

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI GRAFLARIN C_m -SUPERMAGIC
ETİKETLEMELERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU EROL

OCAK 2021
MUĞLA

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI GRAFLARIN C_m -SUPERMAGIC
ETİKETLEMELERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU EROL

OCAK 2021

MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü
TEZ ONAYI

EBRU EROL tarafından hazırlanan **BAZI GRAFLARIN C_m –SUPERMAGIC ETİKETLEMELERİ ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 11/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Prof. Dr. Bekir TANAY (Üye)

İmza

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Tarkan ÖNER (Danışman)

İmza

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU (Jüri Başkanı)

İmza

Matematik Anabilim Dalı,
Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın

ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

İmza

Matematik Anabilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Tarkan ÖNER

İmza

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 11/01/2021

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Ebru EROL
11/01/2021

ÖZET
BAZI GRAFLARIN C_m –SUPERMAGIC ETİKETLEMELERİ ÜZERİNE

Ebru EROL

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tarkan ÖNER

Ocak 2021, 31 sayfa

Graf etiketleme (graph labeling veya valuation), graf elemanlarını (düğümleri veya ayrıtları) sayılara, genellikle de pozitif tamsayılara eşleyen bir fonksiyondur. Tanım kümesi düğümlerden oluşan etiketlemelere düğüm-etiketleme (vertex-labeling), ayrıtlardan oluşan etiketlemelere de ayrıt-etiketleme (edge-labeling) adı verilir. Eğer tanım kümesi hem düğüm hem de ayrıtlardan oluşuyor ise bu etiketlemeler toplam etiketleme (total-labeling) olarak adlandırılır. Literatürde çok farklı çeşitlerde etiketlemeler mevcuttur. Bunlardan bazıları: Harmonious, cordial, graceful, antimagic ve H –(super)magic gibi.

Bu tez çalışmasının amacı, n yapraklı, s parçalı m –poligonal kitap-yılan grafını tanıtır, bu grafın, C_m m ayrıt ve m düğümden oluşan dairesel graf olmak üzere C_m –supermagic etiketlemeye sahip olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Magic Etiketleme, Örtü, Kitap Graf, Yılan Graf

ABSTRACT
ON C_m —SUPERMAGIC LABELLINGS OF SOME GRAPH

Ebru EROL

Master of Science (M.Sc.)
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tarkan ÖNER

January 2021 , 31 pages

Graph labeling or valuation is a function that maps graf elements (vertexes or edges) to numbers, usually positive integers. The labeling of the set of vertexes is called vertex-labeling, and the labeling of the edges is called edge-labeling. If the set of definitions consists of both vertexes and edges, these labelings are called total-labeling. There are many different types of labeling in the literature. Some of them are: Harmonious, cordial, graceful, antimagic and H - (super) magic.

The purpose of this thesis is to introduce the n —leaf, s —part m —polygonal book-snake graph, and show that this graph has C_m —supermagic labeling, where C_m is a circular graph consisting of m edges and m vertexes.

Keywords: Magic Labeling, Covering, Book Graph, Snake Graph



Eylül ve Nisan'a

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında, gerek ders gerekse de tez aşamasında bilgisini, ilgisini hiç esirgemeyen, anlayışı ve çalışma azmiyle hepimize örnek olan Doç. Dr. Tarkan ÖNER'e, Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına, hayatımın her döneminde benden desteklerini sevgilerini hiç esirgemeyen anneme, babama ve eşime teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRMELER	7
3.1. $S(3, n, s)$ grafının C_3 —supermagic etiketlemesi	7
3.2. $S(m, n, s)$ grafının C_m —supermagic etiketlemesi	20
4. SONUÇ	28
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ	31

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. C_n grafi	3
Şekil 2.2. $B(3, n)$ grafi	4
Şekil 2.3. $B(m, n)$ grafi	5
Şekil 2.4. $S(3, s)$ grafi	5
Şekil 2.5. $S(m, s)$ grafi	6
Şekil 2.6. $B(6, 3)$ grafinin C_6 —supermagic etiketlemesi. $\mu(\lambda) = 167$	6
Şekil 2.7. $S(3, 4)$ grafinin C_3 —supermagic etiketlemesi. $\mu(\lambda) = 60$	6
Şekil 3.8. $S(3, n, s)$ grafi	7
Şekil 3.9. $S(3, 4, 4)$ grafinin s çift için C_3 —supermagic etiketlemesi	10
Şekil 3.10. $S(3, 5, 2)$ grafinin C_3 —supermagic etiketlemesi	11
Şekil 3.11. $S(3, 4, 4)$ grafinin n çift için C_3 —supermagic etiketlemesi	13
Şekil 3.12. $S(3, 6, 3)$ grafinin C_3 —supermagic etiketlemesi	14
Şekil 3.13. $S(3, 5, 3)$ grafinin C_3 —supermagic etiketlemesi	19
Şekil 3.14. $S(m, n, s)$ grafi	21
Şekil 3.15. $S(4, 5, 2)$ grafinin C_4 —supermagic etiketlemesi	25
Şekil 3.16. $S(5, 6, 3)$ grafinin C_5 —supermagic etiketlemesi	26
Şekil 3.17. $S(6, 5, 3)$ grafinin C_6 —supermagic etiketlemesi	27

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

C_n	Dairesel graf
$B(3, n)$	Üçgensel kitap graf
$B(m, n)$	m -poligonal kitap graf
$S(3, n)$	Üçgensel yılan graf
$S(m, n)$	m -poligonal yılan graf
$S(3, n, s)$	Üçgensel kitap-yılan grap
$S(m, n, s)$	m -poligonal kitap-yılan graf
λ	Etiketleme fonksiyonu
$\mu(\lambda)$	Magic toplam

1. GİRİŞ

Graf teorisinin çalışma alanlarından biri de graf etiketlemedir. İlk olarak 1960'lı yılların sonlarında tanıtılan graf etiketleme çalışmalarının başlangıcı Rosa (1967) ya atfedilmektedir. Bu konu, X-ışını kristalografisi, radar, kodlama teorisi, astronomi, devre tasarımı ve iletişim ağı adresleme gibi geniş bir uygulama yelpazesi için faydalı modeller olarak hizmet vermektedir (Acharya 2008; Bloom vd. 1975-1977-1978-1982; Graham vd. 1971) .

Graf etiketleme (graph labeling veya valuation), graf elemanlarını (düğümleri veya ayrıtları) sayılara, genellikle de pozitif tamsayılara eşleyen bir fonksiyondur. Tanım kümesi düğümlerden oluşan etiketlemelere düğüm-etiketleme (vertex-labeling), ayrıtlardan oluşan etiketlemelere de ayrıt-etiketleme (edge-labeling) adı verilir. Eğer tanım kümesi hem düğüm hem de ayrıtlardan oluşuyor ise bu etiketlemeler toplam etiketleme (total-labeling) olarak adlandırılır. Literatürde çok farklı çeşitlerde etiketlemeler mevcuttur. Bunlardan bazıları: Harmonious, cordial, graceful, antimagic ve H –(super)magic gibi.

V düğüm kümesi, E ayrıt kümesi olmak üzere bir $G(V,E)$ grafi ve H basit grafi verildiğinde, eğer G nin her ayrıtı, H ye izomorfik olan G nin bir alt grafına ait ise G grafi H –örtüsüne sahiptir denir. H –örtüsüne sahip bir $G(V,E)$ grafi ve $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V| + |E|\}$ fonksiyonu verilsin . Eğer H ye izomorfik olan G nin her $H' = (V', E')$ alt grafi için H nin her düğüm ve ayrıtlarının λ altındaki görüntülerinin toplamı $\mu(\lambda)$ olacak şekilde bir $\mu(\lambda)$ sayısı var ise λ fonksiyonuna G nin H –magic etiketlemesi denir. Buradaki $\mu(\lambda)$ sayısına magic toplam, G grafına da H –magic etiketlemesine sahiptir denir. Eğer bir λ H –magic etiketlemesi ilaveten $\{\lambda(v) : v \in V\} = \{1, 2, 3, \dots, |V|\}$ koşulunu da sağlıyor ise H –supermagic etiketlemesi olarak adlandırılır (Gutierrez, 2005).

Literatürde bir çok graf için H –magic ve H –supermagic etiketlemeleri mevcuttur. Llado vd. (2009), tamsayı kümeleri bölümlene tekniği kullanılarak, tekerlek, prizma, kitap, rüzgar değirmeni grafiklerinin H –super magic olduğunu göstermiştir. Ngurah vd. (2010) fan, merdivenler ve bazı kitap grafların -supermagic etiketlemeleri oluşturmuşlardır. Bağlantılı bir G grafi için, Maryati vd. (2008), G 'nin k izomorfik

kopyasının ayrık birleşiminin, eğer $|V(G)| + |E(G)|$ çift veya k tek ise G — supermagic olduğunu kanıtladılar. En az iki ayrıtı olan bağlantılı olmayan graflar için ise Maryati vd. (2013) supermagic etiketlemeleri incelemişlerdir. Daha fazla ayrıtı için Gallian (2018) tarafından hazırlanan survey incelenebilir.

