ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONSUZ MATRİSLERDEN TÜRETİLEN DİZİ UZAYLARININ VEKTÖR ÖRGÜ ÖZELLİKLERİ

MERVE ULUDAĞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI

2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "SONSUZ MATRİSLERDEN TÜRETİLEN DİZİ UZAYLARININ VEKTÖR ÖRGÜ ÖZELLİKLERİ" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

Merve ULUDAĞ

Çankırı, Şubat 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SONSUZ MATRİSLERDEN TÜRETİLEN DİZİ UZAYLARININ

VEKTÖR ÖRGÜ ÖZELLİKLERİ

Merve ULUDAĞ

Çankırı Karatekin Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Faruk POLAT

Bu tezde, sonsuz matrislerden türetilen dizi uzaylarının vektör örgü özellikleri üzerine bir araştırma verilmiştir. Bu bağlamda, Cesaro ve Toeplitz sonsuz matrisleri gibi negatif olmayan girdilere sahip sonsuz matrisleri içeren ve bu matrisler tarafından tanımlanan lineer ve sürekli operatörler ile ilgili bazı inşalar verilmiştir. Sonsuz matrislerde ki girdilerin negatif olmaması ve dizi uzaylarının solid olması gibi bazı vektör örgü özelliklerinin solid bir dizi uzayından kendi üzerine lineer ve sınırlı operatör tanımlamakta ve solid dizilerin dizisinin izdüşüm limitini tanımlamakta bize fayda sağladığını görüyoruz. Aslında bu inşalar bize değişmez alt uzay örnekleri de sağlamaktadır. Bu inşa tekniklerinden bazıları P. D. JOHNSON Jr., R.N. MOHAPATRA ve P. D. JOHNSON Jr., F. POLAT' a aittir.

ANAHTAR KELİMELER: Vektör örgüsü, Solid dizi uzayı, Toeplitz matrisi, Cesaro matrisi.

ABSTRACT

Master Thesis

VECTOR LATTICE PROPERTIES OF SEQUENCE SPACES

DERIVED FROM INFINITE MATRICES

Merve ULUDAĞ

Çankırı Karatekin University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Faruk POLAT

In this thesis, a research on the vector lattice properties of sequence spaces derived from infinite matrices is given. In this context, some constructions including infinite matrices having nonnegative entries like Cesaro and Toeplitz matrices are taken , and linear and bounded operators defined by these matrices are considered. We see that nonnegativity of entries and solidness of sequence spaces are very important vector lattice properties , since they help us to define linear and bounded operators from a solid sequence space into itself and projective limit of sequence of solid sequence spaces. Actually these constructions provide us to find invariant subspace examples. Some of these construction techniques belongs to P. D. JOHNSON Jr. , R.N. MOHAPATRA and P. D. JOHNSON Jr. , F. POLAT .

KEYWORDS: Vector lattice, Solid sequence space , Toeplitz matrix, Cesaro matrix .

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu seminer çalışmasında, değerli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, ne zaman kendisine danışşam zamanını ayırıp büyük bir özveri ile faydalı olabilmek için elinden geleni bir an olsun benden esirgemeyen, gelecekteki mesleki hayatımda da bilgi ve tecrübelerinden faydalanacağımı düşündüğüm değerli ve kıymetli danışman hoca görevini layıkıyla yerine getiren Prof. Dr. Faruk POLAT hocama teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışmayı hazırlarken başından sonuna kadar geçirdiğim süreçte benden maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen her zaman yanımda hissettiğim sevgili aileme ve sevdiklerime teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Merve ULUDAĞ

Çankırı, 19 Şubat 2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Uzayı
ℓ_p	p. dereceden mutlak toplanabilir dizi uzayı
ℓ_∞	Sınırlı dizi uzayı
sup	En küçük üst sınır
A^{-1}	A matrisinin tersi
$\|\| . \|\|$	Norm
$\mathbb{F}$	Skaler cisim

1. GİRİŞ VE TEORİK ÇERÇEVE

Sonsuz matrisler tarafından türetilen solid dizi uzayları 1970'li yıllardan itibaren yoğun bir şekilde çalışılmıştır. İlk olarak Leibowitz [Leibowitz(1971)] ve Shiue [Shiue(1970)]; 1970 ve 1971 yıllarında Cesàro matrisi tarafından türetilen solid dizi uzayını çalışmıştır. Bu uzay $ces_p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}: C|x| \in \ell_p\}$ kümesi olarak gösterilmiştir.

Burada girdileri $c_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i}\ ; & i \geq j \\ 0\ ; & i < j \end{cases}$ formülü ile tanımlanan $C = [c_{ij}]$ sonsuz matrisine Cesàro matrisi denir.

O zaman reel terimli diziler uzayı $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektör örgüsünde, ces_p bir solid alt uzayıdır.

ces_p, $0 < p \leq 1$ için aşikar vektör uzayıdır ve $1 < p < \infty$ için ℓ_p yi bir öz alt küme olarak içerir. ces_p üzerinde $\|x\|_{ces_p} = \|A|x|\|_p$ formülü bir norm tanımlar ve açıkça bu norm solid bir normdur. Leibowitz [Leibowitz(1971)], ces_p uzayının bu norma göre ayrılabilir bir Banach uzayı olduğunu göstermiştir. ces_p, ℓ_∞ uzayının bir alt kümesi değildir. Fakat hem ces_p hem de ℓ_∞ uzayları ℓ_p uzayını içerdiğinden bu uzayların arakesiti boş değildir.

$A = [\, a_{ij} : i, j \geq 1] = [a_{ij}]$ girdileri negatif olmayan ve bütün girdileri sıfır olmayan sütunlardan oluşan sonsuz bir matris olsun. A nın tanım kümesi $dom(A)$ ile gösterilir ve $dom(A) = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : her\ i \in N\ için \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\ \ serisi\ yakınsar\ \}$ ile tanımlanır. $x\epsilon dom(A)$ için $Ax, x\ in\ A$ altındaki dönüşümü, $her\ i\epsilon N\ için\ (Ax)i\ = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j$ ile verilir.

Eğer $\lambda \epsilon \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ise $A^{-1}(\lambda) = \{x \in dom(A): Ax \in \lambda\}$ dır. Eğer $A = [a_{ij}]$ negatif olmayan girdilere sahip ve ana köşegen üzerindeki bütün girdileri pozitif $(a_{ij} > 0)$ alt üçgensel bir matris ise (yani her $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise) $dom(A) = \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$' dir. Ana köşegende sıfırdan farklı girdilerin varsayımı A nın matris olarak tersinin olduğunu gerektirir. Bu ters A^{-1} aynı zamanda alt üçgenseldir. A matrisi bütünüyle köşegensel bir matris değil ise A^{-1}'in bütün girdileri pozitif olmayabilir. Sonsuz matrisler tarafından tanımlanan lineer sürekli operatörler değişmez alt uzay örnekleri elde etmek açısından önemlidir. Örneğin, Hardy eşitsizliğinden ($||Cx||p \leq ||\,C|x|\,||p \leq \frac{p}{p-1}\|x\|p,\ 1 < p < \infty$), Cesàro matrisinin ℓ_p uzayını ℓ_p uzayına dönüştürdüğünü söyleyebiliriz. Ayrıca Cesàro matrisinin $c,$ yakınsak diziler uzayını kendine dönüştürdüğünü de göstermek zor değildir. Bu bağlamda üç araştırma makalesini irdeleyeceğiz.

Bu tezin **ilk** ünitesi tez çalışmasının ana hatlarını bir giriş olarak vermektedir.

İkinci ünite sıralı vektör uzayları, Riesz uzayları (vektör örgüleri) ile ilgili bazı temel tanımları, örnekleri ve sonuçları içermektedir. Bu ünite ve tez boyunca Riesz uzaylarıyla ilgili açıklanmayan kavramlar için [Luxemburg vd (1971)] kitabına başvurulabilir.

Üçüncü ünite P. D. Johnson ve R. N. Mohapatra'nın [Johnson vd (1986)] makalesine odaklanmaktadır. Bu makalede genel olarak negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris tarafından türetilen solid dizi uzayının bazı topolojik özellikleri ele alınmıştır.

Dördüncü ve beşinci ünitelerde P.D. Johson ve F. Polat [Johnson vd (2015), Johnson vd (2016)] tarafından yapılan iki çalışma incelenmiştir. Bunlardan ilkinde Cesaro matrisi tarafından üretilen her bir terimi solid dizi uzayı olan dizilerin dizisi tanıtılmış ve bu dizilerin ürettiği izdüşüm limiti ele alınmıştır. İkincisinde ise Cesaro matrisi yerine Toeplitz matrisi alınarak aynı diziler ve izdüşüm limitleri bu sonsuz matris için tanımlanmıştır. Bu makalede ayrıca Toeplitz matrisin solid bir dizi uzayını kendisine dönüştürmesi için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve kavramları göreceğiz. Bu kavramlar Riesz uzayları ve topolojik vektör uzaylarıyla alakalıdır. Tezde açıklanmayan kavramlar için [Luxemburg (2000)] ve [Schaefer (1966)] kaynaklarından faydalanılabilir.

2.1. Sıralı Vektör Uzayları

E bir reel vektör uzayı öyle ki üzerinde " $\leq$ " bir sıralama bağıntısı (yani yansıyan, ters simetrik ve geçişken) olsun. Aşağıda ki özellikler sağlanırsa E'ye bir sıralı vektör uzayı denir.

(i) Şayet $u, v \in E$ ve $u \leq v$ ise, o zaman tüm $w \in E$ için $u + w \leq v + w$ dur.

(ii) Şayet $u, v \in E$ ve $u \leq v$ ise, o zaman her $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda u \leq \lambda v$' dir.

E de her hangi iki u, v elemanı verildiğinde $u \leq v$ için başka bir gösterim $v \geq u$ dur.

E' nin $u \geq 0$ şartını sağlayan bütün u elemanlarına pozitif elemanları denir ve $u > 0$ ise u'ya kesinlikle pozitif denir. E'nin bütün pozitif elemanlarının kümesi

$E^+ = \{u \in E: u \geq 0\}$ ile gösterilir ve bu kümeye E nin pozitif konisi denir. E sıralı vektör uzayında, her $u, v \in E$ için (varsa) aşağıdakileri yazarız.

$$\sup(u, v) = u \vee v, \inf(u, v) = u \wedge v, \sup(u, 0) = u^+, \sup(-u, 0) = u^-, \ |u| = u \ \vee -u.$$

Tanım 2.1.1. E bir sıralı vektör uzayı olsun. Şayet her $u, v \in E$ için $u \vee v$ elemanı E de mevcut ise E ye Riesz uzayı veya vektör örgüsü denir. Bazı sıralı vektör uzayları ve Riesz uzayları aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1.2. 1. E boş olmayan bir küme, X, E üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların vektör uzayı olsun. X kümesi noktasal toplama ve skalerle çarpma işlemi altında bir vektör uzayıdır. Yani her $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ve $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ile tanımlayalım. Ayrıca "$f \leq g$" bağıntısını her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ olarak tanımlayalım. Bu sıralamaya noktasal sıralama denir. Bu sıralama altında X bir Riesz uzayıdır.

2. X topolojik uzayı üzerinde $C(X)$, reel değerli sürekli fonksiyonlar kümesi, noktasal işlemler ve noktasal sıralama altında sıralı bir vektör uzayıdır. Ayrıca $C(X)$ aynı zamanda Riesz uzayıdır. $C(X)$ de ki tüm sınırlı fonksiyonların $C_b(X)$ alt kümesi de bir Riesz uzayıdır. Eğer X yerel kompak ise $C(X)$ de ki tüm sürekli fonksiyonların $C_c(x)$ kompak alt kümeleride bir Riesz uzayıdır.

3. $L = \prod L_\alpha$ kartezyen çarpımının $\{L_\alpha : \alpha \in I\}$ bileşenleri sıralı vektör uzayları olsun. O zaman L bir Riesz uzayıdır ve her biri $(u_\alpha), (v_\alpha) \in L$ için, $(u_\alpha) \vee (v_\alpha) = (u_\alpha \vee v_\alpha)$, $(u_\alpha) \wedge (v_\alpha) = (u_\alpha \wedge v_\alpha)$ dır.

4. $\mathbb{R}^n$ koordinatsal toplama ve skaler ile çarpma işlemi altında n boyutlu reel bir vektör uzayıdır. Eğer sıralamayı da aynı şekilde koordinatsal olarak tanımlarsak, yani,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için, $x \leq y$ olması her $k = 1,2,3, \dots, n$ için

$x_k \leq y_k$ olması durumunda sağlanıyorsa $\mathbb{R}^n$ bu sıralama altında bir Riesz uzayıdır. Burada $\mathbb{R}$ nin sıra yapısı ile vektör uzayının yapısının uyumlu olması kullanılır.

5. $\mathbb{R}^2$ de şu sıralamayı düşünelim: $x_1 \leq y_1$ veya $(x_1 = y_1$ ve $x_2 \leq y_2)$ olduğunda $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ olsun. Bu sıralama altında $\mathbb{R}^2$ Riesz uzayıdır. Bu sıralamaya sözlüksel (lexicographical) sıralama denir.

Teorem 2.1.3. Eğer E bir Riesz uzayı ve u ve v elemanları ise, o zaman, (1) u^+ ve $u^- E^+$ ya aittir; $(-u)^+ = u^-$, ve benzer şekilde $(-u)^- = u^+$. Ayrıca $|-u| = |u|$.

(2) $u = u^+ - u^-, u^+ \wedge u^- = 0,$ ve $|u| = u^+ + u^-$.

(3) $0 \leq u^+ \leq |u|$ ve $0 \leq u^- \leq |u|$. Ayrıca $u^- \leq u \leq u^+$ve $|u| = 0 \leftrightarrow u = 0$.

(4) $u \leq v \leftrightarrow u^+ \leq v^+$ ve $u^- \geq v^-$.

E bir Riesz uzayı olsun. Eğer $|u| \wedge |v| = 0$ ise, E içindeki u ve v ögelerinin birbirinden ayrık olduğu söylenir. u ve v nin birbirinden ayrık olduğunu göstermek için $u \perp v$ notasyonu kullanılcaktır.

Tanım 2.1.4. Riesz uzayının boş olmayan herhangi bir D alt kümesi için

$$D^d = \{u \in E : u \perp v \, \forall \, v \in D\}$$

kümesine D nin ayrık tümleyeni denir. D^d nin ayrık tümleyeni $D^{dd} = (D^d)^d$, D nin ikinci ayrık tümleyeni olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.5. E bir Riesz uzay olsun. E nin alt kümelerinin E de ki sıralamaya sahip olduğunu varsayıyoruz.

1. E nin lineer K alt uzayına, eğer her $u, v \in K$ için $u \vee v$ ve $u \wedge v$ K ya ait ise , E nin bir Riesz alt uzay denir.

2. S, E nin bir alt kümesi olmak üzere $|v| \leq |u|$ $u \in S$ ifadesi $v \in S$ olmasını sağlıyorsa S ye solid küme denir.

3. A, E nin solid bir lineer alt uzayı ise, A ya E de ideal denir. Bazen bunu bir halkadaki cebirsel bir idealden ayırt etmek için E de sıra ideali denir.

4. $E_u = \{v \in E : \exists \lambda > 0$ ile $|v| \leq \lambda |u|\}$ kümesine u elemanı tarafında üretilen ideal denir.

5. E de ki ideal B, B alt kümesinin E de bir supremuma sahip olması durumunda, bu supremum B nin de bir üyesi ise bir bant olarak adlandırılır, yani $D \subseteq B$ iken

$u = \sup D \in B$ olur.

6. E Riesz uzayının bir D bandını kapsayan en küçük bandına D tarafından üretilen band denir ve $\{D\}$ ile gösterilir. Bir u elemanı tarafından üretilen esas band B_u ile gösterilir. E Riesz uzayının bir izdüşüm B bandı, $E = B \oplus B^d$ şartını sağlayan banddır. Bir izdüşüm elemanı temel bandı oluşturan bir izdüşüm bandının herhangi bir elemanıdır. E bir Riesz uzayı olmak üzere $B_e = E$ şartını sağlayan $0 < e$ elemanı zayıf sıra birimi olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.6. 1. $E = \{f : f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\}$ kümesi $C[0,1]$ nin bir vektör alt uzayıdır, fakat bir Riesz alt uzayı değildir; ve 1 sabit 1 fonsiyonunu göstermek üzere $\{a1 : a \in \mathbb{R}\}$ kümesi $C[0,1]$ nin bir Riesz alt uzayıdır, fakat bir ideali değildir.

2. Koordinatsal sıralama altında s tüm dizilerin kümesi ve c_0 reel sıfıra yakınsayan dizilerin kümesi olsun. l_1 uzayı c_0 da öz alt bir idealdir, c_0 uzayı l_∞ da öz alt idealdir ve l_∞ da s de öz alt bir idealdir. Bu ideallerin hiçbiri band değildir.

Tanım 2. 1. 7. Her $u \in E^+$ için $\inf\{n^{-1}u : n = 1,2,3, ...\} = 0$ ise, E Riesz uzayının Arşimedyan olduğu söylenir.

$C(X)$ Riesz uzayı ve n boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^n$, koordinatsal sıralama altında Arşimedyan dır. Arşimedyan olmayan Riesz uzayları vardır. Örnek olarak, $E = \mathbb{R}^2$ de sözlük sıralaması olsun. E deki $(0,1)$ elemanı, (n^{-1}, n^{-1}) dizisinin bir alt sınırıdır. Bu nedenle, $u = (1,1)$ elemanı $\inf\{n^{-1}u : n = 1,2,3, ...\} = 0$ koşulunu sağlamaz.

2.2. Topolojik Vektör Uzayları

X $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerine bir vektör uzayı olsun. Skaler cismi $\mathbb{K}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.1. Bir topolojik vektör uzayı (kısaca $t.v.u.$) üzerinde bir topoloji

$\mathcal{J}$ olan öyle ki $(x, y) \longrightarrow x + y$ ve $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ ile tanımlanan $X \times X \longrightarrow X$ ve $\mathbb{K} \times X \longrightarrow X$

fonksiyonlarının sürekli olduğu X vektör uzayıdır. Burada $\mathbb{K}$ üzerinde alışılmış Öklid topolojisi vardır.

Sonuç 2.2.2. X bir $t.v.u.$ olsun. Bu durumda

(1) Sabitlenmiş bir $x \in X$ için öteleme fonksiyonu $y \longrightarrow x + y$ X ten kendi üzerine bir homomorfizmadır ;

(2) Sabitlenmiş bir $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ için $x \longrightarrow \alpha x$ fonksiyonu X ten kendi üzerine bir homomorfizmadır.

