



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



LİE RAKOİDLER ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

Zeynep Nur IŞIK

Matematik Anabilim Dalı

İzmir
2021

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİE RAKOİDLER ÜZERİNE

Zeynep Nur IŞIK

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fulya ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Yüksek Lisans Programı

İzmir

2021

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**Lie Rakoidler Üzerine**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

05/03/2021

İmzası

Zeynep Nur IŞIK

ÖZET

Lie Rakoidler Üzerine

IŞIK, Zeynep Nur

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fulya Şahin

Mart 2021, 42 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, tezde çalışılan konular sunulmuş ve daha önce yapılan çalışmalara değinilerek literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılan bazı cebirsel, topolojik ve diferensiyellenebilir yapılar ile ilgili temel tanımlar ve örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, rak yapısı üzerinde çalışılmıştır. Ekli rak, noktasal rak ve Lie rak yapıları ile digrubun rak yapısı ve lineer Lie digrubun Lie rak yapısı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise Lie rakoid yapıları incelenmiştir. Rakoid, ekli rakoid ve Lie rakoidler üzerinde çalışılmıştır. Lie grupoid ile birleşen Lie rakoid yapısı incelenmiştir.

Anahtar sözcükler: Grupoid, Lie grupoid, rak, ekli rak, noktasal rak, Lie rak, rakoid, noktasal rakoid, ekli rakoid, Lie rakoid, Lie cebiri, Lie algebroid

ABSTRACT**On Lie Rackoids**

IŞIK, Zeynep Nur

MSc. in Mathematics Department

Supervisor: Doç. Dr. Fulya Şahin

March 2021, 42 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter consists of the introductory part of the thesis. The topics studied in the thesis are presented and a literature review has been made by referring to the previous studies.

In the second chapter, basic definitions and examples related to some algebraic, topological and differentiable structures used in the other parts of the thesis are given.

In the third chapter, on the rack structure was studied. Augmented rack, pointed rack and Lie rack structures are examined. The rack structure of digroup and Lie rack structure of linear Lie digroup are examined.

In the fourth chapter, Lie rackoid structures are studied. Rackoid, augmented rackoid and Lie rackoids are worked on. The construction of the Lie rackoid associated to a Lie groupoid is examined.

Key Words: Groupoid, Lie groupoid, rack, augmented rack, pointed rack, Lie rack, rackoid, pointed rackoid, augmented rackoid, Lie rackoid, Lie algebra, Lie algebroid

TEŐEKKÖR

Beni bu konuda alıŐmaya teŐvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren değerli danıŐman hocam Sayın Doç. Dr. Fulya Şahin' e en iten duygularımla teŐekkÖr ederim. 119F065 nolu "Lie Grupoidler Ve Genelleştirilmiş Altın Manifolddar" başlıklı TÖBİTAK projesinde bursiyer olarak gÖrev aldım. Destekleri için TÖBİTAK'a teŐekkÖr ederim. Maddi ve manevi desteğini esirgemeyen her zaman yanımda olan sevgili aileme teŐekkÖr ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Cebirsel Kavramlar	3
2.2 Topolojik Kavramlar	4
2.3 Diferensiyellenebilir Manifoldlar	7
3 RAKLAR VE LİE RAKLAR	12
3.1 Raklar	12
3.2 Lie Rak	23
4 LİE RAKOİDLER	24
4.1 Rakoidler	24
4.2 Ekli Rakoidler	27
4.3 Lie Rakoid Yapısı	29
4.3.1 Ekli Lie Rakoid	37
KAYNAKLAR DİZİNİ	39
ÖZGEÇMİŞ	42

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
G, H	Cebirsel grup
g^{-1}	g nin tersi
\mathbb{Q}	Rasyonel sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^*	Sıfırdan farklı Reel sayılar kümesi
X	Herhangi bir küme
ϱ	Etki dönüşümü
e	Grubun birim elemanı
f	Dönüşüm
f^{-1}	f in tersi
d	Γ nın morfizmi
f_*	Türev dönüşümü
df	Türev dönüşümü

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
M, N	Differensiyellenebilir manifold
$T_p M$	M manifoldunun tanjant uzayı
$T_{f(p)} N$	N manifoldunun tanjant uzayı
\mathbb{R}^n	n-boyutlu Öklidyen uzay
M'	M manifoldunun alt manifoldu
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
$T_p^* M$	$T_p M$ vektör alanının duali
$\chi(M)^*$	$\chi(M)$ Vektör alanlarının uzayının duali
Φ	Lineer dönüşüm
π_1	Birinci izdüşüm
f^*	Geri çağırma dönüşümü
$[\cdot, \cdot]$	Lie braket
V, K	Bir cisim
A	Vektör demeti
$\Gamma(A)$	Kesitlerin uzayı

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
L	Lie cebri
Γ_0	Nesnelerin kümesi
s	Kaynak dönüşümü
t	Hedef dönüşümü
$\Gamma^{(2)}$	$\Gamma \times \Gamma$
i	Ters dönüşümü
Σ	İkili kesit
σ	İkili kesit
ℓ_Σ	Soldan dönüşüm
r_Σ	Sağdan dönüşüm
c_Σ	Eşlenik dönüşümü
\triangleright	Rak çarpımı
\rightarrow, \leftarrow	Digrup işlemi
$I(X)$	X digrubunun ters eleman kümesi
$E(X)$	X digrubunun birim eleman kümesi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
f_d	G, H arasındaki grup morfizmi
f_u	X, Y arasındaki rak morfizmi
W	R -modül
Γ	Morfizmler kümesi
ϵ	Γ nın nesne dönüşümü
(Γ, M)	Bir yarı-önkategori
Γ_m^n	Γ daki elemanların kaynak n ve hedef m
$\underline{\sigma}$	M nin bire-bir ve örten bir dönüşümü
γ	Γ nın ikili kesiti
v	Γ nın ikili kesiti
$Bis(\Gamma)$	Γ nın ikili kesitler kümesi
\underline{g}	g ile ilişkili bir diffeomorfizm