Bu tez çalışmasının amacı, n yapraklı, s parçalı m —poligonal kitap-yılan grafını tanıtip, bu grafın, C_m m ayrıt ve m düğümden oluşan dairesel graf olmak üzere C_m —supermagic etiketlemeye sahip olduğunu göstermektir.

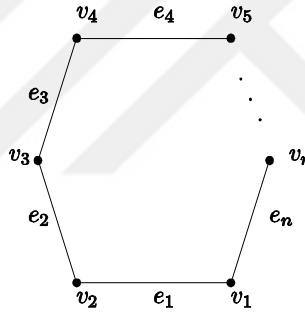


2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1. V boştan farklı sonlu bir küme $E \subset V \times V$ olsun. $G = (V, E)$ ikilisine yönlü graf denir. Eğer yolların yönleri ile ilgilenmiyorsak G grafına yönlendirilmemiş graf denir. $G = (V, E)$ yönlü veya yönlendirilmemiş grafi için, V kümesine G grafının düğüm kümesi, E kümesine G grafının ayırıt kümesi denir.

Tanım 2.0.2. $G = (V, E)$ ve $G_1 = (V_1, E_1)$ grafları verilsin. Eğer $V_1 \subset V$ ve $E_1 \subset E$ ise G_1 grafına G grafının bir alt grafi denir.

Tanım 2.0.3. $n \geq 3$ olmak üzere n adet düğüm ve $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ düğüm çiftlerinden oluşan n adet ayrıttan meydana gelen grafa dairesel graf denir ve C_n ile gösterilir. Bakınız Şekil 2.1.

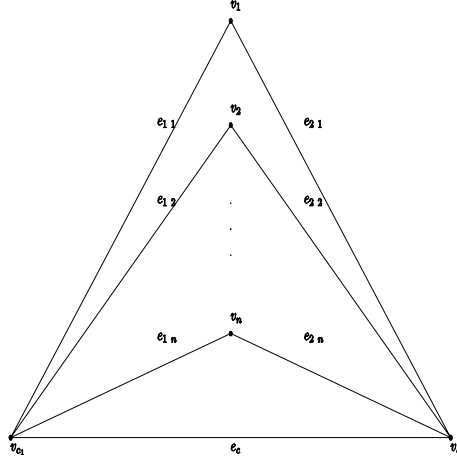


Şekil 2.1. C_n grafi

Tanım 2.0.4. C_3 grafının n tane kopyasının ortak bir ayırıt boyunca birleştirilmesi ile elde edilen $2n + 1$ ayırıt ve $n + 2$ düğümden oluşan grafa üçgensel kitap (triangular book) graf denir ve $B(3, n)$ ile gösterilir. Bakınız Şekil 2.2.

Tanım 2.0.5. C_m grafının n tane kopyasının ortak bir ayırıt boyunca birleştirilmesi ile elde edilen $(m - 1)n + 1$ ayırıt ve $(m - 2)n + 2$ düğümden oluşan grafa m -poligonal kitap graf denir ve $B(m, n)$ ile gösterilir. Bakınız Şekil 2.3.

Tanım 2.0.6. C_3 grafının s tane kopyasının ardışık ortak düğümler boyunca uç uca eklenmesi ile elde edilen $3s$ ayrıtlı $2s + 1$ düğümlü grafa yılan graf denir ve $S(3, s)$ ile gösterilir. Bakınız Şekil 2.4.



Şekil 2.2. $B(3, n)$ grafi

Tanım 2.0.7. C_m grafinin s tane kopyasının ardışık ortak düğümler boyunca uç uca eklenmesi ile elde edilen ms ayrıtlı $(m-1)s+1$ düğümlü grafa m -poligonal yılan graf denir ve $S(m, s)$ ile gösterilir. Bakınız Şekil 2.5.

Tanım 2.0.8. $E \neq \emptyset$ olmak üzere $G = (V, E)$ grafında $e = \{u, w\}$ ayrıtı çıkarılıp yerine $v \notin V$ olmak üzere v düğümü ve $\{u, v\}, \{v, w\}$ ayrıtlarının eklenmesiyle elde edilen grafa G grafinin elementer alt bölüntüsü denir.

Tanım 2.0.9. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki yönlendirilmemiş grafi verilsin. $f : V_1 \rightarrow V_2$ fonksiyonu

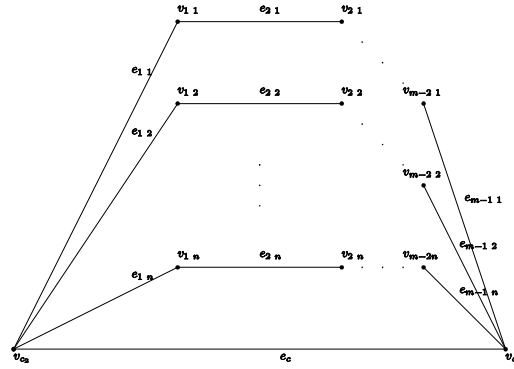
i) birebir ve örten

ii) $a, b \in V_1$ için $\{a, b\} \in E_1 \iff \{f(a), f(b)\} \in E_2$

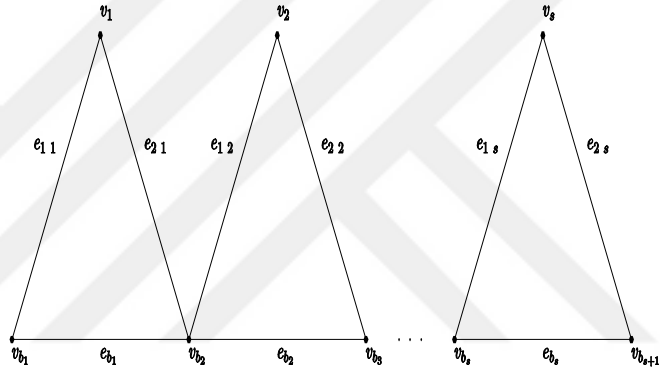
şartları sağlanıyorsa f bir graf izomorfizmasıdır denir. G_1 ve G_2 grafları da izomorfik graflar olarak adlandırılır.

Tanım 2.0.10. V düğüm kümesi, E ayrıt kümesi olmak üzere bir $G(V, E)$ grafi ve H basit grafi verildiğinde, eğer G nin her ayrıtı, H ye izomorfik olan G nin bir alt grafına ait ise G grafi H -örtüsüne sahiptir denir.

Tanım 2.0.11. (Gutierrez, 2005) H -örtüsüne sahip bir $G(V, E)$ grafi ve $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V| + |E|\}$ fonksiyonu verilsin. Eğer H ye izomorfik olan G nin her $H' = (V', E')$ alt grafi için H nin her düğüm ve ayrıtlarının λ altındaki görüntülerinin toplamı $\mu(\lambda)$ olacak şekilde bir $\mu(\lambda)$ sayısı var ise λ fonksiyonuna G nin H -magic etiketlemesi denir. Buradaki $\mu(\lambda)$ sayısına magic toplam, G grafına da H -magic etiketlemesine sahiptir denir. Eğer bir λ H -magic etiketlemesi ilaveten



Şekil 2.3. $B(m, n)$ grafi



Şekil 2.4. $S(3, s)$ grafi

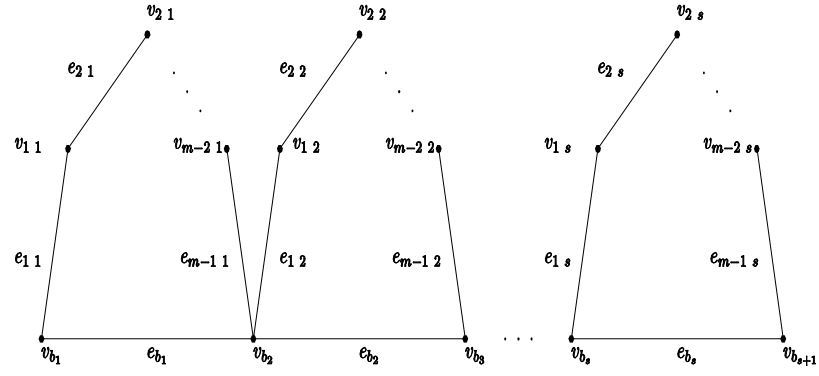
$\{\lambda(v) : v \in V\} = \{1, 2, 3, \dots, |V|\}$ koşulunu da sağlıyor ise H –supermagic etiketlemesi olarak adlandırılır.

Sonuç 2.0.12. (Jeyanthi ve Selvagopal, 2011) $B(m, n)$ grafi $n \geq 1$ ve $m \geq 3$ için C_m –supermagic etiketlemeye sahiptir.

