MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ YARIGRUPLARDA İDEAL TEORİ

HATİCE ÇAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Teorik Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2015

MARMARA UNIVERSITY
INSTITUTE FOR GRADUATE STUDIES
IN PURE AND APPLIED SCIENCES

IDEAL THEORY IN COMMUTATIVE SEMIGROUPS

Hatice Cay

MASTER THESIS

Department of Mathematics

Thesis Supervisor

Prof. Dr. Ünsal TEKIR

ISTANBUL, 2015

TEŞEKKÜR

Tez dönemimde bana olan destekleri için Öğretim Görevlisi Gülşen ULUCAK'a ve emeği büyük olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez jüri üyelerim Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL'a ve Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZEN'e teşekkür ediyorum.

Ayrıca tez sürecini benim için kolaylaştıran Araştırma Görevlisi Suat KOÇ'a yardım ve katkıları için teşekkürler.

Ekim, 2015 **Hatice ÇAY**

İÇİNDEKİLER/

ÖZET

DEĞİŞMELİ YARIGRUPLARDA İDEAL TEORİ

Tezimizin temel amacı değişmeli yarıgruplarda ideal yapısını kavramaktır. Bunun için öncelikle yarıgrup tanımı verilmiş ve yarıgrupların temel özellikleri incelenmiştir.

Teoremlerin ispatlarında büyük kolaylık sağlayan homomorfizmaların çekirdek yapıları ve diğer özellikleri detaylı incelenmiştir.

İkinci kısımda asal idealler ve asalımsı ayrışım işlenmiştir. Literatürde "quasi primary" olarak bilinen idealler "sözde asalımsı" başlığı altında incelenmiştir.

Son kısımda ise halkalar için geçerli olan yerelleştirme ve Noetherianlığın yarıguplar için de geçerli olduğu görülmüştür.

ABSTRACT

IDEAL THEORY IN COMMUTATIVE SEMIGROUPS

In this study our main purpose is giving the properties of ideals in commutative semigroups. For this, we give definitions and some basic theorems of commutative semigroups.

We survey the definition of kernel of semigroup homomorphism and we use this in some proofs.

Also we give prime and primary ideals and primary decomposition in commutative semigroups as in [23]. Furthermore we study about quasi primary ideals in commutative semigroups.

Finally we give localization of commutative semigroups and Noetherian commutative semigroups.

SEMBOLLER ve KISALTMALAR

S: çarpımsal değişmeli yarıgrup

$A \cap B$: A , B ideallerinin kesişimi

$A \cup B$: A, B ideallerinin birleşimi

$(A:B)$: A kolon B

$A \leq B$: A küçük eşittir B

$\sqrt{I}$: I idealinin radikali

S/I: bölüm yarıgrubu

$A - B$: A fark B

T: çarpımsal kapalı küme

T^*: doymuş çarpımsal kapalı küme

$\mathcal{I}(S)$: S yarıgrubunun tüm ideallerinin kümesi

$çekf$: f homomorfizmasının çekirdeği

imf: f homomorfizmasının görüntüsüdür

$\langle a \rangle$: a ile üretilmiş temel ideal

(x): parantez içinde x

π: doğal homomorfizma

AB: A ve B ideallerinin çarpımı

S_T: S nin T de yerelleştirilmesi

$\mathcal{L}(S)$: S nin ideallerinin latisi

$\vee A_\propto$: $A_\propto$ ların supremumu

$\wedge A_\propto$: $A_\propto$ ların infimumu

L: latis

R: değişmeli birimli halka

$\mathcal{L}(R)$: R nin ideallerinin latisi

0_S: yarıgrubun yutan elemanı

1_S: yarıgrubun birimi

$\mathbb{N}$: doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$: tamsayılar kümesi

$\mathbb{R}$: reel sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$: rasyonel sayılar kümesi

$S \cong T$: S, T ye izomorftur

$P(X)$: X in kuvvet kümesi

Δ: indis kümesi

$x\partial$: x in ∂ bağıntısına göre denklik sınıfı

$Z(S/I)$: sıfır bölen kümesi

$V(A)$: A yı kapsayan tüm asal ideallerin kümesi

syf: sayfa

1. GİRİŞ

S boştan farklı bir küme ve $*, S$ de bir ikili işlem olsun. Her $a, b, c \in S$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ oluyorsa $(S,*)$ cebirsel yapısına bir yarıgrup denir. $(S,*)$ bir yarıgrup olsun. Eğer her $a \in S$ için $a * 1_S = 1_S * a = a$ olacak şekilde bir $1_S \in S$ varsa $(S,*)$ yarıgrubuna birimli yarıgrup (monoid) denir. Ayrıca her $a \in S$ için $a * 0_S = 0_S * a = 0_S$ olacak şekilde bir $0_S \in S$ varsa bu elemana S yarıgrubunun yutan elemanı denir. Eğer her $a, b \in S$ için $a * b = b * a$ oluyorsa $(S,*)$ yarıgrubu değişmelidir.

Şimdi yarıgrup örnekleri verelim:

● Her grup bir yarıgruptur.

● $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1, \dots\} = \mathbb{N}_0$ kümesi için $(\mathbb{N}_0, .)$ yutan elemanı ve birimi olan değişmeli bir yarıgruptur.

● Her değişmeli halka çarpma işlemi ile birlikte değişmeli bir yarıgruptur.

● $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olmak üzere $(\mathbb{Z}, .)$ yutan elemanı ve birimi içeren değişmeli bir yarıgruptur.

● $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C[0,1]$, her $x \in [0,1]$ ve $f, h \in C[0,1]$ için $(fh)(x) = f(x)h(x)$ işlemi altında birimi 1 sabit fonksiyonu, yutan elemanı 0 sabit fonksiyonu olan değişmeli bir yarıgruptur.

● S ve T yutan elemanı ve birimi olan iki değişmeli yarıgrup olmak üzere $S \times T$ kartezyen çarpımı $s, s' \in S$ ve $t, t' \in T$ için $(s, t)(s', t') = (ss', tt')$ biçiminde tanımlıysa $S \times T$, birimi $1_S \times 1_T$, yutan elemanı $0_S \times 0_T$ olan değişmeli bir yarıgruptur.

● X bir küme olsun. X in her A, B alt kümesi için $A * B = A \cup B$ işlemi tanımlı ise $(P(X),*)$ birimi $\emptyset$, yutan elemanı X olan değişmeli bir yarıgruptur.

● $E_n = \{1,2, \dots, n\}$ üzerinde maksimum işlemi tanımlı olsun. $0_{E_n} = n$, $1_{E_n} = 1$ olmak üzere E_n değişmeli bir yarıgruptur.

● $(P(X),\cap)$ birimi X, yutan elemanı $\emptyset$ olan değişmeli bir yarıgruptur.

● $M_{2\times2}' = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$ kümesi üzerinde bilinen matris çarpımı tanımlansın. $(M_{2\times2}', .)$, birimi $I_{2\times2}$ birim matrisi, yutan elamanı $0_{2\times2}$ matrisi olan değişmeli bir yarıgruptur.

● $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $I = [a, b]$ aralığı üzerinde $x * y = min(x, y)$ işlemi tanımlıysa

$(I,*)$ birimi b, yutan elamanı a olan değişmeli bir yarıgruptur.

Tanım: S bir yarıgrup olsun. $a \in S$ için $a^2 = a$ ise a ya idempotent eleman denir.

Tezimizde yarıgruplar 0 ve 1 i içeren çarpımsal değişmeli yarıgruplar olarak alınacaktır.

1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 1.1.1. [25] X kümesi boştan farklı olmak üzere ρ, $X \times X$ kümesinin bir alt kümesi ise ρ ye X üzerinde bir bağıntıdır denir. $x\rho y$ gösterimi $(x,y) \in \rho$ olduğunu ifade eder.

Tanım 1.1.2. [25] ρ, X kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa ρ ye bir denklik bağıntısıdır denir:

i.) Her $x \in X$ için $x\rho x$ tir. (yansıma)

ii.) Her $x, y \in X$ için $x\rho y$ ise $y\rho x$ tir. (simetri)

iii.) Her $x, y, z \in X$ için $x\rho y$ ve $y\rho z$ ise $x\rho z$ dir. (geçişme)

Tanım 1.1.3. $\mathcal{R}$, S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $a, b, c, d \in S$ için $a\mathcal{R}c$ ve $b\mathcal{R}d$ olması $ab\mathcal{R}cd$ olmasını gerektiriyorsa $\mathcal{R}$ ye kongrüans denir.

Tanım 1.1.4. [1] L bir küme ve üzerinde bir $\leq$ bağıntısı şu koşulları sağlıyorsa L ye sıralı küme denir:

i.) Her $a \in L$ için $a \leq a$ dır (yansıma).

ii.) $a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ dir (ters simetri).

iii.) $a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ (geçişme).

● Sıralı kümede her $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ oluyorsa bu sıralı kümeye tam sıralı denir. Örneğin; $(\mathbb{R}, \leq)$ ve $(\mathbb{Z}, \leq)$ tam sıralıdır. Tam sıralı olmayan sıralı kümeye ise $(P(X), \subseteq)$ örneğini verebiliriz.

Tanım 1.1.5. [1, Tanım 1.1.3.] $(L, \leq)$ sıralı kümesinde $a, b \in L$ için, $a \leq z$, $b \leq z$ ve $a \leq h$, $b \leq h$ olması $z \leq h$ olmasını gerektirecek şekilde bir $z \in L$ varsa z ye a ve b nin supremumu denir ve $\sup\{a, b\} = a \vee b$ ile gösterilir. Bir $k \in L$, $k \leq a$, $k \leq b$ ve $l \leq a$, $l \leq b$ olması $l \leq k$ olmasını gerektirecek şekilde varsa bu k elemanına a ile b nin infimumu denir ve $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.6. [1, Tanım 1.1.4.] $(L, \leq)$ sıralı kümesinde her $a, b \in L$ elemanının bir supremumu ve infimumu varsa bu sıralı kümeye latis denir ve kısaca L ile gösterilir.

● Her tam sıralı küme bir latistir.

Tanım 1.1.7. [1, Tanım 1.1.7.] Bir latisin her alt kümesinin bir supremumu ve infimumu varsa bu latise tam latis denir.

● Sonlu tam sıralı kümeler tam latistir.

Tanım 1.1.8. [1, Tanım 1.1.10.] Bir L latisinde her $a, b, c \in L$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ise L ye dağılmalı latis denir.

Tanım 1.1.9. [1, Tanım 1.1.12.] Bir L latisinde her $a, b, c \in L$ ve $a \leq c$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$
oluyorsa L ye modüler latis denir.

Tanım 1.1.10. [1, Tanım 1.1.6.] Bir L latisinde en büyük eleman 1 ve en küçük eleman 0 olsun. Her $a \in L$ için $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b = 0$ olacak şekilde bir $b \in L$ elemanı varsa bu latise tamlamalı latis denir.

Tanım 1.1.11. [1, Tanım 1.1.14.] Sıralı bir kümenin tam sıralı alt kümesine zincir denir.

Tanım 1.1.12. [1, Tanım 1.1.2.] Sıralı bir kümede kendinden kesin büyük hiçbir eleman yoksa bu elemana maksimal eleman denir.

Lemma 1.1.1. (Zorn Lemma) [1, Lemma 1.1.15.] Boş olmayan bir L sıralı kümesinin her zincirinin L de bir üst sınırı varsa L sıralı kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır.

Tanım 1.1.13. [6, syf 5] X ve Y, S nin iki alt kümesi olsun. X ve Y nin çarpımı şu şekilde tanımlanır:

$$XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$$

● Özel olarak her $X, Y \subseteq S$ ve $c \in S$ için çarpım, $Xc = \{xc : x \in X\}$ ve $cY = \{cy : y \in Y\}$ biçimindedir.

Tanım 1.1.14. A, S nin birimini ve yutan elamanı içeren bir alt kümesi olsun. $AA \subseteq A$ oluyorsa A ya S nin alt yarıgrubu denir. S den farklı bir alt yarıgruba has alt yarıgrup denir.

● $A = \{A_i : i \in \Delta\}$, S nin alt yarıgruplarının bir ailesi olsun. $\bigcap A = \bigcap_{i \in \Delta} A_i$ bir alt yarıgruptur.

● X, S nin alt kümesi ve A, S nin X i içeren alt yarıgruplarının bir ailesi olsun. A nın elemanlarından birisi S dir ve A daki her yarıgrup X i içerir. Yani $\bigcap A$ bir alt yarıgruptur. Bu alt yarıgrup $\langle X \rangle$ ile gösterilir ve buna X tarafından üretilmiş alt yarıgrup denir.

1.2. İdealler

Tanım 1.2.1. [23, syf 128] S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun. $SI \subseteq I$ oluyorsa I ya S nin bir idealidir denir.

● $0 \in S$ olduğundan S nin en küçük ideali 0 dır. Böylece S nin ideallerinin herhangi bir kesişimi boştan farklıdır.

● $1 \in S$ kabulümüzden S nin her I ideali için $SI = I$ dır.

Önerme 1.2.1. I ve J S nin idealleri olmak üzere şu özellikler gerçeklenir:
i.) $I \cup J$, S nin idealidir.
ii.) $I \cap J$, S nin idealidir.
iii.) IJ, S nin idealidir.

İspat: *i.)* $(I \cup J)S = IS \cup JS$ ve $IS \subseteq I, JS \subseteq J$ olduğundan $(I \cup J)S \subseteq I \cup J$ dir.
ii.) $(I \cap J)S \subseteq IS \cap JS$ ve I ve J, S nin idealleri olduğundan $IS \subseteq \mathrm{I}$ ve $JS \subseteq \mathrm{J}$ dır ve böylece $(I \cap J)S \subseteq IS \cap JS \subseteq \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ dir.
iii.) $(IJ)S = I(JS) \subseteq IJ$.

● Daha genel olarak $\{I_\propto\}$, S nin ideallerinin boştan farkı bir ailesi olmak üzere $\bigcup I_\propto$ ve $\bigcap I_\propto$, S nin idealleridir.

Tanım 1.2.2. [23, syf 128] Bir $a \in S$ için $\langle a \rangle = Sa = \{sa : s \in S\}$ idealine a nın ürettiği temel ideal denir.

Örnek 1.2.1. $\mathbb{Z}$ tamsayılar yarıgrubunda $I_1 = \langle 10 \rangle$ ve $I_2 = \langle 12 \rangle$ ise $I_1 \cap I_2$, $I_1 I_2$ ve $I_1 \cup I_2$ yi bulalım.

Çözüm: $I_1 \cap I_2 = \langle 10 \rangle \cap \langle 12 \rangle = \langle 60 \rangle$, $I_1 I_2 = \langle 10 \rangle \langle 12 \rangle = \langle 120 \rangle$ ve $I_1 \cup I_2 = \langle 10 \rangle \cup \langle 12 \rangle = \langle 10,12 \rangle$ dir.

Örnek 1.2.2. J_1 ve J_2, S nin iki ideali olmak üzere bu iki idealin supremumu olarak $J_1 \cup J_2$ yi, infimumu olarak da $J_1 \cap J_2$ yi alırsak $\mathcal{I}(S)$ kümesi bir tam latistir.

Tanım 1.2.3. [23, syf 129] I ve J, S nin idealleri olmak üzere $(I : J) = \{s \in S : \text{her } k \in J \text{ için } sk \in I\}$ olarak tanımlanır. Özel olarak $I = 0$ alınırsa $(0 : J) = \{s \in S : \text{her } x \in J \text{ için } sx = 0\}$ idealine J nin sıfırlayıcısı denir. $J = \{a\}$ ise $(0 : \{a\}) = (0 : a) = Ann(a)$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.3. I, J ve K, S nin idealleri olmak üzere $\big((I : J) : K\big) = (I : JK) = \big((I : K) : J\big)$

dir.

Çözüm: Bir $a \in \big((I:J):K\big)$ alalım. $aK \subseteq (I:J)$ dir. Yani $aKJ \subseteq I$ dır. Böylece $a \in (I:JK)$ bulunur. Tersine bir $x \in (I:JK)$ alalım. $xJK = (xK)J \subseteq I$ dır. Yani $xK \subseteq (I:J)$ böylece $x \in \big((I:J):K\big)$ bulunur. Şimdi son eşitliği gösterelim. Bir $b \in (I:JK)$ alalım. $bJK \subseteq I$ yani $bJ \subseteq (I:K)$ dır. Dolayısıyla $b \in \big((I:K):J\big)$ bulunur. Tersine, $b \in \big((I:K):J\big)$ alalım. O halde $bJ \subseteq (I:K)$ ve böylece $(bJ)K \subseteq I$ olur. Yani $b \in (I:JK)$ dir.

Örnek 1.2.4. $\{I_i\}$ ve J, S nin idealleri olmak üzere, $\bigcap(I_i:J) = (\bigcap I_i:J)$ dir.

Çözüm: $\bigcap I_i \subseteq I_i$ dir. J, S nin bir ideali olmak üzere $(\bigcap I_i:J) \subseteq (I_i:J)$ olur. Bu her i için doğru olduğundan $(\bigcap I_i:J) \subseteq \bigcap(I_i:J)$ dir. Tersi için bir $x \in \bigcap(I_i:J)$ alalım. Her i için $x \in (I_i:J)$ dir. $xJ \subseteq I_i$ ve bu her i için doğru olduğundan $xJ \subseteq \bigcap I_i$ dir. Yani $x \in (\bigcap I_i:J)$ dir.

