

**SINIR KOŞULU PARAMETREYE BAĞLI BİR STURM-LIOUVILLE  
OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ESENGÜL BİTEN**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK  
ANABİLİM DALI**

**MERSİN  
NİSAN-2021**

**SINIR KOŞULU PARAMETREYE BAĞLI BİR STURM-LIOUVILLE  
OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ESENGÜL BİTEN**

ORCID ID: 0000-0001-9754-3455

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK  
ANABİLİM DALI**

**Danışman**

**Dr. Öğr. Üyesi Sertaç GÖKTAŞ**

ORCID ID: 0000-0001-7842-6309

**MERSİN  
NİSAN - 2021**

## ÖZET

### SINIR KOŞULUNDA PARAMETREYE BAĞLI BİR STURM-LİOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEM

İkinci mertebeden diferansiyel denkleminde  $n$ -tane potansiyel fonksiyon bulunduran ve sınır koşulunda spektral parametreyi lineer halde içeren bir Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır. Bu problemin özdeğerleri, nodal noktaları (özfonksiyonun sıfırları) ve nodal uzunlukları için asimptotik formüller Prüfer dönüşümü yardımıyla hesaplanmıştır. Ayrıca, bu formüller kullanılarak potansiyel fonksiyonların açık biçimi verilmiştir. Son olarak, bazı nümerik sonuçlar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Özdeğer, Özfonksiyon, Prüfer Dönüşümü, Sturm-Liouville Problemi, Ters Nodal Problem.

**Danışman:** Dr. Öğr. Üyesi, Sertaç GÖKTAŞ, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.



## ABSTRACT

### INVERSE NODAL PROBLEM FOR A STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH EIGENPARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION

A Sturm-Liouville problem with  $n$ -potential functions in the second order differential equation and which contains spectral parameter depending on linearly in one boundary condition is considered. The asymptotic formulas for the eigenvalues, nodal points (zeros of the eigenfunction) and nodal lengths of this problem are calculated by the Prüfer substitutions. Also, using these asymptotic formulas, an explicit formula for the potential functions are given. Finally, some numerical results are given.

**Keywords:** Eigenvalues, Eigenfunctions, Prüfer Substitutions, Sturm-Liouville Problem, Inverse Nodal Problem.

**Advisor:** Asst. Prof. Dr., Sertaç GÖKTAŞ, Department of Mathematics, University of Mersin, Mersin.



## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütölmesi sırasında desteğini ve yardımını esirgemeyen danıőmanım Dr. Öğr. Üyesi Sertaç Göктаő'a, her zaman yanımda olan aileme, kıymetli arkadaşım Ayőe Nur Bulut'a ve ailesine, Mersin'de bulunduğum müddet boyunca yolumu ve ruhumu nurlandıran Ayőe Demirbaő ve Tuba Nur Irmak'a, Cenab-ı Hakk'ın bir hediyesi olarak addettiğim kıymetli hocam Süeda Akbulut'a ve ailesine teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
İÇ KAPAK	i
ONAY	ii
ETİK BEYAN	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLOLAR DİZİNİ	viii
KISALTMALAR ve ŞİMGELER	ix
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI</b>	<b>2</b>
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b>	<b>4</b>
3.1. Temel Tanım ve Teoremler	4
3.2. Lineer Diferansiyel Operatörler	9
3.3. Sturm-Liouville Operatörü	11
3.4. Difüzyon Operatörü	14
3.5. Prüfer Dönüşümü	17
<b>4. BULGULAR ve TARTIŞMA</b>	<b>19</b>
4.1. $n$ -Potansiyelli Sturm-Liouville Problem	19
4.1.1 Özdeğer ve Nodal Parametreler için Asimptotik Formüller	20
4.1.2 Potansiyel Fonksiyonlar için Yapılandırma Formülü	24
4.2. Nümerik Hesaplamalar	26
<b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER</b>	<b>29</b>
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	33

## TABLolar DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Tablo 4.1. $n=1$ , $\alpha_1=\alpha_2=1$ ve $q_0(x)=x^2$ , $q_m(x)=0$ , $m \geq 1$ için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin öz değerleri.	26
Tablo 4.2. $n=1$ , $\alpha_1=\alpha_2=1$ ve $q_0(x)=x^2$ , $q_m(x)=0$ , $m \geq 1$ için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin nodal noktaları.	27
Tablo 4.3. $n=1$ , $\alpha_1=\alpha_2=1$ ve $q_0(x)=x^2$ , $q_m(x)=0$ , $m \geq 1$ için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin nodal uzunlukları.	27
Tablo 4.4. $n=3$ , $\alpha_1=\alpha_2=1$ ve $q_0(x)=1$ , $q_1(x)=x$ , $q_2(x)=x^2$ , $q_m(x)=0$ , $m \geq 3$ için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin öz değerleri.	27
Tablo 4.5. $n=3$ , $\alpha_1=\alpha_2=1$ ve $q_0(x)=1$ , $q_1(x)=x$ , $q_2(x)=x^2$ , $q_m(x)=0$ , $m \geq 3$ için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin nodal noktaları.	28
Tablo 4.6. $n=3$ , $\alpha_1=\alpha_2=1$ ve $q_0(x)=1$ , $q_1(x)=x$ , $q_2(x)=x^2$ , $q_m(x)=0$ , $m \geq 3$ için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin nodal uzunlukları.	28

## KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$L_2[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonlar uzayı
$W_2^1(\Omega)$	Sobolev Uzayı
$\lambda_k$	$k$ . özdeğer
$\lambda_k^n$	$k$ . özdeğerin $n$ . kuvveti
$y_k(x)$	$k$ . özdeğere karşılık gelen $k$ . özfonksiyon
$x_j^k$	$k$ . özdeğere karşılık gelen $j$ . nodal nokta
$\ell_j^k$	$k$ . özdeğere karşılık gelen $j$ . nodal uzunluk
$q(x)$	Sturm-Liouville operatörü için potansiyel fonksiyon



## 1. GİRİŞ

Matematiksel fizik problemlerinde kısmi türevli diferansiyel denklemlerle karşılaşmaktadır. Fiziksel bir sürecin matematiksel bir tanımını yapmak için bu süreci tek olarak belirleyen bazı koşullara da ihtiyaç duyulmaktadır. Bu koşullara, başlangıç veya sınır koşulları denmektedir. Bu tür problemler bazı metotlar yardımıyla spektral parametre içeren adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmektedir. Bu denklemlerden biri de Sturm-Liouville denklemdir. Sınır koşullarıyla birlikte bu denklemin özdeğerlerinin varlığı; özfonksiyonların sıfırlarının salınımı, özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik formüllerinin tespiti; özfonksiyonlar sisteminin farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık özellikleri gibi özelliklerinin araştırılması veya özdeğerlerin spektral bilgiler kullanılarak potansiyel fonksiyonun bulunması; özfonksiyonların sıfırları olan nodal noktaların bilgisini kullanarak potansiyel fonksiyonunun bulunması gibi özelliklerin araştırılması genel olarak spektral teori diye adlandırılmaktadır.

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde, düz problemin ve ters problemin çeşitli özelliklerinin araştırılması büyük önem taşımaktadır. Bu problemler, matematik, fizik, mekanik, elektronik, jeofizik, meteoroloji, sismoloji, tıp ve bu gibi başka doğa bilimlerinde ortaya çıkan önemli problemlerin çözülmesinde önemli role sahiptir.

Bu tez çalışmasında, sınır koşullarından biri spektral parametreyi lineer halde bulunduran aşağıdaki  $n$ - potansiyelli Sturm-Liouville problem veya litaretürde “differential pencil” diye de adlandırılan aşağıdaki problem ele alınacaktır:

$$-u'' + (q_0(x) + \lambda q_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x))u = \lambda^{2n}u,$$

$$u(0) = 0,$$

$$(\alpha_1 \lambda + \beta_1)u'(\pi) + (\alpha_2 \lambda + \beta_2)u(\pi) = 0.$$

Burada,  $x \in [0, \pi]$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\lambda$  bir spektral parametre;  $q_0(x) \in C[0, \pi]$ ,  $q_m(x) \in C^1[0, \pi]$ , ( $m = 1, 2, \dots, n-1$ ) dir. Bu probleminin nodal nokta kümesi  $\{x_j^k\}$ , nodal uzunlukları kümesi  $l_j^k = x_{j+1}^k - x_j^k$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, k-1, k \geq 2$  biçiminde gösterilir.

Bu problemin özdeğerleri, nodal noktaları ve nodal uzunlukları için asimptotik formüllerin hesaplanması ve bu bilgiler yardımıyla potansiyel fonksiyonlar için bir yapılandırma formülünün verilmesi amaçlanmaktadır. Sonuç olarak, bu ters nodal problemin araştırılması çalışmada ele alınan lineer operatörün kesin biçiminin verilmesini sağlayacaktır.

Problem  $n$ -tane potansiyel içermesi ve sınır koşullarında spektral parametre bulundurması bakımından önemlidir.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Lineer diferansiyel operatörlerin temel teorisi [1] monografisinde detaylıca verilmiştir. Buna ek olarak, adi diferansiyel operatörler için Sturm-Liouville ve bir boyutlu Dirac operatörlerin teorisi üzerine temel özellikler [2] monografisinde bulunur.

Spektral teoride, Sturm-Liouville operatörü için sınırda parametre bulunduran düz problemlere önemli ölçüde katkı sağlayan çalışmalar bulunmaktadır [3-6].

Spektral teoride, Sturm-Liouville operatörü için ters problemlere önemli katkı 1929'da Ambartsumyan [7] tarafından incelenen

$$y''(x) + [\lambda - q(x)]y(x) = 0,$$

$$y'(0) = y'(1) = 0$$

çalışma ile olmuştur. Ambartsumyan bu çalışmada,  $\lambda_n = (n\pi)^2$  ise  $q(x) = 0$  olduğunu göstermişti. Fakat, bu çalışmanın aksine özdeğerlerin bir kümesinin operatörün bulunmasında yeterli olmadığı anlaşıldı. Ambarsumyan'ın "özdeğerlerin tek bir kümesinin bilinmesi" koşuluna ek olarak, 1946'da Borg [8], özdeğerlerin ikinci bir kümesinin bilinmesi veya  $q(x) = q(1-x)$  koşulunun sağlanmasının  $q(x)$  in bulunmasında yeterli olduğunu gösterdi. 1949'da Levinson [9], Borg'un ele aldığı problemi kompleks analiz tekniklerini kullanarak ispatları kısalttı. 1951'de Gel'fand ve Levitan [10], normlaştırıcı sabitler kümesi kullanarak potansiyel fonksiyonun tek olarak belirlenebileceğini ispatladı. 1952'de Marchenko [11], Sturm Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şartı ifade etmiştir. 1973'de Hoschtadt [12], öz fonksiyonların indis kümesi üzerinde bir mutlak toplam olarak potansiyel fonksiyonun elde edilebileceğini gösterdiler.