Tanım 2.2.3. 0 da $\mathcal{J}$ topolojisi için bir baz local (yerel) baz olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.4. X bir $t.v.u.$ ve $\mathcal{F}$, 0 da local bir baz olsun. Bu durumda

(i) $U, V \in \mathcal{F} \Longrightarrow$ En az bir $W \in \mathcal{F}$ için $W \subseteq U \cap V$ olur.

(ii) Eğer $U \in \mathcal{F}$ ise , en az bir $V \in \mathcal{F}$ vardır öyle ki $V + V \subseteq U$ dur.

(iii) Eğer $U \in \mathcal{F}$ ise , en az bir $V \in \mathcal{F}$ vardır öyle ki $|\alpha| \leq 1$ şartını sağlayan $\alpha \in \mathbb{K}$ için $\alpha V \subseteq U$ dur .

(iv) Her $U \in \mathcal{J}$ kapsayıcıdır, yani eğer $x \in X$ ise bir $\delta > 0$ vardır ve $|\alpha| \leq \delta$ şartını sağlayan her a için $ax \in U$ dur.

Tersine , X bir vektör uzay olsun ve $\mathcal{F}$ de X in yukarıdaki dört özelliği sağlayan kümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun bu durumda bir $\mathcal{J}$ topolojisini şu şekilde tanımlayabiliriz:

Eğer her $x \in A$ için öyle bir $U \in \mathcal{F}$ varsa ve $x + U \subseteq A$ oluyorsa bu durumda A ya açık küme deriz. O zaman $\mathcal{J}$ X vektör uzayını local bazı $\mathcal{F}$ olan bir $t.v.u.$ yapar.

Bir $t.v.u.$ nun bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.2.5. X bir $t.v.u.$ olsun. O zaman

(i) $\overline{x + A} = x + \bar{A}$.

(ii) $\overline{A + B} \supseteq \bar{A} + \bar{B}$.

(iii) Eğer U açıksa ve A herhangi bir alt küme ise o zaman $A + U$ açıktır.

(iv) C, D kompakt $\Longrightarrow C + D$ kompaktır.

(v) $A \subseteq \bar{X}$ ise $\bar{A} = \bigcap\{(A + U) : U$ 0 ın komşuluğu $\}$.

(vi) $\mathcal{J}$ Hausdorff tur ancak ve ancak $\{0\}$ kapalıdır ancak ve ancak her local baz $\mathcal{F}$ için $\{0\} = \bigcap\{U : U \in \mathcal{F}\}$ dir.

(vii) Eğer U , 0 ın bir komşuluğu ise bu durumda 0 ın en az bir dengeli komşuluğu V vardır öyle ki $V \subseteq U$ dur.

$(viii)$ Konveks bir kümenin kapanışı da konvekstir; bir alt uzayın kapanışı yine bir alt uzaydır; dengeli bir kümenin kapanışı dengelidir.

(ix) Eğer C kompakt U C nin bir komşuluğu ise o zaman 0 ın bir V komşuluğu vardır öyle ki $C + V \subseteq U$ dur.

(x) C kompakt F kapalı $\Longrightarrow C + \mathcal{F}$ kapalıdır.

(xi) Eğer U 0 ın dengeli bir komşuluğu ise $int(U)$ (U nun içi) dengelidir.

(xii) U 0 ın herhangibir komşuluğu ise o zaman U 0 ın kapalı dengeli bir komşuluğunu içerir. Başka bir deyişle kapalı dengeli komşuluklar 0 da local bir baz oluşturur.

$(xiii)$ Her 0 ın konveks komşuluğu en az 0 ın bir kapalı dengeli konveks komşuluğunu içerir.

İspat :

(x) Varsayalım $x \notin C + \mathcal{F}$ olsun yani $(x - \mathcal{F}) \cap C = \emptyset$ veya $C \subseteq (x - F)^c$ olsun. Şimdi $(x - F)^c$ açık ve C kompakttır, dolayısıyla (ix) dan en az bir 0 ın V komşuluğu vardır öyle ki $C + V \subseteq (x - F)^c$,

yani (v) $(C + V) \cap (x - \mathcal{F}) = \emptyset \Longrightarrow x \in C + \mathcal{F} + V \Longrightarrow x \notin \overline{C + \mathcal{F}}$ dir.

(xii) 0 ın öyle bir dengeli V komşuluğu vardır öyle ki $V + V \subseteq U$ dur . Dolayısıyla $\bar{V}$ da dengeli ve $\bar{V} \subseteq V + V \subseteq U$ dur.

$(xiii)$ U 0 ın bir konveks komşuluğu olsun. V kümesini $V = \bigcap\{\alpha U : \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| = 1\}$ ile tanımlayalım. V nin konveks ve dengeli olduğunu göstermek kolaydır ayrıca (xii) den U nun 0 ın dengeli bir komşuluğudur. Şimdi $\overline{\frac{1}{2}V} \subseteq \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subseteq V$ olduğunda

$\overline{\frac{1}{2}V}$ nin kapanışı U içerisinde kalan 0 ın dengeli kapalı konveks bir komşuluğudur.

■

Aşağıdaki $t.v.u$ nun sınıfı analizde yoğun bir şekilde kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.6. Eğer 0 da elemanları konveks kümeler olan bir local taban varsa bu durumda X $t.v.u.$ ya local konveks denir ve kısaca $l.k.t.v.u.$ ile gösterilir. Bir $l.k.t.v.u.$ nun topolojisi açıkca yarı normların bir ailesi ile üretilir.

Tanım 2.2.7. Bir $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu alt toplamsal ve pozitif olarak homojen ise yani

(a) Her $x , y \in X$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(b) Her $x \in X$ için ve $\alpha \geq 0$ için $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ ise bu durumda p ye alt lineer denir ayrıca her $x , y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için $(b)'$ $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ özelliği sağlanıyorsa bu durumda p ye yarı norm denir. Dikkat edilirse her yarı norm alt lineerdir. Bir p yarı normu $p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ şartını sağlarsa norm olarak adlandırılır.

Şimdi bir vektör uzayı üzerindeki yarı normların bir ailesinin bir local konveks topoloji ürettiğini göstereceğiz.

Teorem 2.2.8. $\{p_i : i \in I\}$ kümesi X vektör uzayı üzerinde tanımlı yarı normların bir ailesi olsun. $\mathcal{U}$ kümesi $i \in I$, $\delta_i > 0$ olmak üzere $\{ x \in X : p_i(x) < \delta_i\}$ formundaki kümelerin bütün sonlu arakesitlerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$ X vektör uzayını $l.k.t.v.u.$ yapan $\mathcal{J}$ topolojisi için local bir bazdır. Bu topoloji bütün p_i leri sürekli yapan en küçük topolojidir ve $\{x_\alpha\} \subseteq X$ için $\mathcal{J}$ da $x_\alpha \longrightarrow x$ dır ancak ve ancak her $i \in I$ için $p_i(x_\alpha - x) \longrightarrow 0$ dır.

İspat : Teorem 2.2.4. ün bütün koşullarının sağlandığını göstermeliyiz.

(i) $\mathcal{U}$ açıkça sonlu kesişimler altında kapalıdır.

(ii) $U = \{x :\ p_i(x) < \delta_i\ , i = 1\ , 2\ , \ldots , n\ \}$ olsun. $\delta_i = min_i \delta_i / 2$ ve

$V = \{x : p_i(x) < \delta_i\ , i = 1\ , 2\ , \ldots , n\ \}$.

Eğer $x\ , y\ \in V$ ise $p_i(y+z) \leq p_i(y) + p_i(z) < \delta/2 + \delta/2 = \delta < \delta_i \Longrightarrow V + V \subseteq U$.

(iii) $p_i(\alpha x) = |\alpha| p_i(x)$ olduğundan her $U \in \mathcal{U}$ dengelidir.

(iv) Eğer $x \in X$ ve α yeterince küçük ise $p_i(\alpha x) = |\alpha| p_i(x) < \delta_i$ dir.

$\mathcal{J}$ her bir $U \in \mathcal{U}$ konveks olduğundan local konveks topolojidir.

Her $U = \{x :\ p_i(x) < \delta_i\ , i = 1\ , 2\ , \ldots , n\ \}$ açıktır. Çünkü

$V = \left\{z \in X :\ p_i(z) < min_j \left[\delta_j - p_j(x)\right]\ \right\}$ olmak üzere $x \in U$ iken, $x + V \subseteq U$ dur.

$|p_i(x) - p_i(y)| \leq\ p_i(x - y)$ ve $U \in \mathcal{U}$ kümeleri her bir p_i yi 0 da sürekli yapan herhangi bir topolojide açık olduğundan , p_i lerin sürekliliği 0 daki sürekliliğe denktir. Bu da bize verilen topolojinin bütün p_i leri sürekli yapan en zayıf topoloji olduğunu gösterir. Son olarak, $\mathcal{U}$ nun tanımından her i için

$x_\alpha \longrightarrow x \Leftrightarrow x_\alpha - x \longrightarrow 0 \Leftrightarrow p_i(x_\alpha - x) \longrightarrow 0$ elde edilir.

Sonuç 2.2.9. $\mathcal{J}$ Hausdorff topolojidir ancak ve ancak $\{\ p_i\ : i \in I\ \}$ ailesi ayırandır , yani $x \neq 0$ verildiğinde en az bir p_i için $p_i(x) \neq 0$ dır.

Teorem 2.2.10. Eğer X bir $l.k.t.v.u.$ ise o zaman topolojisi yarı normların bir $\mathcal{P}$ ailesi tarafından üretilir.

Tanım 2.2.11. Y bir $t.v.u.$ ve $E \subseteq Y$ olsun. Eğer Y de 0 ın her U komşuluğu için en az bir $t \in \mathbb{R}^+$ varsa ve $E \subseteq tU$ oluyorsa bu durumda E ye Y içinde sınırlıdır denir.

Teorem 2.2.12. Varsayalım X bir $l.k.t.v.u.$ olsun ve topolojiside yarı normların bir ailesi ile üretilsin. Bu durumda $E \subseteq X$ sınırlıdır ancak ve ancak her $p \in \mathcal{P}$ E üzerinde sınırlıdır.

Sonuç 2.2.13. Varsayalım $\mathcal{P} = \{p_i : i = 1,2, \ldots\}$ kümesi bir X $\mathcal{J}$ $t.v.u.$ üzerinde yarı normların sayılabilir bir ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{J}$ topolojisi ile uyumlu olan öteleme altında değişmez bir metrik vardır. Tam olarak bu metrik

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)} \quad \text{tanımlayalım .}$$

Buradaki tek sıkıntı $\{x : d\ (0\ , x) \leq r\ \}$ yuvarlarının konveks olmaya ihtiyacı olmamasıdır. (Bunlar dengelidir.)

Teorem 2.2.14. Hausdorff bir $t.v.u.$ normlanabilirdir ancak ve ancak bu topoloji 0 ın sınırlı bir konveks komşuluğuna sahiptir.

3. NEGATİF OLMAYAN MATRİS DÖÜŞÜMÜ İLE TANIMLANAN DİZİLERİN SOLİD UZAYININ TERS GÖRÜNTÜSÜNÜN MAXİMAL SOLİD ALT UZAYI

Bu bölümde P. D. Johnson ve M.R. Mohapatra [Johnson vd (1986)] tarafından yapılan negatif girdilere sahip olmayan sonsuz matrisler ile tanımlanan dizilerin solid uzayının ters görüntüsü olan solid alt uzayın bir araştırmasını vereceğiz. Bu araştırma da adı geçen solid alt uzayın başlangıçta verilen dizi uzayından geçen bazı topolojik ve sıralama özellikleri ele alınmıştır.

3. 1 Giriş ve Bazı Notasyonlar

$\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ kompleks değerli veya reel değerli dizilerin uzayını , c_{00} sadece sonlu terimi 0 olan dizilerin alt uzayı olsun. Diziler üzerindeki bütün işlemler koordinatsal olacaktır. Bütün $x = \{x_n\}$ dizileri 1 den itibaren indekslenecektir. Z^+ bütün doğal sayıları göstersin. $0 < p \leq \infty$ için l_p alışılmış anlamına sahip ve $\|.\|_p$ da alışılmış norm veya quasinorm ; c yakınsak diziler uzayı olsun.

Eğer $a \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$, $S \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ise $aS = \{ab \mid b \in S\}$ yazalım. $a \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ için a nın solid kabuğu $N\,(a)$, $N\,(a) = \{b \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \mid |b_n| \leq |a_n|, n \in Z^+\}$ ile tanımlanır.

Eğer $S \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ise S kümesinin solid kabuğu $N\,(S)$, $N\,(S) = \bigcup_{a \in S} N(a)$ ile tanımlanır. Eğer $N\,(S) = S$ ise $S\;ye$ soliddir denir. $A = (a_{mn})$ (m,n =1,2,…) skalerlerin sonsuz bir matrisini göstersin. A nın tanım kümesi

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \mid \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n \;\; serisi\; her\; m \in \; Z^+ \; için\; yakınsaktır\}$$

kümesi ile tanımlanır.

x $\in \mathcal{D}(A)$ için Ax, x in A altındaki dönüşümü,

(1) $(Ax)_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n$ formülü ile verilir.

Eğer $S \subseteq \mathcal{D}(A)$ ise

(2) $AS = \{ Ax | \, x \in S \}$ ile tanımlanır.

Eğer $S \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ise

(3) $A^{-1}(S) = \{ X \in \mathcal{D}(A) \,\big|\, Ax \in S \}$ kümesi ile tanımlanır.

A^{-1}, A nın matris tersi, olduğu zaman ve $S \subseteq \mathcal{D}(A^{-1})$ iken

(4) $A^{-1}S = \{ A^{-1}x | \, x \in S \}$ yazarız.

(3) ve (4) nolu formüllerde parantezlerin olması veya olmaması önemlidir.

Şimdi aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1.1

Eğer $S \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ve A sonsuz bir matris ise

(5) $sol - A^{-1}(S) = \{ x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \,\big|\, |x| \in A^{-1}(S)\} = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \,\big|\, |x| \in \mathcal{D}(A)\ ve$

$A|x| \in S \}$ dir.

Yukarıdaki tanımda "sol" notasyonunu kullanmamızın sebebi aşağıda göreceğimiz gibi bazı durumlar altında $sol - A^{-1}(S)$ nin $A^{-1}(S)$ kümesinin en büyük solid alt kümesi olmasıdır.

Eğer λ bir T topolojisine sahip teknolojik bir vektör uzayı ise $A^{-1}(\lambda)$ doğal olarak T den üretilen ve açık kümeleri $A^{-1}(U),\ U \in T$ olan $A^{-1}(T)$ topolojisi ile bir topolojik vektör uzayıdır.

İkinci bölümde göstereceğimiz gibi bazı durumlar altında Teorem 3.3.2 bize T nin $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde $\left(A^{-1}(\lambda), A^{-1}(T)\right)$ nin bir alt uzayı olarak $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde göreceli topolojiden daha dar olmayan bir topoloji ürettiğini söyler.

Eğer bu topolojiyi A nın bir topolojik vektör uzayı (λ, T) den ürettiği $sol - A^{-1}(T)$ ile adlandırırsak diğer iki topolojiyi de $\left(A^{-1}(\lambda), A^{-1}(T)\right)$ ve $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(T))$ olarak adlandırırız. Bu araştırmanın amacı iki $\left(A^{-1}(\lambda), A^{-1}(T)\right)$ ve $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(T))$ topolojinin hangi aşamaya kadar (λ, T) topolojisinin aynı özelliklerine sahip olduğunu irdelemektir.

Eğer A sonsuz birim matris, $\lambda = \ell_p (p > 0)$ ve T de ℓ_p nin alışılmış normu ise o zaman $A^{-1}(\lambda)$ ve $sol - A^{-1}(\lambda)$ ℓ_p ye eşittir. Eğer öte yandan $\lambda = \ell_p (p > 0)$, A Cesàro matrisi $C = (c_{nk})$ öyle ki

$$c_{nk} = \begin{cases} 1/n & (k \leq n \ ; \\ 0 & (k > n \ ; \end{cases} \qquad Cx = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)_n ,$$

ise $sol - C^{-1}(\ell_p)$ Shiue [Shiue , (1970)] ve Leibowitz [Leibowitz , (1971)] tarafından tanıtılan dizi uzayı ces_p dir.

Bu yazarların çalışmaları bize aşağıdakileri göstermiştir :

$(\boldsymbol{i})$ ces_p eğer $0 < p \leq 1$ ise aşikâr bir vektör uzayıdır, yani ces_p sadece 0 dizisinden oluşur.

$(\boldsymbol{ii})$ $1 < p \leq \infty$ için ces_p ℓ_p uzayını bir öz alt lineer uzay alarak içerir. Bu sonuç Hardy eşitsizliğinden gelir. [Hardy , (1934) , s.239]

$(\boldsymbol{iii})$ ces_p $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin normlu bir alt uzayıdır öyle ki normu $\|x\|_{ces_p} = \|C|x|\|_p$, formülü ile verilir.

$(\boldsymbol{iv})$ ces_p yukarıdaki norma göre tam ve ayrılabilir bir normlu uzaydır.

Bu bölümde elde edilen sonuçlar ces_p uzayının bazı genelleştirmelerini kapsayacak ve bize ℓ_p uzayının özelliklerinin ve Cesàro matrisi C nin yukarıdaki sonuçların elde edilmesinde ne kadar önemli olduğunu gösterecektir.

Bir A matrisi ile ve bazı hipotezleri sağlayan ve $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin bir alt uzayı ile başladığımız zaman ces_p uzayındaki elde edilen sonuçların sağlanıp sağlanmadığına konsantre olacağız Bu bağlamda 2.bölüm A matrisi ve λ üzerinde $sol - A^{-1}(\lambda)$ uzayının ces_p uzayına benzer özellikler sağlaması için hangi hipotezleri koymamız gerektiğini gösterecektir. 3. Bölüm $sol - A^{-1}(\lambda)$ uzayının λ topolojik vektör uzayının ne gibi özelliklerini taşıyacağını gösterecektir.

3.2. $\boldsymbol{sol - A^{-1}(\lambda)}$ Uzayının Bazı Özellikleri

Bu bölüm de $A^{-1}(\lambda)$ ve $sol - A^{-1}(\lambda)$ uzayları ile ilgili çalışmalarımızda kullanacağımız bazı sonuçları göreceğiz.

Lemma 3.2.1 Solid dizilerin konveks kabuğu soliddir.

İspat : $S \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ için $L(S) = \{ tx + (1-t)y \mid x, y \in S \ ve \ t \in [0,1]\}$ kümesini tanımlayalım.S in konveks kabuğu $\bigcup_{n=1}^{\infty} L^n(S)$ olduğundan ve solid kümelerin birleşimi solid olduğundan S kümesi solid iken $L(S)$ in de solid olduğunu göstermek yeterlidir.