Önerme 1.2.2. [23, syf 134-135] I, I_i, J, J_i ve K, S nin idealleri olmak üzere şu özellikler gerçeklenir:

i.) $I(\bigcup_i J_i) = \bigcup_i IJ_i$

ii.) $IJ \subseteq I \cap J$

iii.) $I(J \cap K) \subseteq IJ \cap IK$

iv.) $(I:J)J \subseteq I$

v.) $I \subseteq (I:J)$

vi.) $(I:(\bigcup_i J_i)) = \bigcap_i(I:J_i)$

vii.) $(I:J) = (I:(I \cup J))$

İspat: *i.)* Birleşim işleminin çarpma işlemi üzerine dağılma özelliğinden $I(\bigcup_i J_i) = \bigcup_i IJ_i$ olur.

ii.) $IJ \subseteq I$ ve $IJ \subseteq J$ olduğundan $IJ \subseteq I \cap J$ dir.

iii.) $I(J \cap K) \subseteq IJ$ ve $I(J \cap K) \subseteq IK$ olduğundan $I(J \cap K) \subseteq IJ \cap IK$ dır.

iv.) Bir $x \in (I:J)J$ alalım. O halde $x = kl$ olacak şekilde bir $k \in (I:J)$, $l \in J$ vardır. Tanımdan her $l \in J$ için $kl \in I$ sağlanır. Yani $x = kl \in I$ dır.

v.) $IJ \subseteq I$ olduğundan $I \subseteq (I:J)$ dir.

vi.) $J_i \subseteq \bigcup_i J_i$ olduğundan her i için $(I:J_i) \supseteq (I:(\bigcup_i J_i))$ olur ve böylece $\bigcap_i(I:J_i) \supseteq (I:(\bigcup_i J_i))$ bulunur. Öte yandan $x \in \bigcap_i(I:J_i)$ olsun. Her i için $x \in (I:J_i)$ dir. $xJ_i \subseteq I$ dır. $\bigcup xJ_i = x(\bigcup J_i) \subseteq I$ olacağından $x \in (I:(\bigcup_i J_i))$ dir.

vii.) $J \subseteq I \cup J$ olduğundan $(I:J) \supseteq \big(I:(I \cup J)\big)$ dir. Tersine $x \in (I:J)$ için $xJ \subseteq I$ ve zaten $xI \subseteq I$ olduğundan $x(I \cup J) \subseteq I$ yani $x \in \big(I:(I \cup J)\big)$ dir.

Tanım 1.2.4. [23, syf 135] I, S nin bir ideali olsun. $\sqrt{I} = \{s \in S$: bir $n \in \mathbb{N}$ için $s^n \in I\}$ kümesi S yarıgrubunun I yı kapsayan bir idealidir. Bu ideale I nın radikali denir.

Lemma 1.2.1. [10],[11] $I \times J$, $S \times T$ nin bir ideali olsun. $\sqrt{I \times J} = \sqrt{I} \times \sqrt{J}$ dir.

İspat: $(s,t) \in \sqrt{I \times J}$ olsun. Böylece $(s,t)^n = (s^n, t^n) \in I \times J$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $s^n \in I$ ve $t^n \in J$ yani $s \in \sqrt{I}$, $t \in \sqrt{J}$ yani $(s,t) \in \sqrt{I} \times \sqrt{J}$ olur. Tersine, $(s,t) \in \sqrt{I} \times \sqrt{J}$ alalım. $s \in \sqrt{I}$, $t \in \sqrt{J}$ yani $s^m \in I$ ve $t^k \in J$ olacak şekilde $m, k \in \mathbb{N}$ vardır. $(s,t)^{mk} = ((s^m)^k, (t^k)^m) \in I \times J$ dir. Böylece $(s,t) \in \sqrt{I \times J}$ dır.

Örnek 1.2.5. $\mathbb{Z}$ tam sayılar yarıgrubu ve $n > 1$ bir tam sayı olsun. O halde $p_1, p_2, \dots, p_r$ farklı asal sayılar olmak üzere $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ ise $\sqrt{\langle n \rangle} = \langle p_1 p_2 \dots p_r \rangle$ dir.

Çözüm: $b = p_1 p_2 \dots p_r$ ve $k = max\{k_1, \dots, k_r\}$ ise $b^k \in \langle n \rangle$ olur. Yani $\langle p_1 p_2 \dots p_r \rangle \subseteq \sqrt{\langle n \rangle}$ dir. Tersine $m \in \sqrt{\langle n \rangle}$ ise m sayısı, $p_1, p_2, \dots, p_r$ sayıları tarafından bölünür. Yani $m \in \langle p_1 \rangle \cap \langle p_2 \rangle \cap \dots \cap \langle p_r \rangle = \langle p_1 p_2 \dots p_r \rangle$ olur. Böylece $\sqrt{\langle n \rangle} = \langle p_1 p_2 \dots p_r \rangle$ dir.

Örnek 1.2.6. $\mathbb{Z}$ tam sayılar yarıgrubunda $\sqrt{\langle 24 \rangle} = \sqrt{\langle 2^3 3 \rangle} = \langle 6 \rangle$, $\sqrt{\langle 64 \rangle} = \sqrt{\langle 2^6 \rangle} = \langle 2 \rangle$ ve $\sqrt{\langle 92 \rangle} = \sqrt{\langle 2^2 23 \rangle} = \langle 46 \rangle$ dır.

Önerme 1.2.3. [23, syf 135] I, J ve I_i ler S yarıgrubunun idealleri olsun. O halde aşağıdaki koşullar gerçeklenir:

i.) $\sqrt{I \cup J} = \sqrt{\sqrt{I} \cup \sqrt{J}}$

ii.) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

iii.) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

iv.) $\sqrt{\bigcup_{i \in \Delta} I_i} = \bigcup_{i \in \Delta} \sqrt{I_i}$

v.) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$ dır.

İspat: *i.)* $I \subseteq \sqrt{I}$ ve $J \subseteq \sqrt{J}$ olduğundan $I \cup J \subseteq \sqrt{I} \cup \sqrt{J}$ ve $\sqrt{I \cup J} \subseteq \sqrt{\sqrt{I} \cup \sqrt{J}}$ dir.

Tersine bir $a \in \sqrt{\sqrt{I} \cup \sqrt{J}}$ alalım. $a^n \in \sqrt{I} \cup \sqrt{J}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $a^n \in \sqrt{I}$ veya $a^n \in \sqrt{J}$ dir. O halde $a^{nt} \in I \subseteq I \cup J$ veya $a^{nm} \in J \subseteq I \cup J$ olacak şekilde $m, t \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $a \in \sqrt{I \cup J}$ bulunur.

ii.) $I \subseteq \sqrt{I}$ olduğundan $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$ dir. Tersine bir $a \in \sqrt{\sqrt{I}}$ için $a^n \in \sqrt{I}$ ve $a^{nt} \in I$

olacak şekilde $n, t \in \mathbb{N}$ vardır, yani $a \in \sqrt{I}$ dır.

iii.) $IJ \subseteq I \cap J$ olduğundan $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J}$ dir. $I \cap J \subseteq I$ ve $I \cap J \subseteq J$ yani $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I}$, $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{J}$ olduğundan $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ olur. Böylece $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ bulunur. Tersi için $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Bir $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ alalım. $x \in \sqrt{I}$ ve $x \in \sqrt{J}$ olduğundan $x^n \in I$ ve $x^t \in J$ olacak şekilde $n, t \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $x^{n+t} \in IJ$ yani $x \in \sqrt{IJ}$ dir.

iv.) Bir $x \in \sqrt{\bigcup_{i\in\Delta} I_i}$ alalım. $x^n \in \bigcup_{i\in\Delta} I_i$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. En az bir $i \in \Delta$ için $x^n \in I_i$ yani $x \in \sqrt{I_i}$ dir. Dolayısıyla $x \in \bigcup_{i\in\Delta} \sqrt{I_i}$ dir. $\sqrt{I_i} \subseteq \sqrt{\bigcup_{i\in\Delta} I_i}$ kapsaması her $i \in \Delta$ için doğru olduğundan $\bigcup_{i\in\Delta} \sqrt{I_i} \subseteq \sqrt{\bigcup_{i\in\Delta} I_i}$ dir.

v.) $\sqrt{I^n} = \sqrt{II \ldots I} = \sqrt{I} \cap \sqrt{I} \cap \ldots \cap \sqrt{I} = \sqrt{I}$ dir.

$\mathcal{L}(S)$, S nin ideallerinin latisi olmak üzere birleşim supremumu, kesişim infimumu belirttiğinden $\mathcal{L}(S)$ tam ve dağılmalı bir latistir. Yani supremumu $\bigcup I_\propto$ ve infimumu $\bigcap I_\propto$ olan bir latistir. Ayrıca, $I_{\propto_1}, I_{\propto_2}, I_{\propto_3} \in \mathcal{L}(S)$ için $I_{\propto_1} \cup \left(I_{\propto_2} \cap I_{\propto_3}\right) = \left(I_{\propto_1} \cup I_{\propto_2}\right) \cap \left(I_{\propto_1} \cup I_{\propto_3}\right)$ olacağından $\mathcal{L}(S)$ bir dağılmalı latistir.

Tanım 1.2.5. [23, syf 129] Değişmeli ve çarpımsal birleşmeli bir tam modüler latis, keyfi sayıda supremum üzerine dağılmalıysa yani $A(\vee B_\propto) = \vee AB_\propto$ sağlanıyorsa ve en büyük elemanı I, çarpımın birimiyse L ye çarpımsal latis denir.

Örnek 1.2.7. Hem yarıgrupların latisleri hem de değişmeli halkaların latisleri çarpımsal latistir.

Tanım 1.2.6. [23, syf 129] L çarpımsal bir latis ve A,$B \in L$ olmak üzere $(A\!:B) = \vee \{X \in L\!: XB \leq A\}$ dir.

Önerme 1.2.4. L çarpımsal bir latis ve A,$B \in L$ olmak üzere $(A\!:B)B \leq A$ dır.

İspat: $(A\!:B) \in L$ olduğundan tanım gereği $(A\!:B)B \leq A$ sağlanır. Ayrıca $(A\!:B)$ bu özelliği sağlayan en büyük elemandır.

Tanım 1.2.6. [23, syf 129] L çarpımsal bir latis olsun ve bir $C \in L$ alalım. Her A, $B \in L$ için $A \wedge CB = C((A\!:C) \wedge B)$ sağlanıyorsa C ye temel infimum denir.

Tanım 1.2.7. [23, syf 129] L çarpımsal bir latis olsun ve bir $C \in L$ alalım. Her A, $B \in L$ için $A \vee (B\!:C) = ((AC \vee B)\!:C)$ sağlanıyorsa C ye temel supremum denir.

Tanım 1.2.8. [23, syf 129] L çarpımsal bir latis ve $C \in L$ olmak üzere her $A \in L$ için

$A \wedge C = C(A: C)$ oluyorsa C ye zayıf temel infimum denir.

Tanım 1.2.9. [23, syf 129] L çarpımsal bir latis ve $C \in L$ olmak üzere her $A \in L$ için $A \vee (0: C) = (CA: C)$ oluyorsa C ye zayıf temel supremum denir.

Sonuç 1.2.1. *i.)* Temel infimumun tanımında $B = I$ alınırsa temel infimumun zayıf temel infimum olduğu görülür.

ii.) Temel supremumun tanımında $B = 0$ alınırsa temel supremumun zayıf temel supremum olduğu görülür.

i.) Gerçekten, $B = I$ alırsak, $A \wedge CI = C\big((A: C) \wedge I\big)$ ve I latisin en büyük elemanı olduğundan $A \wedge C = C(A: C) \wedge C$ ve kolon tanımı nedeniyle $C(A: C) \leq C$ olduğundan $A \wedge C = C(A: C)$ dır.

ii.) Şimdi $B = 0$ alalım. $A \vee (0: C) = \big((AC \vee 0): C\big)$ ve 0 latisin en küçük elemanı olduğundan $A \vee (0: C) = (CA: C)$ bulunur.

Tanım 1.2.10. [23, syf 129] Bir çarpımsal L latisinde $C \in L$ hem temel infimum hem temel supremum oluyorsa temel eleman denir.

● Ayrıca bir çarpımsal L latisinde $C \in L$ hem zayıf temel infimum hem zayıf temel supremum oluyorsa zayıf temel elemandır.

Önerme 1.2.5. [23], [31] L çarpımsal latis ve $M \in L$ olsun.

i.) M nin zayıf temel infimum olması için gerek ve yeter koşul $A \in L$ olmak üzere $A \leq M$ için $A = MC$ koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $C \in L$ nin var olmasıdır.

ii.) M nin zayıf temel supremum olması için gerek ve yeter koşul $A, B \in L$ olmak üzere $A \leq B \vee (0: M)$ olacak şekilde $MA \leq MB$ olmasıdır.

İspat: *i.)* M zayıf temel infimum olsun. $A \leq M$ ise $A = A \wedge M = M(A: M)$. Burada $(A: M) = C$ dersek istenen elde edilir. Tersine $A \wedge M \leq M$ olduğundan, $A \wedge M = MC$ olacak şekilde bir $C \in L$ vardır. $A \wedge M \leq A$ olduğundan $C \leq (A: M)$ dir. Yani $A \wedge M = MC \leq M(A: M) \leq A \wedge M$ ve böylece $A \wedge M = M(A: M)$ bulunur.

ii.) $MA \leq MB$ ise $(MA: M) \leq (MB: M)$ dir. M zayıf temel supremum olduğundan $A \leq A \vee (0: M) = (MA: M) \leq (MB: M) = B \vee (0: M)$ dir. Tersine, $M(MA: M) \leq MA$ olduğundan $(MA: M) \leq A \vee (0: M)$ dir. $A \vee (0: M) \leq (MA: M)$ her zaman doğru olduğundan $A \vee (0: M) = (MA: M)$ yani M zayıf temel supremumdur.

Temel eleman her zaman zayıf temeldir. Eğer L latisi modülerse bunun tersi de doğrudur. Bunu bir önerme ile gösterelim:

Önerme 1.2.6. [23, syf 129] L bir modüler latis olsun. $C \in L$ elemanının temel eleman olması için gerek ve yeter koşul C nin hem zayıf temel infimum hem de zayıf temel supremum olmasıdır.

İspat: $C \in L$, zayıf temel eleman olsun. O halde C hem zayıf temel infimum hem zayıf temel infimumdur. Öncelikle C nin temel supremum olduğunu yani her $A, B \in L$ için $A \vee (B{:}\,C) = \big((AC \vee B){:}\,C\big)$ olduğunu gösterelim. Her $X, Y \in L$ için $(0{:}\,Y) \leq (X{:}\,Y)$ olduğundan $\big((AC \vee B){:}\,C\big) = \big((AC \vee B){:}\,C\big) \vee (0{:}\,C)$ olur. C zayıf temel supremum ve zayıf temel infimum olduğundan, $\big((AC \vee B){:}\,C\big) \vee (0{:}\,C) = (\{[(AC \vee B){:}\,C]C\}{:}\,C) = ([(AC \vee B) \wedge C]{:}\,C) = ([(B \wedge C) \vee AC]{:}\,C) = ([(B{:}\,C)C \vee AC]{:}\,C) = \Big(\Big[\big((B{:}\,C) \vee A\big)C\Big]{:}\,C\Big) = (B{:}\,C) \vee A \vee (0{:}\,C) = (B{:}\,C) \vee A$ olur. Şimdi de C nin temel infimum olduğunu gösterelim. $A \wedge BC = BC \wedge A \wedge C = \big((BC \wedge A){:}\,C\big)C = [(BC \wedge A \wedge C){:}\,C]C = [(BC \wedge (A{:}\,C)C){:}\,C]C = \big\{\big((BC){:}\,C\big) \wedge ([(A{:}\,C)C]{:}\,C)\big\}C = \big[\big(B \vee (0{:}\,C)\big) \wedge \big((A{:}\,C) \vee (0{:}\,C)\big)\big]C = \big[\big(B \vee (0{:}\,C)\big) \wedge (A{:}\,C)\big]C = \big[\big(B \wedge (A{:}\,C)\big) \vee (0{:}\,C)\big]C = \big(B \wedge (A{:}\,C)\big)C \vee 0 = \big(B \wedge (A{:}\,C)\big)C$ olur.

Önerme 1.2.7. [23, syf 130] S nin temel ideali temel infimumdur.

İspat: $\langle a \rangle$, S nin temel ideali ve J ile K, S nin idealleri olmak üzere $\big(J \cap (K{:}\,\langle a \rangle)\big)\langle a \rangle = J\langle a \rangle \cap K$ olduğunu göstermeliyiz. Bir $y \in J\langle a \rangle \cap K$ alalım. $y \in K$ dır ve $y = ja$ olacak şekilde bir $j \in J$ vardır. Yani $j \in (K{:}\,\langle a \rangle)$ ve böylece $y = ja \in \big(J \cap (K{:}\,\langle a \rangle)\big)\langle a \rangle$ dır. Böylece $J\langle a \rangle \cap K \subseteq \big(J \cap (K{:}\,\langle a \rangle)\big)\langle a \rangle$ bulunur. Tersi her zaman doğrudur.

Temel idealler zayıf temel supremum olmak zorunda değildir. Bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 1.2.8. [23, syf 130] $S = \{0,1,x,y\}$ yarıgrubu $x = x^2$, $y = y^2$ ve $xy = yx = 0$ ile tanımlı olsun. $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ temel infimumdur fakat zayıf temel supremum değildir. Gerçekten de, $\langle x \rangle$ ideali eğer zayıf temel supremum olsaydı S nin her A ideali için $A \cup (0{:}\,\langle x \rangle) = (\langle x \rangle A{:}\,\langle x \rangle)$ eşitliğini sağlaması gerekirdi. Fakat $A = \langle x \rangle$ için, $\langle x \rangle \cup (0{:}\,\langle x \rangle) = (\langle x \rangle\langle x \rangle{:}\,\langle x \rangle) = (\langle x^2 \rangle{:}\,\langle x \rangle) = (\langle x \rangle{:}\,\langle x \rangle) = S$ çelişkisi bulunur. Çünkü $(0{:}\,\langle x \rangle)$ de 1 yoktur dolayısıyla S ye eşit olması mümkün değildir. Benzer şekilde $\langle y \rangle$ nin de zayıf temel supremum olmadığı görülebilir.

Tanım 1.2.11. [23, syf 130] S yarıgrubunun temel ideali $\mathcal{L}(S)$ nin temel elemanı oluyorsa bu ideale güçlü temel ideal denir.

Önerme 1.2.8. [23, syf 130] S bir yarıgrup ve $\langle a \rangle, S$ nin temel ideali olsun. O halde aşağıdaki koşullar denktir:

i.) $\langle a \rangle$ güçlü temel idealdir,

ii.) $\langle a \rangle$ temel supremumdur,

iii.) $\langle a \rangle$ zayıf temel supremumdur,

iv.) $\langle a \rangle\langle b \rangle = \langle a \rangle\langle c \rangle \neq 0$ ise $\langle b \rangle = \langle c \rangle$ dir,

v.) $ab = ac \neq 0$ ise $b = \lambda c$ olacak şekilde bir $\lambda \in S$ vardır.

İspat: $i.) \Rightarrow ii.)$ Güçlü temel ideal temel olduğundan, temel ideal de hem temel supremum hem temel infimum olduğundan açıktır.

$ii.) \Rightarrow i.)$ $\langle a \rangle$ temel ideali her zaman temel infimum olduğundan temel supremum ise güçlü temeldir.

$ii.) \Rightarrow iii.)$ Temel supremum, zayıf temel supremum olduğundan her zaman doğrudur.