Son yıllarda, ters problemlere yeni bir sınıfı eklenmiştir. Bu sınıf daha sonraları ters nodal problemler teorisi olarak adlandırılmıştır. Ters nodal problemi ilk olarak 1988'de McLaughlin [13] Dirichlet sınır koşullarıyla birlikte Sturm-Liouville operatörünü ele aldı. Sturm-Liouville probleminde potansiyel fonksiyonu tek olarak belirlemek için sadece nodal noktaların (öz fonksiyonların sıfırlarının) bilgisinin yeterli olduğu ispatlandı [13,14]. Daha sonra, bazı yazarlar çalışmalarında nodal noktalar yardımıyla potansiyel fonksiyonu ve türevlerini yeniden yapılandırmıştır [15-21]. Bu çalışmalara ek olarak bazı yazarlar sınır koşullarının öz parametreye bağlı olması durumunda ters nodal problemi ele aldılar [22-27].

Sturm-Liouville operatörünün birden fazla potansiyel fonksiyonu kapsamı bakımından klasik Sturm-Liouville operatöründen farklı ters nodal problemler bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır [28-33]. Ayrıca, Kaplan [34] bu tip bir operatörü ayrılabilir sınır şartlarıyla birlikte göz önüne alarak nodal noktalar yardımıyla ters problemin çözümüne ulaşmıştır.

[31] çalışmasında,

$$n > 1, q_0(x) \in C[0, \pi], q_k(x) \in C^1[0, \pi], (k = 1, 2, 3, \dots, n-1) \text{ olmak üzere}$$

$$-y'' + (q_0(x) + \lambda q_1(x) + \lambda^2 q_2(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x))y = \lambda^{2n} y, \quad (2.1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (2.2)$$

Problemi ele alınarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Mevcut tez çalışmasında, bu problemin sınır koşullarından birine spektral parametre eklenerek yeni sonuçlar elde edilmesi amaçlanmıştır.

**Teorem 2.1. [31]**  $k \rightarrow \infty$  iken, (2.1)-(2.2) probleminin özdeğerleri için asimptotik formül

$$\lambda_k^n = k + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{k}{2\pi\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

şeklindedir.

**Teorem 2.2. [31]**  $k \rightarrow \infty$  iken, (2.1)-(2.2) probleminin nodal noktaları için asimptotik formül

$$x_j^k = \frac{j\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)$$

şeklindedir.

**Teorem 2.3. [31]**  $k \rightarrow \infty$  iken, (2.1)-(2.2) probleminin nodal uzunlukları için asimptotik formül

$$\ell_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{3n+1}}\right)$$

şeklindedir.

**Teorem 2.4. [31]**  $k \rightarrow \infty$  iken, (2.1)-(2.2) probleminin potansiyel fonksiyonları

$$q_0(x) = 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lambda_k^2 - \frac{\lambda_k \pi}{\ell_j^k} \right),$$

$$q_d(x) = 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lambda_k^{d+2} - \lambda_k^d + \frac{\pi}{\ell_j^k} (1 - \lambda_k) \right) \quad d = 1, 2, \dots, n-1$$

şeklindedir. Burada,  $j = j_k(x) = \{j: x_j^k < x\}$  dir.

Daha sonra, [34] çalışmasında bu  $n$ -potansiyelli Sturm-Liouville denklemini ayrılabilir sınır şartları ile birlikte ele alınarak özdeğerler ve nodal parametreler için asimptotik formüller bulunarak potansiyel fonksiyon için yapılandırma formülü elde edilmiştir.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 3.1.1. [35, 36]**  $M \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan  $d: M \times M \rightarrow [0, \infty]$  dönüşümüne  $M$  üzerinde bir *metrik*,  $(M, d)$  ikilisine bir *metrik uzay* denir.  $\forall x, y, z \in M$  için

i)  $d(x, x) \geq 0$  ve  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,

ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,

iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

**Tanım 3.1.2. [35, 36]**  $N, K$  kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $\|\cdot\|: N \rightarrow [0, \infty]$  dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu dönüşüme  $N$  üzerinde bir *norm*,  $(N, \|\cdot\|)$  ikilisine bir *normlu uzay* denir.  $\forall x, y, z \in N$  ve  $\forall \lambda \in K$  için

i)  $\|x\| \geq 0$  ve  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,

ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,

iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Tanım 3.1.3. [35, 36]**  $H \neq \emptyset$  bir küme olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa  $H$  uzayına bir *üniter Hilbert uzayı* denir.

i)  $H$  bir vektör uzayıdır.

ii)  $\forall x, y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  için  $\langle x, y \rangle$  bir reel sayısı aşağıdaki koşulları sağlar:

a.  $\langle x, y \rangle \geq 0$

b.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

c.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ,

d.  $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$

iii)  $d(x, y) = \|x - y\|$  ile verilen metriğe göre  $H$  uzayı tamdır.

Eğer bu koşullara ek olarak  $H$  uzayı sonsuz boyutlu ise  $H$  uzayına *soyut Hilbert uzayı* denir. Burada, ii) maddesi *iç çarpım uzay* tanımı olarak da geçmektedir. Burada,  $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow [0, \infty]$  dönüşümüne bir *iç çarpım* denir.

**Tanım 3.1.4. [35, 36]**  $L_2[a, b]$  uzayı,  $[a, b]$  aralığında tanımlı karesel integrallenebilen kompleks değerli fonksiyonlarının oluşturduğu uzaydır.

**Örnek 3.1.1.**  $f, g \in L_2[a, b]$  olsun.  $L_2[a, b]$  uzayı,

$$d: L_2[a, b] \times L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d(f, g) = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

metriği ile bir metrik uzay;

$$\| \cdot \|: L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

normu ile bir normlu uzay;

$$\langle f, g \rangle: L_2[a, b] \times L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

iç çarpımı ile bir iç çarpım uzayıdır. Aynı zamanda,  $L_2[a, b]$  uzayı bir Hilbert uzayıdır.

**Örnek 3.1.2. [2]** Sturm-Liouville diferensiyel operatörünün spektral teorisi;  $L_2[0, \pi]$ ,  $L_2(0, 1)$ ,  $L_2(0, \infty)$  ve  $L_2(-\infty, \infty)$  uzaylarında incelenir.

**Tanım 3.1.5. [35, 36]**  $C[a, b]$  uzayı,  $[a, b]$  aralığında tanımlı sürekli, reel veya kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzayıdır.

**Örnek 3.1.3.**  $f, g \in C[a, b]$  olsun.  $C[a, b]$  uzayı,

$$d: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

metriği ile bir metrik uzay;

$$\| \cdot \|: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay;

$$\langle f, g \rangle: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

iç çarpımı ile bir iç çarpım uzayıdır.

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

normu ile tam olmayan bu uzay Hilbert uzayı değildir.

**Tanım 3.1.6. [35-37]**  $\Omega$  bölgesi  $\mathbb{R}^n$  uzayında sınırlı bir bölge ve  $L_2(\Omega)$  uzayı bir Lebesgue uzayı olsun.  $W_2^1[0, \pi]$  Sobolev uzayı,  $y \in L_2(\Omega)$  ve  $\frac{\partial y}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$  şartını sağlayan tüm  $y$  fonksiyonlarının uzayıdır. Burada, 1: birinci mertebeden kısmi türevlerin  $L_2(\Omega)$  uzayına ait olması gerektiğini göstermektedir. 2:  $L_2(\Omega)$  uzayına ait olma koşulundaki integralin kuvvetini ifade etmektedir.  $W_2^1[0, \pi]$  ve  $L_2(\Omega)$  uzayları arasında  $W_2^1[0, \pi] \subset L_2(\Omega)$  biçiminde bir ilişki vardır.  $W_2^1[0, \pi]$  sobolev uzayındaki iç çarpım

$f, g \in W_2^1[0, \pi]$  olmak üzere

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \bar{g} dx + \int_{\Omega} \Delta f \cdot \Delta g dx$$

biçiminde tanımlanır. Burada,  $\Delta f = \text{grad}f$  dir. Bu uzayda norm

$$\|f\| = \left( \int_{\Omega} f^2 dx + \int_{\Omega} |\text{grad}f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

**Örnek 3.1.4. [37]**  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  karesi olsun ve

$$f = f(x, y) = \sin x_1 + \cos x_2$$

olsun.  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos x_1$  ve  $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\sin x_2$  olmak üzere

$$\int_{\Omega} |f|^2 dx = \int_{\Omega} |\sin x_1 + \cos x_2|^2 dx \leq \int_{\Omega} 4 dx = 4|\Omega| < \infty,$$

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 dx = \int_{\Omega} |\cos x_1|^2 dx \leq \int_{\Omega} |1|^2 dx = \Omega < \infty,$$

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2 dx = \int_{\Omega} |-\sin x_2|^2 dx \leq \int_{\Omega} |1|^2 dx = |\Omega| < \infty$$

olur. Böylece,  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L_2(\Omega)$  ve  $\frac{\partial f}{\partial x_2} \in L_2(\Omega)$  olur. Buradan,  $f \in W_2^1[0, \pi]$  elde edilir.

**Tanım 3.1.7. [38]** Eğer  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  ise  $f(x)$  fonksiyonuna *sonsuz küçük fonksiyon* denir.

$x \rightarrow a$ ,  $f(x) = o(1)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 3.1.8. [38]** Eğer  $x \in X$  için  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$  ise  $f(x)$  fonksiyonuna *sonsuz büyük fonksiyon* denir.

**Tanım 3.1.9. [38]**  $\forall x \in X \setminus \{a\}$  için  $g(x) \neq 0$  ve  $x \rightarrow a$  iken  $f(x) = o(1)$  ve  $g(x) = o(1)$  olsun.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = m$  limitini ele alalım.

Eğer,  $m = 1$  ise  $f$  ve  $g$  fonksiyonları *denk sonsuz küçük fonksiyonlardır* denir.  $f \sim g$  ile gösterilir.

Eğer,  $m = 0$  ise  $f$  fonksiyonu  $g$  fonksiyonuna göre *yüksek mertebeden sonsuz küçüktür* denir.  $f = o(g)$  biçiminde gösterilir.

**Tanım 3.1.10. [38]**  $X \subset \mathbb{R}$  kümesi,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları ve  $a \in X$  noktası verilsin.

$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$  için  $|f(x)| \leq c|g(x)|$  olacak şekilde bir  $c \geq 0$  sayısı varsa,  $f = O(g)$  dir. Bu sembol Big-O veya Landau sembolü diye de adlandırılır. Ayrıca,  $f$  fonksiyonu  $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$  üzerinde sınırlı ise  $x \rightarrow a$  iken  $f = O(1)$  şeklinde yazılır.

