T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATRİS DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUĞBA SIDDIKA KIRLI

DENİZLİ, ŞUBAT - 2021

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATRİS DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUĞBA SIDDIKA KIRLI

DENİZLİ, ŞUBAT - 2021

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

TUĞBA SIDDIKA KIRLI

ÖZET

MATRİS DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
TUĞBA SIDDIKA KIRLI
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ÖZLEM GİRGİN ATLIHAN)

DENİZLİ, ŞUBAT - 2021

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, $C[a,b]$ uzayında tanımlı lineer pozitif operatör dizileri için kuvvet serisi metodu yardımıyla Korovkin tipli yaklaşım teoremleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, D, $\mathbb{R}^2$ uzayının kompakt bir alt kümesi olmak üzere $C(D)$ uzayında tanımlı lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için Korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

Son bölümde ise çift değişkenli ve matris değerli lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için kuvvet serisi metodu ile Korovkin tipli yaklaşım teoremi verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatörler, kuvvet serisi metodu, çift diziler, Korovkin tipli yaklaşım teoremi, çift değişkenli ve matris değerli lineer pozitif operatörler

ABSTRACT

APPROXIMATION FOR MATRIX VALUED OPERATORS
MSC THESIS
TUĞBA SIDDIKA KIRLI
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR:DOÇ. DR. ÖZLEM GİRGİN ATLIHAN)

DENİZLİ, FEBRUARY 2021

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter we give some basic theorems and definitions. In the third chapter, we give, by power series method, Korovkin type approximation theorem for the sequences of linear positive operators defined on $C[a,b]$.

In the fourth chapter, using power series method we investigate Korovkin type approximation theorems for the double sequence of linear positive operators on $C(D)$ where D is a compact subset in $\mathbb{R}^2$.

In the last chapter, we investigate a Korovkin type approximation theorem for double sequence of bivariate and matrix valued linear positive operators via power series method.

KEYWORDS: Linear positive operators, power series method, the double sequence, Korovkin type approximation theorem, bivariate and matrix valued linear positive operators

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$B_n(f;x)$	:	Bernstein polinomu
$\lVert L \rVert_{X\to Y}$	:	L operatörünün normu
$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} x_k$	:	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$p(t) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$	:	(p_n) reel dizi olmak üzere kuvvet serisi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$C(D)$	:	D üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$B(D)$	:	D üzerinde reel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı
$S_n(f;x)$	:	Szasz operatörü
Ω	:	Reel terimli bütün çift dizilerin cümlesi
$\omega(f;\delta)$	:	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$[\![\lambda]\!]$	:	λ reel sayısının tam değeri
χ_B	:	B kümesinin karakteristik fonksiyonu
$R_{mn}(f;x,y)$	:	Çift değişkenli Meyer-König ve Zeller polinomu
$\mathbb{C}^{p\times r}$	:	$p\times r$ kompleks matrislerinin uzayı
$C(D,\mathbb{C}^{p\times r})$	:	D üzerinde tanımlı $\mathbb{C}^{p\times r}$ değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$\lVert F \rVert_{p\times r} := \max_{\substack{1\le j\le p \\ 1\le k\le r}} \lVert f_{jk} \rVert$	:	$C(D,\mathbb{C}^{p\times r})$ uzayı üzerindeki norm
$B_{mn}(F;x,y)$	:	Matris değerli çift değişkenli Bernstein tipi polinom
$\omega_{p\times r}(F;\delta)$	:	$F \in C(D,\mathbb{C}^{p\times r})$ fonksiyonunun matris süreklilik modülü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimime başladığım andan itibaren benden desteğini esirgemeyen, eğitimim boyunca yardım ve katkılarıyla her zaman bana yol gösteren, bu tez çalışmasında değerli zamanını bana ayırarak bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve kendisiyle çalışma fırsatını bana sunan çok kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN'a, yüksek lisans eğitimim boyunca kıymetli bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Pamukkale Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve tüm hayatım boyunca beni her zaman destekleyen ve yanımda olan sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

1890 yılında E. Cesàro, C_1 yakınsaklık kavramını vermiştir. Buna göre bir serinin kısmi toplamlar dizisi olan (S_n) dizisinin aritmetik ortalaması bir L değerine yakınsak ise (S_n) dizisi L değerine C_1 yakınsaktır veya serinin kendisi L değerine Cesàro toplanabilir denir. Böylece yakınsaklık kavramının genelleştirilmesi görüşü ortaya çıkmıştır. Çünkü $\sum_n (-1)^n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olan $(S_n) = \left(\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]\right)$ dizisi yakınsak olmadığı halde bunun aritmetik ortalaması $\frac{1}{2}$ değerine yakınsaktır. Buradan anlaşılabileceği gibi toplanabilme metodunun temel amacı yakınsak olmayan bir diziyi yakınsak yapmaktır.

Bu yüksek lisans tezinde, toplanabilme metodunun yaklaşım teorisindeki etkisi incelenmiştir.

Yaklaşım teorisinin ortaya çıkmasına Chebyshev, Weierstrass, Lebesque, Landau ve Vallee Poussin gibi matematikçiler öncülük etmişlerdir. 20. Yüzyılda bu teori ilk olarak Rusya'da geliştirilmiş olup, teorinin yükseliş dönemine önde gelen Rus/Sovyet matematikçiler P.L. Chebyshev, S.N. Bernstein ve A.N. Kolmogrov'un katkıları oldukça büyüktür.

20. yüzyılın başında Bernstein, bir fonksiyonun düzgünlüğü ile o fonksiyona cebirsel ve trigonometrik polinomlar ile yapılan yaklaşımın hızı arasındaki ilişki üzerine geniş bir araştırma programı geliştirmeye başlamıştır. Bu programda belirli özel metotlarla yaklaşımlar çalışılmıştır ve asıl vurgu, fonksiyon uzayları üzerinde fonksiyonların kendilerinden daha çok fonksiyonların ailesi üzerinedir.

1885 yılında Weierstrass, f kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir P polinomunun varlığını kanıtlamıştır. 1912 yılında Bernstein tarafından $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşan polinomların tipi hakkında bir teorem kanıtlanmıştır. $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklindeki polinomlar dizisi tanımlamış ve bu polinomlar dizisi için keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x \in [0,1]$ ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$$|B_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. 1950'lerin ortalarında Kolmogorov, teoriye yeni bir ivme kazandırmıştır. Optimal yaklaşım ve yaklaşım teorisi metotları, fonksiyonların kodlanması ve iyileştirilmesi ile ilgili problemler ortaya koyarak teorinin kapsamını önemli ölçüde genişletmiştir. Bu problemler aktif olarak 1990'lara kadar tartışılmıştır. P.P. Korovkin, 1953 yılında verilen lineer pozitif operatörlerin bir $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde her $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna düzgün yakınsayıp yakınsamadığına karar vermeyi sağlayan belki de en güçlü ve aynı zamanda en kolay yöntemi keşfetmiştir. 1957 yılında V.I. Volkov, lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremini vermiştir.

Şimdiye kadar pek çok matematikçi Korovkin Teoremini farklı fonksiyon uzaylarına genişletmişlerdir.

Klasik Korovkin Teoremi'ndeki lineer pozitif operatörler dizisinin birim operatöre yakınsamaması durumunda sırasıyla hemen hemen yakınsaklık, A-toplam süreci, istatistiksel yakınsaklık, kuvvet serisi metodu gibi farklı toplanabilme metotları ile yakınsaklık kaybı giderilmeye çalışılmıştır (Lorentz 1948, King ve Swetits 1970, Bell 1973, Mohapatra 1977, Swetits 1979, Nishishiraho 1983, Gadjiyev ve Orhan 2002, Duman ve diğ. 2003, Atlıhan ve Taş 2015, Özgüç ve Taş 2016, Yurdakadim 2016, Duman ve Erkuş Duman 2011).

Bu tezde, $C(D)$ uzayı üzerinde kuvvet serisi metodu ile geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir (Atlıhan ve Taş 2017). Ardından, yine aynı uzay için bu defa çift dizilerin kuvvet serisi metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin yaklaşım teoremleri incelenmiştir (Dirik ve Şahin 2018). Son olarak, orijinal bir çalışma olan $C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ uzayı üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için kuvvet serisi metodu yardımıyla Korovkin tipli yaklaşım teoremleri geliştirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca ihtiyaç duyacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1 Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1 Tanım X boştan farklı bir küme, F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$+: X \text{ x } X \to X$

$.: F \text{ x } X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine F cismi üzerinde bir "lineer uzay (vektör uzayı)" denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ için

L_1) $x + y = y + x$

L_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L_3) $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

L_4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L_5) $1.x = x$

L_6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L_7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

L_8) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ (Kreyszig 1978).

2.1.2 Tanım Vektör uzayları üzerinde tanımlı olan dönüşümlere "operatör" denir.

2.1.3 Tanım X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlı iki lineer uzay olmak üzere $L: X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer, $\forall x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ için

$$L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

şartlarını sağlıyorsa L ye "lineer operatör" denir (Maddox 1978).

2.1.4 Tanım X ve Y reel değerli fonksiyonların iki uzayı olmak üzere L, X uzayını Y uzayına dönüştüren lineer operatör olsun. X tanım uzayından alınan $\forall f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ koşulu sağlanıyor ise bu durumda L operatörüne "lineer pozitif operatör" denir.

Lineer pozitif operatörler aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani L lineer pozitif operatör olmak üzere

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

gerçeklenir.

ii) L lineer pozitif operatör olmak üzere

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

gerçeklenir.

2.1.5 Tanım X ve Y normlu uzaylar olmak üzere, $L: X \to Y$ bir lineer operatör olsun.

$$\|L(f)\|_Y \leq K.\|f\|_X$$

olacak şekilde $\exists K \geq 0$ reel sayısı varsa L ye sınırlı operatör denir.

2.1.6 Tanım X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere $L : X \to Y$, bir operatör olsun.

$$\|L\|_{X \to Y} = \sup \left\{ \frac{\|L(f)\|_Y}{\|f\|_X}, \ \|f\|_X \neq 0 \right\}$$

şeklinde tanımlı olan $\|L\|_{X \to Y}$ ifadesine L operatörünün normu denir.

2.2 Temel Toplanabilme Kavramları

2.2.1 Tanım $A := (\alpha_{nk})$, $k, n = 1, 2, 3, ...$ sonsuz bir matris ile bir $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli dizisi verilsin. x dizisinin, $Ax := ((Ax)_n)$ ile gösterilen "A- dönüşüm dizisi",

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} x_k$$

şeklinde tanımlanır. (Burada her bir n için seri yakınsak kabul edilir.)

Eğer,

$$\lim_n (Ax)_n = L$$

koşulu sağlanıyor ise x dizisi L değerine "A- toplanabilir" denir. Eğer her yakınsak (x_n) dizisi için $\lim_n x_n = L$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = L$ koşulu sağlanıyorsa A "regüler matris" adını alır (Hardy 1949, Wilansky 1984, Boos 2000).

Bir $A = (\alpha_{nk})$ matrisinin regüler olması durumu Silverman - Toeplitz Teoremi ile karakterize edilir.

2.2.2 Teorem Bir $A = (\alpha_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

$i)\ \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| < \infty$,

$ii)$ Her k için $\alpha_k = \lim_n \alpha_{nk} = 0$,

$iii)\ \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır (Hardy 1949, Wilansky 1984, Boos 2000).

2.2.3 Tanım Her $y \in (0,1)$ için $\sum_{k=0}^{\infty} x_k y^k$ serisi yakınsak olsun. Eğer,

$$\lim_{y \to 1^-} (1-y) \sum_{k=0}^{\infty} x_k y^k = L$$

şartı sağlanıyorsa $x = (x_k)$ dizisi L değerine "Abel Yakınsaktır" veya "Abel Toplanabilirdir" denir (Powel ve Shah 1972).

2.2.4 Tanım (p_n), $p_0 > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 0$ olan bir reel dizi olsun. Ayrıca

$$p(t) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$$

şeklinde tanımlı kuvvet serisi, $0 < R \leq \infty$ olmak üzere R yakınsaklık yarıçapına sahip olsun. $x = (x_n)$ reel sayı dizisi olmak üzere $\forall t \in (0, R)$ için

$$\lim_{t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n t^n = L$$

koşulu sağlanıyorsa (x_n) dizisi L değerine "Kuvvet Serisi Metodu Anlamında Yakınsaktır" denir (Kratz ve Stadtmüller 1989).