$iii.) \Rightarrow iv.)$ $\langle a \rangle\langle b \rangle = \langle a \rangle\langle c \rangle$ olduğundan ve $\langle a \rangle$ zayıf temel supremum olduğundan $\langle b \rangle \cup (0{:}\langle a \rangle) = (\langle b \rangle\langle a \rangle{:}\langle a \rangle) = (\langle c \rangle\langle a \rangle{:}\langle a \rangle) = \langle c \rangle \cup (0{:}\langle a \rangle)$ dır. $\langle a \rangle\langle b \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle b \rangle \subseteq \langle c \rangle$ dir. Benzer şekilde $\langle a \rangle\langle c \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle c \rangle \subseteq \langle b \rangle$ dir, yani $\langle b \rangle = \langle c \rangle$ bulunur.

$iv.) \Rightarrow v.)$ $ab = ac \neq 0$ olsun. O halde $\langle a \rangle\langle b \rangle = \langle a \rangle\langle c \rangle \neq 0$ ve iv.) den $\langle b \rangle = \langle c \rangle$ ve böylece $b = \lambda c$ olacak şekilde bir $\lambda \in S$ vardır.

$v.) \Rightarrow ii.)$ K ve J, S nin idealleri olsun. $\big((J \cup \langle a \rangle K){:}\langle a \rangle\big) = (J{:}\langle a \rangle) \cup K$ olduğunu gösterelim. $y \in \big((J \cup \langle a \rangle K){:}\langle a \rangle\big)$ için $ya \in J \cup \langle a \rangle K$ dır. Yani $ya \in J$ veya $ya \in \langle a \rangle K$ dır. $ya \in J$ ise $y \in (J{:}\langle a \rangle)$, $ya \in \langle a \rangle K$ ise $ya = ak$ olacak şekilde bir $k \in K$ vardır. $ak = 0$ ise $y \in (J{:}\langle a \rangle)$, $ak \neq 0$ ise $y = \lambda k$ olacak şekilde bir $\lambda \in S$ var ve böylece $y \in K$ olur. Tersi için bir $t \in (J{:}\langle a \rangle) \cup K$ alalım. $t \in (J{:}\langle a \rangle)$ veya $t \in K$ dır. $(J{:}\langle a \rangle) \subseteq \big((J \cup \langle a \rangle K){:}\langle a \rangle\big)$ olduğundan $t \in (J{:}\langle a \rangle)$ ise istenen bulunur. $\langle a \rangle K \subseteq J \cup \langle a \rangle K$ yani $K \subseteq \big((J \cup \langle a \rangle K){:}\langle a \rangle\big)$ olduğundan $t \in K$ ise de istenen bulunmuş olur.

Tanım 1.2.12. [21] M, S yarıgrubunun bir has ideali olsun. S nin M yi kapsayan M den başka hiçbir has ideali yoksa M ye maksimal ideal denir.

Not: Bir $u \in S$ nin birimsel eleman olması için $uv = 1$ olacak biçimde bir $v \in S$ var olmalıdır. Yani u nun birimsel olması için gerek ve yeter koşul $\langle u \rangle = S$ olmasıdır. Burada birimseller değişmeli bir grubu, birimsel olmayanlarsa S nin has maksimal idealini oluşturur ve bu ideal tektir.

S yarıgrubunun temel idealleri $\mathcal{L}(S)$ nin temel elemanı olmak zorunda değildir. Fakat $\mathcal{L}(S)$ nin temel elemanı, S nin temel idealidir. Bunu aşağıdaki teorem ile gösterelim:

Teorem 1.2.1. [23] $\mathcal{L}(S)$ nin temel elemanı S nin temel idealidir. Böylece $\mathcal{L}(S)$ nin temel elemanları sadece S nin sadeleştirme kuralını sağlayan temel idealleridir, (Sadeleştirme kuralı: $ab = ac \neq 0$ ise $b = \lambda c$ olacak şekilde bir $\lambda \in S$ vardır).

İspat: J, $\mathcal{L}(S)$ nin temel elemanı olsun. Her $j \in J$ için $\langle j \rangle = \langle j \rangle \cap J = J(\langle j \rangle : J)$ dir. Böylece $J = \bigcup_{j \in J} \langle j \rangle = \bigcup_{j \in J} J(\langle j \rangle : J) = J\left(\bigcup_{j \in J}(\langle j \rangle : J)\right)$ dir. Eğer $\bigcup_{j \in J}(\langle j \rangle : J) = S$ ise $(\langle j_0 \rangle : J) = S$ olacak şekilde bir $j_0 \in J$ vardır yani $\langle j_0 \rangle = J$ dir. Değilse, M, S nin maksimal ideali olmak üzere $\bigcup_{j \in J}(\langle j \rangle : J) \subseteq M$ dir. Böylece $J = \bigcup_{j \in J} \langle j \rangle = \bigcup_{j \in J}(\langle j \rangle : J) J = J \bigcup_{j \in J}(\langle j \rangle : J) \subseteq MJ$ olur. $MJ \subseteq J$ her zaman doğru olduğundan $MJ = J$ dir. J zayıf temel supremum olduğundan $M \cup (0 : J) = (MJ : J) = (J : J) = S$ bulunur. M, S nin has ideali olduğundan $S = (0 : J)$ dir. Yani $J = 0$ dır. Dolayısıyla J temel idealdir. Önerme 1.2.8. *v.)* ten güçlü temel ideallerin sadeleştirme kuralını sağladığını biliyoruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 1.2.13. [26] I, S nin bir ideali olsun. Eğer S nin her J ideali için $J \subseteq I$ olması $J = I$ olmasını gerektiriyorsa I ya minimal ideal denir.

Tezimizde minimal idealimiz $\langle 0 \rangle = \{0_S\}$ dir ve dolayısıyla tek minimal ideal vardır.

1.3. Homomorfizmalar

Tanım 1.3.1. [6], [23] S ve T iki yarıgrup olsun. $f : S \to T$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa f ye yarıgrup homomorfizması denir:

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{her } a, b \in S$$

Tanım 1.3.2. Bire bir ve örten homomorfizmaya izomorfizma denir.

Örnek 1.3.1. S üzerinde tanımlı birim fonksiyon S den S ye tanımlı bir izomorfizmadır.

Önerme 1.3.1. S, T ve U yarıgruplar olsun. $f : S \to T$ ve $g : T \to U$ yarıgrup homomorfizmaları olmak üzere $g \circ f : S \to U$ bileşke fonksiyonu bir homomorfizmadır.

İspat: $x, y \in S$ alalım. $g\left(f(xy)\right) = g\left(f(x)f(y)\right) = g\left(f(x)\right)g\left(f(y)\right)$ eşitliği $f(x), f(y) \in T$ ve g homomorfizma olduğundan doğrudur. Son olarak,

$$g \circ f(1_S) = g\left(f(1_S)\right) = g(1_T) = 1_U$$

$$g \circ f(0_S) = g\big(f(0_S)\big) = g(0_T) = 0_U$$

olduğundan $g \circ f: S \to U$ bileşke fonksiyonu bir homomorfizmadır.

Tanım 1.3.3. [6, syf 6] S ve T iki yarıgrup ve $f: S \to T$ bir homomorfizma olmak üzere $çekf = \{(x,y) \in S \times S: f(x) = f(y)\}$ kümesine f nin çekirdeği denir.

Not: $çekf$, S yarıgrubu üzerinde bir kongrüanstır [Teorem 1.3.1. ii.)].

ε, S üzerinde bir kongrüans olsun. $x \in S$ elemanının ε kongrüansına göre denklik sınıfını $x\varepsilon$ ile gösterelim. S deki tüm elemanların denklik sınıflarının kümesini S/ε ile gösterelim. Şimdi $S/\varepsilon = \{x\varepsilon: x \in S\}$ kümesinin aşağıdaki işlemle birlikte bir yarıgrup olduğunu görelim:

S/ε üzerinde çarpma işlemi, her $x\varepsilon, y\varepsilon \in S/\varepsilon$ için $x\varepsilon y\varepsilon = xy\varepsilon$ biçiminde tanımlansın. Bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu açıktır ve her $x, y, z \in S$ için $x\varepsilon(y\varepsilon z\varepsilon) = x(yz)\varepsilon = (xy)z\varepsilon = (x\varepsilon y\varepsilon)z\varepsilon$ olur. Ayrıca S/ε nun birim elemanı 1ε ve yutan elemanı 0ε dur.

Tanım 1.3.4. ε, S üzerinde bir kongrüans olsun. Yukarıda tanımlanan işlem ile birlikte S/ε ye bölüm yarıgrubu denir.

Tanım 1.3.5. ε, S nin bir kongrüansı olsun. $\pi: S \to S/\varepsilon$, $x \in S$ için $\pi(x) = x\varepsilon$ biçiminde tanımlıysa π ye doğal homomorfizma denir.

Teorem 1.3.1. (1. İzomorfizma Teoremi) [6, syf 8] $f: S \to T$ bir yarıgrup homomorfizması olsun.

i.) $Imf = f(S)$, T nin alt yarıgrubudur,

ii.) $çekf$, S üzerinde bir kongrüanstır,

iii.) $g: S/çekf \to Imf$ izomorfizması aşağıdaki değişmeli diyagramı sağlayacak biçimde vardır:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ \pi \downarrow & & \uparrow i \\ S/çekf & \xrightarrow[g]{} & Imf \end{array}$$

S ve T değişmeli olduğundan Imf ve $S/çekf$ de değişmelidir.

İspat: *i.)* $y_1, y_2 \in Imf$ alalım. $y_1 = f(a)$ ve $y_2 = f(b)$ olacak şekilde $a, b \in S$ vardır. Buradan, $y_1 y_2 = f(a)f(b) = f(ab) \in Imf$ olur. Dahası f yarıgrup homomorfizması olduğundan $1_T = f(1_S) \in Imf$ ve $0_T = f(0_S) \in Imf$ dir. Yani, Imf, T nin bir alt yarıgrubudur.

ii.) $a, b, c, d \in S$ olmak üzere $açekf = bçekf$ ve $cçekf = dçekf$ iken $f(a) = f(b)$ $f(c) = f(d)$ olur. Böylece $f(ac) = f(a)f(c) = f(b)f(d) = f(bd)$ elde edilir. Yani $çekf$ bir kongrüanstır.

iii.) Her $xçekf \in S/çekf$ için $g(xçekf) = f(x)$ biçiminde tanımlansın. $g: S/çekf \to Imf$ bire bir ve örten bir homomorfizmadır. g iyi tanımlıdır, gerçekten de $x, y \in S$ için $xçekf = yçekf$ olsun. Böylece $(x, y) \in çekf$ yani $f(x) = f(y)$ dir. O halde $g(xçekf) = g(yçekf)$ bulunur. g nin bire bir olduğu da kolayca görülür: $g(xçekf) = g(yçekf)$ olsun. Yani $f(x) = f(y)$ bu ise $(x, y) \in çekf$ demektir. Dolayısıyla $xçekf = yçekf$ dir. Her $y \in Imf$ için $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in S$ vardır. Böylece $y = g(xçekf)$ olacak şekilde bir $xçekf \in S/çekf$ vardır. O halde g örtendir. Son olarak g nin bir homomorfizma olduğunu gösterelim:

$xçekf, yçekf \in S/çekf$ olmak üzere,

$g(xçekf yçekf) = g(xyçekf) = f(xy) = f(x)f(y) = g(xçekf)g(yçekf)$

ve ayrıca $0_S çekf \in S/çekf$ için, $g(0_S çekf) = f(0_S)$ ve f bir homomorfizma olduğundan $f(0_S) = 0_T$ bulunur. Son olarak, $1_S çekf \in S/çekf$ alalım. $g(1_S çekf) = f(1_S)$ ve f bir homomorfizma olduğundan $f(1_S) = 1_T$ bulunur. O halde g bir homomorfizmadır. Böylece $S/çekf \cong Imf$ dir.

Sonuç 1.3.1. *i.)* Teorem 1.3.1. den diyebiliriz ki S nin, T nin bir alt yarıgrubuna izomorf olabilmesi için gerek ve yeter koşul S den T ye tanımlı bire bir homomorfizmanın var olmasıdır.

ii.) T nin, S nin bölüm yarıgrubuna izomorf olması için gerek ve yeter koşul $f: S \to T$ örten homomorfizmasının var olmasıdır. Böylece $f(S) = T$ olur.

Teorem 1.3.2. [26] $f: S \to T$ bir homomorfizma olsun. $\rho \subseteq çekf$, S nin bir kongrüansı olmak üzere $\pi: S \to S/\rho$, $g \circ \pi = f$ olacak şekilde tek bir $g: S/\rho \to T$ homomorfizması vardır.

İspat: $x \in S$ için $g(x\rho) = f(x)$ olarak tanımlayalım. $x, y \in S$ olmak üzere, $x\rho = y\rho$ ise $x\rho y$ yani $(x, y) \in \rho \subseteq çekf$ ve böylece $f(x) = f(y)$ olacağından g iyi tanımlıdır. Her $x \in S$ için $g(\pi(x)) = g(x\rho) = f(x)$ olduğundan $g \circ \pi = f$ olur. π örten ve f bir homomorfizma olduğundan g bir homomorfizmadır. Şimdi g nin tek olduğunu gösterelim. g den başka bir $h: S/\rho \to T$ homomorfizması $h\pi = f$ olacak şekilde var olsaydı, her $x \in S$ için $g(x\rho) = g\big(\pi(x)\big) = f(x) = h(x\rho)$ olurdu. Yani g tektir. O halde şu değişmeli diyagram gerçeklenir:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & T \\ S/\rho \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Teorem 1.3.3. (2. İzomorfizma Teoremi) [26] q_1 ve q_2, S üzerinde $q_1 \subseteq q_2$ olacak şekilde iki kongrüans ise $q_2/q_1 = \{(xq_1, yq_1) \in S/q_1 \times S/q_1 : (x, y) \in q_2\}$, S/q_1 üzerinde bir kongrüanstır ve $S/q_1/(q_2/q_1) \cong S/q_2$ dir.

İspat: $\pi : S/q_1 \to S/q_2$ homomorfizması $x \in S$ için $\pi(xq_1) = xq_2$ biçiminde tanımlansın. $çek\pi = q_2/q_1$ olduğunu gösterirsek π örten bir homomorfizma olduğundan Teorem 1.3.1. nedeniyle ispat tamamlanır. $xq_1, yq_1 \in S/q_1$ olsun. $(xq_1, yq_1) \in çek\pi$ ise, $\pi(xq_1) = \pi(yq_1)$ doğrudur. Yani $xq_2 = yq_2$ ve böylece $(x, y) \in q_2$ bulunur. O halde $(xq_1, yq_1) \in q_2/q_1$ dir. Tersine, $(xq_1, yq_1) \in q_2/q_1$ alalım. $(x, y) \in q_2$ dir. Yani $xq_2 = yq_2 \in S/q_2$ dir. π nin tanımından $\pi(xq_1) = xq_2 = yq_2 = \pi(yq_1)$ olacak şekilde $xq_1, yq_1 \in S/q_1$ vardır. $\pi(xq_1) = \pi(yq_1)$ eşitliğinden $(xq_1, yq_1) \in çek\pi$ bulunur. Böylece iki kapsamadan $çek\pi = q_2/q_1$ dir.

Önerme 1.3.2. (Rees Kongrüansı) [6, syf 14] I, S nin bir ideali ve $\mathcal{R}$ bağıntısı S üzerinde $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = b\ ya\ da\ a, b \in I$ biçiminde tanımlansın. $\mathcal{R}$ bir kongrüanstır ve $\mathcal{R}$ ye I idealinin Rees kongrüansı denir.

İspat: Önce $\mathcal{R}$ nin bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim:

i.) Her $a \in S$ için $a = a$ olduğundan $a\mathcal{R}a$ dır.

ii.) Her $a, b \in S$ için $a\mathcal{R}b$ ise $a = b$ ya da $a, b \in I$ dır. Böylece $b\mathcal{R}a$ dır.

iii.) Her $a, b, c \in S$ için $a\mathcal{R}b$ ve $b\mathcal{R}c$ olsun. Böylece ilkinden $a = b$ ya da $a, b \in I$ dır ikincisinden $b = c$ ya da $b, c \in I$ dır. $a = b$ ise ya $a = c$ veya $a, c \in I$ olur böylece $a\mathcal{R}c$ sağlanır. $a, b \in I$ ise $a, c \in I$ ve böylece $a\mathcal{R}c$ olur.

O halde $\mathcal{R}$ bir denklik bağıntısıdır. Şimdi her $a, b, c, d \in S$ için $\mathcal{R}$ nin bir kongrüans olduğunu gösterelim. $a\mathcal{R}b$ ve $c\mathcal{R}d$ olsun. $a = b$ ise ya $c = d$ ve böylece $ac = bd$ ya da $ac, bd \in I$ olur. İki durumda da $ac\mathcal{R}bd$ dir. $a, b \in I$ ise $ac, bd \in I$ ve böylece $ac\mathcal{R}bd$ olur.

Tanım 1.3.6. [6] $\mathcal{R}$, I nın Rees kongrüansı olmak üzere $S/I = S/\mathcal{R}$ bölüm yarıgrubuna

S nin I tarafından Rees böleni denir. $S/I = \{x \in S : x \in S - I$ ya da $x = 0\}$ biçiminde tanımlıdır. $I \neq \emptyset$ ise I ya S/I nın yutan elamanı denir. Yani $S/I = (S - I) \cup \{0\}$ dır. $I = \emptyset$ ise $S/I = S$ dir.

● Rees kongrüansında $a \in I$ ise $a\mathcal{R}0$ olduğundan $aI = 0$ olarak gösterilir, $a \notin I$ ise $aI = a$ dır.

Not: Bir S yarıgrubu üzerinde tanımlı β kongrüansı varsa S/β bölüm yarıgrubunu tanımlayabiliyoruz. O halde yarıgrupların, ideallerle oluşturulan bölüm yarıgruplarında kongrüanslar o ideal üzerindeki Rees kongrüansı olacaktır.

● $J/I = \{aI : a \in J\}$ kümesini göstersin.

Teorem 1.3.4. *i.)* $I \subseteq J$ olacak şekilde I ve J, S nin idealleri olsun. O halde J/I, S/I bölüm yarıgrubunun idealidir.

ii.) J', S/I bölüm yarıgrubunun bir idealiyse $J' = J/I$ ve $I \subseteq J$ olacak şekilde S nin bir I ideali vardır.

