



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



PSEUDO BH -CEBİRLERİ ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

Özlem KIRKGÖZ

Matematik Anabilim Dalı Adı

İzmir
2021

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

PSEUDO BH -CEBİRLERİ ÜZERİNE

ÖZLEM KIRKGÖZ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alev FIRAT

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Bölümü Yüksek Lisans Programı

İzmir
2021

Özlem KIRKGÖZ tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan
PSEUDO BH-CEBİRLERİ ÜZERİNE başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri
Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim
ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek
savunmaya değer bulunmuş ve tarihinde yapılan tez savunma sınavında
oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı :

Raportör Üye :

Üye :

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**PSEUDO BH-CEBİRLERİ ÜZERİNE**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

12/02/2021

Özlem KIRKGÖZ

ÖZET**PSEUDO BH -CEBİRLERİ**

KIRKGÖZ, Özlem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alev FIRAT

Şubat 2021, 47 sayfa

Bu tezde, pseudo BH -cebirlerinin tanım ve temel özellikleri, atomları, idealleri homomorfizmaları ve pseudo BH^* -cebrini incelenmiştir. Birinci bölümde, tez konusu tanıtılmış, konunun çalışılma amacı ve gelişme süreci özetlenmiştir. İkinci bölümde, J.B. Jun, E.H. Roh ve H.S. Kim in 1998 yılında yayınlanan ve J.B. Jun ve S.S. Ahn nın 2015 yılında yayınlanan makaleleri esas alınarak sonraki bölümlerin daha kolay anlaşılması için gerekli tanımlar, önermeler ve uyarılar verilmiştir.

Üçüncü bölümde J.B. Jun ve S.S. Ahn nın 2015 yılında yayınlanan makaleleri esas alınarak pseudo BH -cebirleri incelenmiştir. Bu bölümde pseudo BH -cebirlerinin özellikleri, altcebirleri, idealleri ve pseudo BH^* -cebrini konularına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, J.B. Jun ve S.S. Ahn nın 2015 yılında yayınlanan ve H.H. Abbass ve A.H. Nouri nin 2017 de yayınlanan makaleleri esas alınarak pseudo BH -ideal çeşitleri ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Beşinci bölümde, J.B. Jun ve S.S. Ahn nın 2015 yılında yayınlanan makaleleri esas alınarak pseudo BH -cebirlerinde atomlar tanıtılmıştır. Altıncı bölümde J.B. Jun ve S.S. Ahn nın 2015 yılında yayınlanan makaleleri esas alınarak pseudo BH -homomorfizma konusu ayrıntılarıyla işlenmiştir.

Anahtar sözcükler: BCH-Cebri, BH-Cebri, Pseudo BCH-Cebri, Pseudo BH-Cebri.

ABSTRACT**ON PSEUDO BH -ALGEBRAS**

KIRKGÖZ, Özlem

MSc. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Alev FIRAT

Şubat 2021, 47 pages

In this thesis, the definition and basic properties, atoms, ideals, homomorphisms of pseudo BH -algebras and pseudo BH^* -algebra are studied. In the first chapter, the thesis topic is introduced, the purpose of study and the development process of the subject is summarized. In the second part, necessary definitions, propositions and remarks are given to make the following sections easier to understand based on articles of J.B. Jun, E.H. Roh and H.S. Kim's published in 1998 and J.B. Jun and S.S. Ahn's published in 2015.

In the third chapter, the pseudo BH -algebras were analyzed based on articles of J.B. Jun and S.S. Ahn's articles published in 2015. In this section, properties of pseudo BH -algebras, subalgebras, ideals and pseudo BH^* -algebra are covered. In the fourth chapter, pseudo BH ideal types and their relationships were examined based on articles of J.B. Jun and S.S. Ahn's published in 2015 and H.H. Abbass and A.H. Nouri's articles published in 2017. In the fifth chapter, atoms of pseudo BH -algebras are introduced based on articles of J.B. Jun and S.S. Ahn's published in 2015. In the sixth chapter, the subject of pseudo BH -homomorphism is discussed in detail based on articles of J.B. Jun and S.S. Ahn's published in 2015.

Key Words: BCH -algebra, BH -algebra, Pseudo BCH -algebra, Pseudo BH -algebra.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca danışmanlığımı yürüten bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, tez konumu belirlememde bana yardımcı olan, gösterdiği ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Alev FIRAT'a büyük bir içtenlikle teşekkürü borç bilirim. Ayrıca tezimin biçim ve teknik açıdan düzenlenmesinde katkıda bulununan değerli arkadaşım Mahfuz KAYA'ya teşekkür ederim.

İZMİR

12/02/2021

Özlem KIRKGÖZ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇ KAPAK	ii
KABUL ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	2
3 PSEUDO BH-CEBİRLERİ	6
3.1 Pseudo BH-Cebirleri ve Özellikleri	6
3.2 Pseudo BH*-Cebirleri	10
4 PSEUDO BH-CEBRİNDE İDEAL ÇEŞİTLERİ VE İLİŞKİLERİ ..	15
5 PSEUDO BH-CEBRİNDE ATOM VE ÖZELLİKLERİ	28
6 PSEUDO BH-CEBRİNDE HOMOMORFİZMA	32
7 SONUÇ	44
KAYNAKLAR DİZİNİ	45
TEŞEKKÜR	46
ÖZGEÇMİŞ	47

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
-----------------	-----------------

\mathfrak{X}	BH -cebri
----------------	-------------

\mathcal{X}	Pseudo BH -cebri
---------------	--------------------

I	İdeal
-----	-------

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
--------------------	-----------------

$K(\mathcal{X})$	K - kısmı
------------------	-----------

$At(\mathcal{X})$	Atomların kümesi
-------------------	------------------

$Ker(f)$	f 'nin çekirdeği
----------	--------------------

1 GİRİŞ

1966 yılında Y.Imai ve K. Iseki, soyut cebirin iki sınıfı olan BCK -cebirleri ve BCI -cebirlerini tanımlayıp bu konular üzerine birçok çalışma yapmışlardır. 2001 yılında G. Georgescu ve A. Iorgulescu BCK -cebirlerinin bir genişlemesi olarak pseudo BCK -cebirlerini tanıttı ve 2008 yılında W.A. Dudek ve Y.B. Jun, BCI -cebirlerinin bir genişlemesi olan pseudo BCI -cebirlerini tanımlamışlardır. 1999 yılında J. Neggers ve H.S. Kim, BCK -cebirlerinin başka bir genişlemesi olan d -cebirleri kavramını tanımlayıp ve d -cebirleri ile BCK -cebirleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. 2009 yılında Y.B. Jun, H.S. Kim ve J. Neggers d -cebirlerinin bir genişlemesi olarak pseudo d -cebirlerini tanıtmışlardır. 2008 yılında A. Walendziak, 1983 yılında Q.P. Hu ve X. Li tarafından tanıtılan BCH -cebirlerini genişleterek pseudo BCH -cebirlerini tanımlamışlardır. 2015 yılında Y.B. Jun, S.S. Ahn, 1998 yılında Y.B. Jun, E.H. Roh ve H.S. Kim tarafından tanıtılan BH -cebrî kavramını genişleterek pseudo BH -cebrî kavramını tanıtmışlardır. Biz bu tezde BH -cebrî ve pseudo BH -cebrî üzerinde yapılan çalışmaları detaylandırarak, daha çok pseudo BH -cebirleri üzerinde duracağız. Pseudo BH -cebirlerinin yapısal özelliklerini inceleyerek bir pseudo BH -cebrinde bir pseudo ideal ile bir pseudo altecebrî arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Daha sonra farklı pseudo ideal çeşitleri ve aralarındaki ilişkileri araştıracağız. Son olarak, pseudo BH -cebrî üzerinde homomorfizma kavramını tanımlayarak ilgili özelliklerini inceleyeceğiz.

2 ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1. (Ahn and Jun 2015a) Bir $(X, \odot, 0)$ sistemi verilsin. Her $x, y, z \in X$ için

$$(BCH1) \quad x \odot x = 0,$$

$$(BCH2) \quad (x \odot y) \odot z = (x \odot z) \odot y,$$

$$(BCH3) \quad x \odot y = 0 \text{ ve } y \odot x = 0 \text{ ise } x = y$$

koşulları sağlanıyorsa $(X, \odot, 0)$ sistemine bir *BCH-cebri* denir.

Örnek 2.1. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	c	c
b	b	0	0	b
c	c	0	0	0

O zaman, $(X, \odot, 0)$ bir *BCH-cebri* oluşturur.