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
Σ^{-1}	Σ nın ters ikili kesiti kümesi
T_s	s kaynak dönüşümünün tanjant uzayı
T_t	t hedef dönüşümünün tanjant uzayı
$Cek(T_s)$	s kaynak dönüşümünün çekirdeği
$Cek(T_t)$	t hedef dönüşümünün çekirdeği
Ad_Σ	Adjoint dönüşüm
ω, η	1-form
φ, ψ	Diffeomorfizm

1 GİRİŞ

Rak kavramı ilk olarak 1959 yılında Conway ve Wraith (Conway and Wraith , 1959) tarafından 'wrack' adı ile ortaya çıkarılmıştır. Conway ve Wraith, çalışmalarında bir gruptaki eşlenik işlemleri üzerinde durmuşlardır. Bir rakın, bir grubun eşlenik işlemi ile elde edildiğini görmüşlerdir. Rakların, genel durumları ve esas topolojik uygulamalarından ziyade özel durumlarda basit cebiri üzerinde çalışmışlardır.

Topolojik anlamda kapsamlı çalışma 'quandle' adı ile Joyce (Joyce , 1982) tarafından yapılmıştır. Joyce, basit cebirsel yapıları ve çeşitli örneklerinin yanı sıra augmented quandle (ekli rak) kavramını tanımlamıştır.

Kauffman (Kauffman , 1991), rakları 'kristal' olarak adlandırmıştır. Brieskorn (Brieskorn , 1988) ise 'otomorfik küme' olarak ifade etmiştir. Son olarak Fenn ve Rourke (Fenn and Rourke , 1991) çalışmalarında 'rack' olarak adlandırmışlardır. Raklar ile ilgili detaylı bilgi bu (Fenn and Rourke , 1991) çalışmada mevcuttur. Bu şekilde farklı isimlendirmeler ile çalışılan bu kavram, tezde rak olarak ifade edilerek incelenmiştir.

Raklar üzerinde farklı çalışmalar yapılmıştır. Bu tez, Laurent-Gengoux ve Wagemann (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016), Kinyon (Kinyon , 2007) ve Covez (Covez , 2010) in yapmış olduğu çalışmaların derlemesi olarak hazırlanmıştır.

Bir X rakı, özel sabit bir nokta ile $1 \triangleright x = x$ ve $x \triangleright 1 = 1$ şartını sağlıyorsa noktasal rak olarak ifade edilmiştir. (Kinyon , 2007) X noktasal rakı, rak yapı dönüşümleri diferensiyellenebilir ise Lie rak olarak adlandırılmıştır.

(Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ önkategorisi ile bütün ikili kesitler için $\Sigma \triangleright - : \Gamma \rightarrow \Gamma$ bire-bir ve örten bir dönüşüm ve

$$\Sigma \triangleright (\mathcal{T} \triangleright \gamma) = (\Sigma \triangleright \mathcal{T}) \triangleright (\Sigma \triangleright \gamma)$$

kendi üzerine dağılma özelliğini sağlıyorsa rakoid yapısı oluşturur. Buradan

yola çıkararak bir rakoidin rak yapısı da taşıdığı görülmüştür.

Bir rakoidin diferensiyellenebilir versiyonu olan bir Lie rakoid, (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ önkategorisi ile diferensiyellenebilir ikili kesitleri için $\Sigma \triangleright - : \Gamma \rightarrow \Gamma$ diffeomorfizmi ve \triangleright ile işlemi kendi üzerine dağılma özelliğini sağlamalıdır. Lie rakoidin rak çarpımı, bütün ikili kesitlerin kümesi üzerinde değil, sadece diferensiyellenebilir ikili kesitlerin üzerinde tanımlandığından dolayı rakoidin verilen tanımı gözönüne alındığında bir Lie rakoid, bir rakoid değildir.

Bu tez dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, tezde çalışılan konular sunulmuş ve daha önce yapılan çalışmalara değinilerek literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılan bazı cebirsel, topolojik ve diferensiyellenebilir yapılar ile ilgili temel tanımlar ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde, rak yapısı üzerinde çalışılmıştır. Ekli rak, noktasal rak ve Lie rak yapıları ile digrubun rak yapısı ve lineer Lie digrubun Lie rak yapısı incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise Lie rakoid yapıları incelenmiştir. Rakoid, ekli rakoid ve Lie rakoidler üzerinde çalışılmıştır. Lie grupoid ile birleşen Lie rakoid yapısı incelenmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, üç alt bölümden oluşmuştur. Birinci alt bölümde, diğer bölümlerde kullanılan grup ile etki kavramlarının özellikleri verilmiştir. İkinci alt bölümde, topolojik uzay tanımı verilmiştir. Topolojik grup ile grupoid kavramları örnekler ile sunulmuştur. Üçüncü alt bölümde, Lie cebiri, Lie algebroid ile Lie grupoid ve bu kavramların anlaşılması için gerekli olan bazı kavramlar sunulmuştur.