İspat: *i.)* $a \in J$ olmak üzere $aI \in J/I$ ve $s \in S$ olmak üzere $sI \in S/I$ alalım. $(aI)(sI) = (sa)I \in J/I$ dır. O halde J/I, S/I nın idealidir.

ii.) J', S/I nın bir ideali olsun. Şimdi $J = \{x \in S : xI \in J'\} \subseteq S$ alt kümesini tanımlayalım. $0 \in J$ olduğundan $J \neq \emptyset$ dır. $a \in J$ ve $s \in S$ alalım. Böylece $aI \in J'$ olur. J' bir ideal olduğundan $(aI)(sI) = (sa)I \in J'$ olduğundan $sa \in J$ dir. O halde J bir idealdir. Ayrıca, $a \in I$ alalım. $aI = I = 0_{S/I} \in J'$ olduğundan $a \in J$ olur. Böylece $I \subseteq J$ dir. Şimdi $J' = J/I$ olduğunu gösterelim: $J/I \subseteq J'$ olduğu açıktır. Şimdi $a \in S$ olmak üzere $aI \in J'$ alalım. $a \in J$ olduğundan $aI \in J/I$ dır. Böylece $J/I = J'$ olur.

Önerme 1.3.3. [26] I, S nin has ideali olsun. Ω_1, S nin I yı kapsayan ideallerinin ailesi ve Ω_2, S/I nın ideallerinin ailesi olsun. $J \in \Omega_1$ ve $J/I \in \Omega_2$ olmak üzere $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ fonksiyonu $f(J) = J/I$ biçiminde tanımlansın. f bire bir ve örtendir ve $J \subseteq J'$ ise $f(J) \subseteq f(J')$ olur.

İspat: $J_1, J_2 \in \Omega_1$ alalım. $f(J_1) = f(J_2)$ olsun. $J_1/I = J_2/I$ yani $J_1 = J_2$ dir. f bire birdir. Her $J' \in \Omega_2$ için Teorem 1.3.4. ten $J' = J/I$ ve $I \subseteq J$ olacak şekilde S nin J ideali vardır o halde $J \in \Omega_1$ için $f(J) = J/I = J'$ olur yani f örtendir. $J \subseteq J'$ iken $J/I \subseteq J'/I$ olduğu açıktır.

Önerme 1.3.4. [6, syf 14] $f : S \to T$ bir yarıgrup homomorfizması olsun.

i.) f örten ve I, S nin bir ideali ise $f(I)$, T nin idealidir.

ii.) J, T nin bir ideali ise $f^{-1}(J) = I$, S nin bir idealidir ve I, $çekf$ sınıflarının bir birleşimidir.

iii.) f örtense T nin idealleri ile S nin, $çekf$ sınıflarının birleşimi olan idealleri arasında bire bir eşleme vardır.

İspat: *i.)* $t \in T$ ve $y \in f(I)$ olsun. f örten olduğundan $t = f(s)$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. $y \in f(I)$, olduğundan $y = f(a)$ olacak şekilde bir $a \in I$ vardır. Böylece $ty = f(s)f(a) = f(sa) \in f(I)$ olur.

ii.) J, T nin bir ideali olsun. $x \in S$ ve $a \in f^{-1}(J)$ alalım. $a \in f^{-1}(J)$ olduğundan $f(a) \in J$ dir. Ayrıca J, T nin ideali olduğundan $f(x)f(a) = f(xa) \in J$ ve böylece $xa \in f^{-1}(J)$ dir yani $f^{-1}(J)$, S nin bir idealidir. Şimdi $çekf$ nin $f^{-1}(J)$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösterirsek, $f^{-1}(J)$, $çekf$ sınıfının bir birleşimi olur:

i.) Her $a \in f^{-1}(J)$ için, $f(a) = f(a)$ olduğundan $açekfa$ olur.

ii.) $a, b \in f^{-1}(J)$ olmak üzere $açekfb$ olsun. O halde $f(a) = f(b)$ ve böylece $bçekfa$ olur.

iii.) $a, b, c \in f^{-1}(J)$ olmak üzere $açekfb$ ve $bçekfc$ olsun. Bu durumda $f(a) = f(c)$ olduğundan $açekfc$ olur. O halde $çekf$, $f^{-1}(J)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve $çekf$, $f^{-1}(J)$ nin bir ayrışımını oluşturur yani $f^{-1}(J)$, $çekf$ sınıfının bir birleşimidir. Ayrıca $a \in f^{-1}(J)$ olmak üzere $açekf = \{x \in f^{-1}(J): f(x) = f(a)\}$ kümesi a nın $f^{-1}(J)$ deki denklik sınıfını göstersin. Bu durumda $f^{-1}(J) = \bigcup_{x \in f^{-1}(J)} xçekf$ olur.

iii.) f örtense T nin her J ideali için $f^{-1}(J)$, S nin $çekf$ sınıfının bir birleşimi olan idealidir ve $f\left(f^{-1}(J)\right) = J$ dir. Tersine S nin $çekf$ sınıfının bir birleşimi olan I idealini alalım. $I \subseteq f^{-1}\left(f(I)\right)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $x \in f^{-1}\left(f(I)\right)$ alalım. O halde $f(x) \in f(I)$ olur ve böylece bir $s \in I$ için, $f(x) = f(s)$ olur. Yani $x \in sçekf \subseteq I$ olur. Böylece $f^{-1}\left(f(I)\right) = I$ dır.

Tanım 1.3.7. Bir homomorfizma bire bir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma denir.

Teorem 1.3.5. (3. İzomorfizma Teoremi) I ve J, S nin $I \subseteq J$ koşulunu sağlayan idealleri olsun. $S/J \cong (S/I)/(J/I)$ dir.

İspat: $f: S/I \to S/J$ fonksiyonu $xI \in S/I$ için $f(xI) = xJ$ biçiminde tanımlı olsun. $xI = yI$ olsun. Bu durumda $x = y$ ya da $x, y \in I$ dır. $I \subseteq J$ olduğundan $f(xI) = xJ = yJ = f(yI)$ olur. Böylece f iyi tanımlıdır. f in tanımından örten bir homomorfizma olduğu açıktır. $xI, yI \in S/I$ olmak üzere $xI, yI \in çekf$ alalım. $xI, yI \in çekf$ ise çekirdeğin tanımından $f(xI) = f(yI)$ yani $xJ = yJ$ dir. Böylece $x, y \in J$ dir. O halde $xI, yI \in J/I$ dır. Böylece $çekf \subseteq J/I$ bulunur. Tersine $xI, yI \in J/I$ olsun. $x, y \in J$ dir. Yani $xJ = yJ$ dir. f epimorfizma olduğundan $f(xI) = f(yI)$ olacak şekilde $xI, yI \in S/I$ vardır. O halde $çekf = (J/I)$ dir. 1. İzomorfizma teoreminden $S/J \cong (S/I)/çekf$ yani $S/J \cong (S/I)/(J/I)$ olduğu görülür.

Örnek 1.3.2. I, J S nin idealleri olmak üzere $(I \cup J)/J \cong I/(I \cap J)$ dir.

Çözüm: $f: I \to (I \cup J)/J$ bir homomorfizma olsun. $x \in I$ için $f(x) = xJ$ biçiminde tanımlansın. $yJ \in (I \cup J)/J$ alalım. $y \in J$ ise bir $z \in I \cap J$, $f(z) = zJ = yJ$ dir. $y \notin J$ ise $y \in I$ ve böylece $f(y) = yJ$ dir. Dolayısıyla $imf = (I \cup J)/J$ iyi tanımlıdır. Herhangi $x, y \in I$ için $(x, y) \in çekf$ ise $f(x) = f(y)$ yani $xJ = yJ$ olur bu ise $x, y \in J$ demektir. Dolayısıyla $çekf = I \cap J$ dir. 1. İzomorfizma teoreminden $(I \cup J)/J \cong I/(I \cap J)$ dir.

Örnek 1.3.3. $f: S \to T$ yarıgrup homomorfizması olsun. S nin idempotent elemanının f altındaki görüntüsü T de idempotenttir.

Çözüm: $x \in S$ idempotent olsun. $x^2 = x$ dir. $y = f(x) = f(x^2) = f(xx) = f(x)f(x) = y^2$ ve $y \in T$ olduğundan y, T nin idempotent elemanıdır.

2. ASAL İDEALLER VE ASALIMSI AYRIŞIM

Tanım 2.1. [23] P, S nin bir has ideali olsun. $a, b \in S$ için $ab \in P$ olması $a \in P$ veya $b \in P$ olmasını gerekiyorsa P ye asal ideal denir.

● Ayrıca bir $p \in S$ elemanı için $\langle p \rangle$ ideali asal idealse p ye asal eleman denir.

Örnek 2.1. p asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, .)$ yarıgrubunun asal idealidir.

Teorem 2.1. S bir yarıgrup olmak üzere $P \subset S$ ideali için aşağıdaki ifadeler denktir:

i.) P asal idealdir.

$ii.$) I ve J, S nin idealleri olmak üzere $IJ \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir.

iii.) $IJ \subseteq P$ olacak şekilde $I \supset P$ ve $J \supset P$ idealleri bulunamaz.

İspat: $i.) \Rightarrow ii.)$ $IJ \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P$ olsun. Bir $a \in I - P$ elemanı bulunabilir. Her $b \in J$ için $ab \in IJ \subseteq P$ ve P asal olduğundan $b \in P$ elde edilir. Böylece yani $J \subseteq P$ olur.

$ii.) \Rightarrow iii.)$ $IJ \subseteq P$ olsun. ii.) den $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir. O halde $IJ \subseteq P$ olacak şekilde $I \supset P$ ve $J \supset P$ idealleri bulunamaz.

$iii.) \Rightarrow i.)$ $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in P$ olsun. $a, b \notin P$ olsaydı $P \subset P \cup \langle a \rangle$ ve $P \subset P \cup \langle b \rangle$ olacak şekilde $P \cup \langle a \rangle = I$ ve $P \cup \langle b \rangle = J$ idealleri bulunabilirdi. $IJ = (P \cup \langle a \rangle)(P \cup \langle b \rangle) = P^2 \cup \langle a \rangle\langle b \rangle \cup \langle a \rangle P \cup \langle b \rangle P$ olduğundan $IJ \subseteq P$ olurdu bu ise iii.) ile çelişir.

Teorem 2.2. S bir yarıgrup ve I, S nin bir ideali olsun. P, S nin $I \subseteq P$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. P nin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul P/I nın S/I yarıgrubunun asal ideali olmasıdır.

İspat: $aI, bI \in S/I$ olmak üzere $aIbI = abI \in P/I$ olsun. O halde $ab \in P$ dir. P asal ideal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ dir. Dolayısıyla $aI \in P/I$ veya $bI \in P/I$ dır. Yani P/I ideali S/I yarıgrubunun asal idealidir. Tersine, P/I ideali S/I yarıgrubunun asal ideali olsun. $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in P$ olsun. O zaman $abI = aIbI \in P/I$ dır. P/I asal olduğundan $aI \in P/I$ veya $bI \in P/I$ dır. Yani $a \in P$ veya $b \in P$ dir. O halde P ideali S yarıgrubunun asal idealidir.

Sonuç 2.1. S yarıgrubunun I idealini kapsayan asal idealleri ile S/I yarıgrubunun asal idealleri arasında bire bir eşleme vardır.

Gerçekten de, Önerme 1.3.3. ve Teorem 2.2. nedeniyle bu sonuç açıktır.

Değişmeli halkalarda Asaldan Kaçınma Teoremi ([1], Teorem 2.2.7) olarak bildiğimiz teorem, yarıgruplar için geçerli değildir. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 2.2. $(\mathbb{Z}, .)$ yarıgrubunun $P_1 = 3\mathbb{Z}$, $P_2 = 5\mathbb{Z}$, $P_3 = 7\mathbb{Z}$, $P_4 = 11\mathbb{Z}$ asal ideallerini ve $I = 3\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z} \cup 7\mathbb{Z}$ idealini göz önüne alalım. $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$ fakat her $i \in \{1,2,3,4\}$ için $I \nsubseteq P_i$ dir.

Teorem 2.3. [23] S bir yarıgrup ve $\{P_i\}$, S nin asal ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. O halde $\bigcup_i P_i$, S nin asal idealidir.

İspat: $a, b \in S$ için $ab \in \bigcup_i P_i$ olsun. O halde $ab \in P_{i_0}$ olacak şekilde bir i_0 vardır. P_{i_0} asal olduğundan $a \in P_{i_0} \subseteq \bigcup_i P_i$ veya $b \in P_{i_0} \subseteq \bigcup_i P_i$ bulunur. Yani $\bigcup_i P_i$ asaldır.

Tanım 2.2. [23] S bir yarıgrup olsun. T, S nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $0 \notin T$ ve $a, b \in T$ iken $ab \in T$ sağlanıyorsa T ye S nin çarpımsal kapalı alt kümesi denir.

Önerme 2.1. S bir yarıgrup ve P, S nin bir ideali olmak üzere P nin asal olması için gerek ve yeter koşul $S - P$ nin çarpımsal kapalı küme olmasıdır.

İspat: P asal ideal olsun. $S - P$ nin çarpımsal kapalı küme olduğunu gösterelim. $a, b \in S - P$ yani $a, b \notin P$ alalım. P asal olduğundan $ab \notin P$ yani $ab \in S - P$ dir. Böylece $S - P$ nin çarpımsal kapalı küme olduğu görülür. Tersine $S - P$ nin çarpımsal kapalı küme olsun. $P \neq S$ olduğu açıktır. P asal olmasın. O halde öyle $a, b \in S - P$ vardır ki $ab \in P$ olur bu ise $S - P$ nin çarpımsal kapalı küme olması ile çelişir. O halde P asaldır.

● Asal olmayan ideallerin birleşimi asal olabilir. Bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 2.3. S yarıgrubu, $S = \{0,1,\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$ olmak üzere çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

.	0	1	a	b	c
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c
a	0	a	0	a	0
b	0	b	a	0	0
c	0	c	0	0	0

$I = \{0,\mathrm{a},\mathrm{b}\}$, S yarıgrubunun bir idealidir. Gerçekten de $IS \subseteq I$ olduğundan bu doğrudur. I asal değildir, çünkü $\mathrm{c}.\mathrm{c} = 0 \in I$ olduğu halde $\mathrm{c} \notin I$ dır. $J = \{0,\mathrm{c}\}$ alt kümesi de $JS \subseteq J$ olduğundan S yarıgrubunun bir idealidir. $\mathrm{a.a} = 0 \in J$ fakat $a \notin J$ olduğundan J de asal ideal değildir. $I \cup J = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ ideali ise asaldır. Gerçekten, $S - (I \cup J) = \{1\}$ olduğundan ve $\{1\}$ çarpımsal kapalı bir küme olduğundan Önerme 2.1. nedeniyle $I \cup J$ asaldır.

Not: Asal ideallerin arakesitinin ve çarpımının asal ideal olması gerekmez.

Örnek 2.4. $2\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, .)$ yarıgrubunun asal idealleri fakat $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ ve $2\mathbb{Z}.3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ idealleri asal değildir.

Önerme 2.2. [27] S bir yarıgrup ve $\{P_i\}_{i=1}^{n}$, S nin asal ideallerinin bir topluluğu olsun. $\bigcap_{i=1}^{n} P_i$ idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = P_j$ olacak şekilde bir $j \in \{1, \dots, n\}$ bulunmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} P_i$, S nin bir asal ideali olsun. $P_1 \dots P_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} P_i$ ve $\bigcap_{i=1}^{n} P_i$ asal ideal olduğundan bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için $P_j \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} P_i$ olur. O halde $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = P_j$ dir.

$\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = P_j$ ise P_j asal ideal olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} P_i$ de asaldır.

Sonuç 2.2. S bir yarıgrup P_1, P_2 iki asal ideali olmak üzere $P_1 \nsubseteq P_2$ ve $P_2 \nsubseteq P_1$ ise $P_1 \cap P_2$ asal ideal olamaz.

Önerme 2.3. [27] S bir yarıgrup ve $\{P_i\}_{i=1}^{n}$, S nin asal ideallerinin bir topluluğu olsun. $\prod_{i=1}^{n} P_i$ idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için $\prod_{i=1}^{n} P_i = P_j$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ $\prod_{i=1}^{n} P_i$ ideali asal olsun. $P_1 P_2 \dots P_n \subseteq \prod_{i=1}^{n} P_i$, Teorem 2.1. ii.) nedeniyle bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için $P_j \subseteq \prod_{i=1}^{n} P_i \subseteq P_j$ olur.

$\Leftarrow$ $\prod_{i=1}^{n} P_i = P_j$ ise P_j asal ideal olduğundan açıktır.

Önerme 2.4. $f: S \to T$ bir yarıgrup homomorfizması olsun.

i.) f örten olmak üzere P, S nin asal ideali ve $çekf \subseteq P \times P$ ise $f(P)$ de T nin asal idealidir.

ii.) P^*, T nin asal idealiyse $f^{-1}(P^*)$ da S nin asal idealidir.

İspat: *i.)* $ab \in f(P)$ olsun. $ab = f(p)$ olacak şekilde bir $p \in P$ vardır. f örten olduğundan $a = f(x)$ ve $b = f(y)$ olacak şekilde $x, y \in S$ vardır. Böylece $ab = f(xy) = f(p)$ olur. $(xy, p) \in çekf \subseteq P \times P$ olduğundan $xy \in P$, P asal olduğundan $x \in P$ veya $y \in P$ olur. Böylece $f(x) = a \in f(P)$ veya $f(y) = b \in f(P)$ olur.

ii.) $ab \in f^{-1}(P^*)$ olsun. $f(ab) = f(a)f(b) \in P^*$ ve P^* asal ideal olduğundan $f(a) \in P^*$ veya $f(b) \in P^*$ ve böylece $a \in f^{-1}(P^*)$ veya $b \in f^{-1}(P^*)$ olur. O halde

$f^{-1}(P^*)$ asal idealdir.

Önerme 2.5. S', S nin alt yarıgrubu olsun. I, S nin asal ideali ise $I \cap S'$, S' nün asal idealidir.

İspat: $a, b \in S'$ olmak üzere $ab \in I \cap S'$ olsun. $ab \in I$ ve $ab \in S'$ dür. I asal olduğundan $a \in I$ veya $b \in I$ dır. $a, b \in S'$ olduğundan $a \in I \cap S'$ veya $b \in I \cap S'$ dır.

● S, T iki yarıgrup olsun. I, J sırasıyla S, T nin asal ideali olsun. $I \times J$ nin, $S \times T$ nin asal ideali olması gerekmez. $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin asal ideali değildir fakat $3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}$ idealleri $\mathbb{Z}$ in asal idealleridir.