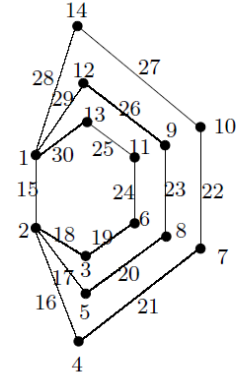
Örnek 2.0.13. (Jeyanthi ve Selvagopal, 2011) $B(6, 3)$ grafinin C_6 –supermagic etiketlemesi Şekil 2.6. da verilmiştir.

Teorem 2.0.14. (Öner vd., 2020) $S(m, n)$ grafi $n \geq 2, m \geq 3$ için C_m –supermagic etiketlemeye sahiptir.

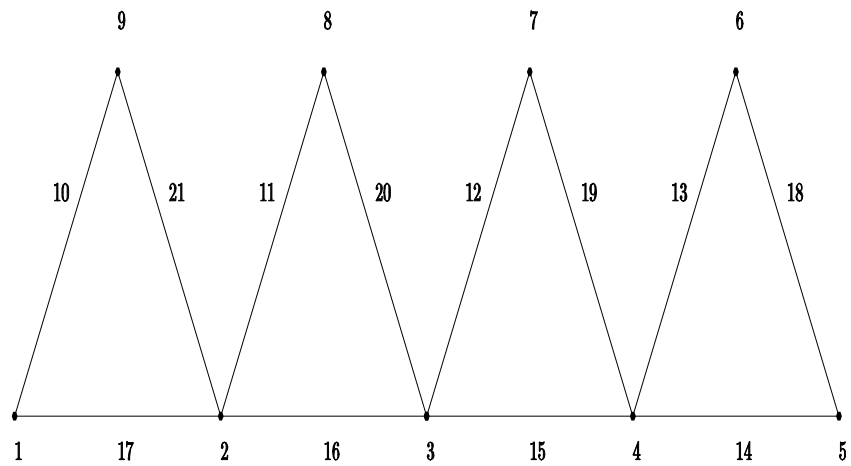
Örnek 2.0.15. (Öner vd., 2020) $S(3, 4)$ grafinin C_3 –supermagic etiketlemesi Şekil 2.7. de verilmiştir.



Şekil 2.5. $S(m, s)$ grafi



Şekil 2.6. $B(6, 3)$ grafinın C_6 -supermagic etiketlemesi. $\mu(\lambda) = 167$



Şekil 2.7. $S(3, 4)$ grafinın C_3 -supermagic etiketlemesi. $\mu(\lambda) = 60$

3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRMELER

3.1. $S(3, n, s)$ grafının C_3 –supermagic etiketlemesi

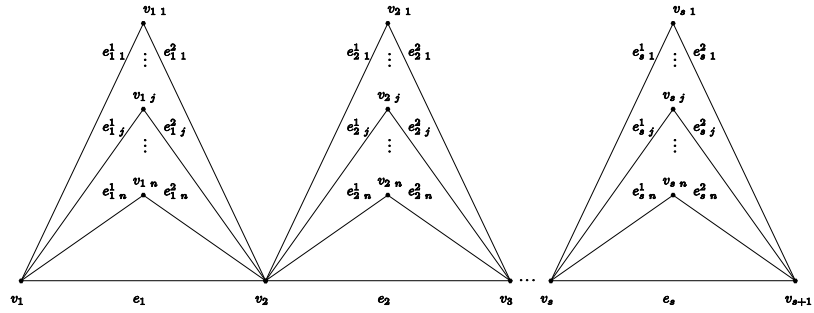
Tanım 3.1.1. $B(3, n)$ grafının s tane kopyasının ortak düğümler boyunca uç uca eklenmesi ile elde edilen $ns + s + 1$ adet düğüme ve $2ns + s$ adet ayrıta sahip grafa n yapraklı, s parçalı üçgensel kitap-yılan graf denir ve $S(3, n, s)$ ile gösterilir.

Bu düğümleri ve ayrıtları aşağıdaki gibi adlandıralım:

$$V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, s+1\} \cup \{v_{ij} : i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E = \{e_i : i = 1, 2, \dots, s\} \cup \{e_{ij}^1 : i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n\} \\ \cup \{e_{ij}^2 : i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n\}$$

Burada taban düğümleri v_i ile, i . parçadaki j . üçgenin tepe düğümleri v_{ij} ile, taban ayrıtları e_i ile, i . parçadaki j . üçgenin sol ayrıtı e_{ij}^1 ve sağ ayrıtı ise e_{ij}^2 ile gösterilmiştir.



Şekil 3.8. $S(3, n, s)$ grafi

Şekil 3.8. den görüldüğü üzere $S(3, n, s)$ grafında ns tane C_3 grafına izomorfik olan $H' = (V', E')$ alt grafi vardır ve bu graflar $S(3, n, s)$ için bir C_3 –örtü temsil eder. Dolayısıyla $S(3, n, s)$ grafının C_3 –supermagic etiketlemeye sahip olup olmadığı sorusu

sorulabilir. Şimdi bu grafin n ve s değerlerine göre C_3 —supermagic etiketlemesini inceleyelim.

Teorem 3.1.2. $S(3, n, s)$ grafi s çift ise C_3 —supermagic etiketlemeye sahiptir.

İspat. Etiketleme fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$$

$$\lambda(v_i) = s + 2 - i, i = 1, 2, \dots, s + 1$$

$$\lambda(v_{ij}) = s + 1 + i + s(j - 1), i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda(e_i) = 3ns + s + i + 1, i = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda(e_{ij}^1) = \begin{cases} 2ns + \frac{3s}{2} - \frac{sj}{2} - i + 2, & i = 1, 2, \dots, \frac{s}{2}, j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{3ns}{2} + 2s - \frac{sj}{2} - i + 2, & i = \frac{s}{2} + 1, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(e_{ij}^2) = \begin{cases} 2ns + s + s\frac{n-j}{2} + i + 1, & i = 1, 2, \dots, \frac{s}{2}, j = 1, 2, \dots, n \\ 3ns + \frac{s}{2} - \frac{sj}{2} + i + 1, & i = \frac{s}{2} + 1, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$\mu(\lambda)$ magic toplamını hesaplamak için $\sum_{v \in V'} \lambda(v)$ ve $\sum_{e \in E'} \lambda(e)$ değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V'} \lambda(v) &= v_i + v_{i+1} + v_{ij} \\ &= (s + 2 - i) + (s + 2 - i - 1) + (s + 1 + i + s(j - 1)) \\ &= 3s + 4 + s(j - 1) - i \end{aligned}$$

Etiketleme fonksiyonunda $\lambda(e)$ değerleri i üzerinden parçalı olarak tanımlandığından,

$\sum_{e \in E'} \lambda(e)$ değerini her iki durum için ayrı ayrı hesaplayalım.

$i = 1, 2, \dots, \frac{s}{2}$ için :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E'} \lambda(e) &= e_i + e_{ij}^1 + e_{ij}^2 \\ &= (3ns + s + i + 1) + \left(2ns + \frac{3s}{2} - \frac{sj}{2} - i + 2\right) + \left(2ns + s + s\frac{n-j}{2} + i + 1\right) \\ &= \frac{7}{2}s - js + \frac{15}{2}ns + 4 + i \end{aligned}$$

$i = \frac{s}{2} + 1, \dots, s$ için:

$$\begin{aligned}\sum_{e \in E'} \lambda(e) &= e_i + e_{ij}^1 + e_{ij}^2 \\ &= (3ns + s + i + 1) + \left(\frac{3ns}{2} + 2s - \frac{sj}{2} - i + 2 \right) + \left(3ns + \frac{s}{2} - \frac{sj}{2} + i + 1 \right) \\ &= \frac{7}{2}s - js + \frac{15}{2}ns + 4 + i\end{aligned}$$

Böylece Magic toplam

$$\begin{aligned}\mu(\lambda) &= \sum_{v \in V'} \lambda(v) + \sum_{e \in E'} \lambda(e) \\ &= (3s + 4 + s(j-1) - i) + \left(\frac{7}{2}s - js + \frac{15}{2}ns + 4 + i \right) \\ &= \frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, $S(3, n, s)$ grafi s çift ise C_3 -supermagic etiketlemeye sahiptir. ■

Örnek 3.1.3. $S(3, 4, 4)$ grafinı ele alalım. Burada $s = 4$ olduğundan Teorem 3.1.2 den dolayı $S(3, 4, 4)$ grafi C_3 -supermagic etiketlemeye sahiptir ve bu etiketleme aşağıdaki gibidir.

$$\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, 57\}$$

$$\lambda(v_i) = 6 - i, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\lambda(v_{ij}) = 5 + i + 4(j-1), i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\lambda(e_i) = 53 + i, i = 1, 2, \dots, 4$$

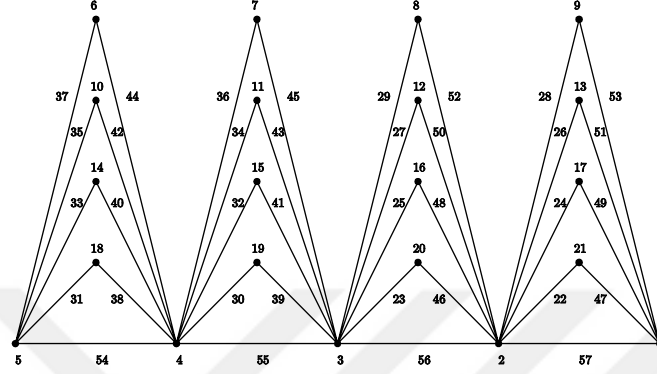
$$\lambda(e_{ij}^1) = \begin{cases} 40 - 2j - i, & i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4 \\ 34 - 2j - i, & i = 3, 4, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$\lambda(e_{ij}^2) = \begin{cases} 45 - 2j + i, & i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4 \\ 51 - 2j + i, & i = 3, 4, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Magic toplamı ise

$$\begin{aligned}\mu(\lambda) &= \frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8 \\ &= 150\end{aligned}$$

olur. Bu etiketleme Şekil 3.9. da verilmiştir.