$x, y \in S, t \in [0,1]$ ve her n için $|z_n| \leq |tx_n + (1-t)y_n|$ olsun.

$a, b \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ elemanlarını eğer $tx_n + (1-t)y_n = 0$ iken $a_n = b_n = 0$ ve

diğer durumlarda $a_n = z_n x_n (tx_n + (1-t)y_n)^{-1}$ formülü ile tanımlayalım öyle ki $z = ta + (1 - t)b \in L(S)$ dir. Böylece $L(S)$ soliddir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç bize $''sol - A^{-1}(\lambda)''$ gösteriminin ne kadar uygun bir gösterim olduğunu kanıtlar.

Önerme 3.2.2 A negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris ve $\lambda, \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nın solid bir alt uzayı olsun. O zaman

$(\boldsymbol{a})$ $sol - A^{-1}(\lambda)$ soliddir ;

$(\boldsymbol{b})$ $sol - A^{-1}(\lambda) \subseteq A^{-1}(\lambda)$;

$(\boldsymbol{c})$ $sol - A^{-1}(\lambda)$ kümesi $A^{-1}(\lambda)$ içerisinde ki solid kümelerin en büyüğüdür ;

$(\boldsymbol{d})$ $sol - A^{-1}(\lambda)$ $kümesi$ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nın bir alt uzayıdır.

Örnek 3.2.3

$(\boldsymbol{a})$ $\beta = \{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ ve λ, β ve c_0 ın lineer gereni olsun. A sonsuz birim matris olsun. O zaman $sol - A^{-1}(\lambda) = c_0$ dır ve dolayısıyla yukarıdaki önermenin bütün maddeleri sağlanır. Fakat λ solid değildir. Bu örnek bize λ üzerinde solidlik varsayımının Önerme 3.2.2 nin sonuçlarının doğru olması için gerekli olmadığını gösterir.

Örnek 3.2.3

$(\boldsymbol{b})$ C Cesàro matrisi ve $\lambda =$ c olsun Önerme 3.2.2 sağlanmaz.

İspat :

Eğer $e = \{1,1,\ldots\}$ ise $e \in$ $sol - C^{-1}(c)$ dir. Ama 0 ve 1 lerden oluşan bir dizi bulabiliriz öyle ki C matrisi bu diziyi c içine göndermez ve böylelikle (a) doğru değildir.

(b) nin yanlış olduğunu görmek için ± 1 den bir dizi inşa edebiliriz öyle ki C matrisi yine bu diziyi c içine göndermez. (c) nin sağlanmadığı (a) dan gelir son olarak (d) nin sağlanmadığını göstermek için x, ± 1 lerin bir dizisi ise $x + e$ 2 lerin ve 0 ların bir dizisidir ve yine bu dizi C tarafından c içine gönderilmez.

Her pozitif tamsayı n için e_n $n.$ koordinatı 1 diğerleri 0 olan diziyi göstersin.

Önerme 3.2.4

$A = (a_{mn})$ negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris ve $\lambda, \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nın solid bir alt uzayı olsun o zaman

$$c_{00} \cap sol - A^{-1}(\lambda) = span\{e_n \mid A \text{ nın } n. \text{ sütunu } \lambda \text{ içerisindedir}\} \text{ dır.}$$

İspat : Ae_n A nın n. Sütunudur ; dolayısıyla Ae_n λ içerisindedir ancak ve ancak $e_n \in sol - A^{-1}(\lambda)$ dır. Dolayısıyla önermenin ispatı Önerme 3.2.2 nin (a) ve (d) maddelerinden sağlanır.

Sonuç 3.2.5

Önerme 3.2.4 ün hipotezleri altında $sol - A^{-1}(\lambda)$ aşikardır ancak ve ancak A nın hiçbir sütunu λ içerisinde değildir ; öte yandan $c_{00} \subseteq sol - A^{-1}(\lambda)$ dır ancak ve ancak A nın her sütunu λ içerisindedir.

Örnek 3.2.6.

$A = C$ ve $\lambda = \ell_1$ olsun o zaman $sol - A^{-1}(\lambda)$ aşikardır. Öte yandan , $e_1 - e_2 \in C^{-1}(\ell_1)$ dir ve böylece $c_{00} \cap A^{-1}(\lambda)$ boş değildir. Bundan böyle A negatif girdilere sahip olmayan sonsuz bir matrisi ve λ, $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin solid bir alt uzayını gösterecektir. A ve λ üzerine aşağıdaki ekstra koşulları da koyabiliriz :

H(1) : A matrisi $A^{-1}(\lambda)$ yı λ içerisine birebir ve örten olarak gönderir.

H(2) : A matrisi $A^{-1}(\lambda)$ yı λ üzerine birebir ve örten olarak gönderir.

H(3) : A ve λ H(2) yi sağlar ve λ dan $A^{-1}(\lambda)$ üzerine ters dönüşüm matrisseldir.

Bunlardan en önemlisi H(2) dir.

Fakat burda A ve λ nın yukarıdaki özellikleri ne zaman sağlayacakları üzerinde durmayacağız. Fakat şunu da belirtelim ki A alt üçgensel ana köşegen üzerindeki girdileri pozitif sonsuz bir matris ise H(3) $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin herhangi bir solid alt uzayı λ için daima sağlanır.

3.3. $sol - A^{-1}(\lambda)$ Uzayının Bazı Lineer Topolojik Özellikleri

Eğer λ bir T topolojisiyle donatılmış bir topolojik vektör uzayı ise $A^{-1}(\lambda)$ doğal olarak T tarafından üretilen $A^{-1}(T)$ alt uzay topolojisi ile bir topolojik vektör uzayı olur öyle ki bu topolojinin açıkları $U \in T$ olmak üzere $A^{-1}(U) \cap A^{-1}(\lambda)$ dır. (Bu topoloji eğer H(1) sağlanmazsa Hausdorff olmaz .) H (2) nin sağlanması durumunda topolojik vektör uzayı olarak $\left(A^{-1}(\lambda), A^{-1}(T)\right)$ uzayı (λ, T) uzayına izomorftur. Bazı doğal durumlar altında T topolojisi $sol - A^{-1}(\lambda)$ uzayı üzerinde aynı uzay üzerinde $\left(A^{-1}(\lambda), A^{-1}(T)\right)$ tarafından üretilen alt uzay topolojisinden dar olmayan bir topoloji üretir. Bu topoloji bazı ön bilgileri verdikten sonra Teorem 3.3.2 de tanımlanacaktır. (E,T) bir topolojik vektör uzayı ve ζ fonksiyonu E den pozitif reel sayılar içerisine tanımlıysa bu durumda "ζ, T topolojisini belirler " ancak ve ancak

$$\cup_{\alpha} = \{ x \in E \mid \zeta(x) < \alpha \}, \alpha > 0$$

kümeleri orjin etrafında T için bir komşuluk tabanı oluşturur deriz. Eğer ζ ve τ aynı T topolojisini belirlerse bu durumda ζ ve τ fonksiyonlarına denktir denir.

Normlar, quasinormlar [Köthe , (1960)] , paranormlar [Maddox , (1970)] ve pseudonormlar [Schaeffer (1966)] kavramlarının tanımlarına ihtiyacımız olacaktır.

Aşağıdaki ifadeleri ispatsız veriyoruz :

(i) Her quasinormlu veya Hausdorff paranormlu uzay bir metrik uzaydır ;

(ii) Bir Hausdorff paranormlu veya quasinormlu uzay denk olarak pseudormlanabilir uzaydır. (Bakınız Teorem 6.1, [Schaeffer, (1966) , s.28)] ;

(iii) Bir vektör uzayı E üzerinde her bir $\{ x \in E \mid g(x) \leq \alpha \}$ $(\alpha > 0)$ kümesini dengeli yapan bir Hausdorff topolojik vektör uzayı topolojisini belirleyen g paranormu aslında bir pseudonormdur.

Eğer μ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin solid bir alt uzayı ve (μ, Γ) bir topolojik vektör uzay ise Γ topolojisi solid olarak adlandırılır ancak ve ancak (μ, Γ) orjin etrafında solid kümelerden oluşan bir komşuluk tabanına sahiptir. Bir γ fonksiyonu μ den negatif olmayan reel sayılara tanımlansın. Bu μ fonksiyonuna soliddir. (Denk olarak ancak ve ancak her $\{ x \in \mu : \gamma(x) \leq \alpha \}, \alpha > 0$, kümeleri soliddir. (Denk olarak $y \in N(x) \subseteq \mu$ şartı $\gamma(y) \leq \gamma(x)$ ifadesini gerektirir.) Hemen not edelim ki γ solid bir fonksiyon ise ve μ üzerinde bir Γ topolojisini belirliyorsa Γ soliddir.

Lemma 3.3.1

μ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin solid bir vektör alt uzayı ve Γ μ üzerinde solid Hausdorff bir topoloji olsun. Eğer Γ bir norm, quasinorm veya paranorm ϱ tarafından belirleniyorsa o zaman sırasıyla denk bir norm, quasinorm veya pseudonorm $\varrho^\wedge$ soliddir.

İspat :

ϱ bir quasinorm olsun. $U = \{x \in \mu : \varrho(x) \leq 1 \}$ olsun. Hipotezden orjinin bir $V \subseteq U$

komşuluğunu bulabiliriz öyle ki bu komşuluk solid ve dolayısıyla dengelidir.

V nin Minkowski fonksiyeneli $\varrho^\wedge$ $\varrho^\wedge(x) = \inf\{ r > 0 \, ; x \in rV\}$ ile tanımlanırsa μ üzerinde ϱ ye denk olan bir quasinormdur $\varrho^\wedge$ nın solid olduğunu göstermek kolaydır. Eğer ϱ bir norm ise U konvekstir ; W U da kapsanan orjinin solid bir komşuluğu olsun ve V W nun konveks kabuğu olsun. O zaman $V \subseteq U$ ve Lemma 3.2.1 den V soliddir V nin Minkowski fonksiyoneli $\varrho^\wedge$ ϱ ye denk olan ve Lemma'nın sonucunu sağlayan bir normdur. ϱ bir paranorm ise ispat daha egzotiktir ve burada bütünüyle verilmemiştir. Γ bir metrik solid topoloji olduğundan orjinin komşuluklarını bir $\{V_n\}$ tabanı vardır öyle ki her bir V_n soliddir ve $n = 1,2, \ldots$ için $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ dir.

Şimdi Teorem 6.1 [Scaheffer, (1966)] in ispatına başvurursak bu V_n ler tarafından üretilen $\varrho^\wedge$ nın lemmanın sonuçlarını sağladığını gösterebiliriz. Buradaki dikkat etmemiz gereken nokta şudur : Eğer S ve T ω nın solid alt kümeleri ise S+T de soliddir. ϱ paranormu sadece Γ nın metrik topoloji olduğunu garanti etmek için işin içerisine girer.

Teorem 3.3.2

T λ üzerinde solid bir topoloji ve $\mathfrak{A}(\lambda, \mathrm{T})$ içerisinde solid kümelerden oluşan orjin etrafında bir komşuluk tabanı olsun. Bu durumda

$sol - A^{-1}(U) = \{x \in sol - A^{-1}(\lambda); A|x| \in U \}$ $U \in \mathfrak{A}$

her biri solid olan kümelerin $sol - A^{-1}(U)$ koleksiyonu $sol - A^{-1}(T)$ topolojisi için orjinden bir komşuluk tabanıdır öyle ki bu topoloji ile $sol - A^{-1}(\lambda)$ bir topolojik vektör uzayı olur. $sol - A^{-1}(T)$ topolojisi en az $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde $A^{-1}(T)$ tarafından üretilen alt uzay topolojisi kadar iyidir üstelik,

(a) Eğer (λ, T) Hausdorff ise A nın bütünüyle sıfırlardan oluşan sütunu yoksa

$(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(T))$ Hausdorff ‘ tur;

(b) Eğer (λ, T) local sınırlı ise $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(T))$ de local sınırlıdır;

(c) Eğer (λ, T) local konveks ise $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(T))$ de local konvekstir;

(d) Eğer T, λ üzerinde bir metrik,quasinorm veya norm topolojisi ise ve A bütünüyle sıfırlardan oluşan sütunlara sahip değilse $sol - A^{-1}(T)$ sırasıyla $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde bir metrik , quasinorm veya norm topolojisidir;

(e) Eğer ϱ T topolojisini belirleyen bir solid norm, quasinorm veya pseudonorm ise ve A hiçbir sütunu tamamiyle sıfır olmayan bir matris ise $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde $\varrho^\wedge(x) = \varrho(A|x|)$ ile tanımlanan $\varrho^\wedge$ fonksiyoneli $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde sırasıyla $sol - A^{-1}(T)$ topolojisini belirleyen bir solid normi quasinorm veya pseudonormdur.

İspat :

Bu teoremin ispatı kolayca yapılabileceğinden sadece ispatın ana hatlarını verip detaylarını ihmal edeceğiz.

$sol - A^{-1}(T)$ nin bir topolojik vektör uzayı topolojisi olduğunu göstermek için [Schaeffer (1966)] nolu referansta ki Sonuç 1.2 yi kullanabiliriz. Burada bir topolojik vektör uzayı topolojinin Hausdorff olmasını zorunlu tutmuyoruz. $sol - A^{-1}(T)$ nin $A^{-1}(T)$ tarafından üretilen alt uzay topolojisi kadar iyi olduğunu görmek için $A^{-1}(U)$, $U \in \mathfrak{A}$ kümelerinin orjinden $(A^{-1}(\lambda), A^{-1}(T))$ içerisinde bir komşuluk tabanı olduğunu görmek yeterlidir ve ayrıca $U \in \mathfrak{A}$ nun solidliği bize $sol - A^{-1}(U) \subseteq A^{-1}(U) \cap sol - A^{-1}(\lambda)$ olduğunu verir bu sonuç

$Ax \in N(A|x|)$ ‘den gelir. Burada yukarıda ki gibi A nın girdileri negatif olmaması çok kuvvetli bir etkendir. (c) nin ispatı Lemma 3.1.1 in yardımıyla yapılabilir. (d) ifadesi Lemma 3.2.1 ve her metrik topolojik vektör uzayının pseudonormlanabilir olmasından gelir. (a) ve (e) nin ispatları standarttır.

Sonuç :

(a), (d), (e) ifadelerinde ki hipotezlerin arkasındaki fikir A matrisinin hiçbir sütunun tamamıyla sıfır olmamasıdır bu da bize x, $sol - A^{-1}(\lambda)$ uzayı içerisinde sıfırdan farklı bir dizi ise o zaman $A|x|$ λ nın sıfırdan farklı bir elemanı olduğunu verir. Hemen not edelim ki eğer A ve λ $H(1)$ şartını sağlarsa A nın kesinlikle tamamıyla sıfır olan sütunu yoktur.

Teorem 3.2.2 den sonra hemen şu soruyu sormak anlamlıdır: Eğer (λ, T) nin bazı özellikleri $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(T))$ uzayı tarafından sağlanıyorsa bunun tersi de doğru mudur ?

Örneğin $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(T))$ uzayı local konveks ise (λ, T) uzayı da local konveks midir ? Kesinlikle bu tip bir sonucun olduğunu söylemeliyiz, çünkü $sol - A^{-1}(\lambda)$ kolay bir şekilde aşikar bir vektör uzayı olabilir. (Örneğin $0 < p \leq 1$ için $ces_p = sol - C^{-1}(\ell_p)$, uzayında olduğu gibi) Aşağıda ki örneğin amacı $sol - A^{-1}(\lambda)$ nın bazı özelliklerinin bir takım doğal durumlar altında λ tarafından da sahip olunabileceğini göstereceğiz. Hemen belirtelim ki bu tip örnekler bulmak oldukça zordur.

Örnek 3.3.3 :

p ve q pozitif sayılar öyle ki $p < 1 < q < 1 + p$ olsun. Hemen not edelim ki yeterince büyük m için

$$\sum_{n\geq m} n^{-q} \ > \int_m^\infty x^{-q}dx \ = \frac{m^{1-q}}{q-1} \ > (m-1)^{-p} \text{ dir.}$$

Sonuç olarak her k için $m_{k+1} > m_k + 2$ ve $m_k{}^{-p} \leq \sum_{m_k<n<m_{k+1}} n^{-q}$ şartlarını sağlayan pozitif tam sayıların bir $\{m_k\}$ dizisini bulabiliriz.

$$M = \{ \, m_k \mid k = 1,2,\dots\}$$

olsun. Eğer $n \in M$ ise $p_n = p$ ve diğer durumlarda $p_n = q$ olarak $\{p_n\}$ dizisini tanımlayalım ve $\ell(p_n) = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \, ; \, \sum_n |x_n|^{p_n} < \, \infty \,\}$; $\ell(p_n)$ yazalım.

$\ell(p_n)$ ℓ_p ve ℓ_q nun ayrık toplamıdır ve topolojisi

$$\varrho(x) = (\sum_{n\notin M} |x_n|^q \,)^{1/q} + (\sum_{n\in M} |x_n|^p \,)^{1/p}$$

formülü ile tanımlanan ϱ quasinormu ile belirlenir. $\ell(p_n) \subseteq \ell_q$ olduğu açıktır.

C Cesàro matrisini alalım $sol - C^{-1}(\ell(p_n)) \; = \; ces_p$ olduğunu göstereceğiz.

Açıkça $sol - C^{-1}(\ell(p_n)) \subseteq \; sol - C^{-1}\left(\ell_q\right) \; = ces_q$ dur $x \in ces_q$ olsun. O zaman

$$\sum_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |x_k|\,\right)^q < \infty \text{ dur.}$$

$a_n = \sum_{k=1}^n |x_k|$ yazalım. Dolayısıyla $\{a_n\}$ dizisi negatif olmayan ve azalmayan bir dizidir.

$$\sum_n (\, n^{-1}a_n)^{p_n} < \infty \text{ olduğunu göstermek istiyoruz.}$$

Açıkça $\sum_{n\in M} (n^{-1}a_n)^p < \infty$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi $\{m_k\}$ dizisinin seçiminden ve a_n lerin azalmayan olması ve $p < q$ olmasından

$$(m_k{}^{-1}a_{m_k})^p \leq \; a_{m_k}{}^p \quad \sum_{m_k<n<m_{k+1}} n^{-q} \quad \leq \; \sum_{m_k<n<m_{k+1}} n^{-q} \max(1, a_n{}^q) \text{ dir.}$$

Böylece $\sum_k \sum_{m_k<n<m_{k+1}} n^{-q} \max(1, a_n{}^q)$ serisiyle karşılaştırma testinden

$\sum_{n\in M}(n^{-1}a_n)^p$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla ces_q iki topolojiye sahiptir.