2.3 Korovkin Teoremi

D, $\mathbb{R}$'nin kompakt bir alt kümesi olmak üzere $C(D)$, D üzerinde tanımlı reel değerli olan tüm sürekli fonksiyonlar uzayını ve $B(D)$ ile D üzerinde tüm sınırlı fonksiyonların uzayını gösterelim. $C(D)$ ve $B(D)$ uzayları $\|f\| := \sup_{x\in D}|f(x)|$ normu ile birer Banach uzayıdır. Ayrıca bu norma göre yakınsaklık, düzgün yakınsaklıktır. Burada " $\rightrightarrows$ " simgesi ile düzgün yakınsaklığı göstereceğiz.

Bohman (1952), toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

H. Bohman, $x\in[0,1]$, $0 \le a_{k,n} \le 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x),\ P_{k,n}(x) \ge 0$$

lineer pozitif operatör dizisinin $n\to\infty$ için $[0,1]$ aralığı üzerinde $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ olması için gerek ve yeter koşul

$i)\ L_n(1;x) \rightrightarrows 1$

$ii)\ L_n(t;x) \rightrightarrows x$

$iii)\ L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

olduğunu göstermiştir. H. Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsızdır.

1953 yılında P.P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve Bohman'ın koşullarının genel halde de gerçeklendiğini göstermiştir.

2.3.1 Teorem (L_n), $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ lineer pozitif operatörler dizisi

$i)\ \lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_B = 0$

$ii)\ \lim_{n\to\infty}\left\|L_n(t;x)-x\right\|_B=0$

$iii)\ \lim_{n\to\infty}\left\|L_n(t^2;x)-x^2\right\|_B=0$

şartlarını sağlıyorsa her $f\in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f)-f\right\|_B=0,\ a\le x\le b$$

olur (Korovkin 1953).

İspat $f\in C[a,b]$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır öyle ki $|t-x|<\delta$ şartını sağlayan $\forall x,t\in[a,b]$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ olur. Şimdi $|t-x|\ge\delta$ için,

$$\frac{|t-x|}{\delta}\ge1\Rightarrow\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\ge1$$

elde edilir. f , $[a,b]$ aralığında sınırlı olduğundan

$$|f(t)-f(x)|\le|f(t)|+|f(x)|\le 2M.1\le 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. O halde $\forall x,t\in[a,b]$ için,

$$|f(t)-f(x)|\le\varepsilon+2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olur. Bu son eşitsizliğin her iki tarafına L_n lineer pozitif operatörü uygulanırsa,

$$L_n\left(|f(t)-f(x)|;x\right)\le L_n\left(\varepsilon+2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)$$

$$\le L_n(\varepsilon;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$=L_n(\varepsilon;x)\pm\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left\{L_n(t^2;x)-2xL_n(t;x)\right.$$

$$\left.+x^2L_n(1;x)\pm 2x^2\right\}$$

$$=\varepsilon+\varepsilon\left(L_n(1;x)-1\right)+\frac{2M}{\delta^2}\left\{L_n(t^2;x)-x^2\right.$$

$$\left.-2x\left(L_n(t;x)-x\right)+x^2\left(L_n(1;x)-1\right)\right\}$$

$$L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\le\varepsilon+\varepsilon\left|L_n(1;x)-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|L_n(t^2;x)-x^2\right|\right.$$

$$\left.-2|x|\left|L_n(t;x)-x\right|+\left|x^2\right|\left|L_n(1;x)-1\right|\right\} \tag{2.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|=\left|L_n(f(t);x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)-f(x)\right|$$

$$\le\left|L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)\right|+\left|L_n(f(x);x)-f(x)\right|$$

$$\le L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte (2.1) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|\le\varepsilon+\varepsilon\left|L_n(1;x)-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|L_n(t^2;x)-x^2\right|\right.$$

$$\left.-2|x|\left|L_n(t;x)-x\right|+\left|x^2\right|\left|L_n(1;x)-1\right|\right\}+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

elde edilir.

Bu son eşitsizliğin her iki tarafının $x\in[a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse, $B=\sup_{x\in[a,b]}\left\{\varepsilon,\frac{2M}{\delta^2}\sup_{x\in[a,b]}2|x|,\frac{2M}{\delta^2}\sup_{x\in[a,b]}\left|x^2\right|\right\}$ olmak üzere,

$$\left\|L_nf-f\right\|\le\varepsilon+B\left\{\left\|L_nf_2-f_2\right\|+\left\|L_nf_1-f_1\right\|+\left\|L_nf_0-f_0\right\|\right\}$$

elde edilir.

Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa ε keyfi olduğundan yeterince küçük seçilerek, hipotezler göz önüne alındığında

$$\lim_{n} \left\| L_n f - f \right\|_B = 0$$

bulunur.

2.3.2 Örnek $S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$ şeklinde tanımlı Szasz operatörünün teoremin şartlarını sağladığını gösterelim.

$x \in [0, A]$, $\left(A \in \mathbb{R}^+\right)$, $f \in C[0, A]$ olsun.

i) $S_n(1;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} e^{nx} = 1$

ii) $S_n(t;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} = x e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= x e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = x e^{-nx} e^{nx} = x$$

iii) $S_n(t^2;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{k-1}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} + \frac{1}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} \right\}$

$$= e^{-nx} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n^{k-2} x^k}{(k-2)!} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} \right\}$$

$$= e^{-nx} \left\{ x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \right\} = x^2 + \frac{x}{n}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n \to \infty} \left\| S_n(1;x) - 1 \right\| = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| S_n(t;x) - x \right\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\| S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|=0$$

koşulları sağlandığından $\forall f\in C\left[0,A\right]$ fonksiyonu için Korovkin Teoremi'nden

$$\lim_{n\to\infty}\left\| S_n\left(f;x\right)-f\right\|=0$$

elde edilir.

2.4 Çift Diziler ve Pringsheim Anlamında Yakınsaklık

Bu bölümde ilk olarak çift dizi kavramı tanıtılıp, daha sonra çift dizilerde sınırlılık ve yakınsaklık kavramları verilecektir. Ayrıca bu kavramlar ile ilgili bazı teoremler verilecektir.

2.4.1 Tanım $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & (m,n) & \to & f(m,n)=x_{mn} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna reel terimli çift dizi denir.

Herhangi bir $x=\left(x_{mn}\right)$ çift dizisi

$$x=\left(x_{mn}\right)=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Reel terimli bütün çift dizilerin cümlesi Ω ile gösterilip

$$\Omega=\left\{x=\left(x_{mn}\right):\forall m,n\in\mathbb{N}\text{ için } x_{mn}\in\mathbb{R}\right\}$$

şeklindedir. Bu küme $\forall x,y\in\Omega$ ve $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için

$$\alpha x+\beta y=\left(\alpha x_{mn}+\beta y_{mn}\right)$$

işlemi ile bir lineer uzaydır.

2.4.2 Tanım $x=\left(x_{mn}\right)$ reel terimli bir çift dizi olsun. Tüm $\left(m,n\right)\in\mathbb{N}^2$ için $\left|x_{mn}\right|<K$ olacak şekilde bir $K>0$ sayısı varsa x dizisine sınırlıdır denir (Pringsheim 1900).

2.4.3 Örnek Genel terimi

$$x_{mn}=\begin{cases}\dfrac{1}{2m}, & m=n\\ 0 & \text{, diğer durumlarda}\end{cases}$$

olan $x=\left(x_{mn}\right)$ çift dizisi verilsin. Bu durumda $\forall m,n\in\mathbb{N}$ için $\left|x_{mn}\right|\leq\frac{1}{2}$ olup $\left(x_{mn}\right)$ dizisi sınırlıdır.

2.4.4 Tanım Bir $x=\left(x_{mn}\right)$ reel terimli çift dizisi verilsin. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $\forall m,n>N\left(\varepsilon\right)$ olduğunda $\left|x_{mn}-l\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N\left(\varepsilon\right)>0$ sayısı varsa $x=\left(x_{mn}\right)$ dizisi l sayısına Pringsheim anlamında yakınsak, kısaca P - yakınsak, l değerine de $x=\left(x_{mn}\right)$ dizisinin Pringsheim limiti, kısaca P - limiti denir ve

$$P-\lim_{m,n\to\infty}x_{mn}=l$$

şeklinde gösterilir (Pringsheim 1900).

2.4.5 Örnek Genel terimi $x_{mn}=\dfrac{1}{m+n}$ olan $x=\left(x_{mn}\right)$ çift dizisi verilsin. Bu durumda

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{m+n}=0$$

olduğu görülebilir.

Biliyoruz ki, $\mathbb{R}$'de yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat P- yakınsak çift dizilerin sınırlı olması gerekmez. Örneğin genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} n\ , m = 1 \\ m,\ n = 1 \\ 0\ , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde $x = (x_{mn})$ çift dizisini alalım. (x_{mn}) çift dizisi

$$x = (x_{mn}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ m & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için $|x_{mn}| \le K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı bulunamadığından (x_{mn}) dizisi sınırlı değildir. Ayrıca $P - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ olduğu görülebilir.

2.4.6 Teorem Bir çift dizinin Pringsheim limiti tektir (Pringsheim 1900).

2.4.7 Teorem $x = (x_{mn}), y = (y_{mn}) \in \Omega$ olmak üzere $P - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = a$ ve $P - \lim\limits_{m,n\to\infty} y_{mn} = b$ olsun. O halde

$$P - \lim_{m,n\to\infty} (x_{mn} + y_{mn}) = \left(P - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}\right) + \left(P - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn}\right) = a + b$$

eşitliği gerçeklenir (Pringsheim 1900).

2.4.8 Teorem $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $P - \lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = a$ olsun. O halde

$$P - \lim_{m,n\to\infty} \lambda x_{mn} = \lambda a$$

eşitliği gerçeklenir (Pringsheim 1900).

2.4.9 Teorem $x=(x_{mn}), y=(y_{mn})\in\Omega$ olmak üzere $P-\lim_{m,n\to\infty} x_{mn}=a$ ve $P-\lim_{m,n\to\infty} y_{mn}=b$ olsun. O halde

$$P-\lim_{m,n\to\infty}(x_{mn}\cdot y_{mn})=\left(P-\lim_{m,n\to\infty} x_{mn}\right)\cdot\left(P-\lim_{m,n\to\infty} y_{mn}\right)=a\cdot b$$

eşitliği gerçeklenir (Pringsheim 1900).

2.4.10 Teorem $x=(x_{mn})\in\Omega$ ve $P-\lim_{m,n\to\infty} x_{mn}=a$, $a\neq 0$ olsun. Bu durumda

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{mn}}\right)=\frac{1}{P-\lim_{m,n\to\infty} x_{mn}}=\frac{1}{a}$$

eşitliği gerçeklenir (Pringsheim 1900).

2.4.11 Teorem $x=(x_{mn}), y=(y_{mn})\in\Omega$, $P-\lim_{m,n\to\infty} x_{mn}=a$, $P-\lim_{m,n\to\infty} y_{mn}=b$ ve $b\neq 0$ olsun. Bu durumda

$$P-\lim_{m,n\to\infty}\left(\frac{x_{mn}}{y_{mn}}\right)=\frac{a}{b}$$

eşitliği gerçeklenir (Pringsheim 1900).

2.4.12 Tanım Bir $x=(x_{mn})\in\Omega$ verilsin. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $\forall m,n,p,q>N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_{mn}-x_{pq}|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)>0$ sayısı varsa $x=(x_{mn})$ çift dizisine P - Cauchy dizisi denir (Pringsheim 1900).

2.4.13 Teorem Bir $(x_{mn})\in\Omega$ dizisinin P - yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir P - Cauchy dizisi olmasıdır (Pringsheim 1900).

2.4.14 Tanım $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & (m,n) & \to & f(m,n)=x_{mn} \end{array}$ çift dizisi verilsin.

$\begin{array}{rccc} i: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & m & \to & i(m)=i_m \end{array}$ ve $\begin{array}{rccc} j: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \to & j(n)=j_n \end{array}$ artan fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ & (m,n) & \to & h(m,n)=(i_m, j_n) \end{array}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc} f\circ h: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & (m,n) & \to & (f\circ h)(m,n)=x_{i_m j_n} \end{array}$$

fonksiyonuna (x_{mn}) dizisinin bir alt dizisi denir (Pringsheim 1900).

