

66394

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜZERİNDE LAGUERRE EĞRİLERİNİN TSCHEBYCHEFF
ŞEBEKESİ OLUŞTURDUĞU YÜZEYLER

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Güler GÜRPINAR ARSAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Şubat 1997

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Haziran 1997

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER *A. Özdeğer*

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. H. İsmail ERDOĞAN *H. Erdoğan*

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU *H. Hilmi*

Prof. Dr. Yılmaz AKYILDIZ *Yılmaz Akylidiz*

Doç. Dr. Ziya SOYUÇOK *Ziya Soyucok*

HAZİRAN 1997

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında, özendirici ve titiz katkılarını hiç bir zaman esirgemeyen, yüksek bilgilerinden yararlanma olanağını sağlayan Hocam, Sayın Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER'e teşekkürlerimi sunarım.

Karşılaştığım sıkıntıları paylaşan, her zaman bana destek olan, tezin yazımında yardım eden Eşim, Y.Müh. Taner ARSAN'a ayrıca teşekkür ederim.

İstanbul, 1997

Güler GÜRPINAR ARSAN



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
ÖZET	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1. BİR YÜZEYİN LAGUERRE EĞRİLERİ	1
1.1 Giriş	1
1.2 Laguerre Eğrileri (G-Çizgileri)	4
1.3 Tschebycheff Şebekeleri	5
1.4 Regle Yüzeyler	6
1.5 Merkez Yüzeyler	7
1.6 İnvrs Yüzeyler	7
BÖLÜM 2. LAGUERRE EĞRİLERİNİN OLUŞTURDUĞU TSCHEBYCHEFF ŞEBEKELERİ	9
2.1 Laguerre Eğrilerinin Oluşturduğu Üçlü Tschebycheff Şebekesi	9
2.2 Açılabilir Yüzeyler Üzerinde Laguerre Eğrileri Tarafından Oluşturulan 2-li Şebeke	18
2.3 Üzerinde İki Laguerre Eğri Ailesinin Tschebycheff ve Yarı-Tschebycheff Şebekesi Oluşturduğu Regle Yüzeyler	21
2.3.1 İki Laguerre Eğri Ailesinin Tschebycheff Şebekesi Oluşturduğu Regle Yüzeyler	21
2.3.2 İki Laguerre Eğri Ailesinin Yarı-Tschebycheff Şebekesi Oluşturduğu Regle Yüzeyler	30
BÖLÜM 3. BİR YÜZEYİN MERKEZ YÜZEYLERİ İLE İNVERS YÜZEYLERİNİN LAGUERRE EĞRİLERİNİN OLUŞTURDUĞU ALT TSCHEBYCHEFF ŞEBEKELERİ	38
3.1 Merkez Yüzeylerin Laguerre Eğrilerinin Oluşturduğu Alt Tschebycheff Şebekeleri	38

3.2 Bir Yüzeyin Laguerre Eğrileri ile İvers Yüzeyinin Laguerre Eğrilerinin Birbirine Karşı Gelmesi	47
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ	60



ÖZET

Bu çalışmada, önce, üzerinde üç Laguerre eğri ailesinin Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzeylerin birer dönel silindirden ibaret olduğu gösterilmiş ve bu yüzeylerin vektörel denklemi elde edilmiştir.

Ayrıca, üzerinde iki Laguerre eğri ailesinin bir yarı-Tschebycheff şebekesi veya bir Tschebycheff şebekesi oluşturduğu açılabilir yüzeyler incelenmiş ve bu yüzeylerin, sırasıyla, birer koniden veya birer dönel silindirden ibaret olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra, açılabilir yüzeyleri özel hal olarak kabul eden regle yüzeyler ele alınmış ve üzerinde iki Laguerre eğri ailesinin Tschebycheff şebekesi oluşturduğu regle yüzeylerin birer dönel koniden; Laguerre eğrilerinin bir yarı-Tschebycheff şebekesi oluşturduğu regle yüzeylerin ise birer minimal regle yüzeyden ibaret olduğu ispatlanmıştır.

Çalışmanın son bölümünde, bir yüzeyin merkez yüzeyleri ile invers yüzeyinin Laguerre eğrilerinin oluşturduğu alt Tschebycheff şebekeleri incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir :

Merkez yüzeylerinden birine ait iki Laguerre eğri ailesinin eşlenik Tschebycheff şebekesi oluşturduğu bir yüzey ve bunun bir merkez yüzeyi bir genel silindirdir.

Merkez yüzeyleri üzerindeki iki Laguerre eğri ailesinin birbirine karşı geldiği ve merkez yüzeylerin birisi üzerindeki iki Laguerre eğri ailesinin eşlenik yarı-Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzey bir genel silindir, bu merkez yüzey ise bir konidir.

Üzerindeki Laguerre eğrilerinin, invers yüzeyi üzerindeki Laguerre eğrilerine karşı geldiği, küreden farklı, bir yüzey bir Dupin sıklidinden ibarettir. Bu çeşit yüzeyler üzerindeki bir eğrilik çizgisi ailesinin, eğrilik çizgilerinden farklı bir Laguerre eğri ailesinin transversali olması halinde yüzey bir boru (hortum) yüzeyidir.

SUMMARY

SURFACES ON WHICH THE LAGUERRE LINES FORM A TSCHEBYCHEFF NET

Let S be a real surface of class C^4 in Euclidean 3-space with vector equation $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ and let C be a line on S . C is said to be a Laguerre line (G -line) if at every point P of C , the normal plane of S containing the tangent line PT to C , cuts the surface S in a line superosculated by its circle of curvature at P .

From the above definition, one can see that a line C on S will be a Laguerre line, if and only if the relation

$$\mathcal{L} = \dot{\rho}_n - 2 \rho_g \tau_g = 0 \quad , \quad (\dot{\rho}_n = \frac{d\rho_n}{ds}) \quad (1)$$

holds all along C , where \mathcal{L} is Laguerre's direction function and ρ_n , ρ_g , τ_g and S are, respectively, the normal curvature, the geodesic curvature, the geodesic torsion and the arc length of C .

Let C make the angles γ^* and γ^{**} ($\gamma^* + \gamma^{**} = \delta$) with the parametric lines $v = \text{const.}$ and $u = \text{const.}$ respectively. With the aid of the generalized Euler, Ossian-Bonnet and Liouville formulae which are respectively given by

$$\rho_n = [r^* \cos \gamma^* \sin \gamma^{**} + r^{**} \sin \gamma^* \cos \gamma^{**} + (t^* - t^{**}) \sin \gamma^* \sin \gamma^{**}] / \sin \delta$$

$$\rho_g = [(g^* + \gamma_1^*) \sin \gamma^{**} + (g^{**} - \gamma_2^{**}) \sin \gamma^*] / \sin \delta$$

$$\tau_g = [t^* \cos \gamma^* \sin \gamma^{**} + t^{**} \sin \gamma^* \cos \gamma^{**} + (r^{**} - r^*) \sin \gamma^* \sin \gamma^{**}] / \sin \delta$$

the differential equation of the Laguerre lines in the most general coordinate system is obtained from (1) as

$$(r_1^* - 2g^* t^*) \sin^3 \gamma^{**} + 3[r_2^* - 2t^*(g^{**} - \delta_2)] \sin^2 \gamma^{**} \sin \gamma^* \\ + 3[r_1^{**} - 2t^{**}(g^* + \delta_1)] \sin \gamma^{**} \sin^2 \gamma^* + (r_2^{**} - 2g^{**} t^{**}) \sin^3 \gamma^* = 0 \quad ,$$

where r^* , r^{**} ; g^* , g^{**} ; t^* , t^{**} are, respectively, the normal curvatures, the geodesic curvatures and the geodesic torsions of the parameter curves and the indices 1 and 2 denote invariant differentiation.

A mathematical problem that is said to correspond to the physical problem of applying a piece of cloth smoothly to a curved surface ("clothing" a given surface) was first formulated and treated by Tschebycheff. It is desired to spread a net - a fish net for example - over a surface in such a way that no cord is slack and all cords are unstretched. Instead of attacking this problem Tschebycheff treated a different problem in which a net of discrete meshes is regarded as a part of a family of regular parameter curves that cover the surface completely. Thus he raises the question whether surface parameters u , v can be introduced such that the line element takes the form

$$ds^2 = du^2 + 2F du dv + dv^2 .$$

A Tschebycheff net is, by definition, a set of parameter curves $u = const.$, $v = const.$ on a surface in terms of which the line element takes the form

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \delta du dv + dv^2$$

or, equivalently, a net is a Tschebycheff net if the tangent vector field of either family of the net undergoes a parallel displacement in the sense of Levi-Civita along each curve of the other family.

The notion of a Tschebycheff net can be generalized to three-dimensional nets. Let \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 be three linear independent, smooth vector fields defined on the surface S . The triple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ is called a 3-net on S . If every vector field belonging to this 3-net undergoes a parallel displacement, in the sense of Levi-Civita, along the integral curves of the remaining vector fields, then such a net is called a Tschebycheff net of the first kind. If every two-dimensional area element belonging to the net undergoes a parallel displacement along the integral curves of the remaining vector field, such a net is called a Tschebycheff net of the second kind.

In this work, surfaces on which the Laguerre lines (G-lines) form a Tschebycheff net are studied. Some semi-Tschebycheff nets formed by these lines are also investigated.

First of all, surfaces on which the three families of Laguerre lines form a Tschebycheff net of the first kind are investigated and these surfaces are completely determined. The fundamental magnitudes of such surfaces are shown to be

$$E = G = 1 \quad , \quad F = \cos \delta = \text{const.} \quad , \\ L = b_1 = \text{const.} \quad , \quad N = b_2 = \text{const.} \quad , \quad M = \sqrt{b_1 b_2} .$$

Then the vector equation of these surfaces is obtained as

$$\vec{x}(u, v) = \begin{cases} \left\{ \frac{b_2}{A^2} \cos [A(bu + v)] \right\} \vec{e}_1 + \left\{ \frac{b_2}{A^2} \sin [A(bu + v)] \right\} \vec{e}_2 \\ + \left\{ \frac{A \sin \delta}{2\sqrt{b_1 b_2}} \left[\left(\frac{B}{A^2} + 1 \right) bu + \left(\frac{B}{A^2} - 1 \right) v \right] \right\} \vec{e}_3 & b_1 \neq 0, b_2 \neq 0 \\ \\ \frac{\sin^2 \delta}{b_1} \left(\cos \frac{b_1}{\sin \delta} u \right) \vec{e}_1 + \frac{\sin^2 \delta}{b_1} \left(\sin \frac{b_1}{\sin \delta} u \right) \vec{e}_2 \\ - (u \cos \delta + v) \vec{e}_3, & b_1 \neq 0, b_2 = 0 \end{cases}$$

where,

$$A^2 = \frac{b_2}{\sin^2 \delta} (b_1 + b_2 - 2\sqrt{b_1 b_2} \cos \delta) \quad , \quad B = \frac{b_2}{\sin^2 \delta} (b_2 - b_1).$$

It is clear that these surfaces are cylinders of revolution.

Next, the developable surfaces on which two families of Laguerre lines form a Tschebycheff net or a semi-Tschebycheff net are investigated and it is shown that these surfaces are respectively, a cylinder of revolution or a cone.

Furthermore, it is proved that a cone of revolution is the only ruled surface on which the two families of Laguerre lines form a Tschebycheff net. Ruled surfaces having a semi-Tschebycheff formed by Laguerre lines are shown to be a minimal ruled surface.

The last section of this work is devoted to the study of sub-Tschebycheff nets on the centro-surfaces and inverse surfaces of a given surface.

The differential equation

$$\begin{aligned} & \{L_u - 2(L\Gamma_{11}^1 + M\Gamma_{11}^2)\} du^3 + 3\{L_v - 2(L\Gamma_{12}^1 + M\Gamma_{12}^2)\} du^2 dv \\ & + 3\{N_u - 2(M\Gamma_{12}^1 + N\Gamma_{12}^2)\} du dv^2 + \{N_v - 2(M\Gamma_{22}^1 + N\Gamma_{22}^2)\} dv^3 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

of Laguerre lines of a surface S , where L, M and N are the coefficients of the second fundamental form of S and Γ_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) are its Christoffel symbols, is used to prove the following results concerning the centro-surfaces S_1 and S_2 of S .

If the two families of Laguerre lines of S_1 form a conjugate Tschebycheff net, then S and S_1 are a general cylinder.

If the two families of Laguerre lines of S_1 and S_2 correspond and if two families of Laguerre lines on S_1 form a conjugate semi-Tschebycheff net, then S is a general cylinder and S_1 is a cone.

In the same chapter, the inverse surface \bar{S} of S is considered. Let P a point on S and \bar{P} a point on \bar{S} . Then the vector equation of \bar{S} is

$$\vec{\bar{r}} = \frac{c^2}{r^2} \vec{r} \quad , \quad (|\vec{r}| = r)$$

where, \vec{r} is the position vector of S and c is the radius of inversion.

If the lines of curvature of S are taken as parametric curves, then the differential equation of Laguerre lines of S becomes

$$E^{3/2} r_1^* du^3 + 3 E \sqrt{G} r_2^* du^2 dv + 3 G \sqrt{E} r_1^{**} du dv^2 + G^{3/2} r_2^{**} dv^3 = 0 \quad (3)$$

where r^* and r^{**} are the principal curvatures of S .

Using the fact that the lines of curvature on S and \bar{S} correspond, the differential equation of the Laguerre lines of \bar{S} is obtained as

$$\begin{aligned} E (r^2 r^* + 2p)_u du^3 + 3 E (r^2 r^* + 2p)_v du^2 dv \\ + 3 G (r^2 r^{**} + 2p)_u du dv^2 + G (r^2 r^{**} + 2p)_v dv^3 = 0 \quad , \end{aligned}$$

where p is the perpendicular distance from the centre of inversion to the tangent plane of S , measured in the sense of the unit normal of S .

The Laguerre lines of S and \bar{S} will correspond to each other, if and only if the conditions

$$r_u^* (r^2 r^* + 2p)_v = r_v^* (r^2 r^* + 2p)_u$$

$$r_u^* (r^2 r^{**} + 2p)_u = r_u^{**} (r^2 r^* + 2p)_u$$

$$r_u^* (r^2 r^{**} + 2p)_v = r_v^{**} (r^2 r^* + 2p)_u$$

$$r_v^* (r^2 r^{**} + 2p)_u = r_u^{**} (r^2 r^* + 2p)_v$$

$$r_v^* (r^2 r^{**} + 2p)_v = r_v^{**} (r^2 r^* + 2p)_v$$

$$r_u^{**} (r^2 r^{**} + 2p)_v = r_v^{**} (r^2 r^{**} + 2p)_u$$

are satisfied.

From the above conditions the following results are obtained.

Surfaces, other than a sphere, whose Laguerre lines correspond to those on the inverse surface are Dupin cyclides.

If the Laguerre lines of S correspond to those on its inverse surface \bar{S} and if a family of lines of curvature of S are transversals to a family of Laguerre lines, then S is a pipe surface.



BÖLÜM 1

BİR YÜZEYİN LAGUERRE EĞRİLERİ

1.1 GİRİŞ

3-boyutlu Euclid uzayında düzgün bir S yüzeyi $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ vektörel denklemi ile verilmiş olsun. S yüzeyinin birinci ve ikinci formunun katsayıları, sırasıyla $E, F, G; L, M, N$ ve S nin birim normal vektör alanı \vec{n} ise,

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (1.1)$$

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u, \quad F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v, \quad G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v$$

$$\vec{n} \cdot d^2 \vec{x} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \quad (1.2)$$

$$L = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uu}, \quad M = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv}, \quad N = \vec{n} \cdot \vec{x}_{vv}$$

dir.

En az C^2 sınıftan olan ve $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ vektörel denklemi ile verilen S yüzeyinin düzgün bir $P(u, v)$ noktasının \vec{x} yer vektörünün ikinci mertebeden kısmi türevlerini ve \vec{n} vektör alanının birinci mertebeden kısmi türevlerini veren, Gauss ve Weingarten denklemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + L \vec{n}, \\ \vec{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + M \vec{n}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + N \vec{n} \\ \vec{n}_u &= \frac{1}{H^2} [(FM - GL) \vec{x}_u + (FL - EM) \vec{x}_v], \\ \vec{n}_v &= \frac{1}{H^2} [(FN - GM) \vec{x}_u + (FM - EN) \vec{x}_v] \end{aligned} \quad (1.4)$$

dir. Burada Γ_{ij}^k katsayıları ikinci cins Christoffel sembolleri olup,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \quad , \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\
 \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \quad , \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

formüllerleriyle verilmektedir.

Diğer taraftan, en genel parametrelerde Gauss karakteristik denklemi ve Mainardi-Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned}
 K = \frac{LN - M^2}{H^2} &= \frac{1}{2H} \left\{ \left[\frac{F}{EH} E_v - \frac{1}{H} G_u \right]_u \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{2}{H} F_u - \frac{1}{H} E_v - \frac{F}{EH} E_u \right]_v \right\} ,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
 L_v - M_u &= L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 , \\
 M_v - N_u &= L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

şeklindedir [1].