Teorem 2.4. S, T iki yarıgrup olsun. I, J sırasıyla S, T nin idealleri olmak üzere $I \times J$ nin $S \times T$ nin bir ideali olduğu açıktır. $I \times J$, $S \times T$ nin asal ideali ise şu iki durumdan biri gerçeklenir:

i.) I asal ideal ve $J = T$ dir.

ii.) J asal ideal ve $I = S$ dir.

İspat: $I \times J$ asal ideal olsun. $(0,0) = (1,0)(0,1) \in I \times J$ olduğundan $(1,0) \in I \times J$ ya da $(0,1) \in I \times J$ dır. (Aksi halde $I \times J = S \times T$ olur.) Varsayalım ki $(1,0) \in I \times J$ olsun. $1 \in I$ olduğundan $I = S$ dir. Şimdi J nin asal olduğunu gösterelim. $a, b \in T$ olmak üzere $ab \in J$ olsun. $(0, ab) = (0, a)(0, b) \in S \times J$ asal ideal olduğundan $a \in J$ veya $b \in J$ olur. Böylece J asal idealdir. $(0,1) \in I \times J$ ise ispat benzer şekildedir.

Önerme 2.6. S bir yarıgrup ve P, S nin asal ideali ise $\sqrt{P} = P$ dir.

İspat: $P \subseteq \sqrt{P}$ olduğu açıktır. Tersine, $x \in \sqrt{P}$ alalım. $x^n \in P$ olacak şekilde bir $n > 0$ tam sayısı vardır. P asal ideal olduğundan $x \in P$ olur. Böylece $\sqrt{P} = P$ olur.

Tanım 2.3. [23] Q, S nin bir has ideali olsun. $a, b \in S$ elemanları için $ab \in Q$ olması $a \in Q$ veya bir n pozitif tam sayısı için $b^n \in Q$ olmasını gerektiriyorsa Q ya asalımsı ideal denir.

Örnek 2.5. S bir yarıgrup ve P, S nin asal ideali olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{P^n} = P$ dir.

Çözüm: P, S nin asal ideali olduğundan $\sqrt{P} = P$ dir. Önerme 1.2.3. v.) ten $\sqrt{P^n} = \sqrt{P} = P$ bulunur.

● Her asal ideal asalımsı idealdir fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 2.6. $25\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, .)$ yarıgrubunun asal ideali değildir fakat asalımsıdır.

● S, T iki yarıgrup olsun. I, J sırasıyla S, T nin asalımsı ideali olsun. $I \times J$ nin, $S \times T$ nin asalımsı ideali olması gerekmez. $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin asalımsı ideali değildir fakat

$3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}$ idealleri $\mathbb{Z}$ in asalımsı idealleridir.

Teorem 2.5. S, T iki yarıgrup olsun. I, J sırasıyla S, T nin idealleri olmak üzere $I \times J$ nin $S \times T$ nin bir ideali olduğu açıktır. $I \times J$, $S \times T$ nin asal ideali ise şu iki durumdan biri gerçeklenir:

i.) I asalımsı ideal ve $J = T$ dir.

ii.) J asalımsı ideal ve $I = S$ dir.

İspat: $I \times J$ asalımsı ideal olsun. $(0,0) = (1,0)(0,1) \in I \times J$ olduğundan $(1,0) \in I \times J$ ya da $(0,1) \in I \times J$ dır. (Aksi halde $I \times J = S \times T$ olur.) Varsayalım ki $(1,0) \in I \times J$ olsun. $1 \in I$ olduğundan $I = S$ dir. Şimdi J nin asalımsı olduğunu gösterelim. $a, b \in T$ olmak üzere $ab \in J$ olsun. $(0, ab) = (0, a)(0, b) \in S \times J$ asalımsı ideal olduğundan $a \in J$ veya $b^n \in J$, $(n \in \mathbb{N})$ olur. Böylece J asalımsı idealdir. $(0,1) \in I \times J$ ise ispat benzer şekildedir.

Tanım 2.4. [23] A, S nin bir ideali olmak üzere $\sqrt{A} = A$ oluyorsa A ya radikal ideal veya yarı asal ideal denir.

Önerme 1.2.3. iv.) den radikal ideallerin birleşimi de radikal idealdir.

Önerme 2.7. [23] Q, S nin asalımsı ideali olsun. $\sqrt{Q}$ asal idealdir.

İspat: $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in \sqrt{Q}$ ve $a \notin \sqrt{Q}$ olsun. O halde $(ab)^n = a^n b^n \in Q$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Fakat her $n > 0$ için $a^n \notin Q$ ve Q asalımsı olduğundan $(b^n)^k \in Q$ olacak şekilde bir $k > 0$ vardır. Böylece $b \in \sqrt{Q}$ bulunur.

● Eğer $\sqrt{Q} = P$ ise P, S nin asal ideali olmak üzere Q ya P-asalımsı denir.

● Önerme 2.7. nin tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 2.7. R, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ polinomlarının halkası olsun. Burada $a_i \in \mathbb{Q}$, $a_1 \in 3\mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ dir. $S(R)$ de R halkasının çarpımsal yarıgrubu olsun. $Q = \langle 9x^2, 3x^3, x^4, x^5, x^6 \rangle$ ideali $S(R)$ nin bir asalımsı ideali değildir. Gerçekten, $9x^2 \in Q$ fakat her $m \in \mathbb{N}$ için $9^m \notin Q$ ve $x^2 \notin Q$ dur. Fakat $\sqrt{Q} = \langle 3x, x^2, x^3 \rangle$ olup $S(R)$ nin asal idealidir.

Lemma 2.2. (Krull Lemması) [23] S bir yarıgrup ve T, S nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. A, S nin $A \cap T = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. $A \subseteq B$ olmak üzere $B \cap T = \emptyset$ özelliğine göre maksimal olan tek bir B ideali vardır ve bu ideal asaldır.

İspat: $\Omega = \{B \in \mathcal{I}(S) : B \cap T = \emptyset \text{ ve } A \subseteq B\}$ kümesini alalım. $A \cap T = \emptyset$ olduğundan

$A \in \Omega \neq \emptyset$ dir. $(\Omega, \subseteq)$ sıralı kümesinin herhangi bir tam sıralı alt kümesi olarak $\{I_i\}$ $(i \in \Delta)$ alalım. $I = \bigcup_i I_i$ dersek, I, S nin bir has ideali ve $I \cap T = \bigcup(I_i \cap T) = \emptyset$ dir. $I, \{I_i\}$ zincirinin Ω da üst sınırıdır. Zorn Lemması'ndan Ω nın en az bir maksimali vardır. Buna B diyelim. Ω nın aslında bu özelliği sağlayan maksimal elemanı tektir. Şimdi B nin tek olduğunu gösterelim. Varsayalım ki bu özelliği sağlayan maksimal iki tane olsun. Bunlara B_1, B_2 diyelim. Fakat bu durumda $B_1 \cup B_2$ hem B_1 i hem B_2 yi kapsayan Ω nın bir elemanı olur bu ise B_1, B_2 nin maksimal olması ile çelişir. Yani B tektir. Şimdi B nin asal olduğunu gösterelim. B asal olmasaydı $xy \in B$ iken $x \notin B$ ve $y \notin B$ olacak şekilde $x, y \in S$ elemanları bulunabilirdi. $B \subset (B \cup \langle x \rangle)$ ve $B \subset (B \cup \langle y \rangle)$ olduğundan ve B yi Ω nın maksimali bulduğumuzdan $(B \cup \langle x \rangle) \cap T \neq \emptyset$ ve $(B \cup \langle y \rangle) \cap T \neq \emptyset$ tur. Fakat $(B \cup \langle x \rangle)(B \cup \langle y \rangle) = B^2 \cup B\langle y \rangle \cup B\langle x \rangle \cup \langle x \rangle\langle y \rangle \subseteq B$ olur bu ise $B \cap T = \emptyset$ koşulu ile çelişir. O halde $x \notin B$ ve $y \notin B$ ise $xy \notin B$ dir. Yani B asaldır.

Tanım 2.3. [26] A, S nin bir ideali olsun. $A \subseteq P$ asal ideal olmak üzere $A \subseteq Q \subset P$ olacak şekilde bir Q asal ideali yoksa P ye A nın minimal asalı denir.

<u>**Not:**</u> A, S nin bir ideali olsun. A yı kapsayan tüm asal ideallerin kümesini $V(A)$ ile göstereceğiz.

Değişmeli halkalarda bir idealin radikali o ideali içeren asalların kesişimine eşittir. ([1], Önerme 2.1.29). Şimdi bu özelliğin yarıgruplar için de doğru olacağını görelim:

Teorem 2.6. S bir yarıgrup ve A, S nin bir ideali olsun. $\sqrt{A}$, A yı kapsayan tüm asalların arakesitidir.

İspat: $\sqrt{A} = \bigcap_{P \in V(A)} P$ olduğunu gösterelim. A yı kapsayan herhangi bir P asal ideali alalım. Böylece $\sqrt{A} \subseteq \sqrt{P}$ yani $\sqrt{A} \subseteq P$ olur. Yani $\sqrt{A} \subseteq \bigcap_{P \in V(A)} P$ dir. Tersine, $x \in \bigcap_{P \in V(A)} P$ alalım. $x \notin \sqrt{A}$ olsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \notin A$ olur. $T = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ çarpımsal kapalı bir küme ve $A \cap T = \emptyset$ dir. Krull lemmasından $B \cap T = \emptyset$ ve $B \supseteq A$ olacak şekilde bir B asal ideali vardır. Fakat $B \in V(A)$ olduğundan $x \in B$ olur ve bu $B \cap T = \emptyset$ oluşuyla çelişir. Yani $x \in \sqrt{A}$ dır. Böylece $\sqrt{A} = \bigcap_{P \in V(A)} P$ olur.

Sonuç 2.2. S bir yarıgrup ve A, S nin bir ideali olsun. $\sqrt{A}$, A nın tüm minimal asallarının arakesitidir.

Teorem 2.7. [27] S bir yarıgrup, Δ bir indis kümesi ve her $i \in \Delta$ için Q_i, P_i-asalımsı ideal olsun. O halde $\bigcup_i Q_i$, $\bigcup_i P_i$-asalımsı idealdir. Özel olarak P-asalımsı ideallerin birleşimi de P-asalımsıdır.

İspat: $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in \bigcup_{i\in\Delta} Q_i$ olsun. O halde $ab \in Q_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in \Delta$ vardır. Q_{i_0}, P_{i_0}-asalımsı ideal olduğundan $a \in Q_{i_0}$ veya $b \in P_{i_0}$ bulunur. Yani $a \in \bigcup_{i\in\Delta} Q_i$ veya $b \in \bigcup_i P_i$ dir. Böylece $\bigcup_i Q_i$ bir asalımsı idealdir. Ayrıca $\sqrt{\bigcup_i Q_i} = \bigcup_i \sqrt{Q_i} = \bigcup_i P_i$ olduğundan $\bigcup_i Q_i$, $\bigcup_i P_i$-asalımsıdır.

Önerme 2.8. [23] P, S yarıgrubunun bir asal ideali olsun. $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ler P-asalımsı idealler olsun. O halde $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, P-asalımsıdır.

İspat: $\sqrt{Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n} = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} \cap \dots \cap \sqrt{Q_n} = P$ olduğu açıktır. P, S nin has ideali olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i \neq S$ dir. $a, b \in S$ için $ab \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ ve $b \notin \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ olsun. O halde $b \notin Q_j$ olacak şekilde bir $1 \leq j \leq n$ vardır. Böylece $ab \in Q_j$ ve $b \notin Q_j$ olduğundan $a \in P = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} Q_i}$ dir. Yani $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, P-asalımsıdır.

Özel olarak belirtmek gerekirse, $\{Q_i\}$ ailesi sonlu olmadığında $\bigcap Q_i$, P-asalımsı olmak zorunda değildir [23].

Tanım 2.8. [23] S bir yarıgrup ve A, S nin bir ideali olsun. Q_i ler P_i-asalımsı olmak üzere $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ oluyorsa A ya asalımsı ayrışıma sahiptir denir. Sonlu sayıda P-asalımsı ideallerin arakesiti de P-asalımsı olduğundan P_i ler birbirinden farklı asal idealler ve Q_i ler P_i-asalımsı olmak üzere $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.9. [1], [23] S bir yarıgrup ve A, S nin asalımsı ayrışıma sahip bir ideali olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa A ya normal ayrışıma sahiptir denir:

i.) $P_1, P_2, \dots, P_n$ ler S nin farklı asal idealleri,

ii.) Her $j = 1,2,3, \dots, n$ için $\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} Q_i \nsubseteq Q_j$ dir. Yani Q_i lerin hiçbiri $A = \bigcap_i^n Q_i$ ayrışımı için gereksiz değildir.

Tanım 2.10. [23] I, S yarıgrubunun normal ayrışıma sahip bir ideali olsun. I nın bir normal asalımsı ayrışımı $\sqrt{Q_i} = P_i$ $(i = 1, \dots, n)$ olmak üzere $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ olsun. n elemanlı $\{P_1, \dots, P_n\}$ kümesine I ya ilişkin asallar kümesi denir ve $Ass(S/I) = \{P_1, \dots, P_n\}$ ile gösterilir.

Önerme 2.9. Q, S yarıgrubunun bir P-asalımsı ideali ve $a \in S$ olsun.

i.) $a \in Q$ ise $(Q : a) = S$ dir.

ii.) $a \notin Q$ ise $(Q: a)$ bir P-asalımsı idealidir.

iii.) $a \notin P$ ise $(Q: a) = Q$ dur.

İspat: *i.)* $a \in Q$ olsun. O halde $1a \in Q$ olduğundan $1 \in (Q: a)$ ve böylece $(Q: a) = S$ dir.

ii.) $a \notin Q$ olsun. Her $b \in (Q: a)$ için $ab \in Q$ dur. Q bir P-asalımsı ideal olduğundan $b \in P = \sqrt{Q}$ ve böylece $Q \subseteq (Q: a) \subseteq P$ dir. Yani $P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q: a)} \subseteq \sqrt{P} = P$ dir. Sonuçta $\sqrt{(Q: a)} = P$ dir. $(Q: a)$ nın asalımsı bir ideal olduğunu gösterelim. $c, d \in S$ olmak üzere $cd \in (Q: a)$ ve $d \notin P$ olsun. O halde $cda \in Q$ ve $d \notin P$, Q bir P-asalımsı ideal olduğundan $ca \in Q$ yani $c \in (Q: a)$ bulunur. Böylece $(Q: a)$ bir P-asalımsı idealidir.

iii.) $Q \subseteq (Q: a)$ daima doğrudur. Diğer taraftan $b \in (Q: a)$ olsun. $ab \in Q$ ve $a \notin P$ dir. Q bir P-asalımsı ideal olduğundan $b \in Q$ bulunur.

Önerme 2.10. P nin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul her $x \notin P$ için $P = (P: x)$ olmasıdır.

İspat: P asal olsun. $x \notin P$ alalım. $P \subseteq (P: x)$ her zaman doğrudur. Tersine, $y \in (P: x)$ alalım. $yx \in P$ ve $x \notin P$ olduğundan $y \in P$ dir. Şimdi yeter koşulu gösterelim. Her $x \notin P$ için $P = (P: x)$ olsun. $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in P$ ve $b \notin P$ olsun. $a \in (P: b)$ dir. $(P: b) = P$ kabulümüzden $a \in P$ bulunur yani P asaldır.

Önerme 2.11. Q, S yarıgrubunun bir ideali ve $\sqrt{Q} = P$ olsun. Her $a \notin P$ için $(Q: a) = Q$ ise Q, P-asalımsıdır.

İspat: $x, y \in S$ olmak üzere $xy \in Q$ olsun. $y \notin P$ olduğunu kabul edelim. $x \in (Q: y) = Q$ olduğundan Q, P-asalımsı idealdir.

Teorem 2.8. [23] S bir yarıgrup ve A, S nin bir ideali olsun. Q_i ler P_i-asalımsı olmak üzere $A = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ normal ayrışımına sahip olsun. O halde $\{P_1, \ldots, P_n\} = \{P, S \text{ nin asal ideali: bir } x \in S \text{ için } P = \sqrt{(A: x)}\}$ olur. Yani A idealinin herhangi iki normal ayrışımı aynı uzunluk ve aynı ilişkin asallara sahiptir.

İspat: Bir $x \in S$ için $P = \sqrt{(A: x)}$ olsun. $P = \sqrt{(A: x)} = \sqrt{((Q_1 \cap \ldots \cap Q_n): x)} = \sqrt{(Q_1: x) \cap \ldots \cap (Q_n: x)} = \sqrt{(Q_1: x)} \cap \ldots \cap \sqrt{(Q_n: x)} = P_1^* \cap \ldots \cap P_n^*$ dir. $x \notin Q_i$ ise $P_i^* = P_i$, $x \in Q_i$ ise $P_i^* = S$ dir. Yani bir $i \in \Delta$ için $P = P_i^* = P_i$ olur. Tersine $A = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ normal ayrışımına sahip olsun. $A = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n \subset Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$. Bir $x \in Q_2 \cap$

$... \cap Q_n - A$ elemanını alalım. $(A: x) = (Q_1: x) \cap ... \cap (Q_n: x) = (Q_1: x)$ Önerme 2.9. nedeniyle doğrudur. Yani $(Q_1: x)$ P_1-asalımsı olduğundan $\sqrt{(A: x)} = \sqrt{(Q_1: x)} = P_1$ dir.

Tanım 2.11. [6] S yarıgrubu bir X alt kümesi tarafından üretilmiş olsun. S nin her elemanı X kümesinin farklı elemanlarının ya da bir elemanının pozitif kuvvetlerinin tek türlü çarpımı olarak yazılabiliyorsa S, X kümesi üzerinde serbesttir denir.

Not: Bir S yarıgrubunun yutan elamanı yoksa bu yarıgruba yutan elaman eklenebilir yani yutan elamana sahip olmayan bir S yarıgrubu için $S \cup \{0\}$ yarıgrubu yutan elamanı içeren bir yarıgruptur.

● Teorem 2.8. de de görüldüğü gibi tüm normal ayrışımlardaki ilişkin asalların kümesi eşittir. Fakat normal ayrışımın tek türlü olması gerekmez. Bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 2.8. [23] S, X ve Y değişmeli bilinmeyenler olmak üzere $S = \{0\} \cup \{X^n Y^m : n, m \geq 0\}$ biçiminde tanımlı serbest bir yarıgrup olsun. Her $n \geq 1$ için $\langle X^2, XY \rangle = \langle X^2, XY, Y^n \rangle \cap \langle X \rangle$, $\langle X^2, XY \rangle$ idealinin normal ayrışımıdır. Yani $\langle X^2, XY \rangle$ sonsuz sayıda normal ayrışıma sahiptir.