Tanım 2.2. (Ahn and Jun 2015a) Bir $(X, \odot, \bullet, 0)$ sistemi verilsin. Her $x, y, z \in X$ için

$$(pBCH1) \quad x \odot x = x \bullet x = 0,$$

$$(pBCH2) \quad (x \odot y) \bullet z = (x \bullet z) \odot y,$$

$$(pBCH3) \quad x \odot y = 0 \text{ ve } y \bullet x = 0 \text{ olduğunda } x = y$$

koşulları sağlanıyorsa $(X, \odot, \bullet, 0)$ sistemine bir *pseudo BCH-cebri* denir.

Örnek 2.2. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	a	c
a	a	0	0	0
b	b	0	0	b
c	c	0	a	0

\bullet	0	a	b	c
0	0	a	0	b
a	a	0	a	c
b	b	a	0	0
c	c	c	0	0

O zaman, $(X, \odot, \bullet, 0)$ sistemi bir pseudo BCH-cebri oluşturur.

Tanım 2.3. (Jun et al. 1998) Bir $(X, \odot, 0)$ sistemi verilsin. Her $x, y \in X$ için

(BH1) $x \odot x = 0$,

(BH2) $x \odot 0 = x$,

(BH3) $x \odot y = 0$ ve $y \odot x = 0$ olduğunda $x = y$

koşulları sağlanıyorsa $\mathfrak{X} = (X, \odot, 0)$ sistemine bir BH-cebri denir.

Tanım 2.4. (Jun et al. 1998) $\mathfrak{X} = (X, \odot, 0)$ bir BH-cebri olsun. \mathfrak{X} üzerinde bir ' \leq ' bağıntısı her $x, y \in X$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow x \odot y = 0$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.5. (Jun et al. 1998) $\mathfrak{X} = (X, \odot, 0)$ bir BH-cebri ve I , \mathfrak{X} 'in boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer her $x, y \in I$ için $x \odot y \in I$ oluyorsa I 'ya \mathfrak{X} 'in bir altcebri denir.

Tanım 2.6. (Jun et al. 1998) $\mathfrak{X} = (X, \odot, 0)$ bir BH-cebri ve I , \mathfrak{X} 'in boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $x, y \in X$ için

(i) $0 \in I$,

(ii) $x \odot y \in I$ ve $y \in I$ olduğunda $x \in I$

koşulları sağlanıyorsa I 'ya \mathfrak{X} 'in bir BH-ideali denir.

Örnek 2.3. $X := \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d
0	0	a	c	0	0
a	a	0	b	0	b
b	b	b	0	c	d
c	c	c	c	0	c
d	d	d	c	a	0

O zaman, $\mathfrak{X} = (X, \odot, 0)$ bir BH-cebri oluşturur. Fakat $b, c, d \in X$ için

$$(b \odot c) \odot d = c \neq a = (b \odot d) \odot c.$$

olduğundan \mathfrak{X} bir BCH-cebri değildir. Ayrıca $I =: \{0, a, b\}$, \mathfrak{X} 'in bir idealidir. Fakat $0, b \in I$ için

$$0 \odot b = c \notin I.$$

olduğundan I , \mathfrak{X} 'in bir altcebri değildir.

Tanım 2.7. (Ahn and Lee, 2010) $\mathfrak{X} = (X, \odot, 0)$ bir BH-cebri ve X 'in boş olmayan bir altkümesi A olsun. Her $x, y \in X$ için

(i) $0 \in A$,

(ii) $(x \odot y) \odot z \in A$ ve $y \in A$ olduğunda $x \odot z \in A$

koşulları sağlanıyorsa A kümesine \mathfrak{X} 'in bir güçlü ideali denir.

Örnek 2.4. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	b	b	b
a	a	0	a	0
b	b	b	0	b
c	c	b	c	0

O zaman, $\mathfrak{X} = (X, \odot, 0)$ bir BH-cebri ve $A := \{0, b\}$, \mathfrak{X} 'in bir güçlü ideali olur. Aynı zamanda A , \mathfrak{X} 'in bir altcebridir.

Tanım 2.8. (Roh and Kim, 1999) $\mathfrak{X} = (X, \odot, 0)$ bir BH-cebri olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(x \odot y) \odot x = 0$$

koşulu sağlanıyorsa \mathfrak{X} 'e bir BH*-cebri denir.

Örnek 2.5. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ikili işlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	b	0
b	b	0	0	0
c	c	b	a	0

O zaman, \mathfrak{X} bir BH*-cebri oluşturur.

3 PSEUDO BH-CEBİRLERİ

3.1 Pseudo BH-Cebirleri ve Özellikleri

Tanım 3.1. (Ahn and Jun 2015b) Bir $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ sistemi verilsin. Her $x, y \in X$ için

$$(pBH1) \quad x \odot x = x \bullet x = 0,$$

$$(pBH2) \quad x \odot 0 = x \bullet 0 = x,$$

$$(pBH3) \quad x \odot y = 0 \text{ ve } y \bullet x = 0 \text{ olduğunda } x = y \text{ dir}$$

koşulları sağlanıyorsa \mathcal{X} 'e bir pseudo BH-cebri denir.

Tanım 3.2. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun.

\mathcal{X} üzerinde bir ' \leq ' bağıntısı

$$x \leq y \Leftrightarrow x \odot y = 0 \Leftrightarrow x \bullet y = 0$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.1. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun.

Eğer her $x, y \in X$ için

$$x \odot y := x \bullet y$$

olduğunda \mathcal{X} bir BH-cebri oluşturur.

Örnek 3.1. $X := \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri

aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	0	0	a	b
b	b	b	0	0	c
c	c	d	0	0	b
d	d	c	b	a	0

\bullet	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	0	0	b	b
b	b	c	0	a	b
c	c	c	b	0	0
d	d	d	a	0	0

Burada $a, b, c \in X$ için

$$(a \odot b) \bullet c = c \neq 0 = (a \bullet c) \odot b$$

olduğundan $(X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BCH-cebri değildir. Diğer taraftan $b, c \in X$ için

$$b \odot c = 0, c \odot b = 0 \text{ fakat } b \neq c$$

olduğundan $(X, \odot, 0)$ bir BH-cebri değildir. Benzer şekilde, $c, d \in X$ için

$$c \bullet d = 0, d \bullet c = 0 \text{ fakat } d \neq c$$

olduğundan $(X, \bullet, 0)$ bir BH-cebri değildir. Fakat $\mathcal{X} = (X, \leq, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebridir.

Tanım 3.3. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer her $x, y \in I$ için

$$x \odot y, x \bullet y \in I$$

oluyorsa I 'ya \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri denir.

Tanım 3.4. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $x, y \in X$ için

$$(PI1) \ 0 \in I,$$

$$(PI2) \ x \odot y, x \bullet y \in I \text{ ve } y \in I \text{ olduğunda } x \in I \text{ olur}$$

koşulları sağlanıyorsa I 'ya \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali denir.

Örnek 3.2. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	a	c
a	a	0	0	0
b	b	0	0	b
c	c	0	a	0

\bullet	0	a	b	c
0	0	a	0	b
a	a	0	a	c
b	b	a	0	0
c	c	c	0	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri oluşturur. Ayrıca $J := \{0, a\}$ kümesi \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebridir. Fakat $a, b \in X$ için

$$b \odot a = 0 \in J \text{ ve } b \bullet a = a \in J \text{ olduğunda } b \notin J$$

olduğundan J , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali değildir.

Örnek 3.3. $X := \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d
0	0	a	0	0	0
a	a	0	a	0	0
b	b	b	0	c	0
c	c	b	a	0	d
d	d	b	0	c	0

\bullet	0	a	b	c	d
0	0	c	0	0	0
a	a	0	b	b	a
b	b	c	0	b	b
c	c	c	c	0	0
d	d	c	d	0	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri oluşturur. Ayrıca $I := \{0, a\}$ kümesi \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir. Fakat $0, a, c \in X$ için

$$0, a \in I \text{ ancak } 0 \bullet a = c \notin I$$

olduğundan I , \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri değildir.

Önerme 3.1. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olsun. O zaman, her $x, y \in X$ ve $x \in I$ için

$$y \leq x \Rightarrow y \in I$$

koşulu sağlanır.

İspat. I , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali ve her $x, y \in X$, $x \in I$ için

$$y \leq x$$

olsun. O zaman,

$$y \odot x = 0 \text{ ve } y \bullet x = 0$$

olur. (PI1) den $0 \in I$ olduğundan

$$y \odot x, y \bullet x \in I$$

bulunur. Kabulden $x \in I$ ve (PI2) den

$$y \in I$$

elde edilir.

Uyarı 3.2. $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, Önerme 3.1 in tersi doğru değildir. Buna bir örnek aşağıdaki Örnek 3.4 de verilmiştir.