$o$ -küçük ve  $O$ -Büyük sembollerinin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [38,39]:

$$1) o(f) \pm o(f) = o(f), o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g), O(f) + O(f) = O(f),$$

$$2) o(f) = O(f), o(f) \cdot O(g) = o(fg), o(f) + O(f) = O(f),$$

$$3) n \geq 2 (n \in \mathbb{N}) \text{ olmak üzere her } k = \overline{1, n-1} \text{ için } o(f^n) = o(f^k),$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } (o(f))^n = o(f^n), f^n \cdot o(f) = o(f^{n+1}) \text{ ve } \frac{o(f^n)}{f} = o(f^{n-1}),$$

$$5) \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X \text{ için } g(x) \neq 0 \text{ ise } x \rightarrow a \text{ iken } \frac{O(f)}{g} = O\left(\frac{f}{g}\right),$$

$$6) f_1(x) = O(g_1(x)) \text{ ve } f_2(x) = O(g_2(x)) \text{ olsun:}$$

$$a) f_1(x) + f_2(x) = O(\max\{g_1(x), g_2(x)\}).$$

$$b) O(f_1(x)) \cdot O(f_2(x)) = O(f_1(x) \cdot f_2(x)).$$

$$c) k \neq 0, O(kf_1(x)) = O(f_1(x)).$$

$$d) O(k + f_1(x)) = O(f_1(x)).$$

$$e) f_1(x) \times f_2(x) = O(g_1(x) \times g_2(x)).$$

7)  $f_1(x)$  ve  $f_2(x)$  fonksiyonları  $\forall x \geq 0$  tam sayısı için pozitif fonksiyonlar olmak üzere

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  ve  $L \geq 0$  için  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = L$  olsun. Bu durumda,  $f(x) = O(f_1(x))$

şeklindedir.

8)  $f = O(g)$  ve  $g = O(h)$  ise  $f = O(h)$  dir.

9)  $f(x)$  ve  $g(x)$  sonlu bir aralıkta integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar ve  $f(x) = O(g(x))$  olsun. Bu durumda,

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = O\left(\int_{x_0}^x |g(t)|dt\right)$$

şeklindedir.

10) Verilen bir  $f$  fonksiyonu için

$$a) \frac{1}{1+O(f(x))} = 1+O(f(x)),$$

$$b) \log[1+O(f(x))] = O(f(x)),$$

$$c) \exp[O(f(x))] = 1+O(f(x)).$$

**Örnek 3.1.5. [38]**  $x \rightarrow \infty$  iken  $\left(\frac{1}{x} + \sin x\right)x = O(x)$  dir. Gerçekten,  $\forall x \in \overset{\circ}{U}_1(\infty)$  için

$$\left|\left(\frac{1}{x} + \sin x\right)x\right| \leq \left(\left|\frac{1}{x}\right| + |\sin x|\right)|x| \leq 2|x|$$

dir.

**Örnek 3.1.6. [36]**  $f(x) = 8x + 128$  fonksiyonu verilsin.  $\forall x \geq 0$  için  $f(x) > 0$  dir.  $f(x) = O(x^2)$  olduğunu gösterelim.

$\forall x \geq a$  için  $f(x) \leq c.g(x)$  olacak biçimde bir  $a$  tam sayısı ve  $c > 0$  sabitinin varsa  $f(x) = O(x^2)$  dir.

Örneğin;  $c = 1$  için  $\forall x \geq 16$  için  $f(x) \leq cx^2$  olur. Gerçekten;

$$f(x) \leq cx^2 \Rightarrow f(x) \leq x^2$$

$$8x + 128 \leq x^2$$

$$x^2 - 8x - 128 \geq 0$$

$$(x - 16)(x + 8) \geq 0$$

olur.  $\forall x \geq 0$  için  $(x + 8) > 0$  olduğundan,  $(x - 16) \geq 0$  olduğu sonucu çıkar.

**Tanım 3.1.11. [1]**  $V$  bir vektör uzay,  $\emptyset \neq W \subset V$  olsun.  $L$  dönüşümü  $W$  kümesinin her elemanını  $V$ 'in en az bir elemanına eşlerse bu  $L$  dönüşümüne bir *operatör*,  $W$  kümesine ise  $L$ 'nin *tanım kümesi* denir.

**Tanım 3.1.12. [1]**  $V$  bir vektör uzay ve  $L, W \subset V$  kümesi üzerinde tanımlı bir operatör olsun.  $\forall x, y \in W$  ve  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  için

$$i) L(x + y) = L(x) + L(y)$$

$$\text{ii) } L(\lambda x) = \lambda L(x),$$

özellikleri sağlanması durumunda  $L$  operatörüne bir *lineer dönüşüm* veya *lineer operatör* denir.

**Tanım 3.1.13. [1]**  $H$  bir Hilbert uzayı,  $B(H)$  ise  $H$  üzerinde tanımlı tüm lineer sınırlı operatörlerin uzayı olsun.  $L \in B(H)$  olmak şartıyla  $L^*$  ile ifade edilen  $T$  operatörünün *adjointi*;  $\forall x, y \in H$  için  $\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$  eşitliğini sağlayan  $B(H)$  uzayının tek bir elemanıdır.

**Tanım 3.1.14. [1]**  $L \in B(H)$  olmak üzere  $L = L^*$  şartını sağlayan  $L$  operatörüne *self-adjoint* operatör adı verilir.

**Teorem 3.1.1. [38]**  $f, [a, b]$  aralığında tanımlı ve sürekli ise  $[a, b]$  aralığında

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

olacak biçimde en az bir  $c$  vardır. Bu teorem, integral için ortalama değer teoremi olarak bilinmektedir.

### 3.2. Lineer Diferansiyel Operatörler

**Tanım 3.2.1. [1]** Bir ifadeye *lineer diferansiyel ifade*

$$l(y) = \alpha_0(x)y^{(n)} + \alpha_1(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_n(x)y \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Lineer diferansiyel ifadenin katsayıları  $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$  fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyonlarının  $[a, b]$  aralığında sürekli olduğu kabul edilir. Ayrıca, bu lineer diferansiyel ifadenin *mertebesi*  $n$  dir.  $[a, b]$  aralığında  $n$ . mertebeye kadar sürekli türevlere sahip bütün  $y_n(x)$  fonksiyonlarının uzayı  $C^{(n)}[a, b]$  ile gösterilir.

**Tanım 3.2.2. [1].**  $y$  fonksiyonunun değerlerini ve onun ardışık türevlerinin  $a$  ve  $b$  sınır noktalarındaki değerleri aşağıdaki gibi işaretlensin:

$$\begin{aligned} y_a &= y(a), y'_a = y'(a), y''_a = y''(a), \dots, y_a^{(n-1)} = y^{(n-1)}(a), \\ y_b &= y(b), y'_b = y'(b), y''_b = y''(b), \dots, y_b^{(n-1)} = y^{(n-1)}(b). \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$V(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k y^{(k)}(b), \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C} \quad (k = \overline{0, n-1}) \quad (3.3)$$

ifadesi (3.2) değişkenlerine bağlı bir lineer form olmak üzere birkaç tane  $V_k(y)$  ( $k = \overline{1, m}$ ) lineer formları verilmiş ve  $y \in C^{(n)}[a, b]$  fonksiyonları üzerine

$$V_k(y) = 0 \quad (k = \overline{1, m}) \quad (3.4)$$

koşulları eklenmiş ise (3.4) koşullarına *sınır koşulları* denir.

**Tanım 3.2.3. [1]** (3.1) lineer diferansiyel ifadesi ve (3.4) sınır koşullarıyla tanımlı bir  $D \subset C^{(n)}[a, b]$  alt uzayı verilsin. Bu durumda

$$L: D \rightarrow C[a, b], \quad L(y) = l(y)$$

şeklinde tanımlanan  $L$  operatörüne, (3.1) lineer diferansiyel ifadesi ve (3.4) sınır koşullarıyla tanımlanan bir *lineer diferansiyel operatör* denir.

Bir diferansiyel ifade, sınır koşullarının seçilme şekline bağlı olarak çeşitli diferansiyel operatörler üretebilir.

**Tanım 3.2.4. [1]**

$$l(y) = 0, \quad (3.5)$$

$$V_k(y) = 0 \quad (k = \overline{1, m}) \quad (3.6)$$

koşullarını sağlayan bir  $y \in C^{(n)}[a, b]$  fonksiyonunun bulunması problemine *homojen sınır değer problemi* denir. Aynı zamanda, (3.5)-(3.6) problemi

$$L(y) = 0 \quad (3.7)$$

ile de gösterilebilir. (3.7) problemini sağlayan her bir fonksiyona bu problemin bir *çözümü* denir. Açık ki,  $y \equiv 0$  fonksiyonu (3.7) probleminin daima bir çözümdür. Bu çözüme *aşık*, aksine, sıfırdan farklı çözümlere de *aşık olmayan çözümler* denir.

**Tanım 3.2.5. [1]**  $L$ ,  $n$ . mertebeden bir diferansiyel operatör ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  bir parametre olsun. Eğer,

$$L(y) = \lambda y$$

denklemini sağlayan  $y \neq 0$  çözümü varsa,  $\lambda$  parametresine  $L$  operatörünün bir *özdeğeri*,  $y$  fonksiyonuna da  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

**Lemma 3.2.1. [1]**  $L(y_1) = \lambda y_1$  ve  $L(y_2) = \lambda y_2$  ise,  $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2)$  dir. Burada,  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi sabitlerdir.

**Tanım 3.2.6. [1]**

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

ile tanımlı determinanta,  $L$  operatörünün *karakteristik determinantı* denir.  $L$  operatörünün özdeğerleri,  $\Delta(\lambda)$  fonksiyonunun sıfırlarıdır.

**Tanım 3.2.7. [1].**  $\mu$  sayısı  $L$  operatörünün bir özdeğeri olsun. O halde bu sayı  $\Delta(\lambda)$  tam fonksiyonunun bir sıfır yeridir. Bu sebeple,  $\Delta(\lambda) = (\lambda - \mu)^m F(\lambda)$  olarak yazılabilir. Burada  $F$  bir tam fonksiyon,  $F(\mu) \neq 0$  ve  $m \in \mathbb{N}'$ 'dir. Bu biçimde tanımlanan  $m$  sayısına  $\mu$  özdeğerinin *cebirsel katlılığı* denir.

**Tanım 3.2.8. [1].**  $\lambda$  özdeğeri  $\Delta(\lambda)$ 'nın basit sıfırıysa,  $\lambda$  özdeğerine *basit özdeğer* denir.

### 3.3. Sturm-Liouville Operatörü

Uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan operatörlerden birisi de

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

operatördür. Bu operatör, Sturm-Liouville operatörü olarak bilinir. Burada,  $q(x)$  fonksiyonu reel ve  $[a, b]$  aralığında süreklidir.  $L$  operatörü için,  $y(x)$  fonksiyonlarının kümesi belli diferansiyellenebilme koşullarıyla ve aynı zamanda  $a$  ve  $b$  uç noktaları üzerine konulan koşullarla belirlenir [2].

Sturm-Liouville operatörü için genellikle aşağıdaki üç tür sınır koşulu tanımlanmıştır [12]:

**i) Ayrık sınır koşulları**

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0,$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0.$$

Burada,  $\alpha$  ve  $\beta$  keyfi reel sayılardır.