Tanım 2.12. [23] S bir yarıgrup olsun. P, S nin asal ideali ve A, S nin bir ideali olsun. A nın P-bileşen ideali şu şekildedir $A(P) = \{x \in S: rx \in A, r \in S - P\}$.

Teorem 2.9. [23] Q_i, S nin P_i-asalımsı ideali ve A, S nin $A = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ normal ayrışımına sahip ideali olsun. P, $A \subseteq P$ koşulunu sağlayan bir asal ideal olmak üzere $\bigcap\{Q_i : P_i \subseteq P\} = A(P)$ ideali sadece A ve P ye bağlıdır ve belirli bir ayrışıma bağlı değildir. P_i ideali A nın minimal asalıysa A nın herhangi iki normal ayrışımı $A(P_i)$ yi P_i-asalımsı bileşen olarak içerir.

İspat: $A = Q_1 \cap ... \cap Q_n$ olduğundan $\sqrt{A} = P_1 \cap ... \cap P_n \subseteq P$ ve böylece en az bir $i \in \{1,2, ..., n\}$ için $P_i \subseteq P$ olur. Her $i \in \{1,2, ..., n\}$ için $P_i \subseteq P$ ise $\bigcap\{Q_i : P_i \subseteq P\} = A \subseteq A(P)$ olur. O halde $i \in \{1,2, ..., k-1\}$ için $P_i \subseteq P$ ve $i \in \{k, k+1, ..., n\}$ için $P_i \nsubseteq P$ olduğunu varsayalım. O halde $i \in \{k, k+1, ..., n\}$ için $Q_i \nsubseteq P$ dir. Aksi geçerli olsaydı, $i \in \{k, k+1, ..., n\}$ için $Q_i \subseteq P_i \subseteq P$ olur ve bu ise varsayımımızla çelişir. O halde her $i \in \{k, k+1, ..., n\}$ için $r_i \notin P_i$ olacak şekilde $r_i \in Q_i$ vardır. $r_k, r_{k+1}, ..., r_n \notin P$ ve P asal olduğunda $r_k . r_{k+1} ... r_n \notin P$ olur. Böylece $x \bigcap\{Q_i : P_i \subseteq P\}$ ise $x. (r_k . r_{k+1} ... r_n) \in Q_1 \cap ... \cap Q_n = A$ ve $r_k . r_{k+1} ... r_n \notin P$ olduğundan $x \in A(P)$ olur. Yani $\bigcap\{Q_i : P_i \subseteq P\} \subseteq A(P)$. Tersine $x \in A(P)$ alalım. Bir $r \in S - P$ için $rx \in A$ olacak şekilde vardır. $rx \in \bigcap_i Q_i \subseteq \bigcap_i\{Q_i : P_i \subseteq P\}$, $rx \in \bigcap_i\{Q_i : P_i \subseteq P\}$ yani $rx \in Q_i$

öyle ki $\sqrt{Q_i} = P_i \subseteq P$. $rx \in \sqrt{Q_i} = P_i \subseteq P$, böylece $r \notin P$ olduğundan $r \notin \sqrt{Q_i}$. Q_i asalımsı olduğundan $x \in Q_i$. Yani $x \in \bigcap_i \{Q_i : P_i \subseteq P\}$. Böylece $A(P) \subseteq \bigcap_i \{Q_i : P_i \subseteq P\}$ dir.

Örnek 2.9. Örnek 2.8. deki yarıgrubu ve normal ayrışımı göz önüne alalım. $\langle X^2, XY\rangle$ nin ilişkin asalları $\langle X\rangle$ ve $\langle X, Y\rangle$ dir. $\langle X\rangle$, $\langle X^2, XY\rangle$ nin minimal asalı olduğundan $\langle X\rangle$ tek $\langle X\rangle$-asalımsı bileşenidir. Q bir $\langle X, Y\rangle$-asalımsı ideal olmak üzere $\langle X^2, XY\rangle = Q \cap \langle X\rangle$, $\langle X^2, XY\rangle$ nin bir normal ayrışımı ise $Q \subseteq \langle X^2, Y\rangle$ dir. Yani $\langle X^2, XY\rangle = \langle X^2, Y\rangle \cap \langle X\rangle$ ayrışımı, $\langle X^2, XY\rangle$ nin tek maksimal normal ayrışımıdır.

Teorem 2.10. [23] A, S nin, ilişkin asalları $\{P_1, \dots, P_n\}$ olmak üzere normal ayrışıma sahip bir ideali olsun. Q_i ler P_i-asalımsı olmak üzere $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ normal ayrışımı varsa $A = Q_1^* \cap \dots \cap Q_n^*$ olacak şekilde Q_i^*, P_i-asalımsı idealleri vardır ve $Q_i \subseteq Q_i^*$ dır.

İspat: Her P_i asal ideali için $Q_i^* = \bigcup\{Q, P_i\text{-asalımsı}: Q, A$ nın normal ayrışımında bulunur$\}$. Q_i^*, P_i-asalımsı ideallerin birleşimi olsun. O halde Q_i^*, P_i-asalımsıdır. Eğer $A = Q_1^* \cap \dots \cap Q_n^*$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Açıkça görülür ki $A \subseteq Q_1^* \cap \dots \cap Q_n^*$ dir. Şimdi bir $x \in Q_1^* \cap \dots \cap Q_n^*$ alalım. Her i için $x \in Q_i^*$ olur. Q_{ii} ler P_i-asalımsılar ve $A = Q_{1i} \cap Q_{2i} \cap \dots \cap Q_{ii} \cap \dots \cap Q_{ni}$ A nın bir normal ayrışımı olmak üzere $x \in Q_{ii}$ dir. Böylece $x \in \left(\bigcup_{j=1}^{n} Q_{1j}\right) \cap \dots \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} Q_{nj}\right)$ dir. Q_i ve Q_i' ler P_i-asalımsı olmak üzere $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_n = Q_1' \cap \dots \cap Q_n'$ nın A için normal ayrışım olduğunu gösterebilirsek $A = (Q_1 \cup Q_1') \cap \dots \cap (Q_n \cup Q_n')$ olur ve indüksiyonla ispatı tamamlayabiliriz. Eğer $P_1, \dots, P_n$ ler A nın minimal asallarıysa önceki teoremden $Q_1 = Q_1', \dots, Q_n = Q_n'$ dir ve ispat tamamlanır. P_j, A nın minimal asalı olmasın. $P_1, \dots, P_{j-1}$ idealleri A nın minimal asalları olsun. P_j ideali $\{P_j, \dots, P_n\}$ ailesinin minimal elemanı olsun. Önceki teoremden $Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap Q_j = Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap A(P_j) = Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap Q_j'$ dir. Dağılabilme özelliğinden $Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap Q_j = Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap \left(Q_j \cup Q_j'\right) = Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap Q_j'$ dir. $j = n$ ise ispat tamamdır. Aksi halde $P_{j+1}, \dots, P_n$ için P_{j+1} ideali $\{P_{j+1}, \dots P_n\}$ ailesinin minimal elemanıdır. Önceki gibi $Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap Q_j \cap Q_{j+1} = Q_1 \cap \dots \cap Q_j \cap \left(Q_j \cup Q_j'\right) \cap (Q_{j+1} \cup Q_{j+1}') = Q_1 \cap \dots \cap Q_{j-1} \cap Q_j' \cap Q_{j+1}'$. Böyle devam edilirse $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_n = (Q_1 \cup Q_1') \cap \dots \cap (Q_n \cup Q_n')$ bulunur.

Tanım 2.13. [1] Bir $d \in S - I$ ve $c \in S$ elemanları $cd \in I$ olacak şekilde varsa c ye $mod I$ ya göre sıfır bölen denir. Sıfır bölenler kümesi $Z(S/I)$ ile gösterilir.

Şimdi halkalar için doğru olan bir önermenin yarıgruplar için de doğru olduğunu görelim.

Önerme 2.12. S bir yarıgrup ve I, S nin ayrışabilir bir ideali ise

$$Z(S/I) = \bigcup_{P_i \in Ass(S/I)} P_i$$

dir.

İspat: Bir $a \in Z(S/I)$ alalım. Tanım 2.12. den $ad \in I$ olacak şekilde bir $d \notin I$ vardır. Q_i ler P_i-asalımsı olmak üzere I nın normal ayrışımı $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ olsun. $d \notin I$ olduğundan bir $1 \leq j \leq n$ için $d \notin Q_j$ olur. $ad \in I \subseteq Q_j$ ve Q_j, P_j-asalımsı olduğundan $a \in P_j \in Ass(S/I)$ yani $Z(S/I) \subseteq \bigcup_{P_i \in Ass(S/I)} P_i$ dir. Tersine, $P \in Ass(S/I)$ alalım. Teorem 2.8. den bir $a \in S$ için $(I{:}\,a)$ ideali P-asalımsı olur ve $(I{:}\,a) \subseteq P \subset S$ yani $a \notin I$ bulunur. Her $s \in P = \sqrt{(I{:}\,a)}$ için bir $j > 0$ tam sayısı vardır ki $s^j \in (I{:}\,a)$ dır. j lerin en küçüğüne t dersek $s^{t-1}a \notin I$ ve $s(s^{t-1}a) \in I$ olduğundan $s \in Z(S/I)$ dir. Böylece $P \in Ass(S/I)$ için $P \subseteq Z(S/I)$ veya $\bigcup_{P \in Ass(S/I)} P \subseteq Z(S/I)$ gerçeklenir.

● Burada özel olarak belirtmek gerekirse, yukarıdaki önermenin halkalardan farklı yanı $\bigcup_{P_i \in Ass(S/I)} P_i$ idealinin de asal olmasıdır (Teorem 2.3. den). Yani bir asal ideal sıfır bölenleri içerse de ilişkin asallar tarafından kapsanmak zorunda değildir.

Önerme 2.13. $f{:}\, S \to T$ bir yarıgrup homomorfizması olsun.

i.) f örten olmak üzere Q, S nin asalımsı ideali ve $çekf \subseteq Q \times Q$ ise $f(Q)$ da T nin asalımsı idealidir.

ii.) Q^*, T nin asalımsı idealiyse $f^{-1}(Q^*)$ da S nin asalımsı idealidir.

İspat: *i.)* $ab \in f(Q)$ olsun. $ab = f(q)$ olacak şekilde bir $q \in Q$ vardır. f örten olduğundan $a = f(x)$ ve $b = f(y)$ olacak şekilde $x, y \in S$ vardır. Böylece $ab = f(xy) = f(q)$ olur. $(xy, q) \in çekf \subseteq Q \times Q$ olduğundan $xy \in Q$, Q asalımsı olduğundan $x \in Q$ veya $y^n \in Q$ $n \in \mathbb{N}$ olur. Böylece $f(x) = a \in f(Q)$ veya $f^n(y) = b^n \in f(Q)$ olur.

ii.) $ab \in f^{-1}(Q^*)$ olsun. $f(ab) = f(a)f(b) \in Q^*$ ve Q^* asalımsı ideal olduğundan $f(a) \in Q^*$ veya $f^n(b) = f(b^n) \in Q$ ve böylece $a \in f^{-1}(Q^*)$ veya $b^n \in f^{-1}(Q^*)$ olur. O halde $f^{-1}(Q^*)$ asalımsı idealdir.

Teorem 2.11. S bir yarıgrup ve I, S nin bir ideali olsun. Q, S nin $I \subseteq Q$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. Q nun asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul Q/I nın S/I yarıgrubunun asalımsı ideali olmasıdır.

İspat: $aI, bI \in S/I$ olmak üzere $aIbI = abI \in Q/I$ olsun. O halde $ab \in Q$ dur. $a \notin Q$ olsun. Q asalımsı ideal olduğundan $b^n \in Q$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $aI \notin Q/I$ ve $b^nI \in Q/I$ dır. $(bI)^n = b^nI^n = b^nI$ ve böylece Q/I ideali S/I yarıgrubunun asalımsı idealidir. Tersine, Q/I ideali S/I yarıgrubunun asalımsı ideali olsun. $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in Q$ ve $a \notin Q$ olsun. O zaman $abI = aIbI \in Q/I$ ve $aI \notin Q/I$ dır. Q/I asalımsı olduğundan $(bI)^n \in Q/I$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Yani $b^n \in Q$ dur. O halde Q ideali S yarıgrubunun asalımsı idealidir.

Sonuç 2.3. S yarıgrubunun I idealini kapsayan asalımsı idealleri ile S/I yarıgrubunun asalımsı idealleri arasında bire bir eşleme vardır.

Gerçekten de, Önerme 1.3.3. ve Teorem 2.11. nedeniyle bu sonuç açıktır.

2.1. Sözde Asalımsı İdealler

Tanım 2.1.1. S bir yarıgrup ve I, S nin bir ideali olsun. $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in I$ olması $a \in \sqrt{I}$ veya $b \in \sqrt{I}$ olmasını gerektiriyorsa I ya sözde asalımsı ideal denir.

Notlar: *i.)* I sözde asalımsı idealse $\sqrt{I} = P$, S nin asal idealidir. Böylece I ya P- sözde asalımsı ideal diyeceğiz.

ii.) S nin her asal ve asalımsı ideali aynı zamanda bir sözde asalımsı idealdir. Fakat tersi doğru değildir. Bunun için Örnek 2.6. ya bakınız.

Önerme 2.1.1. S bir yarıgrup ve I, S nin bir ideali olsun. Şu ifadeler denktir:

i.) I bir sözde asalımsı idealdir.

ii.) $\sqrt{I}$ asal idealdir.

iii.) J ile K, S nin idealleri olmak üzere $JK \subseteq I$ olması $J \subseteq \sqrt{I}$ veya $K \subseteq \sqrt{I}$ olmasını gerektirir.

İspat: $i.) \Rightarrow ii.)$ $a, b \in S$ ve $ab \in \sqrt{I}$ olsun. $(ab)^k = a^k b^k \in I$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. I bir sözde asalımsı ideal olduğundan $a^k \in \sqrt{I}$ veya $b^k \in \sqrt{I}$ dır. Böylece $a \in \sqrt{I}$ veya $b \in \sqrt{I}$ dır. Yani $\sqrt{I}$ asal idealdir.

$ii.) \Rightarrow iii.)$ $JK \subseteq I$ olsun. $I \subseteq \sqrt{I}$ ve $\sqrt{I}$ asal olduğundan Teorem 2.1. ii.) den $J \subseteq \sqrt{I}$

veya $K \subseteq \sqrt{I}$ dır.

$iii.) \Rightarrow i.)$ $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in I$ olsun. $(a)(b) \subseteq I$ ve kabulümüzden $(a) \subseteq \sqrt{I}$ veya $(b) \subseteq \sqrt{I}$ bulunur. Böylece $a \in \sqrt{I}$ veya $b \in \sqrt{I}$ olur.

Teorem 2.1.1. Δ keyfi bir indeks kümesi ve $i \in \Delta$ için I_i, S yarıgrubunun P_i- sözde asalımsı ideali olsun. Bu durumda $\bigcup I_i$ de bir sözde asalımsı idealdir.

İspat: Her $i \in \Delta$ için I_i bir P_i- sözde asalımsı ideal olduğundan P_i asal idealdir. $\sqrt{\bigcup_{i\in\Delta} I_i} = \bigcup_{i\in\Delta}\sqrt{I_i} = \bigcup_{i\in\Delta} P_i$ olur. Fakat asal ideallerinin birleşimi asal olduğundan $\sqrt{\bigcup_{i\in\Delta} I_i}$ de asal idealdir. Böylece $\bigcup_{i\in\Delta} I_i$ bir sözde asalımsı idealdir.

<u>Not:</u> Sözde asalımsı ideallerin arakesitinin de bir sözde asalımsı ideal olması gerekmez. Örneğin; $3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}$ idealleri $(\mathbb{Z}, .)$ yarıgrubunun sözde asalımsı idealleridir. Fakat $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 15\mathbb{Z}$ sözde asalımsı değildir. $\sqrt{15\mathbb{Z}} = 15\mathbb{Z}$ olup asal ideal değildir.

Teorem 2.1.2. Her $i \in \{1,2,\dots,n\}$ için I_i, P_i- sözde asalımsı ideal olsun. Bu durumda $I_1 I_2 \dots I_n$ nin bir sözde asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul her $1 \le i \le n$ için $P_j \subseteq P_i$ olacak şekilde bir $j \in \{1,2,\dots,n\}$ var olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ $I_1 I_2 \dots I_n = I$ bir sözde asalımsı ideal olsun. $\sqrt{I} = \sqrt{I_1 I_2 \dots I_n} = \bigcap_{i=1}^{n}\sqrt{I_i} = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$ bir asal idealdir böylece $\bigcap_{i=1}^{n} P_i = P_j$ olacak şekilde bir $j \in \{1,2,\dots,n\}$ vardır. O halde $P_j \subseteq P_i$ her $1 \le i \le n$ için.

$\Leftarrow$ Her $1 \le i \le n$ için $P_j \subseteq P_i$ olsun. $\sqrt{I} = \sqrt{I_1 I_2 \dots I_n} = \bigcap_{i=1}^{n}\sqrt{I_i} = \bigcap_{i=1}^{n} P_i = P_j$ bir asal idealdir. Böylece I sözde asalımsı dir.

Teorem 2.1.3. Her $i \in \{1,2,\dots,n\}$ için I_i, P_i- sözde asalımsı ideal olsun. $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ nin sözde asalımsı olması için gerek ve yeter koşul bir $j \in \{1,2,\dots,n\}$ nin her $1 \le i \le n$ için $P_j \subseteq P_i$ olacak şekilde var olmasıdır.

İspat: $\sqrt{I_1 I_2 \dots I_n} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} I_i}$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ nin sözde asalımsı olması için gerek ve yeter koşul $I_1 I_2 \dots I_n$ nin sözde asalımsı olmasıdır. Böylece bir önceki Teorem 2.1.2. den istenen bulunur.

Önerme 2.1.2. I, S yarıgrubunun bir ideali olsun. I nın sözde asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul her $x \notin \sqrt{I}$ için $\sqrt{I} = \left(\sqrt{I} : x\right)$ olmasıdır.