Örnek 3.4. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın :

\odot	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	0	b
b	b	0	0	a
c	c	b	c	0

\bullet	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	b	a
b	b	a	0	0
c	c	c	0	0

$A := \{0, a, c\}$ kümesindeki her $x \in A$ için $y \leq x$ olduğunda $y \in A$ olur. Fakat $0, b, c \in X$ için

$$b \odot c = a, b \bullet c = 0 \in A \text{ ve } c \in A \text{ fakat } b \notin A.$$

olduğundan A kümesi \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali değildir.

Önerme 3.2. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve A , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olsun. Eğer B , A 'nın bir pseudo ideali ise B , \mathcal{X} 'in de bir pseudo ideali olur.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri ve A , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali ve B , A 'nın bir pseudo ideali olsun. O zaman, (PI1) den $0 \in B$ olur. Şimdi her $x, y \in X$ için

$$x \odot y, x \bullet y, y \in B$$

alalım. Eğer

$$x \in A$$

ise B , A 'nın bir pseudo ideali olduğundan $x \in B$ olur. Eğer

$$x \in X - A$$

ise

$$x \odot y, x \bullet y, y \in B \subseteq A$$

ve A , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olduğundan $x \in A$ olur. Bu durum $x \in X - A$ olmasıyla çeliştiğinden $x \in B$ olur. Dolayısıyla B , \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

3.2 Pseudo BH*-Cebirleri

Tanım 3.5. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(x \odot y) \bullet x = 0, (x \bullet y) \odot x = 0$$

koşulları sağlanıyorsa \mathcal{X} 'e bir pseudo BH*-cebri denir.

Önerme 3.3. $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, her $x \in X$ için

$$0 \odot x = 0, 0 \bullet x = 0$$

koşulları sağlanır.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, her $x, y \in X$ için

$$(x \odot y) \bullet x = 0, (x \bullet y) \odot x = 0$$

koşulları sağlanır. Burada $y = x$ alınırsa

$$(x * x) \bullet x = 0, (x \bullet x) \odot x = 0$$

ve (pBH1) den

$$0 \bullet x = 0, 0 \odot x = 0$$

elde edilir.

Örnek 3.5. $X := \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	c	a
b	b	0	0	d	b
c	c	a	0	0	0
d	d	d	d	0	0

\bullet	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	b	0	b
b	b	b	0	c	c
c	c	0	c	0	d
d	d	c	0	d	0

O zaman, $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebridir.

Önerme 3.4. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve J

\mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olsun. O zaman

(i) Her $x, y, z \in X$ ve $x, y \in J$ için $z \odot y \leq x \Rightarrow z \in J$,

(ii) Her $a, b, c \in X$ ve $a, b \in J$ için $c \bullet b \leq a \Rightarrow c \in J$

koşulları sağlanır.

İspat. (i) J , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali ve her $x, y, z \in X$ ve $x, y \in J$ için $z \odot y \leq x$ olduğu kabul edilsin. O zaman

$$(z \odot y) \bullet x = 0$$

olur. Sırasıyla (PI1) ve (PI2) den

$$(z \odot y) \bullet x = 0 \in J$$

ve

$$z \odot y \in J$$

bulunur. Benzer şekilde $y \in J$ olduğundan (PI2) den

$$z \in J$$

elde edilir.

(ii) J , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali ve her $a, b, c \in X$ ve $a, b \in J$ için $c \bullet b \leq a$ olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$(c \bullet b) \odot a = 0$$

olur. Sırasıyla (PI1) ve (PI2) den

$$(c \bullet b) \odot a = 0 \in J$$

ve

$$c \bullet b \in J$$

bulunur. Benzer şekilde $b \in J$ olduğundan ve (PI2) den

$$c \in J$$

elde edilir.

Örnek 3.6. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	0	0
b	b	b	0	b
c	c	0	a	0

\bullet	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	0	c
b	b	b	0	0
c	c	c	0	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve $J := \{0, a, c\}$, \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

Ayrıca J Önerme 3.4. (i) ve (ii) koşullarını sağlar.

Teorem 3.1. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri ve I , \mathcal{X} 'in boştan farklı bir altkümesi olsun. O zaman, I 'nin \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in I$ ve $z \in X$ için

$$z \odot x \leq y, z \bullet x \leq y \Rightarrow z \in I$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) I , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali ve her $x, y \in I$ ve $z \in X$ için

$$z \odot x \leq y, z \bullet x \leq y$$

olsun. O zaman, Önerme 3.1 den

$$z \odot x, z \bullet x \in I$$

bulunur. Buradan $x \in I$ olduğundan ve (PI2) den

$$z \in I$$

elde edilir.

(\Leftarrow) Her $x, y \in I$ ve $z \in X$ için

$$z \odot x \leq y, z \bullet x \leq y \Rightarrow z \in I$$

koşulu sağlansın. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olduğundan

$$0 \odot x \leq x \text{ ve } 0 \bullet x \leq x$$

olur ve kabulden $0 \in I$ elde edilir. Yani (PI1) sağlanır. Şimdi

$$x \odot y, x \bullet y \in I \text{ ve } y \in I$$

olsun. (pBH1) den

$$x \odot y \leq x \odot y \text{ ve } x \bullet y \leq x \bullet y$$

yazılabildiğinden ve yine kabulden

$$x \in I$$

olur. Böylece I , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olur.

Örnek 3.7. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri

aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	0	0	0
c	c	a	a	0

\bullet	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	b	0
b	b	a	0	a
c	c	0	b	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebridir. Ayrıca $I := \{0, c\}$, Teorem 3.1' in yeter şartını sağladığı için \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

4 PSEUDO BH-CEBRİNDE İDEAL ÇEŞİTLERİ VE İLİŞKİLERİ

Tanım 4.1. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I, X 'in boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$(PG0) \ 0 \in I,$$

$$(PGI1) \ (x \odot y) \bullet z, \ y \in I \text{ olduğunda } x \odot z \in I,$$

$$(PGI2) \ (x \bullet y) \odot z, \ y \in I \text{ olduğunda } x \bullet z \in I$$

koşulları sağlanıyorsa I 'ya \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali denir.

Örnek 4.1. $X := \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d	\bullet	0	a	b	c	d
0	0	b	a	b	b	0	0	b	c	b	b
a	a	0	a	0	0	a	a	0	a	b	b
b	b	b	0	0	0	b	b	0	0	b	b
c	c	b	c	0	b	c	c	b	c	0	0
d	d	0	a	b	0	d	d	b	d	0	0

Bu durumda $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve $I := \{0, b\}$, \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü idealidir.

Önerme 4.1. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I, \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali olsun. O zaman, I \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olur.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri ve I, \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali olsun. O zaman

(PGI0) dan $0 \in I$ olur. Şimdi

$$x * y, \ x \bullet y \in I \text{ ve } y \in I$$

olduğu kabul edilsin. (pBH2) den

$$x \odot y = (x \odot y) \bullet 0 \text{ ve } x \bullet y = (x \bullet y) \odot 0$$

yazılabilir. Buradan

$$(x \odot y) \bullet 0, (x \bullet y) \odot 0 \in I$$

olur. $y \in I$ olduğundan, (PGI1) ve (PGI2) den

$$(x \odot 0), (x \bullet 0) \in I$$

ve buradan $x \in I$ bulunur. Böylece I, \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

Örnek 4.2. \mathcal{X} , Örnek 4.1 deki pseudo BH-cebri olsun. O zaman, $I := \{0, b\}$ pseudo güçlü ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

Uyarı 4.1. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her pseudo ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali değildir.

Örnek 4.3. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	0	0
b	b	b	0	b
c	c	0	a	0

\bullet	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	0	c
b	b	b	0	0
c	c	c	0	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve $I := \{0, a, c\}$, \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

Fakat $a, b, c \in X$ için

$$(b \odot a) \bullet c = 0 \in I, a \in I \text{ fakat } b \odot c = b \notin I$$

olduğundan I, \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali değildir.

Uyarı 4.2. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her pseudo ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri değildir.

Örnek 4.4. \mathcal{X} , Örnek 3.3 deki gibi bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, $I := \{0, a\}$ \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir fakat $I := \{0, a\}$, \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri değildir.

Önerme 4.2. (Ahn and Jun [2015b]) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her pseudo ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebridir.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri ve I , \mathcal{X} 'in pseudo ideali olsun. O zaman, (PI1) den $0 \in I$ olur. Aynı zamanda \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olduğundan her $x, y \in X$ için

$$(x \odot y) \bullet x = 0, (x \bullet y) \odot x = 0$$

olur. $0 \in I$ olduğundan her $x, y \in I$ için

$$(x \odot y) \bullet x \in I \text{ ve } (x \bullet y) \odot x \in I$$

bulunur. Ayrıca $x \in I$ ve (PI2) den

$$x \odot y \in I \text{ ve } x \bullet y \in I$$

elde edilir. Böylece I , \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebridir.