2.1 Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Mucuk , 2010) G , boştan farklı bir küme olmak üzere G üzerinde bir $m : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ işlemi verilsin. Eğer m işlemi,

$$1) \text{ Her } g, h, k \in G \text{ için } g(hk) = (gh)k$$

2) Her $g \in G$ için $ge = eg = g$ olacak şekilde bir tek $e \in G$ vardır. Bu elemana birim eleman denir.

3) Her $g \in G$ için $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ olacak şekilde bir tek $g^{-1} \in G$ vardır. Bu elemana ters eleman denir.

şartlarını sağlıyorsa G ye bir grup denir.

Örnek 2.1.1. (Mucuk , 2010) \mathbb{Q} rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre bir gruptur.

Örnek 2.1.2. (Mucuk , 2010) \mathbb{R} reel sayılar kümesi toplama işlemine göre gruptur. Ayrıca sıfırdan farklı reel sayıların kümesi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ çarpma işlemine göre gruptur.

Tanım 2.1.2. (Jacobson , 1985) X herhangi bir küme ve G bir grup olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} \varrho : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \varrho(g, x) = g \cdot x \end{aligned}$$

dönüşümü

i) Her $x \in X$ ve $g, h \in G$ için

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$$

ii) Her $x \in X$ ve $e \in G$ birim eleman için

$$e \cdot x = x$$

şartlarını sağlıyorsa G grubu X kümesi üzerine soldan etki eder denir. Bu etki ile birlikte X bir G -küme adını alır.

Örnek 2.1.3. (Jacobson , 1985) Bir G grubunun bir X kümesi üzerine etkisi $g \cdot x = x$ aşikar etki denir. $g, g_1 \in G$ için

i) $g \cdot (g_1 \cdot x) = g \cdot x = x$

$$(gg_1) \cdot x = x$$

buradan $g \cdot (g_1 \cdot x) = (gg_1) \cdot x$ olur.

ii) $e \cdot x = x$ tanımdan gelir.

Tanım 2.1.3. (Smith , 2016) R , birimli bir halka ve K da değişmeli grup olsun. Bir $R \times K \rightarrow K, (a, x) \mapsto ax$ işlemi tanımlansın. Eğer

i) $\forall x, y \in K$ ve $a \in R$ için $a(x + y) = ax + ay$,

ii) $\forall x \in K$ ve $a, b \in R$ için $(a + b)x = ax + bx$,

iii) $\forall x \in K$ ve $a, b \in R$ için $(ab)x = a(bx)$,

iv) $\forall x \in K$ için $1x = x$

şartları sağlanıyor ise K , bir R -modüldür denir.

2.2 Topolojik Kavramlar

Tanım 2.2.1. (Janich , 1984) X boştan farklı bir küme ve τ , X in herhangi alt kümelerinin bir ailesi olsun.

A1) τ nun elemanlarının keyfi birleşimi τ ya aittir.

A2) τ nun elemanlarının sonlu kesişimi τ ya aittir.

A3) X ve \emptyset τ ya aittir.

Yukarıdaki şartlar sağlanıyorsa, τ ya topoloji denir. (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

Örnek 2.2.1. (Mucuk , 2010) X boştan farklı bir küme olsun. $\tau = P(X)$ kuvvet kümesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerindeki ayrık topoloji denir.

Tanım 2.2.2. (Janich , 1984) X ve Y topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer, Y 'nin her açığının f altında ters görüntüsü X 'de açık ise f süreklidir denir.

Örnek 2.2.2. (Mucuk , 2010) (X, τ_1) ve (Y, τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere sabit olan bir $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ fonksiyonu süreklidir. f fonksiyonu sabit ise her $x \in X$ için $f(x) = c$ olacak şekilde bir $c \in Y$ vardır. Eğer B kümesi Y de açık bir küme ise

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} X, & c \in B \\ \emptyset, & c \notin B \end{cases}$$

ters görüntüsü de X de açıktır.

Tanım 2.2.3. (Janich , 1984) X ve Y topolojik uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü verilsin. Eğer, f dönüşümü birebir ve örten, f, f^{-1} sürekli ise f e homeomorfizm denir. X ve Y topolojik uzaylarına da homeomorf uzaylar denir.

Tanım 2.2.4. (Janich , 1984) Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu topolojik uzaya kompakt denir.

Örnek 2.2.3. (Janich , 1984) X bir kompakt topolojik uzay ve $A \subset X$ yerel sonlu bir altküme olsun. Buradan, A sonludur. Diğer taraftan, eğer $A \subset X$ sonsuz ise A nın sonsuz çokluktaki komşuluklarını içeren $x \in X$ vardır.

Tanım 2.2.5. (Bourbaki , 1966) (G, \cdot) bir grup ve G üzerinde topoloji tanımlansın. Eğer, aşağıdaki özellikler sağlanır ise G ye topolojik grup denir.

TG1) $G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow xy$ dönüşümü süreklidir.

TG2) $G \rightarrow G, x \rightarrow x^{-1}$ dönüşümü süreklidir.

Örnek 2.2.4. (Bourbaki , 1966) Her G grubu ayrık topoloji ile bir topolojik gruptur. Bu topolojik gruba aşikar topolojik grup denir.