Bunlardan birisi ℓ_q tarafından üretilen topolojidir, diğeri ise $(\ell(p_n))$ tarafından üretilen topolojidir. Bunlardan ilki bir norm topolojisidir. Her ikisi metrik topolojidir ve ces_q herbir topolojiye göre tamdır. Bu iki topoloji karşılaştırılabilirdir (norm topoloji diğerinden daha kuvvetli değildir) ve böylece ikisi de aynı topolojidir.

Dolayısıyla $sol - C^{-1}(\ell(p_n))$ local konvekstir aslında normlu uzaydır ama $\ell(p_n)$ local konveks değildir [Roles, (1969) , Teorem 1] . Şimdi başka bir örnek görelim :

Örnek 3.3.4 :

$\lambda = \ell_\infty$ ve A matrisi de bütün girdileri 1 olan sonsuz bir matris olsun. Bu durumda

$sol - A^{-1}(\ell_\infty) = \ell_1$ dir ve ϱ^$\|A|.\||_\infty$ normu alışılmış ℓ_1 normlu $\| \|_1$dir. Bu örnekle ilgili temel fikir şudur : $sol - A^{-1}(\ell_\infty)$ iyi bir topolojik yapıya sahip bir uzay olmasına karşın $H(1)$ özelliğini sağlamaktan çok uzaktır. Aslında $A^{-1}(\ell_\infty)$ dan ℓ_∞ içerisine rankı 1 olan bir dönüşümdür. $\langle \, , e_n \rangle$ fonksiyonu $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ üzerinde n. Koordinat izdüşümü olsun. Yani her $x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ için $\langle x, e_n \rangle = x_n$ olsun.

Aşağıdaki sonuç bize bir topolojik uzay topolojisi üzerinde tanımlı bütün koordinat izdüşümlerinin sürekli olduğunu gösterecektir.

Önerme 3.3.5 :

μ solid Γ topolojisiyle donatılmış $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nın solid bir vektör alt uzayı olsun. O zaman (μ, Γ) üzerinde $\langle \, , e_n \rangle$ her n için süreklidir ancak ve ancak (μ, Γ) Hausdorff tur.

İspat :

Varsayalım (μ,Γ) Hausdorff olsun. Eğer her $x \in \mu$ için $x_n = 0$ ise $\langle\,, e_n\,\rangle$ izdüşümü μ üzerinde sıfır lineer fonksiyonelidir. Eğer bazı $x \in \mu$ için $x \neq 0$ ise μ solid olduğundan ve skaler çarpma işlemi altında kapalı olduğundan $e_n \in \mu$ dur. (μ,Γ) Hausdorff ve solid olduğundan (μ,Γ) içinde orjinin bir solid komşuluğu U bulunabilir öyle ki $e_n \notin U$ olur. O zaman $|x_n| \geq 1$ bize U nun solidliğinden $e_n \in U$ ifadesini vereceğinden $x \in U$ olması $|x_n| = |\langle\, x, e_n\,\rangle| < 1$ olmasını gerektirir.

Böylece $\langle\,, e_n\,\rangle$ izdüşümü (μ,Γ) üzerinde süreklidir. Öte yandan (μ,Γ) üzerinde herbir $\langle\,, e_n\,\rangle$ izdüşümlerinin sürekli olduğunu varsayalım o zaman Γ, topolojisi en az μ üzerinde kordinatsal yakınsamanın alt uzay topolojisi kadar kuvvetlidir (burada kordinatsal yakınsamanın alt uzay topolojisinden kast edilen topoloji ω yı skaler cismin sayılabilir çarpımı olarak düşünerek elde edilen çarpım topolojisinden başka bir şey değildir.) Böylece Γ bir Hausdorff topolojidir.
(Bu yönün ispatı yalnızca μ nun $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nın bir alt uzay kümesi olmasını ve Γ nın da μ üzerinde herhangi bir topoloji olmasını gerektirir.)

Sonuç 3.3.6 :

Eğer T λ üzerinde bir solid topoloji, (λ, T) Hausdorff ve A nın hiçbir sütunu tamamiyle sıfırlardan oluşmuyorsa $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(T))$ uzayı üzerinde tanımlı koordinat izdüşümleri süreklidir. Bunun ispatı Teorem 3.3.2 ve Önerme 3.3.5 den gelir.

4. ALT ÜÇGENSEL MATRİSLER TARAFINDAN TÜRETİLEN SOLİD DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde P. D. Johnson ve F.Polat [Johnson vd (2015)] tarafından yapılan Cesaro matrisi ile tanımlanan dizilerin solid uzayının ters görüntüsü olan solid alt uzayın ve elemanları bu solid alt uzaya Cesaro matrisinin kuvvetlerini uygulamakla elde edilen solid kümeler ile tanımlanan dizinin izdüşüm limiti ile ilgili bazı sonuçları göreceğiz.

Bu araştırma da adı geçen solid alt uzayın başlangıçta verilen dizi uzayından geçen bazı topolojik ve sıralama özellikleri ele alınmıştır.

4.1. Giriş ve Bazı Notasyonlar

Bu bölüm boyunca, skaler cisim $\mathbb{F}$, reel sayıları ya da kompleks sayılar gösterecektir. Reel sayılar ve kompleks sayılar kümesini sırasıyla $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ ile göstereceğiz. Ayrıca pozitif tamsayılar kümesini de $\mathbb{N}$ ile göstereceğiz. Bu sunumda yer alan uzaylar skaler değerli diziler olmasına karşın, daha geniş uzaylarda da çalışmaya motivasyon sağlanması açısından Riesz uzayları ile ilgili bazı tanım ve özellikleri vereceğim. Çünkü skaler değerli diziler noktasal işlemler altında bir Riesz uzayıdır. Riesz uzayları ile ilgili daha geniş bir bilgi [Abramovich (2002) , Aliprantis vd (1985) , Luxemburg vd (1971)] kaynakları elde edilebilir.

E reel bir vektör uzayı olsun. ExE' de bir "≤'' kısmi sıralama bağıntısı verilsin. Yani, " $\leq$ " bir yansıyan, ters simetrik ve geçişken bir bağıntı olsun. Eğer E' de herhangi iki x, y elemanı verildiğinde "$x \leq y$" ifadesi her zaman $z \in E$ ve her $0 \leq \alpha \in R$ için $\alpha x + z \leq \alpha y + z$ 'yi veriyorsa ve ayrıca sup {x,y} ve $\inf\{x, y\}$ mevcut ve E' ye ait ise bu durumda E'ye Riesz uzayı ya da vektör örgüsü denir.

Bir $x \in E$'nin modülü ya da mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir ve $|x| = \sup\{x, -x\}$ ile tanımlanır. Eğer E bir vektör örgüsü ise, $E^x = \{x \in E: x > 0 \}$ ile tanımlanan kümeye

E'nin pozitif konisi ya da kısaca konisi denir.

Bir $a \in E$ için $S(a) = \{b \in E : |b| \leq |a|\}$ ile tamamlanan kümeye a'nın solid kabuğu denir. S, E'nin bir vektör alt uzayı olsun. Eğer E'de $|u| \leq |v|$ $(v \in S)$ iken $u \epsilon S$ oluyorsa S'ye E'nin bir solid ya da sıra ideali denir. Bu sunumda solid tabirini tercih edeceğiz.

Bir E vektör örgüsünde bir $\|.\|$ normu verilsin. Eğer her $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa bu $\|.\|$ norma E' de bir solid ya da örgü normu denir. Bir solid norma sahip vektör örgüsüne normlu vektör örgüsü denir. Eğer bir normlu vektör örgüsü E norma göre tam ise E' ye Banach örgüsü denir. Bir normlu vektör örgüsü E'de her $x \in E$ için $\|x\| = \||x|\|$ olduğu açıktır.

$\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ uzayının sadece sonlu tane terimi sıfırdan farklı dizilerden oluşan alt uzayını c_{00} ile göstereceğiz. Burada skaler cisim $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olabilir. Diziler üzerinde ki bütün işlemler koordinatsal olacaktır. Eğer $x = (x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ise, $|x| = (|x_n|)$ yazacağız. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ iki elemanı olsun ; $x \leq y$, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n$ anlamına gelir. Açıktır ki $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \leq)$ bir vektör örgüsüdür, ve $|x|$'in vektör örgüsü tanımı, $(x \in R^N)$ $burada$ $verilen$ $|x| = (|x_n|)$ ile uyumludur.

Bütün terimleri sıfır olan (0,0,0,…) dizisini $\underline{0}$ ile göstereceğiz.

$0 < p < \infty$ için, $\ell_p = \{(x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : |\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ ile tanımlanır. ℓ_p de $alışılmış$ ''norm'' veya $\underline{0}'dan$ uzaklık her x $\in \ell_p$ için $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ formülü ile tanımlanır;

$||.||_p$ fonksiyonu $p \geq 1$ için gerçek anlamda bir normdur.

λ ,F^N ' nin solid bir alt uzayı olsun. Eğer λ orjinde solid kümelerden oluşan bir komşuluk tabanına sahipse λ'yı bir topolojik vektör uzayı yapan λ üzerindeki bir topolojiye solid topoloji deriz.

ℓ_p uzayı $(1 \leq p < \infty)$, ℓ_∞ (sınırlı dizilerin uzayı) ve c_0 (sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı) F^N 'in solid alt uzaylarıdır ve ℓ_p üzerinde ki $||.||_p$ normu, ℓ_∞ ve c_0 üzerinde ki supremum normu solid normlardır. c (yakınsak dizilerin uzayı) solid değildir.

$A = [\, a_{i,j} : i, j \geq 1] = [a_{ij}]$ girdileri negatif olmayan ve bütün girdileri sıfır olmayan sütunlardan oluşan sonsuz bir matris olsun. A'nın tanım kümesi $dom(A)$ ile gösterilir,

$$dom(A) = \{x \in F^N \colon her\ i \in N\ için \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\ \ serisi\ yakınsar\, \}$$

$x \epsilon dom(A)$ için,Ax, $x'in\ A$ altındaki dönüşümü, $her\ i\epsilon N\ için\ (Ax)i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j$ ile verilir. Eğer $\lambda\ \epsilon F^N$ ise $A^{-1}\lambda = \{x \in dom(A) \colon Ax \in \lambda\}$ dır. Eğer $A = [a_{ij}]$ negatif olmayan girdilere sahip ve ana köşegen üzerindeki bütün girdileri pozitif $(a_{ij}\ > 0)$ alt üçgensel bir matris ise $(her\ i < j\ )için\ a_{ij}\ = 0\ ise\ )\ dom(A) = F^{N\,\prime}$dir.Ana köşegende sıfırdan farklı girdilerin varsayımı $A'nın$ matris olarak tersinin olduğunu gerektirir. Bu ters A^{-1}aynı zamanda alt üçgenseldir. A matrisi bütünüyle köşegensel bir matris değil ise $A^{-1\prime}in$ bütünüyle girdileri pozitif olmayabilir. Sonsuz matrislerle ilgili [Cooke , (1950)] referansına başvurulabilir.

Aşağıdaki tanım [Johnson vd (1985)] nolu referansta tanıtılmıştır ve ilham kaynağı [Leibowitz (1971)] nolu referanstır.

Tanım 4.1.1 :

Eğer $\lambda \in F^N$ ve A negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris ise

$sol - A^{-1}(\lambda)$ kümesi $sol - A^{-1}(\lambda) = \{\, x \in F^N : |x\,| \in\ A^{-1}(\lambda)\, \} = \{x \in F^N : |x\,| \in\ dom(A)\ ve\ A|x\,|\ \ \in \lambda\ \ \}$ ile tanımlanır.

[Johnson vd (1985)] de verilen aşağıdaki sonuç yukarıdaki kümenin

neden $''sol - A^{-1}\,(\lambda)''$ ile gösterildiğini açıklar.

Lemma 4.1.2 :

A negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris ve λ, $F^{N'}nin$ solid bir alt uzayı olsun.

Aşağıdakiler doğrudur.

$(a) sol - A^{-1}(\lambda)$ soliddir.

(b)sol-A^{-1} (λ) $\subset A^{-1}$ (λ)' dir.

$(c) sol - A^{-1}(\lambda), A^{-1}(\lambda)'daki$ en geniş solid diziler kümesidir.

$(d) solA^{-1}(\lambda)$ F^{N}' nin bir alt uzayıdır.

Eğer τ , λ üzerinde bir solid topolojik vektör uzayı topolojisi ise o zaman ζ, $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde bir solid vektör uzayı topolojisi üretir.

λ,$F^{N'}nin$ solid ζ topolojisi ile donatılmış bir solid alt uzayı olsun.$U(\lambda, \zeta)$ topolojik uzayının orijin etrafında solid kümelerden oluşan bir komşuluk tabanı olsun.

[Johnson vd (1985)] de gösterilmiştir ki

$sol - A^{-1}(U) = \{x\epsilon\ sol - A^{-1}(\lambda) : A|x| \epsilon\ U \ \ (u \in \ \mu)\}$ kümeleri $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerindeki solid topolojik vektör uzay topolojisi $sol - A^{-1}(\zeta)$ için bir orjin etrafında komşuluk tabanı oluşturur üstelik eğer ʎ üzerindeki topoloji Hausdorff ise ve A'nın bütünüyle sıfırdan oluşan sütunları yoksa o zaman $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerindeki verilen topoloji Hausdorff'dur. Bundan böyle bu sunumdaki bütün sonsuz matrislerin bütünüyle sıfırdan oluşmayan sütunlara sahip olduğunu varsayacağız.

Hemen $x \to A\ |x|$ dönüşümünün sürekli olduğunu ama bu dönüşümün $sol - A^{-1}(\lambda)$ dan λ içine lineer olmadığını not edelim. Ama $x \to Ax$ dönüşümü süreklidir ve $sol - A^{-1}(\lambda)$ dan λ içine lineerdir.Açıkça, eğer λ bir solid $\|.\|$ normu ile donatıldıysa

$sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde üretilen topoloji $x \to ||A\,|x|\,||_{\lambda}$ ile tanımlanan solid normu ile üretilir. Aynı yarım quasinormlar, pseudonormlar ve seminormlar içinde yapılabilir. Eğer λ solid bir topolojiye sahip solid bir dizi uzayı ise ve $P_n = F^N \to F^N$'e fonksiyonu her n∈N için $P_n = (x_{1,}x_2, \dots, x_n, 0,0, \dots)$ ile tanımlanırsa o zaman P_n(x)$\epsilon\, S(x)$ olduğundan P_n λ üzerinde her $n\epsilon N$ için açıkça süreklidir.

Lemma 4.1.3 :

Varsayalım $\lambda \subset F^N$ solid topolojiye sahip dizilerin bir topolojik vektör uzayı olsun. O zaman $c_{00} \cap \lambda$, λ içerisinde yoğundur ancak ve ancak λ üzerindeki topolojide her $x\epsilon\lambda$ için, $n \to \infty$ iken $P_n(x) \to x$' dir.

İspat :

Her $x \in \lambda$ için $P_n(x)\epsilon c_{00} \cap \lambda$ olduğundan, λ 'nın solidliğinden ($\Leftarrow$) yönü açıktır.

Şimdi $c_{00} \cap \lambda$' nın λ içerisinde yoğun olduğunu varsayalım. $x \in \lambda$ ve U, λ içerisinde $\underline{0}$ nin bir solid komşuluğu olsun.

$y\epsilon\, c_{00} \cap \lambda$ öyle ki $x - y \in U$ ve $N \in \mathbb{N}$, $y \neq \underline{0}$ iken $y_N \neq 0$ şartını sağlayan en büyük indeks olsun. Eğer $y = \underline{0}$ *ise* $N = 1$ olsun. Her durumda, $n \geq N$ için

$x - P_n(x) \in S(x - y) \subset U$'dur.

U rastgele seçildiğinden $\mathrm{n} \to \infty$ iken $\mathrm{P_n(x)} \to \mathrm{x}$ 'dir. Çoğu zaman $\mathrm{c_{00}} \subset \lambda$ 'dır.Ama λ 'dan türetilen $\mathrm{sol} - \mathrm{A}^{-1}(\lambda)$ gibi solid vektör dizi uzaylarının c_{00} 'ı içerdiğini söyleyemeyiz. Gerçekten $\mathrm{sol} - \mathrm{A}^{-1}(\lambda)$ sadece sıfır dizisinden oluşabilir.e_{n} n. koordinatı 1 diğer bütün koordinatları 0 olan diziyi göstersin. c_{00} 'ın $\{e_{\mathrm{n}} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ kümesinin gereni olduğu ve A_{en}' inde A ' nın n.sütunu olduğu açıktır. Bu durumda aşağıdaki lemmanın ispatı aşikardır.

Lemma 4.1.4 :

Varsayalım $c_{00} \subset \lambda \subset F^N$, ʎ dizilerin bir solid vektör uzayı ve A da negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris olsun. Bu durumda $c_{00} \subset sol - A^{-1}(\lambda) \Leftrightarrow$ A nın her sütunu ʎ. c_{00}'ın $sol - A^{-1}(\lambda)\ daki$ ''bölgesel yakınsama'' dan [Johnson vd (1985)] ve [Johnson vd (1979)] nolu referanslardaki
sonuçlardan aşağıdaki lemmaya sahibiz.

Lemma 4.1.5 :

Varsayalım $c_{00} \subset \lambda \subset F^N$, λ solid Hausdorff topolojik vektör topolojisi ile donatılmıştır. Dizilerin solid bir vektör uzayı ve A' da her sütunu büsbütün λ' daki sıfır olmayan dizilerden oluşan ve negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris olsun. Eğer c_{00} λ içerisinde yoğunsa λ üzerindeki topoloji tarafından üretilen topolojiyle donatılmış $sol - A^{-1}$ da yoğundur.

Sonuç olarak, λ nın solid Hausdorff topolojik vektör uzay topolojisi ζ ile donatılmış dizilerin bir solid vektör uzayı olduğunu varsayalım ve A'nın λ'da ki bütünüyle sıfır olmayan dizilerden oluşan sütunlara sahip negatif olmayan girdili sonsuz bir matris olduğunu varsayalım. Eğer (λ,ζ) tamsa aynı şey $(sol - A^{-1}(\lambda)\ \ sol - A^{-1}(\zeta)$) içinde doğru mudur? Maalesef, bu sorunun cevabını bütünüyle bilmiyoruz, söyleyebileceğimiz en iyi şey evet çoğunlukladır.
[Johnson vd (1985)] nolu referanstan bildiğimiz aşağıdaki şekildedir.