Örneğin; $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & (m,n) & \to & \dfrac{1}{m+n} \end{array}$ çift dizisini alalım. O halde $\begin{array}{rccc} i: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & m & \to & i(m)=2m \end{array}$ ve $\begin{array}{rccc} j: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \to & j(n)=2n \end{array}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ & (m,n) & \to & (2m,2n) \end{array}$$

olup

$$\begin{array}{rccc} f\circ h: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & (m,n) & \to & x_{2m2n}=\dfrac{1}{2m+2n} \end{array}$$

fonksiyonu $x_{mn}=\dfrac{1}{m+n}$ dizisinin alt dizisi olur.

2.4.15 Teorem Yakınsak bir çift dizinin her alt dizisi de aynı değere yakınsaktır (Pringsheim 1900).

2.4.16 Tanım Bir $x=(x_{mn})$ çift dizisi verilsin.

$i)$ $P-\liminf(x_{mn})=P-\underline{\lim}(x_{mn})=\sup\limits_{k\geq 1}\left\{\inf\limits_{m,n\geq k}(x_{mn})\right\}$ ifadesine (x_{mn}) çift dizisinin alt limiti,

$ii)$ $P-\limsup(x_{mn}) = P-\overline{\lim}(x_{mn}) = \inf\limits_{k\geq 1}\left\{\sup\limits_{m,n\geq k}(x_{mn})\right\}$ ifadesine (x_{mn}) çift dizisinin üst limiti denir. Başka bir deyişle bir dizinin alt dizilerinin limitlerinin en küçüğüne dizinin alt limiti, en büyüğüne de dizinin üst limiti denir (Pringsheim 1900).

2.4.17 Örnek Genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} -m & , n=1 \\ -n & , m=1 \\ (-1)^m & , m=n>1 \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olan çift dizisi verilsin. Bu durumda $P-\liminf(x_{mn}) = -1$ ve $P-\limsup(x_{mn}) = 1$ olduğu görülebilir.

2.5 Süreklilik Modülü

Yaklaşım teorisinde bir diğer önemli konu da $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ ise $|L_n(f;x)-f(x)|$ farkının yaklaşım hızını belirlemektir. $n\to\infty$ için $\alpha_n \to 0$ olmak üzere $|L_n(f;x)-f(x)| \leq c.\alpha_n$ şeklinde bir bağıntı elde edebiliyorsak, o taktirde $L_n(f;x)$ in $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım hızını α_n dizisi yardımı ile değerlendirebiliriz.

Yaklaşım oranı ise, $n\to\infty$ için $\alpha_n \to 0$ olmak üzere

$$|L_n(f;x)-f(x)| \leq c.\alpha_n$$

olacak şekilde (α_n) dizisi yardımıyla belirlenmesi problemidir.

Bu bölümde, yaklaşım teorisinde yakınsaklık oranı olarak adlandırılan bu hesaplamayı yapmak için kullanılan metotlardan en yaygını olan süreklilik modülünün tanımını ve özelliklerini vereceğiz.

2.5.1 Tanım $f \in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f;\delta)$ şeklinde gösterilir ve

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{|t-x|\le\delta \\ x,t\in[a,b]}} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Burada δ pozitif bir sayıdır (Altomare ve Campiti, 1994).

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$i)$ $\omega(f;\delta) \ge 0$

$ii)$ $\delta_1 \le \delta_2 \Rightarrow \omega(f;\ \delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$

$iii)$ $\omega(f+g;\delta) \le \omega(f;\delta) + \omega(g;\delta)$

$iv)$ $\omega(f;m\delta) \le m.\omega(f;\delta)$

$v)$ $[\![\lambda]\!]$, λ reel sayısının tam değerini göstermek üzere $\lambda > 0$ sayısı için,

$$\omega(f;\lambda\delta) \le (1+[\![\lambda]\!])\omega(f;\delta) \le (1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

$vi)$ $\omega(f;|t-x|) \ge |f(t) - f(x)|$

$vii)$ $|f(t) - f(x)| \le \left(\dfrac{t-x}{\delta} + 1\right)\omega(f;\delta)$

3. KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ İLE KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Bu bölümde, $C[a,b]$ uzayında tanımlı lineer pozitif operatör dizileri için kuvvet serisi metodu yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Ayrıca elde edilen yaklaşımın oranı incelenmiştir (Atlıhan ve Taş 2017).

$L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Öyle ki $\forall f \in C[a,b]$ için,

$$\sup_{0<t<R} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\| p_n t^n < \infty \tag{3.1}$$

koşulu sağlansın.

O halde $\forall f \in C[a,b]$ için

$$V_t(f(y);x) = \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f(y);x) p_n t^n$$

ile tanımlanan V_t operatörünü ele alırsak;

$$\begin{aligned}
\|V_t(f)\| = \sup_{x\in[a,b]} |V_t(f(y);x)| &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f(y);x) p_n t^n \right| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(|f(y)|;x) p_n t^n \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\|f\|;x) p_n t^n \\
&\le \|f\| \sup_{x\in[a,b]} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1;x) p_n t^n
\end{aligned}$$

$$\leq \|f\| \sup_{0<t<R} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\| p_n t^n$$

elde edilir.

Şimdi (3.1) göz önüne alınırsa,

$$\|V_t((.);x)\| \leq \sup_{0<t<R} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\| p_n t^n < \infty$$

eşitsizliğinden de görüldüğü gibi V_t operatörü, $\forall f \in C[a,b]$ için anlamlı olup $B[a,b]$ uzayına aittir. Dolayısıyla V_t operatörü, $C[a,b]$'den $B[a,b]$'ye iyi tanımlı bir operatör olup

$$\|V_t\|_{C[a,b]\to B[a,b]} = \|V_t(1)\|_{B[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1;x) p_n t^n \right|$$

şeklinde yazılabilir.

3.1 Teorem $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ lineer pozitif operatör dizisi olmak üzere (3.1) koşulunu sağlasın. Bu taktirde,

$i)$ $\forall f \in C[a,b]$ için,

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t(f) - f\| = 0$$

gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart

$ii)$ $f_i(t) = t^i, i = 0,1,2$ olmak üzere,

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t(f_i) - f_i\| = 0$$

gerçeklenmesidir. (Atlıhan ve Taş 2017)

İspat $f_i(t) = t^i, i = 0,1,2$ fonksiyonları $C[a,b]$'nin elemanı olduğundan hipotez nedeniyle $i) \Rightarrow ii)$ ispatı açıktır.

Şimdi $ii) \Rightarrow i)$ gerçeklendiğini gösterelim. $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ lineer pozitif operatör dizisi ve $f \in C[a,b]$ olsun.

O halde f, $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|y-x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, y \in [a,b]$ için $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir. Ayrıca f, $[a,b]$'de sınırlı olduğundan, $|y-x| > \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, y \in [a,b]$ için

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y)| + |f(x)| \leq 2M.1 \leq 2M \frac{(y-x)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. Burada $M := \|f\|$ şeklindedir.

Bu durumda $\forall x, y \in [a,b]$ için,

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \frac{(y-x)^2}{\delta^2} \tag{3.2}$$

elde edilir.

Öte yandan,

$$\begin{aligned}
|V_t(f(y);x) - f(x)| &= |V_t(f(y);x) - V_t(f(x);x) + V_t(f(x);x) - f(x)| \\
&= |V_t(f(y) - f(x);x) + f(x)V_t(f_0(y);x) - f(x)| \\
&= |V_t(f(y) - f(x);x) + f(x)(V_t(f_0(y);x) - f_0(x))| \\
&\leq V_t(|f(y) - f(x)|;x) + |f(x)||V_t(f_0(y);x) - f_0(x)| \\
&\leq V_t(|f(y) - f(x)|;x) + M|V_t(f_0(y);x) - f_0(x)|
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte (3.2) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|V_t\left(f(y);x\right)-f(x)\right|\le V_t\left(\varepsilon+2M\frac{(y-x)^2}{\delta^2};x\right)+M\left|V_t\left(f_0(y);x\right)-f_0(x)\right|$$

$$\le\varepsilon+\varepsilon\left|V_t\left(f_0(y);x\right)-f_0(x)\right|$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|V_t\left(f_2(y);x\right)-f_2(x)\right|\right.$$

$$+2|x|\left|V_t\left(f_1(y);x\right)-f_1(x)\right|$$

$$\left.+\left|x^2\right|\left|V_t\left(f_0(y);x\right)-f_0(x)\right|\right\}$$

$$+M\left|V_t\left(f_0(y);x\right)-f_0(x)\right|$$

elde edilir. $\forall t\in(0,R)$ için $\sigma=\sup\{|a|,|b|\}$ olmak üzere,

$$\left|V_t\left(f(y);x\right)-f(x)\right|\le\varepsilon+\left(\varepsilon+M+\frac{2M_f}{\delta^2}\sigma^2\right)\left|V_t\left(f_0(y);x\right)-f_0(x)\right|$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\sigma\left|V_t\left(f_1(y);x\right)-f_1(x)\right|$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\left|V_t\left(f_2(y);x\right)-f_2(x)\right|$$

elde edilir.

Şimdi, son eşitsizliğin her iki tarafının $x\in[a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse, $K=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left\{\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}\sigma^2,\frac{4M}{\delta^2}\sigma,\frac{2M}{\delta^2}\right\}$ olmak üzere,

$$\left\|V_t(f)-f\right\|\le\varepsilon+K\left\{\left\|V_t(f_2)-f_2\right\|\right.$$

$$\left.+\left\|V_t(f_1)-f_1\right\|+\left\|V_t(f_0)-f_0\right\|\right\}$$

elde edilir.

Burada her iki tarafın $t \to R^-$ için limiti alınırsa ε keyfi olduğundan yeterince küçük seçilirse $ii)$ hipotezi göz önüne alındığında

$$\lim_{t \to R^-} \left\| V_t(f) - f \right\| = 0$$

olarak bulunur.

Şimdi Teorem 3.1'in hipotezlerini sağlayan fakat Klasik Korovkin Teoremi'nin koşullarını sağlamayan bir lineer pozitif operatör dizisi örneği verelim. Böylece klasik yakınsaklığın gerçeklenmediği durumda, bu toplanabilme metodu yardımıyla yakınsaklık kaybının giderildiğini gözlemleyebiliriz.

3.2 Örnek $L_n : C[0,1] \to B[0,1]$ olmak üzere

$$L_n(f;x) = (1+\alpha_n) B_n(f;x)$$

ile tanımlanan, (L_n) lineer pozitif operatörlerin bir dizisini ele alalım. Burada (B_n), Bernstein polinomlarının dizisidir (Lorentz 1986). Ayrıca $(\alpha_n) = \left((-1)^n\right)$ olsun. Eğer $p_n = 1$, $R = 1$ ve $p(t) = \dfrac{1}{1-t}, t \in (-1,1)$ alınırsa, kuvvet serisi metodu Abel metoduna karşılık gelir. O halde, dikkat edilirse (α_n) dizisinin Abel anlamında 0 değerine yakınsak olduğu fakat klasik anlamda yakınsak olmadığı görülür. Dolayısıyla (L_n), Teorem 2.3.1'i sağlamaz fakat Teorem 3.1'i sağlar.

Şimdi Teorem 3.1'de kuvvet serisi metodu ile elde edilen yaklaşımın oranını inceleyeceğiz.

3.3 Teorem $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun öyle ki (3.1) koşulunu sağlasın.

Bu taktirde,

$i)$ $\lim_{t \to R^-} \left\| V_t(f_0) - f_0 \right\| = 0$,

$ii)\ \lim_{t\to R^-} \omega\left(f,\alpha(t)\right)=0$

koşulları sağlanıyorsa $\forall f \in C[a,b]$ için, $\alpha(t)=\sqrt{\left\|V_t\left((y-x)^2;x\right)\right\|}$ olmak üzere

$$\lim_{t\to R^-}\left\|V_t(f)-f\right\|=0$$

gerçeklenir (Atlıhan ve Taş 2017).