**ii) Periyodik sınır koşulları**

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b);$$

ve anti-periyodik sınır koşulları

$$y(a) = -y(b), \quad y'(a) = -y'(b).$$

**iii) Uçları kilitli veya bağlı sınır koşulları**

$$y(a) = y(b) = 0,$$

$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

**Tanım 3.3.1 [2]**

$$L[y] := -y'' + q(x)y = \lambda y \quad (3.8)$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \quad (3.9)$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

biçiminde tanımlanan sınır değer problemine *Sturm-Liouville problemi* denir.  $[a, b]$  aralığı sonlu ve  $q(x)$  fonksiyonu bu aralıkta toplanabilir ise (3.8)-(3.9) sınır değer problemine *regülerdir* denir. Diğer durumlarda, yani  $[a, b]$  aralığının sonlu olmadığı veya  $q(x)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığında toplanabilir olmadığı veya bu iki durumun her ikisinin de geçerli olması halinde ise probleme *singülerdir* denir.

**Tanım 3.3.2. [2]** (3.8)-(3.9) Sturm-Liouville probleminin  $y(x) = y(x, \lambda) \neq 0$  çözümüne karşılık gelen  $\lambda$  değerine (3.8)-(3.9) Sturm-Liouville probleminin *özdeğeri*,  $y(x, \lambda)$  fonksiyonuna ise bu özdeğere karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

**Lemma 3.3.1. [2]** (3.8)-(3.9) Sturm-Liouville probleminin  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  farklı özdeğerlerine karşılık gelen  $y(x, \lambda_1)$  ve  $y(x, \lambda_2)$  özfonksiyonları ortogonaldır. Yani,

$$\int_0^{\pi} y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

**Lemma 3.3.2. [2]** (3.8)-(3.9) Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri reeldir.

**Tanım 3.3.3. [40]** (3.8)-(3.9) Sturm-Liouville probleminin *nodal nokta kümesi*  $y_k(x) = y_k(x, \lambda)$  öz fonksiyonlarının kökleri olan  $\{x_j^k\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ ,  $k \geq 2$  kümesidir.

**Tanım 3.3.4. [40]** (3.8)-(3.9) Sturm-Liouville problemi sağlanacak şekilde  $\lambda_n$  öz değerleri ve bu öz değerlere karşılık gelen  $y_n(x)$  öz fonksiyonlarını belirleme problemi *düz problem* olarak bilinir.

**Tanım 3.3.5. [40]** Spektral problemde, öz değerlerin iki kümesi veya öz değerlerin bir kümesi ile normlaştırıcı sabitlerin bir kümesi gibi spektral bilgiler kullanılarak potansiyel fonksiyonun

bulunması problemi *ters problem* olarak adlandırılır. Başka bir alternatif ise öz fonksiyonların sıfırları olan nodal noktaların bilgisini kullanarak potansiyel fonksiyonunun bulunması problemi *ters nodal problemler* olarak adlandırılır.

**Örnek 3.3.1.**

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (3.10)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (3.11)$$

probleminin özdeğer ve öz fonksiyonlarını bulunuz.

**Çözüm:**  $\lambda = 0$  olsun. (3.10) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

şeklindedir. (3.1) sınır koşullarından  $c_1 = c_2 = 0$  elde edilir. Bu durumda, (3.10)-(3.11) probleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm aşıkâr çözüm olan  $y(x) \equiv 0$  dır. Bu nedenle  $\lambda = 0$  (3.10)-(3.11) probleminin bir özdeğeri değildir.

$\lambda = -\mu^2 (\mu > 0)$  olsun. (3.10) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$$

şeklindedir. (3.11) sınır koşulları göz önüne alınırsa

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0,$$

$$y(\pi) = c_1 e^{-\mu\pi} + c_2 e^{\mu\pi} = 0$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinantı sıfırdan farklı olduğundan  $c_1 = c_2 = 0$  dir. Bu durumda, (3.10)-(3.11) probleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm aşıkâr çözüm olan  $y(x) \equiv 0$  dır. Bu nedenle  $\lambda = -\mu^2 (\mu > 0)$  (3.10)-(3.11) probleminin özdeğerleri değildir.

$\lambda = \mu^2 (\mu > 0)$  olsun. (3.10) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$

şeklindedir. (3.11) sınır koşulları göz önüne alınırsa  $y(0) = c_1 = 0$  ve  $y(\pi) = c_2 \sin(\mu\pi) = 0$ .

Burada  $c_2 \neq 0$  halinde,  $\sin(\mu\pi) = 0$  alınırsa

$$\mu = k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

sonucuna ulaşılır. Bu takdirde denklemin özdeğerleri

$$\lambda = k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

dir. Dolayısıyla, öz fonksiyonları

$$y_k(x) = c_k \sin(kx) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

biçimindedir.  $c_k$  keyfi sabitlerdir. Özel olarak,  $k = 1, 2, 3, \dots$  için  $c_k = 1$  alınabilir.

Örneğin,  $k = 1$  için  $\lambda = 1$  özdeğerine karşılık gelen  $y_1(x) = \sin x$  özfonksiyonun sıfırları (nodal noktaları)  $\{x_j^1\} = \{j\pi\}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  biçimindedir. Nodal uzunlukları ise  $\{l_j^1\} = \{x_{j+1}^1 - x_j^1\} = \{\pi\}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  biçimindedir.

**Örnek 3.3.2. [41,42]** Zamana bağlı bir Schrödinger denkleminin Sturm-Liouville denklemine indirgenmesini açıklayalım:

Kuantum mekaniğinde bir parçacığın hareketini tanımlayan aşağıdaki Schrödinger denkleminin

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V(x, y, z) \psi,$$

çözümü  $\psi(x, y, z, t)$  dalga fonksiyonudur. Burada  $h$  Planck sabiti,

$$h = 6.6260693(11) \times 10^{-34} \text{ joule} \times \text{saniye}$$

veya

$$h = 4,14 \times 10^{-15} \text{ elektronvolt} \times \text{saniye},$$

$\mu$  parçacığın indirgenmiş kütlesi ve  $V$  ise zamana bağlı olmayan potansiyel enerji fonksiyonudur.

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$  sabitine ise indirgenmiş Planck sabiti denir .

Schrödinger denkleminin bir boyutlu hali,  $\psi = \psi(x, t)$  olmak üzere

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi,$$

şeklindedir. Bu denklem genellikle,

$$\psi(x, 0) = f(x),$$

başlangıç şartı ile verilir. Burada  $V$  fonksiyonu  $t$  den bağımsızdır. Bu durumda bir boyutlu Schrödinger denklemini değişkenlere ayırma metodunu kullanarak çözelim.  $\psi(x, t) = y(x).T(t)$  olarak alınırsa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = y''(x)T(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = y(x)T'(t),$$

bulunur. Bu değerler, bir boyutlu Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} y''(x) + V(x)y(x) = Ey(x),$$

elde edilir. Burada  $E$  ayırma sabitidir. Bu denklem

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),$$

şeklindeki bir Sturm Liouville diferensiyel denklemi haline dönüştürülebilir. Burada ,

$q(x) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(x)$  ve  $\lambda = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$  dir.

### 3.4. Difüzyon Operatörü

$$L_{p,q}y = -y'' + [q(x) + 2\lambda p(x)]y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (3.12)$$

denklemini difüzyon denklemi olarak tanımlanır.

$$y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = -h, \quad (3.13)$$

$$y'(\pi, \lambda) + Hy(\pi, \lambda) = 0, \quad (3.14)$$

biçimindeki sınır koşullarıyla difüzyon sınır değer problemini ele alalım [43]. Burada  $h$  ve  $H$  sonlu reel sayılar ve  $p \in W_2^1[0, \pi]$ ,  $q \in L_2[0, \pi]$  şeklindedir. Bu problemin çözümü

$$y(x, \lambda) = \cos(\lambda x) - \frac{h}{\lambda} \sin(\lambda x) + \int_0^x \frac{\sin(\lambda x - \lambda t)}{\lambda} [q(t) + 2\lambda p(t)] y(t) dt$$

şeklindedir

**Lemma 3.4.1. [43]** (3.12)-(3.14) difüzyon operatörünün öz değerleri basittir.

**Lemma 3.4.2. [43]** (3.12)-(3.14) difüzyon operatörü  $L_2[0, \pi]$  uzayında self-adjoint bir operatördür.

**Lemma 3.4.3. [43]** (3.12)-(3.14) difüzyon operatörünün öz değerleri reeldir.

**Lemma 3.4.4. [43]** (3.12)-(3.14) difüzyon operatörü için, farklı öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ortogondur.

(3.12) denkleminin; (3.14) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü  $\varphi(x, \lambda)$  ve aynı denklemin

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = 1,$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü ise  $\psi(x, \lambda)$  olsun. [18, 43].  $\lambda_n$ ,  $n$ . öz fonksiyona karşılık gelen  $n$ . öz değer;  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ , için

$$0 < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_{n-1}^{(n-1)} < \pi$$

ise  $n$ . öz fonksiyonun nodal noktaları,  $I_i^{(n)} = [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$ ; öz fonksiyona karşılık gelen  $i$ . nodal bölge ve  $l_i^{(n)} = x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}$  ise nodal uzunluk olsun. Ayrıca  $(0, \pi)$  aralığında

$$j_n(x) = \max\{i: x_i^{(n)} \leq x\}$$

şeklinde tanımlansın. Sabit  $x$  ve  $n$  için  $i = j_n(x)$  olması  $x \in I_i^{(n)}$  olmasını gerektirir.  $L_{p,q}$  difüzyon operatörü,  $(p, q)$  potansiyel fonksiyonları ve  $h, H$  sınır koşulları ile belirlendiği için, bu operatör  $L_{p,q} = (q, p, h, H)$  olarak ifade edilebilir [18].

**Lemma 3.4.5. [18]** (3.12)-(3.14) problemlerinin çözüm fonksiyonları sırası ile

$$\varphi(x, \lambda) = \cos(\lambda x) - \frac{h}{\lambda} \sin(\lambda x) + \int_0^x \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{\lambda} [q(t) + 2\lambda p(t)] \varphi(\lambda, t) dt,$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin[\lambda(x-t)]}{\lambda} [q(t) + 2\lambda p(t)] \psi(\lambda, t) dt$$

şeklindedir.