Sonuç 4.1. (Ahn and Jun [2015b]) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her pseudo güçlü ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebridir.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olsun. Önerme 4.1. den her pseudo güçlü ideal bir pseudo ideal ve Önerme 4.2. den her pseudo ideal bir altcebir olduğundan her pseudo güçlü ideal bir pseudo altcebirdir.

Uyarı 4.3. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her pseudo altcebri \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali değildir.

Örnek 4.5. \mathcal{X} , Örnek 3.2 deki gibi bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, $J := \{0, a\}$ pseudo altcebri \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali değildir.

Önerme 4.3. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve A , \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri olsun. O zaman, A 'nın \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali olması için gerek ve yeter şart her $x, y, z \in X$, $x \in A$ için

$$y \odot z, y \bullet z \in X - A \Rightarrow (y \odot x) \bullet z, (y \bullet x) \odot z \in X - A$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) A , \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali ve her $x, y, z \in X$, $x \in A$ için

$$y \odot z, y \bullet z \in X - A$$

olduğu kabul edilsin. Eğer

$$(y \odot x) \bullet z \notin X - A$$

ise

$$(y \odot x) \bullet z \in A$$

olur. A , \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali ve $x \in A$ olduğundan

$$y \odot z \in A$$

bulunur. Fakat bu durum $y \odot z \in X - A$ kabulüyle çelişir. Bu yüzden

$$(y \odot x) \bullet z \in X - A$$

olmalıdır. Eğer

$$(y \bullet x) \odot z \notin X - A$$

ise

$$(y \bullet x) \odot z \in A$$

olur. A , \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali ve $x \in A$ olduğundan

$$y \bullet z \in A$$

bulunur ve yine bu durum kabulle çeliştiğinden

$$(y \bullet x) \odot z \in X - A$$

olmalıdır.

(\Leftarrow) Her $x, y, z \in X$, $x \in A$ için

$$y \odot z, y \bullet z \in X - A \text{ ise } (y \odot x) \bullet z, (y \bullet x) \odot z \in X - A$$

koşulu sağlansın. A , \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri olduğundan ve (pBH1) den $0 \in A$ olur. Şimdi A 'nın, \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü ideali olmadığı kabul edilsin. Yani her $x \in A$ için

$$(y \odot x) \bullet z, (y \bullet x) \odot z \in A \text{ olduğunda } y \odot z \notin A \text{ veya } y \bullet z \notin A$$

olsun. Eğer

$$y \odot z \notin A \text{ veya } y \bullet z \notin A$$

ise kabulden

$$(y \odot x) \bullet z \text{ veya } (y \bullet x) \odot z \in X - A$$

bulunur. Fakat bu durum $(y \odot x) \bullet z, (y \bullet x) \odot z \in A$ kabulüyle çelişir. Bu yüzden

$$y \odot z \in A \text{ ve } y \bullet z \in A$$

olmalıdır. Böylece A , \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü idealidir.

Sonuç 4.2. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve A , \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri olsun. O zaman, A 'nın \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$, $x \in A$ için

$$y \in X - A \Rightarrow y \odot x, y \bullet x \in X - A$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) A, \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali ve her $x, y \in X, x \in A$ için

$$y \in X - A$$

olduğu kabul edilsin. Eğer

$$y \odot x \notin X - A$$

ise

$$y \odot x \in A$$

olur. A, \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali ve $x \in A$ olduğundan

$$y \in A$$

bulunur. Fakat bu durum $y \in X - A$ kabulüyle çelişir. Bu yüzden

$$y \odot x \in X - A$$

olmalıdır. Benzer şekilde

$$y \bullet x \in X - A$$

elde edilir.

(\Leftarrow) Her $x, y \in X, x \in A$ için

$$y \in X - A \text{ ise } y \odot x, y \bullet x \in X - A$$

koşulu sağlansın. A, \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri olduğundan ve (pBH1) den $0 \in A$

olur. Şimdi A 'nın, \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olmadığı kabul edilsin. O halde her $x \in A$

için

$$y \odot x, y \bullet x \in A$$

olduğunda

$$y \notin A$$

olsun. O zaman, kabulden

$$y \odot x, y \bullet x \in X - A$$

olur. Fakat bu durum $y \odot x, y \bullet x \in A$ kabulüyle çelişir. Bu yüzden

$$y \in A$$

olmalıdır. Böylece A , \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

Tanım 4.2. (Abbass and Nouri 2017) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I

\mathcal{X} 'in boş olmayan bir altkümesi olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(i) $0 \in I$,

(ii) $(x \odot z) \bullet (y \odot z), y \in I \Rightarrow x \in I$,

(iii) $(x \bullet z) \odot (y \bullet z), y \in I \Rightarrow x \in I$

koşulları sağlanıyorsa I 'ya $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ 'in bir p -ideali denir.

Örnek 4.6. $X := \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri

aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	0	0	c	c
b	b	0	0	c	d
c	c	c	d	0	a
d	d	c	c	b	0

\bullet	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	0	a	d	d
b	b	b	0	c	d
c	c	d	c	0	0
d	d	d	d	0	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve $I := \{0, a, b\}$, \mathcal{X} 'in bir p -idealidir.

Önerme 4.4. (Abbass and Nouri, 2017) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her p -ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in bir p -ideali olsun. Tanım 4.2(i) den $0 \in I$ olur. Her $x, y \in X$ için

$$x \odot y, x \bullet y \in I \text{ ve } y \in I$$

olduğu kabul edilsin. O zaman, (pBH2) den

$$x \odot y = (x \bullet 0) \odot (y \bullet 0)$$

eşitliği yazılır ve kabulden

$$(x \bullet 0) \odot (y \bullet 0) \in I \text{ ve } y \in I$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Tanım 4.2 (iii) den $x \in I$ olur.

Benzer şekilde; (pBH2) den

$$x \bullet y = (x \odot 0) \bullet (y \odot 0)$$

eşitliği yazılır ve kabulden

$$(x \odot 0) \bullet (y \odot 0) \in I \text{ ve } y \in I$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Tanım 4.2 (ii) den $x \in I$ yani I , \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

Sonuç 4.3. $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her p -ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebridir.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olsun. Önerme 4.4. den her p -ideal bir pseudo ideal ve Önerme 4.2. den her pseudo ideal bir altcebir olduğundan her p -ideal bir pseudo altcebirdir.

Tanım 4.3. (Abbass and Nouri [2017]) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in boş olmayan bir altkümesi olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$(i) 0 \in I,$$

$$(ii) x \odot (y \bullet z), y \in I \Rightarrow x \odot z \in I,$$

$$(iii) x \bullet (y \odot z), y \in I \Rightarrow x \bullet z \in I$$

koşulları sağlanıyorsa I 'ya \mathcal{X} 'in bir q -ideali denir.

Örnek 4.7. $X := \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d
0	0	b	b	b	b
a	a	0	d	0	0
b	b	b	0	0	0
c	c	b	c	0	b
d	d	0	a	b	0

\bullet	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	c	b	b
b	b	0	0	b	b
c	c	b	c	0	0
d	d	b	d	0	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve $I := \{0, b\}$, \mathcal{X} 'in bir q -idealidir.

Önerme 4.5. (Abbass and Nouri [2017]) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her q -ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in bir q -ideali olsun. Tanım 4.3(i) den $0 \in I$ olur. Her $x, y \in X$ için

$$x \odot y, x \bullet y \in I \text{ ve } y \in I$$

olduğu kabul edilsin. O zaman, (pBH2) den

$$x \odot y = x \odot (y \bullet 0) \text{ ve } x \bullet y = x \bullet (y \odot 0)$$

eşitliği yazılır ve kabulden

$$x \odot (y \bullet 0), x \bullet (y \odot 0) \in I \text{ ve } y \in I$$

bulunur. Tanım 4.3(ii) ve (iii) den

$$(x \odot 0), (x \bullet 0) \in I, y \in I$$

ve (pBH2) den $x \in I$ elde edilir. Sonuç olarak I , \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

Önerme 4.6. (Abbass and Nouri 2017) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her q -ideali \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebridir.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in bir q -ideali olsun. Tanım 4.3(i) den $0 \in I$ olur. Şimdi $x, y \in I$ alalım. O zaman, sırasıyla (pBH1) ve (pBH2) den

$$x = x \odot 0 = x \odot (y \bullet y) \in I$$

bulunur. I bir q -ideal olduğundan $x \odot y \in I$ elde edilir. Benzer şekilde

$$x = x \bullet 0 = x \bullet (y \odot y) \in I$$

bulunur. I bir q -ideal olduğundan $x \bullet y \in I$ elde edilir. Böylece I , \mathcal{X} 'in altcebridir.

Tanım 4.4. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olsun. Eğer her $x \in I$ için

$$0 \odot x, 0 \bullet x \in I$$

ise I 'ya \mathcal{X} 'in bir kapalı ideali denir.