S yüzeyinin bir P noktasından geçen $v = sbt.$, $u = sbt.$ parametre eğrileri arasındaki açı δ olsun. Skaler veya vektörel bir $f = f(u, v)$ nokta fonksiyonu için oluşturulan

$$f_1 = \frac{f_u}{\sqrt{E}} \quad , \quad f_2 = \frac{f_v}{\sqrt{G}} \tag{1.8}$$

ifadelerine, $f = f(u, v)$ fonksiyonunun birinci mertebeden invaryant türevleri denir. Bunlar, sırasıyla, $f = f(u, v)$ fonksiyonunun $v = sbt.$, $u = sbt.$ eğrileri doğrultusundaki türevleridir.

f fonksiyonunun ikinci mertebeden karışık invaryant türevleri

$$f_{12} - f_{21} = -qf_1 + \bar{q}f_2 \tag{1.9}$$

integrabilite şartını sağlar. Burada, g^* ve g^{**} parametre eğrilerinin geodezik eğrilikleri olmak üzere,

$$q = \frac{(g^{**} - \delta_2) \cos \delta - (g^* + \delta_1)}{\sin \delta}, \quad \bar{q} = \frac{(g^{**} - \delta_2) - (g^* + \delta_1) \cos \delta}{\sin \delta} \quad (1.10)$$

dir.

İnvaryant türevler yardımıyla, Mainardi-Codazzi denklemleri ve Gauss denklemleri, sırasıyla,

$$r_2^* = \left\{ (t^* - t^{**})(g^{**} - \delta_2)/\sin \delta + [r^* - r^{**} - (t^* - t^{**})\cot g \delta](g^* + \delta_1) + t_2^* \cos \delta - t_1^{**} \right\} / \sin \delta \quad (1.11)$$

$$r_1^{**} = \left\{ (t^{**} - t^*)(g^* + \delta_1)/\sin \delta + [r^* - r^{**} - (t^{**} - t^*)\cot g \delta](g^{**} - \delta_2) + t_2^* - t_1^{**} \cos \delta \right\} / \sin \delta \quad (1.12)$$

$$K = r^* \left\{ r^{**} + (t^{**} - t^*)\cot g \delta \right\} - t^{*2} = [g_2^* - g_1^{**} + qg^* - \bar{q}g^{**} + q\delta_1 + \delta_{12}]/\sin \delta \quad (1.13)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $r^*, r^{**}; g^*, g^{**}; t^*, t^{**}$, $v = sbt.$ ve $u = sbt.$ parametre eğrilerinin, sırasıyla, normal eğrilikleri, geodezik eğrilikleri ve geodezik burulmalarıdır [2].

S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki normal eğriliği, geodezik eğriliği ve geodezik burulması, sırasıyla, ρ_n , ρ_g , τ_g olsun. C eğrisiyle $v = sbt.$ ve $u = sbt.$ parametre eğrilerinin yaptığı açılar, sırasıyla γ^* , γ^{**} olduğuna göre, Euler formülü, Ossian-Bonnet formülü ve Liouville formülü, sırasıyla

$$\begin{aligned} \rho_n &= [r^* \cos \gamma^* \sin \gamma^{**} + r^{**} \sin \gamma^* \cos \gamma^{**} + (t^* - t^{**}) \sin \gamma^* \sin \gamma^{**}] / \sin \delta \\ \rho_g &= [(g^* + \gamma_1^*) \sin \gamma^{**} + (g^{**} - \gamma_2^{**}) \sin \gamma^*] / \sin \delta \\ \tau_g &= [t^* \cos \gamma^* \sin \gamma^{**} + t^{**} \sin \gamma^* \cos \gamma^{**} + (r^{**} - r^*) \sin \gamma^* \sin \gamma^{**}] / \sin \delta \end{aligned} \quad (1.14)$$

şekline getirilebilir [2].

S yüzeyi üzerinde tanımlı $\lambda(u, v)$ (skaler veya vektörel) fonksiyonun C eğrisinin s yayına göre türevi

$$\frac{d\lambda}{ds} = \dot{\lambda} = \frac{\lambda_1 \sin\gamma^{**} + \lambda_2 \sin\gamma^*}{\sin\delta} \quad (1.15)$$

dır [3].

1.2 LAGUERRE EĞRİLERİ (G-ÇİZGİLERİ)

İlk kez Fransız Matematikçisi Maillard de la Gournerie (1814-1883) tarafından incelenen ve kendi adıyla anılan G çizgileri şu şekilde tanımlanır[4]:

En az C^3 sınıfından olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan bir C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki teğetinden ve yüzeyin P deki normalinden geçen düzlemlerle yüzey kesildiğinde, elde edilen kesit P noktasındaki eğrilik çemberi tarafından süperosküle ediliyorsa, C eğrisine S nin bir Laguerre eğrisi veya G -çizgisi denir.

S yüzeyi üzerinde bulunan bir C eğrisinin Laguerre eğrisi olması için gerek ve yeter şart, C eğrisi boyunca

$$\mathcal{L} = \dot{\rho}_n - 2\rho_g\tau_g = 0 \quad \left(\dot{\rho}_n = \frac{d\rho_n}{ds}\right), \quad (1.16)$$

olmasıdır [5]. Burada \mathcal{L} , Laguerre doğrultu fonksiyonu ve ρ_n , ρ_g , τ_g ve s , sırasıyla, C nin normal eğriliği, geodezik eğriliği, geodezik burulması ve yay uzunluğudur.

ρ_n , ρ_g ve τ_g yi veren (1.14) formülleri ve (1.16) yardımıyla Laguerre eğrilerinin en genel koordinat sistemindeki denklemi,

$$\begin{aligned} & (r_1^* - 2g^*t^*) \sin^3\gamma^{**} + 3[r_2^* - 2t^*(g^{**} - \delta_2)] \sin^2\gamma^{**} \sin\gamma^* \\ & + 3[r_1^{**} - 2t^{**}(g^* + \delta_1)] \sin\gamma^{**} \sin^2\gamma^* + (r_2^{**} - 2g^{**}t^{**}) \sin^3\gamma^* = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

şeklinde elde edilir [6].

1.3 TSCHEBYCHEFF ŞEBEKELERİ

S yüzeyine ait olan lineer bağımsız, düzgün üç vektör alanı \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 olsun. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ üçlüsüne S üzerinde bir üçlü şebeke denir.

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ şebekesine ait herhangi bir vektör alanı, diğer vektör alanlarının integral eğrileri boyunca Levi-Civita anlamında paralel kayıyorsa, böyle bir şebekeye I. cins Tschebycheff şebekesi denir. Eğer şebekeye ait 2-boyutlu herhangi bir $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$) alan elemanı, \mathbf{v}_k ($k \neq i, j$) vektör alanının integral eğrileri boyunca paralel kayıyorsa $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ şebekesine II. cins Tschebycheff şebekesi denir [7].

S yüzeyinin $v = sbt.$, $u = sbt.$ parametre eğrilerinin bir Tschebycheff şebekesi oluşturması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} g^* + \delta_1 &= 0 \\ g^{**} - \delta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

veya buna eşdeğer olarak,

$$E = E(u) \quad , \quad G = G(v) \quad (1.19)$$

olmasıdır. Bu takdirde, uygun bir parametre dönüşümüyle yüzeyin ds yay elemanı

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \delta \, du \, dv + dv^2 \quad (1.20)$$

şekline getirilebilir.

S yüzeyine ait olan bir C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki birim teğet vektör alanı \mathbf{t} , C eğrisiyle θ açısı yapan birim vektör alanı \mathbf{e} olsun. \mathbf{t} den \mathbf{e} ye giden yönün yüzeyin P deki normaline etrafındaki pozitif dönme yönünden ibaret olduğunu ve θ nın \mathbf{t} den \mathbf{e} ye giden yönde ölçüldüğünü kabul edelim. Bu takdirde, \mathbf{e} vektör alanının C eğrisi boyunca paralel kayma şartı,

$$\frac{d\theta}{ds} = -\rho_g \quad (1.21)$$

dir [8].

Dik parametre eğrilerine nispet edilmiş bir yüzey üzerinde, C_1 ve C_2 gibi iki eğri göz önüne alalım. C_1 ve C_2 nin $v = sbt.$ parametre eğrisi ile yaptığı açılar sırasıyla, φ ve ψ olsun. C_1 in teğet vektör alanının, C_2 boyunca paralel kayma şartı

$$(\varphi_1 + g^*) \cos \psi + (\varphi_2 + g^{**}) \sin \psi = 0 \quad (1.22)$$

ve C_2 nin teğet vektör alanının, C_1 boyunca paralel kayma şartı da

$$(\psi_1 + g^*) \cos \varphi + (\psi_2 + g^{**}) \sin \varphi = 0 \quad (1.23)$$

dır.

S yüzeyinin parametre eğrilerinin bir Tschebycheff şebekesi oluşturması halinde Mainardi-Codazzi denklemleri, (1.11), (1.12) ve (1.18) gereğince

$$\begin{aligned} r_2^* \sin \delta &= t_2^* \cos \delta - t_1^{**} \\ r_1^{**} \sin \delta &= t_2^* + t_1^{**} \cos \delta \end{aligned} \quad (1.24)$$

şekline girer.

1.4 REGLE YÜZEYLER

E_3 de bir parametreye bağlı bir doğru ailesine bir regle yüzey denildiğini biliyoruz. Parametreleri u, v olan bir regle yüzeyin anadoğruları $v = sbt.$ eğrileri olarak, bunların dik yörüngeleri de $u = sbt.$ eğrileri olarak alınmış olsun. Bu takdirde, uygun bir parametre dönüşümü ile yüzeyin birinci ve ikinci esas formunun katsayıları için

$$\begin{aligned} E &= 1, \quad F = 0, \quad G = (u - a)^2 + b^2 \quad (a = a(v), \quad b = b(v)) \\ L &= 0, \quad M = \frac{b}{\sqrt{G}}, \quad N = \sqrt{G} \left(c - \frac{(u - a)b' + ba'}{(u - a)^2 + b^2} \right), \quad c = c(v) \end{aligned} \quad (1.25)$$

bulunur [9].

1.5 MERKEZ YÜZEYLER

Bir $\vec{x}(u, v)$ yüzeyinin herhangi bir P noktasındaki asal eğrilik yarıçapları α ve β olduğuna göre, vektörel denklemi

$$S_1 : \vec{y} = \vec{x} + \alpha \vec{n} \quad (1.26)$$

ve

$$S_2 : \vec{y} = \vec{x} + \beta \vec{n} \quad (1.27)$$

olan yüzeylere verilen yüzeyin merkez yüzeyleri denir. $\vec{y}(u, v)$ ve $\vec{y}'(u, v)$ yüzeyleri, esas yüzeyin normallerinden oluşan kongrüansın yegane zarf yüzeyleridir.

Eğrilik çizgilerine nispet edilmiş bir S yüzeyinin S_1 merkez yüzeyine ait esas büyüklükler,

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \alpha_u^2, & \bar{F} &= \alpha_u \alpha_v, & \bar{G} &= \alpha_v^2 + G \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2, \\ \bar{L} &= -\varepsilon \sqrt{E} \frac{\alpha_u}{\alpha}, & \bar{M} &= 0, & \bar{N} &= \frac{\varepsilon \alpha G}{\sqrt{E}} \frac{\beta_u}{\beta^2} \end{aligned} \quad (\varepsilon = \mp 1) \quad (1.28)$$

ve S_2 merkez yüzeye ait esas büyüklükler ise,

$$\begin{aligned} \bar{E}' &= \beta_u^2 + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 E, & \bar{F}' &= \beta_u \beta_v, & \bar{G}' &= \beta_v^2, \\ \bar{L}' &= \frac{\varepsilon' \beta E}{\sqrt{G}} \frac{\alpha_v}{\alpha^2}, & \bar{M}' &= 0, & \bar{N}' &= -\varepsilon' \sqrt{G} \frac{\beta_v}{\beta} \end{aligned} \quad (\varepsilon' = \mp 1) \quad (1.29)$$

dir [10].

1.6 İNVERS YÜZEYLER

Bir S yüzeyine ait herhangi bir nokta P ve $c (\neq 0)$ bir sabit olmak üzere,

$$\vec{OP} \cdot \vec{OP} = c^2$$

bağıntısını gerçekleyen \bar{P} noktasının geometrik yeri olan \bar{S} yüzeyine S nin invers yüzeyi veya evriği denir. $\vec{OP} = \vec{r}$, $\vec{O\bar{P}} = \vec{\bar{r}}$ denirse,

$$\vec{\bar{r}} = \frac{c^2}{r^2} \vec{r} , \quad (|\vec{\bar{r}}| = r) \quad (1.30)$$

bulunur.

\bar{S} invers yüzeyinin esas büyüklükleri, (1.30) yardımıyla,

$$\bar{E} = \frac{c^4}{r^4} E , \quad \bar{F} = \frac{c^4}{r^4} F , \quad \bar{G} = \frac{c^4}{r^4} G , \quad (1.31)$$

$$\bar{L} = -\frac{c^2}{r^2} L - \frac{2c^2 p}{r^4} E , \quad \bar{M} = -\frac{c^2}{r^2} M - \frac{2c^2 p}{r^4} F , \quad \bar{N} = -\frac{c^2}{r^2} N - \frac{2c^2 p}{r^4} G$$

olarak elde edilir. Burada p , orijinin (inversiyon merkezinin), S nin P noktasındaki teğet düzlemine olan dik uzaklığıdır [10].

BÖLÜM 2

LAGUERRE EĞRİLERİNİN OLUŞTURDUĞU TSCHEBYCHEFF ŞEBEKELERİ

2.1 LAGUERRE EĞRİLERİNİN OLUŞTURDUĞU ÜÇLÜ TSCHEBYCHEFF ŞEBEKESİ

Bu kısımda, üzerinde üç Laguerre eğri ailesinin I. cins Tschebycheff şebekesi oluşturduğu C^4 sınıfından yüzeyleri belirleyeceğiz. Bunun için, her bir Laguerre eğri ailesine ait teğet vektör alanının, diğer Laguerre eğri aileleri boyunca paralel kayma şartlarını elde etmeliyiz.

Göz önüne alınan S yüzeyi üzerindeki \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 Laguerre eğri ailelerinden ilk ikisini $v = sbt.$, ve $u = sbt.$ eğrileri olarak alalım. \mathcal{L}_3 Laguerre eğri ailesinin $v = sbt.$, $u = sbt.$ eğrileri ile yaptığı açılar, sırasıyla, γ^* , γ^{**} olsun. Bu takdirde, Laguerre eğrilerinin (1.17) denkleminde,

$$r_1^* - 2g^*t^* = 0 \quad (2.1)$$

$$r_2^{**} - 2g^{**}t^{**} = 0 \quad (2.2)$$

$$r_2^* \sin \gamma^{**} + r_1^{**} \sin \gamma^* = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir.

\mathcal{L}_1 in teğet vektör alanının \mathcal{L}_2 ve \mathcal{L}_3 boyunca paralel kayma şartları, (1.21) e göre, sırasıyla

$$g^{**} - \delta_2 = 0 \quad , \quad \frac{d\gamma^*}{(ds)_{\mathcal{L}_3}} = \frac{\gamma_1^* \sin \gamma^{**} + \gamma_2^* \sin \gamma^*}{\sin \delta} = (\rho_g)_{\mathcal{L}_3} \quad (2.4)$$

dır.

\mathcal{L}_2 nin teğet vektör alanının, \mathcal{L}_1 ve \mathcal{L}_3 boyunca paralel kayma şartları, sırasıyla

$$g^* + \delta_1 = 0 \quad , \quad \frac{d\gamma^{**}}{(ds)_{\mathcal{L}_3}} = \frac{\gamma_1^{**} \sin \gamma^{**} + \gamma_2^{**} \sin \gamma^*}{\sin \delta} = -(\rho_g)_{\mathcal{L}_3} \quad (2.5)$$

dır.

\mathcal{L}_3 ün teğet vektör alanının, \mathcal{L}_1 ve \mathcal{L}_2 boyunca paralel kayma şartları, sırasıyla

$$\frac{d\gamma^*}{(ds)_{v=sbt.}} = -g^* \quad , \quad \frac{d\gamma^{**}}{(ds)_{u=sbt.}} = g^{**} \quad (2.6)$$

veya

$$g^* + \gamma_1^* = 0 \quad , \quad g^{**} - \gamma_2^{**} = 0 \quad (2.7)$$

dır.

(2.7) ile verilen kayma şartları (1.14) de yerine konursa

$$(\rho_g)_{\mathcal{L}_3} = 0 \quad (2.8)$$

bulunur.