İspat: I sözde asalımsı ideal olsun. Önerme 2.1.1. *ii.)* den $\sqrt{I}$ asal idealdir. Böylece Önerme 2.10. dan her $x \notin \sqrt{I}$ için $\sqrt{I} = \left(\sqrt{I} : x\right)$ olur. Tersine, her $x \notin \sqrt{I}$ için $\sqrt{I} = \left(\sqrt{I} : x\right)$ olsun. Böylece $\sqrt{I}$ bir asal ideal olur. O halde I bir sözde asalımsı idealdir.

● S_1 ve S_2 iki yarıgrup olsun. $S_1 \times S_2$ yarıgrubunu göz önüne alalım. I_1, S_1 in, I_2 de S_2 nin sözde asalımsı ideali olsun. $I_1 \times I_2$ nin $S_1 \times S_2$ yarıgrubunun sözde asalımsı ideali olması gerekmez.

Örnek 2.1.1. $3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}$ idealleri $(\mathbb{Z}, .)$ yarıgrubunun sözde asalımsı idealleridir. Fakat $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin sözde asalımsı ideali değildir. Gerçekten de $\sqrt{3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}} = \sqrt{3\mathbb{Z}} \times \sqrt{5\mathbb{Z}} = 3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin asal ideali değildir.

Teorem 2.1.4. S, T iki yarıgrup olsun. I, J sırasıyla S, T nin idealleri olmak üzere $I = I \times J$, $S \times T$ nin sözde asalımsı ideali olsun. Böyleyken şu iki durumdan biri gerçeklenir:

i.) I sözde asalımsı ideal ve $J = T$ dir.

ii.) J sözde asalımsı ideal ve $I = S$ dir.

İspat: $I = I \times J$ sözde asalımsı ideal olsun. Böylece $\sqrt{I} = \sqrt{I \times J}$ asal idealdir. Teorem 2.4. ten ya

i.) $\sqrt{I}$ asal ve $\sqrt{J} = T$ $(J = T)$,

ii.) $\sqrt{J}$ asal ve $\sqrt{I} = S$ $(I = S)$ bulunur.

Teorem 2.1.5. S bir yarıgrup ve Q da P- sözde asalımsı ideal olsun. Bu durumda her $a \notin P$ için, $(Q: a)$ da P- sözde asalımsı idealdir.

İspat: $a \notin P$ olsun. $Q \subseteq (Q: a)$ olduğu açıktır. $b \in (Q: a)$ alalım. O halde $ab \in Q$ olur. Q, P- sözde asalımsı ideal ve $a \notin P$ olduğundan $b \in P$ olur. O halde $Q \subseteq (Q: a) \subseteq P = \sqrt{Q}$ ve böylece $P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q: a)} \subseteq \sqrt{P} = P$ bulunur. Yani $\sqrt{(Q: a)} = P$ asal olduğundan $(Q: a)$ sözde asalımsı ideal olur.

Teorem 2.1.6. $f: S_1 \to S_2$ bir yarıgrup homomorfizması olsun.

i.) f örten ve $çekf \subseteq \sqrt{I} \times \sqrt{I}$ olmak üzere I, S_1 in sözde asalımsı ideali olsun. Bu durumda $f(I)$, S_2 nin sözde asalımsı idealidir.

ii.) I^*, S_2 nin sözde asalımsı ideali olsun. O halde $f^{-1}(I^*)$ da S_1 in sözde asalımsı idealidir.

İspat: *i.)* f örten olduğundan $\sqrt{f(I)} = f(\sqrt{I})$ dır. $\sqrt{I}$ asal ve $çekf \subseteq \sqrt{I} \times \sqrt{I}$ olduğundan Önerme 2.4. ten $\sqrt{f(I)} = f(\sqrt{I})$, S_2 nin asal idealidir. Yani $f(I)$ sözde asalımsı idealdir.

ii.) $\sqrt{I^*}$, S_2 nin asal ideali ve $\sqrt{f^{-1}(I^*)} = f^{-1}(\sqrt{I^*})$ olduğundan Önerme 2.4. ten

$\sqrt{f^{-1}(I^*)}$ de asal ve böylece $f^{-1}(I^*)$ sözde asalımsı idealdir.

Sonuç 2.1.1. *i.)* T ve S iki yarıgrup ve $S \subseteq T$ olmak üzere, J, T nin sözde asalımsı ideali ise $J \cap S$, S nin sözde asalımsı idealidir.

ii.) $I \subseteq J$ olmak üzere I ve J, S nin iki ideali olsun. J nin S nin sözde asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul J/I nın S/I nın sözde asalımsı ideali olmasıdır.

İspat: *i.)* $f: S \rightarrow T$ monomorfizma olsun. J, T nin sözde asalımsı ideali olsun. Teorem 2.1.6. *ii.)* nedeniyle $f^{-1}(J)$ sözde asalımsı idealdir. Şimdi $f^{-1}(J) = J \cap S$ olduğunu gösterelim. $j \in J \cap S$ olsun. $j \in S$ dir ve $j = f(j) \in J$ vardır. Yani $j \in f^{-1}(J)$ dir. Böylece $J \cap S \subseteq f^{-1}(J)$ dir. Tersine bir $k \in f^{-1}(J)$ alalım. $f(k) \in J$ dir. $k \in S$ olduğundan $f(k) = k \in J$ yani $k \in J \cap S$ bulunur. O halde $f^{-1}(J) \subseteq J \cap S$ dir.

ii.) Teorem 2.1.6. i.) ve $S/I/(J/I\,) \cong S/J$ olmasını sağlayan 2. İzomorfizma teoremi nedeniyle istenen elde edilir.

Teorem 2.1.7. S bir yarıgrup ve I, S nin bir ideali olsun. Q, S nin $I \subseteq Q$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. Q nun sözde asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul Q/I nın S/I yarıgrubunun sözde asalımsı ideali olmasıdır.

İspat: $aI, bI \in S/I$ olmak üzere $aIbI = abI \in Q/I$ olsun. O halde $ab \in Q$ dir. Q sözde asalımsı ideal olduğundan $a \in \sqrt{Q}$ veya $b \in \sqrt{Q}$ dur. Dolayısıyla $a^k \in Q$ veya $b^n \in Q$ olacak şekilde $k, n \in \mathbb{N}$ vardır. Yani $a^kI \in Q/I$ veya $b^nI \in Q/I$ dır. Böylece Q/I ideali S/I yarıgrubunun sözde asalımsı idealidir. Tersine, Q/I ideali S/I yarıgrubunun sözde asalımsı ideali olsun. $a, b \in S$ olmak üzere $ab \in Q$ olsun. O zaman $abI = aIbI \in Q/I$ dır. Q/I sözde asalımsı olduğundan $(aI)^k \in Q/I$ veya $(bI)^n \in Q/I$ olacak şekilde $n, k \in \mathbb{N}$ vardır. Yani $a^k \in Q$ veya $b^n \in Q$ dur. O halde Q ideali S yarıgrubunun sözde asalımsı idealidir.

Sonuç 2.1.2. S yarıgrubunun I idealini kapsayan sözde asalımsı idealleri ile S/I yarıgrubunun sözde asalımsı idealleri arasında bire bir eşleme vardır.

3. YERELLEŞTİRME VE NOETHERIANLIK

Tanım 3.1. [23] S bir yarıgrup ve T, S nin çarpımsal kapalı bir kümesi olsun. $s, s' \in S$ ve $t, t' \in T$ olmak üzere

$$\frac{s}{t} \sim \frac{s'}{t'} \Leftrightarrow ust' = us't$$

gerçeklenecek şekilde bir $u \in T$ varsa, $\frac{s}{t}$ nin denklik sınıfları kümesine S nin T de yerelleştirmesi denir ve S_T ile gösterilir.

Tanım 3.2. S bir yarıgrup, T, S nin çarpımsal kapalı kümesi olmak üzere S_T de çarpma işlemi şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{s}{t} . \frac{s'}{t'} = \frac{ss'}{tt'}$$

- Yukarıdaki çarpma işlemine göre S_T bir yarıgruptur.
- T nin elemanları S_T de birimseldir.
- S_T nin yutan elemanı $0_{S_T} = \frac{0}{1}$ ve birim elemanı $1_{S_T} = \frac{1}{1}$ dir.

Tanım 3.3. S bir yarıgrup ve S_T, S nin T de yerelleştirmesi olsun. $\pi: S \to S_T$, $\pi(s) = \frac{s}{1}$ her $s \in S$, biçiminde tanımlansın. π bir homomorfizmadır ve buna doğal homomorfizma denir.

- Q_T ile $\pi(Q)$ nin S_T de ürettiği ideali düşünelim yani $Q_T = \pi(Q)S_T$ olsun. $\lambda \in Q_T$ nin $\lambda = \frac{s}{t}$ şeklindeki her temsilinde $s \in Q$ olması gerekmez ama $\lambda = \frac{s}{t} = \frac{k}{l}$ olacak şekilde bir $k \in Q$, bir $l \in T$ bulunabilir.

- Q ideali asalımsı ise $Q \cap T = \emptyset$ olmak üzere $\lambda \in Q_T$ nin $\lambda = \frac{s}{t}$ şeklindeki her temsilinde $s \in Q$ dir. Asal idealler asalımsı olduğundan bu sonuç Q asal ideal olduğunda da doğrudur.

Önerme 3.1. *i.)* P, S nin asal ideali ve T, S nin çarpımsal kümesi olmak üzere $P \cap T = \emptyset$ olsun. P_T de S_T nin asal idealidir.

ii.) P, S_T nin asal ideali olsun. $\pi^{-1}(P)$, S nin asal idealidir ve T ile ayrıktır.

İspat: *i.)* $\pi: S \to S_T$ homomorfizması $\pi(x) = \frac{x}{1}$ biçiminde tanımlansın. P_T ile $\pi(P)$ nin S_T de ürettiği ideali düşünelim yani $P_T = \pi(P)S_T$ olsun. P_T nin S_T de asal olduğunu gösterelim: $\frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2} \in S_T$ olmak üzere $\frac{s_1}{t_1}\frac{s_2}{t_2} = \frac{s_1 s_2}{t_1 t_2} \in P_T$ olsun. $\frac{s_1 s_2}{t_1 t_2} = \frac{p}{1}\frac{s}{t}$ olacak şekilde

$p \in P$, $s \in S$ ve $t \in T$ vardır. Öyle bir $u \in T$ vardır ki $uts_1s_2 = ut_1t_2ps \in P$ dir. $P \cap T = \emptyset$ olduğundan $s_1s_2 \in P$ yani $s_1 \in P$ veya $s_2 \in P$ dir. Böylece $\frac{s_1}{t_1} = \underbrace{\frac{s_1}{1}}_{\in\pi(P)} \underbrace{\frac{1}{t_1}}_{\in S_T} \in P_T$ olur.

ii.) S_T nin bir P asal idealini alalım. $\pi^{-1}(P)$, Önerme 2.4. ii.) den S nin asal idealidir ve ayrıca $\pi^{-1}(P) \cap T = \emptyset$ olur. Aksi halde $P = S_T$ olur. $\pi^{-1}(P) \cap T \neq \emptyset$ olsun. O halde öyle bir $t \in T$ var ki $t \in \pi^{-1}(P)$ olur. $\pi(t) = \frac{t}{1} \in P$ olur. T nin elemanları birimsel olduğundan $\frac{1}{1} = \underbrace{\frac{t}{1}}_{\in P} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\in S_T} \in P$ olur. $P = S_T$ çelişkisi elde edilir. O halde $\pi^{-1}(P) \cap T = \emptyset$ olur.

<u>Not:</u> Önerme 3.1. de verilen özellikteki asal ideallerin arasında bire bir eşleme vardır. Gerçekten de, $P \cap T = \emptyset$ olmak üzere, φ, S nin P asal idealini, S_T nin P_T asalına götüren bir fonksiyon olsun. ψ de S_T nin J asal idealini S nin $\pi^{-1}(J)$ asal idealine götüren fonksiyon olsun. φ ve ψ birbirinin tersidir. Yani $P \xrightarrow{\varphi} P_T \xrightarrow{\psi} \pi^{-1}(P_T)$ dir. Burada $\pi^{-1}(P_T) = P$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $x \in \pi^{-1}(P_T)$ alalım. $\pi(x) = \frac{x}{1} \in P_T$ dir. O halde $\frac{x}{1} = \pi(p)\frac{s}{t}$ olacak şekilde $s \in S$, $t \in T$ ve $p \in P$ vardır. Böylece $\frac{x}{1} = \frac{ps}{t}$ olur o halde en az bir $t_1 \in T$ vardır ki $xt_1t = pst_1 \in P$ olur $P \cap T = \emptyset$ olduğundan $x \in P$ olur. Tersine $P_T = \pi(P)S_T \supseteq \pi(P)$ ve böylece $\pi^{-1}(P_T) \supseteq \pi^{-1}(\pi(P)) \supseteq P$ bulunur. Şimdi J, S_T nin asal ideali olsun. $J \xrightarrow{\psi} \pi^{-1}(J) \xrightarrow{\varphi} \pi^{-1}(J)_T$ dir. Burada $\pi^{-1}(J)_T = J$ olduğunu gösterirsek istenen bulunur. $\pi^{-1}(J)_T = \pi(\pi^{-1}(J))S_T \subseteq JS_T = J$ dir. Şimdi $\frac{s}{t} \in J$ alalım. $\pi(s) = \frac{s}{1} = \frac{t}{1}\frac{s}{t} \in J$ ve böylece $s \in \pi^{-1}(J)$ bulunur. O halde $\frac{s}{t} = \underbrace{\frac{s}{1}}_{\pi(s)} \frac{1}{t} \in \pi^{-1}(J)_T$ bulunur.

Önerme 3.2. *i.)* Q, S nin asalımsı ideali ve T, S nin çarpımsal kümesi olmak üzere $Q \cap T = \emptyset$ olsun. Q_T de S_T nin asalımsı idealidir.

ii.) Q, S_T nin asalımsı ideali olsun. $\pi^{-1}(Q)$, S nin asalımsı idealidir ve T ile ayrıktır.

İspat: *i.)* $\pi: S \to S_T$ homomorfizması $\pi(x) = \frac{x}{1}$ biçiminde tanımlansın. Q_T ile $\pi(Q)$ nun S_T de ürettiği ideali düşünelim yani $Q_T = \pi(Q)S_T$ olsun. Q_T nin S_T de asalımsı olduğunu gösterelim: $\frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2} \in S_T$ olmak üzere $\frac{s_1}{t_1}\frac{s_2}{t_2} = \frac{s_1s_2}{t_1t_2} \in Q_T$ olsun. $\frac{s_1s_2}{t_1t_2} = \pi(q)\frac{s}{t} = \frac{q}{1}\frac{s}{t}$

olacak şekilde $q \in Q$, $s \in S$ ve $t \in T$ vardır. Öyle bir $u \in T$ vardır ki $uts_1s_2 = ut_1t_2ps \in Q$ ve $Q \cap T = \emptyset$ olduğundan $s_1s_2 \in Q$ yani $s_1 \in Q$ veya ${s_2}^n \in Q$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $s_1 \in Q$ ise $\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_1}{1}\frac{1}{t_1} = \underbrace{\pi(s_1)}_{\in \pi(Q)} \underbrace{\frac{1}{t_1}}_{\in S_T} \in Q_T$ veya ${s_2}^n \in Q$ ise $\left(\frac{s_2}{t_2}\right)^n = \frac{{s_2}^n}{1}\frac{1}{{t_2}^n} = \pi({s_2}^n)\frac{1}{{t_2}^n} \in Q_T$ dir yani Q_T asalımsıdır.

ii.) S_T nin bir Q asalımsı idealini alalım. Önerme 2.13. den $\pi^{-1}(Q)$ de S nin asalımsı idealidir. Şimdi $\pi^{-1}(Q) \cap T = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $\pi^{-1}(Q) \cap T \neq \emptyset$ olsun. Bir $t \in \pi^{-1}(Q) \cap T$ vardır. T nin elemanları birimsel olduğundan $\frac{1}{1} = \underbrace{\frac{t}{1}}_{\in Q} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\in S_T} \in Q$ olur bu ise $Q = S_T$ demektir fakat bu çelişkidir.

● Önerme 3.1. dekine benzer eşleme asalımsı idealler arasında da vardır.

Lemma 3.1. Q_T ile $\pi(Q)$ nun S_T de ürettiği ideali düşünelim yani $Q_T = \pi(Q)S_T$ olsun. $\sqrt{Q_T} = \sqrt{Q}_T$ dir.

İspat: $\lambda \in \sqrt{Q}_T$ alalım. $\lambda = \frac{a}{s}$ olacak şekilde $a \in \sqrt{Q}$ ve $s \in T$ vardır. $a^n \in Q$, $\lambda^n = \frac{a^n}{s^n} \in Q_T$ yani $\lambda \in \sqrt{Q_T}$ bulunur. Tersine $\lambda = \frac{a}{s} \in \sqrt{Q_T}$ alalım. $\lambda^n = \frac{a^n}{s^n} \in Q_T$ olur. Yani $\frac{a^n}{s^n} = \frac{b}{t}$ olacak şekilde $b \in Q$, $t \in T$ vardır. Bir $u \in T$, $uta^n = ubs^n \in Q$ olacak şekilde vardır ve $(uta)^n \in Q$ olduğundan $uta \in \sqrt{Q}$ bulunur. $\lambda = \frac{a}{s} = \frac{uta}{uts} \in \sqrt{Q}_T$ dir.

Önerme 3.3. *i.)* Q, S nin sözde asalımsı ideali ve $\sqrt{Q} \cap T = \emptyset$ olsun. O halde Q_T de S_T nin sözde asalımsı idealidir.

ii.) Q, S_T nin sözde asalımsı ideali ise $\pi^{-1}(Q)$, S nin sözde asalımsı idealidir ve T ile ayrıktır.

İspat: *i.)* $\pi: S \to S_T$ homomorfizması $\pi(x) = \frac{x}{1}$ biçiminde tanımlansın. Q, S nin sözde asalımsı ideali olduğundan $\sqrt{Q}$ asaldır. $\sqrt{Q}_T$ ile $\pi(\sqrt{Q})$ nun S_T de ürettiği ideali düşünelim yani $\sqrt{Q}_T = \pi(\sqrt{Q})S_T$ olsun. $\sqrt{Q} \cap T = \emptyset$ olduğundan Önerme 3.1. *i.)* den $\sqrt{Q}_T$, S_T nin asalıdır. Lemma 3.1. den $\sqrt{Q}_T = \sqrt{Q_T}$ ve böylece $\sqrt{Q_T}$, S_T nin asalıdır. O halde Q_T, S_T nin sözde asalımsı idealidir.

ii.) $\pi: S \to S_T$ homomorfizma olduğundan Q, S_T nin sözde asalımsı ideali ise Teorem 2.1.16. dan $\pi^{-1}(Q)$, S nin sözde asalımsı idealidir. $\sqrt{\pi^{-1}(Q)} = \pi^{-1}(\sqrt{Q})$ olduğundan

Önerme 3.1. *ii.)* den $\sqrt{\pi^{-1}(Q)} \cap T = \emptyset$ dir.