**Lemma 3.4.6. [18]**  $q \in L_1[0, \pi]$ ,  $p \in W_2^1[0, \pi]$  olsun.  $n \rightarrow \infty$  iken

i) (3.12)-(3.14) probleminin nodal noktaları ve nodal uzunlukları sırası ile

$$x_i^{(n)} = \frac{\left(i - \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_n} - \frac{h}{2\lambda_n^2} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_0^{x_i^{(n)}} [1 + \cos(2\lambda_n t)] [q(t) + 2\lambda_n p(t)] dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

$$l_i^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} [1 + \cos(2\lambda_n t)] [q(t) + 2\lambda_n p(t)] dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

şeklindedir.

ii) (3.12)-(3.14) probleminin nodal noktaları ve nodal uzunlukları sırası ile

$$x_i^{(n)} = \frac{i\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_0^{x_i^{(n)}} [1 - \cos(2\lambda_n t)] [q(t) + 2\lambda_n p(t)] dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

$$l_i^{(n)} = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} [1 - \cos(2\lambda_n t)] [q(t) + 2\lambda_n p(t)] dt + o\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right),$$

şeklindedir.

**Örnek 3.4.1. [44, 45]** Klein-Gordon denkleminin Difüzyon denklemine indirgenmesini açıklayalım:

Kuantum teorisinde, Klein-Gordon denklemi matematiksel modellerin en önemlilerinden birisi olarak kabul edilmektedir. Bu denklem, dispersive dalga olayını tasvir etmek için kullanılır ve relativistik fizik, plazma fiziği ve lineer olmayan optikte ortaya çıkmaktadır. Klein-Gordon denklemi fizikte lineer veya lineer olmayan şekillerde ortaya çıkabilir.

Klein-Gordon denkleminin aşağıdaki biçimini ele alalım.

$$\left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right)^2 - \left( \frac{1}{i} \nabla - e\vec{A} \right)^2 \right] \psi = m^2 \psi, \quad (3.15)$$

Bu denklem, atomik birimde  $\hbar = c = 1$  olmak üzere  $\phi_1$  skaler potansiyeli ve  $\vec{A}(r, t)$  vektör potansiyeli için;  $m$  kütlesi ve  $e$  yüküne sahip kendi eksenini etrafında dönmeyen bir parçacığı göstermektedir.  $\vec{A}(r, t) = 0$  ve  $\phi_1$  skaler fonksiyonunun zamandan bağımsız olduğu kabul edilirse (3.15) denkleminde bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\left[ \nabla^2 + i^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + e^2 \phi_1^2 - 2ei\phi_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi = m^2 \Psi \quad (3.16)$$

elde edilir. Eğer (3.16) da,  $\Psi(r, t) = \varphi(r)e^{-iEt}$  alınırsa

$$[\nabla^2 + E^2 + e^2 \phi_1^2 - 2e\phi_1 E] \varphi(r) = [\nabla^2 + (E - \phi_1 e)^2] \varphi(r) = m^2 \varphi(r)$$

elde edilir. Bu ise Klein-Gordon denkleminin iyi bilinen bir formudur. Burada, bir küresel simetrik potansiyel enerji ile küresel koordinatlar kullanılarak

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + (E - \phi_1 e)^2 \varphi(r) = m^2 \varphi(r)$$

bulunur. Bu son denklemde, değişkenlere ayırma metodunu kullanarak  $\varphi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot Y(\theta, \phi)$  biçiminde bir çözüm aranır

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [(E - \phi_1 e)^2 - m^2] r^2 = -\frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right]$$

elde edilir. Bu denkleminin sol tarafı sadece  $r$  ye, sağ tarafı ise sadece  $\theta$  ve  $\phi$  ya bağlıdır. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için her iki tarafın bir sabite eşit olması gerekir. Bu ayrıştırma sabitini  $l(l+1)$  ile gösterelim. Burada  $l$  kuantum yörünge sayısını göstermektedir.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ (E^2 - m^2) + V(V - 2E) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$$

elde edilir. Burada,  $V = e\phi_1$  ve  $l = 0, 1, 2, \dots$  şeklindedir. Son denklemde  $R = \frac{\psi(r)}{r}$  bağıntısıyla yeni bir  $\psi(r)$  fonksiyonu tanımlanırsa denklem daha basit bir ifadeye dönüşür. Bu denklem  $E^2 = K^2 + m^2$  olduğu dikkate alınarak düzenlenirse

$$\psi''(r) + \left[ K^2 + V(V - 2E) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi(r) = 0$$

elde edilir.  $l = 0$  alınırsa kuantum yörüngesi bir küre olur. Böylece aşağıdaki difüzyon denklemini elde edilir:

$$\psi''(r) + [V^2 - 2KV] \psi(r) = -K^2 \psi.$$

### 3.5. Prüfer Dönüşümü

İkinci mertebeden

$$\frac{d}{dx} \left[ P(x) \frac{du}{dx} \right] + Q(x)u = 0, \quad a < x < b \quad (3.17)$$

bir self-adjoint operatörün çözümlerinin araştırılmasında kullanılan yöntemlerden biri de Prüfer dönüşümüdür [46]. Burada,  $P(x) > 0$   $C^1$  sınıfından fonksiyon ve  $Q$  sürekli fonksiyondur. (3.17) denklemi için Prüfer dönüşümü

$$\begin{aligned} P(x)u'(x) &= r(x) \cos \theta(x), \\ u(x) &= r(x) \sin \theta(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, yeni bağımsız değişkenler olan  $r$  ve  $\theta$

$$\begin{aligned} r^2 &= u^2 + P^2 u'^2, \\ \theta &= \arctan(u/Pu') \end{aligned}$$

formülleri ile tanımlanır.  $r(x)$  fonksiyonu genlik (amplitude) ve  $\theta(x)$  fonksiyonu ise faz (phase) olarak adlandırılır.  $r \neq 0$  olduğunda, (3.18) ile tanımlanan  $(Pu', u) \Leftrightarrow (r, \theta)$  ifadesi sıfırdan farklı Jakobiyen ile analitiktir

$r(x)$  ve  $\theta(x)$  fonksiyonları için diferansiyel denklemi aşağıdaki biçimde düzenleyelim:

$\cot \theta = Pu'/u$ , ifadesinin  $x$  e göre türevi alınırsa

$$-csc^2 \theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(Pu')'}{u} - \frac{Pu'^2}{u^2} = -Q(x) - \frac{1}{P} \cot^2 \theta$$

elde edilir. Bu ifade

$$\frac{d\theta}{dx} = Q(x) \sin^2 \theta + \frac{1}{P(x)} \cos^2 \theta = F(x, \theta) \quad (3.19)$$

biçiminde düzenlenir.  $r^2 = (Pu')^2 + u^2$  ifadesinin türevi alınırsa

$$\frac{dr}{dx} = \left[ \frac{1}{P(x)} - Q(x) \right] r \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{P(x)} - Q(x) \right] r \sin 2\theta. \quad (3.20)$$

(3.19)-(3.20) sistemi (3.17) diferansiyel denklemine denktir. Bu sistem, (3.17) self-adjoint diferansiyel denklemine eşdeğer olan *Prüfer sistemi* olarak adlandırılır.

## 4. BULGULAR ve TARTIŞMA

### 4.1. $n$ -Potansiyelli Sturm-Liouville Problem

Bu bölümde, diferansiyel denkleminde  $n$  tane potansiyel fonksiyon içeren ve sınır koşulunda spektral parametre bulunduran bir Sturm-Liouville problemi ele alınacaktır. Bu problemin özdeğerleri, nodal noktaları ve nodal uzunlukları için asimptotik formüller hesaplanarak, potansiyel fonksiyonlar için bir yapılandırma formülü verilecektir.

Aşağıdaki sınır koşulunda lineer spektral parametre içeren  $n$  potansiyelli Sturm-Liouville problemi ele alınacaktır:

$$-u'' + (q_0(x) + \lambda q_1(x) + \dots + \lambda^{n-1} q_{n-1}(x))u = \lambda^{2n}u, \quad x \in [0, \pi] \quad (4.1)$$

$$u(0) = 0, \quad (4.2)$$

$$(\alpha_1 \lambda + \beta_1)u'(\pi) + (\alpha_2 \lambda + \beta_2)u(\pi) = 0. \quad (4.3)$$

Burada,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\lambda$  bir spektral parametre;  $q_0(x) \in C[0, \pi]$ ,  $q_m(x) \in C^1[0, \pi]$ , ( $m = 1, 2, \dots, n-1$ ) dir.

(4.1)-(4.3) probleminin özdeğer probleminin nodal nokta kümesi  $u_n(x)$  özfonksiyonlarının kökleri olan

$$\{x_j^k\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k-1, \quad k \geq 2$$

Kümesidir.  $\{x_j^k\}$  kümesi, (4.1) denklemindeki  $q_m(x)$  fonksiyonlarına ve (4.3) sınır koşulundaki sabitlere bağlıdır.

$$l_j^k = x_{j+1}^k - x_j^k, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k-1, \quad k \geq 2$$

biçiminde ifade edilen değere de nodal uzunluk adı verilir.

Aşağıdaki modifiye edilmiş Prüfer dönüşümü ele alınacaktır:

$$\begin{aligned} u(x) &= r(x) \cdot \sin(\lambda^n \theta(x)) \\ u'(x) &= \lambda^n r(x) \cdot \cos(\lambda^n \theta(x)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Burada,  $r(x)$  fonksiyonu genlik (amplitude) ve  $\theta(x)$  fonksiyonu ise faz (phase) olarak adlandırılır (Birkhoff ve Rota, 1982).

$$\left(\frac{u'}{u}\right)' = \frac{u'' \cdot u - (u')^2}{u^2} = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2$$

veya

$$\frac{u''}{u} = \left(\frac{u'}{u}\right)' + \left(\frac{u'}{u}\right)^2. \quad (4.5)$$

Diğer taraftan, (4.4) Prüfer dönüşümü

$$\frac{u'}{u} = \lambda^n \cdot \cot(\lambda^n \theta(x))$$

biçiminde düzenlenir. Bu ifadenin  $x$  e göre türevi alınırsa

$$\left(\frac{u'}{u}\right)' = -\frac{\lambda^{2n}\theta'(x)}{\sin^2(\lambda^n\theta(x))}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \lambda^{2n}\cot^2(\lambda^n\theta(x))$$

bulunur. Bu son iki eşitlik (4.5) denkleminde dikkate alınırsa

$$\frac{u''}{u} = -\frac{\lambda^{2n}\theta'(x)}{\sin^2(\lambda^n\theta(x))} + \lambda^{2n}\cot^2(\lambda^n\theta(x)) = \frac{\lambda^{2n}(-\theta'(x) + \cos^2(\lambda^n\theta(x)))}{\sin^2(\lambda^n\theta(x))} \quad (4.6)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (4.1) denklemini

$$\frac{u''}{u} + \lambda^{2n} = \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m q_m(x)$$

biçiminde düzenlenip (4.6) eşitliği bu denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\lambda^{2n}(-\theta'(x) + \cos^2(\lambda^n\theta(x)))}{\sin^2(\lambda^n\theta(x))} + \lambda^{2n} = \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m q_m(x),$$

$$\theta'(x) = 1 - \frac{1}{\lambda^{2n}} \left( \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m q_m(x) \right) \sin^2(\lambda^n\theta(x)) \quad (4.7)$$

elde edilir.