Önerme 4.7. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her pseudo ideali kapalıdır.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri ve I , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olsun. O zaman, (PI1) den $0 \in I$ ve her $x, y \in X$ ve $x \in I$ için

$$(y \odot x) \bullet y = 0, (y \bullet x) \odot y = 0$$

yazılabilir. Eğer $y = 0$ alınırsa

$$(0 \odot x) \bullet 0 = 0, (0 \bullet x) \odot 0 = 0$$

ve (pBH2) den

$$0 \odot x = 0, 0 \bullet x = 0$$

bulunur. Böylece

$$0 \odot x \in I, 0 \bullet x \in I$$

elde edilir.

Sonuç 4.4. $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her pseudo güçlü ideali kapalıdır.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, Önerme 4.1 den her pseudo güçlü ideal bir pseudo ideal ve Önerme 4.7 den her pseudo ideal kapalı olduğundan her pseudo güçlü ideal kapalıdır.

Sonuç 4.5. $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her p -ideali kapalıdır.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, Önerme 4.4 den her p -ideal bir pseudo ideal ve Önerme 4.7 den her pseudo ideal kapalı olduğundan her p -ideal kapalıdır.

Sonuç 4.6. $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her q -ideali kapalıdır.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, Önerme 4.5 den her q -ideal bir pseudo ideal ve Önerme 4.7 den den her pseudo ideal kapalı olduğundan her q -ideal kapalıdır.

Önerme 4.8. (Abbass and Nouri, 2017) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, \mathcal{X} 'in her kapalı güçlü ideali bir pseudo altcebirdir.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in bir kapalı güçlü ideali olsun. O zaman, her $x, y \in I$ için

$$0 \bullet y \in I, x \in I$$

ve (pBH1) den

$$(x \odot x) \bullet y \in I, x \in I$$

yazılabilir. Diğer taraftan (PGI1) den

$$x \odot y \in I$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$0 \odot y \in I, x \in I$$

ve (pBH1) den

$$(x \bullet x) \odot y \in I, x \in I$$

yazılabilir. Diğer taraftan (PGI1) den

$$x \bullet y \in I$$

elde edilir. Sonuç olarak I , \mathcal{X} 'in bir altcebridir.

Önerme 4.9. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve I , \mathcal{X} 'in bir alt kümesi olsun. O zaman, her $x, y, z \in X$ için

$$(i) 0 \in I,$$

$$(ii) x \odot z, x \bullet z, y \odot z, y \bullet z \in I \text{ ve } z \in I \text{ olduğunda } x \odot y, x \bullet y \in I$$

koşulları sağlanıyorsa I , \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebri ve kapalı ideali olur.

İspat. I , \mathcal{X} 'in bir altkümesi ve her $x, y, z \in X$ için (i), (ii) koşulları sağlansın. Şimdi $x, y \in I$ alınsın. O zaman, (pBH2) den

$$x = x \odot 0 = x \bullet 0 \text{ ve } y = y \odot 0 = y \bullet 0$$

yazılır. Buradan

$$x \odot 0, x \bullet 0, y \odot 0, y \bullet 0 \in I$$

bulunur. Ayrıca (i) ve (ii) koşullarından

$$x \odot y, x \bullet y \in I$$

elde edilir. Böylece I , \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebridir. Şimdi

$$x \odot y, x \bullet y, y \in I$$

alalım. (i) koşulundan ve I bir pseudo altcebir olduğundan

$$0 \odot 0, 0 \bullet 0, y \odot 0, y \bullet 0 \in I \text{ ve } 0 \in I$$

olur. O zaman, (ii) koşulundan

$$0 \odot y, 0 \bullet y \in I$$

bulunur. Böylece I kapalıdır. I bir pseudo altcebir ve kapalı olduğundan

$$x \odot y, x \bullet y, 0 \odot y, 0 \bullet y, y \in I$$

yazılabilir. Ayrıca (ii) koşulundan

$$x \odot 0 = x \bullet 0 = x \in I$$

elde edilir. Dolayısıyla I , \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

5 PSEUDO BH-CEBRİNDE ATOM VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 5.1. (Ahn and Jun 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman

$$K(\mathcal{X}) := \{x \in X \mid 0 \leq x\}$$

şeklinde tanımlıdır ve bu kümeye \mathcal{X} 'in K -kısımı denir.

Uyarı 5.1. Eğer $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH*-cebri ise $K(\mathcal{X}) = X$ olur.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, Önerme 3.3 den her $x, y \in X$ için

$$0 \odot x = 0 = 0 \bullet x$$

olduğundan $K(\mathcal{X}) = X$ elde edilir.

Örnek 5.1. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	b	0
a	a	0	0	c
b	b	0	0	a
c	c	a	b	0

\bullet	0	a	b	c
0	0	0	b	0
a	a	0	b	0
b	b	a	0	c
c	c	0	a	0

\mathcal{X} bir pseudo BH-cebri ve $K(\mathcal{X}) := \{0, a, c\}$ olur. Burada $K(\mathcal{X})$, \mathcal{X} 'in bir pseudo altcebridir. Fakat $a, c \in K(\mathcal{X})$ için

$$b \odot c = a, b \bullet c = c \in K(\mathcal{X}) \text{ ama } b \notin K(\mathcal{X})$$

olduğundan $K(\mathcal{X})$, \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali değildir.

Örnek 5.2. $X := \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c
0	0	0	0	c
a	a	0	c	c
b	b	a	0	0
c	c	b	0	0

\bullet	0	a	b	c
0	0	0	0	b
a	a	0	c	0
b	b	a	0	b
c	c	0	c	0

\mathcal{X} bir pseudo BH-cebridir. Aynı zamanda $K(\mathcal{X}) = \{0, a, b\}$ olur. Fakat $a, b \in X$ için

$$a \odot b = c, a \bullet b = c \notin K(\mathcal{X})$$

olduğundan $K(\mathcal{X})$, \mathcal{X} 'in bir pseudo eltcebri değildir.

Tanım 5.2. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun.

Her $x \in X$ için

$$x \leq w \Rightarrow x = w$$

koşulunu sağlayan X 'in bir w elemanına \mathcal{X} 'in bir pseudo atomu denir.

Sonuç 5.1. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. 0

zaman 0 , \mathcal{X} 'in bir pseudo atomudur.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ için $x \leq 0$ olsun. 0 zaman,

$$x \odot 0 = 0 \text{ ve } x \bullet 0 = 0$$

olur. Aynı zamanda (pBH2) den

$$x \odot 0 = x \text{ ve } x \bullet 0 = x$$

olduğundan $x = 0$ bulunur. Böylece 0 , \mathcal{X} 'in bir pseudo atomudur.

Uyarı 5.2. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman \mathcal{X} 'in tüm atomlarının kümesi $At(\mathcal{X})$ şeklinde gösterilir.

Önerme 5.1. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri olsun.

Eğer her $x, y \in X$ için

$$y \odot (y \bullet (w \odot x)) = w \odot x$$

koşulunu sağlayan X 'in bir w elemanı varsa bu w elemanına \mathcal{X} 'in bir pseudo atomu denir.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH cebri olsun. Her $x, y \in X$ için

$$y \odot (y \bullet (w \odot x)) = w \odot x \text{ ve } y \leq w$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} y &= y \odot 0 \\ &= y \odot (y \bullet w) \\ &= y \odot (y \bullet (w \odot 0)) \\ &= w \odot 0 \\ &= w \end{aligned}$$

bulunur. Böylece w , \mathcal{X} 'in bir pseudo atomudur.

Örnek 5.3. $X := \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d
0	0	0	b	0	0
a	a	0	b	a	d
b	b	b	0	b	a
c	c	c	b	0	0
d	d	d	b	0	0

\bullet	0	a	b	c	d
0	0	0	b	0	0
a	a	0	b	0	0
b	b	a	0	c	0
c	c	0	b	0	a
d	d	0	b	0	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve $At(\mathcal{X}) := \{0, b\}$ olduğu görülür.

Uyarı 5.3. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri olsun. O zaman, $At(\mathcal{X}) \cap K(\mathcal{X}) = \{0\}$ olur.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH-cebri ve $x \in At(\mathcal{X}) \cap K(\mathcal{X})$ olsun. O zaman,

$$x \in At(\mathcal{X}) \text{ ve } x \in K(\mathcal{X})$$

olur. Buradan $x \in K(\mathcal{X})$ ise

$$0 \leq x$$

sağlanır. Aynı zamanda $x \in At(\mathcal{X})$ olduğundan

$$x = 0$$

bulunur.

Sonuç 5.2. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri ise $At(\mathcal{X}) = \{0\}$ olur.