Tanım 3.4. T nin doymuş çarpımsal kümesi şu şekilde tanımlanır;

$$T^* = \{s \in S: ss' \in T \text{ olacak şekilde bir } s' \in S \text{ var}\}.$$

Önerme 3.4. S bir yarıgrup olmak üzere, $S - T^*$ asal ideallerin birleşimidir.

İspat: Her $x \in S - T^*$ elemanının, T^* ile kesişmeyen bir asal idealde olduğunu gösterirsek ispat biter. $x \in S - T^*$ ise T^* doymuş olduğundan $\langle x \rangle \cap T^* = \emptyset$ dir. Lemma 2.2. den $\langle x \rangle$ idealini kapsayan ve T^* ile ayrık tek bir maksimal ideal vardır ve bu ideal asaldır. Daha açık bir ifadeyle, bu asal ideale P_{i_x} dersek, $\langle x \rangle \subseteq P_{i_x}$ ve $P_{i_x} \cap T^* = \emptyset$ yani $P_{i_x} \subseteq S - T^*$ bulunur. Bunu her $x \in S - T^*$ için düşünürsek $S - T^* = \bigcup P_{i_x}$ olacağı görülür.

● Yarıgruplarda asal ideallerin birleşimi Teorem 2.3. den asal olduğundan her doymuş çarpımsal küme, *P* bir asal ideal olmak üzere, $T^* = S - P$ biçimindedir.

Tanım 3.5. (Artan Zincir Koşulu) [23] S bir yarıgrup, I_i ler S nin idealleri olmak üzere her artan $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ zinciri sonlu adımda durursa S ye Noetherian yarıgrup denir.

Teorem 3.1. [23] S bir yarıgrup olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

i.) S Noetherian yarıgruptur,

ii.) S nin her ideali sonlu üretilmiştir,

iii.) S nin ideallerden oluşan, boştan farklı her ailesinin bir maksimal elemanı vardır.

İspat: $i.) \Rightarrow ii.)$ I, S nin sonlu üretilmemiş bir ideali olsun. Bir $a_1 \in I$ için $I \neq \langle a_1 \rangle$ olduğundan bir $a_2 \in I - \langle a_1 \rangle$ bulabiliriz. $I \neq \langle a_1, a_2 \rangle$ olduğundan bir $a_3 \in I - \langle a_1, a_2 \rangle$ bulabiliriz. Böyle devam edersek bir $a_{k+1} \in I - \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ bulunabilir. Böylece S nin ideallerinin $\langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle a_1, \dots, a_k \rangle \subset \cdots$ sonsuz zinciri elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde I sonlu üretilmiştir.

$ii.) \Rightarrow iii.)$ Ω, S nin ideallerinin boştan farklı bir kümesi olsun. I_0, Ω nın bir elemanı olsun. I_0 maksimal değilse $I_0 \subset I_1$ olacak şekilde bir $I_1 \in \Omega$ vardır. I_1 maksimal değilse $I_1 \subset I_2$ olacak şekilde bir $I_2 \in \Omega$ vardır. Eğer Ω nın bir maksimal elemanı yoksa $I_0 \subset I_1 \subset \cdots$ olacak şekilde bir sonsuz zincir elde ederiz. $I = \bigcup I_i$ olsun. I, S nin bir idealidir. I sonlu üretilmiş olduğundan $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_n \in I$ vardır. Demek ki $a_1, \dots, a_n$'leri içeren bir I_i vardır. Böylece $I_i = I$ ve $I_i = I_{i+1} = \cdots$ dır. Bu ise zincirin sonsuz oluşu ile çelişir. Demek ki Ω nın bir maksimal elemanı vardır.

$iii.) \Rightarrow i.)$ S yarıgrubunun bir $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ artan zincirini alalım. iii.) den $\Omega = \{\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \dots\}$ ailesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu elemana I_i dersek, $I_i = I_{i+1} = \cdots$ olur yani S Noetheriandır.

Önerme 3.5. S Noetherian bir yarıgrup ve I, S nin bir ideali olmak üzere $(\sqrt{I})^n \subseteq I$ olacak şekilde pozitif bir n tam sayısı vardır.

İspat: S bir Noetherian olduğundan $\sqrt{I}$ sonlu üretilmiştir. $\sqrt{I} = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ olsun. Her $i = 1,2, \dots, m$ için $a_i \in \sqrt{I}$ olduğundan $a_i^{n_i} \in I$ olacak şekilde n_i pozitif tam sayıları vardır. $n = n_1 + \cdots + n_m$ olsun. $(\sqrt{I})^n$ nın bir üreteci olarak $n = k_1 + \cdots + k_m$ ve $k_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere $\{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}\}$ i alabiliriz. Fakat $k_1 + \cdots + k_m = n_1 + \cdots + n_m$ ise bir $i \in \{1, \dots, m\}$ için $k_i \geq n_i$ olmalıdır. Yani $a_i^{k_i} \in I$ ve üreteç sistemindeki her eleman $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \in I$ olur. $(\sqrt{I})^n$ nın bütün üreteçleri I da olduğundan $(\sqrt{I})^n \subseteq I$ dır.

Teorem 3.2. (Cohen Teoremi) [23] S nin Noetherian yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul her asal idealinin sonlu üretilmiş olmasıdır.

İspat: S nin her asal ideali sonlu üretilmiş olsun. Varsayalım ki S Noetherian olmasın. Zorn lemmasından sonlu üretilmeyenlerin bir maksimali vardır bu ideale P diyelim. P asal değildir. O halde $ab \in P$ olacak şekilde $a \notin P$ ve $b \notin P$ vardır. $P \subset \langle P, a \rangle$ dır dolayısıyla $\langle P, a \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ sonlu üretilmiştir. $J = (P : \langle a \rangle)$ olsun. $P \subset \langle b, P \rangle \subseteq J$ dir ve J de sonlu üretilmiştir. $x_1, \dots, x_s \in P$ ve $x_{s+1}, \dots, x_n \in \langle a \rangle - P$ olsun. Bu durumda $P = \langle x_1, \dots, x_s, Ja \rangle$ olur. Gerçekten de $y \in P$ olsun. $y \in \langle P, a \rangle = \langle x_1, \dots, x_s \rangle \cup \langle x_{s+1}, \dots, x_n \rangle$ yani $y \in \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ ya da $y \in \langle x_{s+1}, \dots, x_n \rangle \subseteq \langle a \rangle$ dir. $y \in \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ ise ispat tamam. $y \in \langle x_{s+1}, \dots, x_n \rangle$ olsun, $y = ra$ olacak şekilde bir r vardır. $r \in J$ yani $y \in Ja$ dir ve sonlu üretilmiştir. Yani $P = \langle x_1, \dots, x_s, Ja \rangle$ sonlu üretilmiştir. O halde S Noetheriandır.

Tanım 3.6. [23] $I \neq S$ ideali J ile K, S nin idealleri olmak üzere $I = J \cap K$ olması $I = J$ veya $I = K$ olmasını gerektiriyorsa I ya indirgenemez ideal denir.

Tanım 3.7. [23] Eğer Q, P-asalımsıysa ve $P^n \subseteq Q$ olacak şekilde n doğal sayısı varsa Q ya güçlü P-asalımsıdır denir

Tanım 3.8. [23] $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ normal ayrışımında her Q_i güçlü P_i-asalımsı ise normal ayrışıma güçlü normal ayrışım denir.

Örnek 2.7. S, X ve Y üzerinde $S = \{0\} \cup \{X^n Y^m : n, m \geq 0\}$ biçiminde tanımlı serbest bir yarıgrup olsun. Her $n \geq 1$ için $\langle X^2, XY \rangle = \langle X^2, XY, Y^n \rangle \cap \langle X \rangle$, $\langle X^2, XY \rangle$ idealinin güçlü normal ayrışımıdır.

Eğer A ideali güçlü normal ayrışıma sahipse $Ass(S/A) = \{P, S$ nin asal ideali: bir $x \in S$ için $P = (A : x)$ $\}$ dir. Noetherian yarıgruplarda her ideal radikalinin kuvvetini kapsadığından güçlü normal ayrışıma sahiptir.

Teorem 3.3. Noetherian yarıgrupta her has ideal, indirgenemez ideallerin bir sonlu kesişimi olarak yazılabilir.

İspat: Sonlu sayıda indirgenemez ideallerin kesişimi olarak yazılamayan has ideallerin kümesine Ω diyelim. $\Omega \neq \emptyset$ ise S Noetherian olduğundan Ω nın bir maksimal I elemanı vardır. $I \in \Omega$ olduğundan indirgenemez ideal değildir. Böylece $I = J \cap K$ ve $I \subset J$, $I \subset K$ olacak şekilde J ve K idealleri vardır. I, Ω nın maksimali olduğundan $J, K \notin \Omega$ ve böylece J, K idealleri indirgenemez ideallerin sonlu kesişimi olarak yazılabilir. $I = J \cap K$ olduğundan I ideali de indirgenemez ideallerin sonlu arakesiti olarak yazılabilir. Bu ise $I \in \Omega$ olmasıyla çelişir. O halde $\Omega = \emptyset$ dur.

Teorem 3.4. [23] S bir Noetherian yarıgrup olsun. İndirgenemez idealler asalımsıdır. Böylece Noetherian yarıgrupta her ideal güçlü normal ayrışıma sahiptir.

İspat: Q indirgenemez bir ideal olsun. $ab \in Q$ iken $a \notin Q$ ise $Q \subset (Q : b)$ dir. $(Q : b) \subset (Q : b^2) \subseteq (Q : b^3) \subseteq \cdots$ artan zincirini elde ederiz. S Noetherian olduğundan bu zincir sonludur ve böylece $(Q : b^n) = (Q : b^{n+1})$ olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı vardır. Şimdi $Q = (Q \cup \langle b^n \rangle) \cap (Q : b^n)$ olduğunu gösterelim. $Q \subseteq (Q \cup \langle b^n \rangle) \cap (Q : b^n)$ olduğu açıktır. Tersine bir $x \in (Q \cup \langle b^n \rangle) \cap (Q : b^n)$ olsun. $x \in (Q \cup \langle b^n \rangle)$ olduğundan $x = rb^n$, $(r \in S)$ alabiliriz. Aksi durumda $x \in Q$ olduğu açıktır. $x \in (Q : b^n)$ olduğundan $xb^n \in Q$ dur. Böylece $xb^n = rb^{2n} \in Q$ ve böylece $r \in (Q : b^{2n}) = (Q : b^n)$ bulunur. O halde $x = rb^n \in Q$ olur. Yani $(Q \cup \langle b^n \rangle) \cap (Q : b^n) = Q$ bulunur. Q indirgenemez olduğundan $Q = Q \cup \langle b^n \rangle$ ve böylece $b^n \in Q$ dur.

Teorem 3.5. (Krull Kesişim Teoremi) [23] S Noetherian bir yarıgrup ve J ile K, S nin idealleri olmak üzere,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K = J \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K$$

dır.

İspat: $J = S$ ise ispat açıktır. O halde J yi S nin has ideali kabul edelim. $J \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K \subseteq J$ olduğundan $J \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K$ da has idealdir. S, Noetherian olduğundan $J \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ normal ayrışımına sahiptir. Burada $\sqrt{Q_i} = P_i$, $(i = 1, \dots, n)$ dir. $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K \subseteq Q_i$, $(i = 1, \dots, n)$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Aksi halde bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K \nsubseteq Q_i$ olsaydı bir $a \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K) - Q_i$ için $aJ \subseteq (\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K)J = Q_1 \cap \dots \cap Q_n \subseteq Q_i$ bulunurdu. Bu ise çelişkidir. Çünkü Q_i bir P_i-asalımsı olduğundan $a \notin Q_i$ ve $aJ \subseteq Q_i$ den $J \subseteq P_i$ bulunurdu. Fakat $\sqrt{Q_i} = P_i$ ve Önerme 3.5. ten bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için ${P_i}^{n_0} \subseteq Q_i$ dır. Buradan $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n K \subseteq J^{n_0} \subseteq {P_i}^{n_0} \subseteq Q_i$ çelişkisi bulunurdu.

4. SONUÇ

Tezimiz üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde yarıgruplar için temel bilgiler verilerek yapısal kavrama sağlanmıştır. Ayrıca yarıgrup homomorfizmaları incelenmiş halkalarla benzer yönleri ve farklı yönleri sunulmuştur.

İkinci bölümde yarıgruplarda asal idealler ve asalımsı ayrışım verilmiş ve hangi özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir. Temel teoremler ve halkalarda geçerli olan kimi teoremlerin yarıgruplar için de geçerliliği sunulmuş, farklı yönleri irdelenmiştir. Sözde asalımsı idealler başlığı altında "quasi primary" olarak bilinen ideal yapısı incelenmiştir.

Yine ikinci bölümde, asal olmayan ideallerin birleşiminin asal olabileceğine dair verdiğimiz Örnek 2.3. tarafımızdan bulunmuştur.

[23] te Anderson'un belirttiği bir özellik olan asal idealler arasındaki bire bir eşleme, tarafımızdan Teorem 2.2. ve onun sonucu ile verilmiştir. Ayrıca bu özelliğin asalımsılar için de geçerli olduğu Teorem 2.11. ve onun sonucu ile ve sözde asalımsılar için de geçerli olduğu Teorem 2.1.7. ve onun sonucu ile gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde ise yarıgruplarda yerelleştirme ve Noetherianlık incelenmiş, halkalarda ve modüllerde geçerli olan teoremlerin yarıgruplarda da sağlandığı gözlemlenmiştir.

Üçüncü bölümde ise Anderson'un [23] te bahsettiği ve ispatsız geçtiği yerelleştirmedeki bire bir eşlemeler tarafımızdan Önerme 3.1. ile verilmiş ve bu özelliğin asalımsı idealler ile sözde asalımsı idealler için de geçerli olabileceği Önerme 3.2. ve Önerme 3.3. ile gösterilmiştir.

KAYNAKLAR/REFERENCES

[1]. Çallıalp F., Tekir Ü., Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul 2009.

[2]. Atiyah, M.F. and MacDonald I.G., Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[3]. Gilmer, R.W., Jr., Multiplicative Ideal Theory, Marcel Dekker, New York, 1972.

[4]. Kaplansky, I., Commutative Rings, revised edition, University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[5]. Larsen, M.D. and McCarthy P.j., Multiplicative Theory of Ideals, Academic Press, New York and London,1971.

[6]. Grillet P. A., Commutative Semigroups, Advances in Mathematics, Springer-Science+Business Media, B.V., 2001.

[7]. Satyanarayana M., Structure and ideal theory of commutative semigroups, Czechoslovak Math. J. 171-178, 28, 1978.

[8]. Higgins, P. M., Techniques of Semigroup Theory, Oxford University Press, New York, 1992.

[9]. Jespers E., Okninski J., Noetherian Semigroup Algebras, Springer, 2007.

[10]. Petrich, M., Introduction to Semigroups, ed. E. Kleinfeld, C. E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1973.

[11]. Petrich, M., Rings and Semigroups, Lecture Notes in Mathematics, 380, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[12]. Aubert. K. E. On the ideal theory of commutative semigrups, math. Scand., 39-54, 1, 1953.

[13]. Northcott, D. G. Ideal Theory, Cambridge University Press, London, 1953.

[14]. Anderson D.D. Abstract commutative ideal theory without chain condition , Alg. Uni., 131-145, 6, 1976.

[15]. Jurgensen H., Petrich M., Weinert H. J., Semigroups, Lecture Notes in Mathematics, 855, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[16]. Clifford A. H., Preston G. B., The Algebraic Theory of Semigroups, Volume II., American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1967.

[17]. Grillet P. A., Semigroups, An Introduction to the Structure Theory, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1995.

[18]. Ljapin E. S., Semigroups, Volume Three, Translations of Mathematical

Monographs, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1963.

[19]. Mannepalli V. L., Multiplication Semigroups, Semigroup forum, 310-327, New York, 2003.

[20]. Dilworth, R. P., Abstract commutative ideal theory, Pasific J. Math., 481-498, 12, 1962.

[21]. Schwarz Š., Prime ideals and maximal ideals in semigroups, Czechoslovak Mathematical Journal, No. 1, 72-79, Vol. 19, 1969.

[22]. Satyanarayana M., On commutative semigroups which are unions of a finite number of principal İdeals, Czechoslovak Mathematical Journal, No. 1, 61-68, Vol. 27, 1977.

[23]. Anderson, D. D., Johnson, E.W., Ideal Teory In Commutative Semigroups, Semigroup Forum, 127-158, New York, 2003.

[24]. Howie, J.M., An Introduction to Semigroup Theory, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1976.

[25]. Howie, J. M., Fundamentals of Semigroup Theory, Series ed. H. G. Dales, and P. M. Neumann, LMS Monographs New Seires, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[26]. Cain A. J., Nine Chapters on the Semigroup Art, Porto-Lisbon, 2014.

[27]. Grimble H. B., Prime Ideals in Semigroups, Master's Thesis, University of Tennessee, 1950.

[28]. Anderson, D. D., Multiplication ideals, multiplication rings, and the ring R(X), Canad. J. Math., 760-768, XXVIII, 1976.

[29]. Anderson, D. D., Some remarks on multiplication ideals, Math. Japon. 463-469, 25, 1980.

[30]. Anderson D. D. And D. F. Anderson, Some remarks on cancellation ideals, Math. Japon, 1984.

[31]. McCarthy, P. J., Principal elements of lattices of ideals, Proc. Amer. Math. Soc., 43-45,30,1971.

ÖZGEÇMİŞ

22 Eylül 1990 tarihinde Bursa’da doğdu. İlk ve orta öğretimini Atatürk İlköğretim Okulu’nda, lise eğitimini Bursa Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2009’da Marmara Üniversitesi Matematik bölümüne kayıt yaptırdı ve 2013’te mezun oldu. Aynı yıl Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Teorik Matematik programını kazandı.

Matematik dışında şiir, öykü, değini çalışmaları ve köşe yazarlığı yapmaktadır. Kırmızı Konfeti adlı bir şiir kitabı vardır.