Şekil 3.9. $S(3, 4, 4)$ grafinin s çift için C_3 -supermagic etiketlemesi

Örnek 3.1.4. $S(3, 5, 2)$ grafini ele alalım. Burada $s = 2$ olduğundan Teorem 3.1.2 den dolayı $S(3, 5, 2)$ grafi C_3 -supermagic etiketlemeye sahiptir ve bu etiketleme aşağıdaki gibidir.

$$\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, 35\}$$

$$\lambda(v_i) = 4 - i, i = 1, 2, 3$$

$$\lambda(v_{ij}) = 3 + i + 2(j - 1), i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 5$$

$$\lambda(e_i) = 33 + i, i = 1, 2$$

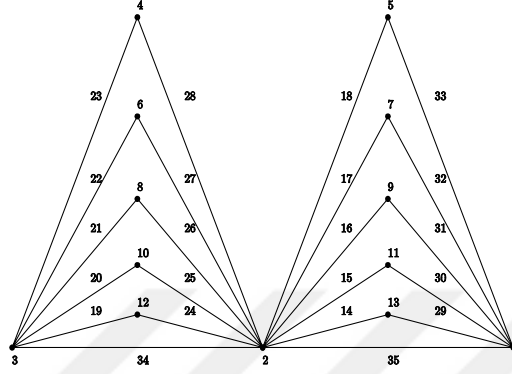
$$\lambda(e_{ij}^1) = \begin{cases} 25 - j - i, & i = 1, j = 1, 2, \dots, 5 \\ 21 - j - i, & i = 2, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

$$\lambda(e_{ij}^2) = \begin{cases} 28 - j + i, & i = 1, j = 1, 2, \dots, 5 \\ 32 - j + i, & i = 2, j = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

Magic toplam ise

$$\begin{aligned}\mu(\lambda) &= \frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8 \\ &= 94\end{aligned}$$

olur. Bu etiketleme Şekil 3.10. da verilmiştir.



Şekil 3.10. $S(3,5,2)$ grafinin C_3 -supermagic etiketlemesi

Teorem 3.1.5. $S(3,n,s)$ grafi n çift ise C_3 -supermagic etiketlemeye sahiptir.

İspat. Etiketleme fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$$

$$\lambda(v_i) = i, i = 1, 2, \dots, s + 1$$

$$\lambda(v_{ij}) = s + 1 + j + (i - 1)n, i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda(e_i) = \left(\frac{1}{2} - i\right)n + 2s + 2ns + 2 - i, i = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda(e_{ij}^1) = \begin{cases} (1 - i)n - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + \frac{5}{2} - i, & i = 1, 2, 3, \dots, s, j = 1, 3, 5, \dots, n - 1 \\ \left(\frac{1}{2} - i\right)n - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + 2 - i, & i = 1, 2, 3, \dots, s, j = 2, 4, 6, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(e_{ij}^2) = \begin{cases} 2s - \left(\frac{1}{2} - i\right)n - \frac{1}{2}j + 2ns + \frac{3}{2}, & i = 1, 2, 3, \dots, s, j = 1, 3, 5, \dots, n - 1 \\ in - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + 2, & i = 1, 2, 3, \dots, s, j = 2, 4, 6, \dots, n \end{cases}$$

$\mu(\lambda)$ magic toplamını hesaplamak için $\sum_{v \in V'} \lambda(v)$ ve $\sum_{e \in E'} \lambda(e)$ değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V'} \lambda(v) &= v_i + v_{i+1} + v_{ij} \\ &= i + (i+1) + (s+1+j+(i-1)n) \\ &= j - (1-i)n + s + 2 + 2i\end{aligned}$$

Etiketleme fonksiyonunda $\lambda(e)$ değerleri j üzerinden parçalı olarak tanımlandığından,

$\sum_{e \in E'} \lambda(e)$ değerini her iki durum için ayrı ayrı hesaplayalım.

$j = 1, 3, \dots, n-1$ için :

$$\begin{aligned}\sum_{e \in E'} \lambda(e) &= e_i + e_{ij}^1 + e_{ij}^2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} - i \right) n + 2s + 2ns + 2 - i \right) + \left((1-i)n - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + \frac{5}{2} - i \right) \\ &\quad + \left(2s - \left(\frac{1}{2} - i \right) n - \frac{1}{2}j + 2ns + \frac{3}{2} \right) \\ &= (1-i)n - j + 6s + 6ns + 6 - 2i\end{aligned}$$

$j = 2, 4, 6, \dots, n$ için:

$$\begin{aligned}\sum_{e \in E'} \lambda(e) &= e_i + e_{ij}^1 + e_{ij}^2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} - i \right) n + 2s + 2ns + 2 - i \right) + \left(\left(\frac{1}{2} - i \right) n - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + 2 - i \right) \\ &\quad + \left(in - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + 2 \right) \\ &= (1-i)n - j + 6s + 6ns + 6 - 2i\end{aligned}$$

Böylece Magic toplam

$$\begin{aligned}\mu(\lambda) &= \sum_{v \in V'} \lambda(v) + \sum_{e \in E'} \lambda(e) \\ &= (j - (1-i)n + s + 2 + 2i) + ((1-i)n - j + 6s + 6ns + 6 - 2i) \\ &= 7s + 6ns + 8\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, $S(3, n, s)$ grafi n çift ise C_3 -supermagic etiketlemeye sahiptir. ■

gibidir.

$$\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, 61\}$$

$$\lambda(v_i) = i, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\lambda(v_{ij}) = 4 + j + 6(i - 1), i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\lambda(e_i) = 40 - 7(i - 1), i = 1, 2, 3$$

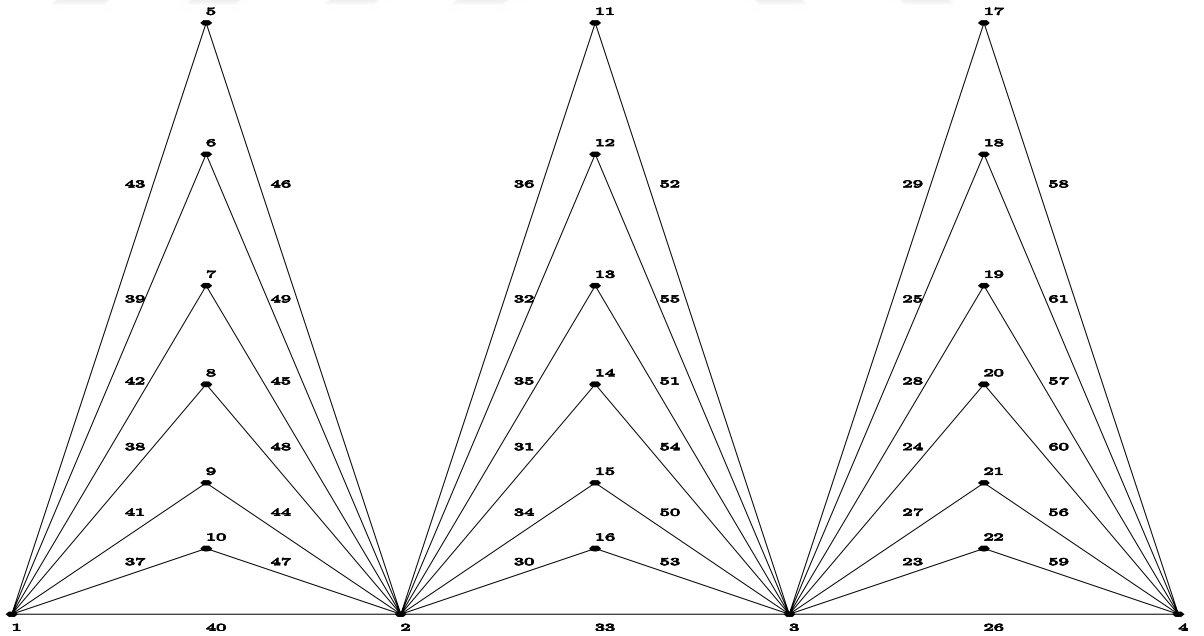
$$\lambda(e_{ij}^1) = \begin{cases} 44 - \frac{j+1}{2} - 7(i - 1), & i = 1, 2, 3, j = 1, 3, 5 \\ 40 - \frac{j}{2} - 7(i - 1), & i = 1, 2, 3, j = 2, 4, 6 \end{cases}$$

$$\lambda(e_{ij}^2) = \begin{cases} 47 - \frac{j+1}{2} + 6(i - 1), & i = 1, 2, 3, j = 1, 3, 5 \\ 50 - \frac{j}{2} + 6(i - 1), & i = 1, 2, 3, j = 2, 4, 6 \end{cases}$$

Magic toplam ise

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) &= 7s + 6ns + 8 \\ &= 137 \end{aligned}$$

olur. Bu etiketleme Şekil 3.12. de verilmiştir.