Tanım 2.2.6. (Higgins , 1971) Bir Γ kategorisi; nesnelere kümesi Γ_0 ve morfizmlerin kümesi Γ ile birlikte aşağıdaki yapı dönüşümlerinden meydana gelir. Bu yapı dönüşümleri; sırasıyla kaynak ve hedef dönüşümü $s, t : \Gamma \rightarrow \Gamma_0, x \in \Gamma_0$ olmak üzere nesne dönüşümü $e : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma, x \mapsto 1_x$ ve

$$\Gamma^2 = \{(b, a) \in \Gamma \times \Gamma : s(b) = t(a)\}$$

üzerinde tanımlı $m : \Gamma^2 \rightarrow \Gamma, (b, a) \mapsto ba$ kısmi çarpımdır. Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlamalıdır:

i) Her $(b, a) \in \Gamma^2$ için $s(ba) = s(a)$ ve $t(ba) = t(b)$,

ii) Her $a, b, c \in \Gamma$ için $s(b) = t(a)$ ve $s(c) = t(b)$ olmak üzere $c(ba) = (cb)a$,

iii) Her $x \in \Gamma_0$ için $s(1_x) = t(1_x) = x$,

iv) Her $a \in \Gamma$ için $a1_{s(a)} = a$ $1_{t(a)}a = a$.

Örnek 2.2.5. (Bourbaki , 1966) Nesnelere kümesi diferensiyellenebilir manifoldlar, morfizmlerin kümesi bu manifoldlar arasındaki diferensiyellenebilir dönüşümler ve kısmi çarpım da diferensiyellenebilir dönüşümlerin bileşkesi alırsa diferensiyellenebilir manifoldlar ve diferensiyellenebilir dönüşümlerin diferensiyel topolojik kategorisi elde edilir.

Tanım 2.2.7. (Higgins , 1971) Bir Γ kategorisinde her bir $d \in \Gamma$ morfizmi için

* $s(d) = t(d^{-1})$

* $t(d) = s(d^{-1})$

* $dd^{-1} = 1_{s(d)}$

* $d^{-1}d = 1_{t(d)}$

şartlarını sağlayan $d^{-1} \in \Gamma$ tersi varsa Γ 'ye bir grupoid denir. Bir Γ grupoidinde $x, y \in \Gamma_0$ için x 'den y 'ye giden morfizmlerin kümesi $\Gamma(x, y)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.6. (Mucuk , 2010) X bir küme, G bir grup olmak üzere $X \times G \times X$ aşağıdaki işleme göre X üzerinde bir grupoid oluşturur. $x, y \in X$ için $(y, g, x) \in X \times G \times X$ üçlüsü x den y ye morfizm olarak alınır ve kısmi işlemi

$$(z, h, y) \circ (y, g, x) = (z, hg, x)$$

olarak tanımlanır. Buna göre $x \in X$ noktasındaki birim morfizm $e \in G$ birim eleman olmak üzere (x, e, x) ve (y, g, x) nin tersi (x, g^{-1}, y) dir.

2.3 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.3.1. (Yano ve Kon , 1984) M bir Hausdorff uzay ve U_α kümeleri R^n nin açık alt kümeleri olmak üzere $x_\alpha : U_\alpha \subset R^n \rightarrow M$ birebir dönüşümleri verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa M topolojik uzayına n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir:

- i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$,
- ii) Her α, β için $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ olmak üzere $x_\alpha^{-1}(W)$ ve $x_\beta^{-1}(W)$, R^n de açık kümeler ve $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ dönüşümleri diferensiyellenebilirdir,
- iii) (U_α, x_α) ailesi, (i) ve (ii) şartlarını sağlayan maksimal ailedir.

Tanım 2.3.2. (Şahin , 2012) Diferensiyellenebilir manifoldlar arasındaki her diferensiyellenebilir $f : M \rightarrow N$ dönüşümü, bu manifoldlara karşılık gelen tanjant uzayları arasında bir $df = f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ lineer dönüşümü indirger. Bu dönüşüme diferensiyel (türev) dönüşümü denir.

Tanım 2.3.3. (Brickell and Clark , 1970) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar, $F : M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. Eğer $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ birebir ise F ye $p \in M$ de bir immersiyondur denir.

Tanım 2.3.4. (Brickell and Clark , 1970) M' ve M iki manifold olsun. Eğer M' , M nin bir alt kümesi ve $j : M' \rightarrow M$ doğal dahil etme dönüşümü bir immersiyon ise M' manifolduna, M manifoldunun altmanifoldu denir.

Tanım 2.3.5. (Brickell and Clark , 1970) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar, $F : M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. Eğer $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ örten ise F ye $p \in M$ noktasındaki submersiyondur denir.

Tanım 2.3.6. (*Şahin , 2012*) M bir manifold olsun. $p \in M$ olmak üzere T_pM vektör uzayı olsun.

$$X : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_pM, p \mapsto X_p$$

ile tanımlı X dönüşümüne bir vektör alanı denir. Vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ile gösterilir.

T_pM tanjant uzayının duali olan

$$T_p^*M = \{\eta : T_pM \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanan η lineer fonksiyonlarının vektör uzayıdır. $\chi(M)$ vektör alanlarının uzayının duali

$$\chi(M)^* = \{\eta : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} C^\infty(M, \mathbb{R})\}$$

şekindedir. $\chi(M)^*$ in elemanlarına dual vektör alanı veya 1-form denir.

Tanım 2.3.7. (*Lee , 2002*) A ve M diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi : A \rightarrow M$ diferensiyellenebilir örten submersiyon olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $(A, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ dörtlüsüne vektör demeti denir.