İspat. \mathcal{X} bir pseudo BH*-cebri olsun. O zaman, Uyarı 5.1 den $K(\mathcal{X}) = X$ olduğundan $At(\mathcal{X}) = \{0\}$ bulunur.

6 PSEUDO BH-CEBRİNDE HOMOMORFİZMA

Tanım 6.1. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$ ve $\mathcal{Y} = (Y, \odot_2, \bullet_2, 0)$ birer pseudo BH-cebri olsunlar. Eğer her $x, y \in X$ için

$$f(x \odot_1 y) = f(x) \odot_2 f(y)$$

ve

$$f(x \bullet_1 y) = f(x) \bullet_2 f(y)$$

koşulları sağlanıyorsa $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ dönüşümüne bir pseudo BH-cebri homomorfizması denir.

Önerme 6.1. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$ ve $\mathcal{Y} = (Y, \odot_2, \bullet_2, 0)$ birer pseudo BH-cebri olsunlar. Eğer $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir pseudo BH-cebri homomorfizması ise $f(0_{\mathcal{X}}) = 0_{\mathcal{Y}}$ koşulu sağlanır.

İspat. $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir pseudo BH-cebri homomorfizması olsun. O zaman, (pBH1) den

$$f(0_{\mathcal{X}}) = f(0_{\mathcal{X}} \odot_1 0_{\mathcal{X}})$$

yazılabilir. Buradan

$$f(0_{\mathcal{X}}) = f(0_{\mathcal{X}} \odot_1 0_{\mathcal{X}}) = f(0_{\mathcal{X}}) \odot_2 f(0_{\mathcal{X}})$$

bulunur. Böylece (pBH2) den

$$f(0_{\mathcal{X}}) = 0_{\mathcal{Y}}$$

elde edilir.

Örnek 6.1. $\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebri ve $I : x \rightarrow x$ birim dönüşümü ve $0 : x \rightarrow 0$ sıfır dönüşümü aşikar pseudo BH-cebri homomorfizması örnekleridir. Çünkü sırasıyla her $x, y \in X$ için

$$I(x \odot x) = I(0) = 0 = x \odot x = I(x) \odot I(x)$$

$$I(x \bullet x) = I(0) = 0 = x \bullet x = I(x) \bullet I(x)$$

ve

$$0(x \odot y) = 0 = 0 \odot 0 = 0(x) \odot 0(x)$$

$$0(x \bullet y) = 0 = 0 \bullet 0 = 0(x) \bullet 0(x)$$

olduğu görülür.

Örnek 6.2. $X := \{0, a, b, c, d, e\}$ olsun. X kümesi üzerinde " \odot " ve " \bullet " ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

\odot	0	a	b	c	d	e
0	0	0	b	c	0	d
a	a	0	b	c	0	e
b	b	b	0	c	b	b
c	c	c	b	0	c	c
d	d	0	b	c	0	a
e	e	d	b	c	a	0

\bullet	0	a	b	c	d	e
0	0	0	b	c	e	a
a	a	0	b	c	d	0
b	b	b	0	c	b	b
c	c	c	b	0	c	c
d	d	a	b	c	0	e
e	e	0	b	c	d	0

$\mathcal{X} = (X, \odot, \bullet, 0)$ bir pseudo BH-cebridir. O zaman,

$$f: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

$$0 \longmapsto 0$$

$$a \longmapsto 0$$

$$b \longmapsto b$$

$$c \longmapsto c$$

$$d \longmapsto 0$$

$$e \longmapsto 0$$

şeklinde tanımlı f dönüşümü \mathcal{X} üzerinde bir pseudo BH-cebri homomorfizmasıdır.

Teorem 6.1. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$ ve $\mathcal{Y} = (X, \odot_2, \bullet_2, 0)$ birer pseudo BH cebri ve $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir pseudo BH-cebri homomorfizması olsun. Eğer B , \mathcal{Y} 'nin bir pseudo güçlü ideali ise o zaman, $f^{-1}(B)$ \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü idealidir.

İspat. \mathcal{X} ve \mathcal{Y} birer pseudo BH cebri ve B , \mathcal{Y} 'nin bir pseudo güçlü ideali olsun. O zaman (PGI0) dan $0_{\mathcal{Y}} \in B$ ve f bir pseudo BH-cebri homomorfizması olduğundan Önerme 6.1 den $f(0_{\mathcal{X}}) = 0_{\mathcal{Y}} \in B$ ve buradan $0_{\mathcal{X}} \in f^{-1}(B)$ bulunur. Şimdi $x, y, z \in X$ için

$$(x \odot_1 y) \bullet_1 z, (x \bullet_1 y) \odot_1 z, y \in f^{-1}(B)$$

olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$f((x \odot_1 y) \bullet_1 z), f((x \bullet_1 y) \odot_1 z), f(y) \in B$$

bulunur. Ayrıca f bir pseudo BH-cebri homomorfizması olduğundan

$$(f(x) \odot_2 f(y)) \bullet_2 f(z), (f(x) \bullet_2 f(y)) \odot_2 f(z), f(y) \in B$$

olur. Diğer taraftan B , \mathcal{Y} 'nin bir pseudo güçlü ideali olduğundan

$$f(x) \odot_2 f(z), f(x) \bullet_2 f(z), f(y) \in B$$

bulunur. Ayrıca f bir pseudo BH-cebri homomorfizması olduğundan

$$f(x \odot_1 z), f(x \bullet_1 z) \in B$$

olur ve buradan

$$x \odot_1 z \in f^{-1}(B), x \bullet_1 z \in f^{-1}(B)$$

elde edilir. Dolayısıyla $f^{-1}(B)$, \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü idealidir.

Teorem 6.2. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$ ve $\mathcal{Y} = (X, \odot_2, \bullet_2, 0)$ birer pseudo BH cebri ve $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir pseudo BH-cebri homomorfizması olsun. O zaman aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) B , \mathcal{Y} 'nin bir pseudo ideali ise o zaman, $f^{-1}(B)$ \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

(ii) f örten ve I , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali ise o zaman, $f(I)$ \mathcal{Y} 'nin bir pseudo idealidir.

İspat. (i) B , \mathcal{Y} 'nin bir pseudo ideali olsun. O zaman, $0_{\mathcal{Y}} \in B$ ve Önerme 6.1 den $f(0_{\mathcal{X}}) = 0_{\mathcal{Y}} \in B$ ve buradan $0_{\mathcal{X}} \in f^{-1}(B)$ bulunur. Şimdi $x, y \in X$ için

$$x \odot_1 y, x \bullet_1 y \in f^{-1}(B) \text{ ve } y \in f^{-1}(B)$$

olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$f(x \odot_1 y), f(x \bullet_1 y) \in B \text{ ve } f(y) \in B$$

bulunur. Ayrıca f bir pseudo BH-cebri homomorfizması olduğundan

$$f(x) \odot_2 f(y), f(x) \bullet_2 f(y), f(y) \in B$$

olur. B , \mathcal{Y} nin pseudo ideali olduğundan $f(x) \in B$ ve buradan $x \in f^{-1}(B)$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(B)$, \mathcal{X} 'in bir pseudo idealidir.

(ii) f örten bir dönüşüm ve I , \mathcal{X} 'in bir pseudo ideali olsun. O zaman, (PI1) den $0_{\mathcal{X}} \in I$ ve buradan

$$f(0_{\mathcal{X}}) \in f(I)$$

olur. Ayrıca Önerme 6.1 den

$$f(0_{\mathcal{X}}) = 0_{\mathcal{Y}}$$

olduğundan

$$0_{\mathcal{Y}} \in f(I)$$

bulunur. Şimdi $x, y \in Y$ için

$$x \odot_1 y, x \bullet_1 y \in f(I) \text{ ve } y \in f(I)$$

olduğu kabul edilsin. Burada $y \in f(I)$ olduğundan $y = f(a)$ olacak şekilde bir $a \in I$ vardır. Ayrıca $x \in Y$ ve f örten olduğundan $x = f(c)$ olacak şekilde bir $c \in X$ vardır.

O zaman,

$$x \odot_1 y = f(c) \odot_2 f(a)$$

$$x \bullet_1 y = f(c) \bullet_2 f(a)$$

yazılabilir ve f bir homomorfizma olduğundan

$$x \odot_1 y = f(c) \odot_2 f(a) = f(c \odot_1 a)$$

$$x \bullet_1 y = f(c) \bullet_2 f(a) = f(c \bullet_1 a)$$

olur ve $x \odot_1 y, x \bullet_1 y \in f(I)$ olduğundan

$$f(c \odot_1 a) \in f(I)$$

$$f(c \bullet_1 a) \in f(I)$$

bulunur. Buradan

$$c \odot_1 a, c \bullet_1 a \in I$$

elde edilir. Ayrıca $a \in I$ ve I bir pseudo ideal olduğundan $c \in I$ olur. Diğer taraftan $x = f(c)$ ve $c \in I$ olduğundan $x \in f(I)$ olduğu görülür. Böylece $f(I)$, \mathcal{Y} 'nin bir pseudo idealidir.