İspat Süreklilik modülünün özelliğinden dolayı $\forall x,y\in[a,b]$, $\delta>0$ ve $\forall t\in(0,R)$ için

$$\left|f(y)-f(x)\right|\le\left(1+\frac{(y-x)^2}{\delta^2}\right)\omega(f;\delta) \tag{3.3}$$

gerçeklenir. Öte yandan,

$$\left|V_t(f(y);x)-f(x)\right|=V_t\left(\left|f(y)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|V_t(f_0(y);x)-f_0(x)\right|$$

olur. Burada (3.3) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|V_t(f(y);x)-f(x)\right|\le V_t\left(\omega(f;\delta)+\frac{(y-x)^2}{\delta^2}\omega(f;\delta);x\right)+\left|f(x)\right|\left|V_t(f_0(y);x)-f_0(x)\right|$$

$$\le V_t\left(\omega(f;\delta);x\right)+\frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2}V_t\left((y-x)^2;x\right)$$

$$+\left|f(x)\right|\left|V_t(f_0(y);x)-f_0(x)\right|$$

$$\le\omega(f;\delta)V_t(f_0(y);x)+\frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2}V_t\left(\alpha^2(t);x\right)$$

$$+\left|f(x)\right|\left|V_t(f_0(y);x)-f_0(x)\right|$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $\forall t\in(0,R)$ için $\delta=\alpha(t)=\sqrt{\left\|V_t\left((y-x)^2;x\right)\right\|}$ alınır ve eşitsizliğin her iki tarafının $x\in[a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|V_t\left(f(y);x\right)-f(x)\right\| \le \omega\left(f;\alpha(t)\right)\left[\left\|V_t\left(f_0(y);x\right)\right\|+1\right]+M\left\|V_t\left(f_0\right)-f_0\right\|$$

elde edilir.

O halde, $\forall t\in(0,R)$ ve $\left\|V_t\left((.);x\right)\right\|_{C[a,b]\to B[a,b]} \le K$ için,

$$\left\|V_t\left(f(y);x\right)-f(x)\right\| \le [K+1]\omega\left(f;\alpha(t)\right)+M\left\|V_t\left(f_0(y);x\right)-f_0(x)\right\|$$

olur.

Bu taktirde, $\beta=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{K+1,M\}$ olmak üzere,

$$\left\|V_t(f)-f\right\| \le \beta\left[\omega\left(f;\alpha(t)\right)+\left\|V_t\left(f_0\right)-f_0\right\|\right]$$

elde edilir.

Bu son eşitsizlikte $t\to R^-$ için limit alınırsa, hipotezlerden dolayı $\forall f\in C[a,b]$ için,

$$\lim_{t\to R^-}\left\|V_t(f)-f\right\|=0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

4. KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ İLE LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN ÇİFT DİZİLERİ İÇİN KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Bu bölümde, $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt alt küme olmak üzere $C(D)$ uzayı üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için verilen kuvvet serisi yöntemi ile Korovkin tipli yaklaşım teoremlerini ve elde edilen bu yakınsaklıkların oranlarını inceleyeceğiz (Dirik ve Şahin 2018).

Öncelikle bu çalışmada kullanılan kavramları verelim.

(p_{mn}), negatif olmayan sayıların çift dizisi olsun. $a,b \in (0,R)$ ve $R \in (0,\infty]$ olmak üzere R yakınsaklık yarıçapına sahip kuvvet serisi

$$p(a,b) := \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} a^m b^n$$

şeklindedir.

4.1 Tanım $x = (x_{mn})$ çift reel sayı dizisi olsun. Eğer $\forall a,b \in (0,R)$ için

$$\lim_{a,b \to R^-} \frac{1}{p(a,b)} \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} a^m b^n x_{mn} = L$$

oluyorsa $x = (x_{mn})$, kuvvet serisi metodu anlamında L ye yakınsaktır denir (Baron ve Stadtmüller 1997).

Çift diziler için kuvvet serisi metodunun, $\forall u,v$ için

$$\lim_{a,b \to R^-} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} p_{mv} a^m}{p(a,b)} = 0 \text{ ve } \lim_{a,b \to R^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_{un} b^n}{p(a,b)} = 0 \tag{4.1}$$

gerçekleniyor ise regüler olduğu bilinmektedir (Baron ve Stadtmüller 1997). Bu çalışma boyunca operatörler bu (4.1) koşulunu sağlayacaktır.

Şimdi verdiğimiz tanımları kullanarak, kuvvet serisi yönteminin P -yakınsaklıktan daha güçlü olduğunu bir örnek ile gösterelim.

4.2 Örnek $|a|<1$, $|b|<1$ ve $\forall m,n\in\mathbb{N}$ için $p_{mn}=1$ olsun. Yani

$$
\begin{aligned}
p(a,b) &:= \sum_{m,n=0}^{\infty} a^m b^n \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \\
&= \frac{1}{1-b}\sum_{m=0}^{\infty} a^m \\
&= \frac{1}{1-b}\frac{1}{1-a}
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$x=(x_{mn}):=\begin{cases}0, & n \text{ tek ise}\\ 1, & \text{diğer hallerde}\end{cases}$$

olsun. O zaman,

$$
\begin{aligned}
\lim_{a,b\to1^-}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn}a^m b^n x_{mn} &= \lim_{a,b\to1^-}(1-b)(1-a)\sum_{m=0}^{\infty} a^m \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} \\
&= \lim_{a,b\to1^-}(1-b)(1-a)\frac{1}{1-b^2}\sum_{m=0}^{\infty} a^m \\
&= \lim_{a,b\to1^-}\frac{(1-b)(1-a)}{(1-b^2)(1-a)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

olur. Yani (x_{mn}) çift dizisi, kuvvet serisi metodu anlamında $\frac{1}{2}$ ye yakınsaktır, fakat Pringsheim anlamında yakınsak değildir.

4.3 Teorem (L_{mn}), $C(D)$ uzayı üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir çift dizisi olsun. Bu taktirde,

$i)$ $\forall f \in C(D)$ için,

$$P-\lim_{m,n}\left\| L_{mn}(f)-f \right\|=0$$

gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart

$ii)$ $e_{ij}(x,y)=x^i y^j$, $i,j=0,1,2$ olmak üzere

$$P-\lim_{m,n}\left\| L_{mn}(e_{00})-e_{00} \right\|=0$$

$$P-\lim_{m,n}\left\| L_{mn}(e_{10})-e_{10} \right\|=0$$

$$P-\lim_{m,n}\left\| L_{mn}(e_{01})-e_{01} \right\|=0$$

$$P-\lim_{m,n}\left\| L_{mn}(e_{20}+e_{02})-(e_{20}+e_{02}) \right\|=0$$

gerçeklenmesidir (Volkov 1957).

Şimdi, kuvvet serisi metodu kullanılarak verilen Korovkin tipi yaklaşım teoremini inceleyelim.

4.4 Teorem $L_{mn}:C(D)\to C(D)$ lineer pozitif operatörlerin bir çift dizisi olsun. Bu taktirde,

$i)$ $\forall f \in C(D)$ için,

$$\lim_{a,b\to R^-}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn}a^m b^n \left\| L_{mn}(f)-f \right\|=0$$

gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart

$ii)$ $e_{ij}(x,y)=x^i y^j$, $i,j=0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{a,b\to R^-}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn}a^m b^n \left\| L_{mn}(e_{00})-e_{00} \right\|=0$$

$$\lim_{a,b\to R^-}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|L_{mn}(e_{10})-e_{10}\right\|=0$$

$$\lim_{a,b\to R^-}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|L_{mn}(e_{01})-e_{01}\right\|=0$$

$$\lim_{a,b\to R^-}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|L_{mn}(e_{20}+e_{02})-(e_{20}+e_{02})\right\|=0$$

gerçeklenmesidir (Dirik ve Şahin 2018).

İspat $e_{ij}(x,y)=x^i y^j$ fonksiyonları $C(D)$ nin elemanı olduğundan hipotez nedeniyle $i)\Rightarrow ii)$ ispatı açıktır.

Şimdi $ii)\Rightarrow i)$ gerçeklendiğini gösterelim.

$L_{mn}:C(D)\to C(D)$ lineer pozitif operatörlerin bir çift dizisi, $f\in C(D)$ ve $(x,y)\in D$ alalım.

O halde, $\forall\varepsilon>0$ için $(x,y)\in D$ noktasında f sürekli olduğundan $\exists\delta>0$ vardır öyle ki $|u-x|<\delta$ ve $|t-y|<\delta$ şartını sağlayan $\forall(u,t)\in D$ için $|f(u,t)-f(x,y)|<\varepsilon$ gerçeklenir.

Ayrıca, $D_\delta=([x-\delta,x+\delta]\text{x}[y-\delta,y+\delta])\cap D$ ve B kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_B olmak üzere

$$|f(u,t)-f(x,y)|=|f(u,t)-f(x,y)|\chi_{D_\delta}(u,t)+|f(u,t)-f(x,y)|\chi_{D|D_\delta}(u,t)$$

olur. Böylece, $T:=\|f\|$ ve $\Omega(u,t)=(u-x)^2+(t-y)^2$ olmak üzere $\forall(x,y)\in D$ için

$$|f(u,t)-f(x,y)|<\varepsilon+\frac{2T}{\delta^2}\Omega(u,t) \tag{4.2}$$

olur. Öte yandan, L_{mn} monoton ve lineer olduğundan,

$$\left|L_{mn}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|L_{mn}(f;x,y)-f(x,y)L_{mn}(e_{00};x,y)+f(x,y)L_{mn}(e_{00};x,y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|L_{mn}\left(f(u,t)-f(x,y);x,y\right)+f(x,y)L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|$$

$$\leq L_{mn}\left(\left|f(u,t)-f(x,y)\right|;x,y\right)+\left|f(x,y)\right|\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|$$

olur. Son eşitsizlikte (4.2) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|L_{mn}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq L_{mn}\left(\varepsilon+\frac{2T}{\delta^2}\Omega(u,t);x,y\right)+\left|f(x,y)\right|\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|$$

$$\leq \varepsilon+(\varepsilon+T)\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|+\frac{2T}{\delta^2}L_{mn}\left(\Omega(u,t);x,y\right) \quad (4.3)$$

elde edilir.

Şimdi (4.3) eşitsizliğindeki $L_{mn}\left(\Omega(u,t);x,y\right)$ ifadesini inceleyelim:

$$L_{mn}\left(\Omega(u,t);x,y\right)=L_{mn}\left((u-x)^2+(t-y)^2;x,y\right)$$

$$=L_{mn}(e_{20}+e_{02};x,y)-2e_{10}(x,y)L_{mn}(e_{10};x,y)$$

$$+2e_{01}(x,y)L_{mn}(e_{01};x,y)+(e_{20}+e_{02})(x,y)L_{mn}(e_{00};x,y)$$

$$\leq\left|L_{mn}(e_{20}+e_{02};x,y)-(e_{20}+e_{02})(x,y)\right|$$

$$+2\left|e_{10}(x,y)\right|\left|L_{mn}(e_{10};x,y)-e_{10}(x,y)\right|$$

$$+2\left|e_{01}(x,y)\right|\left|L_{mn}(e_{01};x,y)-e_{01}(x,y)\right|$$

$$+\left|(e_{20}+e_{02})(x,y)\right|\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|$$

elde edilir.

Şimdi $L_{mn}\left(\Omega(u,t);x,y\right)$ ifadesi (4.3) eşitsizliğinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\left|L_{mn}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le\varepsilon+\left(\varepsilon+T+\frac{2T\|e_{20}+e_{02}\|}{\delta^2}\right)\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|$$

$$+\frac{4T\|e_{10}\|}{\delta^2}\left|L_{mn}(e_{10};x,y)-e_{10}(x,y)\right|$$

$$+\frac{4T\|e_{01}\|}{\delta^2}\left|L_{mn}(e_{01};x,y)-e_{01}(x,y)\right|$$

$$+\frac{2T}{\delta^2}\left|L_{mn}(e_{20}+e_{02};x,y)-(e_{20}+e_{02})(x,y)\right|$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $(x,y)\in D$ için supremumu alınıp norma geçilirse, $K=\varepsilon+T+\frac{2T}{\delta^2}\left(\|e_{20}+e_{02}\|+2\|e_{10}\|+2\|e_{01}\|+1\right)$ olmak üzere

$$\|L_{mn}(f)-f\|\le\varepsilon+K\left\{\|L_{mn}(e_{00})-e_{00}\|+\|L_{mn}(e_{10})-e_{10}\|\right.$$

$$\left.+\|L_{mn}(e_{01})-e_{01}\|+\|L_{mn}(e_{20}+e_{02})-(e_{20}+e_{02})\|\right\}$$

elde edilir.

