rho_1}\left[\begin{array}{l} -\dfrac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\left(\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_2)_v k_2^2 \right)\left\langle X_v, X_v \right\rangle + (h_1)_{vv}\left\langle N_1, N_1 \right\rangle \\ -\mu \left\langle X_{vv}, \dfrac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \dfrac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle \end{array} \right]$$

bulunur. Burada $\left\langle X_v, X_v \right\rangle = g_{22}$ ve $\left\langle N_1, N_1 \right\rangle = 1$ olduğundan

$$\overset{-1}{c}_{22} = \frac{1}{\rho_1}\left[-\frac{(h_1)_v}{\mu}\left(\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_2)_v k_2^2 \right) + (h_1)_{vv} - \mu \left\langle X_{vv}, \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle \right] \quad \textbf{(4.30)}$$

elde edilir. (3.1) göz önüne alınırsa

$$\left\langle X_{vv}, \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle = \Gamma_{22}^1 \frac{(h_1)_u}{\eta} + \Gamma_{22}^2 \frac{(h_1)_v}{\mu} - c_{22}^1$$

bulunur ve (2.4) burada yerine yazılırsa

$$\left\langle X_{vv}, \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{(h_1)_v (g_{22})_v}{\mu g_{22}} - \frac{(h_1)_u (g_{22})_u}{\eta g_{11}} \right] - c_{22}^1$$

elde edilir. Bu son eşitlik (4.30) denkleminde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\overset{-1}{c}_{22}=\frac{1}{\rho_1}\left[\mu c_{22}^{1}-\frac{(h_1)_v}{\mu}\left(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2\right)-\frac{\mu}{2}\left[\frac{(h_1)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}-\frac{(h_1)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}\right]+(h_1)_{vv}\right]$$

elde edilir.

Benzer şekilde, II. temel formunun $\overset{-2}{c}_{jk}$ katsayılarını hesaplayalım. $\overset{-2}{c}_{11}$ katsayısı için

$$\overset{-2}{c}_{11}=-\left\langle \overline{X}_{uu},\overline{N}_2\right\rangle .$$

Bu son eşitlikte (4.23) ve (4.25) yerlerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\overset{-2}{c}_{11}=\frac{1}{\rho_2}\left[-\frac{(h_2)_u}{\eta}\left(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2\right)+(h_2)_{uu}-\eta\left\langle X_{uu},\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_2\right\rangle\right] \quad \textbf{(4.31)}$$

bulunur. (3.1) ve (2.4) gözönüne alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\overset{-2}{c}_{11}=\frac{1}{\rho_2}\left[\eta c_{11}^{2}-\frac{(h_2)_u}{\eta}\left(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2\right)-\frac{\eta}{2}\left[\frac{(h_2)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_2)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right]+(h_2)_{uu}\right]$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\overset{-2}{c}_{12}$ katsayısı için

$$\overset{-2}{c}_{12}=-\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{N}_2\right\rangle$$

olup (4.23) ve (4.26) burada yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\overset{-2}{c}_{12}=\frac{1}{\rho_2}\begin{bmatrix} -\dfrac{\eta_v(h_2)_u}{\eta}+\left((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2\right)\dfrac{(h_2)_v}{\mu}+(h_2)_{uv} \\ -\eta\left\langle X_{uv},\dfrac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}X_u+\dfrac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_2\right\rangle \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.32)}$$

elde edilir. Aynı zamanda (3.1) ve (2.4) göz önüne alınarak bu son eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\overset{-2}{c}_{12}=\frac{1}{\rho_2}\left[\frac{-\eta_v(h_2)_u}{\eta}+\frac{(h_2)_v}{\mu}\left((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2\right)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_2)_u(g_{11})_v}{\eta g_{11}}+\frac{(h_2)_v(g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right)+(h_2)_{uv}\right]$$

şeklinde elde edilir.

$\overset{-2}{c}_{22}$ katsayısı için,

$$\overset{-2}{c}_{22}=-\left\langle \overline{X}_{vv},\overline{N}_2\right\rangle .$$

Bu son eşitlikte (4.23) ve (4.27) yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\overset{-2}{c}_{22}=\frac{1}{\rho_2}\left[-\frac{(h_2)_v}{\mu}\left(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2\right)+(h_2)_{vv}-\mu\left\langle X_{vv},\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_2\right\rangle\right] \quad \textbf{(4.33)}$$

elde edilir. (3.1) ve (2.4) denklemleri kullanılarak bu son eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\overset{-}{c}{}_{22}^{2} = \frac{1}{\rho_2}\left[\begin{matrix} \mu c_{22}^{2} - \dfrac{(h_2)_v}{\mu}\left(\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_2)_v k_2^2\right) \\ + \dfrac{\mu}{2}\left[\dfrac{(h_2)_u (g_{22})_u}{\eta g_{11}} - \dfrac{(h_2)_v (g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right] + (h_2)_{vv} \end{matrix}\right]$$

elde edilir.

O halde, $i = 1, 2$ olmak üzere M ve $\overline{M}$ 'nin II. temel formlarının katsayıları arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} \overset{-}{c}{}_{11}^{i} = \dfrac{1}{\rho_i}\left[\eta c_{11}^{i} - \dfrac{(h_i)_u}{\eta}\left(\eta_u - (h_1)_u k_1^1 - (h_2)_u k_1^2\right) - \dfrac{\eta}{2}\left[\dfrac{(h_i)_u (g_{11})_u}{\eta g_{11}} - \dfrac{(h_i)_v (g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right] + (h_i)_{uu}\right] \\ \overset{-}{c}{}_{12}^{i} = \dfrac{1}{\rho_i}\left[\dfrac{-\eta_v (h_i)_u}{\eta} + \dfrac{(h_i)_v}{\mu}\left((h_1)_u k_2^1 + (h_2)_u k_2^2\right) - \dfrac{\eta}{2}\left[\dfrac{(h_i)_u (g_{11})_v}{\eta g_{11}} + \dfrac{(h_i)_v (g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right] + (h_i)_{uv}\right] \\ \overset{-}{c}{}_{22}^{i} = \dfrac{1}{\rho_i}\left[\mu c_{22}^{i} - \dfrac{(h_i)_v}{\mu}\left(\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_2)_v k_2^2\right) + \dfrac{\mu}{2}\left[\dfrac{(h_i)_u (g_{22})_u}{\eta g_{11}} - \dfrac{(h_i)_v (g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right] + (h_i)_{vv}\right] \end{cases}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1.5. Teorem 4.1.4 ün bir sonucu olarak M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin ikinci temel formlarının katsayıları arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} \overset{-}{c}{}_{11}^{i} = \dfrac{1}{\rho_i}\eta c_{11}^{i} + A_i \\ \overset{-}{c}{}_{12}^{i} = C_i \\ \overset{-}{c}{}_{22}^{i} = \dfrac{1}{\rho_i}\mu c_{22}^{i} + B_i \end{cases} \tag{4.34}$$

olarak da verilebilir. Burada

$$A_i = \frac{1}{\rho_i}\left[-\frac{(h_i)_u}{\eta}\left[\eta_u - (h_1)_u k_1^1 - (h_2)_u k_1^2\right] - \eta\left[\Gamma_{11}^1 \frac{(h_i)_u}{\eta} + \Gamma_{11}^2 \frac{(h_i)_v}{\mu}\right] + (h_i)_{uu}\right],$$

$$B_i = \frac{1}{\rho_i}\left[-\frac{(h_i)_v}{\mu}\left[\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_2)_v k_2^2\right] - \mu\left[\Gamma_{22}^1 \frac{(h_i)_u}{\eta} + \Gamma_{22}^2 \frac{(h_i)_v}{\mu}\right] + (h_i)_{vv}\right],$$

$$C_i = \frac{1}{\rho_i}\left[\frac{-\eta_v (h_i)_u}{\eta} + \frac{(h_i)_v}{\mu}\left[(h_1)_u k_2^1 + (h_2)_u k_2^2\right] - \eta\left[\Gamma_{12}^1 \frac{(h_i)_u}{\eta} + \Gamma_{12}^2 \frac{(h_i)_v}{\mu}\right] + (h_i)_{uv}\right].$$

İspat: (4.24) eşitliğinde (2.4) yerlerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.6. M , E^4 'te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M 'nin pedal yüzeyi olsun. $\overline{M}$ yüzeyinin $\overline{b}^i_{jk}$ $(i, j, k = 1, 2)$ III. temel formlarının katsayıları

$$\begin{cases}
\overline{b}^i_{11} = g_{11}\left[\dfrac{1}{\rho_i}\left(\left(\dfrac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \dfrac{(h_i)_u(g_{11})_u}{2\eta(g_{11})^2} + \dfrac{(h_i)_v(g_{11})_v}{2\mu g_{11}g_{22}} + k_1^i\right) + \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_u\dfrac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right]^2 \\
\quad + g_{22}\left[\dfrac{1}{\rho_1}\left(\left(\dfrac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right)_u - \dfrac{(h_i)_u(g_{11})_v}{2\eta g_{11}g_{22}} + \dfrac{(h_i)_v(g_{22})_u}{2\mu(g_{22})^2}\right) + \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_u\dfrac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right]^2 \\
\quad + \left[\left(\dfrac{c^i_{11}(h_1)_u}{\rho_i\eta g_{11}}\right) - \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_u\right]^2 + \left(\dfrac{c^r_{11}(h_i)_u}{\rho_i\eta g_{11}}\right)^2 \\
\overline{b}^i_{12} = g_{11}\left[\dfrac{1}{\rho_i}\left(\left(\dfrac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right)_v + \dfrac{(h_i)_u(g_{11})_v}{2\eta(g_{11})^2} - \dfrac{(h_i)_v(g_{22})_u}{2\mu g_{11}g_{22}}\right) + \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_v\dfrac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right] \\
\quad \left[\dfrac{1}{\rho_i}\left(\left(\dfrac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \dfrac{(h_i)_u(g_{11})_u}{2\eta(g_{11})^2} + \dfrac{(h_i)_v(g_{11})_v}{2\mu g_{11}g_{22}} + k_1^i\right) + \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_u\dfrac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right] \\
\quad + g_{22}\left[\dfrac{1}{\rho_i}\left(\left(\dfrac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right)_v + \dfrac{(h_i)_u(g_{22})_u}{2\eta g_{11}g_{22}} + \dfrac{(h_i)_v(g_{22})_v}{2\mu(g_{22})^2} + k_2^i\right) + \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_v\dfrac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right] \\
\quad \left[\dfrac{1}{\rho_i}\left(\left(\dfrac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right)_u + \dfrac{(h_i)_u(g_{11})_v}{2\eta g_{11}g_{22}} + \dfrac{(h_i)_v(g_{22})_u}{2\mu(g_{22})^2}\right) + \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_u\dfrac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right] \\
\quad + \left[\dfrac{c^i_{22}(h_i)_v}{\rho_i\mu g_{22}} - \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_v\right]\left[\dfrac{c^i_{11}(h_i)_u}{\rho_i\eta g_{11}} - \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_u\right] + \left(\dfrac{c^r_{11}c^r_{22}(h_i)_v(h_i)_u}{(\rho_i)^2\eta\mu g_{11}g_{22}}\right) \\
\overline{b}^i_{22} = g_{11}\left[\dfrac{1}{\rho_i}\left(\left(\dfrac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right)_v + \dfrac{(h_i)_u(g_{11})_v}{2\eta(g_{11})^2} - \dfrac{(h_i)_v(g_{22})_u}{2\mu g_{11}g_{22}}\right) + \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_v\dfrac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right]^2 \\
\quad + g_{22}\left[\dfrac{1}{\rho_i}\left(\left(\dfrac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right)_v + \dfrac{(h_i)_u(g_{22})_u}{2\eta g_{11}g_{22}} + \dfrac{(h_i)_v(g_{22})_v}{2\mu(g_{22})^2} + k_2^i\right) + \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_v\dfrac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right]^2 \\
\quad + \left(\dfrac{c^i_{22}(h_i)_v}{\rho_i\mu g_{22}} - \left(\dfrac{1}{\rho_i}\right)_v\right)^2 + \left(\dfrac{c^r_{22}(h_i)_v}{\rho_i\mu g_{22}}\right)^2
\end{cases}$$

şeklindedir. Burada $\overline{b}^i_{jk}$ katsayıları $\overline{M}$ 'nin $\overline{N}_i$ normal vektörlerine göre III. temel formlarının katsayıları olup $i = 1$ iken $r = 2$ ve $i = 2$ iken $r = 1$.

İspat: İlk olarak $\overline{M}$ 'nin $\overline{b}^1_{jk}$ III. temel formunun katsayılarını hesaplayalım. (4.22) eşitliğindeki

$$\overline{N}_1 = \frac{1}{\rho_1}\left[\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v + N_1\right]$$

denkleminin u parametresine göre türevi alınırsa

$$(\overline{N}_1)_u = \frac{1}{\rho_1}\left[\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_u X_u + \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_{uu} + \left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_u X_v + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_{uv} + (N_1)_u\right]$$
$$+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\left[\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_1\right]$$

bulunur. Bu son eşitlikte (3.1) ve (4.4) yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$(\overline{N}_1)_u = \left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^1 + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^1 + k_1^1\right) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right] X_u$$
$$+\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_u + \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^2 + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right] X_v$$
$$-\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{c_{11}^1 (h_1)_u}{\eta g_{11}} + \frac{c_{12}^1 (h_1)_v}{\mu g_{22}}\right) - \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\right] N_1 - \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{c_{11}^2 (h_1)_u}{\eta g_{11}} + \frac{c_{12}^2 (h_1)_v}{\mu g_{22}}\right) N_2$$

elde edilir. M 'nin parametre eğrileri eğrilik çizgisi olduğundan, bu son eşitlik

$$\left.\begin{aligned}(\overline{N}_1)_u = &\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^1 + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^1 + k_1^1\right) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right] X_u \\ &+\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_u + \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^2 + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right] X_v \\ &-\left[\frac{c_{11}^1 (h_1)_u}{\rho_1 \eta g_{11}} - \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\right] N_1 - \left(\frac{c_{11}^2 (h_1)_u}{\rho_1 \eta g_{11}}\right) N_2\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.35)}$$

biçimindedir. Teorem 2.3.26 dan

$$\overline{b}_{11}^1 = \left\langle (\overline{N}_1)_u, (\overline{N}_1)_u \right\rangle.$$

Burada (4.35) yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\overline{b}_{11}^1 = g_{11}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^1 + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^1 + k_1^1\right) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]^2$$
$$+ g_{22}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_u + \frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^2 + \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u \frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{c_{11}^1 (h_1)_u}{\eta g_{11}}\right) - \left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\right]^2 + \left(\frac{c_{11}^2 (h_1)_u}{\rho_1 \eta g_{11}}\right)^2$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (2.4) yerine yazılırsa

$$\bar{b}^{1}_{11}=g_{11}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_u+\frac{(h_1)_u(g_{11})_u}{2\eta(g_{11})^2}+\frac{(h_1)_v(g_{11})_v}{2\mu g_{11}g_{22}}+k_1^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]^2$$
$$+g_{22}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_u-\frac{(h_1)_u(g_{11})_v}{2\eta g_{11}g_{22}}+\frac{(h_1)_v(g_{22})_u}{2\mu(g_{22})^2}\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]^2$$
$$+\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{c_{11}^1(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\right]^2+\left(\frac{c_{11}^2(h_1)_u}{\rho_1\eta g_{11}}\right)^2$$

bulunur. Şimdi $\bar{b}^{1}_{12}$ katsayısını hesaplayalım. (4.22) eşitliğindeki

$$\overline{N}_1=\frac{1}{\rho_1}\left[\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right]$$

denkleminin v parametresine göre türevi

$$(\overline{N}_1)_v=\frac{1}{\rho_1}\left[\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_v X_u+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_{uv}+\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_v X_v+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_{vv}+(N_1)_v\right]$$
$$+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\left[\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_1\right]$$