(2.8), (2.4) ve (2.5) den $\gamma^* = sbt.$, $\gamma^{**} = sbt.$ ve $\delta = \gamma^* + \gamma^{**} = sbt.$ elde edilir. δ açısı sabit olduğundan (2.4) ve (2.5) in ilk denklemlerinden

$$g^* = 0 \quad , \quad g^{**} = 0 \quad (2.9)$$

bulunur. (2.8) ve (2.9) un bir sonucu olarak, S yüzeyinin üç Laguerre eğri ailesinin geodeziklerinden ibaret olduğu ve bunların sabit açı altında kesiştiği görülür. Bu takdirde, (1.13) Gauss denkleminde,

$$K = r^*[r^{**} + (t^{**} - t^*) \cotg \delta] - t^{*2} = 0$$

bulunur ki, bu da S nin açılabilir yüzey olduğunu gösterir.

Parametre eğrileri Tschebycheff şebekesi oluşturduğundan uygun bir parametre dönüşümüyle $E = G = 1$ yapılabilir. Bu takdirde, invaryant türevler, kısmi türevlere dönüşür. (2.1) , (2.2) ve (2.9) a göre

$$r_u^* = 0 \quad , \quad r_v^{**} = 0$$

olduğundan $r^* = r^*(v)$, $r^{**} = r^{**}(u)$ dur. r^* ve r^{**} a ait integrabilite şartlarından yararlanılarak, (1.24) Mainardi-Codazzi denklemlerinden

$$t_{vu}^* \cos\delta - t_{uu}^{**} = 0 \quad (2.10)$$

$$t_{vv}^* - t_{uv}^{**} \cos\delta = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir.

Parametre eğrilerinin normal eğrilikleri ile geodezik burulmaları arasındaki

$$t^* + t^{**} = (r^{**} - r^*) \cot\delta \quad (2.12)$$

bağıntısı kullanılır ve (2.11) den yararlanılırsa, $f(u)$ ve $g(v)$ argümanlarına göre diferensiyellenebilen keyfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$t^* + t^{**} = f(u) + g(v)$$

ve bunun sonucu olarak da, c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$r^{**}(u) = f(u) \operatorname{tg}\delta + c \quad (\delta \neq \frac{\pi}{2}) \quad (2.13)$$

$$r^*(v) = -g(v) \operatorname{tg}\delta + c \quad (\delta \neq \frac{\pi}{2}) \quad (2.14)$$

bulunur.

(2.13) ve (2.14) ve (1.24) denklemlerinden

$$t_v^{**} = -\frac{f'(u)}{\cos\delta} \quad , \quad t_v^* = g'(v) + \frac{f'(u)}{\cos\delta}$$

elde edilir. (2.11) ve (2.14) göz önüne alınır ve gerekli işlemler yapılırsa, $d_1 = sbt.$, $d_2 = sbt.$, $d_3 = sbt.$ ve $h(u)$ diferensiyellenebilen keyfi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} r^* &= -(d_1 v + d_2) \operatorname{tg} \delta + c \\ r^{**} &= d_3 \operatorname{tg} \delta + c \\ t^* &= d_1 v + \bar{d} - h(u), \quad (\bar{d} = d_2 + d_3) \\ t^{**} &= h(u) \end{aligned} \tag{2.15}$$

bulunur.

(2.15) ile verilen değerler, (1.13) Gauss denkleminde yerine konursa, $A(v) = -(d_1 v + d_2) \operatorname{tg} \delta + c$ ve $B = d_3 \operatorname{tg} \delta + c = sbt.$ olmak üzere

$$A(v) [B - (d_1 v + \bar{d}) \operatorname{cotg} \delta] + 2 h(u) A(v) \operatorname{cotg} \delta - h^2(u) = 0 \tag{2.16}$$

elde edilir. Buradan, (2.16) nın u ya göre türetilmesiyle

$$2h'(u) [A(v) \operatorname{cotg} \delta - h(u)] = 0 \tag{2.17}$$

bulunur. Burada iki hal mevcuttur.

I.Hal: $h'(u) = 0$ ise $h(u) = sbt. = d_4$ bulunur. Bu takdirde, r^* , r^{**} , t^* , t^{**} in (2.15) deki değerleri, (2.12) ve (1.24) Mainardi-Codazzi denklemlerinde yerine konursa

$$\begin{aligned} r^* &= -d_2 \operatorname{tg} \delta + c = sbt. \\ r^{**} &= d_3 \operatorname{tg} \delta + c = sbt. \\ t^* &= \bar{d} - d_4 = sbt. \\ t^{**} &= d_4 \end{aligned} \tag{2.18}$$

olduğu görülür.

II.Hal: $h(u) = A(v) \cotg\delta$ ($\delta \neq \frac{\pi}{2}$) olması halinde $h(u) = h = sbt.$,
 $A(v) = h \tg\delta = sbt.$ elde edilir. Bu takdirde,

$$A(v) = -(d_1v + d_2) \tg\delta + c = h \tg\delta$$

ve buradan da

$$(h + d_2) \tg\delta - c = -(d_1 \tg\delta) v$$

bulunur. Bu eşitliğin mümkün olabilmesi için

$$d_1 = 0 , h = c \cotg\delta - d_2$$

olmalıdır. Buradan (2.15) deki büyüklükler için

$$r^* = -d_2 \tg\delta + c = sbt.$$

$$r^{**} = d_3 \tg\delta + c = sbt.$$

$$t^* = 2d_2 + d_3 - c \cotg\delta = sbt.$$

$$t^{**} = c \cotg\delta - d_2 = sbt.$$

(2.19)

elde edilir.

O halde, her iki halde de aranan yüzeyler için

$$r^* = sbt. = b_1 , r^{**} = sbt. = b_2 , t^* = sbt. , t^{**} = sbt. , g^* = g^{**} = 0 \quad (2.20)$$

dir.

Şimdi, (2.13) de mevcut olan $\delta \neq \frac{\pi}{2}$ koşulunun gerçekleşmediğini, yani S yüzeyinin iki Laguerre eğri ailesinin birbirine dik olduğu hali ele alalım.

$\delta = \pi/2$ olması halinde, (2.12) den

$$t^* = c = sbt. , t^{**} = -c = sbt. \quad (2.21)$$

bulunur. Bu takdirde, (1.24) Mainardi- Codazzi denklemlerinden

$$r^* = \phi(u) , \quad r^{**} = \bar{\phi}(v)$$

elde edilir. Bu şartlar altında, Gauss denklemi,

$$\phi(u)\bar{\phi}(v) - c^2 = 0 \quad (2.22)$$

şeklini alır. Buradan,

$$\phi(u) = \frac{c^2}{\bar{\phi}(v)} = c_1 = sbt. \quad (\bar{\phi}(v) \neq 0) \quad (2.23)$$

ve dolayısıyla

$$r^* = \phi(u) = c_1 , \quad r^{**} = \bar{\phi}(v) = \frac{c^2}{c_1} \quad (c_1 \neq 0) \quad (2.24)$$

bulunur.

Bu takdirde,

$$t^* = c = sbt. , \quad t^{**} = -c = sbt. , \quad r^* = c_1 = sbt. , \quad r^{**} = \frac{c^2}{c_1} = sbt. \quad (2.25)$$

dir.

(2.22) de $\bar{\phi}(v) = 0$ ise, (2.21) den

$$r^* = \phi(u) , \quad r^{**} = 0 , \quad t^* = t^{**} = 0 \quad (2.26)$$

bulunur.

(2.23) de $c_1 = 0$ ise, (2.21) den

$$r^* = 0 , \quad r^{**} = \bar{\phi}(v) , \quad t^* = t^{**} = 0 \quad (2.27)$$

bulunur.

(2.25), (2.26) veya (2.27) büyüklüklerine sahip olan S yüzeyi bir dönel silindir veya özel olarak bir düzlemden ibarettir.

Şimdi, (2.20) büyüklüklerine sahip S yüzeyinin vektörel denklemini elde edelim.

(2.20) den dolayı S yüzeyinin ikinci esas formunun katsayıları için

$$L = b_1, \quad N = b_2, \quad M = \sqrt{b_1 b_2}$$

bulunur. Bu takdirde, (1.3) Gauss denklemleri

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= b_1 \vec{n} \\ \vec{x}_{uv} &= \sqrt{b_1 b_2} \vec{n} \\ \vec{x}_{vv} &= b_2 \vec{n} \end{aligned} \tag{2.28}$$

şekline girer.

$b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ ise, (2.28) den

$$\vec{x}_{uu} - b^2 \vec{x}_{vv} = 0, \quad (b^2 = \frac{b_1}{b_2}) \tag{2.29}$$

bulunur. $bu + v = \bar{u}$, $bu - v = \bar{v}$ dönüşümü yapılırsa (2.29) diferensiyel denklemden

$$\vec{x}_{\bar{u}\bar{v}} = 0 \tag{2.30}$$

bulunur ki, buradan

$$\vec{x} = \vec{x}_1(\bar{u}) + \vec{x}_2(\bar{v}) \tag{2.31}$$

elde edilir.

(2.28) ve (2.31) den

$$\vec{x}_2(\vec{v}) = \vec{l}_1 \vec{v} + \vec{l}_2 \quad (2.32)$$

bulunur. Buna göre, (1.4) Weingarten denklemlerinden

$$\begin{aligned} \vec{x}_1'''(\vec{u}) + \frac{b_2}{\sin^2 \delta} (b_1 + b_2 - 2\sqrt{b_1 b_2} \cos \delta) \vec{x}_1'(\vec{u}) \\ = \frac{b_2}{\sin^2 \delta} (b_2 - b_1) \vec{l}_1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

elde edilir.

$A^2 = \frac{b_2}{\sin^2 \delta} (b_1 + b_2 - 2\sqrt{b_1 b_2} \cos \delta) = sbt.$, $B = \frac{b_2}{\sin^2 \delta} (b_2 - b_1) = sbt.$ ve $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ keyfi sabit vektörler olmak üzere, (2.33) den yararlanarak yüzeyin vektörel denklemi olarak

$$\begin{aligned} \vec{x}(u, v) = \vec{m}_1 \cos A(bu + v) + \vec{m}_2 \sin A(bu + v) \\ + \vec{l}_1 \left[\left(\frac{B}{A^2} + 1 \right) bu + \left(\frac{B}{A^2} - 1 \right) v \right] + \vec{l}, \quad (\vec{l} = \vec{m}_3 + \vec{l}_2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

bulunur.

$\vec{x}(u, v)$ vektörünün,

$$\begin{aligned} \vec{x}_u^2 = E = 1 \quad , \quad \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = F = \cos \delta \quad , \quad \vec{x}_v^2 = G = 1 \quad , \\ \vec{n} \cdot \vec{x}_{uu} = L = b_1 \quad , \quad \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv} = M = \sqrt{b_1 b_2} \quad , \quad \vec{n} \cdot \vec{x}_{vv} = N = b_2 \quad , \\ \vec{n}^2 = 1 \quad , \quad \vec{n} \cdot \vec{x}_u = 0 \quad , \quad \vec{n} \cdot \vec{x}_v = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

şartlarını sağlaması gerektiğinden,

$$\begin{aligned} \vec{m}_1^2 = \frac{b_2^2}{A^4} \quad , \quad \vec{m}_2^2 = \frac{b_2^2}{A^4} \quad , \quad \vec{l}_1^2 = \frac{A^2 \sin^2 \delta}{4b_1 b_2} \\ \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = \vec{m}_1 \cdot \vec{l}_1 = \vec{m}_2 \cdot \vec{l}_1 = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu takdirde,

$$\frac{\vec{m}_1}{\frac{b_2}{A^2}} = \vec{e}_1, \quad \frac{\vec{m}_2}{\frac{b_2}{A^2}} = \vec{e}_2, \quad \frac{\vec{l}_1}{\frac{A \sin \delta}{2\sqrt{b_1 b_2}}} = \vec{e}_3$$

olmak üzere ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) üçlü vektör takımı, 3-böyutlu uzayın ortonormal bir bazını oluşturur. Böylece yüzeyin (2.34) denklemi, öteleme farkıyla

$$\begin{aligned} \vec{x}(u, v) = & \left\{ \frac{b_2}{A^2} \cos [A(bu + v)] \right\} \vec{e}_1 + \left\{ \frac{b_2}{A^2} \sin [A(bu + v)] \right\} \vec{e}_2 \\ & + \left\{ \frac{A \sin \delta}{2\sqrt{b_1 b_2}} \left[\left(\frac{B}{A^2} + 1 \right) bu + \left(\frac{B}{A^2} - 1 \right) v \right] \right\} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.36)$$

şekline girer.

$b_1 \neq 0, b_2 = 0$ ise yüzeyin vektörel denklemi

$$\vec{x}(u, v) = \vec{a}(u) + \vec{k}_1 v + \vec{k}_2 \quad (2.37)$$

şeklindeir. Yukarıdakine benzer işlemler yapılırsa,

$$\vec{a}(u) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \cos b_1 u + \vec{p}_3 \sin b_1 u, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 : \text{sabit vektörler})$$

$$\vec{p}_2^2 = \frac{\sin^4 \delta}{b_1^2}, \quad \vec{p}_3^2 = \frac{\sin^4 \delta}{b_1^2}, \quad \vec{k}_1^2 = 1, \quad \vec{k}_1 \cdot \vec{p}_2 = \vec{k}_1 \cdot \vec{p}_3 = \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 = 0$$

elde edilir. Bu şartlar altında, (2.37) denklemi için, öteleme farkıyla

$$\vec{x}(u, v) = \frac{\sin^2 \delta}{b_1} \left(\cos \frac{b_1}{\sin \delta} u \right) \vec{e}_1 + \frac{\sin^2 \delta}{b_1} \left(\sin \frac{b_1}{\sin \delta} u \right) \vec{e}_2 - (u \cos \delta + v) \vec{e}_3$$

bulunur.

$r^* = sbt. = b_1, r^{**} = sbt. = b_2, t^* = sbt., t^{**} = sbt., g^* = g^{**} = 0$ olması halinde yüzeyin (2.36) vektörel denkleminde anlaşılacağı gibi, yüzey bir dönel silindirden veya özel olarak bir düzlemden ibarettir. Bu çeşit yüzeyler üzerindeki her eğri bir Laguerre eğrisidir. Tersine olarak, üzerindeki her eğri

bir Laguerre eğrisi olan yüzeylerin de küre, dönel silindir veya bir düzlemden ibaret olduğu şu şekilde gösterilebilir:

Eğrilik çizgilerine nispet edilmiş bir yüzeyin Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemi

$$r_1 \cos^3 \varphi + 3 r_2 \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3 \bar{r}_1 \cos \varphi \sin^2 \varphi + \bar{r}_2 \sin^3 \varphi = 0 \quad (2.38)$$

dır. Burada φ , $v = sbt.$ eğrisi ile bir Laguerre eğrisinin teğeti arasındaki açıdır.

Yüzeyin her eğrisinin Laguerre eğrisi olması için (2.38) denkleminin φ açısına bağlı olmaksızın sağlanması gerekir. Bu takdirde,

$$r_1 = 0, r_2 = 0, \bar{r}_1 = 0, \bar{r}_2 = 0$$

ve buradan da

$$r = sbt., \bar{r} = sbt.$$

elde edilir. O halde yüzey, dönel silindir, küre veya düzlemden ibarettir.

2.2 AÇILABİLİR YÜZEYLER ÜZERİNDE LAGUERRE EĞRİLERİ TARAFINDAN OLUŞTURULAN 2-Lİ ŞEBEKE

Eğrilik çizgilerine nispet edilmiş bir S yüzeyinin Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemi (1.17) ye göre

$$E^{3/2} r_1 du^3 + 3 E \sqrt{G} r_2 du^2 dv + 3 G \sqrt{E} \bar{r}_1 du dv^2 + G^{3/2} \bar{r}_2 dv^3 = 0 \quad (2.39)$$

dir. Burada r ve \bar{r} , S nin asal eğriliklerini, $r_1, r_2, \bar{r}_1, \bar{r}_2$ ise r ve \bar{r} nin invaryant türevlerini göstermektedir.

S yüzeyi açılabilir yüzey ise, Mainardi-Codazzi denklemleri ve Gauss denklemi kullanılarak S nin esas formunun katsayıları, $f(u)$ ve $\lambda(u)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} G = 1 \quad , \quad \sqrt{E} = e = vf(u) + \lambda(u) \quad , \quad N = 0 \\ F = 0 \quad , \quad M = 0 \quad , \quad r = \frac{1}{e} \quad , \quad \bar{r} = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $f(u)$ ve $\lambda(u)$ nun oranı sabit ise açılabilir yüzey bir koni; $f(u) = 0$ ise açılabilir yüzey bir silindirdir.

Açılabilir S yüzeyinin Laguerre eğrilerinin (2.39) diferensiyel denklemi

$$(\sqrt{E}r_1 du + 3\sqrt{G}r_2 dv) du^2 = 0 \quad (2.41)$$

şekline girer. Buna göre, \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 Laguerre eğri ailelerinden ilk ikisi $u = sbt$ ailesi ile çakışır. \mathcal{L}_3 ailesinin diferensiyel denklemi ise

$$r_u du + 3r_v dv = 0 \quad (2.42)$$

dir. Bu ailenin $u = sbt$. ile yaptığı açı θ olsun. Bu takdirde,

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{dv}{du} \quad (2.43)$$

bulunur. (2.42) ve (2.43) den

$$\cotg \theta = \frac{1}{e} \left(- \frac{r_u}{3r_v} \right) \quad (2.44)$$

elde edilir.