Önerme 6.2. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$ ve $\mathcal{Y} = (X, \odot_2, \bullet_2, 0)$ birer pseudo BH- cebri ve $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ dönüşümü bir pseudo BH-cebri homomorfizması olsun. O zaman,

$$\text{Ker}(f) := \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

kümesi \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü idealidir.

İspat. Önerme 6.1 den $f(0_{\mathcal{X}}) = 0_{\mathcal{Y}}$ olduğundan $0_{\mathcal{X}} \in \text{Ker}(f)$ olur. Şimdi her $x, y, z \in \text{Ker}(f)$ için

$$(x \odot_1 y) \bullet_1 z, (x \bullet_1 y) \odot_1 z \in \text{Ker}(f) \text{ ve } y \in \text{Ker}(f)$$

olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$f((x \odot_1 y) \bullet_1 z) = 0, f((x \bullet_1 y) \odot_1 z) = 0 \text{ ve } f(y) = 0$$

bulunur. Ayrıca f bir pseudo BH-cebri homomorfizma olduğundan

$$(f(x) \odot_2 f(y)) \bullet_2 f(z) = 0, (f(x) \bullet_2 f(y)) \odot_2 f(z) = 0 \text{ ve } f(y) = 0$$

olur. Buradan

$$(f(x) \odot_2 0) \bullet_2 f(z) = 0 \text{ ve } (f(x) \bullet_2 0) \odot_2 f(z) = 0$$

ve (pBH2) den

$$f(x) \bullet_2 f(z) = 0 \text{ ve } f(x) \odot_2 f(z) = 0$$

elde edilir. Ayrıca f bir pseudo BH homomorfizma olduğundan

$$f(x \bullet_1 z) = 0 \text{ ve } f(x \odot_1 z) = 0$$

bulunur. Buradan

$$x \bullet_1 z, x \odot_1 z \in \text{Ker}(f)$$

olur. Böylece $\text{Ker}(f)$, \mathcal{X} 'in bir pseudo güçlü idealidir.

Önerme 6.3. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$ ve $\mathcal{Y} = (Y, \odot_2, \bullet_2, 0)$ birer pseudo BH cebri ve $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir pseudo BH homomorfizması olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

$$x \odot_1 y, y \bullet_1 x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = f(y)$$

koşulu sağlanır.

İspat. (\Rightarrow) f bir pseudo BH-cebri homomorfizması ve $x \odot_1 y, y \bullet_1 x \in \text{Ker}(f)$ olsun.

O zaman,

$$f(x \odot_1 y) = 0_{\mathcal{Y}} \text{ ve } f(y \bullet_1 x) = 0_{\mathcal{Y}}$$

olur. Ayrıca f bir pseudo BH homomorfizması olduğundan

$$f(x) \odot_2 f(y) = 0_{\mathcal{Y}} \text{ ve } f(y) \bullet_2 f(x) = 0_{\mathcal{Y}}$$

bulunur. Böylece (pBH3) den $f(x) = f(y)$ elde edilir.

(\Leftarrow) $x, y \in X$ için $f(x) = f(y)$ olduğu kabul edilsin. O zaman, (pBH1) den

$$f(x) \odot_2 f(y) = f(x \odot_1 y) = 0_{\mathcal{Y}}$$

ve

$$f(y) \bullet_2 f(x) = f(y \bullet_1 x) = 0_{\mathcal{Y}}$$

bulunur. Buradan

$$x \odot_1 y, y \bullet_1 x \in \text{Ker}(f)$$

elde edilir.

Yardımcı Özellik 6.1. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$ ve $\mathcal{Y} = (Y, \odot_2, \bullet_2, 0)$ birer pseudo BH cebri ve $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir pseudo BH-cebri homomorfizması olsun. O zaman, f nin birebir olması için gerek ve yeter şart $\text{Ker} f = \{0_{\mathcal{X}}\}$ olmasıdır.

İspat. (\Rightarrow) f nin birebir ve $x \in \text{Ker}(f)$ olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$f(x) = 0_{\mathcal{Y}}$$

olur. Önerme 6.1 den

$$f(0_{\mathcal{X}}) = 0_{\mathcal{Y}}$$

olduğundan

$$f(x) = f(0_{\mathcal{X}})$$

bulunur. f birebir olduğundan

$$x = 0_{\mathcal{X}}$$

olduğu görülür. Böylece $\text{Ker } f = \{0_{\mathcal{X}}\}$ elde edilir.

(\Leftarrow) $\text{Ker}(f) = 0_{\mathcal{Y}}$ ve $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olduğu kabul edilsin. O zaman (pBH1) den

$$f(x_1) \odot_2 f(x_2) = 0_{\mathcal{Y}} \text{ ve } f(x_2) \bullet_2 f(x_1) = 0_{\mathcal{Y}}$$

olur. f bir psedo BH homomorfizma olduğundan

$$f(x_1 \odot_1 x_2) = 0_{\mathcal{Y}} \text{ ve } f(x_2 \bullet_1 x_1) = 0_{\mathcal{Y}}$$

bulunur. Buradan

$$x_1 \odot_1 x_2 \in \text{Ker}(f) = 0_{\mathcal{Y}} \text{ ve } x_2 \bullet_1 x_1 \in \text{Ker}(f) = 0_{\mathcal{Y}}$$

bulunur ve (pBH3) den

$$x_1 = x_2$$

elde edilir. Böylece f birebirdir.

Teorem 6.3. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$, $\mathcal{Y} = (X, \odot_2, \bullet_2, 0)$ ve $\mathcal{Z} = (X, \odot_3, \bullet_3, 0)$ birer pseudo BH-cebri ve $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ örten bir pseudo BH-cebri homomorfizması ve $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ bir pseudo BH-cebri homomorfizması olsun. Eğer $\text{Ker } h \subseteq \text{Ker } g$ ise $f \circ h = g$ olacak şekilde bir tek $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ pseudo BH-cebri homomorfizması vardır.

İspat. $\text{Ker } h \subseteq \text{Ker } g$ olduğu kabul edilsin. O zaman, h örten olduğundan her $y \in Y$ için $y = h(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Bu $x \in X$ için $g(x) := z$ olsun. Şimdi her $y \in Y$ için

$$f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$$

$$y \mapsto f(y) = z$$

ile tanımlı f bağıntısının bir dönüşüm ve $f \circ h = g$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. O zaman, her $y_1, y_2 \in Y$ için $y_1 = y_2$ olduğu kabul edilsin. Buradan h örten olduğundan,

$$y_1 = h(x_1), y_2 = h(x_2) \text{ olacak şekilde } x_1, x_2 \in X$$

vardır. O zaman, $h(x_1) = h(x_2)$ ve (pBH2) den

$$h(x_1) \odot_2 h(x_2) = 0 \text{ ve } h(x_2) \bullet_2 h(x_1) = 0$$

bulunur. h bir homomorfizma olduğundan

$$h(x_1 \odot_1 x_2) = 0 \text{ ve } h(x_2 \bullet_1 x_1) = 0$$

olur ve buradan

$$x_1 \odot_1 x_2 \in \text{Ker}h \text{ ve } x_2 \bullet_1 x_1 \in \text{Ker}h$$

bulunur ve $\text{Ker}h \subseteq \text{Ker}g$ olduğundan

$$x_1 \odot_1 x_2 \in \text{Ker}g \text{ ve } x_2 \bullet_1 x_1 \in \text{Ker}g$$

elde edilir. Bu yüzden

$$g(x_1 \odot_1 x_2) = 0 \text{ ve } g(x_2 \bullet_1 x_1) = 0$$

yazılabilir. Ayrıca g bir homomorfizma olduğundan

$$g(x_1) \odot_3 g(x_2) = 0 \text{ ve } g(x_2) \bullet_3 g(x_1) = 0$$

olur ve (pBH3) den

$$g(x_1) = g(x_2)$$

bulunur. Böylece

$$f(y_1) = f(y_2)$$

elde edilir. Dolayısıyla f bir dönüşüm olur. Diğer taraftan her $x \in X$ için

$$g(x) = z = f(y) = f(h(x)) = (f \circ h)(x)$$

olduğundan $f \circ h = g$ dir. Şimdi f nin bir pseudo BH-cebri homomorfizma olduğu gösterilmelidir. O zaman, $y_1, y_2 \in Y$ alalım ve h örten olduğundan

$$y_1 = h(x_1) \text{ ve } y_2 = h(x_2)$$

olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} f(y_1 \odot_2 y_2) &= f(h(x_1) \odot_2 h(x_2)) \\ &= f(h(x_1 \odot_1 x_2)) \\ &= g(x_1 \odot_1 x_2) \\ &= g(x_1) \odot_3 g(x_2) \\ &= f(h(x_1)) \odot_3 f(h(x_2)) \\ &= f(y_1) \odot_3 f(y_2) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} f(y_1 \bullet_2 y_2) &= f(h(x_1) \bullet_2 h(x_2)) \\ &= f(h(x_1 \bullet_1 x_2)) \\ &= g(x_1 \bullet_1 x_2) \\ &= g(x_1) \bullet_3 g(x_2) \\ &= f(h(x_1)) \bullet_3 f(h(x_2)) \\ &= f(y_1) \bullet_3 f(y_2) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece f bir pseudo BH-cebri homomorfizması olur. Son olarak f nin tek türlü tanımlı olduğu gösterilmelidir. Bunun için $f' \circ h = g$ olacak şekilde bir başka $f' : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ pseudo BH-cebri homomorfizması olduğu kabul edilsin. O zaman, h örten olduğundan her $y \in Y$ için $y = h(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(y) &= z \\ &= g(x) \\ &= (f' \circ h)(x) \\ &= f'(h(x)) \\ &= f'(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f = f'$ bulunur.