Burada, eşitsizliğin her iki tarafının $a,b\to R^{-}$ için limiti alınır ve ε keyfi olduğundan yeterince küçük seçilirse $ii)$ hipotezi göz önüne alındığında

$$\lim_{a,b\to R^{-}}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\|L_{mn}(f)-f\|=0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi Teorem 4.4'ün hipotezlerini sağlayan fakat Teorem 4.3'ün koşullarını sağlamayan bir örnek verelim:

4.5 Örnek $D=[0,1]\text{x}[0,1]$ olmak üzere $C(D)$ üzerinde

$$R_{mn}(f;x,y)=(1-x)^{m+1}(1-y)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{m+k},\frac{t}{n+t}\right)\binom{m+k}{k}\binom{n+t}{t}x^k y^t$$

şeklindeki çift Meyer-König ve Zeller polinomunu ele alalım. Bu polinomu kullanarak $C(D)$ üzerinde lineer pozitif operatörleri tanımlayalım:

$$s=(s_{mn})=\begin{cases}0, & m=0,1 \; ve \; n=0,1\\ 1, & \text{diğer hallerde}\end{cases}$$

olmak üzere $\forall(x,y)\in D$ ve $f\in C(D)$ için,

$$T_{mn}(f;x,y)=(1+s_{mn})R_{mn}(f;x,y) \tag{4.4}$$

lineer pozitif operatörlerin bir çift dizisini ele alalım. Buradan,

$$T_{mn}(e_{00};x,y)=(1+s_{mn})e_{00}(x,y),$$

$$T_{mn}(e_{10};x,y)=(1+s_{mn})e_{10}(x,y),$$

$$T_{mn}(e_{01};x,y)=(1+s_{mn})e_{01}(x,y),$$

$$T_{mn}(e_{20}+e_{02};x,y)=(1+s_{mn})\left((e_{20}+e_{02})(x,y)+\xi(x)+\xi(y)\right)$$

olduğunu görebiliriz. Burada

$$\xi(t):=t(1-t)^{k+1}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{k+s-1}{s}\frac{t^k}{k+s-1}\leq\frac{t(1-t)}{k+1},\ \forall t\in[0,1]$$

şeklindedir.

Şimdi (p_{mn}) yi tanımlayalım.

$$p_{mn}=\begin{cases}1, & \text{m=0,1 ve n=0,1}\\ 0, & \text{diğer hallerde}\end{cases}$$

olsun. Buradan

$$p(a,b)=\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^mb^n=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_{mn}a^mb^n\right)=1+a+b+ab$$

ve

$$\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n s_{mn}=\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{1+a+b+ab}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n s_{mn}\right)=0$$

elde edilir. O halde,

$$T_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)=s_{mn}e_{00}(x,y),$$

$$T_{mn}(e_{10};x,y)-e_{10}(x,y)=s_{mn}e_{10}(x,y),$$

$$T_{mn}(e_{01};x,y)-e_{01}(x,y)=s_{mn}e_{01}(x,y)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n s_{mn}=0$$

olduğundan

$$\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|T_{mn}(e_{00})-e_{00}\right\|=0,$$

$$\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|T_{mn}(e_{10})-e_{10}\right\|=0,$$

$$\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|T_{mn}(e_{01})-e_{01}\right\|=0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&T_{mn}(e_{20}+e_{02};x,y)-(e_{20}+e_{02})(x,y)\\
&\leq(1+s_{mn})\left((e_{20}+e_{02})(x,y)+\frac{x(1-x)}{m+1}+\frac{y(1-y)}{n+1}\right)-(e_{20}+e_{02})(x,y)\\
&=\frac{x(1-x)}{m+1}+\frac{y(1-y)}{n+1}+s_{mn}\left(x^2+y^2+\frac{x(1-x)}{m+1}+\frac{y(1-y)}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan, burada maksimuma geçilirse

$$\left\|T_{mn}\left(e_{20}+e_{02};x,y\right)-\left(e_{20}+e_{02}\right)(x,y)\right\| \le \frac{1}{4(m+1)}+\frac{1}{4(n+1)}+s_{mn}\left(2+\frac{1}{4(m+1)}+\frac{1}{4(n+1)}\right)$$

$$\le \frac{1}{4(m+1)}+\frac{1}{4(n+1)}+\frac{5}{2}s_{mn}$$

elde edilir. Dikkat edilirse, $m,n\to\infty$ için limit alınırsa $\left(\frac{1}{4(m+1)}+\frac{1}{4(n+1)}\right)$, 0 noktasına P-yakınsaktır, aynı zamanda kuvvet serisi metodu anlamında 0 noktasına yakınsar.

Diğer yandan,

$$\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\frac{5}{2}s_{mn}=\lim_{a,b\to\infty}\frac{5}{2p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n s_{mn}=0$$

olup,

$$\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|T_{mn}\left(e_{20}+e_{02}\right)-\left(e_{20}+e_{02}\right)\right\|=0$$

elde edilir. Böylece $\left(T_{mn}\right)$ operatörü Teorem 4.4'ün tüm koşullarını sağladığından

$$\lim_{a,b\to\infty}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|T_{mn}(f)-f\right\|=0$$

olur. Ancak $\left(s_{mn}\right)$, 0 noktasına P-yakınsak olmadığından Teorem 4.3'ün T_{mn} operatörü için çalışmadığını söyleyebiliriz.

Şimdi Teorem 4.4'de elde edilen yaklaşımın, süreklilik modülü yardımıyla oranının hesaplanmasını inceleyelim.

$f\in C(D)$ fonksiyonu için süreklilik modülü

$$\omega_2(f;\delta)=\sup\left\{\left|f(u,t)-f(x,y)\right|:\ (u,t),(x,y)\in D,\ \sqrt{(u-x)^2+(t-y)^2}<\delta\right\}\quad(\delta>0)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.6 Teorem $L_{mn}:C(D)\to C(D)$ lineer pozitif operatörlerin bir çift dizisi olsun. Bu taktirde,

i) $\lim\limits_{a,b\to R^-}\dfrac{1}{p(a,b)}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|L_{mn}(e_{00})-e_{00}\right\|=0$

ii) $\delta_{mn}:=\sqrt{\left\|L_{mn}(\psi)\right\|}$ ve $\psi(u,t)=(u-x)^2+(t-y)^2$ olmak üzere

$$\lim_{a,b\to R^-}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\omega_2(f;\delta_{mn})=0$$

koşulları sağlanıyorsa $\forall f\in C(D)$ için,

$$\lim_{a,b\to R^-}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|L_{mn}(f)-f\right\|=0$$

olur (Dirik ve Şahin 2018).

İspat Süreklilik modülünün özelliğinden dolayı $(x,y)\in D$ ve $f\in C(D)$ için $\psi(u,t)=(u-x)^2+(t-y)^2$ olmak üzere

$$\left|f(u,t)-f(x,y)\right|\le\left(1+\frac{\psi(u,t)}{\delta^2}\right)\omega_2(f,\delta) \tag{4.5}$$

gerçeklenir. Öte yandan,

$$\left|L_{mn}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le L_{mn}\left(\left|f(u,t)-f(x,y)\right|;x,y\right)+\left|f(x,y)\right|\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|$$

olur. Burada (4.5) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|L_{mn}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le L_{mn}\left(\left(1+\frac{\psi(u,t)}{\delta^2}\right)\omega_2(f,\delta);x,y\right)$$

$$+\left|f(x,y)\right|\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|$$

$$\leq \omega_2(f,\delta)\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|+\omega_2(f,\delta)$$

$$+T\left|L_{mn}(e_{00};x,y)-e_{00}(x,y)\right|+\frac{\omega_2(f,\delta)}{\delta^2}L_{mn}\left(\psi(u,t);x,y\right)$$

olur. Burada $T:=\|f\|$ şeklindedir.

Bu son eşitsizlikte $\delta:=\delta_{mn}:=\sqrt{\left\|L_{mn}(\psi)\right\|}$ alınır ve eşitsizliğin her iki tarafının $(x,y)\in D$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|L_{mn}(f)-f\right\|\leq \omega_2(f,\delta)\left\|L_{mn}(e_{00})-e_{00}\right\|$$

$$+2\omega_2(f,\delta)+T\left\|L_{mn}(e_{00})-e_{00}\right\|$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $a,b\to R^{-}$ için limit alınırsa, hipotezlerden dolayı $\forall f\in C(D)$ için,

$$\lim_{a,b\to R^{-}}\frac{1}{p(a,b)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}a^m b^n\left\|L_{mn}(f)-f\right\|=0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5. KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ İLE İKİ DEĞİŞKENLİ MATRİS DEĞERLİ FONKSİYONLAR İÇİN KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Yaklaşım teorisinde toplanabilme metotlarının etkisi çoğunlukla skaler değerli fonksiyon uzayları için araştırılmıştır. Serra-Capizzano, 1999 yılında matris değerli fonksiyon uzayları için Korovkin tipli yaklaşım teoremini vermiştir.

Bu fonksiyon uzayları için farklı toplanabilme metotları ile yaklaşım teoremleri verilmiştir (Duman ve Erkuş Duman 2011, Dirik ve Demirci 2015).

Bu bölümde, kuvvet serisi metodu kullanılarak $C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ uzayında tanımlı lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için Korovkin tipli yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen yakınsaklığın matris süreklilik modülü yardımıyla oranı incelenmiştir.

Bu bölüm orijinal bir çalışma içermektedir.

Öncelikle bu bölümde ihtiyaç duyacağımız bazı kavramları verelim.

p ve r sabit iki doğal sayı olmak üzere $\mathbb{C}^{p\times r}$, $p\times r$ kompleks matrislerinin uzayını göstersin.

D, $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir alt kümesi olmak üzere $C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ uzayı ile D üzerinde tanımlı $\mathbb{C}^{p\times r}$ değerli sürekli fonksiyonların uzayını gösterelim. Yani,

$$C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)=\left\{F \mid F:D\rightarrow\mathbb{C}^{p\times r},\ \text{sürekli}\right\}$$

şeklindedir.

$$F(x,y):=\left[f_{jk}(x,y)\right]_{p\times r},\ \left((x,y)\in D,\ 1\le j\le p,\ 1\le k\le r\right) \tag{5.1}$$

şeklindedir. Burada F in sürekliliğinden tüm skaler değerli f_{jk} fonksiyonlarının D üzerinde sürekli olduğu anlaşılacaktır.

$C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ uzayı üzerindeki norm,

$$\|F\|_{p\times r} := \max_{1\le j\le p,\ 1\le k\le r} \left\| f_{jk} \right\| := \max_{1\le j\le p,\ 1\le k\le r} \left(\sup_{(x,y)\in D} \left| f_{jk}(x,y) \right| \right) \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu bölüm boyunca kullanacağımız test fonksiyonları aşağıda verilmiştir:

E_{jk}, $\mathbb{C}^{p\times r}$ uzayının (j,k) konumunda 1 ve diğer durumlarda 0 olan kanonik baz matrisini belirtmek üzere, $\forall (u,v)\in D$, $1\le j\le p$, $1\le k\le r$ için test fonksiyonları

$$E_{0jk}(u,v) = E_{jk}$$

$$E_{1jk}(u,v) = uE_{jk}$$

$$E_{2jk}(u,v) = vE_{jk}$$

$$E_{3jk}(u,v) = \left(u^2+v^2\right)E_{jk} \tag{5.3}$$

şeklinde tanımlansın.

5.1 Tanım $\Phi : C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right) \to C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ bir operatör olsun.

(i) $F,G\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ ve $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ için

$$\Phi(\alpha F+\beta G) = \alpha\Phi(F)+\beta\Phi(G),$$

(ii) Pozitif bir K sabiti ve $\forall F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ için

$$\left|\Phi(F)\right| \le K\Phi\left(|F|\right)$$

koşulları gerçekleniyor ise Φ operatörüne, matris değerli lineer pozitif operatör denir ve kısaca mLPO ile gösterilir (Serra-Capizzano 1999).

(ii)'deki eşitsizlik bileşensel olarak anlaşılmalıdır. Yani herhangi bir $(j,k)\in\{1,2,...,p\}\times\{1,2,...,r\}$ bileşeni için gerçeklenir.

$\Phi_{mn}:C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)\to C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ matris değerli lineer pozitif operatörlerin bir çift dizisi olsun öyle ki $\forall F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ için,

$$\sup_{\substack{0<t<R\\0<l<R}}\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\left\|\Phi_{mn}(E)\right\|p_{mn}t^m l^n<\infty \tag{5.4}$$

koşulu sağlansın. Burada E, tüm girdileri 1 olan $p\times r$ matrisidir. O halde $\forall F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ için

$$V_{tl}\left(F(u,v);x,y\right)=\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}\left(F(u,v);x,y\right)p_{mn}t^m l^n$$

ile tanımlanan V_{tl} operatörünü ele alırsak;

$$\begin{aligned}
\left\|V_{tl}\left(F(u,v);x,y\right)\right\|_{p\times r}&=\max_{1\le j\le p,1\le k\le r}\left(\sup_{(x,y)\in D}\left|\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}\left(F(u,v);x,y\right)p_{mn}t^m l^n\right|\right)\\
&\le\max_{1\le j\le p,1\le k\le r}\left(\sup_{(x,y)\in D}\frac{K}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}\left(\left|F(u,v)\right|;x,y\right)p_{mn}t^m l^n\right)\\
&\le\max_{1\le j\le p,1\le k\le r}\left(\sup_{(x,y)\in D}\frac{K}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}\left(\|F\|;x,y\right)p_{mn}t^m l^n\right)\\
&\le\|F\|K\max_{1\le j\le p,1\le k\le r}\left(\sup_{\substack{0<t<R\\0<l<R}}\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\left\|\Phi_{mn}(E)\right\|p_{mn}t^m l^n\right)
\end{aligned}$$

olur. O halde, (5.4) koşulu nedeniyle V_{tl} operatörü iyi tanımlı bir operatördür. Ayrıca V_{tl}, matris değerli lineer pozitif operatördür.