#### 4.1.1 Özdeğer ve Nodal Parametreler için Asimptotik Formüller

Bu alt bölümde (4.1)-(4.3) probleminin özdeğerleri, nodal noktalar ve nodal uzunlukları için ilgili teoremler verilecektir.

**Teorem 4.1.1**  $k \rightarrow \infty$  iken, (4.1)-(4.3) probleminin özdeğerleri için asimptotik formül

$$\lambda_k^n = \left(k - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \pi \left(k - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2\pi \left(k - \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi q_0(x) dx + \frac{1}{2\pi \left(k - \frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{n}}} \int_0^\pi q_1(x) dx$$

$$+ \frac{1}{2\pi \left(k - \frac{1}{2}\right)^{1-\frac{2}{n}}} \int_0^\pi q_2(x) dx + \dots + \frac{1}{2\pi \left(k - \frac{1}{2}\right)^{1-\frac{n-1}{n}}} \int_0^\pi q_{n-1}(x) dx + o\left(\frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{n}}}\right) \quad (4.8)$$

biçimindedir.

**İspat:**  $\lambda = \lambda_k$  olsun. (4.2) sınır şartlarından  $\theta(0) = 0$ , (4.3) sınır şartında gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{u'(\pi)}{u(\pi)} = \frac{-(\alpha_2 \lambda_k + \beta_2)}{\alpha_1 \lambda_k + \beta_1}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (4.4) Prüfer dönüşümü kullanılırsa

$$\lambda_k^n \cot(\lambda_k^n \theta(\pi)) = \frac{-(\alpha_2 \lambda_k + \beta_2)}{\alpha_1 \lambda_k + \beta_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right),$$

$$\lambda_k^n \theta(\pi) = \operatorname{arccot}\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1 \lambda_k^n} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{n+1}}\right)\right)$$

elde edilir. Burada, "arccot" fonksiyonu için Taylor Seri açılımı kullanılırsa

$$\theta(\pi) = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_k^n} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \lambda_k^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) \quad (4.9)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (4.7) eşitliğinin her iki tarafının  $[0, \pi]$  aralığında integrali alınır

$$\int_0^\pi \theta'(x) dx = \int_0^\pi \left[ 1 - \frac{1}{\lambda_k^{2n}} \left( \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_k^m q_m(x) \right) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) \right] dx \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.9) ifadesi (4.10) eşitliğinde yazılırsa :

$$\theta(\pi) - \theta(0) = \int_0^\pi dx - \frac{1}{\lambda_k^{2n}} \int_0^\pi \left( \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_k^m q_m(x) \right) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx$$

$$\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_k^n} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \lambda_k^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) = \pi - \frac{1}{2\lambda_k^{2n}} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^\pi q_m(x) dx$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi q_m(x) [1 - 2\sin^2(\lambda_k^n \theta(x))] dx \quad (4.11)$$

bulunur. Ayrıca,

$$1 - 2\sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) = \cos(2\lambda_k^n \theta(x)) = \frac{1}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))]$$

hesaplaması (4.11) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_k^n} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) = \pi + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \lambda_k^{2n}} - \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^\pi q_m(x) dx$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^\pi \frac{q_m(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(\lambda_k^n \theta(x))] \quad (4.12)$$

bulunur.

(4.12) eşitliğinin sağ tarafındaki son  $n$  tane integrale kısmi integrasyon uygulanırsa:  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$  için

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{q_m(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} dx [\sin(\lambda_k^n \theta(x))] &= \frac{q_m(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \sin(2\lambda_k^n \theta(x)) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2\lambda_k^n} \int_0^{\pi} \sin(2\lambda_k^n \theta(x)) \frac{d}{dx} \left[ \frac{q_m(x)}{\theta'(x)} \right] \\ &= O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu integraller (4.12) eşitliğinde dikkate alınır:

$$\begin{aligned} \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda_k^n} &= \pi + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \lambda_k^{2n}} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{\pi} q_m(x) dx + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) \\ &= \pi + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \lambda_k^{2n}} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{\pi} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda_k^n = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{\pi + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \lambda_k^{2n}} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{\pi} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right)}$$

veya

$$\lambda_k^n = \left(k - \frac{1}{2}\right) \left[ 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \pi \lambda_k^{2n}} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m} \pi} \int_0^{\pi} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) \right]$$

elde edilir. Burada,  $k \rightarrow \infty$  iken limit alınırsa  $\lambda_k \approx \left(k - \frac{1}{2}\right)^{1/n}$  olup

$$\lambda_k^n = \left(k - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \pi \left(k - \frac{1}{2}\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi \left(k - \frac{1}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}} \int_0^{\pi} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{n}}}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.1.2.**  $k \rightarrow \infty$  iken, (4.1)-(4.3) probleminin nodal noktaları için asimptotik formül

$$x_j^k = \frac{j\pi}{k - \frac{1}{2}} + \frac{j\alpha_2}{\alpha_1 \left(k - \frac{1}{2}\right)^3} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^{2-\frac{m}{n}}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{n}}}\right) \quad (4.13)$$

bulunur.

**İspat:**  $\lambda = \lambda_k$  için, (4.4) Prüfer dönüşümünde  $x = x_j^k$  seçilirse

$$u(x_j^k) = r(x_j^k) \sin(\lambda_k^n \theta(x_j^k))$$

bulunur.  $\{x_j^k\}$   $k$ . özdeğere karşılık gelen  $k$ . özfonksiyonun  $j$ . sıfırı olduğundan  $u(x_j^k) = 0$  olup

$$\sin(\lambda_k^n \theta(x_j^k)) = 0$$

$$\theta(x_j^k) = \frac{j\pi}{\lambda_k^n}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (4.7) eşitliğinin her iki tarafı  $[0, x_j^k]$  aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^{x_j^k} \theta'(x) dx &= \int_0^{x_j^k} dx - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx, \\ \frac{j\pi}{\lambda_k^n} &= x_j^k - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx \\ x_j^k &= \frac{j\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik aşağıdaki biçimde yazılabilir

$$x_j^k = \frac{j\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} \frac{q_m(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] \quad (4.14)$$

bulunur.

(4.14) eşitliğinin sağındaki son  $n$ - tane integrale kısmi integrasyon uygulanırsa:  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$  için

$$\int_0^{x_j^k} \frac{q_m(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} \frac{d}{dx} [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] = O\left(\frac{1}{\lambda_k^n}\right)$$

elde edilir.  $m = 1, 2, \dots, n-1$  için bu değerler (4.14) eşitliğinde yazılırsa

$$x_j^k = \frac{j\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n+1}}\right) \quad (4.15)$$

bulunur. (4.8) asimptotik formülü (4.15) de yazılırsa

$$x_j^k = \frac{j\pi}{\left(k - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \pi \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} + O\left(\frac{1}{k^{1+\frac{1}{n}}}\right)\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^{2-\frac{m}{n}}} \int_0^{x_j^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{n}}}\right) \quad (4.16)$$

bulunur. Landau sembolünün özellikleri kullanılırsa ispat tamamlanır.

**Teorem 4.1.3.**  $k \rightarrow \infty$  iken, (4.1)-(4.3) probleminin nodal uzunlukları için asimptotik formül

$$l_j^k = \frac{\pi}{\left(k - \frac{1}{2}\right)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \left(k - \frac{1}{2}\right)^3} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^{2-\frac{m}{n}}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + O\left(\frac{1}{k^{3+\frac{1}{n}}}\right) \quad (4.17)$$

bulunur.

**İspat:**  $\lambda = \lambda_k$  olmak üzere (4.7) eşitliğinin her iki tarafı  $[x_j^k, x_{j+1}^k]$  aralığında integrali alınırsa

$$\int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} \theta'(x) dx = \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} dx - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx$$

$$l_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) \sin^2(\lambda_k^n \theta(x)) dx$$

elde edilir. Bu son eşitlik aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$l_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} \frac{q_m(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} dx [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] \quad (4.18)$$

bulunur.

(4.18) eşitliğinin sağındaki son  $n$ - tane integrale kısmi integrasyon uygulanırsa:  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$  için

$$\int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} \frac{q_m(x)}{2\lambda_k^n \theta'(x)} dx [\sin(2\lambda_k^n \theta(x))] = o\left(\frac{1}{\lambda_k^{2n}}\right)$$

elde edilir.  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$  için bu değerler (4.18) eşitliğinde yazılırsa

$$l_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + o\left(\frac{1}{\lambda_k^{3n+1}}\right) \quad (4.19)$$

(4.8) asimptotik formülleri (4.18) eşitliğinde yazılırsa:

$$l_j^k = \frac{\pi}{\left(k - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \pi \left(k - \frac{1}{2}\right)^2} + o\left(\frac{1}{k^{1+\frac{1}{n}}}\right)\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^{2-\frac{m}{n}} x_j^k} \int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx + o\left(\frac{1}{k^{3+\frac{1}{n}}}\right)$$

bulunur. Landau sembolünün özellikleri kullanılırsa (4.17) elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

#### 4.1.2 Potansiyel Fonksiyonlar için Yapılandırma Formülü

Bu alt bölümde, nodal uzunluklar kullanılarak (4.1) denkleminin potansiyel fonksiyonlarının açık biçimi verilecektir.

**Teorem 4.1.4.**  $q_m(x)$   $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  fonksiyonları  $[0, \pi]$  aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda,  $k \rightarrow \infty$  iken, (4.1)-(4.3) probleminin potansiyel fonksiyonları aşağıdaki biçimdedir:

$$q_0(t) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_k^2 - \frac{\pi}{l_j^k} \lambda_k \right\},$$

$$q_m(t) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_k^{m+2} - \lambda_k^m + \frac{\pi}{l_j^k} (1 - \lambda_k) \right\}, \quad m = 1, 2, \dots, n - 1$$

dir. Burada  $j = j_k(x) = \{j: x_j^k < x\}$  dir.

**İspat:** Nodal uzunluklar için hesaplanan (4.19) asimptotik formülünde,  $t \in [x_j^k, x_{j+1}^k]$  için

ortalama değer teoremi uygulanırsa  $\int_{x_j^k}^{x_{j+1}^k} q_m(x) dx = q_m(t) l_j^k$  olmak üzere

$$l_j^k = \frac{\pi}{\lambda_k^n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2\lambda_k^{2n-m}} q_m(t) l_j^k + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{3n+1}}\right)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \lambda_k^m q_m(t) = 2\lambda_k^{2n} \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k^n l_j^k} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^{n+1}}\right) \quad (4.20)$$

elde edilir.

(4.20) eşitliğinde  $n = 1$  için

$$q_0(t) = 2\lambda_k^2 \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k l_j^k} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^2}\right) \quad (4.21)$$

elde edilir. Burada  $k \rightarrow \infty$  iken

$$q_0(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\lambda_k^2 \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k l_j^k} \right\}$$

bulunur.