Şimdi, açılabilir yüzeyin anadoğrularının, \mathcal{L}_3 Laguerre eğrilerinin transversali olması koşulunu elde edelim.

\mathcal{L}_3 ün teğet vektör alanının anadoğrular boyunca paralel kayma şartı

$$\theta_2 = 0 \quad (2.45)$$

dır.

(2.44) ve (2.45) den

$$\left(\frac{r_u}{e r_v}\right)_v = \left(\frac{e_u}{e e_v}\right)_v = \left[\frac{v f'(u) + \lambda'(u)}{f(u)(v f(u) + \lambda(u))}\right]_v = 0 \quad (2.46)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{f'}{f} - \frac{\lambda'}{\lambda} = 0 \quad (f \neq 0, \lambda \neq 0)$$

ve böylece

$$\frac{f}{\lambda} = c = sbt$$

bulunur. O halde, bir açılabilir yüzeyin anadoğrularının, anadoğrulardan farklı Laguerre eğrilerinin transversali olması halinde açılabilir yüzey bir koniden ibarettir.

Eğer, fazla olarak, $u = sbt$. Laguerre eğri ailesinin teğet vektör alanı, anadoğrulardan farklı Laguerre eğri ailesi boyunca paralel kayıyorsa, (1.22) ye göre

$$g^* \sin\theta = 0$$

dır. Buna göre, $g^* = 0$ ve dolayısıyla $E = E(u)$ olacağından $f(u) = 0$ bulunur ki, bu da S nin bir dönele silindirden ibaret olduğunu gösterir.

Elde edilen sonuçları aşağıdaki teoremden toplayabiliriz.

TEOREM 2.2.1 Üzerinde iki Laguerre eğri ailesinin yarı-Tschebycheff şebekesi oluşturduğu açılabilir yüzey bir koni, üzerinde iki Laguerre eğri ailesinin Tschebycheff şebekesi oluşturduğu açılabilir yüzey ise bir dönele silindiridir.

2.3 ÜZERİNDE İKİ LAGUERRE EĞRİ AİLESİNİN TSCHEBY-CHEFF VE YARI-TSCHEBYCHEFF ŞEBEKESİ OLUŞTURDUĞU REGLE YÜZEYLER

2.3.1 İki Laguerre Eğri Ailesinin Tschebycheff Şebekesi Oluşturduğu Regle Yüzeyler

Bundan önceki kısımda, Laguerre eğrilerinin üçlü Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzeyler incelenmiş ve bu yüzeylerin açılabilir yüzeylerden ibaret olduğu gösterilmişti. Şimdi, açılabilir yüzeyleri özel hal olarak kabul eden regle yüzeyler üzerindeki anadoğruların farklı iki Laguerre eğri ailesinin Tschebycheff şebekesi meydana getirmesi halini ele alalım.

Göz önüne alınan regle yüzeyi anadoğruları ile bunların dik yörüngelerine nispet edelim. Bu takdirde, yüzeyin parametrelerinin uygun seçilmesiyle yüzeyin birinci ve ikinci esas formunun katsayıları (1.25) formüllerindeki şekle getirilebilir.

Dik parametre eğrilerine nispet edilmiş bir yüzeyin Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemi, (1.17) ye göre

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = (r_1^* - 2g^{**}t^*)\cos^3\varphi + 3(r_2^* - 2g^{**}t^*)\cos^2\varphi\sin\varphi \\ + 3(r_1^{**} + 2g^{**}t^*)\cos\varphi\sin^2\varphi + (r_2^{**} + 2g^{**}t^*)\sin^3\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

dır. Burada φ , bir Laguerre eğrisiyle $v = sbt$. eğrisi arasındaki açıdır.

Regle yüzeyin \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 Laguerre eğri ailelerinden birincisini $v = sbt$. (anadoğrular) eğrileri olarak alalım. Regle yüzeyin anadoğruları bu yüzeyin hem geodeziği, hem de asimptotiği olduğundan

$$r^* = 0 \quad , \quad g^* = 0$$

dır. Bu takdirde, regle yüzeyin anadoğruların farklı Laguerre eğrilerini veren diferensiyel denklem (2.47) ye göre

$$(r_2^{**} + 2g^{**}t^*) \operatorname{tg}^2\varphi + 3r_1^{**} \operatorname{tg}\varphi - 6g^{**}t^* = 0 \quad (\varphi \neq \frac{\pi}{2}) \quad (2.48)$$

dır.

\mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 Laguerre eğrilerinin $v = sbt.$ eğrisi ile yaptığı açılar sırasıyla, φ ve ψ olsun. Bu takdirde, \mathcal{L}_2 ile \mathcal{L}_3 ün bir Tschebycheff şebekesi meydana getirme şartları, (1.22) ve (1.23) e göre

$$(\varphi_1 + g^*) \cos\psi + (\varphi_2 + g^{**}) \sin\psi = 0 \quad (2.49)$$

$$(\psi_1 + g^*) \cos\varphi + (\psi_2 + g^{**}) \sin\varphi = 0$$

dır. $g^* = 0$ olduğundan

$$\varphi_1 = -(\varphi_2 + g^{**}) \operatorname{tg}\psi \quad (2.50)$$

$$\psi_1 = -(\psi_2 + g^{**}) \operatorname{tg}\varphi$$

elde edilir.

(2.48) denkleminin kökleri, $A = 9r_1^{**2} + 24g^{**}t^*(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)$ olmak üzere

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3r_1^{**} + \sqrt{A}}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)} , \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{-3r_1^{**} - \sqrt{A}}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)} \quad (2.51)$$

dır.

φ ve ψ nin (2.51) den invaryant türevler olarak elde edilen φ_1 , φ_2 ve ψ_1 , ψ_2 türevleri (2.50) de yerine konursa

$$\frac{\left(\frac{-3r_1^{**} + \sqrt{A}}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)}\right)_1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = - \left[\frac{\left(\frac{-3r_1^{**} + \sqrt{A}}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)}\right)_2}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} + g^{**} \right] \operatorname{tg}\psi \quad (2.52)$$

$$\frac{\left(\frac{-3r_1^{**} - \sqrt{A}}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)}\right)_1}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} = - \left[\frac{\left(\frac{-3r_1^{**} - \sqrt{A}}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)}\right)_2}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} + g^{**} \right] \operatorname{tg}\varphi$$

veya

$$\begin{aligned}
 & (-3r_1^{**} + \sqrt{A})_1 (r_2^{**} + 2g^{**}t^*) - (r_2^{**} + 2g^{**}t^*)_1 (-3r_1^{**} + \sqrt{A}) \\
 & + (-3r_1^{**} + \sqrt{A})_2 \frac{(-3r_1^{**} - \sqrt{A})}{2} - (r_2^{**} + 2g^{**}t^*)_2 \frac{(9r_1^{**2} - A)}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)} \\
 & + [4(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)^2 + 9r_1^{**2} + A - 6r_1^{**} \sqrt{A}] \frac{g^{**}(-3r_1^{**} - \sqrt{A})}{4(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.52a}$$

$$\begin{aligned}
 & (-3r_1^{**} - \sqrt{A})_1 (r_2^{**} + 2g^{**}t^*) - (r_2^{**} + 2g^{**}t^*)_1 (-3r_1^{**} - \sqrt{A}) \\
 & + (-3r_1^{**} - \sqrt{A})_2 \frac{(-3r_1^{**} + \sqrt{A})}{2} - (r_2^{**} + 2g^{**}t^*)_2 \frac{(9r_1^{**2} - A)}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)} \\
 & + [4(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)^2 + 9r_1^{**2} + A + 6r_1^{**} \sqrt{A}] \frac{g^{**}(-3r_1^{**} + \sqrt{A})}{4(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)} = 0
 \end{aligned} \tag{2.52b}$$

elde edilir. (2.52a) ile (2.52b) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
 A_u \left(\frac{r_v^{**}}{\sqrt{G}} + 2g^{**}t^* \right) - \frac{3}{2} \frac{A_v}{\sqrt{G}} r_u^{**} + A \left[\frac{r_{uv}^{**}}{\sqrt{G}} + \frac{r_v^{**}}{\sqrt{G}} \frac{G_u}{G} - 4g_u^{**}t^* - 4g^{**}t_u^* \right. \\
 \left. - 12g^{**2}t^* - 2g^{**} \left(\frac{r_v^{**}}{\sqrt{G}} + 2g^{**}t^* \right) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

bulunur.

Regle yüzeyin (1.25) ile verilen büyüklükleri, (2.53) de yerine konur ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$B_0 = -18c^2c'$$

$$B_1 = -108bc^2 + 144cb'c' - 144bc^3 + 36bcc''$$

$$B_2 = 18bc^2a'' + 648bccb' - 18bc^3b' + 18c^2a'b' - 672b^2c' - 54b^2c^2c'$$

$$+ 96bca'c' - 216b'^2c' - 72cb'b'' + 336bc'b'' - 72bb'c'' - 36bccb'''$$

$$B_3 = -768b^3 - 324b^3c^2 + 528b^2ca' + 24bc^2a'^2 - 36b^2ca''' - 216bca''b'$$

$$\begin{aligned} & -864 b b' ^2 + 72 b c ^2 b' ^2 - 144 c a' b' ^2 + 384 b ^2 a'' c' + 402 b ^2 c b' c' \\ & + 72 b a' b' c' - 552 b ^3 c' ^2 + 768 b ^2 b'' - 36 b ^2 c ^2 b'' - 48 b c a' b'' \\ & + 144 b' ^2 b'' - 192 b b'' ^2 + 144 b ^3 c c'' - 108 b ^2 a' c'' + 72 b b' b''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 = & 864 b ^3 a'' + 36 b ^3 c ^2 a'' - 144 b ^2 c a' a'' + 1332 b ^3 c b' - 72 b ^3 c ^3 b' \\ & - 648 b ^2 a' b' + 48 b c' b'' + 36 b b' c'' + 72 b ^2 a''' b' + 360 b a'' b' ^2 \\ & + 36 b c b' ^3 + 216 a' b' ^3 - 1968 b ^4 c' - 36 b ^4 c ^2 c' + 240 b ^3 c a' c' \\ & + 162 b ^2 a' ^2 c' - 900 b ^2 b' ^2 c' - 432 b ^2 a'' b'' + 54 b ^2 c b' b'' - 216 b a' b' b'' \\ & + 912 b ^3 c' b'' - 180 b ^3 b' c'' - 108 b ^3 c b''' + 108 b ^2 a' b''' + 90 b ^2 c ^2 a' b' \\ & - 216 b c a' ^2 b' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5 = & -1536 b ^5 - 324 b ^5 c ^2 + 1056 b ^4 c a' - 36 b ^3 a' ^2 + 48 b ^3 c ^2 a' ^2 \\ & - 72 b ^2 c a' ^3 - 240 b ^3 a'' ^2 - 108 b ^4 c a''' + 108 b ^3 a' a''' - 426 b ^3 c a'' b' \\ & + 144 b ^2 a' a'' b' - 1872 b ^3 b' ^2 + 246 b ^3 c ^2 b' ^2 - 198 b ^2 c a' b' ^2 \\ & + 216 b a' ^2 b' ^2 - 216 b b' ^4 + 1104 b ^4 a'' c' + 312 b ^4 c b' c' - 90 b ^3 a' b' c' \\ & - 768 b ^5 c' ^2 + 1392 b ^4 b'' - 108 b ^4 c ^2 b'' + 48 b ^3 c a' b'' - 144 b ^2 a' ^2 b'' \\ & + 396 b ^2 b' ^2 b'' - 312 b ^3 b'' ^2 + 216 b ^5 c c'' - 324 b ^4 a' c'' + 108 b ^3 b' b''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_6 = & 1680 b ^5 a'' - 240 b ^4 c a' a'' - 18 b ^3 a' ^2 a'' + 636 b ^5 c b' - 108 b ^5 c ^3 b' \\ & - 1116 b ^4 a' b' + 240 b ^4 c ^2 a' b' - 306 b ^3 c a' ^2 b' + 54 b ^2 a' ^3 b' + 108 b ^4 a''' b' \\ & + 900 b ^3 a'' b' ^2 - 18 b ^3 c b' ^3 + 216 b ^2 a' b' ^3 - 1872 b ^6 c' + 36 b ^6 c ^2 c' \\ & + 144 b ^5 c a' c' + 306 b ^4 a' ^2 c' - 1224 b ^4 b' ^2 c' - 768 b ^4 a'' b'' + 402 b ^4 c b' b'' \\ & - 522 b ^3 a' b' b'' + 720 b ^5 c' b'' - 108 b ^5 b' c'' - 108 b ^5 c b''' + 216 b ^4 a' b''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_7 = & -768 b ^7 - 108 b ^7 c ^2 + 528 b ^6 c a' - 36 b ^5 a' ^2 + 24 b ^5 c ^2 a' ^2 - 72 b ^4 c a' ^3 \\ & - 456 b ^5 a'' ^2 - 108 b ^6 c a''' + 216 b ^5 a' a''' - 174 b ^5 c a'' b' + 306 b ^4 a' a'' b' \\ & - 1224 b ^5 b' ^2 + 282 b ^5 c ^2 b' ^2 - 198 b ^4 c a' b' ^2 + 270 b ^3 a' ^2 b' ^2 - 432 b ^3 b' ^4 \\ & + 1008 b ^6 a'' c' - 36 b ^6 c b' c' - 342 b ^5 a' b' c' - 432 b ^7 c' ^2 + 480 b ^6 b'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -108 b^6 c^2 b'' + 240 b^5 c a' b'' - 252 b^4 a'^2 b'' + 342 b^4 b'^2 b'' - 48 b^5 b''^2 \\ & + 144 b^7 c c'' - 324 b^6 a' c'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_8 = & 768 b^7 a'' - 36 b^7 c^2 a'' - 48 b^6 c a' a'' - 132 b^7 c b' - 72 b^7 c^3 b' \\ & - 360 b^6 a' b' + 222 b^6 c^2 a' b' - 180 b^5 c a'^2 b' + 54 b^4 a'^3 b' + 648 b^5 a'' b'^2 \\ & - 72 b^5 c b'^3 - 54 b^4 a' b'^3 - 528 b^8 c' + 54 b^8 c^2 c' - 48 b^7 c a' c' \\ & + 126 b^6 a'^2 c' - 612 b^6 b'^2 c' - 240 b^6 a'' b'' + 354 b^6 c b' b'' - 468 b^5 a' b' b'' \\ & + 48 b^7 c' b'' + 36 b^7 b' c'' - 36 b^7 c b''' + 108 b^6 a' b''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_9 = & -192 b^7 a''^2 - 36 b^8 c a''' + 108 b^7 a' a''' + 66 b^7 c a'' b' + 108 b^6 a' a'' b' \\ & - 252 b^7 b'^2 + 114 b^7 c^2 b'^2 - 162 b^6 c a' b'^2 + 54 b^5 a'^2 b'^2 - 270 b^5 b'^4 \\ & + 240 b^8 a'' c' - 120 b^8 c b' c' - 126 b^7 a' b' c' - 48 b^9 c'^2 - 144 b^8 b'' \\ & - 36 b^8 c^2 b'' + 144 b^7 c a' b'' - 108 b^6 a'^2 b'' + 108 b^6 b'^2 b'' + 72 b^7 b''^2 \\ & + 36 b^9 c c'' - 108 b^8 a' c'' - 36 b^7 b' b''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{10} = & -48 b^9 a'' - 18 b^9 c^2 a'' + 48 b^8 c a' a'' + 18 b^7 a'^2 a'' - 84 b^9 c b' \\ & - 18 b^9 c^3 b' + 108 b^8 a' b' + 84 b^8 c^2 a' b' - 90 b^7 c a'^2 b' - 36 b^8 a''' b' \\ & + 144 b^7 a'' b'^2 - 18 b^7 c b'^3 - 54 b^6 a' b'^3 + 48 b^{10} c' + 18 b^{10} c^2 c' \\ & - 48 b^9 c a' c' - 18 b^8 a'^2 c' - 72 b^8 b'^2 c' + 96 b^8 a'' b'' + 78 b^8 c b' b'' \\ & - 162 b^7 a' b' b'' - 96 b^9 c' b'' + 36 b^9 b' c'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{11} = & 24 b^9 a''^2 + 30 b^9 c a'' b' - 54 b^8 a' a'' b' - 36 b^9 b'^2 + 6 b^9 c^2 b'^2 \\ & - 18 b^8 c a' b'^2 - 54 b^7 b'^4 - 48 b^{10} a'' c' - 30 b^{10} c b' c' + 54 b^9 a' b' c' \\ & + 24 b^{11} c'^2 + 18 b^8 b'^2 b'' \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & (u - a)^{11} B_0 + (u - a)^{10} B_1 + (u - a)^9 B_2 + (u - a)^8 B_3 + (u - a)^7 B_4 \\ & + (u - a)^6 B_5 + (u - a)^5 B_6 + (u - a)^4 B_7 + (u - a)^3 B_8 + (u - a)^2 B_9 \\ & + (u - a) B_{10} + B_{11} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem $(u - a)$ ya göre bir özdeşlik olacağından

$$B_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 11) \quad (2.54)$$

bulunur.