şeklindedir. (3.1) ve (4.4) bu son eşitlikte yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\left.\begin{aligned}(\overline{N}_1)_v=&\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_v+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^1+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]X_u\\&+\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_v+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^2+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^2+k_2^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]X_v\\&-\left(\frac{c_{22}^1(h_1)_v}{\rho_1\mu g_{22}}-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\right)N_1-\left(\frac{c_{22}^2(h_1)_v}{\rho_1\mu g_{22}}\right)N_2\end{aligned}\right\}\qquad\textbf{(4.36)}$$

elde edilir. Teorem 2.3.26 dan $\bar{b}^{1}_{12}=\left\langle(\overline{N}_1)_u,(\overline{N}_1)_v\right\rangle$ olup (4.35) ve (4.36) burada yerlerine yazılırsa

$$\bar{b}^{1}_{12}=g_{11}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_v+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^1+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]$$
$$\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_u+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^1+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^1+k_1^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]$$
$$+g_{22}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_v+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^2+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^2+k_2^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]$$
$$\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_u+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^2+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^2\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]$$

$$+\left[\frac{c_{22}^1(h_1)_v}{\rho_1\mu g_{22}}-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\right]\left[\frac{c_{11}^1(h_1)_u}{\rho_1\eta g_{11}}-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\right]+\left(\frac{c_{11}^2c_{22}^2(h_1)_v(h_1)_u}{(\rho_1)^2\eta\mu g_{11}g_{22}}\right)$$

elde edilir. Bu durumda (2.4) ten $\overline{b}_{12}^1$ katsayısı

$$\overline{b}_{12}^1=g_{11}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_v+\frac{(h_1)_u(g_{11})_v}{2\eta(g_{11})^2}-\frac{(h_1)_v(g_{22})_u}{2\mu g_{11}g_{22}}\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]$$
$$\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_u+\frac{(h_1)_u(g_{11})_u}{2\eta(g_{11})^2}+\frac{(h_1)_v(g_{11})_v}{2\mu g_{11}g_{22}}+k_1^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]$$
$$+g_{22}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_v+\frac{(h_1)_u(g_{22})_u}{2\eta g_{11}g_{22}}+\frac{(h_1)_v(g_{22})_v}{2\mu(g_{22})^2}+k_2^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]$$
$$\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_u+\frac{(h_1)_u(g_{11})_v}{2\eta g_{11}g_{22}}+\frac{(h_1)_v(g_{22})_u}{2\mu(g_{22})^2}\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]$$
$$+\left[\frac{c_{22}^1(h_1)_v}{\rho_1\mu g_{22}}-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\right]\left[\frac{c_{11}^1(h_1)_u}{\rho_1\eta g_{11}}-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_u\right]+\left(\frac{c_{11}^2c_{22}^2(h_1)_v(h_1)_u}{(\rho_1)^2\eta\mu g_{11}g_{22}}\right)$$

şeklindedir. Diğer taraftan, $\overline{b}_{22}^1$ katsayısı için teorem 2.3.26 dan

$$\overline{b}_{22}^1=\left\langle(\overline{N}_1)_v,(\overline{N}_1)_v\right\rangle$$

olup (4.36) burada yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\overline{b}_{22}^1=g_{11}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_v+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^1+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]^2$$
$$+g_{22}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_v+\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^2+\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^2+k_2^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]^2$$
$$+\left(\frac{c_{22}^1(h_1)_v}{\rho_1\mu g_{22}}-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\right)^2+\left(\frac{c_{22}^2(h_1)_v}{\rho_1\mu g_{22}}\right)^2$$

bulunur. (2.4) burada yerine yazılırsa

$$\overline{b}_{22}^1=g_{11}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right)_v+\frac{(h_1)_u(g_{11})_v}{2\eta(g_{11})^2}-\frac{(h_1)_v(g_{22})_u}{2\mu g_{11}g_{22}}\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_u}{\eta g_{11}}\right]^2$$
$$+g_{22}\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right)_v+\frac{(h_1)_u(g_{22})_u}{2\eta g_{11}g_{22}}+\frac{(h_1)_v(g_{22})_v}{2\mu(g_{22})^2}+k_2^1\right)+\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\frac{(h_1)_v}{\mu g_{22}}\right]^2$$
$$+\left(\frac{c_{22}^1(h_1)_v}{\rho_1\mu g_{22}}-\left(\frac{1}{\rho_1}\right)_v\right)^2+\left(\frac{c_{22}^2(h_1)_v}{\rho_1\mu g_{22}}\right)^2$$

elde edilir. Benzer şekilde $\overline{b}^{2}_{jk}$ katsayılarını hesaplayalım. (4.23) eşitliğindeki

$$\overline{N}_2 = \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_2\right)$$

denkleminin u parametresine göre türevi alınırsa

$$(\overline{N}_2)_u = \frac{1}{\rho_2}\left[\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_u X_u + \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}} X_{uu} + \left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_u X_v + \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}} X_{uv} + (N_2)_u\right] + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u\left[\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}} X_u + \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}} X_v + N_2\right]$$

bulunur. Bu son eşitlikte (3.1) ve (4.4) yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}(\overline{N}_2)_u = &\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma^1_{11} + \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma^1_{12} + k_1^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right] X_u \\ &+ \left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_u + \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma^2_{11} + \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma^2_{12}\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right] X_v \\ &- \left(\frac{c^1_{11}(h_2)_u}{\rho_2 \eta g_{11}}\right) N_1 - \left(\frac{c^2_{11}(h_2)_u}{\rho_2 \eta g_{11}} - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u\right) N_2\end{aligned} \quad \textbf{(4.37)}$$

elde edilir. Teorem 2.3.26 dan

$$\overline{b}^2_{11} = \left\langle (\overline{N}_2)_u, (\overline{N}_2)_u \right\rangle$$

olup (4.37) den

$$\begin{aligned}\overline{b}^2_{11} = &\, g_{11}\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma^1_{11} + \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma^1_{12} + k_1^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right]^2 \\ &+ g_{22}\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_u + \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma^2_{11} + \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma^2_{12}\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right]^2 \\ &+ \left(\frac{c^1_{11}(h_2)_u}{\rho_2 \eta g_{11}}\right)^2 + \left(\frac{c^2_{11}(h_2)_u}{\rho_2 \eta g_{11}} - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u\right)^2\end{aligned}$$

yazılır ve bu son eşitlikte (2.4) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\overline{b}^2_{11} = &\, g_{11}\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_2)_u(g_{11})_u}{2\eta (g_{11})^2} + \frac{(h_2)_v(g_{11})_v}{2\mu g_{11} g_{22}} + k_1^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right]^2 \\ &+ g_{22}\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_u - \frac{(h_2)_u(g_{11})_v}{2\eta g_{11} g_{22}} + \frac{(h_2)_v(g_{22})_u}{2\mu (g_{22})^2}\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right]^2 \\ &+ \left(\frac{c^1_{11}(h_2)_u}{\rho_2 \eta g_{11}}\right)^2 + \left(\frac{c^2_{11}(h_2)_u}{\rho_2 \eta g_{11}} - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u\right)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\overline{b}_{12}^{2}$ katsayısı için (4.23) deki

$$\overline{N}_2=\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_2$$

eşitliğinin v parametresine göre türevi alınırsa

$$(\overline{N}_2)_v=\frac{1}{\rho_2}\left[\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_v X_u+\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}X_{uv}+\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_v X_v+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}X_{vv}+(N_2)_v\right]$$
$$+\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\left[\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}X_u+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}X_v+N_2\right]$$

bulunur. Bu son eşitlikte (3.1) ve (4.4) yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}(\overline{N}_2)_v=&\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_v+\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^{1}+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^{1}\right)+\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right]X_u\\&+\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_v+\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^{2}+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^{2}+k_2^2\right)+\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right]X_v\\&-\left(\frac{c_{22}^{1}(h_2)_v}{\rho_2\mu g_{22}}\right)N_1-\left(\frac{c_{22}^{2}(h_2)_v}{\rho_2\mu g_{22}}-\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\right)N_2\end{aligned}\qquad \textbf{(4.38)}$$

elde edilir. Teorem 2.3.26 dan

$$\overline{b}_{12}^{2}=\left\langle(\overline{N}_2)_u,(\overline{N}_2)_v\right\rangle$$

olup bu son eşitlikte (4.37) ve (4.38) yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}b_{12}^{2}=&\,g_{11}\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_v+\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^{1}+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^{1}\right)+\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right]\\&\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_u+\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^{1}+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^{1}+k_1^2\right)+\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right]\\&+g_{22}\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_v+\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{12}^{2}+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{22}^{2}+k_2^2\right)+\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right]\\&\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_u+\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\Gamma_{11}^{2}+\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\Gamma_{12}^{2}\right)+\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right]\\&+\left(\frac{c_{22}^{1}c_{11}^{1}(h_2)_u(h_2)_v}{(\rho_2)^2\eta\mu g_{11}g_{22}}\right)+\left(\frac{c_{22}^{2}(h_2)_v}{\rho_2\mu g_{22}}-\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\right)\left(\frac{c_{11}^{2}(h_2)_u}{\rho_2\eta g_{11}}-\left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u\right)\end{aligned}$$

bulunur. Burada (2.4) yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
b_{12}^{2} = g_{11} &\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_v + \frac{(h_2)_u(g_{11})_v}{2\eta(g_{11})^2} - \frac{(h_2)_v(g_{22})_u}{2\mu g_{11}g_{22}}\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right] \\
&\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_2)_u(g_{11})_u}{2\eta(g_{11})^2} + \frac{(h_2)_v(g_{11})_v}{2\mu g_{11}g_{22}} + k_1^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right] \\
+ g_{22} &\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_v + \frac{(h_2)_u(g_{22})_u}{2\eta g_{11}g_{22}} + \frac{(h_2)_v(g_{22})_v}{2\mu(g_{22})^2} + k_2^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right] \\
&\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_u + \frac{(h_2)_u(g_{11})_v}{2\eta g_{11}g_{22}} + \frac{(h_2)_v(g_{22})_u}{2\mu(g_{22})^2}\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right] \\
&+\left(\frac{c_{22}^1 c_{11}^1 (h_2)_u (h_2)_v}{(\rho_2)^2\,\eta\mu g_{11}g_{22}}\right) + \left(\frac{c_{22}^2(h_2)_v}{\rho_2\mu g_{22}} - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\right)\left(\frac{c_{11}^2(h_2)_u}{\rho_2\eta g_{11}} - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_u\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak $\bar{b}_{22}^{2}$ katsayısı için teorem 2.3.26 dan

$$
\bar{b}_{22}^{2} = \left\langle (\bar{N}_2)_v, (\bar{N}_2)_v \right\rangle
$$

olup (4.38) bu son eşitlikte yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\bar{b}_{22}^{2} = g_{11} &\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right)_v + \frac{(h_2)_u(g_{11})_v}{2\eta(g_{11})^2} - \frac{(h_2)_v(g_{22})_u}{2\mu g_{11}g_{22}}\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v \frac{(h_2)_u}{\eta g_{11}}\right]^2 \\
+ g_{22} &\left[\frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right)_v + \frac{(h_2)_u(g_{22})_u}{2\eta g_{11}g_{22}} + \frac{(h_2)_v(g_{22})_v}{2\mu(g_{22})^2} + k_2^2\right) + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v \frac{(h_2)_v}{\mu g_{22}}\right]^2 \\
&+\left(\frac{c_{22}^1(h_2)_v}{\rho_2\mu g_{22}}\right)^2 + \left(\frac{c_{22}^2(h_2)_v}{\rho_2\mu g_{22}} - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)_v\right)^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $i=1$ iken $r=2$ ve $i=2$ iken $r=1$ alınmak suretiyle $\overline{M}$ nin III. temel formlarının katsayıları

$$
\left\{
\begin{aligned}
\bar{b}_{11}^{i} = g_{11} &\left[\frac{1}{\rho_i}\left(\left(\frac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_i)_u(g_{11})_u}{2\eta(g_{11})^2} + \frac{(h_i)_v(g_{11})_v}{2\mu g_{11}g_{22}} + k_1^i\right) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_u \frac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right]^2 \\
+ g_{22} &\left[\frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right)_u - \frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{2\eta g_{11}g_{22}} + \frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{2\mu(g_{22})^2}\right) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_u \frac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right]^2 \\
&+\left[\left(\frac{c_{11}^i(h_1)_u}{\rho_i\eta g_{11}}\right) - \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_u\right]^2 + \left(\frac{c_{11}^r(h_i)_u}{\rho_i\eta g_{11}}\right)^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
\bar{b}^i_{12} = g_{11}\left[\frac{1}{\rho_i}\left(\left(\frac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right)_v + \frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{2\eta(g_{11})^2} - \frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{2\mu g_{11}g_{22}}\right) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_v \frac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right] \\
\qquad \left[\frac{1}{\rho_i}\left(\left(\frac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right)_u + \frac{(h_i)_u(g_{11})_u}{2\eta(g_{11})^2} + \frac{(h_i)_v(g_{11})_v}{2\mu g_{11}g_{22}} + k_1^i\right) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_u \frac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right] \\
\quad + g_{22}\left[\frac{1}{\rho_i}\left(\left(\frac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right)_v + \frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{2\eta g_{11}g_{22}} + \frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{2\mu(g_{22})^2} + k_2^i\right) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_v \frac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right] \\
\qquad \left[\frac{1}{\rho_i}\left(\left(\frac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right)_u + \frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{2\eta g_{11}g_{22}} + \frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{2\mu(g_{22})^2}\right) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_u \frac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right] \\
\qquad + \left[\frac{c^i_{22}(h_i)_v}{\rho_i\mu g_{22}} - \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_v\right]\left[\frac{c^i_{11}(h_i)_u}{\rho_i\eta g_{11}} - \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_u\right] + \left(\frac{c^r_{11}c^r_{22}(h_i)_v(h_i)_u}{(\rho_i)^2\eta\mu g_{11}g_{22}}\right) \\
\bar{b}^i_{22} = g_{11}\left[\frac{1}{\rho_i}\left(\left(\frac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right)_v + \frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{2\eta(g_{11})^2} - \frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{2\mu g_{11}g_{22}}\right) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_v \frac{(h_i)_u}{\eta g_{11}}\right]^2 \\
\quad + g_{22}\left[\frac{1}{\rho_i}\left(\left(\frac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right)_v + \frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{2\eta g_{11}g_{22}} + \frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{2\mu(g_{22})^2} + k_2^i\right) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_v \frac{(h_i)_v}{\mu g_{22}}\right]^2 \\
\qquad + \left(\frac{c^i_{22}(h_i)_v}{\rho_i\mu g_{22}} - \left(\frac{1}{\rho_i}\right)_v\right)^2 + \left(\frac{c^r_{22}(h_i)_v}{\rho_i\mu g_{22}}\right)^2
\end{array}\right.
$$

şeklindedir.

Şimdi M yüzeyinin destek fonksiyonlarının sabit olması halinde, M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin temel formlarının katsayıları arasındaki bağıntıları inceleyelim.

Teorem 4.1.7. M , E^4 ’te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M nin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin I. temel formlarının katsayıları arasında

$$
\left\{\begin{array}{l}
\overline{g}_{11} = \eta^2 g_{11} \\
\overline{g}_{12} = 0 \\
\overline{g}_{22} = \mu^2 g_{22}
\end{array}\right.
$$

bağıntısı vardır.

İspat: M ’nin pedal yüzeyi olan $\overline{M}$ yüzeyinin (4.1) denklemindeki

$$\overline{X} = -h_1N_1 - h_2N_2$$

pozisyon vektörünün, M ’nin destek fonksiyonlarının sabit olduğu göz önünde tutularak, u ve v parametrelerine göre türevleri alınırsa

$$\begin{cases} \overline{X}_u = -h_1(N_1)_u - h_2(N_2)_u \\ \overline{X}_v = -h_1(N_1)_v - h_2(N_2)_v \end{cases} \quad \textbf{(4.39)}$$

bulunur. (4.4) ten bu son eşitlik

$$\begin{cases} \overline{X}_u = (-h_1k_1^1 - h_2k_1^2)X_u = \eta X_u \\ \overline{X}_v = (-h_1k_2^1 - h_2k_2^2)X_v = \mu X_v \end{cases} \quad \textbf{(4.40)}$$

şeklindedir. O halde M ve $\overline{M}$ ’nin, sırasıyla I. temel formlarının g_{ij} ve $\overline{g}_{ij}$ $(i=1,2)$ katsayıları arasındaki bağıntı

$$\overline{g}_{11} = \left\langle \overline{X}_u, \overline{X}_u \right\rangle = \eta^2 g_{11} \ , \quad \textbf{(4.41)}$$

$$\overline{g}_{12} = \left\langle \overline{X}_u, \overline{X}_v \right\rangle = 0 \, , \quad \textbf{(4.42)}$$

$$\overline{g}_{22} = \left\langle \overline{X}_v, \overline{X}_v \right\rangle = \mu^2 g_{22} \quad \textbf{(4.43)}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.8. M , E^4 ’te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M nin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin II. temel formlarının katsayıları arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} \overline{c}_{11}^{\,i} = \eta c_{11}^i, \\ \overline{c}_{12}^{\,i} = c_{12}^i = 0, \quad i=1,2 \\ \overline{c}_{22}^{\,i} = \mu c_{22}^i \end{cases} \quad \textbf{(4.44)}$$

şeklindedir.