Teorem 6.4. (Ahn and Jun, 2015b) $\mathcal{X} = (X, \odot_1, \bullet_1, 0)$, $\mathcal{Y} = (X, \odot_2, \bullet_2, 0)$ ve $\mathcal{Z} = (X, \odot_3, \bullet_3, 0)$ birer pseudo BH-cebri ve $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ bir pseudo BH-cebri homomorfizması ve $h : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ bir pseudo BH-cebri monomorfizması olsun. Eğer $\text{Img} \subseteq \text{Imh}$ ise $h \circ f = g$ olacak şekilde bir tek $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir pseudo BH-cebri homomorfizması vardır.

İspat. $\text{Img} \subseteq \text{Imh}$ olduğu kabul edilsin. O zaman, $g(x) \in \text{Img} \subseteq \text{Imh}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Aynı zamanda her $x \in X$ için $h(y) = g(x)$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır. Şimdi her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} f : \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{Y} \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

ile tanımlı f bağıntısının bir dönüşüm olduğu ve $h \circ f = g$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. O zaman, her $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 = x_2$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca

$$g(x_1) = h(y_1) \text{ ve } g(x_2) = h(y_2)$$

için tek türlü tanımlı $y_1, y_2 \in Y$ vardır. Buradan $h(y_1) = h(y_2)$ bulunur. Diğer taraftan h birebir olduğundan $y_1 = y_2$ elde edilir. Dolayısıyla f bir dönüşüm olur.

Diğer taraftan her $x \in X$ için

$$g(x) = h(y) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$$

olduğundan $h \circ f = g$ dir. Şimdi f nin bir pseudo BH-cebri homomorfizması olduğu gösterilmelidir. O zaman, $x_1, x_2 \in X$ alalım

$$\begin{aligned} h(f(x_1 \odot_1 x_2)) &= g(x_1 \odot_1 x_2) \\ &= g(x_1) \odot_3 g(x_2) \\ &= h(f(x_1)) \odot_3 h(f(x_2)) \\ &= h(f(x_1) \odot_2 f(x_2)) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca h birebir olduğundan

$$f(x_1 \odot_1 x_2) = f(x_1) \odot_2 f(x_2)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} h(f(x_1 \bullet_1 x_2)) &= g(x_1 \bullet_1 x_2) \\ &= g(x_1) \bullet_3 g(x_2) \\ &= h(f(x_1)) \bullet_3 h(f(x_2)) \\ &= h(f(x_1) \bullet_2 f(x_2)) \end{aligned}$$

bulunur ve h birebir olduğundan

$$f(x_1 \bullet_1 x_2) = f(x_1) \bullet_2 f(x_2)$$

elde edilir. Böylece f bir pseudo BH homomorfizmadır. Son olarak f nin tek türlü tanımlı olduğu gösterilmelidir. Bunun için $h \circ f' = g$ olacak şekilde bir başka $f' : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ pseudo BH-cebri homomorfizması olduğu kabul edilsin. O zaman, her $x \in X$ için

$$(h \circ f)(x) = g(x) = (h \circ f')(x)$$

ve buradan

$$h(f(x)) = h(f'(x))$$

olur. Ayrıca h birebir olduğundan $f(x) = f'(x)$ bulunur. Sonuç olarak $f = f'$ elde edilir.

7 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, ilk olarak pseudo BH -cebirlerinin yapısı, genel özellikleri, altcebirleri ve idealleri incelendi. Bir pseudo BH -cebrinde bir pseudo idealin hangi özellikleri sağladığı gösterildi. Daha sonra pseudo BH^* -cebrinde bir altkümenin bir pseudo ideal olması için gerek ve yeter şart verildi. Ayrıca bir başka ideal çeşiti olan pseudo güçlü ideal tanımlanıp onun bir pseudo ideal olduğu gösterildi. Diğer taraftan bir pseudo BH^* -cebrinden her pseudo idealin bir altcebir olduğu gösterildi. Bunun sonucu olarak pseudo BH^* -cebrinden her pseudo güçlü idealin bir pseudo altcebir olduğu gözlemlendi. Daha sonra pseudo BH -cebrinde bir pseudo altcebrin bir pseudo ideal ve bir pseudo güçlü ideal olması için gerek ve yeter şartlar verildi. Daha sonra p -ideal ve q -ideal tanımları verilerek bunların aynı zamanda birer pseudo ideal olduğu görüldü. Ancak p -ideal BH^* -cebrinde bir pseudo altcebir olurken q -idealın koşulsuz altcebir olduğu gözlemlendi. Pseudo BH -cebrinde kapalı ideal tanımı verilerek bir pseudo BH^* -cebrinde pseudo ideal, pseudo güçlü ideal, p -ideal ve q -idealın kapalı idealler olduğu sonucuna varıldı. Daha sonra pseudo BH -cebrinde kapalı ideal tanımı yardımıyla her kapalı pseudo güçlü idealin bir pseudo altcebir olduğu görüldü. Bir pseudo BH -cebrinde boştan farklı bir altkümenin hangi koşullar altında bir pseudo altcebir ve bir kapalı ideal olduğu gösterildi. Bir pseudo BH -cebrinde K -kısım ve atomları tanımlandı. Daha sonra bir \mathcal{X} pseudo BH^* -cebrinde $K(\mathcal{X}) = X$ ve $At(\mathcal{X}) = \{0\}$ olduğu gösterildi. Son olarak bir f pseudo BH -cebri homomorfizması tanımlayıp bir pseudo idealin görüntüsünün ve ön görüntüsünün de bir pseudo ideal olduğu gösterildi. Ayrıca bir pseudo BH -cebrinde çekirdeğin bir pseudo güçlü ideal olduğu görüldü. Daha sonra kaynaklarda yer almayan pseudo BH -cebrinde homomorfizma teoremleri tarafımızdan ispatlandı.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abbass, H.H. and Nouri, A.H.**, 2017, Some Types of Pseudo Ideals of a Pseudo BH-Algebra, *Applied Mathematical Sciences* ,11(43):2117-2118 pp.
- Ahn, S.S. and Jun, Y.B.**, 2015, On Pseudo BCH-algebras, *Applied Mathematical Sciences*,9(39):1932-1934 pp.
- Ahn, S.S. and Jun, Y.B.**, 2015, On Pseudo BH-algebras, *Honam Mathematical Journal*,37(2):207-216 pp.
- Ahn, S.S. and Lee, J.H.**, 2010, Rough Strong Ideals In BH-algebras, *Honam Mathematical Journal*,32(2):204-208 pp.
- Jun, Y.B., Roh, E.H. and Kim, H.S.**, 1998, On BH-algebras, *Scientiae Mathematicae*,1(3):347-250 pp.
- Kim, S.Y. and Roh, E.H.**, 1999, On BH^* -subalgebras of Transitive BH^* -algebras, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 1(2):256-258 pp.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimin boyunca danışmanlığımı yapan, bana yol gösteren öğrencisi olmaktan onur duyduğum danışmanım Prof. Dr. Alev FIRAT'a

Benden hiçbir zaman sevgilerini esirgemeyen ve her zaman bana destek olan çok kıymetli aileme ve özellikle sevgili annem Kadriye KIRKGÖZ'e

Son olarak çalışmamın başından sonuna kadar en zor günlerimde yanımda olan ve bana her konuda yardımcı olan erkek arkadaşım Cihan PEHLİVAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

12/02/2021

Özlem KIRKGÖZ

ÖZGEÇMİŞ

İlk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladı. 2013 yılında girdiği Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2018 yılında mezun oldu. 2018 yılından itibaren Ege Üniversitesi Matematik Bölümü’nde yüksek lisans yapmaktadır.