$B_0 = 0$ şartından I. $c = 0$ veya II. $c' = 0$ ($c \neq 0$) elde edilir.

I.Hal: $c = 0$ ise $B_5 = B_6 = B_7 = B_8 = B_9 = B_{10} = B_{11} = 0$ şartlarından bir hal olarak $b = 0$ elde edilir ki, bu durumda regle yüzey bir açılabilir yüzeyden ibarettir.

Şimdi, $c = 0$, $b \neq 0$ olması halini, yani açılabilir olmayan regle yüzeyleri inceleyelim.

$B_4 = 0$ denkleminin her iki tarafını b^6 ile, $B_8 = 0$ denkleminin her iki tarafını $-b^2$ ile, $B_{10} = 0$ denkleminin her iki tarafını -2 ile çarpıp elde edilen ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$a' [36 b a' a'' - 72 b^2 b' - 54 a'^2 b' + 162 b'^3 - 72 b b' b''] = 0 \quad (2.55)$$

elde edilir.

1. $a' = 0$ iken $B_7 - b^4 B_3 - 2B_9 = 0$ bağıntısından

$$b'^2 [b b'' - 6 b'^2 - 8 b^2] = 0 \quad (2.56)$$

bulunur. $b' = 0$ olması halinde, $B_3 = 0$ denkleminde $b = 0$ elde edilir ki, bu mümkün değildir.

Şimdi,

$$b b'' - 6 b'^2 - 8 b^2 = 0 \quad (b' \neq 0) \quad (2.57)$$

olması halini göz önüne alalım.

Diğer taraftan $B_{11} = 0$ denkleminde

$$18 b^7 b'^2 [b b'' - 3 b'^2 - 2b^2] = 0$$

veya $b \cdot b' \neq 0$ olduğundan

$$b b'' - 3 b'^2 - 2b^2 = 0 \quad (2.58)$$

bulunur. Böylece (2.57) ve (2.58) den

$$b'^2 + 2b^2 = 0$$

elde edilir. Buradan $b = 0$ bulunur ki, bu mümkün değildir.

2. Şimdi (2.55) de

$$36 b a' a'' - 72 b^2 b' - 54 a'^2 b' + 162 b'^3 - 72 b b' b'' = 0$$

olması halini göz önüne alalım. Burada $a'^2 = y$ konursa

$$y' - 3y \frac{b'}{b} = 4 b b' + 4 b' b'' - 9 \frac{b'^3}{b} \quad (2.59)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $B_5 = 0$, $B_7 = 0$ ve $B_9 = 0$ denklemlerinden, sırasıyla,

$$\begin{aligned} y'' - \frac{87}{54} \frac{y'^2}{y} + \frac{72}{54} y' \frac{b'}{b} - \frac{1}{54} (144 \frac{b''}{b} - 216 \frac{b'^2}{b^2} + 36) y \\ = \frac{1}{54 b^2} [1872 b^2 b'^2 + 216 b'^4 + 1536 b^4 - 1392 b^3 b'' - 396 b b'^2 b'' \\ + 312 b^2 b''^2 - 108 b^2 b' b'''] \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} y'' - \frac{84}{54} \frac{y'^2}{y} + \frac{153}{108} y' \frac{b'}{b} + \frac{1}{54} (-126 \frac{b''}{b} + 135 \frac{b'^2}{b^2} - 18) y \\ = \frac{1}{54 b^2} [612 b^2 b'^2 + 216 b'^4 + 384 b^4 - 240 b^3 b'' \\ - 171 b b'^2 b'' + 24 b^2 b''^2] \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} y'' - \frac{75}{54} \frac{y'^2}{y} + \frac{59}{54} y' \frac{b'}{b} + \frac{1}{54} \left(-108 \frac{b''}{b} + 54 \frac{b'^2}{b^2} \right) y \\ = \frac{1}{54 b^2} \left[252 b^2 b'^2 + 270 b'^4 + 144 b^3 b'' - 108 b b'^2 b'' \right. \\ \left. - 72 b^2 b''^2 + 36 b^2 b' b''' \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

bulunur.

(2.60) ve (2.61) den,

$$\begin{aligned} -3 \frac{y'^2}{y} - \frac{9}{2} y' \frac{b'}{b} + \left(-18 \frac{b''}{b} + 81 \frac{b'^2}{b^2} - 18 \right) y = \frac{1}{b^2} \left[1260 b^2 b'^2 + 1152 b^4 \right. \\ \left. - 1152 b^3 b'' - 225 b b'^2 b'' + 288 b^2 b''^2 - 108 b^2 b' b''' \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

(2.60) ve (2.62) den,

$$\begin{aligned} -12 \frac{y'^2}{y} + 13 y' \frac{b'}{b} + \left(-36 \frac{b''}{b} + 162 \frac{b'^2}{b^2} - 36 \right) y = \frac{1}{b^2} \left[1620 b^2 b'^2 + 1536 b^4 \right. \\ \left. - 54 b'^4 - 1536 b^3 b'' - 288 b b'^2 b'' + 384 b^2 b''^2 - 144 b^2 b' b''' \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

(2.61) ve (2.62) den de,

$$\begin{aligned} -9 \frac{y'^2}{y} + \frac{35}{2} y' \frac{b'}{b} + \left(-18 \frac{b''}{b} + 81 \frac{b'^2}{b^2} - 18 \right) y = \frac{1}{b^2} \left[360 b^2 b'^2 + 384 b^4 \right. \\ \left. - 54 b'^4 - 384 b^3 b'' - 63 b b'^2 b'' + 96 b^2 b''^2 - 36 b^2 b' b''' \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

elde edilir.

(2.63) denkleminin -4 ile çarpılıp, (2.64) denklemiyle toplanması sonucu elde edilen

$$31 y' \frac{b'}{b} + \left(36 \frac{b''}{b} - 162 \frac{b'^2}{b^2} + 36\right) y = \frac{1}{b^2} \left[-3420 b^2 b'^2 - 3072 b^4 \right. \\ \left. -54 b'^4 + 3072 b^3 b'' + 612 b b'^2 b'' - 768 b^2 b''^2 + 288 b^2 b' b''' \right] \quad (2.66)$$

denkleminde $B_3 = 0$ şartı göz önüne alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{31}{2} y' \frac{b'}{b} + \left(18 \frac{b''}{b} - 81 \frac{b'^2}{b^2} + 18\right) y = 18 b'^2 - 27 \frac{b'^4}{b^2} + 18 \frac{b'^2 b''}{b} \quad (2.67)$$

bulunur.

$B_{11} = 0$ denkleminden yararlanılırsa, (2.63) , (2.64) ve (2.65) denklemleri, sırasıyla,

$$18 y' \frac{b'}{b} + \left(18 \frac{b''}{b} - 81 \frac{b'^2}{b^2} + 18\right) y = 18 b'^2 - 27 \frac{b'^4}{b^2} + 18 \frac{b'^2 b''}{b} \\ \frac{41}{2} y' \frac{b'}{b} + \left(18 \frac{b''}{b} - 81 \frac{b'^2}{b^2} + 18\right) y = 18 b'^2 - 27 \frac{b'^4}{b^2} + 18 \frac{b'^2 b''}{b} \quad (2.68) \\ 13 y' \frac{b'}{b} + \left(18 \frac{b''}{b} - 81 \frac{b'^2}{b^2} + 18\right) y = 18 b'^2 - 27 \frac{b'^4}{b^2} + 18 \frac{b'^2 b''}{b}$$

şekline girer. Bu takdirde, (2.67) ve (2.68) denklemlerinden $y' = 0$ bulunur. Böylece,

$$a'^2 = y = sbt. = d^2$$

elde edilir. Bu durumda, $B_{11} = 0$ şartından $b \neq 0$, $b' \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$b'' - 3 \frac{b'^2}{b} - 2b = 0$$

ve bunun çözümü olarak da

$$b(v) = \frac{d_2}{\sqrt{\cos(2v + d_3)}}, \quad (d_2 > 0, d_3 = sbt., 2v + d_3 \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2})$$

bulunur. Bu takdirde (2.59) denkleminde $\operatorname{tg}(2v + d_3) \neq 0$ için

$$\left[3d^2 + 3d_2^2 \frac{\operatorname{tg}^2(2v + d_3)}{\cos(2v + d_3)} + 12 \frac{d_2^2}{\cos(2v + d_3)} \right] = 0 \quad (2.69)$$

elde edilir. Buradan $d = d_2 = 0$ bulunur ki bu mümkün değildir.

Sonuç olarak, **I.Hal** mümkün değildir.

II.Hal: $c' = 0$ ($c = sbt. \neq 0$) olsun. Bu takdirde, $B_1 = 0$ şartından

$$bc^2 = 0$$

elde edilir. $c \neq 0$ olduğundan $b = 0$ bulunur. O halde, regle yüzey bir açılabilir yüzeyden ibarettir.

(2.52a), (2.52b) denklemlerinde $c' = 0$, $b = 0$ konursa $a' = 0$ bulunur. Bu takdirde, $r_2^{**} + 2g^{**}t^* = 0$ elde edilir ki, bu da (2.48) de ki $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ olma şartına aykırıdır.

Şimdi, (2.48) de mevcut olan $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ şartını kaldıralım. Bu takdirde, regle yüzeyin $v = sbt.$ anadoğruları ile bunların dik yörüngeleri Laguerre eğrisi olacağından $r_2^{**} + 2g^{**}t^* = 0$ olacaktır. Regle yüzeyin (1.25) ile verilen esas büyüklükleri $r_2^{**} + 2g^{**}t^* = 0$ şartında yerine konursa, regle yüzeyin bir dönel koni olduğu görülür.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

TEOREM 2.3.1.1 Üzerinde iki Laguerre eğri ailesinin Tschebycheff şebekesi oluşturduğu regle yüzeyler bir dönel koniden ibarettir.

2.3.2 İki Laguerre Eğri Ailesinin Yarı-Tschebycheff Şebekesi Oluşturduğu Regle Yüzeyler

Bu kısımda, bir regle yüzeyin anadoğrularının, anadoğrulardan farklı bir Laguerre eğri ailesinin teğet vektör alanının, transversali olduğu regle yüzeyleri

belirleyeceğiz. Bundan önceki kısımda yapıldığı gibi, regle yüzeyi anadoğrularına ve bunların dik yörüngelerine nispet edelim.

Regle yüzeyin \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 Laguerre eğri ailelerinden \mathcal{L}_1 i, $v = sbt$. eğri ailesi, \mathcal{L}_2 yi de $v = sbt$. eğrisiyle φ açısı yapan eğri ailesi olarak alalım.

\mathcal{L}_2 Laguerre eğri ailesinin teğet vektör alanının, \mathcal{L}_1 boyunca paralel kayma şartı, (1.21) e göre

$$\varphi_1 = -g^* = 0 \quad (2.70)$$

dır. Buradan

$$\varphi = \beta(v)$$

bulunur. Bu takdirde, regle yüzeyin anadoğrularından farklı Laguerre eğrilerini veren (2.48) denkleminde, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ için

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3r_u^{**} + \sqrt{9r_u^{**2} + 24g^{**}t^*(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)}}{2(r_2^{**} + 2g^{**}t^*)} = d(v), \quad d(v) = \operatorname{tg}\beta(v) \quad (2.71)$$

veya

$$24g^{**}t^* - 4d^2(v)(r_2^{**} + 2g^{**}t^*) = 12d(v)r_u^{**} \quad (2.72)$$

elde edilir.

Regle yüzeyin (1.25) ile verilen büyüklükleri, (2.72) de yerine konur ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$A_0 = -144c^2d^2 + 16d^4c'^2$$

$$A_1 = 576cd^2b' - 192bd^2c' + 64bd^4c' + 32cd^4a'c' - 32d^4c'b'$$

$$A_2 = 576b^2 - 384b^2d^2 - 432b^2c^2d^2 + 64b^2d^4 + 672bcd^2a' + 64bcd^4a'$$

$$+ 16c^2d^4a'^2 - 576d^2b'^2 - 32bcd^4b'c' - 96d^4a'b'c' + 64b^2d^4c'^2$$

$$- 32 b d^4 c' a'' + 192 b d^2 b'' - 64 b d^4 b'' - 32 c d^4 a' b'' + 16 d^4 b''^2$$

$$\begin{aligned} A_3 = & 1056 b^2 c d^2 b' - 64 b^2 c d^4 b' - 1152 b d^2 a' b' - 192 b d^4 a' b' \\ & - 32 b c^2 d^4 a' b' - 96 c d^4 a'^2 b' - 576 b^3 d^2 c' + 192 b^3 d^4 c' \\ & + 96 b^2 c d^4 a' c' - 96 b d^4 a'^2 c' + 96 b d^4 b'^2 c' + 192 b^2 d^2 a'' \\ & - 64 b^2 d^4 a'' - 32 b c d^4 a' a'' + 32 b c d^4 b' b'' + 96 d^4 a' b' b'' \\ & - 96 b^2 d^4 c' b'' + 32 b d^4 a'' b'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 = & 1152 b^4 - 768 b^4 d^2 - 432 b^4 c^2 d^2 + 128 b^4 d^4 + 1344 b^3 c d^2 a' \\ & + 128 b^3 c d^4 a' - 720 b^2 d^2 a'^2 - 192 b^2 d^4 a'^2 + 32 b^2 c^2 d^4 a'^2 \\ & - 96 b c d^4 a'^3 - 576 b^2 d^2 b'^2 + 192 b^2 d^4 b'^2 + 16 b^2 c^2 d^4 b'^2 \\ & + 192 b c d^4 a' b'^2 + 144 d^4 a'^2 b'^2 - 96 b^3 c d^4 b' c' - 96 b^2 d^4 a' b' c' \\ & + 96 b^4 d^4 c'^2 + 32 b^2 c d^4 b' a'' + 96 b d^4 a' b' a'' - 96 b^3 d^4 c' a'' \\ & + 16 b^2 d^4 a''^2 + 384 b^3 d^2 b'' - 128 b^3 d^4 b'' - 64 b^2 c d^4 a' b'' \\ & + 96 b d^4 a'^2 b'' - 96 b d^4 b'^2 b'' + 32 b^2 d^4 b''^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 = & 384 b^4 c d^2 b' - 128 b^4 c d^4 b' - 864 b^3 d^2 a' b' - 64 b^3 c^2 d^4 a' b' \\ & + 96 b^2 c d^4 a'^2 b' + 288 b d^4 a'^3 b' - 96 b^2 c d^4 b'^3 - 288 b d^4 a' b'^3 \\ & - 576 b^5 d^2 c' + 192 b^5 d^4 c' + 96 b^4 c d^4 a' c' - 192 b^3 d^4 a'^2 c' \\ & + 192 b^3 d^4 b'^2 c' + 384 b^4 d^2 a'' - 128 b^4 d^4 a'' - 64 b^3 c d^4 a' a'' \\ & + 96 b^2 d^4 a'^2 a'' - 96 b^2 d^4 b'^2 a'' + 64 b^3 c d^4 b' b'' - 96 b^4 d^4 c' b'' \\ & + 64 b^3 d^4 a'' b'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_6 = & 576 b^5 - 384 b^5 d^2 - 144 b^5 c^2 d^2 + 64 b^5 d^4 + 672 b^5 c d^2 a' + 64 b^5 c d^4 a' \\ & - 720 b^4 d^2 a'^2 - 192 b^4 d^4 a'^2 + 16 b^4 c^2 d^4 a'^2 - 96 b^3 c d^4 a'^3 + 144 b^2 d^4 a'^4 \\ & - 144 b^4 d^2 b'^2 + 192 b^4 d^4 b'^2 + 32 b^4 c^2 d^4 b'^2 + 96 b^3 c d^4 a' b'^2 \\ & - 576 b^2 d^4 a'^2 b'^2 + 144 b^2 d^4 b'^4 - 96 b^5 c d^4 b' c' + 96 b^4 d^4 a' b' c' \\ & + 64 b^5 d^4 c'^2 + 64 b^4 c d^4 b' a'' - 96 b^5 d^4 c' a'' + 32 b^4 d^4 a''^2 \end{aligned}$$

$$+ 192 b^5 d^2 b'' - 64 b^5 d^4 b'' - 32 b^4 c d^4 a' b'' + 96 b^3 d^4 a'^2 b'' \\ - 96 b^3 d^4 b'^2 b'' + 16 b^4 d^4 b''^2$$

$$A_7 = -96 b^6 c d^2 b' - 64 b^6 c d^4 b' + 288 b^5 d^2 a' b' + 192 b^5 d^4 a' b' \\ - 32 b^5 c^2 d^4 a' b' + 192 b^4 c d^4 a'^2 b' - 288 b^3 d^4 a'^3 b' - 96 b^4 c d^4 b'^3 \\ + 288 b^3 d^4 a' b'^3 - 192 b^7 d^2 c' + 64 b^7 d^4 c' + 32 b^6 c d^4 a' c' - 96 b^5 d^4 a'^2 c' \\ + 96 b^5 d^4 b'^2 c' + 192 b^6 d^2 a'' - 64 b^6 d^4 a'' - 32 b^5 c d^4 a' a'' \\ + 96 b^4 d^4 a'^2 a'' - 96 b^4 d^4 b'^2 a'' + 32 b^5 c d^4 b' b'' \\ - 96 b^4 d^4 a' b' b'' - 32 b^6 c d^4 c' b'' + 32 b^5 d^4 a'' b''$$

$$A_8 = -144 b^6 d^2 b'^2 + 16 b^6 c^2 d^4 b'^2 - 96 b^5 c d^4 a' b'^2 + 144 b^4 d^4 a'^2 b'^2 \\ - 32 b^7 c d^4 b' c' + 96 b^6 d^4 a' b' c' + 16 b^8 d^4 c'^2 + 32 b^6 c d^4 b' a'' \\ - 96 b^5 d^4 a' b' a'' - 32 b^7 d^4 c' a'' + 16 b^6 d^4 a''^2$$

olmak üzere,

$$A_0 (u - a)^8 + A_1 (u - a)^7 + A_2 (u - a)^6 + A_3 (u - a)^5 + A_4 (u - a)^4 \\ + A_5 (u - a)^3 + A_6 (u - a)^2 + A_7 (u - a) + A_8 = 0$$

elde edilir. Bu denklem $(u - a)$ ya göre bir özdeşlik olacağından

$$A_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 8) \quad (2.73)$$

bulunur.