İspat: M yüzeyinin h_i destek fonksiyonları sabit olduğundan

$$\left(h_i\right)_u = \left(h_i\right)_v = \left(h_i\right)_{uv} = \left(h_i\right)_{vv} = 0 \, , \quad i=1,2 \quad \textbf{(4.45)}$$

olup, bu son eşitlik (4.24) te yerlerine yazılırsa

$$\overline{c}_{11}^{\,i} = \eta c_{11}^i, \ \overline{c}_{12}^{\,i} = c_{12}^i = 0 \ \text{ve} \ \overline{c}_{22}^{\,i} = \mu c_{22}^i$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.9. M , E^4 ’te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M yüzeyinin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde $\overline{M}$ pedal yüzeyinin parametre eğrileri birer eğrilik çizgisidir.

Teorem 4.1.10. M, E^4'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M'nin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde $\overline{M}$ pedal yüzeyinin III. temel formunun katsayıları

$$\begin{cases} \overline{b}^{i}_{11} = g_{11}(k^i_1)^2, \\ \overline{b}^{i}_{12} = 0, \qquad\qquad i = 1,2 \\ \overline{b}^{i}_{22} = g_{22}(k^i_2)^2 \end{cases} \tag{4.46}$$

şeklindedir. Burada k^i_1 ve k^i_2, M'nin N_i normal vektörlerine göre asli eğrilikleridir.

İspat: M'nin destek fonksiyonları sabit olduğundan (4.22) den

$$\overline{N}_1 = N_1$$

yazılabilir. Bu son eşitliğin u ve v parametrelerine göre türevleri alınırsa

$$\begin{cases} (\overline{N}_1)_u = (N_1)_u = k^1_1 X_u \\ (\overline{N}_1)_v = (N_1)_v = k^1_2 X_v \end{cases} \tag{4.47}$$

bulunur. Şimdi $\overline{M}$'nin $\overline{b}^{1}_{11}$, $\overline{b}^{1}_{12}$, $\overline{b}^{1}_{22}$ III. temel formunun katsayılarını hesaplayalım.

$\overline{b}^{1}_{11}$ için,

$$\overline{b}^{1}_{11} = \left\langle (\overline{N}_1)_u, (\overline{N}_1)_u \right\rangle$$

olup (4.47) burada yerine yazılırsa

$$\overline{b}^{1}_{11} = \left\langle k^1_1 X_u, k^1_1 X_u \right\rangle,$$

$$\overline{b}^{1}_{11} = \left(k^1_1\right)^2 \left\langle X_u, X_u \right\rangle,$$

$$\overline{b}^{1}_{11} = (k^1_1)^2 g_{11}$$

elde edilir.

$\overline{b}^{1}_{12}$ için,

$$\overline{b}^{1}_{12} = \left\langle (\overline{N}_1)_u, (\overline{N}_1)_v \right\rangle$$

olup (4.47) burada yerine yazılırsa

$$\overline{b}^{1}_{12} = \left\langle k^1_1 X_u, k^1_2 X_v \right\rangle,$$

$$\overline{b}^{1}_{12} = k^1_1 k^1_2 \left\langle X_u, X_v \right\rangle$$

bulunur. M'nin parametre eğrileri eğrilik çizgisi olduğundan $\left\langle X_u, X_v \right\rangle = 0$ olup, buradan

$$\overline{b}_{12}^{1} = 0$$

elde edilir.

$\overline{b}_{22}^{1}$ için,

$$\overline{b}_{22}^{1} = \left\langle (\overline{N}_1)_v, (\overline{N}_1)_v \right\rangle$$

olup burada (4.47) yerine yazılırsa

$$\overline{b}_{22}^{1} = \left\langle k_2^1 X_v, k_2^1 X_v \right\rangle,$$

$$\overline{b}_{22}^{1} = (k_2^1)^2 \left\langle X_v, X_v \right\rangle,$$

$$\overline{b}_{22}^{1} = (k_2^1)^2 g_{22}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\overline{M}$ 'nin $\overline{b}_{11}^{2}, \overline{b}_{12}^{2}, \overline{b}_{22}^{2}$ III. temel formunun katsayıları hesaplanırsa

$$\overline{b}_{11}^{2} = g_{11}(k_1^2)^2,$$

$$\overline{b}_{12}^{2} = 0,$$

$$\overline{b}_{22}^{2} = g_{22}(k_2^2)^2$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.11. M , E^4 'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M nin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ 'nin, sırasıyla, w ve $\overline{w}$ alan elementleri arasında

$$\overline{w}^2 = \eta^2 \mu^2 w^2$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 4.1.12. M , E^4 'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M yüzeyinin bir pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde $\overline{M}$ yüzeyinin III. temel formu ile M yüzeyinin I. ve II. temel formlarının katsayıları arasında

$$\begin{cases} \overline{b}_{11}^{i} = \dfrac{(c_{11}^{i})^2}{g_{11}} \\ \overline{b}_{12}^{i} = 0 \qquad , \quad i = 1,2 \\ \overline{b}_{22}^{i} = \dfrac{(c_{22}^{i})^2}{g_{22}} \end{cases} \tag{4.48}$$

bağıntısı vardır.

İspat: M 'nin asli eğrilikleri k_1^i ve k_2^i olsun. Teorem 2.3.28 den

$$\begin{cases} k_1^i = \dfrac{c_{11}^{i}}{g_{11}} \\ k_2^i = \dfrac{c_{22}^{i}}{g_{22}} \end{cases} , \quad i = 1,2 \tag{4.49}$$

şeklindedir. O halde (4.46) ve (4.49) bağıntıları birleştirilirse, ispatın açık olduğu görülür.

Teorem 4.1.13. M , E^4 'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M 'nin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M yüzeyinin k_1^i ve k_2^i asli eğrilikleri ile $\overline{M}$ yüzeyinin $\overline{k}_1^i$ ve $\overline{k}_2^i$ asli eğrilikleri arasında

$$\begin{cases} \overline{k}_1^i = \dfrac{1}{\eta} k_1^i \\ \overline{k}_2^i = \dfrac{1}{\mu} k_2^i \end{cases} , \quad i = 1,2 \tag{4.50}$$

bağıntısı vardır.

İspat: Teorem 2.3.28 den, $\overline{M}$ yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\overline{k}_1^1 = \frac{\overline{c}_{11}^{1}}{\overline{g}_{11}} \;, \; \overline{k}_2^1 = \frac{\overline{c}_{22}^{1}}{\overline{g}_{22}} \;, \; \overline{k}_1^2 = \frac{\overline{c}_{11}^{2}}{\overline{g}_{11}} \text{ ve } \overline{k}_2^2 = \frac{\overline{c}_{22}^{2}}{\overline{g}_{22}}$$

şeklindedir. O halde, burada (4.41), (4.42), (4.43) ve (4.44) kullanılarak $\overline{M}$ nin asli eğrilikleri hesaplanırsa

$$\overline{k}_1^1 = \frac{\overline{c}_{11}^{1}}{\overline{g}_{11}} = \frac{\eta c_{11}^1}{\eta^2 g_{11}} \Rightarrow \overline{k}_1^1 = \frac{1}{\eta}\frac{c_{11}^1}{g_{11}} \Rightarrow \overline{k}_1^1 = \frac{1}{\eta} k_1^1 ,$$

$$\overline{k}_2^1 = \frac{\overline{c}_{22}^{1}}{\overline{g}_{22}} = \frac{\mu c_{22}^1}{\mu^2 g_{22}} \Rightarrow \overline{k}_2^1 = \frac{1}{\mu}\frac{c_{22}^1}{g_{22}} \Rightarrow \overline{k}_2^1 = \frac{1}{\mu} k_2^1 ,$$

$$\bar{k}_1^2=\frac{\bar{c}_{11}^2}{\bar{g}_{11}}=\frac{\eta c_{11}^2}{\eta^2 g_{11}}\Rightarrow \bar{k}_1^2=\frac{1}{\eta}\frac{c_{11}^2}{g_{11}}\Rightarrow \bar{k}_1^2=\frac{1}{\eta}k_1^2,$$

$$\bar{k}_2^2=\frac{\bar{c}_{22}^2}{\bar{g}_{22}}=\frac{\mu c_{22}^2}{\mu^2 g_{22}}\Rightarrow \bar{k}_2^2=\frac{1}{\mu}\frac{c_{22}^2}{g_{22}}\Rightarrow \bar{k}_2^2=\frac{1}{\mu}k_2^2$$

bağıntıları elde edilir.

Teorem 4.1.14. M , E^4 ’te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M nin pedal yüzeyi olsun. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin, sırasıyla, K ve $\overline{K}$ total Gauss eğrilikleri arasında

$$\overline{K}=\left(\frac{w}{\bar{w}\rho_1}\right)^2\eta\mu K+\frac{c_{11}^2c_{22}^2\eta\mu(\rho_1^2-\rho_2^2)}{\left(\bar{w}\rho_1\rho_2\right)^2}+\sigma \tag{4.51}$$

bağıntısı vardır. Burada

$$\sigma=\frac{1}{\bar{w}^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\left(\rho_i\right)^2}\left\{\begin{array}{l}\eta c_{11}^i\left[-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right]\\ +\left[-\frac{(h_i)_u}{\eta}(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uu}\right]\\ \left[\mu c_{22}^i-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right]\\ -\left[\frac{-\eta_v(h_i)_u}{\eta}+\frac{(h_i)_v}{\mu}((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{\eta g_{11}}+\frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uv}\right]^2\end{array}\right\}.$$

İspat: M ve $\overline{M}$ ’nin total Gauss eğrilikleri, sırasıyla K ve $\overline{K}$ olsun. O halde (3.8) ve (3.12) den M ve $\overline{M}$ ’nin Gauss eğrilikleri

$$K=\frac{1}{w^2}\sum_{k=1}^{2}(c_{11}^k c_{22}^k)=\frac{1}{w^2}(c_{11}^1c_{22}^1+c_{11}^2c_{22}^2) \tag{4.52}$$

ve

$$\overline{K}=\frac{1}{\bar{w}^2}\sum_{k=1}^{2}(\bar{c}_{11}^k\bar{c}_{22}^k-(\bar{c}_{12}^k)^2) \tag{4.53}$$

şeklindedir. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$\overline{K}=\frac{1}{\bar{w}^2}\left[\bar{c}_{11}^1\bar{c}_{22}^1-(\bar{c}_{12}^1)^2+\bar{c}_{11}^2\bar{c}_{22}^2-(\bar{c}_{12}^2)^2\right] \tag{4.54}$$

bulunur. (4.24) eşitliği (4.54) te yerlerine yazılırsa

$$
\overline{K}=\frac{1}{\overline{w}^{2}}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\rho_1)^2}\left[\eta c_{11}^{1}-\frac{(h_1)_u}{\eta}\left[\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2\right]-\frac{\eta}{2}\left[\frac{(h_1)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_1)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right]+(h_1)_{uu}\right]\\
&\left[\mu c_{22}^{1}-\frac{(h_1)_v}{\mu}\left[\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2\right]+\frac{\mu}{2}\left[\frac{(h_1)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_1)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right]+(h_1)_{vv}\right]\\
&-\frac{1}{(\rho_1)^2}\left[\frac{-\eta_v(h_1)_u}{\eta}+\frac{(h_1)_v}{\mu}\left[(h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2\right]-\frac{\eta}{2}\left[\frac{(h_1)_u(g_{11})_v}{\eta g_{11}}+\frac{(h_1)_v(g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right]+(h_1)_{uv}\right]^2\\
&+\frac{1}{(\rho_2)^2}\left[\eta c_{11}^{2}-\frac{(h_2)_u}{\eta}\left[\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2\right]-\frac{\eta}{2}\left[\frac{(h_2)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_2)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right]+(h_2)_{uu}\right]\\
&\left[\mu c_{22}^{2}-\frac{(h_2)_v}{\mu}\left[\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2\right]+\frac{\mu}{2}\left[\frac{(h_2)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_2)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right]+(h_2)_{vv}\right]\\
&-\frac{1}{(\rho_2)^2}\left[\frac{-\eta_v(h_2)_u}{\eta}+\frac{(h_2)_v}{\mu}((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_2)_u(g_{11})_v}{\eta g_{11}}+\frac{(h_2)_v(g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right)+(h_2)_{uv}\right]^2
\end{aligned}
\right\}
$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler ve kısaltmalar yapılırsa

$$
\overline{K}=\frac{\eta\mu}{\left(\overline{w}\rho_1\right)^2}\left[c_{11}^1c_{22}^1+c_{11}^2c_{22}^2+\frac{c_{11}^2c_{22}^2(\rho_1^2-\rho_2^2)}{\rho_2^2}\right]
$$

$$
+\frac{1}{\overline{w}^{2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{(\rho_i)^2}\left\{
\begin{aligned}
&\eta c_{11}^{i}\left[-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right]\\
&+\left[-\frac{(h_i)_u}{\eta}(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uu}\right]\\
&\left[\mu c_{22}^{i}-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right]\\
&-\left[\frac{-\eta_v(h_i)_u}{\eta}+\frac{(h_i)_v}{\mu}((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{\eta g_{11}}+\frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uv}\right]^2
\end{aligned}
\right\}
$$

bulunur. (4.52) bu son eşitlikte yerine yazılırsa

$$
\overline{K}=\frac{\eta\mu}{\left(\overline{w}\rho_1\right)^2}\left[Kw^2+\frac{c_{11}^2c_{22}^2(\rho_1^2-\rho_2^2)}{\rho_2^2}\right]
$$

$$
+\frac{1}{\overline{w}^{2}}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{(\rho_i)^2}\left\{
\begin{aligned}
&\eta c_{11}^{i}\left[-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right]\\
&+\left[-\frac{(h_i)_u}{\eta}(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uu}\right]\\
&\left[\mu c_{22}^{i}-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right]\\
&-\left[\frac{-\eta_v(h_i)_u}{\eta}+\frac{(h_i)_v}{\mu}((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{\eta g_{11}}+\frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uv}\right]^2
\end{aligned}
\right\}
$$

elde edilir. Bu son eşitlikteki denklemlerimizi kısaltmak için

$$\sigma=\frac{1}{\overline{w}^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{(\rho_i)^2}\left\{\begin{array}{l}\eta c_{11}^i\left[-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right]\\ +\left[-\frac{(h_i)_u}{\eta}(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uu}\right]\\ \left[\mu c_{22}^i-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right]\\ -\left[\frac{-\eta_v(h_i)_u}{\eta}+\frac{(h_i)_v}{\mu}((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{\eta g_{11}}+\frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uv}\right]^2\end{array}\right\}$$

alınırsa M ve $\overline{M}$ 'nin total Gauss eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\overline{K}=\left(\frac{w}{\overline{w}\rho_1}\right)^2\eta\mu K+\frac{c_{11}^2c_{22}^2\eta\mu(\rho_1^2-\rho_2^2)}{\left(\overline{w}\rho_1\rho_2\right)^2}+\sigma \tag{4.55}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.1.15. M , E^4 'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M yüzeyinin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ 'nin total Gauss eğrilikleri arasında

$$\overline{K}=K\frac{1}{\eta\mu}$$

bağıntısı vardır.