Şimdi, kuvvet serisi metodunu uygulayarak $C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ üzerinde tanımlı matris değerli lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremini verelim:

5.2 Teorem $\Phi_{mn}:C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)\to C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ matris değerli lineer pozitif operatörlerin bir çift dizisi olmak üzere (5.4) gerçeklensin. Bu taktirde,

$i)$ $\forall F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ için

$$\lim_{t,l\to R^-}\left\|V_{tl}\left(F\right)-F\right\|_{p\times r}=0$$

gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart

$ii)$ $\forall\left(j,k\right)\in\{1,2,...,p\}\times\{1,2,...,r\}$ ve $\forall i=0,1,2,3$ için

$$\lim_{t,l\to R^-}\left\|V_{tl}\left(E_{ijk}\right)-E_{ijk}\right\|_{p\times r}=0$$

gerçeklenmesidir.

İspat (5.3) de verilen E_{ijk} $\left(i=0,1,2,3\right)$ fonksiyonları $C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ nin elemanı olduğundan hipotez nedeniyle $i)\Rightarrow ii)$ olduğu açıktır.

Şimdi $ii)\Rightarrow i)$ gerçeklendiğini gösterelim.

$F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ alalım. $\left(x,y\right)\in D$ olsun ve $|B|$ matrisi, B matrisinin girdilerinin mutlak değerine eşit girdilere sahip matrisi belirtsin.

$F\left(x,y\right):=\left[f_{jk}\left(x,y\right)\right]_{p\times r}$, $1\le j\le p,\ 1\le k\le r$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F\left(x,y\right):=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}f_{jk}\left(x,y\right)E_{jk}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}f_{jk}\left(x,y\right)E_{0jk}\left(u,v\right) \tag{5.5}$$

O halde,

$$\Phi_{mn}\left(F(x,y);x,y\right)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} f_{jk}(x,y)\Phi_{mn}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right) \tag{5.6}$$

olur.

Diğer yandan, her f_{jk}, D üzerinde sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır öyle ki $\forall(u,v)\in D$ için $\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}\le\delta$ koşulunu sağlamak üzere $1\le j\le p,\ 1\le k\le r$ için

$$\left|f_{jk}(u,v)-f_{jk}(x,y)\right|\le\varepsilon \tag{5.7}$$

gerçeklenir.

Ayrıca, $\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}>\delta$ alınırsa $\forall(x,y),(u,v)\in D$ için $M_{jk}:=\sup\limits_{(x,y)\in D}\left|f_{jk}(x,y)\right|$ ve $\varphi(u,v)=(u-x)^2+(v-y)^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left|f_{jk}(u,v)-f_{jk}(x,y)\right| &\le \left|f_{jk}(u,v)\right|+\left|f_{jk}(x,y)\right|\\ &< 2M_{jk}.1\\ &< \frac{2M_{jk}}{\delta^2}\varphi(u,v)\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\left|f_{jk}(u,v)-f_{jk}(x,y)\right|<\frac{2M_{jk}}{\delta^2}\varphi(u,v),\ (j,k)\in\{1,2,...,p\}\times\{1,2,...,r\} \tag{5.8}$$

olur. (5.7) ve (5.8) eşitsizliklerini ele alırsak $\forall(u,v)\in D$ için $(j,k)\in\{1,2,...,p\}\times\{1,2,...,r\}$ olmak üzere

$$\left|f_{jk}(u,v)-f_{jk}(x,y)\right|\le\varepsilon+\frac{2M_{jk}}{\delta^2}\varphi(u,v) \tag{5.9}$$

olup (5.9) eşitsizliğinden

$$\left|F(u,v)-F(x,y)\right|\leq \varepsilon E+\frac{2M}{\delta^2}\varphi(u,v)E \tag{5.10}$$

elde edilir. Burada E, tüm girdileri 1 olan $p\times r$ matrisidir. Ve $M:=\max\limits_{\substack{1\leq j\leq p\\ 1\leq k\leq r}} M_{jk}=\left\|F\right\|_{p\times r}$ şeklinde olmak üzere (5.6) ve (5.10)'u kullanarak pozitif bir K sabiti için

$$\begin{aligned}
&\left|V_{tl}\left(F(u,v);x,y\right)-F(x,y)\right|\\
&=\left|V_{tl}\left(F(u,v);x,y\right)-V_{tl}\left(F(x,y);x,y\right)+V_{tl}\left(F(x,y);x,y\right)-F(x,y)\right|\\
&=\left|V_{tl}\left(\left(F(u,v)-F(x,y)\right);x,y\right)+V_{tl}\left(F(x,y);x,y\right)-F(x,y)\right|\\
&\leq KV_{tl}\left(\left|F(u,v)-F(x,y)\right|;x,y\right)+\left|V_{tl}\left(F(x,y);x,y\right)-F(x,y)\right|\\
&\leq KV_{tl}\left(\varepsilon E+\frac{2M}{\delta^2}\varphi(u,v)E;x,y\right)+\left|V_{tl}\left(F(x,y);x,y\right)-F(x,y)\right|\\
&\leq \varepsilon EK\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)+\frac{2KM}{\delta^2}V_{tl}\left(\varphi(u,v)E;x,y\right)\\
&\quad+\left|F(x,y)\right|\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)-E_{0jk}(x,y)\right|\\
&\leq(\varepsilon K+M)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left(V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)-E_{0jk}(x,y)\right)\\
&\quad+\varepsilon EK+\frac{2KM}{\delta^2}V_{tl}\left(\varphi(u,v)E;x,y\right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. Şimdi (5.11) eşitsizliğindeki $V_{tl}\left(\varphi(u,v)E;x,y\right)$ ifadesini inceleyelim:

$$\begin{aligned}
V_{tl}\left(\varphi(u,v)E;x,y\right)&=V_{tl}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\varphi(u,v)E_{jk};x,y\right)\\
&=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\Big\{V_{tl}\left(E_{3jk};x,y\right)-2xV_{tl}\left(E_{1jk};x,y\right)\\
&\quad-2yV_{tl}\left(E_{2jk};x,y\right)+\left(x^2+y^2\right)V_{tl}\left(E_{0jk};x,y\right)\Big\}
\end{aligned}$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left(V_{tl}\left(E_{3jk};x,y\right)-E_{3jk}\left(x,y\right)\right)$$

$$-2x\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left(V_{tl}\left(E_{1jk};x,y\right)-E_{1jk}\left(x,y\right)\right)$$

$$-2y\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left(V_{tl}\left(E_{2jk};x,y\right)-E_{2jk}\left(x,y\right)\right)$$

$$+\left(x^2+y^2\right)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left(V_{tl}\left(E_{0jk};x,y\right)-E_{0jk}\left(x,y\right)\right)$$

elde edilir. Ayrıca, $c=\max|x|$ ve $d=\max|y|$ olmak üzere

$$V_{tl}\left(\varphi(u,v)E;x,y\right)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{3jk};x,y\right)-E_{3jk}\left(x,y\right)\right|$$

$$+2c\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{1jk};x,y\right)-E_{1jk}\left(x,y\right)\right|$$

$$+2d\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{2jk};x,y\right)-E_{2jk}\left(x,y\right)\right|$$

$$+\left(c^2+d^2\right)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk};x,y\right)-E_{0jk}\left(x,y\right)\right| \qquad (5.12)$$

elde edilir. Öte yandan (5.11) ile (5.12) birleştirildiğinde

$$\left|V_{tl}\left(F(u,v);x,y\right)-F\left(x,y\right)\right|$$

$$\leq\left(\varepsilon K+M\right)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)-E_{0jk}\left(x,y\right)\right|$$

$$+\varepsilon KE+\frac{4cKM}{\delta^2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{1jk}(u,v);x,y\right)-E_{1jk}\left(x,y\right)\right|$$

$$+\frac{4dKM}{\delta^2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{2jk}(u,v);x,y\right)-E_{2jk}\left(x,y\right)\right|$$

$$+\frac{2KM}{\delta^2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{3jk}(u,v);x,y\right)-E_{3jk}\left(x,y\right)\right|$$

$$+\frac{2\left(c^2+d^2\right)KM}{\delta^2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}\left(u,v\right);x,y\right)-E_{0jk}\left(x,y\right)\right|$$

olur.

Burada $C:=\max\left\{\varepsilon K+M+\frac{2\left(c^2+d^2\right)KM}{\delta^2},\frac{4cKM}{\delta^2},\frac{4dKM}{\delta^2},\frac{2KM}{\delta^2}\right\}$ olmak üzere, eşitsizliğin her iki tarafı için ilgili matrislerin tüm girdilerinin maksimumu ve $\left(x,y\right)\in D$ üzerinde supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|V_{tl}\left(F\right)-F\right\|_{p\times r}\leq\varepsilon K+C\left\{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=0}^{3}\left\|V_{tl}\left(E_{ijk}\right)-E_{ijk}\right\|_{p\times r}\right\}$$

elde edilir. Burada limit alınırsa, ε keyfi bir sayı olduğundan yeterince küçük seçildiğinde $ii)$ hipotezi nedeniyle

$$\lim_{t,l\to R^-}\left\|V_{tl}\left(F\right)-F\right\|_{p\times r}=0$$

elde edilir.

Şimdi Teorem 5.2'nin hipotezlerini sağlayan fakat klasik yakınsaklık için olan durumu sağlamayan matris değerli lineer pozitif operatörler için bir örnek verelim.

5.3 Örnek a,b,c,d sabit reel sayılar ve $D=\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$ olsun. İlk önce aşağıdaki şekilde verilen matris değerli Bernstein tipi polinomları ele alalım.

$$B_{mn}\left(F;x,y\right)=\sum_{s=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}F\left(a+\frac{s}{m}\left(b-a\right),c+\frac{q}{n}\left(d-c\right)\right)\binom{m}{s}\binom{n}{q}$$

$$\times\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q},\qquad(5.13)$$

burada $\left(x,y\right)\in D$, $F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ $\ni$ $F\left(x,y\right):=\left[f_{jk}\left(x,y\right)\right]_{p\times r}$, $1\leq j\leq p,1\leq k\leq r$ şeklindedir.

Ayrıca, B_{mn} polinomlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$B_{mn}(F;x,y)=\sum_{s=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} f_{jk}\left(a+\frac{s}{m}(b-a),c+\frac{q}{n}(d-c)\right)\binom{m}{s}\binom{n}{q}$$

$$\times\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}E_{jk} \qquad (5.14)$$

Burada E_{jk} kanonik baz matrisidir.

Böylece (5.13) ve (5.14) eşitliklerine göre, $\forall(j,k)=\{1,2,...,p\}\times\{1,2,...,r\}$ için,

$$B_{mn}(E_{0jk};x,y)=\sum_{s=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\binom{m}{s}\binom{n}{q}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}$$

$$\times E_{0jk}\left(a+\frac{s}{m}(b-a),c+\frac{q}{n}(d-c)\right)$$

$$=E_{jk}\sum_{s=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\binom{m}{s}\binom{n}{q}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}$$

$$=E_{jk}\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}$$

$$=E_{0jk}(x,y)$$

alabiliriz.