- 1) Her $n \in M$ için $\pi^{-1}(n) = A_n$ n -boyutlu vektör uzay yapısı olmalıdır.
- 2) Her $n \in M$ noktası için bir U komşuluğu ve bir $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ diffeomorfizmi olmalıdır öyle ki her $n \in M$ için $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ birinci izdüşüm $\pi_1(\Phi(\pi^{-1}(n))) = n$, $\Phi : \pi^{-1}(n) \rightarrow \{n\} \times \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümdür.

Burada A_n vektör uzayına vektör demetinin lifi denir.

Örnek 2.3.1. (*Kobayashi and Nomizu , 1963*) M bir manifold olsun. M nin tüm p noktalarındaki T_pM tanjant uzaylarının birleşimi $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ dir. Bu şekilde tanımlı TM bir vektör demetidir. Bu vektör demetine tanjant demeti denir.

Tanım 2.3.8. (*Kobayashi and Nomizu , 1963*) M bir manifold ve R de M üzerinde herhangi bir tensör alanı olsun. $\chi(M)$ vektör alanlarının uzayı ve ϕ_t 1-parametrel dönüşümlerin grubu olsun. Bu durumda $x \in M, t \in I \subset \mathbb{R}$ ve $X \in \chi(M)$ olmak üzere

$$(L_X R)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (R(x) - (\phi_t R)(x))$$

ile tanımlanan L_X operatörüne X vektör alanına göre Lie türev denir.

Tanım 2.3.9. (Şahin , 2012) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Burada $f_{*m} : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$, türev dönüşümü olmak üzere $f^* : T_{f(m)} N^* \rightarrow T_m M^*$, f_* dönüşümü

$$f^*(\alpha_{f(m)})(X_m) = \alpha_{f(m)}(f_*(X_m))$$

şeklinde tanımlanır. Bu f^* dönüşüme geri çağırma dönüşümü denir.

Tanım 2.3.10. (Varadarajan , 2004) K bir cisim ve V bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Ayrıca V üzerine $[x, y]$ ve köşeli parantez işlemi denilecek bir ikili işlem olsun. Eğer ikili işlemi

$$L1) \text{ Her } x, y, z \in V \text{ ve her } a, b \in K \text{ için } [ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z].$$

$$L2) \text{ Her } x \in V \text{ için } [x, x] = 0.$$

$$L3) \text{ Her } x, y, z \in V \text{ için } [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

özelliklerini sağlıyor ise o zaman, V vektör uzayı bu ikili işlem ile bir Lie cebiri adını alır.

Tanım 2.3.11. (Mackenzie , 2005) M bir diferensiyellenebilir manifold ve A , M manifoldu üzerinde bir vektör demeti olsun. A demetinin kesitlerinin uzayı $\Gamma(A)$ ve üzerinde tanımlı braket $[,]$ olmak üzere eğer $\Gamma(A)$ bu brakete göre Lie cebir yapısına sahip ise her $\alpha, \beta \in \Gamma(A)$, $f \in C^\infty(M)$ için $\rho : A \rightarrow TM$ dönüşümü

$$[\alpha, f\beta] = f[\alpha, \beta] + (L_{\rho(\alpha)}f)\beta$$

şartını sağlıyorsa A vektör demetine Lie algebroid denir, burada ρ dönüşümüne Lie algebroidin anchor dönüşümü denir.

Örnek 2.3.2. (Mackenzie , 2005) M bir manifold olsun. $A = TM$ alınırsa $\Gamma(TM)$ 'nin elemanları yani kesitleri vektör alanları olur. $\Gamma(TM)$ üzerinde tanımlanan braket bilinen vektör alanlarının braketidir. Anchor dönüşümü ise $Id : TM \rightarrow TM$ birim dönüşümüdür. Sonuç olarak $(TM, Id, [,])$ çift (pair) algebroid olarak adlandırılır.

Örnek 2.3.3. (Mackenzie , 2005) Her Lie cebiri bir tek nokta kümesi üzerinde Lie algebroiddir.

Önerme 2.3.1. (Kosmann-Schwarzbach ve Magri , 1990) (A, ρ, M) bir Lie algebroid olsun. Bu durumda $\rho : (\Gamma(A), [,]_A) \rightarrow (\Gamma(TM), [,])$ anchor dönüşümü bir Lie algebroid homomorfizmasıdır.

İspat. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $X, Y \in \Gamma(A)$ için

$$[X, fY]_A = f[X, Y]_A + (\rho(X)(f)Y)$$

ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} [X, [Y, fZ]_A]_A &= [X, f[Y, Z]_A]_A + [X, \rho(Y)(f)Z]_A \\ &= f[X, [Y, Z]_A]_A + \rho(X)(f)[Y, Z]_A \\ &\quad + \rho(Y)(f)[X, Z]_A + \rho(X)(\rho(Y)(f))Z \end{aligned}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} [Y, [fZ, X]_A]_A &= - [Y, [X, fZ]_A]_A \\ &= - f[Y, [X, Z]_A]_A - \rho(Y)(f)[X, Z]_A \\ &\quad - \rho(X)(f)[Y, Z]_A - \rho(Y)(\rho(X)(f))Z \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [fZ, [X, Y]_A]_A &= -[[X, Y]_A, fZ]_A \\ &= -f[[X, Y]_A, Z]_A - \rho([X, Y]_A)(f)Z \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\Gamma(A)$ uzayı Lie cebir olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= [X, [Y, fZ]_A]_A + [Y, [fZ, X]_A]_A + [fZ, [X, Y]_A]_A \\ &= f([X, [Y, Z]_A]_A + [Y, [Z, X]_A]_A + [Z, [X, Y]_A]_A) \\ &\quad + ([\rho(X), \rho(Y)](f))Z - \rho([X, Y]_A)(f)Z \end{aligned}$$

dır. Tekrar $\Gamma(A)$ uzayının Lie cebir olma özelliği kullanılırsa

$$\rho([X, Y]_A)(f)Z = ([\rho(X), \rho(Y)](f))Z$$

elde edilir.