Şekil 3.12. $S(3, 6, 3)$ grafinin C_3 -supermagic etiketlemesi

Teorem 3.1.8. $S(3, n, s)$ grafi s tek ve n tek ise C_3 –supermagic etiketlemeye sahiptir.

İspat. Etiketleme fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$$

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & i \text{ tek ve } i = 1, 2, \dots, s+1 \\ \frac{s+i+1}{2}, & i \text{ çift ve } i = 1, 2, \dots, s+1 \end{cases}$$

$$\lambda(v_{ij}) = s + j + n(i-1) + 1, i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda(e_i) = 3ns + 2s - i + 2, i = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda(e_{ij}^1) = \begin{cases} \frac{3ns}{2} + s + j + n(i-1) + \frac{1}{2}, & i = 1, 2, \dots, \frac{s-1}{2}, j = 1, 2, \dots, n \\ 2ns + s - \frac{n}{2} + j + \frac{1}{2}, & i = \frac{s+1}{2}, j = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ ns + s + 1 + j - \frac{n+1}{2}, & i = \frac{s+1}{2}, j = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n \\ \frac{ns}{2} + s + j + n(i-1) + \frac{1}{2}, & i = \frac{s+3}{2}, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(e_{ij}^2) = \begin{cases} 3ns + s - 2j - 2n(i-1) + 3, & i = 1, 2, \dots, \frac{s-1}{2}, j = 1, 2, \dots, n \\ 2ns + n + s - 2j + 3, & i = \frac{s+1}{2}, j = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ 3ns + n + s - 2j + 3, & i = \frac{s+1}{2}, j = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n \\ 4ns + s - 2j - 2n(i-1) + 3, & i = \frac{s+3}{2}, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Etiketleme fonksiyonu i nin ve j nin değerleri üzerinden parçalı olarak tanımlandığından, her durum için magic toplamı ayrı ayrı hesaplayalım.

$i = 1, 2, \dots, \frac{s-1}{2}$ için:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V'} \lambda(v) &= v_i + v_{i+1} + v_{ij} \\ &= \left(\frac{i+1}{2} \right) + \left(\frac{s+i+1+1}{2} \right) + (s + j + n(i-1) + 1) \\ &= j - (1-i)n + \frac{3}{2}s + \frac{5}{2} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E'} \lambda(e) &= e_i + e_{ij}^1 + e_{ij}^2 \\
&= (3ns + 2s - i + 2) + \left(\frac{3ns}{2} + s + j + n(i-1) + \frac{1}{2} \right) \\
&\quad + (3ns + s - 2j - 2n(i-1) + 3) \\
&= (1-i)n - j + 4s + \frac{15}{2}ns + \frac{11}{2} - i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda) &= \sum_{v \in V'} \lambda(v) + \sum_{e \in E'} \lambda(e) \\
&= \left(j - (1-i)n + \frac{3}{2}s + \frac{5}{2} + i \right) + \left((1-i)n - j + 4s + \frac{15}{2}ns + \frac{11}{2} - i \right) \\
&= \frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8
\end{aligned}$$

$i = \frac{s+1}{2}$ ve $j = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ için:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V'} \lambda(v) &= v_i + v_{i+1} + v_{ij} \\
&= \left(\frac{\frac{s+1}{2} + 1}{2} \right) + \left(\frac{s + \frac{s+1}{2} + 1 + 1}{2} \right) + \left(s + j + n\left(\frac{s+1}{2} - 1\right) + 1 \right) \\
&= j - \frac{1}{2}n + 2s + \frac{1}{2}ns + 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E'} \lambda(e) &= e_i + e_{ij}^1 + e_{ij}^2 \\
&= \left(3ns + 2s - \frac{s+1}{2} + 2 \right) + \left(2ns + s - \frac{n}{2} + j + \frac{1}{2} \right) \\
&\quad + (2ns + n + s - 2j + 3) \\
&= \frac{1}{2}n - j + \frac{7}{2}s + 7ns + 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda) &= \sum_{v \in V'} \lambda(v) + \sum_{e \in E'} \lambda(e) \\
&= \left(j - \frac{1}{2}n + 2s + \frac{1}{2}ns + 3 \right) + \left(\frac{1}{2}n - j + \frac{7}{2}s + 7ns + 5 \right) \\
&= \frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8
\end{aligned}$$

$i = \frac{s+1}{2}$ ve $j = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n$ için:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V'} \lambda(v) &= v_i + v_{i+1} + v_{ij} \\
&= \left(\frac{\frac{s+1}{2} + 1}{2} \right) + \left(\frac{s + \frac{s+1}{2} + 1 + 1}{2} \right) + \left(s + j + n \left(\frac{s+1}{2} - 1 \right) + 1 \right) \\
&= j - \frac{1}{2}n + 2s + \frac{1}{2}ns + 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E'} \lambda(e) &= e_i + e_{ij}^1 + e_{ij}^2 \\
&= 3 \left(ns + 2s - \frac{s+1}{2} + 2 \right) + \left(ns + s + 1 + j - \frac{n+1}{2} \right) \\
&\quad + (3ns + n + s - 2j + 3) \\
&= \frac{1}{2}n - j + \frac{7}{2}s + 7ns + 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda) &= \sum_{v \in V'} \lambda(v) + \sum_{e \in E'} \lambda(e) \\
&= \left(j - \frac{1}{2}n + 2s + \frac{1}{2}ns + 3 \right) + \left(\frac{1}{2}n - j + \frac{7}{2}s + 7ns + 5 \right) \\
&= \frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8
\end{aligned}$$

$i = \frac{s+3}{2}, \dots, s$ için:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V'} \lambda(v) &= v_i + v_{i+1} + v_{ij} \\
&= \left(\frac{i+1}{2} \right) + \left(\frac{s+i+1+1}{2} \right) + (s + j + n(i-1) + 1) \\
&= j - (1-i)n + \frac{3}{2}s + \frac{5}{2} + i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E'} \lambda(e) &= e_i + e_{ij}^1 + e_{ij}^2 \\
&= (3ns + 2s - i + 2) + \left(\frac{ns}{2} + s + j + n(i-1) + \frac{1}{2} \right) \\
&\quad + (4ns + s - 2j - 2n(i-1) + 3) \\
&= (1-i)n - j + 4s + \frac{15}{2}ns + \frac{11}{2} - i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda) &= \sum_{v \in V'} \lambda(v) + \sum_{e \in E'} \lambda(e) \\
&= \left(j - (1-i)n + \frac{3}{2}s + \frac{5}{2} + i \right) + \left((1-i)n - j + 4s + \frac{15}{2}ns + \frac{11}{2} - i \right) \\
&= \frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Her durum için aynı sabit değer elde edildiğinden, $S(3, n, s)$ grafi s tek ve n tek ise C_3 –supermagic etiketlemeye sahiptir. ■

Örnek 3.1.9. $S(3, 5, 3)$ grafini ele alalım. Burada $n = 5$, $s = 3$ olduğundan Teorem 3.1.8 den dolayı $S(3, 5, 3)$ grafi C_3 –supermagic etiketlemeye sahiptir ve bu etiketleme aşağıdaki gibidir.

$$\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, 52\}$$

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & i = 1, 3 \\ \frac{i+4}{2}, & i = 2, 4 \end{cases}$$

$$\lambda(v_{ij}) = 4 + j + 5(i-1), i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\lambda(e_i) = 53 - i, i = 1, 2, 3$$

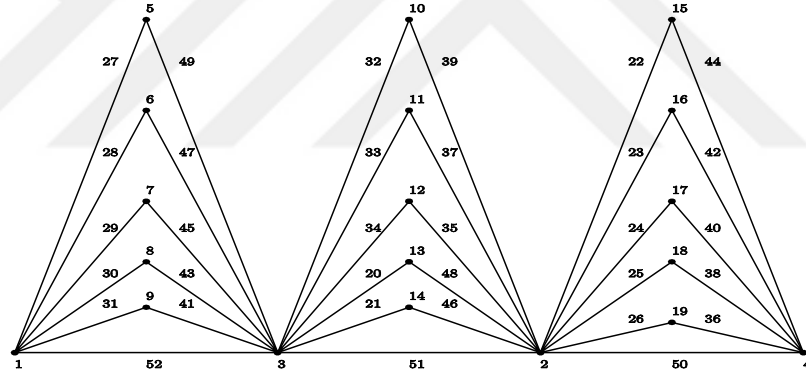
$$\lambda(e_{ij}^1) = \begin{cases} 26 + j, & i = 1, j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 31 + j, & i = 2, j = 1, 2, 3 \\ 16 + j, & i = 2, j = 4, 5 \\ 21 + j, & i = 3, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$\lambda(e_{ij}^2) = \begin{cases} 51 - 2j, & i = 1, j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 41 - 2j, & i = 2, j = 1, 2, 3 \\ 56 - 2j, & i = 2, j = 4, 5 \\ 46 - 2j, & i = 3, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

Magic toplam ise

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) &= \frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8 \\ &= 137 \end{aligned}$$

olur. Bu etiketleme Şekil 3.13. te verilmiştir.