$A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0$ şartlarından bir hal olarak $b = 0$ elde edilir ki, bu durumda regle yüzey bir açılabilir yüzeyden ibarettir.

Açılabilir yüzeyler bir tarafa bırakılacak olursa $A_0 = 0$ şartından

$$d^2 (d^2 c'^2 - 9c^2) = 0 \quad (2.74)$$

bulunur. Burada söz konusu hallerden $d = 0$ olamaz, aksi halde $A_2 = 0$

şartından $b = 0$ elde edilir ki, bu da bir açılabilir yüzey verir. O halde geriye

$$d^2 c'^2 - 9c^2 = 0, \quad d \neq 0 \quad (2.75)$$

hali kalır. Buradan,

$$c' = \frac{3c}{d} \quad \left(\text{veya} \quad c' = -\frac{3c}{d} \right) \quad (2.76)$$

ifadesi $A_1 = 0$ şartında kullanılırsa

$$cd[6db' - 6b + 2bd^2 + cd^2a' - d^2b''] = 0 \quad (2.77)$$

elde edilir. Burada iki hal mevcuttur:

I.Hal: $c = 0$ olması halinde $A_3 = 0$ denkleminin her iki tarafını b ile, $A_5 = 0$ denkleminin her iki tarafını -1 ile çarpıp, elde edilen ifadeler $A_7 = 0$ denklemi ile taraf tarafa toplanırsa

$$a' b' d^2 (b'^2 - a'^2) = 0 \quad (2.78)$$

bulunur.

$a' = 0$ ise $A_8 = 0$ dan $b' = 0$ ve $A_6 = 0$ dan $d = \mp\sqrt{3}$;

$b' = 0$ ise $A_2 = 0$ dan $d = \mp\sqrt{3}$ ve $A_4 - 2A_6 = 0$ denkleminde $a' = 0$ elde edildiğinden,

$$a' = 0 \iff b' = 0$$

bulunur. Bu takdirde, (2.78) e göre

Ia. $a' = b' = 0$ veya **Ib.** $b'^2 - a'^2 = 0$ dir.

Ia. halinde yüzey bir minimal regle yüzeydir.

Ib. $b'^2 - a'^2 = 0$ ($a' \neq 0$, $b' \neq 0$) ise $2b^2A_2 - A_4 + A_8 = 0$ denkleminde

$$bd^4 a' b' a'' = 0$$

elde edilir. Buradan $a'' = 0$ bulunur. Bu şartlar altında, $A_5 = 0$ denklemi sağlanmadığından **Ib.** hali söz konusu olamaz.

II.Hal:

$$6 d b' - 6 b + 2 b d^2 + c d^2 a' - d^2 b'' = 0, \quad c \neq 0 \quad (2.79)$$

olması halinde, $b A_3 + A_7 - A_5 = 0$ denkleminde

$$576 b^3 c b' - 576 d^2 a'^3 b' + 576 d^2 a' b'^3 - 192 b^4 c' \\ + 64 b^4 d^2 c' + 32 b^3 d^2 c' (c a' - b'') = 0$$

bulunur. Bu denklemde, $c' = \frac{3c}{d}$ konur ve (2.79) denklemi kullanılırsa

$$a' b' d^5 (b'^2 - a'^2) = 0 \quad (2.80)$$

elde edilir. Burada, üç hal mevcuttur:

IIa. $a' = 0$ ise $2 b^6 A_2 - b^4 A_4 + A_8 = 0$ denkleminde

$$b'^2 (-15 b - 4 b d^2 + 2 d^2 b'') = 0 \quad (2.81)$$

bulunur. Buna göre,

1. $b' = 0$ olması halinde $A_8 = 0$ dan $c' = 0$ ve $c' = \frac{3c}{d}$ olması nedeniyle de $c = 0$ elde edilir ki, bu mümkün değildir.

2. $-15 b - 4 b d^2 + 2 d^2 b'' = 0$, $b' \neq 0$ olması halini göz önüne alırsak,

$$b'' = 2 b + \frac{15}{2} \frac{b}{d^2}$$

olacağından $b^2 A_5 - A_7 = 0$ ve (2.79) denkleminde

$$b^2 c d^4 b'^3 = 0$$

bulunur ki, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, $b' \neq 0$, olduğundan bu eşitlik gerçekleşmez.

IIIb. $b' = 0$ ise $A_1 = 0$ şartından

$$cd(-192b + 64bd^2 + 32cd^2a') = 0$$

elde edilir. $c \neq 0$, $d \neq 0$ olduğundan

$$-12b + 4bd^2 + 2cd^2a' = 0 \quad (2.82)$$

bulunur. Diğer taraftan, $2b^6A_2 - b^4A_4 - A_9 = 0$ denkleminde

$$bd^2a'^2(15b + 4bd^2 + 2cd^2a') = 0 \quad (2.83)$$

elde edilir. Buna göre, 1°. $a' = 0$ veya 2°. $15b + 4bd^2 + 2cd^2a' = 0$ dir.

1°. $a' = 0$ ise $A_8 = 0$ şartından $c = 0$ bulunduğundan bu hal olamaz.

2°. $15b + 4bd^2 + 2cd^2a' = 0$ ise, (2.82) denkleminde yararlanılarak $b = 0$ bulunur.

IIIc. $b'^2 - a'^2 = 0$ ise (1.) $a' = b'$ veya (2.) $a' = -b'$ dür.

(1.) $a' = b'$ olması halinde, $2b^6A_2 - b^4A_4 - A_9 = 0$ denkleminde

$$a'' = -ca' \quad (2.84)$$

elde edilir. Bu şartlar altında, (2.79) denkleminde $b'' = -ca'$ konur ve $A_5 = 0$ denklemini göz önüne alınırsa

$$d^2a'(a' + 2bc) = 0$$

bulunur. $a' \neq 0$ ve $d \neq 0$ olduğundan $a' = -2bc$ ve (2.84) denkleminde de

$$a'' = 2bc^2$$

elde edilir. Bu takdirde, $b^4A_2 - A_6 = 0$ ve $A_8 = 0$ denklemlerinden, sırasıyla,

$$2304 d^2 c^2 - 1152 d c + 432 = 0$$

$$2304 d^2 c^2 + 1152 d c - 432 = 0$$

bulunur. Buradan, $d^2 c^2 = 0$ elde edilir ki, $d \neq 0$, $c \neq 0$ olduğundan bu mümkün değildir.

(2.) $a' = -b'$ halinin de mümkün olmadığı benzer şekilde gösterilebilir.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

TEOREM 2.3.2.1 Anadoğruları, anadoğrularından farklı bir Laguerre eğri ailesinin teğet vektör alanının transversali olduğu açılabilir olmayan yegane regle yüzey bir minimal regle yüzeydir.



BÖLÜM 3

BİR YÜZEYİN MERKEZ YÜZEYLERİ İLE İNVERS YÜZEYLERİNİN LAGUERRE EĞRİLERİNİN OLUŞTURDUĞU ALT TSCHEBYCHEFF ŞEBEKELERİ

3.1 MERKEZ YÜZEYLERİN LAGUERRE EĞRİLERİNİN OLUŞTURDUĞU ALT TSCHEBYCHEFF ŞEBEKELERİ

Bu kısımda, önce merkez yüzeylerinden birisine ait iki Laguerre eğri ailesinin eşlenik-Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzeylerin belirlenmesi problemini ele alacağız.

Bir S yüzeyine ait merkez yüzeylerden biri S_1 olsun. S yüzeyinin eğrilik çizgilerine nispet edilmesi halinde S_1 merkez yüzeyine ait birinci ve ikinci esas formunun katsayıları (1.28) e göre

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \alpha_u^2, \quad \bar{F} = \alpha_u \alpha_v, \quad \bar{G} = \alpha_v^2 + G(1 - \frac{\alpha}{\beta})^2, \\ \bar{L} &= -\varepsilon \sqrt{E} \frac{\alpha_u}{\alpha}, \quad \bar{M} = 0, \quad \bar{N} = \frac{\varepsilon \alpha G}{\sqrt{E}} \frac{\beta_u}{\beta^2} \end{aligned} \quad (\varepsilon = \mp 1) \quad (3.1)$$

dir.

Diğer taraftan, herhangi u, v parametrelerine nispet edilmiş bir yüzeyin Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemi [11] e göre

$$\begin{aligned} \{L_u - 2(L\Gamma_{11}^1 + M\Gamma_{11}^2)\} du^3 + 3\{L_v - 2(L\Gamma_{12}^1 + M\Gamma_{12}^2)\} du^2 dv \\ + 3\{N_u - 2(M\Gamma_{12}^1 + N\Gamma_{12}^2)\} du dv^2 + \{N_v - 2(M\Gamma_{22}^1 + N\Gamma_{22}^2)\} dv^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

olup, burada, L, M, N ve Γ_{ij}^k yerine, sırasıyla, $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ ve $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ konursa S_1 merkez yüzeyine ait Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemi olarak

$$\begin{aligned} & \{\bar{L}_u - 2(\bar{L}\bar{\Gamma}_{11}^1 + \bar{M}\bar{\Gamma}_{11}^2)\} du^3 + 3\{\bar{L}_v - 2(\bar{L}\bar{\Gamma}_{12}^1 + \bar{M}\bar{\Gamma}_{12}^2)\} du^2 dv \\ & + 3\{\bar{N}_u - 2(\bar{M}\bar{\Gamma}_{12}^1 + \bar{N}\bar{\Gamma}_{12}^2)\} du dv^2 + \{\bar{N}_v - 2(\bar{M}\bar{\Gamma}_{22}^1 + \bar{N}\bar{\Gamma}_{22}^2)\} dv^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

bulunur.

Diğer taraftan, S yüzeyinin eğrilik çizgileri şebekesine S_1 yüzeyi üzerinde bir eşlenik şebeke karşı geldiğini biliyoruz. Buna göre, (3.3) denkleminde $\bar{M} = 0$ koyarak S_1 in Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemi için

$$\begin{aligned} & (\bar{L}_u - 2\bar{L}\bar{\Gamma}_{11}^1) du^3 + 3(\bar{L}_v - 2\bar{L}\bar{\Gamma}_{12}^1) du^2 dv \\ & + 3(\bar{N}_u - 2\bar{N}\bar{\Gamma}_{12}^2) du dv^2 + (\bar{N}_v - 2\bar{N}\bar{\Gamma}_{22}^2) dv^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir.

S_1 üzerinde eşlenik şebeke meydana getiren $v = sbt.$, $u = sbt.$ parametre eğrilerinin Laguerre eğrilerinden ibaret olduğunu ve bunların bir Tschebycheff şebekesi oluşturduğunu kabul edelim. Bu takdirde, (3.4) denkleminde

$$\bar{L}_u - 2\bar{L}\bar{\Gamma}_{11}^1 = 0 \quad (3.5)$$

$$\bar{N}_v - 2\bar{N}\bar{\Gamma}_{22}^2 = 0 \quad (3.6)$$

ve Tschebycheff şebekesi oluşturma koşulu gereğince S_1 yüzeyine ait \bar{E} , \bar{G} büyüklükleri için

$$\bar{E} = \bar{E}(u), \quad \bar{G} = \bar{G}(v)$$

bulunur. Bu durumda, S_1 yüzeyine ait Christoffel sembolleri hesaplanırsa (3.5) denklemin için

$$\bar{L}_u - 2\bar{L} \frac{\alpha_{uu}}{\alpha_u} = 0$$

elde edilir. Buradan, $\bar{L} > 0$ olmak üzere

$$\ln |\bar{L}| - 2 \ln |\alpha_u| = \ln A(v), \quad A(v) > 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Buna göre, (3.1) gereğince

$$\bar{L} = A(v) \alpha_u^2 = -\varepsilon \sqrt{E} \frac{\alpha_u}{\alpha} \quad (\alpha_u \neq 0) \quad (3.8)$$

veya

$$\sqrt{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \alpha \alpha_u A(v) \quad (3.9)$$

dir.

Diğer taraftan, S_1 yüzeyine ait Mainardi-Codazzi denklemleri

$$\bar{L}_v = \bar{L} \bar{\Gamma}_{12}^1 - \bar{N} \bar{\Gamma}_{11}^2 \quad (3.10)$$

$$\bar{N}_u = -\bar{L} \bar{\Gamma}_{22}^1 + \bar{N} \bar{\Gamma}_{12}^2 \quad (3.11)$$

olup, $\bar{\Gamma}_{11}^2 = \bar{\Gamma}_{12}^1 = 0$ olduğundan, (3.10) dan

$$\bar{L}_v = 0 \Rightarrow \bar{L} = \bar{L}(u) \quad (3.12)$$

elde edilir. Bu takdirde, (3.8) denklemi

$$A(v) = \frac{\bar{L}(u)}{\alpha_u^2} = \frac{\bar{L}(u)}{\bar{E}(u)} \quad (3.13)$$

şekline girer ki, bu da $A(v) = sbt.$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, eğrilik çizgilerine nispet edilmiş S yüzeyine ait Mainardi-Codazzi denklemleri

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)_v + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) (\ln \sqrt{E})_v = 0 \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)_u + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln\sqrt{G})_u = 0 \quad (3.15)$$

olduğundan, (3.9) ve (3.13) gereğince, (3.14) denkleminde

$$\alpha_v = 0 \quad (3.16)$$

bulunur. Bu durumda, S_1 merkez yüzeyi için (3.1) den

$$\bar{F} = 0$$

elde edilir ki, buradan S yüzeyi ile S_1 merkez yüzeyinin eğrilik çizgilerinin birbirine karşı geldiği anlaşılır.

$\bar{E} = \bar{E}(u)$, $\bar{G} = \bar{G}(v)$, $\bar{F} = \bar{M} = 0$ olduğundan S_1 in Gauss eğriliği için

$$\bar{K} = -\frac{1}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{E}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{G}}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{G}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{E}}}{\partial v} \right) \right] = 0$$

elde edilir. Bu takdirde (3.1) bağıntılarından $\beta_u = 0$ bulunur. (1.29) ve (3.16) bağıntılarından $\bar{K}' = 0$ olduğu görülür.

$\alpha_v = \beta_u = 0$ olması nedeniyle S yüzeyi bir genel silindirdir. $\bar{K} = \bar{K}' = 0$ olduğundan S nin S_1 , S_2 merkez yüzeyleri de açılabilir yüzeylerdir.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

TEOREM 3.1.1 Merkez yüzeylerinden birisine ait iki Laguerre eğri ailesinin eşlenik- Tschebycheff şebekesi oluşturduğu S yüzeyi ve bunun S_1 merkez yüzeyi bir genel silindirden ibarettir.

Şimdi, S_1 ve S_2 merkez yüzeylerinin iki Laguerre eğri ailesinin birbirine karşı geldiği ve S_1 yüzeyi üzerindeki iki Laguerre eğri ailesinin eşlenik yarı-Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzeyleri belirleyelim.

S yüzeyi eğrilik çizgilerine nispet edilir ve S_1 , S_2 nin (1.28) ve (1.29) ile verilen esas büyüklükleri kullanılırsa, S_1 ve S_2 nin Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemi, sırasıyla

$$(\bar{L}_u - 2\bar{L}\bar{\Gamma}_{11}^1) du^3 + 3(\bar{L}_v - 2\bar{L}\bar{\Gamma}_{12}^1) du^2 dv + 3(\bar{N}_u - 2\bar{N}\bar{\Gamma}_{12}^2) du dv^2 + (\bar{N}_v - 2\bar{N}\bar{\Gamma}_{22}^2) dv^3 = 0$$

ve

$$(\bar{L}'_u - 2\bar{L}'\bar{\Gamma}_{11}^1) du^3 + 3(\bar{L}'_v - 2\bar{L}'\bar{\Gamma}_{12}^1) du^2 dv + 3(\bar{N}'_u - 2\bar{N}'\bar{\Gamma}_{12}^2) du dv^2 + (\bar{N}'_v - 2\bar{N}'\bar{\Gamma}_{22}^2) dv^3 = 0$$

dir.