İspat: (4.51) deki

$$\overline{K}=\left(\frac{w}{\overline{w}\rho_1}\right)^2\eta\mu K+\frac{c_{11}^2c_{22}^2\eta\mu(\rho_1^2-\rho_2^2)}{\left(\overline{w}\rho_1\rho_2\right)^2}+\sigma$$

denkleminde sonuç 4.1.11 deki eşitlik yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\overline{K}=\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^2\frac{1}{\eta\mu}K+\frac{c_{11}^2c_{22}^2\eta\mu(\rho_1^2-\rho_2^2)}{\left(\overline{w}\rho_1\rho_2\right)^2}+\sigma$$

elde edilir. Burada

$$\sigma = \frac{1}{\overline{w}^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\left(\rho_i\right)^2}\left\{\begin{array}{l} \eta c_{11}^i\left[-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right] \\ +\left[-\frac{(h_i)_u}{\eta}(\eta_u-(h_1)_u k_1^1-(h_2)_u k_1^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{11})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uu}\right] \\ \left[\mu c_{22}^i-\frac{(h_i)_v}{\mu}(\mu_v-(h_1)_v k_2^1-(h_2)_v k_2^2)+\frac{\mu}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{22})_u}{\eta g_{11}}-\frac{(h_i)_v(g_{22})_v}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{vv}\right] \\ -\left[\frac{-\eta_v(h_i)_u}{\eta}+\frac{(h_i)_v}{\mu}((h_1)_u k_2^1+(h_2)_u k_2^2)-\frac{\eta}{2}\left(\frac{(h_i)_u(g_{11})_v}{\eta g_{11}}+\frac{(h_i)_v(g_{22})_u}{\mu g_{22}}\right)+(h_i)_{uv}\right]^2 \end{array}\right\},$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{(h_1)_u^2}{\eta^2}+\frac{(h_1)_v^2}{\mu^2}+1}$$

ve

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{(h_2)_u^2}{\eta^2}+\frac{(h_2)_v^2}{\mu^2}+1}$$

olup, M yüzeyinin destek fonksiyonları sabit olduğundan $\sigma = 0$ ve $\rho_1 = \rho_2 = 1$. O halde M ve $\overline{M}$ 'nin total Gauss eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$\overline{K} = K\frac{1}{\eta\mu} \qquad \textbf{(4.56)}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.1.16. M , E^4 'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M yüzeyinin bir pedal yüzeyi olsun. Eğer M açılabilir bir yüzey ise $\overline{M}$ de açılabilir bir yüzeydir.

İspat: M yüzeyi açılabilir bir yüzey olduğundan $K = 0$ olup, (4.56) denkleminden $\overline{K} = 0$. O halde $\overline{M}$ yüzeyi de açılabilirdir.

Sonuç 4.1.17. M , E^4 'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M yüzeyinin bir pedal yüzeyi olsun. M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin Gauss eğrilikleri, sırasıyla K^i ve $\overline{K}^i$ olmak üzere Gauss eğrilikleri arasında

$$\overline{K}^i = \frac{1}{\eta\mu}K^i \ , \ i = 1,2 \qquad \textbf{(4.57)}$$

bağıntıları vardır.

İspat: Teorem 2.3.23 ten, M ve $\overline{M}$ 'nin Gauss eğrilikleri

$$K^i = k_1^i k_2^i \qquad \textbf{(4.58)}$$

ve

$$\overline{K}^{i} = \overline{k}_1^{i}\overline{k}_2^{i} \qquad \textbf{(4.59)}$$

yazılabilir. (4.59) denkleminde (4.50) yerlerine yazılırsa

$$\overline{K}^{i} = \frac{1}{\eta\mu} k_1^{i} k_2^{i}$$

bulunur. Bu son eşitlik ve (4.58) birleştilirse

$$\overline{K}^{i} = \frac{1}{\eta\mu} K^{i}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.18. M , E^4'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M'nin bir pedal yüzeyi olsun. M ve $\overline{M}$'nin, sırasıyla Gauss torsiyonları K_N ve $\overline{K}_N$ arasında

$$K_N = \overline{K}_N = 0 \qquad \textbf{(4.60)}$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\overline{M}$'nin Gauss torsiyonu için, (3.9) bağıntısından

$$\overline{K}_N = \frac{1}{\overline{w}^2}[\overline{g}_{11}(\overline{c}_{12}^{1}\overline{c}_{22}^{2} - \overline{c}_{12}^{2}\overline{c}_{22}^{1}) - \overline{g}_{12}(\overline{c}_{11}^{1}\overline{c}_{22}^{1} - \overline{c}_{11}^{2}\overline{c}_{22}^{1}) + \overline{g}_{22}(\overline{c}_{11}^{1}\overline{c}_{12}^{2} - \overline{c}_{11}^{2}\overline{c}_{12}^{1})] \qquad \textbf{(4.61)}$$

yazılabilir. M'nin parametre eğrileri eğrilik çizgisi ve destek fonksiyonları sabit olduğundan sonuç 4.1.9 dan $\overline{M}$ yüzeyinin parametre eğrileri de birer eğrilik çizgisidir. Bu takdirde

$$\overline{g}_{12} = \overline{c}_{12}^{1} = \overline{c}_{12}^{2} = 0. \qquad \textbf{(4.62)}$$

(4.62) denklemi (4.53) te yerine yazılırsa

$$\overline{K}_N = 0 \qquad \textbf{(4.63)}$$

elde edilir. (3.13) ve (4.63) birleştirilirse

$$K_N = \overline{K}_N = 0$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.1.19. M , E^4'te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M'nin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin, sırasıyla, H ve $\overline{H}$ ortalama eğrilikleri arasında

$$\overline{H}=\frac{\eta\mu}{2\rho_1\rho_2\overline{w}^2}\left[w^2\mu\rho_2H+\mu\left(\rho_1-\rho_2\right)\left(c_{11}^2g_{22}+c_{22}^2g_{11}\right)+g_{11}(\eta-\mu)\left(c_{22}^1\rho_2-c_{22}^2\rho_1\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2\overline{w}^2}\sum_{i=1}^{2}\begin{bmatrix}A_i(\mu^2g_{22}+V)+B_i(\eta^2g_{11}+U)-2C_i((h_1)_u(h_1)_v+(h_2)_u(h_2)_v)\\ \frac{1}{\rho_i}\mu c_{22}^iU+\frac{1}{\rho_i}\eta c_{11}^iV\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.64)}$$

bağıntısı vardır. Burada

$$A_i=\frac{1}{\rho_i}\left[-\frac{(h_i)_u}{\eta}\left[\eta_u-(h_1)_uk_1^1-(h_2)_uk_1^2\right]-\eta\left[\Gamma_{11}^1\frac{(h_i)_u}{\eta}+\Gamma_{11}^2\frac{(h_i)_v}{\mu}\right]+(h_i)_{uu}\right],$$
$$B_i=\frac{1}{\rho_i}\left[-\frac{(h_i)_v}{\mu}\left[\mu_v-(h_1)_vk_2^1-(h_2)_vk_2^2\right]-\mu\left[\Gamma_{22}^1\frac{(h_i)_u}{\eta}+\Gamma_{22}^2\frac{(h_i)_v}{\mu}\right]+(h_i)_{vv}\right],$$
$$C_i=\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{-\eta_v(h_i)_u}{\eta}+\frac{(h_i)_v}{\mu}\left[(h_1)_uk_2^1+(h_2)_uk_2^2\right]-\eta\left[\Gamma_{12}^1\frac{(h_i)_u}{\eta}+\Gamma_{12}^2\frac{(h_i)_v}{\mu}\right]+(h_i)_{uv}\right].$$

İspat: (3.10) ve (3.14) bağıntısından M ve $\overline{M}$ 'nin, sırasıyla, H ve $\overline{H}$ ortalama eğrilikleri için,

$$H=\frac{1}{2w^2}\sum_{i=1}^{2}(c_{11}^ig_{22}+c_{22}^ig_{11}) \quad \textbf{(4.65)}$$

ve

$$\overline{H}=\frac{1}{2\overline{w}^2}\sum_{i=1}^{2}(\overline{c}_{11}^i\overline{g}_{22}+\overline{c}_{22}^i\overline{g}_{11}-2\overline{c}_{12}^i\overline{g}_{12}). \quad \textbf{(4.66)}$$

yazılabilir. (4.8) ve (4.34) bağıntıları (4.66) da yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{H}=\frac{\eta\mu}{2\rho_1\rho_2\overline{w}^2}\begin{bmatrix}\mu\rho_2\sum_{i=1}^{2}(c_{11}^ig_{22}+c_{22}^ig_{11})\\ +\mu\left(\rho_1-\rho_2\right)\left(c_{11}^2g_{22}+c_{22}^2g_{11}\right)+g_{11}(\eta-\mu)\left(c_{22}^1\rho_2-c_{22}^2\rho_1\right)\end{bmatrix}$$
$$+\frac{1}{2\overline{w}^2}\sum_{i=1}^{2}\begin{bmatrix}A_i(\mu^2g_{22}+V)+B_i(\eta^2g_{11}+U)-2C_i((h_1)_u(h_1)_v+(h_2)_u(h_2)_v)\\ \frac{1}{\rho_i}\mu c_{22}^iU+\frac{1}{\rho_i}\eta c_{11}^iV\end{bmatrix} \quad \textbf{(4.67)}$$

elde edilir. (4.65) bağıntısı (4.67) de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\overline{H}=\frac{\eta\mu}{2\rho_1\rho_2\overline{w}^2}\left[2w^2\mu\rho_2H+\mu\left(\rho_1-\rho_2\right)\left(c_{11}^2g_{22}+c_{22}^2g_{11}\right)+g_{11}(\eta-\mu)\left(c_{22}^1\rho_2-c_{22}^2\rho_1\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2\overline{w}^2}\sum_{i=1}^{2}\begin{bmatrix}A_i(\mu^2g_{22}+V)+B_i(\eta^2g_{11}+U)-2C_i((h_1)_u(h_1)_v+(h_2)_u(h_2)_v)\\ \frac{1}{\rho_i}\mu c_{22}^iU+\frac{1}{\rho_i}\eta c_{11}^iV\end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.1.20. M , E^4 'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M yüzeyinin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin ortalama eğrilikleri arasında

$$\overline{H} = \mu\rho_2 H + \frac{1}{2w^2} g_{11}(\eta - \mu)\left(c_{22}^1 - c_{22}^2\right)$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 4.1.21. M , E^4 'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M yüzeyinin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ 'nin, sırasıyla $\vec{H}$ ve $\overline{\vec{H}}$ ortalama eğrilik vektörleri arasında

$$\overline{\vec{H}} = \mu\vec{H} + \frac{1}{2w^2} \sum_{i=1}^{2} g_{11}(\eta - \mu)\left(c_{22}^1 - c_{22}^2\right)\vec{N}_i$$

bağıntısı vardır.

Teorem 4.1.22. M , E^4 'te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M 'nin bir pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ 'nin, sırasıyla, Γ_{ij}^k ve $\overline{\Gamma}_{ij}^k$, $i, j, k = 1, 2$ ikinci tipten Christoffel sembolleri arasında

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_{11}^1 = \dfrac{\eta}{\overline{w}^2}\left[\eta g_{11}\overline{g}_{22}\Gamma_{11}^1 - \mu g_{22}\overline{g}_{12}\Gamma_{11}^2 + \overline{g}_{22}P_{11} - \overline{g}_{12}R_{11}\right] \\ \overline{\Gamma}_{11}^2 = \dfrac{\eta}{\overline{w}^2}\left[\mu g_{22}\overline{g}_{11}\Gamma_{11}^2 - \eta g_{11}\overline{g}_{12}\Gamma_{11}^1 + \overline{g}_{11}R_{11} - \overline{g}_{12}P_{11}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_{12}^1 = \dfrac{\eta}{\overline{w}^2}\left[\eta g_{11}\overline{g}_{22}\Gamma_{12}^1 - \mu g_{22}\overline{g}_{12}\Gamma_{12}^2 + \overline{g}_{22}P_{12} - \overline{g}_{12}R_{12}\right] \\ \overline{\Gamma}_{12}^2 = \dfrac{\eta}{\overline{w}^2}\left[\mu g_{22}\overline{g}_{11}\Gamma_{12}^2 - \eta g_{11}\overline{g}_{12}\Gamma_{12}^1 - \overline{g}_{12}P_{12} + \overline{g}_{11}R_{12}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_{22}^1 = \dfrac{\mu}{\overline{w}^2}\left[\eta g_{11}\overline{g}_{22}\Gamma_{22}^1 - \mu g_{22}\overline{g}_{12}\Gamma_{22}^2 + \overline{g}_{22}P_{22} - \overline{g}_{12}R_{22}\right] \\ \overline{\Gamma}_{22}^2 = \dfrac{\mu}{\overline{w}^2}\left[\eta g_{11}\overline{g}_{11}\Gamma_{22}^1 - \mu g_{22}\overline{g}_{12}\Gamma_{22}^2 + \overline{g}_{11}P_{22} - \overline{g}_{12}R_{22}\right] \end{cases}$$

bağıntısı vardır. Burada

$$\begin{cases} P_{11} = \left[g_{11}\left(\eta_u - (h_1)_u k_1^1 - (h_2)_u k_1^2\right) + c_{11}^1 (h_1)_u + c_{11}^2 (h_2)_u + \dfrac{1}{2\eta}U_u \right] \\ R_{11} = \left[-c_{11}^1 (h_1)_v - c_{11}^2 (h_2)_v + \dfrac{1}{\eta}\left((h_1)_v (h_1)_{uu} + (h_2)_v (h_2)_{uu}\right) \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{12} = \left[\eta_v g_{11} + c_{12}^1 (h_1)_u + c_{12}^2 (h_2)_u + \frac{1}{2} U_v \right] \\ R_{12} = \left[-\frac{\mu}{\eta} g_{22} \left((h_1)_u k_2^1 + (h_2)_u k_2^2 \right) + c_{12}^1 (h_1)_v + c_{12}^2 (h_2)_v \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{22} = \left[c_{22}^1 (h_1)_u + c_{22}^2 (h_2)_u + \frac{1}{\mu} \left((h_1)_u (h_1)_{vv} + (h_2)_u (h_2)_{vv} \right) \right] \\ R_{22} = \left[g_{22} \left(\mu_v - (h_1)_v k_2^1 - (h_2)_v k_2^2 \right) + c_{22}^1 (h_1)_v + c_{22}^2 (h_2)_v + \frac{1}{2} V_v \right]. \end{cases}$$