Şekil 3.13. $S(3,5,3)$ grafinin C_3 -supermagic etiketlemesi

Böylece genel olarak Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.5 ve Teorem 3.1.8 den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.10. $S(3,n,s)$ grafi C_3 -supermagic etiketlemeye sahiptir.

3.2. $S(m, n, s)$ grafinın C_m —supermagic etiketlemesi

Bu kısımda $m \geq 4$ olmak üzere n yapraklı, s parçalı m —poligonal kitap-yılan grafinın C_m —supermagic etiketlemesini ele alacağız. Bunun için önce alt bölüntüler ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim. Burada bir G grafi verildiğinde alt bölüntülerini $S(G)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.11. (Taimur vd., 2018) G bir H —supermagic graf, H_i ler de G nin H ye izomorfik olan alt grafları olsun. Eğer $S(H_i)$ ler $S(G)$ grafinın $S(H)$ ye izomorfik olan alt grafları ise $S(G)$ grafi da bir H —supermagic graftır.

G grafinın alt bölüntüsü olan $S(G)$ grafi, G ye p adet yeni $v_1, v_2, \dots, v_p$ düğümleri eklenerek elde edilsin. r de $S(H_i)$ alt graflarına eklenen yeni düğümlerin sayısı olsun. λ etiketlemesi G nin H —supermagic etiketlemesi ise aşağıdaki şekilde tanımlanan g de $S(G)$ nin bir $S(H)$ —supermagic etiketlemesidir ve bu etiketleme aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$g(v) = \begin{cases} \lambda(v), & v \in V(G) \\ |V(G)| + j, & v = v_j, j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

$$g(uv) = \begin{cases} \lambda(uv) + p, & u \in V(G) \\ |V(G)| + |E(G)| + 2p + 1 - j, & u = v_j, j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

Magic toplam ise

$$\mu(g) = \mu(\lambda) + |E(H)|p + (2|V(G)| + |E(G)| + 2p + 1)r$$

olur.

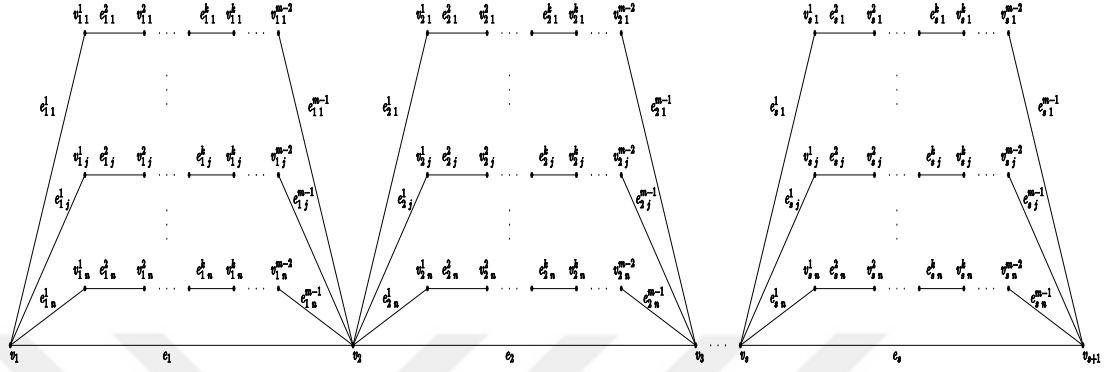
Şimdi de m —poligonal kitap-yılan graf tanımını verip yukarıdaki teorem yardımıyla C_m —supermagic etiketlemeye sahip olduğunu söyleyelim.

Tanım 3.2.12. $B(m, n)$ grafinın s tane kopyasının ortak düğümler boyunca uç uca eklenmesi ile elde edilen $(m-2)ns + s + 1$ adet düğüme ve $(m-1)ns + s$ adet ayrıta sahip grafa n yapraklı, s parçalı m —poligonal kitap-yılan graf denir ve $S(m, n, s)$ ile gösterilir.

Bu düğümleri ve ayrıtları aşağıdaki gibi adlandıralım:

$$V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, s+1\} \cup \{v_{ij}^k : i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m-2\}$$

$$E = \{e_i : i = 1, 2, \dots, s\} \cup \{e_{ij}^k : i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m-1\}$$



Şekil 3.14. $S(m,n,s)$ grafi

$S(m,n,s)$ grafi, $S(3,n,s)$ grafinin her i, j için v_{ij} ile v_{i+1} düğümleri arasında $r = (m-3)$ tane toplamda ise $p = (m-3)ns$ tane yeni düğüm eklenmesi ile de elde edilebileceğinden $S(3,n,s)$ grafinin bir alt bölüntüsü olarak düşünülebilir. Dolayısıyla Teorem 3.2.11 yardımı ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.13. $S(m,n,s)$ grafi C_m —supermagic etiketlemeye sahiptir.

İspat. n ve s değerlerine göre daha önceden elde ettiğimiz C_3 —supermagic etiketlemeleri ve Teorem 3.2.11 yardımıyla $S(m,n,s)$ grafinin C_m —supermagic etiketlemesi şu şekilde olur:

s çift ise:

$$g(v_i) = s + 2 - i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, s+1$$

$$g(v_{ij}^1) = s + 1 + i + s(j-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n$$

$$g(v_{ij}^k) = ns + s + k + (j-1)(m-3) + (i-1)(m-3)n, \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, 3, \dots, s, \\ j &= 1, 2, 3, \dots, n, \\ k &= 2, 3, 4, \dots, m-2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(e_i) &= 3ns + s + i + 1 + (m-3)ns, i = 1, 2, \dots, s, \\
g(e_{ij}^1) &= \begin{cases} 2ns + \frac{3s}{2} - \frac{s_j}{2} - i + 2 + (m-3)ns, & i = 1, 2, 3, \dots, \frac{s}{2}, j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ \frac{3ns}{2} + 2s - \frac{s_j}{2} - i + 2 + (m-3)ns, & i = \frac{s}{2} + 1, \dots, s, j = 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases} \\
g(e_{ij}^2) &= \begin{cases} 2ns + s + s\frac{n-j}{2} + i + 1 + (m-3)ns, & i = 1, 2, 3, \dots, \frac{s}{2}, j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ 3ns + \frac{s}{2} - \frac{s_j}{2} + i + 1 + (m-3)ns, & i = \frac{s}{2} + 1, \dots, s, j = 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases} \\
g(e_{ij}^k) &= 3j - k + m - (3-3i)n + 2s - jm + (1-i)mn - 3ns + 2mns + 1, \quad \begin{aligned} &i = 1, 2, 3, \dots, s, \\ &j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ &k = 3, 4, 5, \dots, m-1, \end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(g) &= \mu(\lambda) + |E(H)|p + (2|V(G)| + |E(G)| + 2p + 1)r \\
&= (\frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8) + 3((m-3)ns) + (2(ns+s+1) + 2ns+s+2(m-3)ns+1)(m-3) \\
&= 3m - \frac{7}{2}s + 3ms + \frac{9}{2}ns + 2m^2ns - 5mns - 1
\end{aligned}$$

n çift ise:

$$\begin{aligned}
g(v_i) &= i, i = 1, 2, \dots, s+1, \\
g(v_{ij}^1) &= s+1+j+(i-1)n, i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, 3, \dots, n, \\
g(v_{ij}^k) &= ns + s + k + (j-1)(m-3) + (i-1)(m-3)n, \quad \begin{aligned} &i = 1, 2, 3, \dots, s, \\ &j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ &k = 2, 3, 4, \dots, m-2, \end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(e_i) &= (\frac{1}{2} - i)n + 2s + 2ns + 2 - i + (m-3)ns, i = 1, 2, \dots, s, \\
g(e_{ij}^1) &= \begin{cases} (1-i)n - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + \frac{5}{2} - i + (m-3)ns, & i = 1, 2, 3, \dots, s, \\ & j = 1, 3, 5, \dots, n-1, \\ (\frac{1}{2} - i)n - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + 2 - i + (m-3)ns, & i = 1, 2, 3, \dots, s, \\ & j = 2, 4, 6, \dots, n, \end{cases} \\
g(e_{ij}^2) &= \begin{cases} 2s - (\frac{1}{2} - i)n - \frac{1}{2}j + 2ns + \frac{3}{2} + (m-3)ns, & i = 1, 2, 3, \dots, s, \\ & j = 1, 3, 5, \dots, n-1, \\ in - \frac{1}{2}j + 2s + 2ns + 2 + (m-3)ns, & i = 1, 2, 3, \dots, s, \\ & j = 2, 4, 6, \dots, n, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(e_{ij}^k) &= 3j-k+m-(3-3i)n+2s-jm+(1-i)mn-3ns+2mns+1, & i &= 1, 2, 3, \dots, s, \\
& & j &= 1, 2, 3, \dots, n, \\
& & k &= 3, 4, 5, \dots, m-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(g) &= \mu(\lambda) + |E(H)|p + (2|V(G)| + |E(G)| + 2p + 1)r \\
&= (7s + 6ns + 8) + 3((m-3)ns) \\
&\quad + (2(ns + s + 1) + 2ns + s + 2(m-3)ns + 1)(m-3) \\
&= 3m - 2s + 3ms + 3ns + 2m^2ns - 5mns - 1
\end{aligned}$$

s tek ve n tek ise:

$$\begin{aligned}
g(v_i) &= \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & i = 1, 3, 5, \dots, s, \\ \frac{s+i+1}{2}, & i = 2, 4, 6, \dots, s+1, \end{cases} \\
g(v_{ij}^1) &= s + j + n(i-1) + 1, & i &= 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n, \\
g(v_{ij}^k) &= ns + s + k + (j-1)(m-3) + (i-1)(m-3)n, & i &= 1, 2, 3, \dots, s, \\
& & j &= 1, 2, 3, \dots, n, \\
& & k &= 2, 3, 4, \dots, m-2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(e_i) &= 3ns + 2s - i + 2 + (m-3)ns, & i &= 1, 2, \dots, s, \\
g(e_{ij}^1) &= \begin{cases} \frac{3ns}{2} + s + j + n(i-1) + \frac{1}{2} + (m-3)ns, & i = 1, 2, 3, \dots, \frac{s-1}{2}, \\ & j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ 2ns + s - \frac{n}{2} + j + \frac{1}{2} + (m-3)ns, & i = \frac{s+1}{2}, j = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}, \\ ns + s + 1 + j - \frac{n+1}{2} + (m-3)ns, & i = \frac{s+1}{2}, j = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n, \\ \frac{ns}{2} + s + j + n(i-1) + \frac{1}{2} + (m-3)ns, & i = \frac{s+3}{2}, \dots, s, \\ & j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ 3ns + s - 2j - 2n(i-1) + 3 + (m-3)ns, & i = 1, 2, 3, \dots, \frac{s-1}{2}, \\ & j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ 2ns + n + s - 2j + 3 + (m-3)ns, & i = \frac{s+1}{2}, j = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}, \\ 3ns + n + s - 2j + 3 + (m-3)ns, & i = \frac{s+1}{2}, j = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n, \\ 4ns + s - 2j - 2n(i-1) + 3 + (m-3)ns, & i = \frac{s+3}{2}, \dots, s, \\ & j = 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases} \\
g(e_{ij}^2) &= \begin{cases} 2ns + n + s - 2j + 3 + (m-3)ns, & i = \frac{s+1}{2}, j = 1, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{2}, \\ 3ns + n + s - 2j + 3 + (m-3)ns, & i = \frac{s+1}{2}, j = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n, \\ 4ns + s - 2j - 2n(i-1) + 3 + (m-3)ns, & i = \frac{s+3}{2}, \dots, s, \\ & j = 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(e_{ij}^k) &= 3j - k + m - (3 - 3i)n + 2s - jm + (1 - i)mn - 3ns + 2mns + 1, & i &= 1, 2, 3, \dots, s, \\
& & j &= 1, 2, 3, \dots, n, \\
& & k &= 3, 4, 5, \dots, m - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(g) &= \mu(\lambda) + |E(H)|p + (2|V(G)| + |E(G)| + 2p + 1)r \\
&= \left(\frac{11}{2}s + \frac{15}{2}ns + 8 \right) + 3((m - 3)ns) \\
&\quad + (2(ns + s + 1) + 2ns + s + 2(m - 3)ns + 1)(m - 3) \\
&= 3m - \frac{7}{2}s + 3ms + \frac{9}{2}ns + 2m^2ns - 5mns - 1
\end{aligned}$$

■

Örnek 3.2.14. $S(4, 5, 2)$ grafını ele alalım. Burada $m = 4, n = 5, s = 2$ olduğundan Sonuç 3.2.13 ten $S(4, 5, 2)$ grafi C_4 –supermagic etiketlemeye sahiptir ve bu etiketleme aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
g(v_i) &= 4 - i, & i &= 1, 2, 3 \\
g(v_{ij}^1) &= 3 + i + 2(j - 1), & i &= 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
g(v_{ij}^2) &= 13 + j + 5(i - 1), & i &= 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}$$

$$g(e_i) = 43 + i, i = 1, 2$$

$$g(e_{ij}^1) = \begin{cases} 35 - i - j, & i = 1, j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 31 - i - j, & i = 2, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$g(e_{ij}^2) = \begin{cases} 38 + i - j, & i = 1, j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 42 + i - j, & i = 2, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

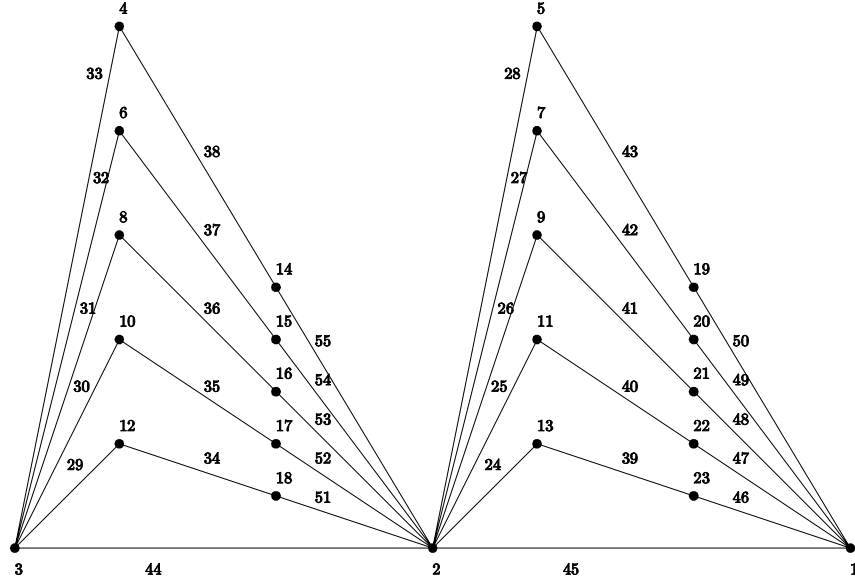
$$g(e_{ij}^3) = 61 - 5i - j, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Magic toplam ise

$$\mu(g) = 3m - \frac{7}{2}s + 3ms + \frac{9}{2}ns + 2m^2ns - 5mns - 1 = 193$$

olur. Bu etiketleme Şekil 3.15. te verilmiştir.

Örnek 3.2.15. $S(5, 6, 3)$ grafını ele alalım. Burada $m = 5, n = 6, s = 3$ olduğundan Sonuç 3.2.13 ten $S(5, 6, 3)$ grafi C_5 –supermagic etiketlemeye sahiptir ve bu etiketleme



Şekil 3.15. $S(4, 5, 2)$ grafinın C_4 -supermagic etiketlemesi

aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 g(v_i) &= i, & i &= 1, 2, 3, 4 \\
 g(v_{ij}^1) &= 4 + j + 6(i - 1), & i &= 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
 g(v_{ij}^k) &= 7 + k + 2j + 12i, & i &= 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, k = 2, 3
 \end{aligned}$$

$$g(e_i) = g(e_i) = 83 - 7i, i = 1, 2, 3$$

$$g(e_{ij}^1) = \begin{cases} 84 - 7i + \frac{5-j}{2}, & i = 1, 2, 3, j = 1, 3, 5 \\ 83 - 7i - \frac{j}{2}, & i = 1, 2, 3, j = 2, 4, 6 \end{cases}$$

$$g(e_{ij}^2) = \begin{cases} 75 + 6i + \frac{3-j}{2}, & i = 1, 2, 3, j = 1, 3, 5 \\ 80 + 6i - \frac{j}{2}, & i = 1, 2, 3, j = 2, 4, 6 \end{cases}$$