S_1 yüzeyi üzerindeki parametre eğrileri Laguerre eğrileri olarak seçilirse

$$\bar{L}_u - 2\bar{L}\bar{\Gamma}_{11}^1 = 0 \quad (3.17)$$

$$\bar{N}_v - 2\bar{N}\bar{\Gamma}_{22}^2 = 0 \quad (3.18)$$

bulunur. S_1 e ait iki Laguerre eğri ailesinin, S_2 ye ait iki Laguerre eğri ailesine karşı gelmesi için

$$\bar{L}'_u - 2\bar{L}'\bar{\Gamma}_{11}^1 = 0 \quad (3.19)$$

$$\bar{N}'_v - 2\bar{N}'\bar{\Gamma}_{22}^2 = 0 \quad (3.20)$$

olmalıdır.

S_1 yüzeyi üzerindeki iki Laguerre eğri ailesinin yarı-Tschebycheff şebekesi oluşturması halinde, $v = sbt.$ eğrisinin geodezik eğriliği \bar{g}^* olmak üzere

$$\bar{\delta}_1 = -\bar{g}^* = 0 \quad (3.21)$$

dır. Burada, $\bar{\delta}$, S_1 in parametre eğrileri arasındaki açıdır.

Diğer taraftan, S_1 ve S_2 merkez yüzeylerine ait Christoffel sembolleri, bu yüzeylerin (1.28) ve (1.29) ile verilen esas büyüklükleri göz önüne alınarak hesaplanır ve (3.5), (3.6), (3.19), (3.20) denklemlerinde yerine konursa, sırasıyla,

$$(-\varepsilon\sqrt{E}\frac{\alpha_u}{\alpha})_u - 2(-\varepsilon\sqrt{E}\frac{\alpha_u}{\alpha})\frac{\alpha_{uu}}{\alpha} = 0, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon \alpha G}{\sqrt{E}} \frac{\beta_u}{\beta^2}\right)_v - 2\left(\frac{\varepsilon \alpha G}{\sqrt{E}} \frac{\beta_u}{\beta^2}\right) \left\{ (\ln\sqrt{G})_v + [\ln(1 - \frac{\alpha}{\beta})]_v \right. \\ \left. + \frac{\alpha_v}{\alpha_u} (\ln\sqrt{G})_u + \frac{\alpha_v}{\alpha_u} [\ln(1 - \frac{\alpha}{\beta})]_u \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon' \beta E}{\sqrt{G}} \frac{\alpha_v}{\alpha^2}\right)_u - 2\left(\frac{\varepsilon' \beta E}{\sqrt{G}} \frac{\alpha_v}{\alpha^2}\right) \left\{ (\ln\sqrt{E})_u + [\ln(1 - \frac{\beta}{\alpha})]_u \right. \\ \left. + \frac{\beta_u}{\beta_v} (\ln\sqrt{E})_v + \frac{\beta_u}{\beta_v} [\ln(1 - \frac{\beta}{\alpha})]_v \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$(-\varepsilon' \sqrt{G} \frac{\beta_v}{\beta})_u - 2(-\varepsilon' \sqrt{G} \frac{\beta_v}{\beta}) \frac{\beta_{uv}}{\beta_v} = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.22) ve (3.25) den

$$\frac{\alpha \alpha_u}{\sqrt{E}} = \mu(v) , \quad (\mu(v) > 0) \quad (3.26)$$

$$\frac{\beta \beta_v}{\sqrt{G}} = \gamma(u) , \quad (\gamma(u) > 0)$$

bulunur. $\text{Cos } \bar{\delta} = \frac{\bar{F}}{\sqrt{EG}}$ olduğu göz önüne alınır ve (3.26) kullanılırsa

$$\text{Cos } \bar{\delta}(v) = \mp \frac{\alpha_v}{\sqrt{\alpha_v^2 + \left[\frac{\beta \beta_v}{\gamma(u)} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^2}} \quad (3.27)$$

ve S yüzeyine ait Mainardi-Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \left(\frac{\alpha_{uv}}{\alpha_u} - \frac{\mu'(v)}{\mu(v)} \right) (\beta - \alpha) \\ \beta_u &= \left(\frac{\beta_{uv}}{\beta_v} - \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)} \right) (\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (3.28)$$

şekline girer. Bu şartlar altında, (3.23) ve (3.24) denklemlerinden

$$\begin{aligned} 3\alpha_v \beta_u - (\alpha - \beta) \beta_{uv} - 2\beta_u \beta_v &= 0 \\ 3\alpha_v \beta_u - (\beta - \alpha) \alpha_{uv} - 2\alpha_u \alpha_v &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (3.27) denkleminde u ya göre türev alınarak

$$A = A(u, v) = \frac{1}{\alpha_v^2 + \left[\frac{\beta \beta_v}{\gamma(u)} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right]^2},$$

$$B = B(u, v) = \left[\frac{\beta_u \beta_v + \beta \beta_{uv}}{\gamma(u)} - \frac{\beta \beta_v \gamma'(u)}{\gamma^2(u)} \right] \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) - \frac{\beta_v \alpha_u}{\gamma(u)} + \frac{\alpha \beta_u \beta_v}{\gamma(u) \beta}$$

olmak üzere,

$$2\alpha_v A \{ \alpha_{vu} - \alpha_v A [\alpha_v \alpha_{vu} + \frac{\beta \beta_v}{\gamma(u)} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) B] \} = 0 \quad (3.30)$$

bulunur. Burada iki hal mevcuttur:

I.Hal: $\alpha_v = 0$ olması halinde, (3.28) ile (3.29) daki birinci denklemlerden, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mu(v) &= \mu = sbt. , \\ (\alpha - \beta) \beta_{uv} + 2 \beta_u \beta_v &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (3.28) in ikinci denklemi

$$(\alpha - \beta) \beta_{uv} = \beta_u \beta_v + \beta_v (\alpha - \beta) \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)} \quad (3.32)$$

şekline girer. (3.31) ve (3.32) den

$$3 \beta_u + (\alpha - \beta) \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)} = 0 \quad (3.33)$$

bulunur.

(3.33) denkleminde v ye göre türev alınarak

$$3 \frac{\beta_{vu}}{\beta_v} = \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)}$$

veya

$$\beta_v^3 = \gamma(u) C(v), \quad (C(v) > 0)$$

elde edilir. Bu takdirde, (3.31) ve (3.33) den $\beta_u = 0$ bulunur.

Böylece S yüzeyinin bir silindir, S_1 ve S_2 merkez yüzeyinin ise açılabilir yüzeyler olduğu görülür. Ayrıca, açılabilir yüzeylerde anadoğruların farklı bir Laguerre eğri ailesinin teğet vektör alanının anadoğrular boyunca paralel kaymasından S_1 yüzeyinin bir koniden ibaret olduğu anlaşılır.

II.Hal: $\alpha_{vu} - \alpha_v A [\alpha_v \alpha_{vu} + \frac{\beta \beta_v}{\gamma(u)} (1 - \frac{\alpha}{\beta}) B] = 0$, ($\alpha_v \neq 0$) olması halinde, A ve B nin değerleri kullanılarak

$$\frac{\beta_v (\beta - \alpha)}{\gamma^2(u) \left\{ \alpha_v^2 + \left[\frac{\beta \beta_v}{\gamma(u)} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right]^2 \right\}} \left\{ (\beta - \alpha) (\alpha_{vu} \beta_v - \alpha_v \beta_{uv}) - \beta_v \alpha_v \left[(\beta - \alpha) \left(\frac{\beta_u}{\beta} - \frac{\gamma'(u)}{\gamma} \right) - \left(\alpha_u - \frac{\alpha \beta_u}{\beta} \right) \right] \right\} = 0$$

elde edilir. Buna göre, $\beta_v \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(\beta - \alpha) (\alpha_{vu} \beta_v - \alpha_v \beta_{uv}) - \beta_v \alpha_v \left[(\beta_u - \alpha_u) - \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)} (\beta - \alpha) \right] = 0 \quad (3.34)$$

bulunur.

Diğer taraftan, (3.29) dan elde edilen

$$\beta_{uv} (\beta - \alpha) = -3\alpha_v \beta_u + 2\beta_u \beta_v$$

$$\alpha_{uv} (\beta - \alpha) = 3\alpha_v \beta_u - 2\alpha_u \alpha_v$$

eşitlikleri, (3.34) de kullanılırsa

$$3\alpha_v \beta_u - \alpha_u \beta_v + \beta_v \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)} (\beta - \alpha) = 0 \quad (3.35)$$

ve (3.28) ve (3.29) denklemleri yardımıyla da son denklem

$$\beta_v (3\beta_u - \alpha_u) = 0$$

şekline girer. $\beta_v \neq 0$ olduğundan

$$3\beta_u = \alpha_u$$

veya

$$\beta = \frac{1}{3} [\alpha + d(v)] \quad (3.36)$$

elde edilir. Bu takdirde, (3.29) dan,

$$\begin{aligned} 7\alpha_u \alpha_v - (2\alpha - d(v)) \alpha_{uv} - 2\alpha_u d'(v) &= 0, \\ -3\alpha_u \alpha_v + (2\alpha - d(v)) \alpha_{uv} &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

bulunur. Buna göre,

$$\alpha_u [2\alpha_v - d'(v)] = 0$$

elde edilir. $\alpha_u \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa son denklemden

$$\alpha = \frac{1}{2} d(v) + e(u)$$

bulunur. α nın bu değeri (3.37) de yerine konursa

$$e'(u) d'(v) = 0$$

elde edilir. Buradan da, $d'(v) \neq 0$ olduğundan

$$e'(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad e(u) = sbt. = e$$

bulunur ki, bu da $\alpha_u \neq 0$ koşuluna aykırıdır. O halde, **II. Hal** olamaz.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

TEOREM 3.1.2 Merkez yüzeyleri üzerindeki iki Laguerre eğri ailesinin birbirine karşı geldiği ve S_1 merkez yüzeyi üzerindeki iki Laguerre eğri ailesinin eşlenik yarı-Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzey bir genel silindir, S_1 yüzeyi ise bir konidir.

3.2 BİR YÜZEYİN LAGUERRE EĞRİLERİ İLE İNVERS YÜZEYİNİN LAGUERRE EĞRİLERİNİN BİRBİRİNE KARŞI GELMESİ

Bu kısımda, bir yüzeyin Laguerre eğrileri ile bu yüzeyin invers yüzeyi üzerindeki Laguerre eğrilerinin birbirine karşı gelme koşullarını belirleyeceğiz.

Bir S yüzeyinin invers yüzeyi \bar{S} olduğuna göre, \bar{S} yüzeyine ait birinci ve ikinci esas formun katsayıları (1.31) gereğince

$$\bar{E} = \frac{c^4}{r^4} E, \quad \bar{F} = \frac{c^4}{r^4} F, \quad \bar{G} = \frac{c^4}{r^4} G, \quad (3.38)$$

$$\bar{L} = -\frac{c^2}{r^2} L - \frac{2c^2 p}{r^4} E, \quad \bar{M} = -\frac{c^2}{r^2} M - \frac{2c^2 p}{r^4} F, \quad \bar{N} = -\frac{c^2}{r^2} N - \frac{2c^2 p}{r^4} G$$

dir.

Diğer taraftan, eğrilik çizgilerine nispet edilmiş bir S yüzeyinin Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemi

$$E^{3/2} r_1^* du^3 + 3E\sqrt{G} r_2^* du^2 dv + 3G\sqrt{E} r_1^{**} du dv^2 + G^{3/2} r_2^{**} dv^3 = 0 \quad (3.39)$$

dir. Burada, r_1^* , r_2^* , r_1^{**} , r_2^{**} sırasıyla, yüzeyin r^* ve r^{**} esas eğriliklerinin eğrilik çizgileri doğrultusundaki türevlerini göstermektedir.

(1.8) bağıntılarından yararlanılırsa (3.39) denklemi

$$E r_u^* du^3 + 3E r_v^* du^2 dv + 3G r_u^{**} du dv^2 + G r_v^{**} dv^3 = 0 \quad (3.40)$$

şekline girer.

S yüzeyinin eğrilik çizgilerine \bar{S} yüzeyi üzerinde eğrilik çizgileri karşı geldiğinden, \bar{S} invers yüzeyinin Laguerre eğrilerinin diferensiyel denklemini elde etmek için (3.40) da E, G yerine \bar{E}, \bar{G} nin (3.38) ile verilen değerleri konursa

$$\begin{aligned} E (r^2 r^* + 2p)_u du^3 + 3 E (r^2 r^* + 2p)_v du^2 dv \\ + 3 G (r^2 r^{**} + 2p)_u du dv^2 + G (r^2 r^{**} + 2p)_v dv^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

bulunur.

S yüzeyi ile \bar{S} invers yüzeyinin Laguerre eğrilerinin birbirine karşı gelmesi için, (3.40) ve (3.41) diferensiyel denklemlerinin katsayılarının orantılı olması gerek ve yeterdir. Buna göre,

$$\frac{r_u^*}{(r^2 r^* + 2p)_u} = \frac{r_v^*}{(r^2 r^* + 2p)_v} = \frac{r_u^{**}}{(r^2 r^{**} + 2p)_u} = \frac{r_v^{**}}{(r^2 r^{**} + 2p)_v}$$

olmalıdır. Buradan

$$r_u^* (r^2 r^* + 2p)_v = r_v^* (r^2 r^* + 2p)_u \quad (3.42)$$

$$r_u^* (r^2 r^{**} + 2p)_u = r_u^{**} (r^2 r^* + 2p)_u \quad (3.43)$$

$$r_u^* (r^2 r^{**} + 2p)_v = r_v^{**} (r^2 r^* + 2p)_u \quad (3.44)$$

$$r_v^* (r^2 r^{**} + 2p)_u = r_u^{**} (r^2 r^* + 2p)_v \quad (3.45)$$

$$r_v^* (r^2 r^{**} + 2p)_v = r_v^{**} (r^2 r^* + 2p)_v \quad (3.46)$$

$$r_u^{**} (r^2 r^{**} + 2p)_v = r_v^{**} (r^2 r^{**} + 2p)_u \quad (3.47)$$

bulunur.

Diğer taraftan, S yüzeyi ile \bar{S} yüzeyine ait Mainardi-Codazzi denklemleri,

$$r_v^* = (\ln \sqrt{E})_v (r^{**} - r^*) \quad (3.48)$$

$$r_u^{**} = (\ln \sqrt{G})_u (r^* - r^{**})$$

ve

$$\begin{aligned} (r^2 r^* + 2p)_v &= [(\ln\sqrt{E})_v - 2\frac{r_v}{r}] (r^{**} - r^*) r^2 \\ (r^2 r^{**} + 2p)_u &= [(\ln\sqrt{G})_u - 2\frac{r_u}{r}] (r^* - r^{**}) r^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

dir. (3.48) ve (3.49) dan

$$\begin{aligned} r r_v r^{**} + p_v &= 0 \\ r r_u r^* + p_u &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

elde edilir. (3.50) denklemleri göz önüne alınırsa, (3.42) ve (3.46) denklemleri

$$\begin{aligned} r_u^* (r^* - r^{**}) r r_v &= 0 \quad (r \neq 0) \\ r_v^{**} (r^* - r^{**}) r r_u &= 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

şekline girer. Buna göre, küreden farklı bir yüzey için

1. $r_u^* = 0$, $r_v^{**} = 0$ veya 2. $r_v = 0$ dir.

Birinci halde S yüzeyi bir Dupin siklidiir. \bar{S} yüzeyinde bir Dupin siklidi olduğu kolayca görülür. Bu takdirde, $r^* = r^*(v)$, $r^{**} = r^{**}(u)$ olup, (3.50) şartları göz önüne alınırsa, (3.43), (3.44), (3.47) denklemlerinin sağlandığı ve (3.45) denkleminde ise

$$r (r^{**} - r^*) (r_u r_v^* + r_v r_u^{**}) = 0$$

olduğu görülür. $r (r^{**} - r^*) \neq 0$ olduğundan

$$r_u r_v^* + r_v r_u^{**} = 0 \quad (3.52)$$

veya

$$\frac{r_u}{r_v} = -\frac{r_u^{**}}{r_v^*}, \quad r^{*'}(v) \neq 0 \quad (3.53)$$

bulunur. Buradan, ϕ argümanının keyfi bir fonksiyonu olmak üzere

$$r = \phi(t) , \quad (t = r^{**} - r^*) \quad (3.54)$$

dir. Bu takdirde, (3.50) den

$$\begin{aligned} p_u &= -\phi \phi' r^{***'}(u) r^*(v) \\ p_v &= \phi \phi' r^{***}(u) r^{*'}(v) \end{aligned} \quad \left(\phi' = \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (3.55)$$

bulunur. $p_{uv} = p_{vu}$ şartından da

$$r^{***'} r^{*'} \{ (\phi^2)'' t + 2 (\phi^2)' \} = 0$$

elde edilir. $r^{***'} \neq 0$ için

$$(\phi^2)'' t + 2 (\phi^2)' = 0 \quad (3.56)$$

bulunur. Bu diferensiyel denklemin çözümü, C pozitif bir sabit olmak üzere

$$\phi^2 = r^2 = -\frac{C}{r^{***}(u) - r^*(v)} + \bar{C}, \quad (\bar{C} = sbt.)$$

dir. Bu takdirde, (3.55) denklemlerinden

$$\frac{p_v}{p_u} = -\frac{r^{*'} r^{***}}{r^{***'} r^*} \Rightarrow \frac{r^{***'}}{r^{***}} p_v + \frac{r^{*'}}{r^*} p_u = 0$$

elde edilir. Buradan

$$p = \psi \left(\frac{r^{***}(u)}{r^*(v)} \right)$$

bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned} p_u &= \psi' \frac{r^{***'}}{r^*}, \quad p_v = -\psi' \frac{r^{*'} r^{***}}{r^{*2}} \\ \left(\psi' = \frac{d\psi}{d\bar{t}}, \quad \bar{t} = \frac{r^{***}(u)}{r^*(v)} \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

dır.