İspat: (3.1) denkleminden $\overline{M}$ yüzeyi için

$$\begin{cases} \overline{X}_{uu} = \overline{\Gamma}_{11}^1 \overline{X}_u + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{X}_v - \overline{c}_{11}^1 \overline{N}_1 - \overline{c}_{11}^2 \overline{N}_2, \\ \overline{X}_{uv} = \overline{\Gamma}_{12}^1 \overline{X}_u + \overline{\Gamma}_{12}^2 \overline{X}_v - \overline{c}_{12}^1 \overline{N}_1 - \overline{c}_{12}^2 \overline{N}_2, \\ \overline{X}_{vv} = \overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{X}_u + \overline{\Gamma}_{22}^2 \overline{X}_v - \overline{c}_{22}^1 \overline{N}_1 - \overline{c}_{22}^2 \overline{N}_2 \end{cases} \tag{4.68}$$

yazılabilir. Bu son denklemdeki

$$\overline{X}_{uu} = \overline{\Gamma}_{11}^1 \overline{X}_u + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{X}_v - \overline{c}_{11}^1 \overline{N}_1 - \overline{c}_{11}^2 \overline{N}_2$$

eşitliğinin her iki tarafı $\overline{X}_u$ ve $\overline{X}_v$ vektörleri ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases} \left\langle \overline{X}_{uu}, \overline{X}_u \right\rangle = \overline{\Gamma}_{11}^1 \overline{g}_{11} + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{g}_{12} \\ \left\langle \overline{X}_{uu}, \overline{X}_v \right\rangle = \overline{\Gamma}_{11}^1 \overline{g}_{12} + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{g}_{22} \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{\Gamma}_{11}^1 = \frac{1}{\overline{w}^2} \left[\left\langle \overline{X}_{uu}, \overline{X}_u \right\rangle \overline{g}_{22} - \left\langle \overline{X}_{uu}, \overline{X}_v \right\rangle \overline{g}_{12} \right] \tag{4.69}$$

$$\overline{\Gamma}_{11}^2 = \frac{1}{\overline{w}^2} \left[\left\langle \overline{X}_{uu}, \overline{X}_v \right\rangle \overline{g}_{11} - \left\langle \overline{X}_{uu}, \overline{X}_u \right\rangle \overline{g}_{12} \right] \tag{4.70}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.25) bu son eşitlikte yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\overline{\Gamma}_{11}^1 = \frac{\eta}{\overline{w}^2} \left[\eta g_{11} \overline{g}_{22} \Gamma_{11}^1 - \mu g_{22} \overline{g}_{12} \Gamma_{11}^2 + \overline{g}_{22} P_{11} - \overline{g}_{12} R_{11} \right]$$

$$\overline{\Gamma}_{11}^2 = \frac{\eta}{\overline{w}^2} \left[\mu g_{22} \overline{g}_{11} \Gamma_{11}^2 - \eta g_{11} \overline{g}_{12} \Gamma_{11}^1 + \overline{g}_{11} R_{11} - \overline{g}_{12} P_{11} \right]$$

bulunur. Burada P_{11} ve R_{11}

$$\begin{cases} P_{11} = \left[g_{11} \left(\eta_u - (h_1)_u k_1^1 - (h_2)_u k_1^2 \right) + c_{11}^1 (h_1)_u + c_{11}^2 (h_2)_u + \frac{1}{2\eta} U_u \right] \\ R_{11} = \left[-c_{11}^1 (h_1)_v - c_{11}^2 (h_2)_v + \frac{1}{\eta} \left((h_1)_v (h_1)_{uu} + (h_2)_v (h_2)_{uu} \right) \right] \end{cases}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, (4.68) deki

$$\overline{X}_{uv}=\overline{\Gamma}_{12}^{1}\overline{X}_{u}+\overline{\Gamma}_{12}^{2}\overline{X}_{v}-\overline{c}_{12}^{1}\overline{N}_{1}-\overline{c}_{12}^{2}\overline{N}_{2}$$

denkleminin eşitliğinin her iki tarafı $\overline{X}_u$ ve $\overline{X}_v$ vektörleri ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases}\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_{u}\right\rangle=\overline{\Gamma}_{12}^{1}\overline{g}_{11}+\overline{\Gamma}_{12}^{2}\overline{g}_{12}\\ \left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_{v}\right\rangle=\overline{\Gamma}_{12}^{1}\overline{g}_{12}+\overline{\Gamma}_{12}^{2}\overline{g}_{22}\end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{\Gamma}_{12}^{1}=\frac{1}{\overline{w}^{2}}\left[\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_{u}\right\rangle\overline{g}_{22}-\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_{v}\right\rangle\overline{g}_{12}\right] \quad \textbf{(4.71)}$$

$$\overline{\Gamma}_{12}^{2}=\frac{1}{\overline{w}^{2}}\left[\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_{v}\right\rangle\overline{g}_{11}-\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_{u}\right\rangle\overline{g}_{12}\right] \quad \textbf{(4.72)}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.26) bu son eşitlikte yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{\Gamma}_{12}^{1}=\frac{\eta}{\overline{w}^{2}}\left[\eta g_{11}\overline{g}_{22}\Gamma_{12}^{1}-\mu g_{22}\overline{g}_{12}\Gamma_{12}^{2}+\overline{g}_{22}P_{12}-\overline{g}_{12}R_{12}\right]$$

$$\overline{\Gamma}_{12}^{2}=\frac{\eta}{\overline{w}^{2}}\left[\mu g_{22}\overline{g}_{11}\Gamma_{12}^{2}-\eta g_{11}\overline{g}_{12}\Gamma_{12}^{1}-\overline{g}_{12}P_{12}+\overline{g}_{11}R_{12}\right]$$

bulunur. Burada P_{12} ve R_{12}

$$\begin{cases}P_{12}=\left[\eta_{v}g_{11}+c_{12}^{1}\left(h_{1}\right)_{u}+c_{12}^{2}\left(h_{2}\right)_{u}+\frac{1}{2}U_{v}\right]\\ R_{12}=\left[-\frac{\mu}{\eta}g_{22}\left(\left(h_{1}\right)_{u}k_{2}^{1}+\left(h_{2}\right)_{u}k_{2}^{2}\right)+c_{12}^{1}\left(h_{1}\right)_{v}+c_{12}^{2}\left(h_{2}\right)_{v}\right]\end{cases}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, (4.68) deki

$$\overline{X}_{vv}=\overline{\Gamma}_{22}^{1}\overline{X}_{u}+\overline{\Gamma}_{22}^{2}\overline{X}_{v}-\overline{c}_{22}^{1}\overline{N}_{1}-\overline{c}_{22}^{2}\overline{N}_{2}$$

denkleminin eşitliğinin her iki tarafı $\overline{X}_u$ ve $\overline{X}_v$ vektörleri ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases}\left\langle \overline{X}_{vv},\overline{X}_{u}\right\rangle=\overline{\Gamma}_{22}^{1}\overline{g}_{11}+\overline{\Gamma}_{22}^{2}\overline{g}_{12}\\ \left\langle \overline{X}_{vv},\overline{X}_{v}\right\rangle=\overline{\Gamma}_{22}^{1}\overline{g}_{12}+\overline{\Gamma}_{22}^{2}\overline{g}_{22}\end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{\Gamma}_{22}^{1}=\frac{1}{\overline{w}^{2}}\left[\left\langle \overline{X}_{vv},\overline{X}_{u}\right\rangle\overline{g}_{22}-\left\langle \overline{X}_{vv},\overline{X}_{v}\right\rangle\overline{g}_{12}\right] \quad \textbf{(4.73)}$$

$$\overline{\Gamma}_{22}^{2}=\frac{1}{\overline{w}^{2}}\left[\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_{v}\right\rangle\overline{g}_{11}-\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_{u}\right\rangle\overline{g}_{12}\right] \quad \textbf{(4.74)}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.27) den

$$\overline{\Gamma}_{22}^{1}=\frac{\mu}{\overline{w}^{2}}\left[\eta g_{11}\overline{g}_{22}\Gamma_{22}^{1}-\mu g_{22}\overline{g}_{12}\Gamma_{22}^{2}+\overline{g}_{22}P_{22}-\overline{g}_{12}R_{22}\right]$$

$$\overline{\Gamma}_{22}^{2}=\frac{\mu}{\overline{w}^{2}}\left[\eta g_{11}\overline{g}_{11}\Gamma_{22}^{1}-\mu g_{22}\overline{g}_{12}\Gamma_{22}^{2}+\overline{g}_{11}P_{22}-\overline{g}_{12}R_{22}\right]$$

bulunur. Burada

$$\begin{cases} P_{22}=\left[c_{22}^{1}\left(h_1\right)_u+c_{22}^{2}\left(h_2\right)_u+\dfrac{1}{\mu}\left(\left(h_1\right)_u\left(h_1\right)_{vv}+\left(h_2\right)_u\left(h_2\right)_{vv}\right)\right] \\ R_{22}=\left[g_{22}\left(\mu_v-\left(h_1\right)_v k_2^{1}-\left(h_2\right)_v k_2^{2}\right)+c_{22}^{1}\left(h_1\right)_v+c_{22}^{2}\left(h_2\right)_v+\dfrac{1}{2}V_v\right]. \end{cases}$$

Teorem 4.1.23. M , E^4 'te regüler bir yüzey ve $\overline{M}$ de M 'nin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin ikinci tipten Christoffel sembolleri ile I. temel formlarının katsayıları arasında

$$\begin{cases} \overline{g}_{11}\left[\overline{\Gamma}_{11}^{1}-\overline{\Gamma}_{12}^{1}\right]+\overline{g}_{12}\left[\overline{\Gamma}_{11}^{2}-\overline{\Gamma}_{12}^{2}\right]=\eta^{2}g_{11}\left[\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{1}\right]+\eta g_{11}\left[\eta_u-\eta_v\right]+\dfrac{1}{2}\left[U_u-U_v\right] \\ \overline{g}_{12}\left[\overline{\Gamma}_{22}^{1}-\overline{\Gamma}_{12}^{1}\right]+\overline{g}_{22}\left[\overline{\Gamma}_{22}^{2}-\overline{\Gamma}_{12}^{2}\right]=\mu^{2}g_{22}\left[\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{2}\right]+\mu g_{22}\left[\mu_v-\mu_u\right]+\dfrac{1}{2}\left[V_u-V_v\right] \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_{12}^{1}\overline{g}_{11}+\left(\overline{\Gamma}_{11}^{1}+\overline{\Gamma}_{12}^{2}\right)\overline{g}_{12}+\overline{\Gamma}_{11}^{2}\overline{g}_{22}=\left(\left(h_1\right)_u\left(h_1\right)_v+\left(h_2\right)_u\left(h_2\right)_v\right)_u \\ \overline{\Gamma}_{22}^{1}\overline{g}_{11}+\left(\overline{\Gamma}_{12}^{1}+\overline{\Gamma}_{22}^{2}\right)\overline{g}_{12}+\overline{\Gamma}_{12}^{2}\overline{g}_{22}=\left(\left(h_1\right)_u\left(h_1\right)_v+\left(h_2\right)_u\left(h_2\right)_v\right)_v \end{cases}.$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\overline{M}$ yüzeyinin I. temel formunun bileşenleri $\overline{g}_{11}$, $\overline{g}_{12}$ ve $\overline{g}_{22}$ olmak üzere

$$\begin{cases} \overline{g}_{11}=\left\langle \overline{X}_u,\overline{X}_u\right\rangle \\ \overline{g}_{12}=\left\langle \overline{X}_u,\overline{X}_v\right\rangle \\ \overline{g}_{22}=\left\langle \overline{X}_v,\overline{X}_v\right\rangle \end{cases} \qquad \textbf{(4.75)}$$

şeklindedir. (4.75) teki $\overline{g}_{11}$ nin u parametresine göre türevi alınırsa

$$\left(\overline{g}_{11}\right)_u=2\left\langle \overline{X}_{uu},\overline{X}_u\right\rangle$$

bulunur. Bu son eşitlikte (4.8) ve (4.68) bağıntılarındaki $\overline{g}_{11}$ ve $\overline{X}_{uu}$ ifadelerinin eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\left(\eta^2 g_{11}+U\right)_u=2\left\langle \overline{\Gamma}_{11}^1\overline{X}_u+\overline{\Gamma}_{11}^2\overline{X}_v-c_{11}^1\overline{N}_1-c_{11}^2\overline{N}_2,\overline{X}_u\right\rangle$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\eta^2\left(g_{11}\right)_u+2\eta\eta_u g_{11}+U_u=2\overline{\Gamma}_{11}^1\overline{g}_{11}+2\overline{\Gamma}_{11}^2\overline{g}_{12}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{1}{2g_{11}}$ ile çarpılırsa

$$\eta^2\frac{\left(g_{11}\right)_u}{2g_{11}}+\eta\eta_u+\frac{U_u}{2g_{11}}=\overline{\Gamma}_{11}^1\frac{\overline{g}_{11}}{g_{11}}+\overline{\Gamma}_{11}^2\frac{\overline{g}_{12}}{g_{11}}$$

elde edilir. (2.4) bu son eşitlikte yerlerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\eta^2 g_{11}\Gamma_{11}^1+\eta\eta_u g_{11}+\frac{U_u}{2}=\overline{\Gamma}_{11}^1\overline{g}_{11}+\overline{\Gamma}_{11}^2\overline{g}_{12} \qquad \textbf{(4.76)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.75) teki $\overline{g}_{11}$ nin v parametresine göre türevi alınırsa

$$\left(\overline{g}_{11}\right)_v=2\left\langle \overline{X}_{uv},\overline{X}_u\right\rangle$$

bulunur. Bu son eşitlikteki $\overline{g}_{11}$ ve $\overline{X}_{uv}$ ifadelerinin (4.8) ve (4.68) bağıntılarındaki eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\left(\eta^2 g_{11}+U\right)_v=2\left\langle \overline{\Gamma}_{12}^1\overline{X}_u+\overline{\Gamma}_{12}^2\overline{X}_v-c_{12}^1\overline{N}_1-c_{12}^2\overline{N}_2,\overline{X}_u\right\rangle$$

elde edilir. Bu durumda

$$\eta^2\left(g_{11}\right)_v+2\eta\eta_v g_{11}+U_v=2\overline{\Gamma}_{12}^1\overline{g}_{11}+2\overline{\Gamma}_{12}^2\overline{g}_{12}$$

yazılabilir. Burada eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{1}{2g_{11}}$ ile çarpılırsa

$$\eta^2\frac{\left(g_{11}\right)_v}{2g_{11}}+\eta\eta_v+\frac{U_v}{2g_{11}}=\overline{\Gamma}_{12}^1\frac{\overline{g}_{11}}{g_{11}}+\overline{\Gamma}_{12}^2\frac{\overline{g}_{12}}{g_{11}}$$

elde edilir. (2.4) bu son eşitlikte yerlerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\eta^2 g_{11}\Gamma_{12}^1+\eta\eta_v g_{11}+\frac{U_v}{2}=\overline{\Gamma}_{12}^1\overline{g}_{11}+\overline{\Gamma}_{12}^2\overline{g}_{12} \qquad \textbf{(4.77)}$$

bulunur. (4.76) ve (4.77) denklemleri birleştirilirse

$$\eta^2 g_{11}\left[\Gamma_{11}^1-\Gamma_{12}^1\right]+\eta g_{11}\left[\eta_u-\eta_v\right]+\frac{1}{2}\left[U_u-U_v\right]=\overline{g}_{11}\left[\overline{\Gamma}_{11}^1-\overline{\Gamma}_{12}^1\right]+\overline{g}_{12}\left[\overline{\Gamma}_{11}^2-\overline{\Gamma}_{12}^2\right]$$

elde edilir. (4.75) teki $\overline{g}_{22}$ nin v parametresine göre türevi alınırsa

$$\left(\overline{g}_{22}\right)_v=2\left\langle \overline{X}_{vv},\overline{X}_v\right\rangle$$

olur. Buradaki $\overline{g}_{22}$ ve $\overline{X}_{vv}$ ifadelerinin (4.8) ve (4.68) bağıntılarındaki eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\left(\mu^2 g_{22} + V\right)_v = 2\left\langle \overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{X}_u + \overline{\Gamma}_{22}^2 \overline{X}_v - c_{22}^1 \overline{N}_1 - c_{22}^2 \overline{N}_2, \overline{X}_v \right\rangle$$

elde edilir. Bu son eşitlik düzenlenirse

$$\mu^2 \left(g_{22}\right)_v + 2\mu\mu_v g_{22} + V_v = 2\overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{g}_{12} + 2\overline{\Gamma}_{22}^2 \overline{g}_{22}$$

olur. Burada eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{1}{2g_{22}}$ ile çarpılırsa

$$\mu^2 \frac{\left(g_{22}\right)_v}{2g_{22}} + \mu\mu_v + \frac{V_v}{2g_{22}} = \overline{\Gamma}_{22}^1 \frac{\overline{g}_{12}}{g_{22}} + \overline{\Gamma}_{22}^2 \frac{\overline{g}_{22}}{g_{22}}$$

bulunur. (2.4) bu son denklemde yerlerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\mu^2 g_{22}\Gamma_{22}^2 + \mu\mu_v g_{22} + \frac{V_v}{2} = \overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{g}_{12} + \overline{\Gamma}_{22}^2 \overline{g}_{22} \tag{4.78}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\overline{g}_{22}$ nin u parametresine göre türevi alınırsa

$$\left(\overline{g}_{22}\right)_u = 2\left\langle \overline{X}_{uv}, \overline{X}_v \right\rangle$$

bulunur. Bu son eşitlikte $\overline{g}_{22}$, $\overline{X}_{uv}$ ve $\overline{X}_v$ eşitlikleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\mu^2 \left(g_{22}\right)_u + 2\mu\mu_u g_{22} + V_u = 2\overline{\Gamma}_{12}^1 \overline{g}_{12} + 2\overline{\Gamma}_{12}^2 \overline{g}_{22}$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{1}{2g_{22}}$ ile çarpılır ve (2.4) burada yerlerine yazılırsa

$$\mu^2 g_{22}\Gamma_{12}^2 + \mu\mu_u g_{22} + \frac{V_u}{2} = \overline{\Gamma}_{12}^1 \overline{g}_{12} + \overline{\Gamma}_{12}^2 \overline{g}_{22} \tag{4.79}$$

bulunur. (4.78) ve (4.79) denklemlerinden

$$\mu^2 g_{22}\left[\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2\right] + \mu g_{22}\left[\mu_v - \mu_u\right] + \frac{1}{2}\left[V_v - V_u\right] = \overline{g}_{12}\left[\overline{\Gamma}_{22}^1 - \overline{\Gamma}_{12}^1\right] + \overline{g}_{22}\left[\overline{\Gamma}_{22}^2 - \overline{\Gamma}_{12}^2\right]$$

elde edilir.