$\mathcal{P}$ $F^{\mathbb{N}}$ üzerinde noktasal yakınsaklık topolojisini göstersin; başka bir deyişle $\mathcal{P}$ $F^{\mathbb{N}}$ üzerindeki çarpım topolojisidir bu çarpım topolojisini de skaler cismin alışılmış topolojiye sahip sayılabilir adeta kopyası olarak düşünebiliriz. Hemen belirtelim ki $\mathcal{P}$ bir solid topolojidir. Eğer μ $F^{\mathbb{N}}$ in bir vektör alt uzayı ise $(\mu, \mathcal{P})$ ile $\mathcal{P}$ tarafından üretilen bir alt uzay topolojisi ile donatılmış μ yı kastediyoruz.Eğer τ, μ üzerinde başka bir topolojik vektör uzay topolojisi ise o zaman eğer (μ, τ) içinde orjin etrafında her üyesi $(\mu, \mathcal{P})$ içinde kapalı olan bir komşuluk tabanı varsa (μ, τ) ya yerel noktasal kapalı deriz ve kısaca LCC ile gösteririz.

LCC olmayan solid topolojik vektör topolojisine sahip solid uzaylar vardır ama bunları bulmak kolay değildir. Bütün $\ell_p(0 < p \leq \infty)$ uzayları alışılmış normları ile veya quasinorm topolojileri ile LCC uzaylarıdır ve bu uzaylardan birçok LCC uzayı türetebiliriz. Bunu [Johnson vd (1985)] nolu referanstaki Teorem 2.10 ve Teorem 2.13' den yapabiliriz.

Lemma 4.1.6 :

Varsayalım λ $\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$'in solid bir vektör alt uzayı τ $\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ üzerinde solid Hausdorff solid topolojik vektör uzay topolojisi ve A'da negatif olmayan girdilere sahip her sütunu λ daki bütünüyle sıfır olmayan dizilerden oluşan sonsuz bir matris öyle ki $c_{00} \subset \lambda \subset \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ olsun.O zaman

(a) Eğer (λ, τ) LCC ise $(sol - A^{-1}(\lambda)\ sol - \left(A^{-1}(\tau)\right)$ da LCC dir.

(b) Eğer (λ, τ) LCC ve tam ise $(sol - A^{-1}(\lambda)\ sol - \left(A^{-1}(\tau)\right)$ da LCC ve tamdır.

Bu Lemmalar bu bölümde faydalı olacaktır. Ama Lemma 4.1.6 amacımız için gerekli değildir onun rolü gelecek bölümdeki Önerme 4.2.10 ile sağlanacaktır.

4.2. ℓ_p ve Cesâro Matrisi Tarafından Türetilen Solid Dizi Uzayları

Hardy [Hardy (1920)] aşağıda Hary'nin eşitsizliği olarak adlandırılan sonucu elde etmiştir.

Teorem H. :

Herhangi bir sıfırdan farklı skaler dizi $x = (x_n) \in \ell_p$ ve $1 < p < \infty$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|)^{\,p} < (\frac{p}{p-1})^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^{p}{}' dir.$$

Üstelik $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ sabiti yukarıdaki eşitsizlikte yazılabilecek en iyi sabittir. $A = [a_i, a_j]$

$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i}\,; & i \geq j \\ 0\,; & i < j \end{cases}$ formülü ile tanımlanan matrisine Cesâro matrisi denir.

Yani Cesâro matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & . & . & . \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & . & . \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Cesâro matrisinin tersinin $A^{-1} = [x_{ij}]$ öyleki $x_{ij} = 0\ (j \neq i, j \neq i-1)$,

$x_{ii} = i \ ve \ x_{i,i-1} = -(i-1)$ ile tanımlanan matris olduğu gösterilebilir. Aynı zamanda A Cesâro matrisinin alt üçgenselliği ile $dom(A) = \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ olduğu gösterilebilir. Her $x \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ için $(Ax)_i = (\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} x_j)_i$ olduğu gösterilebilir.A Cesâro matrisi $\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$' den kendisine lineer bir operatör olarak görülebilir. Bundan sonra aksi belirtilmedikçe A Cesâro matrisini gösterecektir. Hardy'nin eşitsizliğini kullanarak $1 < p < \infty$ için $\|Ax\|_p \leq \|A|x|\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|x\|_p$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca $\|x\|_p$' nin katsayısı $\frac{p}{p-1}$'nin daha küçük bir sabitle değiştirilmeyeceği görülebilir. Dolayısıyla Hardy operatörü $H\big((x_n)\big) := A(x_n) = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ile tanımlanan $H: \ell_p \to \ell_p$

operatörüdür.

Bu operatör lineer ve süreklidir ayrıca normu $\|H\| = \frac{p}{p-1}$' dir. Böylece Cesâro matrisi

ℓ_p uzayını içine alarak ℓ_p uzayına gönderir.Aynı durum $(b_k) \in \ell_p$ pozitif bir dizi

olmak üzere Cesâro tipi her bir

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_2 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_3 & b_3 & b_3 & 0 & \cdot & \cdot \\ b_4 & b_4 & b_4 & b_4 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

matrisi için doğru mudur ?

Cevabımız hayır gerekli değildir, olacaktır. Bunu da aşağıdaki örnekle görürüz.

Örnek 4.2.7 :
$r \in (0,1)$ ve $b_k = k^{-r} (k \in \mathbb{N})$ olsun.O zaman her $1 < p < \infty$ için öyle ki $p > \frac{1}{r}$ olmak

üzere $(b_k)_{k\geq 1} \in \ell_p$ ' dir.Hemen $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} > \int_1^n \frac{1}{x^r} d_x = \frac{n^{1-r}-1}{1-r}$ olduğunu not edelim.

Dolayısıyla aşağıdaki eşitsizlikleri noktasal olarak anlarsak,$r \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ve başka

durumlarda

$B(b_k) =$

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} \frac{1}{r-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2^{-r} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 3^{-r} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 4^{-r} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2^{1-r}-1 \\ 3^{1-r}-1 \\ 4^{1-r}-1 \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{1-r} \begin{bmatrix} 0 \\ 2^{1-2r}-2^{-r} \\ 3^{1-2r}-3^{-r} \\ 4^{1-2r}-4^{-r} \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} \notin \ell_\infty \text{ olur.}$$

Önerme 4.2.8 :

$1 < p < \infty$ için $A(\ell_p)$ ℓ_p içinde yoğundur.

İspat :

$\forall n \in \mathbb{N}$ için A matrisi $(1,1,\dots,1,-n,0,\dots)$ dizisini $(1,1,1,\dots,1,0,\dots)$ dizisine dönüştürür. Dolayısıyla $A(\ell_p)$ bir dizi içerir. Öyle ki bu dizi ℓ_p içerisinde yoğun olan c_{00}' ı gerer. C, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$' deki negatif olmayan terimlere sahip bütün x dizilerinin kümesi öyle ki $A_x \in \ell_p$ olsun. Açıkça C, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$' de bir konidir.

$ces_p = sol - A^{-1}(\ell_p) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x| \in C\} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : A|x| \in \ell_p\}$ olsun. O zaman $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektör örgüsünde ces_p bir solid alt uzayıdır. Bu uzay Shiue [Shiue (1970)] ve Leibowiz [Leibowitz (1971)] tarafından çalışılmıştır. ces_p $1 < p \leq 1$ için aşikar vektör uzayıdır ve $1 < p \leq \infty$ için ℓ_p' yi bir öz alt küme olarak içerir. ces_p üzerinde $\|x\|_{ces_p} = \|A|x|\|_p$ formülü bir norm tanımlar ve açıkça bu norm solid bir normdur. Leibowiz [Leibowitz (1971)] ces_p uzayının bu norma göre bir Banach vektör örgüsü olduğunu göstermiştir. ces_p aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi ℓ_∞' un bir alt uzayı değildir.

Önerme 4.2.9 :

$x = (x_n)$ dizisi $x_n = f(x) = \begin{cases} & k: n = 2^k \\ 0: & diğer\ \ durumlarda \end{cases}$ ile tanımlanır.

O zaman $x \in Ces_p$ fakat $x \notin \ell_\infty$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

$\Lambda_0 = \ell_p, \Lambda_1 = ces_p(1 < p < \infty)$ ve $k > 1$ için $\Lambda_k = sol - A^{-1}(\Lambda_{k-1}) =$

$\{x \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}: A|x| \in \Lambda_{k-1}\}$ olmak üzere bir .$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_{2,\dots}$ dizisini tanımlayacağız k üzerinde

tümevarımla $\forall k \geq 0$ için Λ_k'nın $\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$'nin bir solid alt uzayı olduğu gösterilebilir.

$\Lambda_0 = \ell_p \subset sol - A^{-1}(\ell_p) = ces_p = \Lambda_1$ olduğundan tümevarım hipotezi $\Lambda_{k-1} \subset \Lambda'_k$dan

$\Lambda_k = \{x \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}: A|x| \in \Lambda_{k-1}\} \subset \{x \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}} : A|x| \in \Lambda_k\} = \Lambda_{k+1}$, olduğu görülür.

Dolayısıyla $(\Lambda_k)_{k\geq 0}$ küme kapsamına göre artan bir dizidir ve bu yüzden her $k \geq 0$

için $\Lambda_0 = \ell_p \subset \Lambda_k$'dır.

Aşağıdaki önermenin ispatını [Johnson vd (1985)] nolu referanstaki

Önerme 1.1'in isptana çok benzediğinden ihmal ediyoruz.

Önerme 4.2.10 :

$(\lambda, \|x\|_\lambda)$ uzayı $\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$' in solid bir Banach alt vektör örgüsü olsun. A negatif olmayan girdilere sahip ve ana köşegen üzerinde ki girdileri pozitif olan sonsuz alt üçgensel bir matris olsun. O zaman $sol - A^{-1}(\lambda) = \{x \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}: A|x| \in \lambda\}$ kümesi $\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$'in solid bir Banach alt vektör örgüsüdür ve $x \in sol - A^{-1}(\lambda)$ için x'in normu $\|x\| = \|A|x|\|_\lambda$ ile verilir.$\|x\|_{cesp} = \|A|x|\|_p$ ile tanımlamıştık. Benzer şekilde $\|x\|_{\lambda_k} = \|A|x|\|_{\Lambda_{k-1}}$ ile tanımlıyoruz. Yukarıdaki önermeden bütün Λ_k'ların Banach vektör örgüleri olduğu görülür. $\{e_k\}$ ℓ_p'deki temel birim vektörler olsun öyle ki δ Kronecker delta olmak üzere $\forall N$ için $(e_k)_N = \delta_{K,N}$ olsun. Aşağıdaki önermeler ve ispatları [Leibowitz (1971)] referansta verilen ispatlara ve sonuçlara benzerdir.

Önerme 4.2.11 :

(a) Eğer $x \in \Lambda_k$ ise $k > 0$ için $Ax \in \Lambda_{k-1}$'dir.

(b) $x \in \Lambda_k$'dır ancak ve ancak $\forall\, k \geq 0$ için $A^k|x| \in \Lambda_0 = \ell_p$'dir.

(c) k ve ℓ tam sayılar olmak üzere $> \ell \geq 0$ olsun.O zaman $A^{k-\ell}(\Lambda_{k)} \subset \Lambda_\ell$'dir.

(d) $\forall\, k \geq 0$ için c_{00} Λ_k içerisinde yoğundur. Denk olarak $\forall\, k \geq 0$ için eğer

$x = (x_j)_{j \in \mathbb{N} \in \Lambda_k}$ ise $n \to \infty$ için $\left\| x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\|_{\Lambda_k} \to 0$'dır.

(e) $\forall\, k \geq 0$ için Λ_k ayrılabilir. Banach vektör örgüsüdür.

İspat:

(a) x $\in \Lambda_k$ olsun.O zaman $A|x| \in \Lambda_{k-1} dir$. Koordinatsal olarak $|Ax| \leq A|x|$ olduğundan ve Λ_{k-1} $F^{\mathbb{N}}$'in solid bir alt uzayı olduğundan Ax $\in \Lambda_{k-1}$'dir.

(b) x $\in \Lambda_k$ olsun. Dolayısıyla $A|x| \in \Lambda_{k-1} \Rightarrow A^2|x| \in \Lambda_{k-2} \Longrightarrow A^3|x| \in \Lambda_{k-3}$ vb. olur. Buradan da $\forall\, k \geq 0$ için $A^k|x| \in \Lambda_0 = \ell_p$ elde edilir. İfadenin tersinin doğruluğu üzerinde tümevarımla gösterilebilir.

(c) Eğer $k > 0$ ve $x \in \Lambda_k$ ise $Ax \in S(A|x|) \subset \Lambda_{k-1}$ ve böylece $A(\Lambda_k) \subset \Lambda_{k-1}$' dir.

Dolayısıyla $k > 1$ için $A^2(\Lambda_k) = A\big(A(\Lambda_k)\big) \subset A(\Lambda_{k-1}) \subset \Lambda_{k-2}$ ' dir.

(d) Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.5'den elde edilir.

(e) Lemma 4.1.6 ve Önerme 4.2.10 ile (d) şıkkından elde edilir.

$1 < p < \infty$ için Λ_k' dan Λ_{k-1} içine ortalama formülü ile verilen doğal bir dönüşüm vardır. Özel olarak [Leibowitz (1971)] referanstaki Önerme 4.1.5' e çok benzer olan aşağıdaki sonuca sahibiz.

Önerme 4.2.12 :

$1 < p < \infty$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Λ_k üzerinde σ fonksiyonu $\sigma(x) = Ax$ ile tanımlayalım.O zaman σ Λ_k'dan Λ_{k-1} içine operatör normu 1 olan 1-1 sınırlı lineer bir operatördür. Üstelik Λ'nın görüntüsü Λ_{k-1}'in yoğun bir öz alt lineer uzayıdır.

İspat :

$|A\mathrm{x}| \leq \mathrm{A}|x|$ ve Λ_{k-1} solid olduğundan,

$\|\sigma(x)\|_{\Lambda_{k-1}} = \|Ax\|_{\Lambda_{k-1}} \leq \|A|x|\|_{\Lambda_{k-1}} = \|x\|_{\Lambda_k}$'dır.

Açıkça σ lineerdir ve dolayısıyla Λ_k'dan Λ_{k-1} içine $\|\sigma(x)\| \leq 1$ ile sınırlı lineer bir operatördür. Ama x dizisinin bütün koordinatları negatif değilse o zaman

$\|\sigma(x)\|_{\Lambda_{k-1}} = \|Ax\|_{\Lambda_{k-1}} \leq \|A|x|\|_{\Lambda_{k-1}} = \|x\|_{\Lambda_k}$'dır ve böylece $\|\sigma\| = 1$'dir.

Her e_k σ'nın görüntü kümesindedir. Gerçekten $\forall k \in \mathbb{N}$ için $e_k = \sigma(ke_k - ke_{k+1})$ olduğu kolayca hesaplanabilir. e_k'ların lineer gereni olan c_{00} Λ_{k-1} içerisinde yoğun olduğundan σ'nın görüntü kümesi Λ_{k-1}'ın tamamı değildir.

Örneğin $y = (\frac{(-1)^{N+1}}{N})_N$ olsun.O zaman $\forall\, p > 1$ ve $k \geq 0$ için $y \in \ell_p \subset \Lambda_{k-1}$ 'dir.

İddia ediyoruz ki $y \in \Lambda_{k-1} \setminus A(\Lambda_k)$.Aksine bazı $x \in \Lambda_k$ için $y = \sigma(x) = Ax$ olduğunu varsayalım. O zaman $x = A^{-1}y = (1, -2, 2, -2, \dots)$ ve $|x| = (1,2,2,2, \dots)$ olur.

Her k için $n \to \infty$ iken $(A^k|x|)_{n \to 1}$ olduğunu göstermek kolaydır. Bu bize $A^k|x| \notin \ell_p$ olduğunu dolayısıyla $x \notin \Lambda_k$ olduğunu gösterir. Bu da bir çelişkidir.

A üçgensel ve terslenebilir bir matris olduğundan σ bütün $\mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ üzerinde birebirdir ve dolayısıyla $\forall\, k > 0$ için Λ_k üzerinde de birebirdir.

4.3 . $\prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$'nın Özel Bir İzdüşüm Limiti

Önerme 4.3.13 :

$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_{ij}]$ bütün sütunları $\boldsymbol{c_{00}}$'ın elemanı olan alt üçgensel bir matris olsun. O zaman her $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}\in c_{00}}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $B^k x$ c_{00} içindedir.

İspat :

Eğer $x \in c_{00}$ Bx B 'nin her sütunu c_{00} içinde olduğundan B'nin sütunlarının sonlu bir lineer kombinasyonudur ve dolayısıyla c_{00} bize $B(Bx) = B^2 x \in c_{00} \Rightarrow B^3 x \in c_{00}$ vb. verir.

Şimdi $A: \Lambda_k \to \Lambda_{k-1}$ dönüşümlerine göre $\prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ 'nın izdüşüm limiti olarak adlandırılan $X = \{(x^{(k)}) \in \prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k : Ax^{(k)} = x^{(k-1)}, k > 0\}$ kümesini tanımlayalım. Başka bir şekilde $X = \{(x^{(k)}) \in \prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k : x^{(k)} = (A^{-1})^k x^{(0)}, k > 0\}$ yazılabilir.

$x^{(0)} \in c_{00}$ olsun. A^{-1} sütunları c_{00} da olan alt üçgensel bir matris olduğundan Önerme 13'ten $(A^{-1})^k x^{(0)} \in c_{00}$ dolayısıyla her $k \geq 0$ için $(A^{-1})^k x^{(0)} \in \Lambda_k$ olduğu görülür. Bu yüzden $(x^{(k)})_{k\geq 0} = ((A^{-1})^k x^{(0)})_{k\geq 0} = (x^{(0)}, A^{-1}(x^{(0)}), \dots (A^{-1})^k (x^{(0)}), \dots) \in X$'dir. Böylece

X 'in aşikar bir vektör uzayı olmadığı görülür. Her Λ_k $\|.\|_{\Lambda_k}$ normuna göre tam olduğundan ve Λ'_k yı Λ_{k-1} içine gönderen $x \to Ax$ dönüşümü sürekli olduğundan X $\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ üzerinde ki çarpım topolojisine göre tamdır. Dolayısıyla X'i çarpım topolojisiyle düşünürsek X bir Fréchet uzayıdır.

Önerme 4.3.14 :

Eğer $(x^{(k)})_{k\geq 0} \in X$ ise her k için koordinatsal olarak $A^k |x^{(k)}| \geq |x^{(0)}|$'dır.

İspat :

$(x^{(k)})_{k\geq 0} \in X$ olsun. O zaman $k > 0$ için $Ax^{(k)} = x^{(k-1)}$ ve $A|x^{(k)}| \in \Lambda_{k-1}$'dir.