Diğer taraftan, $\phi^2(t) = -\frac{C}{t} + \bar{C}$ olduğu göz önüne alınırsa (3.55) denklemleri

$$\begin{aligned} p_u &= -\frac{1}{2} \frac{C}{(r^{**} - r^*)^2} r^{**'} r^* \\ p_v &= \frac{1}{2} \frac{C}{(r^{**} - r^*)^2} r^{*'} r^{**} \end{aligned} \quad (3.58)$$

şekline girer. (3.57) ve (3.58) denklemlerinden

$$r^{*'} r^{**} \left[\frac{\psi'}{r^{*2}} + \frac{C}{2(r^{**} - r^*)^2} \right] = 0$$

elde edilir ki, $r^{*'} \cdot r^{**} \neq 0$ olduğundan

$$\psi' + \frac{C}{2(\bar{t} - 1)^2} = 0$$

ve buradan da

$$p = \psi = \frac{C r^*(v)}{2(r^{**}(u) - r^*(v))} + d, \quad (d = sbt.) \quad (3.59)$$

bulunur.

Özel haller: $r^{*'} = 0$ ise $r^{**} = sbt. (\neq 0)$ ve (3.52) den dolayı da $r_u r_v^* = 0$ dır. Burada, $r_v^* = 0$ ise yüzey bir dönel silindir, $r_u = 0$ ise $p_u = 0$ dır.

$r_v^* = 0$ ise (3.52) den $r_u^{**} = 0$ bulunur. Bu durumda yüzey bir dönel silindiridir.

İkinci halde, $r_v = 0$ olduğundan (3.50) nin birinci denkleminde

$$p_v = 0$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (3.43) ile (3.50) nin ikinci denkleminde

$$r_u = 0, \quad p_u = 0$$

bulunur ki, yüzey bir küreden farklı kabul edildiğinden bu mümkün değildir.

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

TEOREM 3.2.1 Üzerindeki Laguerre eğrileri, invers yüzeyi üzerindeki Laguerre eğrilerine karşı gelen, küreden farklı bir yüzey Dupin siklidir.

Bir Dupin siklidinin iki eğrilik çizgisi ailesi Laguerre eğrileri ile çakıştı-
ğundan [11] ve böyle bir yüzeyin eğrilik çizgileri izometrik bir sistem meydana
getirdiğinden, yüzey parametreleri uygun seçilmek suretiyle $E = G$ yapılabilir.
Bu takdirde, yüzeyin eğrilik çizgilerinden farklı Laguerre eğri ailesini, (\mathcal{L}_3 eğri
ailesini), veren diferensiyel denklem (3.40) a göre

$$r_v^* du + r_u^{**} dv = 0 \quad (3.60)$$

dir.

$v = sbt.$ eğri ailesinin (3.60) ile verilen \mathcal{L}_3 Laguerre eğri ailesinin transversali
olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$\varphi_1 = -g^* \quad (3.61)$$

dir. Burada φ , $v=sbt.$ eğrisi ile \mathcal{L}_3 Laguerre eğri ailesi arasındaki açı ve g^*
da $v = sbt.$ eğri ailesinin geodezik eğriliğidir.

$E = G$ olduğu göz önüne alınırsa, (3.60) yardımıyla

$$\text{Tg}\varphi = -\frac{r_v^*}{r_u^{**}}, \quad r_u^{**} \neq 0 \quad (3.62)$$

bulunur. (3.61), (3.62) ve (3.48) den yararlanılırsa

$$r_v^* \left[\frac{1}{r_u^{**} - r^*} - \frac{r_{uu}^{**}}{r_u^{**2} + r_v^{*2}} \right] = 0 \quad (3.63)$$

elde edilir. Burada iki hal mevcuttur.

I.Hal: $r_v^* = 0$ olsun. Bu takdirde, (3.52) den

$$r_v r_u^{**} = 0$$

elde edilir. (3.62) ye göre $r_u^{**} \neq 0$ olduğundan

$$r_v = 0 \Rightarrow r = r(u)$$

ve (3.50) nin birinci denkleminde

$$p = p(u)$$

bulunur.

Buna göre, $u = sbt.$ eğrilik çizgileri ailesi küreseldir.

$r_u^* = r_v^* = 0 \Rightarrow r^* = sbt.$ olduğundan S yüzeyi bir boru (hortum) yüzeyidir. Bu durumda, S nin eğrilik çizgilerinden farklı olan Laguerre eğri ailesi $v = sbt.$ eğrilik çizgileri ailesi ile çakışır.

II.Hal: $r_v^* \neq 0$, $\frac{1}{r^{**} - r^*} - \frac{r_{uu}^{**}}{r_u^{**2} + r_v^{*2}} = 0$. Bu denklem

$$r_u^{**2} + r_v^{*2} - (r^{**} - r^*) r_{uu}^{**} = 0$$

şeklinde yazılır ve u ya göre türev alınırsa,

$$r_u^{**} r_{uu}^{**} + (r^* - r^{**}) r_{uuu}^{**} = 0$$

ve buradan da

$$r_{uu}^{**}(u) + c r^{**}(u) = c r^*(v), \quad c = sbt. > 0$$

bulunur ki, bu da ancak r^* in bir sabit olması ile mümkündür. O halde, **II.Hal** söz konusu olamaz.

Şimdi, **I. Hal** de elde edilen boru yüzeyinin esas büyüklüklerini hesaplayalım.

S ye ait

$$r_1^{**} = g^{**} (r^* - r^{**})$$

Mainardi-Codazzi denkleminde dolayı

$$(\ln\sqrt{E})_u = \frac{r_u^{**}}{r^* - r^{**}}$$

olup, buradan integrasyonla

$$\sqrt{E} = \frac{B(v)}{r^* - r^{**}}$$

elde edilir. Burada, $B(v)$ keyfi, pozitif bir fonksiyondur. Bu takdirde, Gauss denklemini

$$\begin{aligned} r^* r^{**} &= -\frac{1}{E} [(\ln\sqrt{E})_{uu} + (\ln\sqrt{E})_{vv}] \\ &= -\frac{(r^* - f(u))^2}{B^2(v)} \left[\left(\frac{f'(u)}{r^* - f(u)} \right)' + \left(\frac{B'(v)}{B(v)} \right)' \right], \quad (r^{**} = f(u)) \end{aligned} \quad (3.64)$$

şekline girer. Bu denklem v ye göre türetilir ve

$$B'(v) \neq 0 \quad (3.65)$$

kabul edilirse,

$$-2r^* \frac{f(u)}{[r^* - f(u)]^2} = \frac{1}{B B'} \left(\frac{B'}{B} \right)'' = s_{bt.} = k \quad (3.66)$$

bulunur. Buradan

$$k f^2(u) - 2(k-1)r^* f(u) + k r^{*2} = 0$$

elde edilir ki, bu da: **1.** $r^* = 0 = k$ veya **2.** $f(u) = r^{**} = s_{bt.}$ olduğunu gösterir.

Birinci halde S bir açılabilir yüzeydir. Bu takdirde, (3.66) formülünden

$$\left(\frac{B'}{B} \right)'' = 0 \quad \Rightarrow \quad B = e^{a_1 v^2 + b_1 v + c_1}$$

elde edilir. B nin değeri (3.64) de yerine konursa

$$\left(\frac{f'(u)}{f(u)}\right)' - 2a_1 = 0 \Rightarrow f(u) = r^{**} = e^{a_1 u^2 + a_2 u + a_3}$$

bulunur.

Böylece S nin açılabilir yüzey olması halinde yüzeyin esas büyüklükleri için

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = \frac{e^{a_1 v^2 + b_1 v + c_1}}{e^{a_1 u^2 + a_2 u + a_3}}, \quad F = M = 0,$$

$$L = 0,$$

$$N = r^{**} E = e^{a_1 u^2 + a_2 u + a_3} \left(\frac{e^{a_1 v^2 + b_1 v + c_1}}{e^{a_1 u^2 + a_2 u + a_3}} \right)^2$$

elde edilir.

İkinci halde, $r^{**} = sbt.$ $r^* = sbt.$ olduğundan yüzey bir dönele silindir veya düzlemdir.

Nihayet, (3.65) de ki $B' \neq 0$ şartının sağlanmadığı hali inceleyelim. Buna göre, (3.64) denkleminde $B' = 0$ ($B = sbt. = a$) konursa $f(u)$ fonksiyonunu veren

$$f''(u)[r^* - f(u)] + f'^2(u) + a^2 r^* f(u) = 0$$

diferensiyel denklem elde edilir. Bu diferensiyel denklem uygun bir dönüşümle bir Bernoulli diferensiyel denkleme dönüştürülerek integre edilirse

$$\int \frac{df(u)}{\sqrt{A_1 (r^* - f(u))^2 + 2r^* a^2 (r^* - f(u)) - r^{**2} a^2}} = u + \tilde{a},$$

(A_1, \tilde{a} : keyfi sabitler.)

elde edilir. Buradan, gerekli işlemler yapılarak

$$r^{**} = \begin{cases} r^* \left\{ 1 - \frac{a}{A_1} [\sqrt{a^2 + A_1} \text{Cosh} \sqrt{A_1} (u + \tilde{a}) - a] \right\} & A_1 > 0 \\ \frac{r^*}{2} [1 - a^2 (u + \tilde{a})^2] & A_1 = 0 \\ r^* \left\{ 1 + \frac{a}{A_1} [\sqrt{a^2 + A_1} \text{Sin} \sqrt{-A_1} (u + \tilde{a}) + a] \right\} & A_1 < 0 \end{cases}$$

bulunur. Buna göre ;

$A_1 > 0$ iken

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = \frac{A_1/r^*}{\sqrt{a^2 + A_1} \text{Cosh} \sqrt{A_1} (u + \tilde{a}) - a} ,$$

$$L = r^* E = r^* \left(\frac{A_1/r^*}{\sqrt{a^2 + A_1} \text{Cosh} \sqrt{A_1} (u + \tilde{a}) - a} \right)^2 ,$$

$$N = r^{**} E = r^* \left\{ 1 - \frac{a}{A_1} [\sqrt{a^2 + A_1} \text{Cosh} \sqrt{A_1} (u + \tilde{a}) - a] \right\} E ,$$

$A_1 = 0$ iken

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = \frac{2a/r^*}{[1 + a^2 (u + \tilde{a})^2]} ,$$

$$L = r^* E = r^* \left(\frac{2a/r^*}{1 + a^2 (u + \tilde{a})^2} \right)^2 ,$$

$$N = r^{**} E = \frac{r^*}{2} [1 - a^2 (u + \tilde{a})^2] \left(\frac{2a/r^*}{1 + a^2 (u + \tilde{a})^2} \right)^2 ,$$

$A_1 < 0$ iken

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = \frac{-A_1/r^*}{\sqrt{a^2 + A_1} \text{Sin} \sqrt{-A_1} (u + \tilde{a}) + a} ,$$

$$L = r^* E = r^* \left(\frac{-A_1/r^*}{\sqrt{a^2 + A_1} \text{Sin} \sqrt{-A_1} (u + \tilde{a}) + a} \right)^2 ,$$

$$N = r^{**} E = r^* \left\{ 1 + \frac{a}{A_1} [\sqrt{a^2 + A_1} \text{Sin} \sqrt{-A_1} (u + \tilde{a}) + a] \right\} E$$

bulunur.

Böylece şu teorem elde edilir.

TEOREM 3.2.2 Üzerindeki Laguerre eğrileri, invers yüzeyi üzerindeki Laguerre eğrilerine karşı gelen bir yüzeyin bir eğrilik çizgisi ailesinin, eğrilik çizgilerinden farklı bir Laguerre eğri ailesinin transversali olması halinde, yüzey bir boru yüzeyidir.



SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, üzerinde Laguerre eğrilerinin Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzeylerin belirlenmesi problemi ele alınmış ve bununla ilgili olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir :

Üzerinde üç Laguerre eğri ailesinin Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzeyler birer dönel silindirden ibarettir.

İki Laguerre eğri ailesinin bir yarı-Tschebycheff veya bir Tschebycheff şebekesi oluşturduğu açılabilir yüzeyler, sırasıyla, birer koni veya birer dönel silindirdir.

İki Laguerre eğri ailesinin oluşturduğu bir Tschebycheff şebekesine sahip bir regle yüzey birer dönel koni; bu eğri ailelerinin bir yarı-Tschebycheff şebekesi oluşturduğu regle yüzey ise birer minimal regle yüzeydir.

Merkez yüzeylerinden birisine ait iki Laguerre eğri ailesinin eşlenik Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzey ve bunun bir merkez yüzeyi bir genel silindirden ibarettir.

S_1 ve S_2 merkez yüzeyleri üzerindeki iki Laguerre eğri ailesinin birbirine karşı geldiği ve S_1 merkez yüzeyi üzerindeki iki Laguerre eğri ailesinin eşlenik yarı-Tschebycheff şebekesi oluşturduğu S yüzeyi bir genel silindir, S_1 yüzeyi ise bir konidir.

Üzerindeki Laguerre eğrilerinin, invers yüzeyi üzerindeki Laguerre eğrilerine karşı geldiği, küreden farklı, bir yüzey bir Dupin siklidinden ibarettir. Bu çeşit yüzeyler üzerindeki bir eğrilik çizgisi ailesinin, eğrilik çizgilerinden farklı bir Laguerre eğri ailesinin transversali olması halinde yüzey bir boru yüzeyidir.

Bir yüzey üzerinde tanımlı ve teğetsel olmayan bir vektör alanına bağlı Laguerre eğrilerinin üçlü bir Tschebycheff şebekesi oluşturduğu yüzeylerin belirlenmesi problemi incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **EISENHART, L.P.** A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Dover Publication Inc., New York, (1960).
- [2] **ŞEMİN, F.** Généralisation de quelques formules relatives a la théorie des surfaces, İstanbul Üniversitesi Fen Fak. Mec., Seri A, No.20, 173-180, (1955).
- [3] **ŞEMİN, F.** Note sur les dérivées invariantes, İstanbul Üniversitesi Fen Fak. Mec. Seri A, No.19, 175-179, (1954).
- [4] **GOURNERIE DE LA** Etude sur la courbure des surfaces. Journal de LIOUVILLE, 1^{re} série, 20, p.145, (1855).
- [5] **ŞEMİN, F.** Sur une propriété caractéristique des surfaces a courbure moyenne constante, İstanbul Üniversitesi Fen Fak. Mec. Seri A, 19, 140-147, (1954).
- [6] **ŞEMİN, F.** Sur la fonction de direction de Laguerre, İstanbul Üniversitesi Fen Fak. Mec., Seri A, 46-47, 67-71, (1981-1982).
- [7] **TSAREVA, B., ZLATONOV, G.** On the geometry of the nets in the n-dimensional space of Weyl, Journal of Geometry, Vol.38, (1990).
- [8] **STOKER, J.J.** Differential Geometry, Willey-Interscience, New York, (1969).
- [9] **WEATHERBURN, C.E.** Differential Geometry 2, Cambridge University Press, p.47, (1930).
- [10] **WEATHERBURN, C.E.** Differential Geometry 1, Cambridge University Press, p.148-163, (1931).
- [11] **ÖZDEĞER, A.** Surfaces on which the Laguerre lines form a hexagonal three-web, İstanbul Üniversitesi Fen Fak. Mec., Seri A, No.34, (1969).

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında İstanbul'da doğan Güler Gürpınar ARSAN, 1982 yılında Boğaziçi Behçet Kemal Çağlar Lisesinden, 1986 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliđi Bölümünden mezun oldu. 1987 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliđi Bölümü Geometri Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve atandı. Aynı yıl, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Programında Yüksek Lisans Öğrenimine başlayarak, 1990 yılında tamamlamış olduğu "Harmonik Kaehler Manifoldları için bir eğrilik özdeşliği" adlı teziyle Yüksek Mühendis ünvanını aldı.