Şimdi $\overline{M}$ 'nin ikinci tipten Christoffel semboleri ve I. temel formunun bileşenlerinin destek fonksiyonları cinsinden ifadesini bulalım. Bunun için (4.75) teki $\overline{g}_{12}$ nin u ve v parametrelerine göre türevlerini alalım. O halde,

$$\left(\overline{g}_{12}\right)_u = \left\langle \overline{X}_{uu}, \overline{X}_v \right\rangle + \left\langle \overline{X}_{uv}, \overline{X}_u \right\rangle,$$

$$\left(\overline{g}_{12}\right)_v = \left\langle \overline{X}_{uv}, \overline{X}_v \right\rangle + \left\langle \overline{X}_{vv}, \overline{X}_u \right\rangle$$

bulunur. Bu son eşitlikte $\overline{g}_{12}$, $\overline{X}_{uu}$, $\overline{X}_{uv}$ ve $\overline{X}_{vv}$ eşitlikleri yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\overline{\Gamma}_{12}^1 \overline{g}_{11} + \left(\overline{\Gamma}_{11}^1 + \overline{\Gamma}_{12}^2\right)\overline{g}_{12} + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{g}_{22} = \left(\left(h_1\right)_u \left(h_1\right)_v + \left(h_2\right)_u \left(h_2\right)_v\right)_u \tag{4.80}$$

ve

$$\overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{g}_{11} + \left(\overline{\Gamma}_{12}^1 + \overline{\Gamma}_{22}^2\right)\overline{g}_{12} + \overline{\Gamma}_{12}^2 \overline{g}_{22} = \left(\left(h_1\right)_u \left(h_1\right)_v + \left(h_2\right)_u \left(h_2\right)_v\right)_v \tag{4.81}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.24. M, E^4'te regüler ve sabit destek fonksiyonlu bir yüzey ve $\overline{M}$ de M yüzeyinin pedal yüzeyi olsun. Bu takdirde M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin ikinci tipten Christoffel sembolleri ve I. temel formunun katsayıları arasında

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_{11}^1 = \Gamma_{11}^1 + \dfrac{\eta_u}{\eta}, & \overline{\Gamma}_{12}^1 = \Gamma_{12}^1 + \dfrac{\eta_v}{\eta} \\ \overline{\Gamma}_{22}^2 = \Gamma_{22}^2 + \dfrac{\mu_v}{\mu}, & \overline{\Gamma}_{12}^2 = \Gamma_{12}^2 + \dfrac{\mu_u}{\mu} \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{\Gamma}_{12}^1 \overline{g}_{11} + \overline{\Gamma}_{11}^2 \overline{g}_{22} = 0 \\ \overline{\Gamma}_{22}^1 \overline{g}_{11} + \overline{\Gamma}_{12}^2 \overline{g}_{22} = 0 \end{cases}$$

bağıntıları vardır.

İspat: (4.76), (4.77), (4.78), (4.79), (4.80) ve (4.81) denklemlerinde, M'nin destek fonksiyonlarının sabit olması göz önüne alınarak $\overline{g}_{11}$, $\overline{g}_{12}$ ve $\overline{g}_{22}$ bileşenlerinin teorem 4.1.7 deki eşitlikleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa ispat tamamlanmış olur.

4.2 Uygulamalar

Bu kesimde ilk olarak, E^4'te bazı özel yüzeylerin karakteristik özellikleri incelenmiş ve pedalları bulunmuştur. Daha sonra bu yüzeylerin grafikleri, perspektif ve paralel izdüşüm yöntemleri kullanılarak Maple 17 programı yardımıyla üç boyutlu uzayda çizdirilmiştir.

Örnek 4.2.1. (Aminov yüzeyi)

$$X(u,v) = (u, v, r\cos v, r\sin v), \; r = r(u) \tag{4.82}$$

parametrik denklemi ile verilen bir Aminov yüzeyi M olsun. M Aminov yüzeyinin bazı karakteristik özelliklerini inceleyelim ve pedallarını araştıralım. Burada r ye göre iki durum söz konusudur.

i) Kabul edelim ki, $r \neq sbt.$ olsun.

İlk olarak, M Aminov yüzeyinin I. ve II. temel formlarının bileşenlerini bulalım. O halde (4.82) denkleminin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{cases} X_u = (1,0,r'\cos v, r'\sin v) \\ X_v = (0,1,-r\sin v, r\cos v) \end{cases}, \tag{4.83}$$

$$\begin{cases} X_{uu} = (0,0,r''\cos v, r''\sin v) \\ X_{uv} = (0,0,-r'\sin v, r'\cos v) \\ X_{vv} = (0,0,-r\cos v, -r\sin v) \end{cases} \tag{4.84}$$

elde edilir. Buradan, M 'nin I. temel formunun katsayıları ve alan elementi

$$\begin{cases} g_{11} = 1+(r')^2 \\ g_{12} = 0 \\ g_{22} = 1+r^2 \end{cases} \tag{4.85}$$

ve

$$w^2 = \left(1+(r')^2\right)\left(1+r^2\right) \tag{4.86}$$

bulunur.

Şimdi M yüzeyinin N_1 ve N_2 birim normal vektörlerini bulalım. M 'nin $P \in M$ noktasındaki $\xi = (a,b,c,d) \in T_M^{\perp}(P)$ ve $X_u, X_v \in T_M(P)$ vektörleri için

$$\langle X_u, \xi \rangle = \langle X_v, \xi \rangle = 0 \tag{4.87}$$

yazılabilir. (4.83) bu son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{cases} -a - cr'\cos v - dr'\sin v = 0 \\ -b + cr\sin v - dr\cos v = 0 \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi çözülürse

$$\Delta = \begin{vmatrix} -r'\cos v & -r'\sin v \\ r\sin v & -r\cos v \end{vmatrix} = rr'$$

olmak üzere

$$c = -\frac{a}{r'}\cos v + \frac{b}{r}\sin v$$

ve

$$d=-\frac{a}{r'}\sin v-\frac{b}{r}\cos v$$

bulunur. Bu durumda ξ vektörü

$$\xi=a\left(1,0,\frac{-\cos v}{r'},\frac{-\sin v}{r'}\right)+b\left(0,1,\frac{\sin v}{r},\frac{-\cos v}{r}\right)$$

olarak elde edilir. O halde M 'nin N_1 ve N_2 ortonormal vektörleri

$$\begin{cases} N_1=\dfrac{1}{\sqrt{1+(r')^2}}\left(r',0,-\cos v,-\sin v\right), \\ N_2=\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}}\left(0,r,\sin v,-\cos v\right) \end{cases} \tag{4.88}$$

şeklindedir. M 'nin II. temel formlarının katsayıları için

$$\begin{cases} c_{11}^1=-\langle X_{uu},N_1\rangle \\ c_{12}^1=-\langle X_{uv},N_1\rangle \\ c_{22}^1=-\langle X_{vv},N_1\rangle \end{cases} \tag{4.89}$$

ve

$$\begin{cases} c_{11}^2=-\langle X_{uu},N_2\rangle \\ c_{12}^2=-\langle X_{uv},N_2\rangle \\ c_{22}^2=-\langle X_{vv},N_2\rangle \end{cases} \tag{4.90}$$

yazılabilir. (4.84) ve (4.88) eşitlikleri (4.89) ve (4.90) da yerlerine yazılırsa

$$\begin{cases} c_{11}^1=\dfrac{r''}{\sqrt{1+(r')^2}} \\ c_{12}^1=0 \\ c_{22}^1=\dfrac{r}{\sqrt{1+(r')^2}} \end{cases} \tag{4.91}$$

ve

$$\begin{cases} c_{11}^2=0 \\ c_{12}^2=\dfrac{r'}{\sqrt{1+r^2}} \\ c_{22}^2=0 \end{cases} \tag{4.92}$$

bulunur. M yüzeyinin destek fonksiyonları

$$\begin{cases} h_1 = -\langle X, N_1 \rangle \\ h_2 = -\langle X, N_2 \rangle \end{cases}$$

olup, bu son denklemde (4.82) ve (4.88) yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{-ur' + r}{\sqrt{1+(r')^2}}, \\ h_2 = \dfrac{-vr}{\sqrt{1+r^2}} \end{cases} \tag{4.93}$$

elde edilir. O halde (4.88) ve (4.93) eşitlikleri, (4.1) de yerlerine yazılırsa M 'nin pedal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\overline{X}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{r'(ur'-r)}{1+(r')^2}, \ \dfrac{vr^2}{1+r^2}, \ \dfrac{-\cos v(ur'-r)}{1+(r')^2} + \dfrac{vr\sin v}{1+r^2}, \\ \dfrac{-\sin v(ur'-r)}{1+(r')^2} - \dfrac{vr\cos v}{1+r^2} \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

Özel olarak, $r(u) = u$ olması halinde M esas yüzeyinin parametrik denklemi, normal vektörleri ve destek fonksiyonları, sırasıyla

$$M : X(u,v) = (u, v, u\cos v, u\sin v)$$

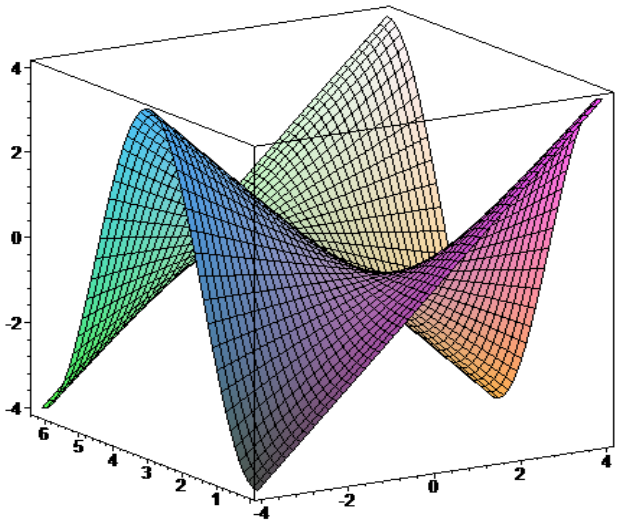
$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -\cos v, -\sin v), \ N_2 = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}(0, u, \sin v, -\cos v),$$

$$h_1 = 0, \ h_2 = -\frac{uv}{\sqrt{u^2+1}}$$

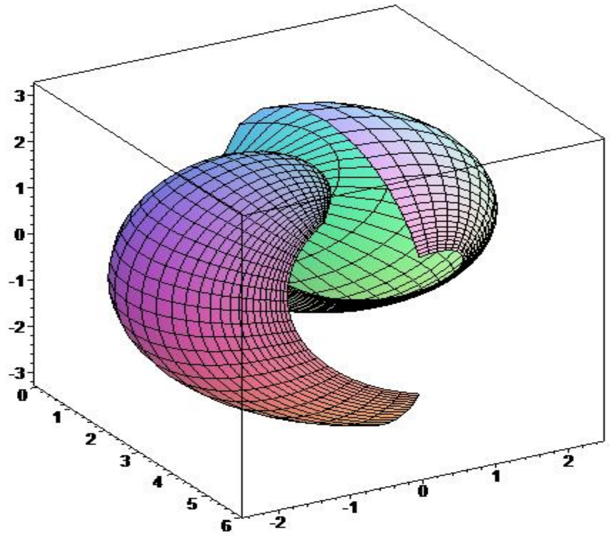
olup, M yüzeyinin $\overline{M}$ pedal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\overline{M} : \overline{X}(u,v) = \left(0, \frac{u^2 v}{u^2+1}, \frac{uv\sin v}{u^2+1}, \frac{-uv\cos v}{u^2+1}\right)$$

şeklindedir.



Şekil 4.2: M esas yüzeyi



Şekil 4.3: $\overline{M}$ pedal yüzeyi

Şekil 4.2 deki çizim M 'nin $w=0$ hiperdüzlemi üzerine paralel izdüşümü alınarak çizilmiştir.

ii) Kabul edelim ki $r=sbt.$ olsun.

M Aminov yüzeyinin pedalının denklemini bulmak için ilk önce M 'nin birim normal vektörlerini bulalım. (4.82) denkleminin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{cases} X_u = (1,0,0,0) \\ X_v = (0,1,-r\sin v, r\cos v) \end{cases}$$

bulunur. M yüzeyinin $P \in M$ noktasındaki $\xi = (a,b,c,d) \in T_M^{\perp}(P)$ ve $X_u, X_v \in T_M(P)$ vektörleri için $\langle X_u, \xi \rangle = \langle X_v, \xi \rangle = 0.$ Buradan

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = cr\sin v - dr\cos v \end{cases}$$

olup, ξ vektörü

$$\xi = c(0, r\sin v, 1, 0) + d(0, -r\cos v, 0, 1)$$

şeklindedir. O halde M 'nin v_1 ve v_2 normalleri

$$\begin{cases} v_1 = (0, r\sin v, 1, 0), \\ v_2 = (0, -r\cos v, 0, 1) \end{cases}$$

olarak alınabilir. Burada $\{v_1, v_2\}$ vektör sistemine Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi uygulanırsa $\{n_1, n_2\}$ ortogonal vektör sistemi

$$n_1 = (0, r\sin v, 1, 0)$$

$$n_2 = (0, -r\cos v, 0, 1) - \frac{\langle (0, -r\cos v, 0, 1), (0, r\sin v, 1, 0) \rangle}{\langle (0, r\sin v, 1, 0), (0, r\sin v, 1, 0) \rangle}(0, r\sin v, 1, 0),$$

$$\Rightarrow n_2 = (0, -r\cos v, 0, 1) + \frac{r^2\cos v\sin v}{r^2\sin^2 v + 1}(0, r\sin v, 1, 0),$$

$$\Rightarrow n_2 = \left(0, \frac{-r\cos v}{r^2\sin^2 v + 1}, \frac{r^2\cos v\sin v}{r^2\sin^2 v + 1}, 1\right)$$

şeklinde elde edilir. Yeni elde edilen n_1 ve n_2 ortogonal vektörlerini ortonormal vektör sistemi haline getirmek için n_1 ve n_2 vektörlerinin boyu hesaplanırsa

$$n_1 = (0, r\sin v, 1, 0) \Rightarrow \|n_1\| = \sqrt{r^2\sin^2 v + 1}.$$

$$\Rightarrow n_2 = \left(0, \frac{-r\cos v}{r^2\sin^2 v + 1}, \frac{r^2\cos v\sin v}{r^2\sin^2 v + 1}, 1\right)$$

$$\Rightarrow \|n_2\| = \frac{\sqrt{r^2 + 1}}{\sqrt{r^2\sin^2 v + 1}}$$

bulunur. Bu durumda M 'nin birim normal vektörleri

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{n_1}{\|n_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{r^2\sin^2 v+1}}\left(0, r\sin v, 1, 0\right) \\ N_2 = \dfrac{n_2}{\|n_2\|} = \dfrac{\sqrt{\left(r^2\sin^2 v+1\right)}}{\sqrt{\left(r^2+1\right)}}\left(0, \dfrac{-r\cos v}{r^2\sin^2 v+1}, \dfrac{r^2\cos v\sin v}{r^2\sin^2 v+1}, 1\right). \end{cases}$$

Diğer taraftan, M Aminov yüzeyinin h_1 ve h_2 destek fonksiyonları

$$\begin{cases} h_1 = -\langle X, N_1\rangle = \dfrac{-vr\sin v - r\cos v}{\sqrt{r^2\sin^2 v+1}} \\ h_2 = -\langle X, N_2\rangle = \dfrac{-r\sin v\left(r^2+1\right)+vr\cos v}{\sqrt{\left(r^2\sin^2 v+1\right)\left(r^2+1\right)}} \end{cases}$$

olup, M 'nin pedalının denklemi

$$\overline{X}(u,v) = \left(0, \frac{vr^2}{1+r^2}, r\cos v + \frac{vr\sin v}{1+r^2}, r\sin v - \frac{vr\cos v}{1+r^2}\right) \qquad \textbf{(4.95)}$$

olarak elde edilir. O halde, $r = sbt.$ olması halinde bir Aminov yüzeyin pedalı bir eğri belirtir ve parametrik denklemi

$$\overline{X}(u,v) = \left(0, \frac{vr^2}{1+r^2}, r\cos v + \frac{vr\sin v}{1+r^2}, r\sin v - \frac{vr\cos v}{1+r^2}\right)$$

şeklindedir.