Benzer şekilde, $\forall(j,k)=\{1,2,...,p\}\times\{1,2,...,r\}$ için

$$B_{mn}(E_{1jk};x,y)=\sum_{s=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\binom{m}{s}\binom{n}{q}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}$$

$$\times E_{1jk}\left(a+\frac{s}{m}(b-a),c+\frac{q}{n}(d-c)\right)$$

$$=E_{jk}\sum_{s=0}^{m}\left(a+\frac{s}{m}(b-a)\right)\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}$$

$$=E_{jk}\left[\sum_{s=0}^{m}a\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}+\sum_{s=0}^{m}\frac{s}{m}(b-a)\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\right]$$

$$=E_{jk}\left[a\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}+(b-a)\sum_{s=0}^{m}\frac{s}{m}\frac{m!}{s!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\right]$$

$$=E_{jk}\left[a+(b-a)\sum_{s=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\right]$$

$$=E_{jk}\left[a+(b-a)\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(m-1)!}{s!(m-1-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-1-s}\right]$$

$$=E_{jk}\left[a+(b-a)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\sum_{s=0}^{m-1}\binom{m-1}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-1-s}\right]$$

$$=E_{jk}\left[a+(b-a)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]=xE_{jk}=E_{1jk}(x,y)$$

olur ve benzer şekilde,

$$B_{mn}\left(E_{2jk};x,y\right)=yE_{jk}=E_{2jk}(x,y)$$

olur.

Son olarak, $\forall(j,k)=\{1,2,...,p\}\times\{1,2,...,r\}$ için

$$B_{mn}\left(E_{3jk};x,y\right)=\sum_{s=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\binom{m}{s}\binom{n}{q}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}$$

$$\times E_{3jk}\left(a+\frac{s}{m}(b-a),c+\frac{q}{n}(d-c)\right)$$

$$=E_{jk}\left(\sum_{s=0}^{m}\left(a+\frac{s}{m}(b-a)\right)^{2}\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\right.$$

$$\left.+\sum_{q=0}^{n}\left(c+\frac{q}{n}(d-c)\right)^{2}\binom{n}{q}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^{q}\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}\right)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$A=\sum_{s=0}^{m}\left(a+\frac{s}{m}(b-a)\right)^2\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s},$$

$$B=\sum_{q=0}^{n}\left(c+\frac{q}{n}(d-c)\right)^2\binom{n}{q}\left(\frac{y-c}{d-c}\right)^q\left(\frac{d-y}{d-c}\right)^{n-q}$$

olmak üzere ilk olarak A ifadesini inceleyelim:

$$A=a^2\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}+\sum_{s=0}^{m}\left(2a\frac{s}{m}(b-a)\right)\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}$$

$$+\sum_{s=0}^{m}\frac{s^2}{m^2}(b-a)^2\binom{m}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}$$

$$=a^2+2a(b-a)\sum_{s=0}^{m}\frac{s}{m}\frac{m!}{s!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}$$

$$+(b-a)^2\sum_{s=0}^{m}\frac{s^2}{m^2}\frac{m!}{s!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}$$

$$=a^2+2a(b-a)\sum_{s=1}^{m}\frac{s}{m}\frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}$$

$$+(b-a)^2\sum_{s=1}^{m}\frac{s}{m}\frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}$$

$$=a^2+2a(b-a)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(m-1)!}{s!(m-1-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-1-s}$$

$$+(b-a)^2\left[\sum_{s=1}^{m}\frac{s-1}{m}\frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{m}\frac{(m-1)!}{(s-1)!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\right]$$

$$=a^2+2a(x-a)+(b-a)^2\left[\frac{m-1}{m}\sum_{s=2}^{m}\frac{(m-2)!}{(s-2)!(m-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-s}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(m-1)!}{s!(m-1-s)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-1-s}\right]$$

$$=a^2+2a(x-a)+(b-a)^2\left[\frac{m-1}{m}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\sum_{s=0}^{m-2}\binom{m-2}{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{m-2-s}+\frac{1}{m}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]$$

$$=a^2+2a(x-a)+(b-a)^2\left[\frac{m-1}{m}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2+\frac{1}{m}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]$$

olur ve böylece

$$A=x^2-\frac{1}{m}(x-a)^2+\frac{(b-a)(x-a)}{m}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$B=y^2-\frac{1}{n}(y-c)^2+\frac{(d-c)(y-c)}{n}$$

olur. Böylece,

$$B_{mn}(E_{3jk};x,y)=\left\{x^2-\frac{1}{m}(x-a)^2+\frac{(b-a)(x-a)}{m}+y^2-\frac{1}{n}(y-c)^2+\frac{(d-c)(y-c)}{n}\right\}$$

$$=\left(\frac{(b-a)(x-a)}{m}-\frac{1}{m}(x-a)^2-\frac{1}{n}(y-c)^2+\frac{(d-c)(y-c)}{n}\right)E_{jk}+E_{3jk}(x,y)$$

olarak bulunur.

Şimdi $p_{mn}=1$, bu durumda $R=1$ $(|t|<1,|l|<1)$ ve

$$p(t,l)=\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}t^m l^n=\frac{1}{(1-t)(1-l)}$$

olsun. Ayrıca,

$$\left(u_{mn}\right)=\begin{cases}0, & m \text{ ve } n \text{ tamkare iken}\\ 1, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olsun.

Şimdi $\left(u_{mn}\right)$ dizisi ile (5.13) eşitliğindeki $\left(B_{mn}\right)$ polinomlarını kullanarak matris değerli lineer pozitif operatörleri aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Phi_{mn}\left(F;x,y\right)=u_{mn}B_{mn}\left(F;x,y\right) \tag{5.15}$$

Burada $m,n\in\mathbb{N}$, $\left(x,y\right)\in\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ ve $F\left(x,y\right)=\left[f_{jk}\left(x,y\right)\right]_{p\times r}$, $1\leq j\leq p, 1\leq k\leq r$ olmak üzere $F\in C\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right],\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ dir.

O halde $\forall\left(j,k\right)\in\left\{1,2,...,p\right\}\times\left\{1,2,...,r\right\}$ olmak üzere

$$\Phi_{mn}\left(E_{0jk};x,y\right)=u_{mn}E_{0jk}\left(x,y\right),$$

$$\Phi_{mn}\left(E_{1jk};x,y\right)=u_{mn}E_{1jk}\left(x,y\right),$$

$$\Phi_{mn}\left(E_{2jk};x,y\right)=u_{mn}E_{2jk}\left(x,y\right),$$

$$\Phi_{mn}\left(E_{3jk};x,y\right)=u_{mn}\left[\left(\frac{(b-a)(x-a)}{m}-\frac{1}{m}\left(x-a\right)^2-\frac{1}{n}\left(y-c\right)^2+\frac{(d-c)(y-c)}{n}\right)E_{jk}+E_{3jk}\left(x,y\right)\right]$$

olduğu görülür.

Şimdi $\left(u_{mn}\right)$ dizisini ele alalım:

$$\lim_{t,l\to1^-}\frac{1}{p\left(t,l\right)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}t^m l^n u_{mn}=1$$

olduğundan $\left(u_{mn}\right)$ çift dizisi kuvvet serisi metodu anlamında 1 noktasına yakınsaktır.

O halde,

$$\lim_{t,l\to 1^-}\left\|\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}\left(E_{0jk};x,y\right)p_{mn}t^m l^n - E_{0jk}\left(x,y\right)\right\|_{p\times r}$$

$$=\lim_{t,l\to 1^-}\left\|\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}t^m l^n u_{mn}E_{0jk}\left(x,y\right)-E_{0jk}\left(x,y\right)\right\|_{p\times r}$$

$$=\lim_{t,l\to 1^-}\left[\max_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le r}}\left(\sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]}\left(\left|E_{0jk}\left(x,y\right)\right|\left|(1-t)(1-l)\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}t^m l^n u_{mn}-1\right|\right)\right)\right]=0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{t,l\to 1^-}\left\|\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}\left(E_{1jk};x,y\right)p_{mn}t^m l^n - E_{1jk}\left(x,y\right)\right\|_{p\times r}$$

$$=\lim_{t,l\to 1^-}\left\|(1-t)(1-l)\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}t^m l^n u_{mn}E_{1jk}\left(x,y\right)-E_{1jk}\left(x,y\right)\right\|_{p\times r}=0$$

ve

$$\lim_{t,l\to 1^-}\left\|\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}t^m l^n\Phi_{mn}\left(E_{2jk};x,y\right)-E_{2jk}\left(x,y\right)\right\|_{p\times r}$$

$$=\lim_{t,l\to 1^-}\left\|(1-t)(1-l)\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{mn}t^m l^n u_{mn}E_{2jk}\left(x,y\right)-E_{2jk}\left(x,y\right)\right\|_{p\times r}=0$$

olur.

Son olarak,

$$\Phi_{mn}\left(E_{3jk};x,y\right)=u_{mn}\left[\left(\frac{(b-a)(x-a)}{m}-\frac{1}{m}(x-a)^2-\frac{1}{n}(y-c)^2+\frac{(d-c)(y-c)}{n}\right)E_{jk}+E_{3jk}\left(x,y\right)\right]$$

eşitliğinden

$$\lim_{t,l\to 1^-}\left\|\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}\left(E_{3jk};x,y\right)p_{mn}t^m l^n - E_{3jk}\left(x,y\right)\right\|_{p\times r}$$

$$= \lim_{t,l\to 1^-} \left\| (1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} \left[\left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} + \frac{y}{n} \right) E_{jk} + E_{3jk}(x,y) \right] - E_{3jk}(x,y) \right\|_{p\times r}$$

$$= \lim_{t,l\to 1^-} \left\| (1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} \left[\left(\frac{x(1-x)}{m} + \frac{y(1-y)}{n} \right) E_{jk} + E_{3jk}(x,y) \right] - E_{3jk}(x,y) \right\|_{p\times r}$$

$$= \lim_{t,l\to 1^-} \left[\max_{\substack{1\le j\le p \\ 1\le k\le r}} \left(\sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} \left(\left| E_{3jk}(x,y) \right| \left| (1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} - 1 \right| \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left| E_{jk}(x,y) \right| \left| (1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} \left(\frac{x(1-x)}{m} + \frac{y(1-y)}{n} \right) \right| \right) \right) \right]$$

elde edilir. Burada

$$A = \lim_{t,l\to 1^-} \left[\max_{\substack{1\le j\le p \\ 1\le k\le r}} \left(\sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} \left(\left| E_{3jk}(x,y) \right| \left| (1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} - 1 \right| \right) \right) \right]$$

$$B = \lim_{t,l\to 1^-} \left[\max_{\substack{1\le j\le p \\ 1\le k\le r}} \left(\sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} \left(\left| E_{jk}(x,y) \right| \left| (1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} \left(\frac{x(1-x)}{m} + \frac{y(1-y)}{n} \right) \right| \right) \right) \right]$$

olmak üzere A ve B ifadelerini inceleyelim:

$$A = \lim_{t,l\to 1^-} \left[\max_{\substack{1\le j\le p \\ 1\le k\le r}} \left(\sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} \left(\left| E_{3jk}(x,y) \right| \left| (1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} - 1 \right| \right) \right) \right] = 0$$

olduğu kolayca görülür.

Şimdi B ifadesini inceleyelim. Burada maksimuma geçilirse,

$$(1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} \left(\frac{x(1-x)}{m} + \frac{y(1-y)}{n} \right)$$

$$\le (1-t)(1-l) \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn} t^m l^n u_{mn} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$$

$$=(1-t)(1-l)\sum_{m,n=0}^{\infty} t^m l^n \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$$

$$=(1-t)(1-l)\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m}\right)l^n+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{l^n}{n}\right)t^m\right]$$

$$=\frac{-1}{4}\left[(1-t)\ln(1-t)+(1-l)\ln(1-l)\right]$$

elde edilir ve

$$\lim_{t,l\to 1^-}\left[(1-t)\ln(1-t)+(1-l)\ln(1-l)\right]=0$$

olduğundan

$$B=\lim_{t,l\to 1^-}\left[\max_{\substack{1\le j\le p\\ 1\le k\le r}}\left(\sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]}\left(\left|E_{jk}(x,y)\right|\left|(1-t)(1-l)\sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn}t^m l^n u_{mn}\left(\frac{x(1-x)}{m}+\frac{y(1-y)}{n}\right)\right|\right)\right)\right]=0$$

olur. Böylece

$$\lim_{t,l\to 1^-}\left\|\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}\left(E_{3jk};x,y\right)p_{mn}t^m l^n-E_{3jk}(x,y)\right\|_{p\times r}=0$$

elde edilir.

O halde, Teorem 5.2'nin hipotezleri gerçeklendiğinden dolayı $\forall F\in C\left([0,1]\times[0,1],\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ için

$$\lim_{t,l\to 1^-}\left\|\frac{1}{p(t,l)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\Phi_{mn}(F;x,y)\,p_{mn}t^m l^n-F(x,y)\right\|_{p\times r}=0$$

olur.