Not 2.3.1. Anchor dönüşümünün Lie cebir homomorfizması olma şartı Lie algebroidin tanımında Mackenzie tarafından tanımın bir parçası olarak verilmiştir. Ancak yukarıdaki önermeden görüldüğü gibi bu şarta gerek yoktur.

Tanım 2.3.12. (Warner , 1983) Γ bir diferensiyellenebilir manifold ve aynı zamanda cebirsel grup olsun. Eğer, $m : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ çarpım ve $\iota : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ ters dönüşümleri diferensiyellenebilir ise Γ ya Lie grup denir.

Tanım 2.3.13. Γ bir Lie grup ve M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Γ nın M üzerine bir diferensiyellenebilir sol etkisi

$$i) \text{ Her } x \in M \text{ için } \varrho(e, x) = x,$$

$$ii) \text{ Her } x \in M \text{ ve } g, h \in \Gamma \text{ için } \varrho(g, \varrho(h, x)) = \varrho(gh, x)$$

şartlarını sağlayan bir $\varrho : \Gamma \times M \rightarrow M$ diferensiyellenebilir dönüşümdür

Tanım 2.3.14. (Mackenzie , 1987) $s, t : \Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ bir grupoid olsun. Eğer Γ bir diferensiyellenebilir manifold ve Γ_0, Γ manifoldunun altmanifoldu, s ve t örten submersiyon, $m : \Gamma^{(2)} \rightarrow \Gamma_0$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\iota : \Gamma \rightarrow \Gamma$ bir diffeomorfizm ise $\Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ grupoidine Lie grupoid denir.

Örnek 2.3.4. (Moerdijk ve Mrcun , 2003) Γ bir Lie grup ve X, Γ ile üzerine sağdan diferensiyellenebilir olarak etki edilen bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Morfizmlerin manifoldu olarak $X \times \Gamma$ çarpımı ve nesnelere manifoldu olarak X ile etki grupoidi tanımlanır. Kaynak dönüşümü birinci bileşen üzerine izdüşümdür ($s(x, g) = x$) ve hedef dönüşümü sağ etki ($t(x, g) = xg$) ile verilir. Kısmi çarpımı her $g_1, g_2 \in G$ ve $x_1, x_2 \in X$ için

$$m((x_1, g_1), (x_2, g_2)) = (x_1, g_1g_2)$$

ile tanımlanır.

3 RAKLAR VE LİE RAKLAR

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmuştur. Rak yapısının tanımı verilmiştir. Bir rak örneği olarak digrup yapısı incelenmiştir. Ekli rak ve noktasal rak yapıları örnekler ile sunulmuştur. Son olarak Lie rak yapısının tanımı verilmiştir.

3.1 Raklar

Bu alt bölümde rak tanımı verilmiştir. Rak yapısı ile ilgili örnekler sunulmuş ve diğer yapılar ile olan ilişkisi tanıtılmıştır.

Tanım 3.1.1. (*Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016*) X bir küme ve X üzerindeki ikili işlem

$$\begin{aligned} \triangleright : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x \triangleright y \end{aligned}$$

olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} \mu_x = x \triangleright - : X &\rightarrow X \\ y &\mapsto \mu_x(y) = x \triangleright y \end{aligned}$$

dönüşümü bire-bir örten ve $x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$ eşitliğini sağlıyorsa X 'e bir rak denir.

Tanım 3.1.2. (*Covez , 2010*) Her $x, y \in X$ için $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu

$$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$$

olacak şekilde bir rak morfizmidir.

Örnek 3.1.1. (*Conway and Wraith , 1959*) Bir G grubu her $g, h \in G$ için

$$g \triangleright h := ghg^{-1}$$

eşlenik işlemiyle bir rak örneğidir.

1. $h \mapsto \mu_g(h) = g \triangleright h := ghg^{-1}$ bire-bir olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}\mu_g(h_1) &= \mu_g(h_2) \\ gh_1g^{-1} &= gh_2g^{-1} \\ gh_1g^{-1}g &= gh_2g^{-1}g \\ gh_1 &= gh_2 \\ g^{-1}gh_1 &= g^{-1}gh_2 \\ h_1 &= h_2\end{aligned}$$

olduğundan bire-birdir.

2. Her $k \in G$ için $k = ghg^{-1}$ olacak şekilde bir $h \in G$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}k &= ghg^{-1} \\ g^{-1}k &= g^{-1}ghg^{-1} \\ g^{-1}kg &= hg^{-1}g \\ g^{-1}kg &= h\end{aligned}$$

$h \in G$ olduğundan $g \triangleright h$ örtendir.