Özel olarak, $r(u) = 1$ olması halinde M esas yüzeyinin parametrik denklemi, normal vektörleri ve destek fonksiyonları, sırasıyla

$M : X(u,v) = (u, v, \cos v, \sin v)$

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{n_1}{\|n_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 v}}\left(0, \sin v, 1, 0\right) \\ N_2 = \dfrac{n_2}{\|n_2\|} = \dfrac{\sqrt{1+\sin^2 v}}{\sqrt{2}}\left(0, \dfrac{-\cos v}{1+\sin^2 v}, \dfrac{\sin v\cos v}{1+\sin^2 v}, 1\right) \end{cases}$$

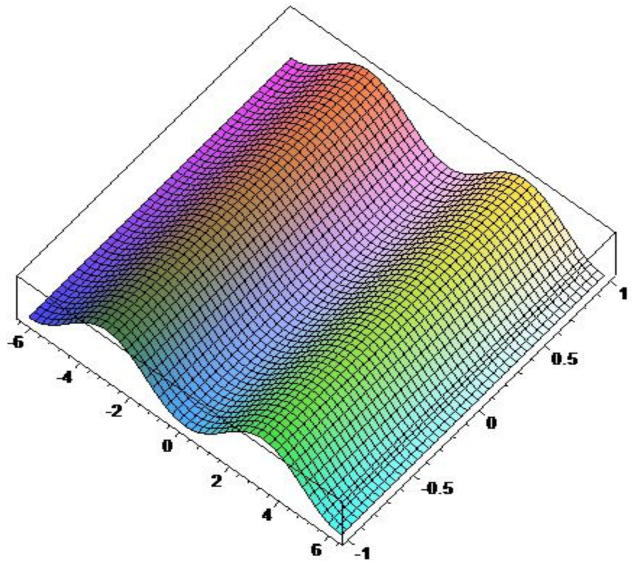
ve

$$\begin{cases} h_1 = -\langle X, N_1\rangle = \dfrac{-v\sin v - \cos v}{\sqrt{1+\sin^2 v}} \\ h_2 = -\langle X, N_2\rangle = \dfrac{v\cos v - 2\sin v}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sin^2 v}}. \end{cases}$$

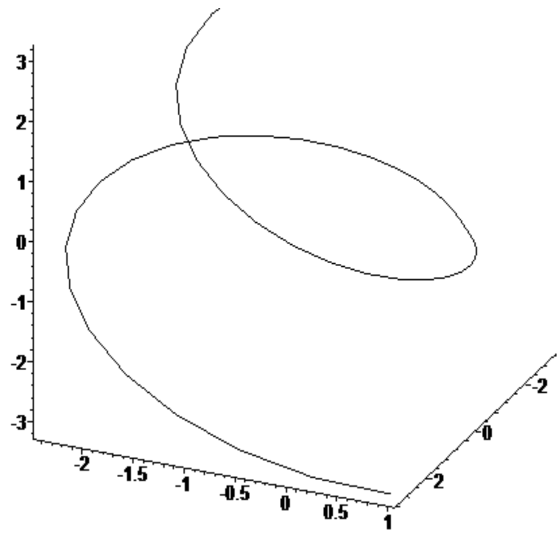
olup, M yüzeyinin $\overline{M}$ pedal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\overline{M}:\overline{X}(u,v)=\left(0,\frac{v}{2},\ \cos v+\frac{v\sin v}{2},\sin v-\frac{v\cos v}{2}\right)$$

bulunur. Bu durumda M ’nin pedalı bir eğridir.



Şekil 4.4: M esas yüzeyi



Şekil 4.5: $\overline{M}$ pedal eğrisi

Şekil 4.4, M yüzeyinin $w=0$ hiperdüzlemi üzerine paralel izdüşümü alınarak çizilmiştir.

Örnek 4.2.2. (Monge yüzeyi)

E^4’te

$$M:X\left(u,v\right)=\left(u,v,f(u,v),g(u,v)\right) \qquad \textbf{(4.96)}$$

Monge parametrizasyonu ile verilen M yüzeyinin pedalının denklemini bulalım. (4.96) denkleminin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{cases} X_u = (1, 0, f_u, g_u) \\ X_v = (0, 1, f_v, g_v) \end{cases} \quad \textbf{(4.97)}$$

bulunur. Bu durumda M Monge yüzeyinin I. temel formlarının katsayıları

$$\begin{cases} g_{11} = f_u^2 + g_u^2 + 1 \\ g_{12} = f_u f_v + g_u g_v \\ g_{22} = f_v^2 + g_v^2 + 1 \end{cases}$$

şeklindedir. M ’nin $w^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$ alan elementi hesaplanırsa

$$\Rightarrow w^2 = \left(f_u^2 + g_u^2 + 1\right)\left(f_v^2 + g_v^2 + 1\right) - \left(f_u f_v + g_u g_v\right)^2 ,$$

$$\Rightarrow w^2 = f_u^2 g_v^2 + f_u^2 + g_u^2 f_v^2 + g_u^2 + f_v^2 + g_v^2 + 1 - 2 f_u f_v g_u g_v ,$$

$$\Rightarrow w^2 = f_u^2 g_v^2 + f_u^2 + g_u^2 f_v^2 + g_u^2 + f_v^2 + g_v^2 + 1 - 2 f_u f_v g_u g_v \\ + f_v^2 g_v^2 - f_v^2 g_v^2 + f_u^2 g_u^2 - f_u^2 g_u^2 ,$$

$$\Rightarrow w^2 = f_u^2 \left(1 + g_u^2 + g_v^2\right) + f_v^2 \left(1 + g_u^2 + g_v^2\right) + 1 + g_u^2 + g_v^2 - \left(f_u g_u + f_v g_v\right)^2 ,$$

$$\Rightarrow w^2 = \underbrace{\left(1 + f_u^2 + f_v^2\right)}_{A}\underbrace{\left(1 + g_u^2 + g_v^2\right)}_{C} - \underbrace{\left(f_u g_u + f_v g_v\right)}_{B}^2 ,$$

$$\Rightarrow w^2 = AC - B^2 \quad \textbf{(4.98)}$$

bulunur. Burada

$$A = 1 + f_u^2 + f_v^2 , \quad B = f_u g_u + f_v g_v , \quad C = 1 + g_u^2 + g_v^2 . \quad \textbf{(4.99)}$$

M ’nin birim normal vektörleri olan N_1 ve N_2 vektörlerini hesaplayalım. M ’nin tanjant uzayına dik olan normal uzaydaki bir vektörü $\xi = (a, b, c, d) \in T_M^{\perp}(P)$ olsun. O halde $X_u, X_v \in T_M(P)$ olduğundan $\langle X_u, \xi \rangle = \langle X_v, \xi \rangle = 0.$ Buradan

$$\begin{cases} a + cf_u + dg_u = 0 \\ b + cf_v + dg_v = 0 \end{cases}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi çözülürse,

$$a = -cf_u - dg_u$$

ve

$$b = -cf_v - dg_v$$

elde edilir. Bu durumda ξ vektörü

$$\xi = c\left(-f_u, -f_v, 1, 0\right) + d\left(-g_u, -g_v, 0, 1\right)$$

şeklinde elde edilir. O halde M ’nin v_1 ve v_2 normalleri

$$\begin{cases} v_1 = \left(-f_u, -f_v, 1, 0\right), \\ v_2 = \left(-g_u, -g_v, 0, 1\right) \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $\{v_1, v_2\}$ vektör sistemine Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi uygulanırsa

$$n_1 = \left(-f_u, -f_v, 1, 0\right),$$

$$n_2 = \left(-g_u, -g_v, 0, 1\right) - \frac{\left\langle \left(-g_u, -g_v, 0, 1\right), \left(-f_u, -f_v, 1, 0\right)\right\rangle}{\left\langle \left(-f_u, -f_v, 1, 0\right), \left(-f_u, -f_v, 1, 0\right)\right\rangle}\left(-f_u, -f_v, 1, 0\right),$$

$$\Rightarrow n_2 = \left(-g_u, -g_v, 0, 1\right) - \frac{f_u g_u + f_v g_v}{f_u^2 + f_v^2 + 1}\left(-f_u, -f_v, 1, 0\right),$$

$$\Rightarrow n_2 = \left(-g_u, -g_v, 0, 1\right) - \frac{B}{A}\left(-f_u, -f_v, 1, 0\right),$$

$$\Rightarrow n_2 = \left(\frac{B}{A} f_u - g_u, \frac{B}{A} f_v - g_v, -\frac{B}{A}, 1\right)$$

elde edilir. Yeni elde edilen n_1 ve n_2 ortogonal vektörlerinin boyları

$$n_1 = \left(-f_u, -f_v, 1, 0\right)$$

$$\Rightarrow \|n_1\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} = \sqrt{A},$$

$$n_2 = \left(\frac{B}{A} f_u - g_u, \frac{B}{A} f_v - g_v, -\frac{B}{A}, 1\right)$$

$$\Rightarrow \|n_2\| = \sqrt{\left(\frac{B}{A} f_u - g_u\right)^2 + \left(\frac{B}{A} f_v - g_v\right)^2 + \left(\frac{-B}{A}\right)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \|n_2\| = \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{AC - B^2}$$

$$\Rightarrow \|n_2\| = \frac{1}{\sqrt{A}} w.$$

Bu durumda M 'nin N_1 ve N_2 birim normal vektörleri

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{n_1}{\|n_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{A}}\left(-f_u, -f_v, 1, 0\right) \\ N_2 = \dfrac{n_2}{\|n_2\|} = \dfrac{1}{w\sqrt{A}}\left(Bf_u - Ag_u, Bf_v - Ag_v, -B, A\right) \end{cases}$$

şeklindedir. M yüzeyinin

$$\begin{cases} h_1 = -\left\langle X, N_1\right\rangle \\ h_2 = -\left\langle X, N_2\right\rangle \end{cases}$$

destek fonksiyonları hesaplanırsa

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{uf_u + vf_v - f}{\sqrt{A}}, \\ h_2 = \dfrac{A\left(ug_u + vg_v - g\right) - B\left(uf_u + vf_v - f\right)}{w\sqrt{A}} \end{cases}$$

bulunur. O halde M yüzeyinin pedalı

$$\overline{X}(u,v) = \frac{1}{w^2}\begin{Bmatrix} \left(uf_u + vf_v - f\right)\left(Cf_u - Bg_u, Cf_v - Bg_v, -C, B\right) \\ +\left(ug_u + vg_v - g\right)\left(Ag_u - Bf_u, Ag_v - Bf_v, B, -A\right) \end{Bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Özel olarak, (4.96) da verilen denklemde $f(u,v) = u^2$ ve $g(u,v) = v^2$ alınırsa M esas yüzeyinin parametrik denklemi, normal vektörleri ve destek fonksiyonları, sırasıyla

$$X(u,v) = (u, v, u^2, v^2),$$

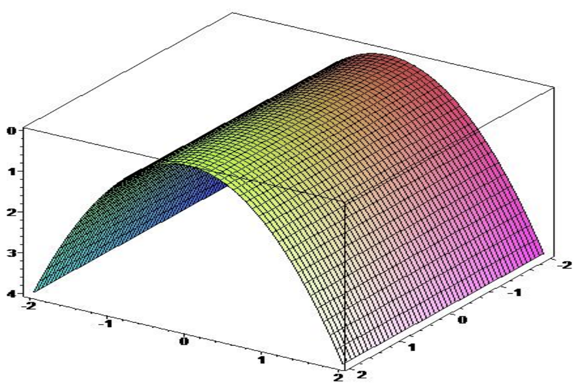
$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{1}{\sqrt{4u^2+1}}(-2u, 0, 1, 0) \\ N_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4v^2+1}}(0, -2v, 0, 1) \end{cases}$$

ve

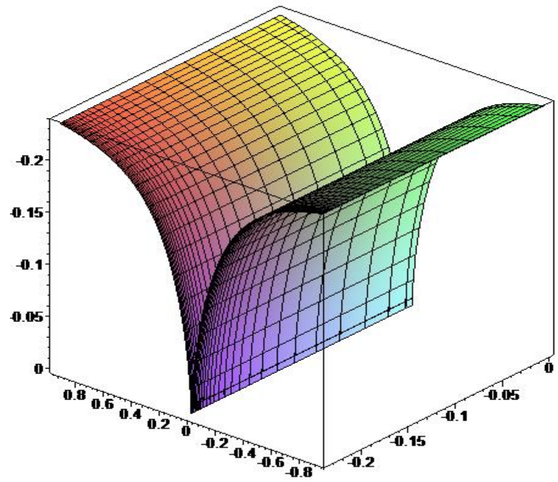
$$\begin{cases} h_1 = -\langle X, N_1 \rangle = \dfrac{u^2}{\sqrt{4u^2+1}} \\ h_2 = -\langle X, N_2 \rangle = \dfrac{v^2}{\sqrt{4v^2+1}} \end{cases}$$

olup, M 'nin pedal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\overline{M} : \overline{X}(u,v) = \left(\frac{2u^3}{4u^2+1}, \frac{2v^3}{4v^2+1}, \frac{-u^2}{4u^2+1}, \frac{-v^2}{4v^2+1} \right).$$



Şekil 4.6: M esas yüzeyi



Şekil 4.7: $\overline{M}$ pedal yüzeyi

Şekil 4.6 ve şekil 4.7 de verilen çizimler, M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin $w=0$ hiperdüzlemi üzerindeki paralel izdüşümü alınarak çizilmiştir.

Eğer, özel olarak $f(u,v)=2uv$ ve $g(u,v)=u^2-v^2$ alınırsa M esas yüzeyinin parametrik denklemi, normal vektörleri ve destek fonksiyonları, sırasıyla

$$M : X(u,v)=\left(u,v,2uv,u^2-v^2\right),$$

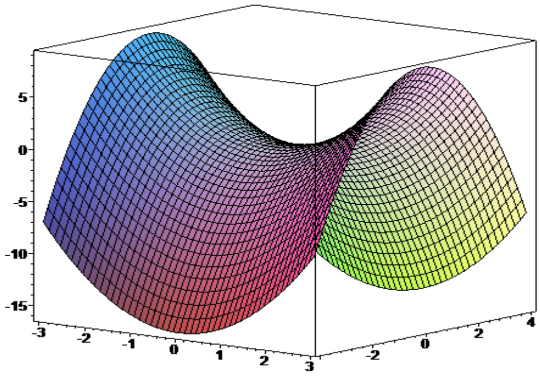
$$\begin{cases} N_1=\dfrac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2v,-2u,1,0) \\ N_2=\dfrac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,2v,0,1) \end{cases}$$

ve

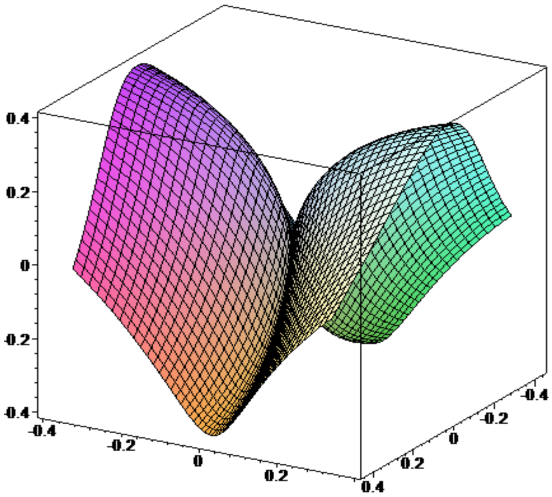
$$\begin{cases} h_1=\dfrac{2uv}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \\ h_2=\dfrac{u^2-v^2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{cases}$$

olup, M 'nin $\overline{M}$ pedal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\overline{X}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\left(2u^3+2uv^2,2v^3+2vu^2,-2uv,v^2-u^2\right).$$



Şekil 4.8: M esas yüzeyi



Şekil 4.9: $\overline{M}$ pedal yüzeyi

Şekil 4.8 ve şekil 4.9 da verilen M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin çizimlerinde $(w=0)$ paralel izdüşüm yöntemi kullanılmıştır.