Aynı zamanda $A|x^{(k)}| \geq |x^{(k-1)}| = A|x^{(k)}| \Rightarrow A^2|x^2| \geq A|Ax^{(k)}| = A|x^{(k-1)}| \geq$

$|Ax^{(k-1)}| = |x^{(k-2)}|$ vb. elde edilir. Buradan her $k \geq 0$ için $P_0, P_1, \ldots$ X üzerinde ki izdüşümler olsun. Yani $(x^{(k)}) \in X$ için $P_0\left(\left(x^{(k)}\right)\right) = x^{(0)}, P_1\left(\left(x^{(k)}\right)\right) = x^{(1)}, \ldots$

Hemen belirtelim ki $X = \{(x, A^{-1}x, A^{-2}x, \ldots, A^{-k}x, \ldots): x \in P_0(X)\}$ yazılabilir.

$c_{00} \subset P_0(X) \subset \ell_p$ olduğu açıktır.

Önerme 4.3.15 : $P_0(X)$ $\left(\ell_p, \|.\|_p\right)$ uzayında ne soliddir ne de kapalıdır.

İspat : $x = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right)$ ve $y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ olsun. O zaman koordinatsal olarak $|x| \leq |y|$'dir. Ayrıca $x \in \ell_p$ ve $y \in P_0(X)$'dir.$A^{-1}y = e_1$ olduğundan Her $k \in \mathbb{N}$ için $A^{-k}y \in c_{00} \subset \Lambda_k$'dır. $A^{-1}x \notin \Lambda_1$ olduğundan $x \notin P_0(X)$'in ℓ_p içerisinde solid olmadığını gösterir. Şimdi $P_0(X)$'in $\left(\ell_p, \|.\|_p\right)$ normlu uzayı içinde kapalı olmadığını gösterelim.

$$x_j^{(n)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-1}}{j}, & 1 \leq j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$$ dizisini tanımlayalım.

O zaman her n için $x^{(n)} = (x_j^{(n)}) \in c_{00} \subset P_0(X)$. Aynı zamanda $n \to \infty$ iken $\left\|x - x^{(n)}\right\|_p^{\,p} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \to 0$'dır. Böylece x $x^{(n)}$ dizisinin ℓ_p'deki limitidir fakat $x \notin P_0(X)$'dir.

Önerme 4.3.16 : Tx=$A^{-1}x, x \in P_0(X)$ ile tanımlanan örten T : $P_0(X) \to P_1(X)$ operatörü $\|.\|_{\Lambda_0}$ ve $\|.\|_{\Lambda_1}$ normlarına göre sürekli değildir.

İspat : T'nin lineer olduğunu görmek kolaydır. Önerme 4.3.15' te tanımlanan $x^{(n)} = \left(x_j{}^{(n)}\right) \in P_0(X)$ ve $x = (x_j)$ dizilerini düşünürsek $(P_0(X), \|.\|_{\Lambda_0})$ normlu uzayında $x^{(n)} \to x \in \ell_p$ olduğundan $(x^{(n)})$ bir Cauchy dizisidir.Fakat $(P_1(X), \|.\|_{\Lambda_1})$ uzayında $(A^{-1}(x^{(n)})_n$ dizisi Cauchy dizisi değildir.

$\varepsilon > 0$ olsun. Her $n, m \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq m$ için $A^{-1}\left(x^{(n)}\right) = (1, -2, 2, , \dots, \pm 2, \pm 1, 0, \dots)$ ve $\left|A^{-1}\left(x^{(n)}\right) - A^{-1}\left(x^{(m)}\right)\right| = (0, \dots, 0, 1, 2, , \dots, 2, 1, 0)$ olur böylelikle $\varepsilon \in (0,1)$ için $\left\|A\left|A^{-1}\left(x^{(n)}\right) - A^{-1}\left(x^{(m)}\right)\right|\right\|_p \geq \|(0, \dots, 0, 1-\varepsilon, 2-\varepsilon, \dots, 2-\varepsilon, 1-\varepsilon, 0, \dots)\|_P 1$'dir.

$\mathcal{P}$ $\prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ üzerindeki çarpım topolojisi olsun. $(X, \mathcal{P})$ uzayı normlandırılabilir mi ? Olmadığını düşünüyoruz fakat ispatlayamıyoruz. Ama en azından X üzerinde aşikar olan her $(x^{(k)}) \in X$ için $\left\|(x^{(k)})\right\|_x = \left\|P_0\left(\left(x^{(k)}\right)\right)\right\|_{\Lambda_0} = \left\|x^{(0)}\right\|_p$ formülü ile tanımlanan $\|.\|_x$ normunun bize çarpım topolojisi tarafından X üzerinde üretilen topolojiyi vermediğini ispatlayabiliriz. Önerme 4.3.15'in ispatı ile X içerisinde $\|.\|_x$ normu tarafından tanımlanan topolojide X'in bir elemanına yakınsamayan bir dizi bulabiliriz ve doloyısıyla $(X, \mathcal{P})$ tam olmasına rağmen $(X, \|.\|_x)$ tam değildir.

4.4 X Uzayının Bir Genellemesi

X uzayını sonsuz alt üçgensel Cesâro tipi bir A matrisi ve $F^{\mathbb{N}}$'in solid bir alt uzayı λ öyle ki $A\lambda \subset \lambda$ için genelleyebiliriz burada Cesâro tipi$A$ matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & . & . & . \\ a_2 & a_2 & 0 & . & . & . \\ a_3 & a_3 & a_3 & 0 & . & . \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}, (a_k > 0 \; \forall k \in \mathbb{N})$$

genelleştirilmiş Cesâro matrisi Örnek 4.2.7'de görüldüğü gibi λ'yı λ' ya dönüştürmeyebileceği için $A\lambda \subset \lambda$ özelliğinin sağlanmasına ihtiyaç duyuyoruz.

Hemen not edelim ki

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & a_2 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 0 & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla A'nın tersi sütunları c_{00} içinde olan aşağıdaki sonsuz üçgensel matristir.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} {a_1}^{-1} & 0 & 0 & . & . & . \\ -{a_1}^{-1} & {a_2}^{-1} & 0 & . & . & . \\ 0 & -{a_2}^{-1} & {a_3}^{-1} & 0 & . & . \\ 0 & 0 & -{a_3}^{-1} & {a_4}^{-1} & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}, (a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N})$$

Bir önceki bölümdeki gibi A ve λ'dan üretilen X uzayının $X(A,\lambda)$ ile göstereceğiz. Önerme 4.3.13'ten $X_{c_{00}} = \{(x, A^{-1}x, A^{-2}x, \dots): x \in c_{00}\} \subset X(A,\lambda)$.

5. MATRİSSEL OLARAK TÜRETİLEN SOLİD BANACH DİZİ UZAYLARINDA PROBLEMLER

Bu bölümde P.D. Johnson ve F. Polat [Johson vd (2016)] tarafından Cesaro matrisi yerine Toeplitz matrisi alınarak bir önceki bölümdekine benzer şekilde aynı diziler ve izdüşüm limitleri bu sonsuz matris için tanımlanmış ve ayrıca Toeplitz matrisin solid bir dizi uzayını kendisine dönüştürmesi için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

5.1.Giriş

Bu bölüm boyunca skaler cisim $\mathbb{F}$ ya da $\mathbb{R}$, reel sayılar ya da $\mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olacaktır ve $\mathbb{N} = \{1,2,3, ... \}$. Bu bölümde ki uzaylar yalnızca skaler dizi uzayları olmasına rağmen daha geniş bir bağlamda genelleştirmeler yapmak için Riesz uzayları ile ilgili bazı temel tanımları ve özellikleri vereceğiz. Riesz uzayları ile ilgili daha fazla bilgi için [Abramovich vd (2002) , Aliprantis vd (1985), Luxemburg vd (1971)] referanslardan faydalanılabilir. Reel bir vektör uzayı E, $\leq$ kısmi sıralama bağlantısıyla donatılsın. Eğer her $x, y, z \in$ E ve $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ $\sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ var ve E nin elemanı ise ve ayrıca $x \leq y$ bize $\alpha x + z \leq \alpha y + z$ yi veriyorsa bu durumda E ye Riesz uzayı veya bir vektör örgüsü denir. E deki bir x elemanının mutlak değeri veya modülü $|x| := \sup\{x, -x\}$ ile tanımlanır. Riesz uzaylarının tipik örnekleri fonksiyon uzayları tarafından sağlanır.

Riesz uzaylarının tipik örnekleri fonksiyon uzayları tarafından sağlanır. Örneğin bir Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı bütün reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı $\mathbb{C}\,(\Omega)$ ve boştan farklı bir K kümesi üzerinde tanımlı bütün sınırlı reel değerli fonksiyonların uzayı $B(K)$ noktasal sıralama altında Riesz uzaylarıdır. Eğer E bir vektör örgüsü ise o zaman $\mathrm{E}^{+} = \{x \in \mathrm{E} : \mathrm{x} \geq 0\}$ kümesi E nin pozitif konisi olarak adlandırılır.

Bir E vektör örgüsü içinde bir a elemanının solid kabuğu $S(a) = \{b \in \mathrm{E} : |b| \leq |a|\}$ kümesi ile verilir. Bir E vektör örgüsünün bir vektör alt uzayı S olsun. Eğer E de $|u| \leq |\vartheta|$ ve $\vartheta \in S$ bize $u \in S$ olmasını gerektiriyorsa bu durumda S solid veya sıra ideali denir. Biz sıra ideali yerine solid demeyi tercih edeceğiz. Bir E vektör örgüsü üzerinde tanımlı $\|.\|$ normu verilsin. Eğer her $x, y \in$ E için $|x| \leq |y|$ bize $\|x\| \leq \|y\|$ ifadesini veriyorsa bu durumda E deki norma örgü normu veya solid norm denir.

Bir solid normla donatılmış vektör örgüsüne normlu vektör örgüsü denir. Eğer normlu vektör örgüsü E norma göre tamsa bu durumda E ye Banach örgüsü denir. Her x ∈ E için bir normlu vektör örgüsü E de $\|x\| = \||x|\|$ sağlanır.

Bütün skaler değerli dizilerin uzayını $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ile gösterelim. Skaler cisim $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ise bu durumda sadece sonlu tane terimi 0 dan farklı olan $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ alt uzayını c_{00} ile göstereceğiz. Diziler üzerindeki bütün işlemler koordinatsaldır. Eğer $x = (x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ise o zaman $|x| = (|x|)$ yazarız. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nin elemanları olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x \leq y$ ifadesi $x_n \leq y_n$ demektir. $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \leq)$ uzayı bir vektör örgüsüdür ve $|x|$, $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ifadesinin vektör örgü tanımı burada verilen $|x| = (|x_n|)$ tanımıyla örtüşür.

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} + i\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ uzayı alışılmış toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kompleks değerli dizilerin vektör uzayıdır. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ koordinatsal sıralama altında kısmi sıralı bir kümedir. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de $(x_n) \leq (a_n)$ ve $(y_n) \leq (b_n)$ iken $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de $(z_n) = (x_n + iy_n) \leq (t_n) = (a_n + b_n)$ yazarız.

Bu durumda $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bir vektör örgüsüdür ve $(z_n) = (x_n + iy_n)$ için $|(z_n)|$ elemanı $|(z_n)| = |(x_n)| + i|(y_n)|$ formülü ile verilir. $(0,0,0, \dots)$ dizisi kısaca $\underline{0}$ ile gösterilecektir. $0 < p < \alpha$ için ℓ_p uzayı $\ell_p = \{(x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \}$ kümesi ile tanımlanır. ℓ_p de $\underline{0}$ den uzaklık ya da alışılmış norm her $x \in \ell_p$ için $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ formülü ile verilir. $p \geq 1$ için $\|x\|_p$ gerçekten bir normdur.

Eğer $\lambda, \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin bir solid alt uzayı ise λ yı bir topoloji vektör uzayı yapan bir topolojiye orijin etrafında solid kümelerden oluşan bir komşuluk tabanına sahipse bir solid topoloji deriz.

ℓ_p uzayları $(1 \leq p < \infty)$, ℓ_∞ (sınırlı dizilerin uzayı) ve c_0 (sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı) $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin solid alt uzaylarıdır ve normları ℓ_p üzerinde $\|.\|_p$, ℓ_∞ ve c_0 üzerinde sup normu solid normlardır. C (yakınsak dizilerin uzayı) solid değildir.

$A = [a_{ij} : i, j \geq 1] = [a_{ij}]$ negatif olmayan girdilere ve bütünüyle sıfır olmayan sütunlara sahip sonsuz bir matris olsun A nın tanım kümesi $dom(A)$ ile gösterilir ve $dom(A) = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \ \ her \ \ i \in \mathbb{N} \ \ için \ yakınsaktır \}$ kümesi ile tanımlanır. $x \in dom(A)$ için Ax dizisi (x in A dönüşümü) her $i \in \mathbb{N}$ için $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ formülü ile verilir. Eğer $\lambda \subseteq dom(A)$ ise $A\lambda = \{Ax : x \in \lambda \}$ dır. Eğer $\lambda \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ise, $A^{-1}(\lambda) = \{x \in dom(A) : Ax \in \lambda \}$ 'dır.

Eğer $A = [a_{ij}]$ negatif olmayan girdilere sahip ve ana köşegen üzerinde pozitif girdilere sahip bir matris ise o zaman $dom(A) = \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ dir. A matrisinin sıfırdan farklı köşegene sahip A nın matrissel tersi A^{-1} e sahip olmasını gerektirir. A^{-1} yine alt üçgenseldir.

Fakat A matrisi köşegensel matris olmadığı sürece A^{-1} in bütün girdilerinin negatif olmadığını söyleyemeyiz.

Sonsuz matrislerle ilgili daha fazla bilgi için [Cooke , (1950)] nolu kitaplardaki referanslardan faydalanılabilir. [Leibowitz (1971)] nolu referanstan ilham alınan aşağıdaki tanım [Johnson vd (1985)]) nolu referansta tanıtılmıştır.

Tanım 5.1.1 : Eğer $\lambda \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ve A negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris ise

$$sol - A^{-1}(\lambda) = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : |x| \in A^{-1}(\lambda)\} = \{A^{-1}(\lambda)\} =$$

$$\{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : |x| \in dom(A)\ ve\ A|x| \in \lambda\} \text{ dir.}$$

[Johnson vd (1985)] nolu referansta verilen aşağıdaki sonuç "$sol - A^{-1}(\lambda)$" notasyonunu kullanmamızın sebebini açıklar.

Önerme 5.1.2 : A negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris ve λ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin solid bir alt uzayı olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur:

$(\boldsymbol{a})$ $sol - A^{-1}(\lambda)$ soliddir;

$(\boldsymbol{b})$ $sol - A^{-1}(\lambda) \subseteq A^{-1}(\lambda)$;

$(\boldsymbol{c})$ $sol - A^{-1}(\lambda)$ kümesi $A^{-1}(\lambda)$ içinde ki en büyük dizilerin solid kümesidir;

$(\boldsymbol{d})$ $sol - A^{-1}(\lambda)$ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin alt uzayıdır.

Şuandan itibaren topolojik vektör uzayı ve local konveks topolojik vektör uzayı için t.v.u ve l.k.t.v.u kısaltmalarını kullanacağız.

Eğer τ λ üzerinde solid bir t.v.u topolojisi ise o zaman bu topoloji $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde doğal olarak solid bir t.v.u topolojisi üretir. Varsayalım λ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ in solid τ topolojisi ile donatılmış bir solid alt uzayı ve $\mathcal{U}(\lambda, \tau)$ da orjin etrafında solid kümelerden oluşan bir komşuluk tabanı olsun. [Johnson vd (1985)] nolu referansta $sol - A^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in sol - A^{-1}(\lambda) : A|x| \in (\mathcal{U})\}, \left(\mathcal{U} \in \mathcal{U}_j\right)$ kümelerinin $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde solid bir t.v.u topolojisi $sol - A^{-1}(\tau)$ için orjinde bir komşuluk tabanı oluşturduğu gösterilmiştir. Üstelik eğer λ üzerindeki Haursdorff ve A da hiçbir sütunu tamamiyle sıfır olmayan sonsuz bir matris ise o zaman $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerindeki üretilen topoloji Haursdorff 'tur.

Daha önceden bahsedildiği gibi bütün sonsuz matrislerimiz tamamiyle sıfır olmayan sütunlara sahip olacaktır. İlaveten λ ve A verildiği zaman A nın sütunlarının λ içerisinde olduğunu kabul edeceğiz. Bu bize $c_{00} \subseteq sol - A^{-1}(\lambda)$ kapsamasını verir.

Açıkça λ solid bir norm $\|.\|$ ile donatılmışsa o zaman $sol - A^{-1}(\lambda)$ üzerinde üretilen topoloji $x \longrightarrow \|A|x|\|$ solid normu ile üretilir. Benzer bir yorum quasinormlar, pseudnormlar ve seminormlar içinde yapılabilir.

Bir (λ, τ) topolojik uzayına AK uzayı deriz ancak ve ancak her $x \in \lambda$ için $n \longrightarrow \infty$, $P_n(x) = (x_1, \dots, x_n, 0,0,0, \dots)$ izdüşümleri x e yakınsar. [Johnson vd (1985)] ve [Johnson vd (1980)] numaralı referanslarda $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(\tau))$ uzayının solid (λ, τ) uzayından bazı özellikleri aldığı gösterilmiştir.

Önerme 5.1.3 : Eğer λ solid Haursdorff t.v.u topolojisi τ ile donatılmış $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin solid bir alt uzayı ise ve A negatif olmayan girdilere sahip her sütunu $\lambda/\{\underline{0}\}$ içerisinde olan sonsuz bir matris ise o zaman:

(a) Eğer (λ, τ) AK uzayı ise $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(\tau))$ da AK uzayıdır.

(b) Eğer (λ, τ) tam ise o zaman (i) veya (ii) şartlarından daha genel şartlar altında $(sol - A^{-1}(\lambda), sol - A^{-1}(\tau))$ uzayı (λ, τ) nın tamlık özelliğini alır. (Bakınız [Johnson vd (1985)] : aslında (λ, τ) nın tam olmadığı bir örnek bilinmemektedir.)

Buna rağmen bu zor soruyu ana amaçlarımız arasından çıkartıyoruz.

(λ, τ) ve A Önerme 5.1.3 ün hipotezlerini sağlasın.