(4.20) eşitliğinde  $n = 2$  için

$$q_0(t) + \lambda_k q_1(t) = 2\lambda_k^4 \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k^2 l_j^k} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^3}\right)$$

elde edilir. (4.21) değeri bu son eşitlikte dikkate alınır

$$q_1(t) = \frac{1}{\lambda_k} \left\{ 2\lambda_k^4 \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k^2 l_j^k} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^3}\right) - 2\lambda_k^2 \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k l_j^k} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^2}\right) \right\}$$

$$= 2 \left\{ \lambda_k^3 - \lambda_k + \frac{\pi}{l_j^k} (1 - \lambda_k) \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^4}\right) \quad (4.22)$$

elde edilir. Burada  $k \rightarrow \infty$  iken

$$q_1(t) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_k^3 - \lambda_k + \frac{\pi}{l_j^k} (1 - \lambda_k) \right\}$$

bulunur.

(4.20) eşitliğinde  $n = 3$  için

$$q_0(t) + \lambda_k q_1(t) + \lambda_k^2 q_2(t) = 2\lambda_k^6 \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k^3 l_j^k} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^4}\right)$$

elde edilir. (4.21) ve (4.24) değerleri bu son eşitlikte dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left\{ 2\lambda_k^6 \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k^3 l_j^k} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^4}\right) - 2\lambda_k^4 \left\{ 1 - \frac{\pi}{\lambda_k^2 l_j^k} \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^3}\right) \right\} \\ &= 2 \left\{ \lambda_k^4 - \lambda_k^2 + \frac{\pi}{l_j^k} (1 - \lambda_k) \right\} + O\left(\frac{1}{\lambda_k^6}\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir. Burada  $k \rightarrow \infty$  iken

$$q_2(t) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_k^4 - \lambda_k^2 + \frac{\pi}{l_j^k} (1 - \lambda_k) \right\}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse:  $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  için

$$q_m(t) = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_k^{m+2} - \lambda_k^m + \frac{\pi}{l_j^k} (1 - \lambda_k) \right\}$$

bulunur. Burada,  $\lambda_k^m$  ve  $l_j^k$  asimptotik formülleri sırasıyla (4.8) ve (4.17) formülleriyle tanımlanmaktadır.

## 4.2. Nümerik Hesaplamalar

Bu bölümde, sınır koşulunda parametre bulunduran  $n$ -potansiyelli (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin potansiyel fonksiyonunun ve sınır koşul parametrelerinin çeşitli özel durumları için teorem 4.1.1'de verilen öz değerlerin, teorem 4.1.2'de verilen nodal noktalarının ve teorem 4.1.3'de verilen nodal uzunluklarının asimptotik formüllerine sahip nümerik değerler verilmiştir.

**Örnek 4.2.1.** (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville sınır değer probleminde  $n=1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ve  $q_0(x) = x^2$ ,  $q_m(x) = 0$ ,  $m \geq 1$  alınmıştır.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$
8.44162	2.80883	3.2853	4.06093	4.93628	5.85695	6.80204	7.76177	8.73097	9.70666

**Tablo 4.1.**  $n=1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ve  $q_0(x) = x^2$ ,  $q_m(x) = 0$ ,  $m \geq 1$  için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin öz değerleri.

Tablo 4.1.'de, (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin Teorem 4.1.1 ile verilen asimptotik formüle sahip, spektrumuna ait ilk on öz değer gösterilmiştir. Bu elde edilen sayısal değerler, (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin öz değerlerinin reel olduğunu göstermektedir. Ayrıca  $k > 1$  için özdeğerlerin artan sayıda olduğu görülmektedir.

$x_j^k$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$j = 1$	4.9958x10 <sup>9</sup>	5.30936	1.39103	0.93192	0.712077	0.578275	0.48742	0.421471	0.371346	0.331928
$j = 2$	2.51607x10 <sup>12</sup>	162.999	3.46106	1.93918	1.44287	1.16308	0.977612	0.844282	0.743403	0.664262
$j = 3$	9.64308x10 <sup>13</sup>	3048.82	8.69608	3.14866	2.21574	1.76168	1.4735	1.26981	1.1169	0.997413
$j = 4$	1.28292x10 <sup>15</sup>	30440.8	26.1392	4.81426	3.06408	2.3828	1.97834	1.69953	1.49258	1.3318
$j = 5$	9.55375x10 <sup>15</sup>	196679	84.2692	7.44587	4.03841	3.03757	2.49585	2.13504	1.87124	1.66787
$j = 6$	4.9282x10 <sup>16</sup>	936574	261.678	12.0338	5.21615	3.74056	3.03045	2.57811	2.25374	2.00606
$j = 7$	1.97305x10 <sup>17</sup>	3.56943x10 <sup>6</sup>	751.941	20.4278	6.71527	4.51104	3.58747	3.03074	2.64099	2.34687
$j = 8$	6.56176x10 <sup>17</sup>	1.14923x10 <sup>7</sup>	1988.05	35.9537	8.71345	5.37471	4.17338	3.49523	3.03401	2.69081
$j = 9$	1.89392x10 <sup>18</sup>	3.24347x10 <sup>7</sup>	4863	64.381	11.4746	6.36561	4.79609	3.97423	3.4339	3.03842
$j = 10$	4.88828x10 <sup>18</sup>	8.23746x10 <sup>7</sup>	11096.5	115.389	15.3851	7.5288	5.46532	4.47078	3.8419	3.3903

**Tablo 4.2.**  $n = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ve  $q_0(x) = x^2, q_m(x) = 0, m \geq 1$  için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin nodal noktaları.

Tablo 4.2’de,  $k = \overline{1,10}$  (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin Teorem 4.1.2 ile verilen asimptotik formüle sahip nodal noktaları verilmiştir. Bu elde edilen sayısal değerler, (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminde  $k$  değeri arttıkça nodal noktalarının çalışılan aralıkta salındığı görülmektedir.

$l_j^k$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$j = 1$	2.51108x10 <sup>12</sup>	157.69	2.07003	1.00726	0.730797	0.584808	0.490192	0.422811	0.372057	0.332334
$j = 2$	9.39147x10 <sup>13</sup>	2885.82	5.23502	1.20949	0.772866	0.598594	0.49589	0.425532	0.373494	0.333151
$j = 3$	1.18649x10 <sup>15</sup>	27391.9	17.4431	1.66559	0.848335	0.621123	0.504833	0.42972	0.375682	0.33439
$j = 4$	8.27083x10 <sup>15</sup>	166238	58.13	2.63162	0.974332	0.654773	0.51751	0.435505	0.378665	0.336065
$j = 5$	3.97282x10 <sup>16</sup>	739895	177.408	4.58794	1.17774	0.702982	0.534606	0.443067	0.382497	0.338196
$j = 6$	1.48023x10 <sup>17</sup>	2.63286x10 <sup>6</sup>	490.263	8.39397	1.49912	0.770489	0.557021	0.452634	0.387251	0.340809
$j = 7$	4.58871x10 <sup>17</sup>	7.92285x10 <sup>6</sup>	1236.11	15.5259	1.99818	0.863661	0.585908	0.464493	0.393014	0.343935
$j = 8$	1.23774x10 <sup>18</sup>	2.09424x10 <sup>7</sup>	2874.95	28.4273	2.76114	0.990906	0.622714	0.478995	0.399891	0.347612
$j = 9$	2.99436x10 <sup>18</sup>	4.994x10 <sup>7</sup>	6233.5	51.0077	3.91056	1.16319	0.669226	0.496556	0.408007	0.351882
$j = 10$	6.63759x10 <sup>18</sup>	1.09536x10 <sup>8</sup>	12717.1	89.3313	5.61792	1.39466	0.727637	0.517676	0.417506	0.356795

**Tablo 4.3.**  $n = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ve  $q_0(x) = x^2, q_m(x) = 0, m \geq 1$  için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin nodal uzunlukları.

**Örnek 4.2.2.** (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville sınır değer probleminde  $n = 3, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ve  $q_0(x) = 1, q_1(x) = x, q_2(x) = x^2$  alınmıştır.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$
1.76044	1.59816	1.64676	1.72779	1.81372	1.89757	1.97748	2.05311	2.12464	2.19239

**Tablo 4.4.**  $n = 3, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ve  $q_0(x) = 1, q_1(x) = x, q_2(x) = x^2, q_m(x) = 0, m \geq 3$  için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin öz değerleri.

Tablo 4.4.'de, (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin Teorem 4.1.1 ile verilen asimptotik formüle sahip, spektrumuna ait ilk on öz değer gösterilmiştir. Bu elde edilen sayısal değerler, (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin öz değerlerinin reel olduğunu göstermektedir. Ayrıca  $k > 1$  için özdeğerlerin artan sayıda olduğu görülmektedir.

$x_j^k$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$j=1$	1428.53	4.97517	1.63411	1.00928	0.744862	0.594912	0.496931	0.427386	0.375261	0.334648
$j=2$	10523.5	19.3618	4.13642	2.2181	1.55822	1.21935	1.00862	0.862952	0.755418	0.672404
$j=3$	34627.4	51.1176	8.18577	3.77343	2.48805	1.89313	1.54458	1.31179	1.14342	1.01509
$j=4$	81083	108.2	14.461	5.82224	3.58237	2.63605	2.11434	1.77899	1.54221	1.36451
$j=5$	157233	198.567	23.6409	8.5115	4.88916	3.46793	2.72742	2.26964	1.95475	1.72249
$j=6$	270419	330.175	36.4044	11.9882	6.45641	4.40857	3.39332	2.78884	2.38398	2.09085
$j=7$	427985	510.984	53.4302	16.3993	8.33212	5.47779	4.12158	3.34168	2.83285	2.47139
$j=8$	637272	748.949	75.3972	21.8918	10.5643	6.69538	4.92171	3.93325	3.30431	2.86595
$j=9$	905625	1052.03	102.984	28.6126	13.2009	8.08116	5.80324	4.56864	3.80132	3.27633
$j=10$	$1.24038x10^6$	1428.18	136.87	36.7088	16.29	9.65493	6.77567	5.25295	4.32681	3.70435

**Tablo 4.5.**  $n=3$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=1$  ve  $q_0(x)=1$ ,  $q_1(x)=x$ ,  $q_2(x)=x^2$ ,  $q_m(x)=0$ ,  $m \geq 3$  için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin nodal noktaları.

Tablo 4.5'de,  $k=1,10$  (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin Teorem 4.1.2 ile verilen asimptotik formüle sahip nodal noktaları verilmiştir. Bu elde edilen sayısal değerler, (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminde  $k$  değeri arttıkça nodal noktalarının çalışılan aralıkta salındığı görülmektedir.