Örnek 4.2.3. (Clifford yüzeyi)

M dört boyutlu Öklid uzayında

$$X(u,v)=(\cos u,\sin u,\cos v,\sin v) \quad \textbf{(4.100)}$$

parametrik denklemi ile verilen iki boyutlu bir yüzey olsun. M yüzeyinin pedalının denklemini bulalım. (4.100) denkleminin u ve v parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$X_u=(-\sin u,\cos u,0,0),\ X_v=(0,0,-\sin v,\cos v) \text{ ve } X_{uv}=(0,0,0,0)$$

bulunur. Buradan

$$g_{12}=\langle X_u, X_v\rangle=0,\ c_{12}^1=\langle X_{uv}, N_1\rangle=0 \text{ ve } c_{12}^2=\langle X_{uv}, N_2\rangle=0.$$

O halde M yüzeyinin parametre eğrileri eğrilik çizgisidir. M yüzeyinin $p\in M$ noktasındaki tanjant ve normal uzayı, sırasıyla, $T_M(p)$ ve $T_M^{\perp}(p)$ olsun. $T_M^{\perp}(p)$ normal uzayında bir $\xi=(a,b,c,d)\in T_M^{\perp}(p)$ vektörü alalım. O halde $X_u, X_v\in T_M(p)$ olduğundan

$$\langle \xi, X_u\rangle=0$$
$$\langle \xi, X_v\rangle=0.$$

Bu son eşitliklerde ξ, X_u ve X_v vektörlerinin eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$b\cos u=a\sin u$$
$$c\sin v=d\cos v$$

denklemleri elde edilir. Bu durumda

$$\xi=(a, a\tan u, c, c\tan v)$$

$$\xi=a(1,\tan u,0,0)+c(0,0,1,\tan v).$$

O halde M 'nin birim normal vektörleri

$$\begin{cases} N_1=(\cos u,\sin u,0,0) \\ N_2=(0,0,\cos v,\sin v) \end{cases} \quad \textbf{(4.101)}$$

şeklindedir. Diğer taraftan M 'nin destek fonksiyonları

$$\begin{cases} h_1=-\langle X, N_1\rangle \\ h_2=-\langle X, N_2\rangle \end{cases}$$

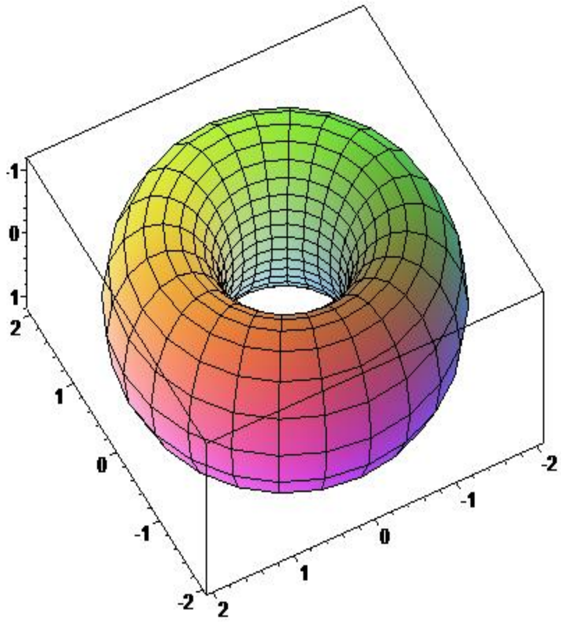
olup, (4.100) ve (4.101) bu son eşitlikte yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$h_1=-\langle X, N_1\rangle=-1,\ h_2=-\langle X, N_2\rangle=-1 \quad \textbf{(4.102)}$$

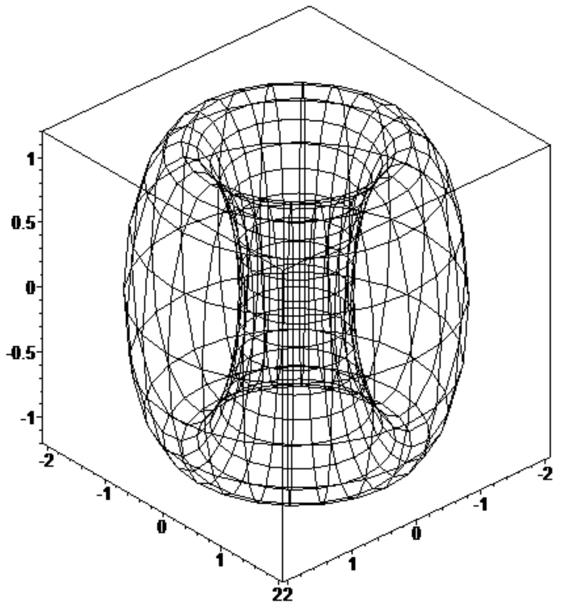
elde edilir. O halde (4.101) ve (4.102), (4.1) de yerlerine yazılırsa pedal yüzeyin denklemi

$$\overline{M}:\overline{X}(u,v)=(\cos u,\sin u,\cos v,\sin v)$$

bulunur. Bu durumda M yüzeyinin pedalı kendisidir.



Şekil 4.10: M esas yüzeyi



Şekil 4.11: $\overline{M}$ pedal yüzeyi

Şekil 4.10 ve şekil 4.11 de verilen M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin çizimlerinde $(0,0,0,1)$ merkezli perspektif izdüşüm yöntemi kullanılmıştır.

Örnek 4.2.4. (Düz Klein şişesi)

$$X(u,v)=\left(\cos v\cos u,\cos v\sin u,2\sin v\cos\frac{u}{2},2\sin v\sin\frac{u}{2}\right) \qquad \textbf{(4.103)}$$

parametrik denklemi ile verilen düz Klein şişesinin normalleri ve destek fonksiyonları, sırasıyla

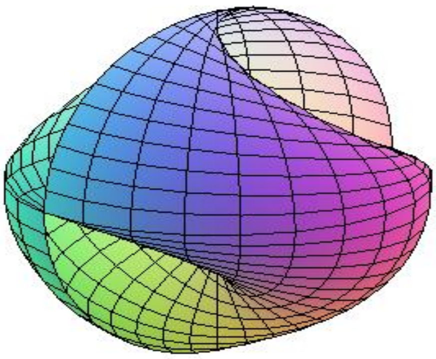
$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+3\cos^2 v}}\left(-2\cos v\cos u, -2\cos v\sin u, -\sin v\cos\dfrac{u}{2}, -\sin v\sin\dfrac{u}{2}\right) \\ N_2 = \left(-\sin v\sin u, \sin v\cos u, \cos v\sin\dfrac{u}{2}, -\cos v\cos\dfrac{u}{2}\right) \end{cases}$$

ve

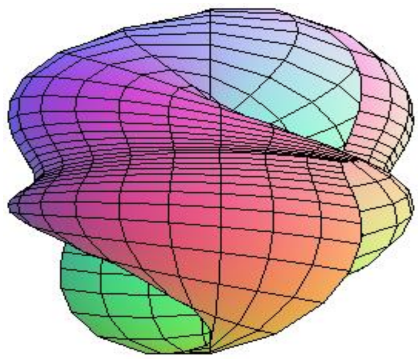
$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{2}{\sqrt{1+3\cos^2 v}} \\ h_2 = 0 \end{cases}$$

olup, pedalının denklemi

$$\overline{X}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+3\cos^2 v}}\left(4\cos v\cos u, 4\cos v\sin u, 2\sin v\cos\frac{u}{2}, 2\sin v\sin\frac{u}{2}\right).$$



Şekil 4.12: Düz Klein şişesi



Şekil 4.13: Düz Klein şişesinin pedal yüzeyi

Şekil 4.12 ve şekil 4.13 te verilen M ve $\overline{M}$ yüzeylerinin çizimlerinde $(w=0)$ paralel izdüşüm yöntemi kullanılmıştır.

Örnek 4.2.5. (Öteleme yüzeyi)

(3.17) de verilen denklemde özel olarak $f(u,v)=u+v-5$ ve $g(u,v)=u-v+2$ alınırsa iki boyutlu M öteleme yüzeyinin parametrik denklemi, normalleri ve destek fonksiyonları, sırasıyla

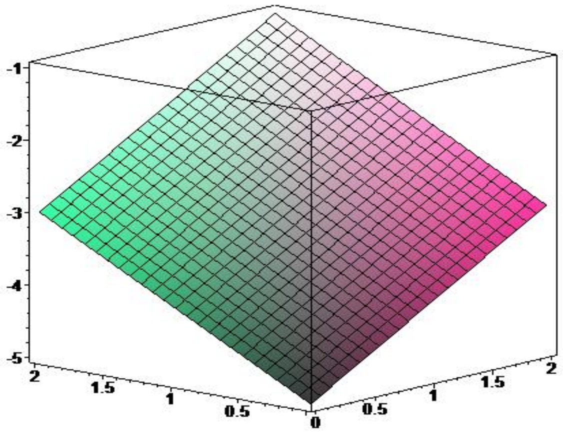
$$X(u,v)=(u,v,u+v-5,u-v+2)$$

$$N_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1,0),\ N_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0,1),\ h_1=\frac{5}{\sqrt{3}} \text{ ve } h_2=\frac{-2}{\sqrt{3}}$$

olup, M 'nin pedalı

$$\overline{X}(u,v)=\left(1,\frac{7}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$$

olarak elde edilir. O halde M yüzeyinin pedalı bir noktadır.



Şekil 4.14: M esas yüzeyi

Şekil 4.14 te verilen M yüzeyinin çiziminde $(w=0)$ paralel izdüşüm yöntemi kullanılmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, dört boyutlu Öklid uzayında parametre eğrileri eğrilik çizgisi olan iki boyutlu bir yüzey ile bu yüzeyin pedalının alan elementleri, Gauss eğrilikleri, ortalama eğrilikleri ve temel formları arasındaki bağıntılar bulunmuştur. Ayrıca, esas yüzeyinin destek fonksiyonlarının sabit olması halinde bu karakteristik özellikler tekrar ele alınmıştır. Daha sonra Aminov ve Monge tipindeki yüzeylerin pedalları bulunmuş ve parametre eğrileri eğrilik çizgisi olan bir Aminov yüzeyinin pedalının bir eğri olduğu gösterilmiştir. Son olarak da bu yüzeyler ve pedalları Maple 17 programında paralel ve perspektif izdüşüm kullanılarak çizilmiştir.

Dört boyutlu Öklid uzayında iki boyutlu yüzeylerin pedal yüzeylerinin incelenmesi konusu n-boyutlu Öklid uzayında iki boyutlu yüzeylerin pedal yüzeyleri için genelleştirilebilir. Benzer şekilde üç boyutlu Öklid uzayında bir yüzeyin pedalının paralel yüzeyi ile aynı yüzeyin paralelinin pedalı arasındaki karakteristik özellikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Aminov Y., Szajewska M. G., 2004. Gaussian torsion of a 2-dimensional surface defined implicitly in 4-dimensional Euclidean space, *Sbornik Mathematics*, 11, 1545–1556.

[2] Betül B., Arslan K., 2013. Surfaces Given With The Monge Patch in E^4, arXiv:1305.4373v1.

[3] Betül B., 2012. “E^4’*deki Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu*”, Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[4] Ganchev G., Milousheva V., 2008. On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space. Kodai Math. J., 31, 183-198.

[5] Ganchev G., Milousheva V., 2008. Minimal surfaces in the four-dimensional Euclidean space. arXiv:0806.3334v1.

[6] Ganchev G., Milousheva V., 2010. Invariants of Lines on Surfaces in $\mathbb{R}^4$ Arxiv:1002-3749v1.

[7] Baranova E., 2011. Cyclical elliptical pedal surfaces, *Journal of Mathematics and System Science*, 1, 1-6.

[8] Georgiou C., Hasanis T., Koutrofiotis D., 1983. The pedal of a hypersurface revisited, *Technical Report*, 96.

[9] Hirst T. A., 1863. On the Volumes of Pedal Surfaces, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 153, 13-32.

[10] Kasap E., Sarıoğlugil A., Kuruoğlu N., 2005. The Pedal Cone Surface of a Developable Ruled Surface, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 19, 157-164.

[11] Kılıç E., Keleş S., 2000. Geometry of the Pedal of a Surface, *Erc. Üniv. Fen Bil. Enst. Derg*. 16, 77-83.

[12] Kuruoğlu N., 1986. Some New Characteristic Properties of the Pedal Surface in Euclidean Space E^3, *Pure and Applied Mathematica Sciences*, 23, 1-2.

[13] Kuruoğlu N., Sarıoğlugil A., 1993. On The Characteristic Properties Of The a-Pedal Surfaces in Euclidean Space E^3, *Commun. Fac. Sci. Univ. Series A*, 42, 19-25.

[14] Kuruoğlu N., Sarıoğlugil A., 1998. On The Some New Characteristic Properties Of The a-Pedal Hypersurface of a Hypersurface With The Constant Support Function $(n+1)$-Dimensional Euclidean Space E^{n+1}, *Commun. Fac. Sci. Univ*. Series A, 47, 19-26.

[15] Sarıoğlugil A., Kuruoğlu N., Çalışkan M., 1994. On the Characteristic Properties of the Plane Pedal Curves, *Pure and Applied Mathematica Sciences*, 40, 1-2.

[16] Soliman M. A., Abdel-All Nassar. H., Hassan Soad. A., Dahi E., 2011. Singularities of Gauss map of pedal hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$, *Life Science Journal*, 8, 102-107.

[17] Hacısalihoğlu H. H., 1982. *Diferensiyel Geometri Cilt I*, Fen Fakültesi Yayınları, Ankara Üniversitesi.

[18] Hacısalihoğlu H. H., 1994. *Diferensiyel Geometri Cilt II*, Fen Fakültesi Yayınları, Ankara Üniversitesi.

[19] Şemin F,. 1987. *Diferensiyel Geometri*, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

[20] Hacısalihoğlu H. H., Ekmekçi N., 2003. *Tensör Geometri*, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara Üniversitesi.

[21] O'Neill, B., 1966. *Elementary differential geometry*, Academic Press, New York.

[22] Do Carmo M. P., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[23] Sabuncuoğlu, A., 2001. *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

[24] Gray A., 1997. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 2nd ed. Boca Raton, FL, CRC Press.

[25] Aminov Y., 1994. Surfaces in E^4 with a Gaussian curvature coinciding with a Gaussian torsion up to the sign, *Mathematical Notes*, 56, 1211-1215.

[26] Aminov Y., 2001. *The Geometry of Submanifolds*, Gordon and Breach Science Publishers Singapore.

[27] Arenas Y., Perez-Aguila R., 2006. Visualizing 3D Projections of Higher Dimensional Polytopes: *An Approach Linking Art and Computers*. In: Memorias del Cuarto Congreso Nacional de Ciencias de la Computacion, Facultad de Ciencias de la Computacion, BIJAP.

[28] Blaschke, W., 1930. *Vorlesungen Über Differential geometrie I*, 3d ed., Springer, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Engin AS

Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul/1987

E-Posta : engin.as@hotmail.com

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Ordu Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik (2004-2008)

Yüksek Lisans : Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik (2008-2010)

Mesleki Deneyim: Yargı Akademi Kurumları, Öğretmen (2013-…).

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR

- As E., Sarıoğlugil A., (2015). "On The Pedal Surface of 2-d Surfaces with the Constant Support Function in E^4", *Pure Mathematical Sciences*, Vol. 4, No:3 105-120.