3. Her $g, h, k \in G$ için

$$g \triangleright (h \triangleright k) = (g \triangleright h) \triangleright (g \triangleright k)$$

özelliğinin sağlandığı gösterilsin.

$$\begin{aligned}g \triangleright (hkh^{-1}) &= g(hkh^{-1})g^{-1} \\ &= ghkh^{-1}g^{-1} \\ &= (gh)k(gh)^{-1}\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan bakılırsa

$$\begin{aligned}(g \triangleright k) \triangleright (g \triangleright k) &= (ghg^{-1}) \triangleright (gkg^{-1}) \\ &= (ghg^{-1})(gkg^{-1})(ghg^{-1})^{-1} \\ &= ghkg^{-1}gh^{-1}g^{-1} \\ &= (gh)k(gh)^{-1}\end{aligned}$$

kendi üzerine dağılma özelliği sağlanmış olur.

Aşağıda, bir diğer rak örneği olan digrup yapısının önce tanımı ve sahip olduğu bazı özellikler verilmiştir. Daha sonra, rak yapısı ile olan ilişkisi incelenmiştir.

Tanım 3.1.3. (Kinyon , 2007) X bir küme olsun. İki ilişkili çarpımı \rightarrow, \leftarrow : $X \times X \rightarrow X$ ve özel bir $1 \in X$ elemanı ile aşağıdaki şartları sağlayan X kümesine bir digrup denir.

$$1) \ x \rightarrow (y \leftarrow z) = (x \rightarrow y) \leftarrow z$$

$$x \leftarrow (y \rightarrow z) = x \leftarrow (y \leftarrow z)$$

$$(x \leftarrow y) \rightarrow z = (x \rightarrow y) \rightarrow z$$

$$2) \ \text{Her } x \in X \text{ için, } 1 \rightarrow x = x \leftarrow 1 = x$$

$$3) \ \text{Her } x \in X, \ x \rightarrow y = y \leftarrow x = 1 \text{ olacak şekilde bir } y \in X \text{ vardır.}$$

İşlemi $\rightarrow = \leftarrow$ olan bir grup, bir digrup örneğidir.

Örnek 3.1.2. (Covez , 2010) G bir grup ve A sabit bir 0 noktası ile bir G -küme olsun. O halde $G \times A$ kartezyen çarpımında digrup yapısı vardır.

$$(g, a) \rightarrow (h, b) = (gh, g \cdot b)$$

$$(g, a) \leftarrow (h, b) = (gh, a)$$

$$(g, a)^{-1} = (g^{-1}, 0)$$

$$1 = (1, 0).$$

Şimdi, grup işleminin digrup tanımındaki şartları sağladığı gösterilecektir.

1) Her $(g, a), (h, b), (k, c) \in G \times A$ için,

$$\begin{aligned} ((g, a) \rightarrow (h, b)) \rightarrow (k, c) &= (gh, g \cdot b) \rightarrow (k, c) \\ &= (ghk, gh \cdot c) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} ((g, a) \leftarrow (h, b)) \rightarrow (k, c) &= (gh, a) \rightarrow (k, c) \\ &= (ghk, gh \cdot c) \end{aligned} \quad (2)$$

(1) ve (2) ifadeleri eşit olduğundan eşitlik sağlanır.

$$(g, a) \leftarrow ((h, b) \leftarrow (k, c)) = (g, a) \leftarrow ((h, b) \rightarrow (k, c)) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (g, a) \leftarrow ((h, b) \leftarrow (k, c)) &= (g, a) \leftarrow (hk, b) \\ &= (ghk, a) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (g, a) \leftarrow ((h, b) \rightarrow (k, c)) &= (g, a) \leftarrow (hk, h \cdot c) \\ &= (ghk, a) \end{aligned} \quad (5)$$

(4) ve (5) ifadeleri eşit olduğundan (3) eşitliği sağlanmış olur.

$$((g, a) \rightarrow (h, b)) \leftarrow (k, c) = (g, a) \rightarrow ((h, b) \leftarrow (k, c)) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} ((g, a) \rightarrow (h, b)) \leftarrow (k, c) &= (gh, g \cdot b) \leftarrow (k, c) \\ &= (ghk, g \cdot b) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (g, a) \rightarrow ((h, b) \leftarrow (k, c)) &= (g, a) \rightarrow (hk, b) \\ &= (ghk, g \cdot b) \end{aligned} \quad (8)$$

(6) ve (7) birbirlerine eşit olup (8) eşitliği sağlanır.

2) Her $(g, a) \in G \times A$ için

$$(1, 0) \rightarrow (g, a) = (g, a) \leftarrow (1, 0) = (g, a)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilecek olursa

$$(1, 0) \rightarrow (g, a) = (g, a)$$

$$(g, a) \leftarrow (1, 0) = (g, a)$$

3) Her $(g, a), (h, b) \in G \times A$ için

$$(g, a) \rightarrow (h, b) = (h, b) \leftarrow (g, a) = (1, 0)$$

olacak şekilde bir $(h, b) \in G \times A$ olduğu gösterilecek olursa

$$(g, a) \rightarrow (h, b) = (gh, g \cdot b) = (1, 0)$$

buradan $gh = 1$ ve $b = 0$ gelir. Her iki tarafa soldan g^{-1} uygulanırsa

$$g^{-1}gh = g^{-1}1$$

$$h = g^{-1}$$

$(g^{-1}, 0) \in G \times A$ dır.

$$(h, b) \leftarrow (g, a) = (gh, b) = (1, 0)$$

buradan benzer şekilde $(g^{-1}, 0) \in G \times A$ elde edilir.