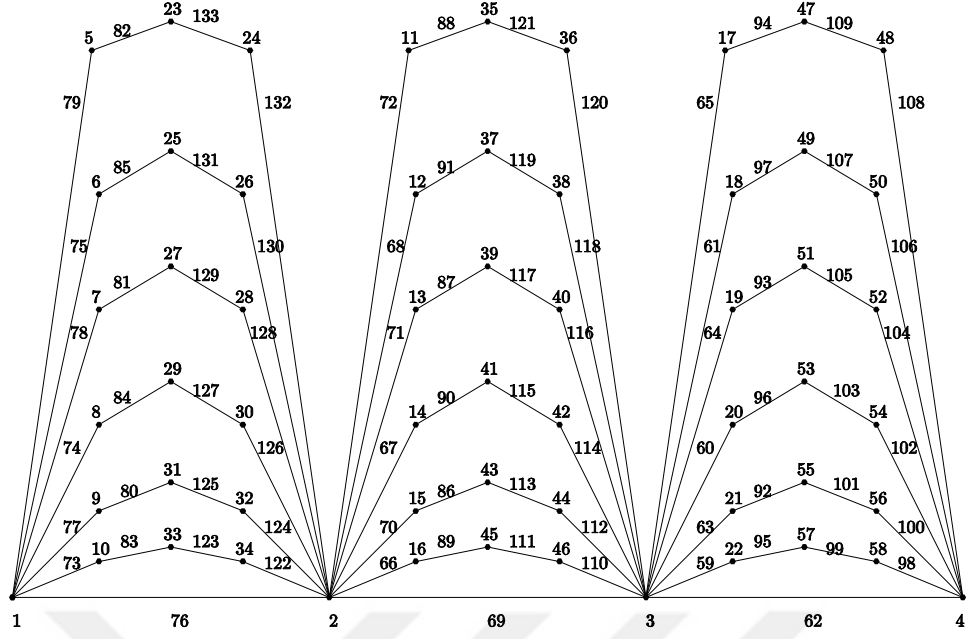
$$g(e_{ij}^k) = 150 - 12i - 2j - k, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, k = 3, 4$$

Magic toplam ise

$$\mu(g) = 3m - 2s + 3ms + 3ns + 2m^2ns - 5mns - 1 = 557$$

olur. Bu etiketleme Şekil 3.16. da verilmiştir.

Örnek 3.2.16. $S(6, 5, 3)$ grafinı ele alalım. Burada $m = 6, n = 5, s = 3$ olduğundan Sonuç 3.2.13 ten $S(6, 5, 3)$ grafi C_6 -supermagic etiketlemeye sahiptir ve bu etiketleme



Şekil 3.16. $S(5,6,3)$ grafinin C_5 -supermagic etiketlemesi

aşağıdaki gibidir:

$$g(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & i = 1, 3 \\ \frac{i+4}{2} & i = 2, 4 \end{cases}$$

$$g(v_{ij}^1) = 4 + j + 5(i - 1), \quad i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$g(v_{ij}^k) = 15i + 3j + k, \quad i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5, k = 2, 3, 4$$

$$g(e_i) = 98 - i, i = 1, 2, 3$$

$$g(e_{ij}^1) = \begin{cases} 66 + 5i + j, & i = 1, j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 76 + j, & i = 2, j = 1, 2, 3 \\ 61 + j, & i = 2, j = 4, 5 \\ 51 + 5i + j, & i = 3, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$g(e_{ij}^2) = \begin{cases} 106 - 10i - 2j, & i = 1, j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 86 - 2j, & i = 2, j = 1, 2, 3 \\ 101 - 2j, & i = 2, j = 4, 5 \\ 121 - 10i - 2j, & i = 3, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$g(e_{ij}^k) = 163 - 15i - 3j - k, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5, k = 3, 4, 5$$

Magic toplam ise

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, önce $B(3, n)$ grafinin s tane kopyasının ortak düğümler boyunca uç uca eklenmesi ile elde edilen $ns + s + 1$ adet düğüme ve $2ns + s$ adet ayrıta sahip, n yapraklı, s parçalı üçgensel kitap-yılan grafi $S(3, n, s)$ tanıtılmış ve bu grafın n ve s değerlerine göre C_3 -supermagic etiketlemeye sahip olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra $B(m, n)$ grafinin s tane kopyasının ortak düğümler boyunca uç uca eklenmesi ile elde edilen $(m - 2)ns + s + 1$ adet düğüme ve $(m - 1)ns + s$ adet ayrıta sahip n yapraklı, s parçalı m -poligonal kitap-yılan graf $S(m, n, s)$ tanıtılmış ve bu graf, $S(3, n, s)$ grafinin her i, j için v_{ij} ile v_{i+1} düğümleri arasına $r = (m - 3)$ tane toplamda ise $p = (m - 3)ns$ tane yeni düğüm eklenmesi ile de elde edilebileceğinden $S(3, n, s)$ grafinin bir alt bölüntüsü olarak düşünülebileceği söylenmiştir. Dolayısıyla, $S(3, n, s)$ grafinin n ve s değerlerine göre elde edilen C_3 -supermagic etiketlemeleri ve Teorem 3.2.11 yardımıyla $S(m, n, s)$ grafinin C_m -supermagic etiketlemesi verilmiştir.

KAYNAKLAR

- Acharya B.D., Arumugam, S. ve Rosa, A. (2008) Labeling of Discrete Structures and Applications, *Narosa Publishing House*, 1-14.
- Bloom, G.S. (1975) Numbered undirected graphs and their uses, A survey of a unifying scientific and engineering concept and its use in developing a theory of non-redundant homometric sets relating to some ambiguities in X-ray Diffraction analysis, Ph. D dissertation, Univ. Southern California, Los Angeles.
- Bloom, G.S. ve Golomb, S.W. (1978) Numbered complete graphs, unusual rulers, and assorted applications, in Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Math., 642, Springer-Verlag, New York, 53-65.
- Bloom, G.S. ve Golomb, S.W. (1977) Applications of numbered undirected graphs, *Proc. IEEE*, 65: 562-570.
- Bloom, G.S. ve Hsu, D.F. (1982) On graceful digraphs and a problem in network addressing, *Congr. Numer.*, 35: 91-103.
- Gallian, J.A. (2018) A dynamic survey of graph labeling, *Electronic J. Combin.*
- Graham R.L. ve Pollak, H.O. (1971) On the addressing problem for loop switching, *Bell systems Tech. J.*, 50: 2495-2519.
- Gutierrez, A. ve Llado, A. (2005) Magic coverings, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55: 43-56.
- Jeyanthi, P. ve Selvagopal, P. (2011) Supermagic coverings of some simple graphs, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 1: 33.
- Llado, A. ve Moragas, J. (2007) Cycle-Magic graphs, *Discrete Math.*, 307: 2925-2933.

- Ngurah, A.A.G., Salman, A.N.M. ve Susilowati, L. (2010) H-Supermagic labeling of graphs, *Discrete Math.*, 310: 1293-1300.
- Maryati, T.K., Salman, A.N., Baskoro, E.T. ve Irawati, (2008) The supermagicness of a disjoint union of isomorphic connected graphs, *Pro. 4th IMG-GT Int. Cong. Math. Stat. Appl.*, 3: 1-5.
- Maryati, T.K., Salman, A.N.M. ve Baskoro, E.T. (2013) Supermagic coverings of the disjoint union of graphs and amalgamations, *Discrete Math.*, 313: 397-405.
- Rosa, A. (1967) On certain valuations of the vertices of a graph, *Theory of Graphs (International Symposium, Rome July 1966)*, Gordon and Breach, N.Y. and Dunod Paris, 349-355.
- Taimur, A., Numan, M., Ali, G., Mumtaz, A. ve Semanicoa-Fenovckova, A. (2018) Super $(a, d) - H$ -antimagic labeling of subdivided graphs, *Open Mathematics*, 16(1): 688-697.
- Öner T., Hussain M. ve Banaras S.(2020) C_m —supermagic labeling of polygonal snake graphs, *J Math Comput SCI-JM*, 20(3):189–195.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : E**U E**L
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Z*****k 2*/0*/1**4
Medeni Hali : Evli
Telefon : 0 5*6 3*1 8* 1*
E-posta : e*****23@gmail.com

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Zonguldak Anadolu Öğretmen Lisesi	2002
Tezsiz Yüksek Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi	2007

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
2007-2008	Özel Murat Dershanesi/Zonguldak-Çaycuma	Matematik Öğr.
2008-2010	MEB-Bulanık Lisesi/Muş-Bulanık	Matematik Öğr.
2010-2012	MEB-Kemer Lisesi/Muğla-Fethiye	Matematik Öğr.
2012-2019	MEB-Melsa Mes. ve Tek. An. Lisesi/Muğla-Fethiye	Matematik Öğr.
2019'dan itibaren	MEB-Fethiye Anadolu Lisesi/Muğla-Fethiye	Matematik Öğr.

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce, vs)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		x	
Konuşma		x	
Anlama		x	
Okuma		x	