$\Lambda_0 = \lambda$ ve $\Lambda_m = sol - A^{-1}(\Lambda_{m-1}), m \in \mathbb{N}$ yazalım. A nın her sütunu Λ_{m-1} içinde kalmasa bile halen Λ_m yi oluşturabiliriz ve $(sol - A^{-1})^m\,(\tau)$ topolojisini verebiliriz. Diyelim ki A nın j ninci sütunu Λ_{m-1} içinde düşmesin o zaman $x \in \Lambda_m$ bize $x_j = 0$ olmasını verir). Bu bize herbiri solid topolojiye sahip solid dizi uzaylarını $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, ...$ sonsuz dizisini verir.

$x \to A|x|$ dönüşümü Λ_m yi Λ_{m-1} içine gönderdiğinden ve Λ_{m-1} solid olduğundan $x \to Ax$ dönüşümü Λ_{m-1} içine gönderir ve bu dönüşüm açıkça süreklidir , bu arada $\Lambda_m = sol - A^{-1}(\Lambda_{m-1})$ üzerindeki topoloji Λ_{m-1} den üretilmiştir.

Dolayısıyla $A: \Lambda_m \to \Lambda_{m-1}$ $m \in \mathbb{N}$ dönüşümlerine göre Λ_m nin izdüşümsel limit :

$x = \left\{ \left(x^{(m)}\right) \in \prod_{m=0}^{\infty} \Lambda_m : için\ m > 0\, , Ax^{(m)} = x^{(m-1)} \right\}$ ile tanımlanır.

Özel durumlarda $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, ...$ dizisi ve X ile ilgili en temel sorulara bile cevap vermek çok kolay değildir:

(1) Her $m > 0$ Λ_m aşikar olmayan uzay mıdır ? $(\{0\} \subseteq \Lambda_m)$?

(2) (1) ile alakalı olarak her $m > 0$ için $c_{00} \subseteq \Lambda_m$ midir ?

(3) X aşikar değil midir ? Yani , X $(0,0,0,\dots)$ dizisinden başka $\left(x^{(0)},x^{(1)},\dots\right)$ dizisini içerir mi ?

Bu giriş çalışmalarından A matrisini alt üçgensel ve terslenebilir olarak kısıtlamamız gerektiğini düşünüyoruz. Bu kısıtlama altında her $m>0$ için

$\Lambda_m=\left\{x\in\mathbb{F}^{\mathbb{N}}: A^m|x|\in\lambda\right\}$ olduğunu görmek ve eğer $x^{(m)}\in\Lambda_m$, $m=0,1,2,\dots$ ise $\left(x^{(0)},x^{(1)},\dots\right)\in X$ dir ancak ve ancak $x^m=(A^{-1})^m x^{(0)}=A^{-m}x^{(0)}$ olması gereklidir olduğunu görmek kolaydır.

Bu durumlar altında (A alt üçgensel ve terslenebilir olduğu zaman) X ile λ nın bir alt uzayı

$$\lambda_x=\{x\in\lambda:\ her\ m\geq 1,\ A^{-m}x\in\Lambda_m\}\text{ dır.}$$
$$=\{x\in\lambda:\ A^m|A^{-m}x|\in\lambda\}.$$

Uzayı birebir eşlenebilir. X ile λ_x arasındaki birebir eşleme basitçe $\left(x^{(0)},x^{(1)},\dots\right)\in X$ iken $x^{(0)}\in\lambda_x$ şeklinde kurulabilir. Bu eşleme oldukça enteresandır ve birçok soruya yol açar örneğin X üzerinde ki $\prod_{m=0}^{\infty}\Lambda_m$ üzerindeki çarpım topolojisi ile üretilen topoloji ile X i λ_x ile eşleyerek elde ettiğimiz τ tarafından üretilen $\lambda=\Lambda_0$ üzerindeki alt uzay topolojisi eşit midir ?

Açıkça X üzerindeki çarpım topolojisi λ_x den gelen X üzerindeki topolojiden daha zayıf değildir, ve bu iki topoloji X aşikarsa $(\lambda_x=0)$ aynıdır. Önceki çalışmalardan [Johnson vd (2015)] X üzerindeki çarpım topolojisinin $\lambda_x\cong X$ eşleşmesi üzerindeki τ tarafından üretilen alt uzay topolojisinden kesinlikle daha kuvvetli olduğunu biliyoruz. X aşikar değilse bu iki topolojinin aynı olup olmadığını merak ediyoruz. Önceki çalışmada Cesàro tipi,

$$C = C(1\,, a_2\,, a_3\,, \dots) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3 & a_3 & a_3 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

matrislerine yoğunlaşmıştık ve ayrıca λ $C\lambda \subseteq \lambda$ şartını sağlıyordu. (Cesàro matrisi Cesàro tipi bir matristir $a_n = \frac{1}{n}\,, n \in \mathbb{N}$ dir; bu C için her $p \in (1, \infty)$ için Hardy eşitsizliğinden [Hardy (1920)] $\left(C\ell_p \subseteq \ell_p\right)$ dir.

[(Johnson vd (2015)] nolu referansta böyle C ve λ için $\Lambda_0 \subseteq \Lambda_1 \subseteq \cdots$, olduğunu gösterdik ve böylece her m için $c_{00} \subseteq \Lambda_m$ olduğunu ve X in aşikar olmayan bir uzay olduğunu göstermiş olduk. Buna rağmen C nin Cesàro matrisi ve bazı $p \in (1\,, \infty)$ için $\lambda = \ell_p$ olmasa gibi çok özel durumlara bile hemen akla gelen X üzerindeki çarpım topolojisi ile ilgili açık problemler vardır. Maalesef bu problemlere cevap vermek o kadar kolay değildir. Örneğin X üzerindeki bu topoloji bir norm tarafından tanımlanır mı ?

Burada Toeplitz tipi

$$T = T\,(1\,, a_2\,, a_3\,, \dots) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3 & a_2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_4 & a_3 & a_2 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

matrislere yoğunlaşacağız.

Her zamanki gibi λ yı solid bir τ topolojisine sahip solid bir dizi uzayı olarak alacağız ve $c_{00} \subseteq \Lambda_1 = sol - T^{-1}(\lambda)$, kapsamasını garanti etmesi bakımından $(1\,, a_2\,, a_3\,, \dots) \in \lambda$ şartını gerekli kılacağız. Son koşul λ nın $(x_1\,, x_2\,, \dots) \to (0\,, x_1\,, x_2\,, \dots)$ sağ kaydırma altında kapalı olması durumunda her zaman sağlanır.

5.2 Sonuçlar ve Örnekler

Sonsuz alt üçgensel Toeplitz matrisi

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ a_2 & 1 & 0 & . & . & . \\ a_3 & a_2 & 1 & 0 & . & . \\ a_4 & a_3 & a_2 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}, (a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}) \text{ yi}$$

düşünelim ve $\lambda \subseteq \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ T nin her sütunu λ da olacak şekilde solid bir dizi uzayı olsun.

Bu T matrisi ve herhangi bir $b=(b_1, b_2, b_3, \dots)$ dizisi için

$$T_b=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ a_2 & 1 & 0 & . & . & . \\ a_3 & a_2 & 1 & 0 & . & . \\ a_4 & a_3 & a_2 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2+a_2b_1 \\ b_3+a_2b_2+a_3b_1 \\ \vdots \\ . \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

Her a_j negatif olmadığından $b \in S(\,T|b|\,)$ dir. Önceki bölümde olduğu gibi

$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ dizisini $\lambda_0=\lambda$ ve $k>0$ içinde

$\Lambda_k = sol-T^{-1}(\Lambda_{k-1}) = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : T|x| \in \Lambda_{k-1}\} = \{\,x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : T^k|x| \in \lambda\,\}$ ile

tanımlayalım.

Giriş kısmından bahsedildiği gibi eğer λ solid bir Hausdorff t.v.u topolojisi τ ile donatılmışsa o zaman Λ_1 üzerinde doğal olarak üretilmiş solid bir Hausdorff t.v.u topolojisi $\tau_1 = sol-T^{-1}(\tau)$ olacaktır ki bu topoloji Λ_1 den Λ_0 içerisinde tanımlı T ile çarpma işlemini sürekli ve lineer yapan en küçük topolojidir. Benzer şekilde $\lambda = \Lambda_0$ değiştirerek Λ_1 ile değiştirerek Λ_2 üzerinde $\tau_2 = sol-T^{-1}(\tau_1)$ solid t.v.u topolojisini elde edebiliriz. Bu şekilde devam ederek $\Lambda_3, \Lambda_4, \dots$ uzayları üzerinde de solid t.v.u topolojilerini tanımlayabiliriz.

Giriş kısmında ifade edildiği gibi bütün bu uzaylar üzerine topoloji koymada ki açık zorluk Λ_k lar τ nin sütunlardan birini ya da birden fazlasını içermeyebilir. Açık zorluk aslında gerçek anlamda bir zorluk değildir. Çünkü τ nin j. Sütunu Λ_k içerisinde kalmıyorsa o zaman $\forall\ x \in \Lambda_{k+1} = sol - T^{-1}(\Lambda_k)$, için $x_j = 0$ dır. Böylece Λ_{k+1}

$\mathbb{N}_k = \{j \in \mathbb{N} : T$ nin j. sütunu Λ_k nın elemanıdır $\}$ kümesinden skaler cisim içerisine tanımlı fonksiyonların solid bir uzayı olarak düşünülebilir. Eğer $\mathbb{N}_k$ sonsuza Λ_{k+1} mükemmel derecede iyi bir solid dizi uzayıdır.

Eğer $\mathbb{N}_k \neq 0$ ise $\Lambda_{k+1} = \{\underline{0}\}$ dır.

T alt üçgensel bir matris olduğundan Önerme 5.1.3 ten tamlık, ve\veya AK lık özellikleri Λ_1 ile λ dan alınır ve bu özellikler $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ uzaylarına da geçer.

Önerme 5.2.4 : $(\Lambda_k)_{k\geq 0}$ azalan bir dizidir.

İspat : Yukarıda belirtiği gibi a_j ler negatif olmadığından her $x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ için $x \in S(T|x|)$. Bu yüzden, eğer $x \in \Lambda_{k+1}$ yani eğer $T|x| \in \Lambda_k$ ise, o zaman $x \in S(T|x|) \subseteq \Lambda_k$ dır. Böylece , $\Lambda_{k+1} \subseteq \Lambda_k$ dır.

Sonuç 5.2.5 : En az bir $j > 0$ için $\Lambda_j = \lambda$ dır ancak ve ancak her $j > 0$ için $\Lambda_j = \lambda$ dır.λ solid bir $\|.\|_\lambda$ normuna sahip bir Banach örgüsü olduğu zaman (λ_k, τ_k) uzayıda $\|x\|_k = \|T^k|x|\|_\lambda$ ile tanımlanan $\|.\|_k$ solid normuna göre bir Banach örgüsüdür. Bazen $\|.\|_\lambda$ nın yerine $\|.\|_0$ yı yazarız çünkü $\lambda = \Lambda_0$ dır.

Önerme 5.2 6 : $\Lambda_1 = \lambda$ dır ancak ve ancak T λ yı λ içine gönderir. λ solid bir Banach örgüsü (solid bir norm ile) ve T λ yı λ içine gönderdiği zaman T λ üzerinde sınırlı lineer bir dönüşümdür. Üstelik $\|.\|_0$ ve $\|.\|_1$ λ üzerinde bu durumda iki denk normdur.

İspat : Varsayalım T λ yı λ içine göndersin. Eğer $\Lambda \in \lambda$ ise $|x| \in \lambda$ dır ve böylece $T|x| \in \lambda$ dır. Böylelikle $\lambda \subseteq \Lambda_1$ elde edilir. Önerme 5.2.4 ten $\lambda = \Lambda_1$ dir.

Varsayalım $\lambda = \Lambda_1$ olsun. Eğer $x \in \lambda$ ise $|x| \in \lambda = \Lambda_1$ dir, böylece $T|x| \in \lambda$ dır. $Tx \in S(T|x|)$ olduğundan $Tx \in \lambda$ dır. $x \in \lambda$ rastgele seçilen bir eleman olduğundan T nin λ yı λ içine gönderdiği ispatlanmış olur.

Halen $\lambda = \Lambda_1$ olduğunu varsayalım bu durumda $(\lambda, \|.\|_1)$ den $(\lambda, \|.\|_0)$ a tanımlanan birim gömme fonksiyonu örtendir ve dolayısıyla açık bir dönüşümdür. Sonuç olarak $(\lambda, \|.\|_0)$ dan $(\lambda, \|.\|_1)$ e giden ters gömme fonksiyonu süreklidir. Bu da bize her $x \in \lambda$ için en az bir $C > 0$ olduğunu ve $\|x\|_1 = \|T|x|\|_0 \leq C\|x\|_0$ sağladığını gösterir.

Her $x \in \Lambda_1 = \lambda$ için zaten $\|x\|_1 \geq \|x\|_0$ olduğundan $\|.\|_0$ ve $\|.\|_1$ normlarının $\lambda = \Lambda_1$ üzerinde denk olduğu elde edilir.

$T : (\Lambda_1, \|.\|_1) = (\lambda, \|.\|_1) \longrightarrow (\lambda, \|.\|_0)$ dönüşümü sürekli olduğundan $T : (\lambda, \|.\|_0) \longrightarrow (\lambda, \|.\|_0)$ dönüşümüde süreklidir.

İlginç bir şekilde $\lambda = \Lambda_1$ bize T nin λ yı λ ya örten bir şekilde götürdüğünü vermez.

Önerme 5.2.7 : Varsayalım T λ yı λ içine göndersin. O zaman T λ yı λ üzerine gönderir ancak ve ancak T^{-1} λ yı λ içine gönderir.

İspat : Hem T hem de T^{-1} terslenebilir alt üçgensel matrisler olduğundan bunlardan herhangi biriyle çarpım $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ yi birebir ve örten olarak $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ ye gönderir ve bu iki dönüşüm birbirinin tersidir. Bundan istediğimiz sonuç elde edilir, aslında bu sonuç sadece $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin solid λ alt uzayları için değil $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin herhangi bir alt kümesi için de doğrudur.

Önerme 5.2.8 : Varsayalım T λ yı λ üzerine göndersin. $X \subseteq \prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ uzayı T ve λ ya göre giriş kısmında tanımlanan izdüşüm limiti olsun. O zaman

$X = \{(x, T^{-1}x, T^{-2}x, \dots) : x \in \lambda\}$ dır, ve $P(x, T^{-1}x, T^{-2}x, \dots) = x$ ile

tanımlanan $P : X \longrightarrow \lambda$ ya dönüşümü X ten λ üzerine lineer bir izomorfizmadır.

Eğer λ solid bir t.v.u topolojisi T ile donatılmışsa ve X de $\prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ üzerindeki çarpım topolojisinden gelen alt uzayı topolojisi ile donatılmışsa o zaman P topolojik vektör uzayları arasında tanımlanan lineer bir map olarak süreklidir.

Eğer τ local konveks tam bir metrik topolojisi ise o zaman P^{-1} de süreklisir ve dolayısıyla λ ve X topolojik vektör uzayları olarak izomorftur.

İspat : Önerme 5.2.6 ve 5.2.7 den her k için $\Lambda_k = \lambda$ dır ve Önerme 5.2.7 nin ispatından T^{-1} λ yı λ üzerine gönderir. Dolayısıyla her $k > 0$ için ve $x \in \lambda$ için $T^{-k}x = (T^{-1})^k x \in \lambda = \Lambda_k$ dır.

Böylelikle

$$X = \{(x, T^{-1}x, T^{-2}x, \dots) : T^{-k}x \in \Lambda_k \ \ \forall\, k > 0\,\}$$

$$= \{(x, T^{-1}x, T^{-2}x, \dots) : x \in \lambda\,\}$$ elde edilir.

Eğer λ solid bir t.v.u topolojisi τ ile donatılmışsa o zaman her Λ_k bir solid t.v.u topolojisi τ_k τ dan ve T nin uygulanmasından alır. Açıkça P $\prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ üzerinde Λ_0 üzerine izdüşümün kısıtlamasıdır ve bu kısıtlama $\Lambda_0 = \lambda$ üzerinde τ ve $\prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ üzerindeki çarpım topolojisine göre süreklidir. (Bu sonuç T λ yı λ üzerine göndersin veya göndermesin her zaman sağlanır.)

Şimdi varsayalım τ local konveks tam bir metrik topolojisi olsun. O zaman $\prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ üzerindeki çarpım topolojisi de öyledir. Açıkça X $\prod_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$ nın kapalı bir alt uzayıdır. Bu sonuç herhangi bir solid t.v.u topolojisi τ içinde sağlanır ve burada T nin λ yı λ üzerine gönderme varsayımına ihtiyaç yoktur ; sadece T nin her $k > 0$ için (Λ_k, τ_k) yı $(\Lambda_{k-1}, \tau_{k-1})$ içine göndermesi yeterlidir.)

Dolayısıyla, P bir local konveks tam metrik t.v.u uzayından diğer bir uzaya birebir süreklidir. Açık dönüşüm teoreminden dolayı P^{-1} süreklidir.

Örnek 5.2.9 :

$$T = T(1,1,0,0,\ldots) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

O zaman ,

$$T^{-1} = T(1,-1,1,-1,\ldots) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & . \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & . \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

Açıkça T birçok λ yı kendi içine gönderir. Örneğin bütün $\lambda = \ell_p$ $0 < p \leq \infty$.

$1 < p \leq \infty$, $\left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots\right) \in \ell_p$ olmasına rağmen açıkça $T^{-1}x \notin \ell_\infty$ dır ve böylece $T^{-1}x \notin \ell_p$ dir. Önerme 5.2.6 ve 5.2.7 den eğer $\lambda = \ell_p$, $0 < p \leq \infty$ ise o zaman $\Lambda_1 = sol - T^{-1}(\lambda) = \lambda$ ve T λ yı λ içine gönderir ama λ yı λ üzerine göndermez.

Bir sonraki örnek bize T yı λ yı λ üzerine göndermesini kolaylıkla olabileceğini gösterecektir. Bu örneği anlamak için okuyucunun Toeplitz matrisleri ile kuvvet serileri arasındaki ilişkiye aşina olması gerekmektedir. Varsayalım $(a_1, a_2, \ldots) = a$ sabitlerin bir dizisi olsun. Burada bu dizinin terimlerinin pozitif olması koşulu yoktur ayrıca a_1 de 0 alınabilir.

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ ve

$$T(f) = T(a) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & . & . & . \\ a_2 & a_1 & 0 & . & . & . \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & . & . \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$ olsun.