Dikkat edilirse (u_{mn}), 1 noktasına kuvvet serisi metodu anlamında yakınsaktır. Fakat (u_{mn}) dizisi, 1 noktasına P-yakınsak olmadığından $\left\{\Phi_{mn}(F)\right\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ dizisi P-yakınsaklık için olan Korovkin teoreminin koşullarını sağlamaz.

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla Teorem 5.2'de verilen yaklaşımın oranını hesaplayalım. Bunun için öncelikle $C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ uzayında kullanacağımız matris süreklilik modülünü verelim.

$F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ ve $\delta>0$ için,

$$\omega\left(f_{jk};\delta\right)=\sup\left\{\left|f_{jk}\left(u,v\right)-f_{jk}\left(x,y\right)\right|:\left(x,y\right),\left(u,v\right)\in D,\sqrt{\left(u-x\right)^{2}+\left(v-y\right)^{2}}\leq\delta\right\}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere F in matris süreklilik modülü

$$\omega_{p\times r}\left(F;\delta\right)=\max_{1\leq j\leq p,1\leq k\leq r}\omega\left(f_{jk};\delta\right)$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu durumda, $F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ fonksiyonu için

$$\lim_{\delta\to0^{+}}\omega_{p\times r}\left(F;\delta\right)=0$$

olduğu görülür.

Ayrıca her bir $\lambda,\delta>0$ için

$$\omega_{p\times r}\left(F;\lambda\delta\right)\leq\left(1+[\![\lambda]\!]\right)\omega_{p\times r}\left(F;\delta\right)$$

şeklindedir.

5.4 Teorem $\Phi_{mn}:C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)\to C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ matris değerli lineer pozitif operatörlerin bir çift dizisi olsun. Öyle ki (5.4) koşulunu sağlasın. Bu taktirde,

$i)$ $\lim\limits_{t,l\to R^{-}}\left\|V_{tl}\left(E_{0jk}\right)-E_{0jk}\right\|_{p\times r}=0$,

$ii)$ $\lim\limits_{t,l\to R^{-}}\omega_{p\times r}\left(F;\delta_{tl}\right)=0$

koşulları sağlanıyorsa $\forall F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ için,

$$\lim_{t,l\to R^-}\left\|V_{tl}\left(F\right)-F\right\|_{p\times r}=0$$

olur. Burada

$$\delta_{tl}=\sqrt{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left\|V_{tl}\left(\psi_{jk}\right)\right\|_{p\times r}} \text{ ve } \psi_{jk}\left(u,v\right)=\xi\left(u,v\right)E_{jk}\,,\ \left(\xi\left(u,v\right)=\left(u-x\right)^2+\left(v-y\right)^2\right)$$

şeklindedir.

İspat $(x,y)\in D$ ve $F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ olduğunu kabul edelim. E tüm girdileri 1 olan bir $p\times r$ matrisi olmak üzere

$$\begin{aligned}\left|F\left(u,v\right)-F\left(x,y\right)\right| &\le \omega_{p\times r}\left(F;\left|\left(u,v\right)-\left(x,y\right)\right|\right)E\\ &\le \left(1+\frac{\left(u-x\right)^2+\left(v-y\right)^2}{\delta^2}\right)\omega_{p\times r}\left(F;\delta\right)E \qquad (5.16)\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, Teorem 5.2'nin ispatında olduğu gibi $M:=\left\|F\right\|_{p\times r}$ olmak üzere

$$\left|V_{tl}\left(F\left(x,y\right);x,y\right)-F\left(x,y\right)\right|\le M\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}\left(u,v\right);x,y\right)-E_{0jk}\left(x,y\right)\right| \qquad (5.17)$$

olur.

Φ_{mn} matris değerli lineer pozitif operatör olduğundan dolayı, pozitif bir K sabiti vardır öyle ki

$$\begin{aligned}\left|V_{tl}\left(F\left(u,v\right);x,y\right)-F\left(x,y\right)\right| &\le KV_{tl}\left(\left|F\left(u,v\right)-F\left(x,y\right)\right|;x,y\right)\\ &+\left|V_{tl}\left(F\left(x,y\right);x,y\right)-F\left(x,y\right)\right|\end{aligned}$$

olur. Burada (5.16) ve (5.17) ifadeleri kullanılırsa,

$$\left|V_{tl}\left(F\left(u,v\right);x,y\right)-F\left(x,y\right)\right|\le KV_{tl}\left(\left\{1+\frac{\left(u-x\right)^2+\left(v-y\right)^2}{\delta^2}\right\}\omega_{p\times r}\left(F;\delta\right)E;x,y\right)$$

$$+M\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)-E_{0jk}(x,y)\right|$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|V_{tl}\left(F(u,v);x,y\right)-F(x,y)\right|\leq K\omega_{p\times r}(F;\delta)V_{tl}(E;x,y)$$

$$+\frac{K}{\delta^{2}}\omega_{p\times r}(F;\delta)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}V_{tl}\left(\psi_{jk}(u,v);x,y\right)$$

$$+M\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)-E_{0jk}(x,y)\right|$$

$$=K\omega_{p\times r}(F;\delta)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)$$

$$+\frac{K}{\delta^{2}}\omega_{p\times r}(F;\delta)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}V_{tl}\left(\psi_{jk}(u,v);x,y\right)$$

$$+M\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)-E_{0jk}(x,y)\right|$$

$$\pm K\omega_{p\times r}(F;\delta)E$$

olur. Böylece,

$$\left|V_{tl}\left(F(u,v);x,y\right)-F(x,y)\right|\leq K\omega_{p\times r}(F;\delta)E$$

$$+K\omega_{p\times r}(F;\delta)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)-E_{0jk}(x,y)\right|$$

$$+M\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left|V_{tl}\left(E_{0jk}(u,v);x,y\right)-E_{0jk}(x,y)\right|$$

$$+\frac{K}{\delta^{2}}\omega_{p\times r}(F;\delta)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}V_{tl}\left(\psi_{jk}(u,v);x,y\right)$$

elde edilir.

Bu son eşitsizlikte $\delta := \delta_{tl} := \sqrt{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left\|V_{tl}\left(\psi_{jk}\right)\right\|_{p\times r}}$ alınır ve eşitsizliğin her iki tarafının $\left(x,y\right)\in D$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|V_{tl}\left(F\right)-F\right\|_{p\times r} \leq 2K\omega_{p\times r}\left(F;\delta_{tl}\right)$$

$$+K\omega_{p\times r}\left(F;\delta_{tl}\right)\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left\|V_{tl}\left(E_{0jk}\right)-E_{0jk}\right\|_{p\times r}$$

$$+M\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\left\|V_{tl}\left(E_{0jk}\right)-E_{0jk}\right\|_{p\times r}$$

olur.

Bu son eşitsizlikte $t,l\rightarrow R^{-}$ için limit alınırsa hipotezlerden dolayı $\forall F\in C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ için,

$$\lim_{t,l\rightarrow R^{-}}\left\|V_{tl}\left(F\right)-F\right\|_{p\times r}=0$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada matris değerli operatör için kuvvet serisi metodunun yaklaşım teorisinde kullanımı amaçlanmıştır. Bunun için öncelikle, klasik Korovkin teoremi ve toplanabilme metotlarından biri olan kuvvet serisi metodu hatırlatılmıştır. İlk olarak kuvvet serisi metodu yardımıyla $C[a,b]$ uzayında tanımlı lineer pozitif operatörler dizisi için Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiş ve sonrasında yakınsaklık oranı süreklilik modülü ile incelenmiştir. Daha sonra $C(D)$ uzayında tanımlı lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için kuvvet serisi metodu yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiş ve elde edilen yaklaşımın yakınsaklık oranı süreklilik modülü ile incelenmiştir. Son olarak ise amacımız doğrultusunda, kuvvet serisi metodu yardımıyla iki değişkenli $C\left(D,\mathbb{C}^{p\times r}\right)$ uzayında tanımlı matris değerli lineer pozitif operatörlerin çift dizileri için Korovkin tipi yaklaşım teoremi geliştirilmiştir. Ayrıca elde edilen yaklaşımın oranı matris süreklilik modülü ile hesaplanmıştır. Ayrıca verilen örnek ile P-yakınsaklığı sağlamayan operatörler için ispatladığımız teoremimizin etkili bir kullanımı olacağı gösterilmiştir.

Sonuç olarak, toplanabilme metotları ile yakınsaklık kaybının giderilmesi amacı ile verilen teoremler literatür için ilgi çekicidir. Bu çalışma konusu ile ilgilenen okuyuculara farklı fonksiyon uzaylarında toplanabilme metotlarından faydalanarak verilebilecek yaklaşım teoremleri öneri niteliğinde olacaktır.

7. KAYNAKLAR

Altomare, F. and Campiti, M., *Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications*, 17, Berlin: Walter de Gruyter Publishers, (1994).

Atlıhan, Ö. G. and Taş, E., "Korovkin type approximation theorems via power series method", *Sao Paolo J.Math. Sci.*, 13, 696-707, (2017).

Atlıhan, Ö. G. and Taş, E., "An abstract version of the Korovkin theorem via A-summation process", *Acta Math. Hungar.*, 145 (2),360-368, (2015).

Baron, S. and Stadtmüller, U., "Tauberian theorems for power series methods applied to double sequences", *J. Math. Anal. Appl.*, 211 (2), 574-589, (1997).

Bell, H., "Order summability and almost convergence", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38, 548-552, (1973).

Bohman, H., "On approximation of continuous and of analytic functions", *Ark. Mat.*, 2, 43-56, (1952).

Boos, J., *Classical and Modern Methods in Summability*, London: Oxford Science Publishers, (2000).

Dirik, F. and Demirci, K., "Statistical Korovkin-Type Theory For Matrix-Valued Functions Of Two Variables", *Applied Mathematics E-Notes*, 15, 327-341, (2015).

Dirik F. and Şahin, P. O., "A Korovkin-type theorem for double sequences of positive linear operators via power series method", *Positivity*, 22, 209-218, (2018).

Duman, O. and Duman, E. E., "Statistical Korovkin-type theory for matrix valued functions", *Stud. Sci. Math. Hung.*, 48 (4), 489-508, (2011).

Duman, O., Khan, M. K. and Orhan, C., "A-statistical convergence of approximatig operators", *Math. Inequal. and Appl.*, 6 (4), 689-699, (2003).

Gadjiev, A. D. and Orhan, C., "Some approximation theorems via statistical convergence", *Rocky Mountain J. Math.*, 32 (1); 129-137,(2002).

Hardy, G. H., *Divergent Series*, London: Oxford Univ. Press, (1949).

King, J. P. and Swetits, J. J., “Positive linear operators and summability” *J. Austral. Math. Soc.*, 11, 281-290, (1970).

Korovkin, P. P., “On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions”, *Doklady Akad. Nauk SSSR.*, 90, 961-964, (1953).

Kratz, W. and Stadtmüller, U., “Tauberian theorems for J_p - summability”, *J. Math. Anal. Appl.*, 139, 362-371, (1989).

Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Windsor: University of Windsor, (1978).

Lorentz, G. G., “A contribution to the theory of divergent sequences”, *Acta Math.*, 80, 167-190, (1948).

Lorentz, G. G., *Bernstein Polynomials*, New York: Chelsea Pub. Co., (1986).

Maddox, I. J., “A new type of convergence”, *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.*, 83, 61-64, (1978).

Mohapatra, R. N., “Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators”, *J. Approx. Theory*, 20; 239-250, (1977).

Nishishiraho, T., “Convergence of positive linear approximation processes”, *Tohoku Math. J.*, 35, 441-458, (1983).

Özgüç, İ. and Taş, E., “A Korovkin-type approximation theorem and power series method”, *Results Math.*, 69, 497-504, (2016).

Powel, R. E. and Shah, S. M., *Summability Theory and Applications*, London: Van Nostran Reinhold Co., (1972).

Pringsheim, A., “Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen”, *Math. Ann.*, 53 (3), 289-321, (1900).

Serra-Capizzano, S., “A Korovkin based approximation of multilevel Toeplitz matrices (with rectangular unstructured blocks) via multilevel trigonometric matrix spaces”, *SIAM J. Numer. Anal.*, 36, 1831-1857, (1999).

Swetits, J. J., “On summability and positive linear operators”, *J. Approx. Theory*, 25 (2), 186-188, (1979).

Wilansky, A., *Summability Through Functional Analysis*, Amsterdam: North-Holland Publ. Company, (1984).

Volkov, V. I., “On the convergence of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions of two variables”, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 115, 17-19, (1957).

Yurdakadim, T., “Some Korovkin type results via power series method in modular spaces”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 65, 65-76, (2016).