$l_j^k$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$j=1$	$4.88304x10^{11}$	742.698	5.56684	1.40117	0.842973	0.631566	0.513938	0.43642	0.380528	0.337935
$j=2$	$1.69489x10^{13}$	12554.6	27.8196	2.61601	1.0694	0.704293	0.544949	0.452062	0.389336	0.343297
$j=3$	$2.06445x10^{14}$	111161.	131.139	6.11863	1.55736	0.836556	0.595963	0.476256	0.402429	0.351055
$j=4$	$1.40863x10^{15}$	640536.	521.514	15.3745	2.55746	1.06657	0.675886	0.511706	0.420791	0.361616
$j=5$	$6.67244x10^{15}$	$2.74271x10^6$	1764.79	37.9682	4.52613	1.45578	0.797935	0.56223	0.445763	0.375523
$j=6$	$2.46188x10^{16}$	$9.47596x10^6$	5208.28	89.2697	8.25984	2.09987	0.981142	0.633039	0.479115	0.393477
$j=7$	$7.57686x10^{16}$	$2.7865x10^7$	13718.	198.392	15.0968	3.14441	1.25238	0.731114	0.523132	0.416357
$j=8$	$2.03245x10^{17}$	$7.23092x10^7$	32867.7	417.338	27.2088	4.80608	1.64899	0.865673	0.58072	0.445254
$j=9$	$4.89539x10^{17}$	$1.69857x10^8$	72742.	834.402	48.0097	7.40124	2.22223	1.04876	0.655541	0.481503
$j=10$	$1.0813x10^{18}$	$3.67935x10^8$	150542.	1593.05	82.7119	11.3833	3.04153	1.29598	0.75217	0.526732

**Tablo 4.6.**  $n=3$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=1$  ve  $q_0(x)=1$ ,  $q_1(x)=x$ ,  $q_2(x)=x^2$ ,  $q_m(x)=0$ ,  $m \geq 3$  için (4.1)-(4.3) Sturm-Liouville probleminin nodal uzunlukları.

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Tez çalışmasında, Sturm-Liouville denklemi birden fazla fonksiyon içermesi bakımından klasik Sturm-Liouville denkleminde farklıdır. Buna ek olarak, problemin sınır koşullarının birinde spektral parametre lineer halde bulunmaktadır. Bu tür problemler için ters problem çeşitli yöntemlerle araştırılmıştır. Bu çalışmada ise Prüfer dönüşümü kullanılmıştır. Bu dönüşüm yardımıyla, özdeğerlerin ve nodal parametrelerin asimptotik formülleri elde edilmiştir. Bu asimptotik formüllerin bilgisiyle, potansiyel fonksiyonlar için bir formül bulunmuştur. Yani, çalışmada ele alınan  $n$ -potansiyelli Sturm-Liouville operatörünün biçimi bulunmuştur.

Farklı tipte bir operatör ve/veya bazı sınır koşulları dikkate alınarak Prüfer dönüşümü yardımıyla benzer hesaplamalar yapılabilir. Örneğin, bu operatör ile birlikte kuadratik olarak parametreye bağlı sınır koşulları ele alınabilir. Periyodik veya anti-periyodik sınır koşullu difüzyon operatörü ele alınabilir.

## KAYNAKLAR

- [1]. Naimark, M. A., *Linear Differential Operators I*; Nauka: Moscow, 1969; p 129.
- [2]. Levitan, B. M.; Sargsjan, I. S., *Sturm-Liouville and Dirac Operators*; Kluwer Academic Publishers: Netherlands, 1991.
- [3]. Kerimov, N.B.; Allakhverdiev, T.I., On a certain boundary value problem.I. *Differentsial'nye Ukravneniya* **1993**, 29, (1), 54-60.
- [4]. Kerimov, N.B.; Allakhverdiev, T.I., On a certain boundary value problem.II. *Differentsial'nye Ukravneniya* **1993**, 29, (6), 952-960.
- [5]. Mamedov, Kh. R., On One Bounday Value Problem with Parameter in the Boundary Conditions. *Spectral Theory of Operators and its Applications* **1997**, 11, 117-121.
- [6]. Kerimov, N.B.; Mamedov Kh.R , On a Boundary Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions. *Sib. Math. Jour.* **1999**, 40, (2), 325-335.
- [7]. Ambartsumyan, V.A., Über eine Frage der Eigenwerttheorie. *Zeitschrift für Physik*, **1929**, 53, 690-695.
- [8]. Borg, G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. *Acta Mathematica* **1946**, 78, (1), 1-96.
- [9]. Levinson, N., The Inverse Sturm-Liouville Problem, *Mat. Tideskr. B.* **1949**, 25, 25-30.
- [10]. Gel'fand, I. M. and Levitan, B. M., On the determination of a differential equation from its spectral function, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya* **1951**, 15, 4 309-360; translated in *American Mathematical Society Translate*, **1955**, 1, 253.
- [11]. Marchenko, V. A., Some problems in the theory of one dimensional linear differential operators of second order, *1. Trudy Mosk. Mat. Obshch.* **1952**, 1, 327-420.
- [12]. Hoschtadt, H., The Inverse Sturm-Liouville Problem. *Communications Pure and Applied Mathematics* **1973**, 26, 715-729.
- [13]. McLaughlin, J.R., Inverse Spectral Theory Using Nodal Points as Data – A Uniqueness Result. *Journal of Differential Equations* **1988**, 73, 354-362.
- [14]. Hald, O.L.; McLaughlin, J.R., Solutions of Inverse Nodal Problems. *Inverse Problems* **1989**, 5, 307-347.
- [15]. Chen, Y.T.; Cheng, Y. H.; Law, C.K.; Tsay J.,  $L^1$  Convergence of the Reconstruction Formula for the Potential Function. *Proceedings of the American Mathematical Society* **2002**, 130, 2319-2324.
- [16]. Koyunbakan, H.; Panakhov, E.S., Half Inverse Problem for Diffusion Operators on the Finite İnterval. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **2007**, 326, 1024-1030.
- [17]. Koyunbakan, H.; Yılmaz, E., Reconstruction of the Potential Function and Its Derivatives for the Diffusion Operator. *Verlag der Zeitschrift für Naturforch* **2008**, 63a, 127-130.

- [18]. Koyunbakan, H., Reconstruction of Potential Function for Diffusion Operator. *Numerical Functional Analysis and Optimization* **2009**, 30, (1-2), 1-10.
- [19]. Koyunbakan, H., Inverse Problem for a Quadratic Pencil of Sturm-Liouville Operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **2011**, 378, 549-554.
- [20]. Yang, C. F., Inverse Nodal Problems for the Sturm-Liouville Operator with a Constant Delay. *Journal of Differential Equations* **2014**, 257, (4), 1288-1306.
- [21]. Pinasco, J.P.; Scarola, C.A., Nodal Inverse Problem for Second Order Sturm-Liouville Operators with Indefinite Weights. *Applied Mathematics and Computation* **2015**, 256, 819-830.
- [22]. Browne, P.J.; Sleeman, B.D., Inverse Nodal Problems for Sturm-Liouville Equations with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions. *Inverse Problems* **1996**, 12, 377-381.
- [23]. Yılmaz E.; Koyunbakan H., Reconstruction of Potential Function and Its Derivatives for Sturm-Liouville Problem with Eigenvalues in Boundary Condition. *Inverse Problems in Science and Engineering* **2010**, 18, (7), 935-944.
- [24]. Panakhov, E.S.; Koyunbakan, H.; İc, U., Reconstruction Formula for the Potential Function of Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter Boundary Condition. *Inverse Problems in Science and Engineering* **2010**, 18, (1), 173-180.
- [25]. Keskin, B.; Özkan, A.S., Inverse Nodal Problems for Impulsive Sturm-Liouville Equation with Boundary Conditions Depending on the Parameter. *Advances in Analysis* **2017**, 2(3), 151-156.
- [26]. Şen, E., A Regularized Trace Formula and Oscillation of Eigenfunctions of a Sturm-Liouville Operator with Retarded Argument at 2 Points of Discontinuity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **2017**, 40, (18), 7051-7061.
- [27]. Şen, E., Computation of Trace and Nodal Points of Eigenfunctions for a Sturm-Liouville Problem with Retarded Argument. *Cumhuriyet Science Journal* **2018**, 39, (3), 597-607.
- [28]. Guseinov, I. M.; Nabiev A. A.; Pashaev R. T., Transformation Operators and Asymptotic Formulas for the Eigenvalues of a Polynomial Pencil of Sturm-Liouville Operators. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal* **2000**, 41, 554-566.
- [29]. Guseinov, I. M.; Nabiev A. A., A Class of Inverse Problems for a Quadratic Pencil of Sturm-Liouville Operators. *Differentsial'nye Uravneniya* **2000**, 36, (3), 418-420.
- [30]. Nabiev A.A., On a Fundamental System of Solutions of the matrix Schrödinger Equation with a Polynomial Energy-Dependent Potential. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **2010**, 33, (11), 1372-1383.
- [31]. Goktas S.; Koyunbakan H. ; Gulsen T., Inverse Nodal Problem for Polynomial Pencil of Sturm-Liouville Operator. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **2018**, 41, 7576-7582.
- [32]. Shukurov, A. Sh., The Inverse Problem for a Diffusion Operator. *Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan* **2009**, 30, 105-110.

- [33]. Yang, C. F., Inverse Nodal Problems for the Sturm–Liouville Operator with a Constant Delay. *Journal of Differential Equations* **2014**, 257, (4), 1288-1306.
- [34]. Kaplan, M.,  $n$ -Potansiyel İçeren Sturm-Liouville Operatörü için Ters Nodal Problem, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2019.
- [35]. Kolmogorov, A.N.; Fomin, S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Vol. 2., Graylock press, Albany, N.Y, 1961.
- [36]. Suhubi, E.S., *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ fakı yayınları.
- [37]. Lukkassen, D., A short Introduction to Sobolev Spaces and Applications for engineering students, 2004.
- [38]. Musayev, B.; Alp, M.; Mustafayev, N.; Ekinciöglü, İ., *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I*; Tekaç Eylül Yayıncılık: Ankara, Türkiye, 2003.
- [39]. Yılmaz, E., Diferansiyel Operatörler İçin Ters Nodal Problem, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2012.
- [40]. Njue, J. N., Nodal Point data for inverse Sturm-Liouville Problems, Master of Science, Iowa State University, USA, 2003.
- [41]. Özbek, H.; Feyiz, S. D., *Kuantum Mekaniğine giriş; Introduction to Quantum Mechanics*, Griffiths, D.J., Nobel Yayınları., 2010.
- [42]. Asmar, N. H., *Partial Differential Equations with Fourier series and Boundary Value Problems*, Pearson Education, 2000.
- [43]. Gasymov, M. G.; Guseinov, G. Sh., Determination of a diffusion operator from the spectral data, *Doklady Akademii Nauk Azerbaijan SSSR* **1981**, 37, (2), 19-23.
- [44]. Wazwaz, A., *Partial differential equations methods and applications*, Taylor and Francis, 2002.
- [45]. Sharma, L. K.; Luhanga, P. V.; Chimidza, S., Potentials for the Klein-Gordon and Dirac equations, *Chiang Mai Journal of Science* **2011**, 38, 4 514-526.
- [46]. Birkhoff, G.; Rota, G.C., *Ordinary Differential Equations*, 4 edition: Ginn, John Wiley & Sons, 1989; p. 416.