Eğer $b = (b_n)_{n\geq 1}$ skalerlerin başka bir dizisi ise $a * b = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right)_{n\geq 1}$ olsun , burada $a * b$ $(f.g)(z)$ kuvvet seri çarpımının katsayılarından oluşan diziyi göstermektedir. Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ 0 ın bir komşuluğundaki fonksiyonları gösterirse, yani bu serilerin yakınsaklık yarıçapları pozitifse, o zaman $f(z)g(z)$ kuvvet serisi f ve g fonksiyonlarının 0 ın bu komşuluktaki çarpımlarını göstermek kolaydır :

$$T(a).\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ . \end{bmatrix} = T(a).b = a * b\,, \text{ ve } \quad T(a)T(b) = T(a * b)$$

Dolayısıyla, $f(z)$ ve $g(z)$ 0 ın bir komşuluğundaki fonksiyonları gösterdiğinde $T(f)T(g) = T(f.g)$ dır.

Dolayısıyla, eğer $f(z)$ yakınsaklık yarıçapı bir $r > 0$ sayısından büyük veya eşit ise ve $|z| < r$ şartını sağlayan her z kompleks sayısı için $f(z) \neq 0$ ise o zaman $\frac{1}{f}$ fonksiyonu 0 civarında kuvvet serisi gösterimine sahiptir ve bu disk içinde $T\left(\frac{1}{f}\right) = T(f)^{-1}$ dir.

Örneğin, Örnek 5.2.9 da, $T = (1, 1, 0, \dots) = T(1 + z)$ olduğundan

$T^{-1} = T\left(\frac{1}{1+z}\right) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1}\right) = T(1, -1, 1, -1, \dots)$ dır.

Örnek 5.2.10 : $\rho \in (0, \infty]$ sabitleyelim ve

$$\lambda = \left\{ (x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{n-1} \text{ yakınsaklı yarıçapı } \geq \rho \right\}$$

$$= \left\{ \ (x_n) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \frac{1}{lim_n sup|x_n|^{\frac{1}{n}}} \geq \rho \ \right\} \text{ olsun.}$$

$\left[Gösterim : \frac{1}{0} = \infty \right]$. Açıkça λ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin bir solid alt uzayıdır. Eğer $(1, a_1, a_2, \ldots) \in \lambda$, $a_j \geq 0$, $i = 2, 3, \ldots$ ve $|z| < r$ şartını sağlayan her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \neq 0$ ise o zaman hem f hem de $\frac{1}{f}$ $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho \}$ diski üzerinde tanımlanan analitik fonksiyonlar uzayını kendine örten olarak dönüştürür dolayısıyla, $T = T(f)$ ve $T\left(\frac{1}{f}\right)$ λ yı kendine örten olarak dönüştürür.

Özel bir örnek için $\rho = 1$ ve T, T^{-1} $f(z) = 1 + |z| < 1$ şartını sağlayan her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = 1 + z \neq 0$ fonksiyonuna göre Örnek 5.2.9 un matrisleri olsun. Ama açık bir şekilde bu tip T ve T^{-1} matris örnekleri oldukça çoktur.

Eğer λ Örnek 5.2.10 daki gibi verirse, $\rho > 0$ $a_i \geq 0$, $i = 2,3, \ldots$ ve $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ fonksiyonu her $|z| < \rho$ için yakınsak olarak alınırsa ve f bu açık disk içinde 0 değerini alırsa o zaman $\frac{1}{f}$ için kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $(0, \rho)$ aralığının bir elemanıdır. Böyle bir durumda $T(f)$ λ yı λ içine göndermeyecektir, dolayısıyla $T(f)$ λ yı λ ya örten olarak göndermez. Bu sonuçlar Örnek 5.2.10 daki λ uzaylarından oldukça farklı uzaylardır. Örnek 5.2.10 daki gibi verilen bir dizi uzayı λ doğal olarak solid, metrik local konveks t.v.u topolojisine sahiptir ki bu topolojiye $U(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho \}$ kompak alt kümeleri üzerinde tanımlanan düzgün yakınsaklık topolojisi denir.

Normdan dolayı bu topoloji genelde $U(\rho)$ üzerinde tanımlanan ve λ yı $(x_n) \in \lambda \leftrightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{n-1}$ şeklinde eşlemekle elde edilen analitik fonksiyonlar uzayı üzerinde tarif edilir. Bu λ uzayı bu topolojiye göre tamdır. Bu topoloji normlanabilir değildir ama en azından aşağıda verilen normların bir dizisi ile tarif edilebilir : $(r_k)_{k\geq 1}$ pozitif reel sayıların ρ ya yakınsayan artan bir dizisi olsun ve $\|.\|_k$ normunun $\|x\|_k = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|{r_k}^{n-1}$ formülü ile tanımlansın. λ üzerinden $\|.\|_1, \|.\|_2, \ldots$ normlarının dizisiyle tanımlanan topolojinin düzgün yakınsaklık topolojisiyle aynı olduğunu göstermek tamamen aşikar değildir ; sonuç aslında fonksiyonel analizdeki norm dizi topolojisinin düzgün yakınsaklık topolojisinden daha ince olmasından ve her iki topolojinin de tam metrik l.k.t.v.u topolojisi olmalarından gelir. Bu iki topolojinin denkliğinin gösterilmesi bize şu önemli sonucu verir ; eğer $x \in \lambda$ ve $T(x)$ x e karşılık gelen Toeplitz matris ise bu durumda yalnızca $T(x)$ λ yı λ içine göndermez aynı zamanda bu dönem λ üzerinde sürekli lineer bir dönüşümdür. $T(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ Toeplitz matrisiyle ilgili son örneğimize bakmadan önce referans [Johnson vd (2015)] den bir sonucu hatırlayalım.

Eğer $B = [b_{ij}]$ negatif olmayan gidilere sahip sonsuz bir matris ise o zaman B nin pozitif tam sayı kuvvetlerine sahip olmasına izin vereceğiz , burada ∞ bir matris girdisi olarak görünebilir. Bu çarpımları elde etmekte doğal olarak $c > 0$ için $c.\infty = \infty$, $0.\infty = 0$ ve negatif olmayan terimle ∞ un toplamını ∞ olarak kabul edeceğiz.

Eğer ∞ B^k nın j^{th} sütununda ise bu durumda $x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ için yalnızca $x_j = 0$ olması durumunda $B^k(x) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ dir. (yani $B^k|x|$ in girdilerinin hepsi sonludur.)

Önerme 5.2.11 : Varsayalım $B = [b_{ij}]$ negatif olmayan girdilere sahip sonsuz bir matris ve λ $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ nin c_{00} ı içeren solid bir alt uzayı olsun. $k > 1$ için

$$\Lambda_k = \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : B^k|x| \in \lambda\}$$

$$X = \left\{(x^{(k)})_{k\geq 0} \in \textstyle\prod_0^{\infty} \Lambda_k : \; her \; k > 0, \; Bx^{(k)} = x^{(k-1)}\right\} \text{ olsun.}$$

$(\boldsymbol{a})$ Eğer B nin her sütunu sonlu olarak 0 dan farklı ise (yani c_{00} da ise), bu durumda her $k \geq 1$ için $c_{00} \subseteq \lambda_k$ dır.

$(\boldsymbol{b})$ Eğer B nin matris olarak tersi B^{-1} varsa ve B^{-1} in her sütunu c_{00} da ise , ve ayrıca her $k = 1, 2, \dots,$ için $c_{00} \subseteq \Lambda_k$ ise bu durumda X aşikar bir küme değildir.

İspat :

$(\boldsymbol{a})$ Eğer $x \in c_{00}$ ise o zaman B_x B nin sütunlarının sonlu bir lineer kombinasyonudur; bu sütunların her biri c_{00} da olduğundan $B_x \in c_{00}$ dır.

Böylece B^2 nın her sütunu c_{00} da dır ; k üzerinde tümevarımla $B^k = B.B^{k-1}$ in her sütunu c_{00} dadır. Eğer $x \in c_{00}$ ise , o zaman $|x| \in c_{00}$ dır, böylece $B^k|x| \in c_{00} \subseteq \lambda$ dır. Böylece $k = 1, 2, \dots,$ için $c_{00} \subseteq \Lambda_k$.

$(\boldsymbol{b})$ (a) daki argümanla B^{-1} in sütunları sonlu olarak sıfırdan farklı ise o zaman $n = 1, 2, \dots,$ için $(B^{-1})^k$=B^{-k} nın sütunları da sonlu olarak sıfırdan farklıdır. Yine (a) da ki argümanla , B^{-k} sonlu girdilere sahiptir aslında her pozitif k tamsayısı için B^{-k} nın sütunları c_{00} dadır. B^{-k} nın sütunları c_{00} da olduğundan , her $x \in c_{00}$ için hipotezden $B^{-k} \in c_{00} \subseteq \Lambda_k$ dır.

Dolayısıyla her $x \in c_{00} \subseteq \lambda$ için $(x, B^{-1}x, B^{-2}x, \dots) \in X$.

Sonuç 5.2.12 :

$(\boldsymbol{a})$ $f(z)$ negatif olmayan reel katsayılı z ye bağlı bir polinom olmak üzere $B = T(f)$ olsun . O zaman Örnek 5.2. 10 daki gibi her λ ve Λ_k için $k = 1, 2, \dots,$ olmak üzere $c_{00} \subseteq \Lambda_k$ dır.

$(\boldsymbol{b})$ $p(z)$ reel katsayılı bir polinom olsun. Öyle ki bazı pozitif reel sayılar

$a_1, a_2, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_k$, için ve pozitif tam sayılar $n_1, \ldots, n_k$, için

$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{(a_j - z)^{n_j}}$ yazalım.

$B = T(f)$ ve $k = 1, 2, \ldots,$ için λ ve Λ_k ve X Örnek 5.2. 10 daki gibi olsun. Eğer her ve $k = 1, 2, \ldots,$ için $c_{00} \subseteq \Lambda_k$ ise o zaman X aşikar değildir.

İspat (a) açıkça B nin sütunları negatif değildir ve sonlu olarak 0 dan farklı dizilerdir.

İspat Önerme 5.2.11 (a) dan gelir.

(b) $B = T(f)$ Toeplitz matrisinin girdileri negatif değildir çünkü f nin kuvvet 0 civarındaki kuvvet serinin katsayıları negatif değildir. $B^{-1} = T(\frac{1}{f}) = T(p)$ dir. Ve $p(z)$ bir polinom olduğundan B^{-1} in bütün sütunları c_{00} dadır.

İspat Önerme 5.2.11 (b) den gelir.

Örnek 5.2.13 : $f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ olmak üzere

$T = T(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) = T(f)$ olsun.

Açıkça f fonksiyonu $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ açık birim diski üzerinde analitiktir ve böylece orda sıfırdan farklıdır. Bunu görmek için log fonksiyonu sağ yarı düzlemde

$w = |w|e^{iarg(w)}$ eşitliğini sağlayan $\arg(w) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere

$\log(w) = ln|w| + iarg(w)$ ile tanımlanan analitik fonksiyonu olmak üzere

$|z| < 1$ için

$$-\log(1-z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t} = \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} t^k dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

eşitliğinden $f(z) = -\frac{\log(1-z)}{z}$ olduğunu gözlemleyelim. $logw = 0$ sadece $Re(w) > 0$

ise $w = 1$ için sağlandığından buradan $|z| < 1$ böyle bütün z ler için $f(z) \neq 0$ elde edilir.

Dolayısıyla, eğer λ Örnek 5.2.10 daki gibi alınırsa $p \in (0\,,1]$ için hem T hem de $T^{-1} = T(\frac{1}{f})$ λ yı λ üzerine gönderir.

Böylece her $k > 0$ için $\Lambda_k = \lambda$ dır , ve Önerme 5.2.8 den izdüşüm limiti X hakkında çok

şey biliyoruz. Ama bazı $p \in (1\,,\infty]$ için $\lambda = \ell_p$ ise bazı sorular sorabiliriz. e_j kordinatta 1 diğer koordinatlarda 0 olan diziyi göstersin .

Eğer alt üçgensel tek yönlü sonsuz bir matris veya basitçe her satırı c_{00} da olan bir matris koordinat izdüşümleri sürekli olan dizilerin bir banach vektör örgüsüne gönderirse o zaman bu matrisle çarpma işlemi sınırlı lineer bir dönüşümdür. Bu sonuç kapalı grafik teoremiyle ispatlanabilir.

Bunu aklımızda tutarak T nin ℓ_p yi ℓ_p içerisine $(1 < p \leq \infty)$ göndermediğini gösterebilir.

$p = \infty$ için bunu göstermek kolaydır :

T bütün terimleri 1 olan diziyi sınırsız bir diziye gönderir .

$1 < p \leq \infty$ durumunda $n \to \infty$ için

$$\frac{\left\| T(\sum_{j=1}^{n} e_j \right\|_p}{\left\| \sum_{j=1}^{n} e_j \right\|_p} \longrightarrow \infty$$

böylece T ℓ_p yi kendi içine göndermez eğer gönderseydi bu matris çarpma işlemiyle tanımlanan ℓ_p üzerindeki lineer operatör sınırlı olacaktı ama bunun açıkça olmadığını yukarıda gördük. Önerme 5.2.4 ve Önerme 5.2.6 dan $1 < p \leq \infty$ için

$\Lambda_1 = sol - T^{-1}(\ell_p) \subsetneq \ell_p$ olduğunu görür. Bu durumda şöyle bir soru sorabiliriz :

$\ell_p = \Lambda_0 \supseteq \Lambda_1 \supseteq \Lambda_2 \ \dots ,$ azalan dizisi 0 a azalır mı ? Yani $\bigcap_{k \geq 0} \Lambda_k = \{\underline{0}\}$ mıdır ?

Bunun olmayacağını her k için $c_{00} \subseteq \Lambda_k$ olduğunu göstererek ispatlayacağız .

$k = 0\,,1$ için bu açıktır .

$k > 1$ için $c_{00} \subseteq \Lambda_k$ olduğuna göstermek için $T^k e_j \in \ell_p$, $(j = 1\,,2\,,\ldots)$ olduğunu göstermek yeterlidir. T^k Toeplitz matrisi olduğundan $T^k e_j$ $T^k e_1$ in bir kaydırmasıdır dolayısıyla $T^k e_1 \in \ell_p$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer bu herhangi bir $p < \infty$ için sağlanırsa o zaman $p = \infty$ için de sağlanır. Dolayısıyla $p < \infty$ olduğunu varsaymak yeterlidir.

$T^k e_1 \in \ell_p$ olduğunu $k \geq 1$ üzerinde tümevarımla göstereceğiz.

$$(T^k e_1)_n \leq \frac{2^{k-1}(1+\ln n)^{k-1}}{n+k-1}\,, n \geq 1 \text{ dır.}$$

Bu açıkça işimize yarar çünkü her $k \geq 1$ için

$\left(\frac{2^{k-1}(1+\ln n)^{k-1}}{n+k-1}\right)_{n\geq 1} \in \ell_p$ dir .

$$(Te_1)_n = \frac{1}{n} = \left(\frac{2^{k-1}(1+\ln n)^{k-1}}{n+1-1}\right)$$

olduğundan $k = 1$ için iddiamız doğrudur. Varsayalım $k > 1$ olsun.

$$(T^k e_1)_1 = 1 \leq \frac{2^{k-1}}{k}$$

olduğundan $n > 1$ olduğunu varsayabiliriz.

$n = 1\,,2\,,\ldots\,,$ için $(T^{k-1} e_1)_n = b_n$ olsun. Tümevarım hipotezi ile her $n \geq 1$ için

$$b_n \leq \frac{2^{k-2}(1+\ln n)^{k-2}}{n+k-2} \text{ dır .}$$

O zaman ,

$$(T^k e_1)_n = (TT^{k-1}e_1)_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} b_{n-j+1}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{2^{k-2}(1+\ln(n-j+1))^{k-2}}{n-j+k-1}$$

$$\leq \frac{2^{k-2}(1+\ln n)^{k-2}}{n+k-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{n-j+k-1}\right)$$

$$\leq \frac{2^{k-2}(1+\ln n)^{k-2}}{n+k-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{n-j-1}\right)$$

$$\leq \frac{2^{k-2}(1+\ln(n))^{k-2}}{n+k-1} 2(1+\ln n)$$

$$= \frac{2^{k-1}(1+\ln n)^{k-1}}{n+k-1}$$

elde edilir bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Abramovich Y. A. and Aliprantis C . D. (2002). An invitation to Operator Theory. American Mathematical Society Providence, Rhode Island .

Aliprantis C . D. and Burkinshaw O. (1985). Positive Operators. Academic Press, Inc. Orlando, Florida.

Cooke. G. (1950). Infinite matrices and sequence spaces. Macmillan and Co. Limited, London.

Leibowitz G.M. (1971). A note on Cesaro sequence spaces. Tamkang J. Math. 2,151– 157.

Hardy G. H. (1920). Note on a theorem of Hilbert, Math. Z. 6, 314–317.

Hardy G. H. and Littlewood J. E. and Pólya G. (1934). Inequalities. Cambridge.

Shiue J. S. (1970). On the Cesàro sequence spaces. Tamkang J. Math. 1 19-25.

Johnson JR. P. D. and Mohapatra R. N. (1979). Sectional convergence in spaces obtained as inverseimages of sequence spaces under matrix transformations. Math. Japon. (24) 2, 179–185.

Johnson Jr. P. D. and Mohapatra R. N. (1979). Density of finitely non-zero sequences in some sequence spaces. Math. Japon. 24.3, 253-262.

Johnson Jr. P. D. and Mohapatra R. N. (1980). Inequalities involving lower triangular matrices. Proc. London Math. Soc. (3) 41, 83-131.

Johnson JR. P. D. and Mohapatra R. N. (1985). The maximal normal subspace of the inverse imageof a normal space of sequences by a non-negative matrix transformation. Ann. Polon. Math. (2) 45, 105–120.

Johnson P.D. and Polat F. (2015). On spaces derivable from a solid sequence space and a non-negative lower triangular matrix. Oper Matrices; 9: 803-814.

Johnson P.D. and Polat F. (2016). Problems in matricially derived solid Banach sequence spaces. Turk. J. Math; 40: 1025-1037-814.

Köthe G. (1960). Topologische Lineare Răume. Springer-Verlag.

Leibowitz G. M. (1971). A note on the Cesàro sequence spaces. Tamkang J. Math. 2 151-157.

Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. (1971). Riesz Spaces. North-Holland, Amsterdam.

Maddox I. J. (1970). Elements of Functional Analysis. Cambridge.

Schaeffer H. H. (1966). Topological Vector Spaces. MacMillan.

Shille J.S. (1970). On the Cesàro sequence spaces. Tamkang J. Math. 1, 19-25.

Singer I. (1970). Bases in Banach Spaces I. Springer-Verlag.

Tréves F. (1967). Topological Vector Spaces. Distributions and Kernels. Academic Press, New York- London.

Zaanen AC. (1997). Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Maddox I. J. and Roles W. J. (1969). Absolute convexity in certain topological linear space. Proc. Camb. Phil. Soc. 66, 541-545.