Hatırlatma 3.1.1. (Covez , 2010) Digrubun üçüncü aksiyomunu sağlayan eleman daima tektir.

İspat. $y, z \in X$ kabul edilsin.

$$y \leftarrow x = x \rightarrow y = z \leftarrow x = x \rightarrow z = 1.$$

Digrubun ikinci aksiyomundan

$$z = 1 \rightarrow z$$

olur. Kabulden

$$= (y \leftarrow x) \rightarrow z$$

Digrubun birinci aksiyomundan

$$= (y \rightarrow x) \rightarrow z$$

grubun birleşme özelliğinden

$$= y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$z = y \rightarrow 1$$

Eğer y ve z nin yeri değiştirilirse $y = z \rightarrow 1$ bulunur. Ancak,

$$y = z \rightarrow 1$$

$$= y \rightarrow 1 \rightarrow 1$$

$$= y \rightarrow 1 = z$$

olur.

Yani $y = z$ olur. Bu eleman da x^{-1} olarak tanımlanır.

Önerme 3.1.1. (Covez , 2010) X bir digrup olsun. Aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$1) x^{-1} \rightarrow 1 = 1 \leftarrow x^{-1} = x^{-1}$$

$$2) x \rightarrow 1 = 1 \leftarrow x = (x^{-1})^{-1}$$

$$3) (x \rightarrow y)^{-1} = y^{-1} \rightarrow x^{-1} = y^{-1} \leftarrow x^{-1}$$

İspat.

1) *Hatırlatma 3.1.1 dan açıktır.*

$$2) x \rightarrow (x \rightarrow 1) = (x^{-1} \rightarrow x) \rightarrow 1$$

$$= (x^{-1} \leftarrow x) \rightarrow 1$$

$$= 1 \rightarrow 1 = 1.$$

Diğer taraftan bakıldığında

$$(x \rightarrow 1) \leftarrow x^{-1} = x \rightarrow (1 \leftarrow x^{-1})$$

$$= x \rightarrow x^{-1} = 1$$

olur.

3) (a) $(y^{-1} \rightarrow x^{-1})$ e soldan sağ tarafa doğru $(x \rightarrow y)$ uygulanırsa

$$(x \rightarrow y) \rightarrow (y^{-1} \rightarrow x^{-1}) = ((x \rightarrow y) \rightarrow y^{-1}) \rightarrow x^{-1}$$

$$= (x \rightarrow (y \rightarrow y^{-1})) \rightarrow x^{-1}$$

$$= (x \rightarrow 1) \rightarrow x^{-1}$$

$$= x \rightarrow x^{-1} = 1$$

(b) $(y^{-1} \rightarrow x^{-1})$ e sağdan sol tarafa doğru $(x \rightarrow y)$ uygulanırsa

$$(y^{-1} \rightarrow x^{-1}) \leftarrow (x \rightarrow y) = (y^{-1} \rightarrow x^{-1}) \leftarrow (x \leftarrow y)$$

$$= y^{-1} \rightarrow (x^{-1} \leftarrow (x \leftarrow y))$$

$$= y^{-1} \rightarrow ((x^{-1} \leftarrow x) \leftarrow y)$$

$$= y^{-1} \rightarrow (1 \leftarrow y)$$

$$= y^{-1} \rightarrow y = 1.$$

(c) $(y^{-1} \leftarrow x^{-1})$ e soldan sağ tarafa doğru $(x \rightarrow y)$ uygulanırsa

$$(x \rightarrow y) \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}) = ((x \rightarrow y) \rightarrow y^{-1}) \leftarrow x^{-1}$$

$$= (x \rightarrow (y \rightarrow y^{-1})) \leftarrow x^{-1}$$

$$= (x \rightarrow 1) \leftarrow x^{-1}$$

$$= x \leftarrow x^{-1} = 1.$$

(d) $(y^{-1} \leftarrow x^{-1})$ e soldan sağ tarafa doğru $(x \rightarrow y)$ uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 (y^{-1} \leftarrow x^{-1}) \leftarrow (x \rightarrow y) &= (y^{-1} \leftarrow x^{-1}) \leftarrow (x \leftarrow y) \\
 &= ((y^{-1} \leftarrow x^{-1}) \leftarrow x) \leftarrow y \\
 &= (y^{-1} \leftarrow (x^{-1} \leftarrow x)) \leftarrow y \\
 &= (y^{-1} \leftarrow 1) \rightarrow y \\
 &= y^{-1} \leftarrow y = 1.
 \end{aligned}$$

X bir digrup olsun. O halde X in iki tane önemli alt kümesi tanımlanır.

Bunlar;

$$I(X) = \{x^{-1} \in X | x \in X\} \text{ ve}$$

$$E(X) = \{e \in X | e \rightarrow x = x \leftarrow e = x, \forall x \in X\} \text{ dir.}$$

Önerme 3.1.2. (Kinyon , 2007) X bir digrup olsun.

1) $I(X) = \{x^{-1} \in X | x \in X\}$

2) $E(X) = \{x^{-1} \rightarrow x | x \in X\} = \{x \leftarrow x^{-1} | x \in X\}$

3) $I(X)$ in $E(X)$ e etkisi vardır.

4) Her $x \in X$ için, $x = y^{-1} \rightarrow e$ olacak şekilde tek bir $(y^{-1}, e) \in I(X) \times E(X)$ vardır.

Artık digrup işleminin kendi üzerine dağılma özelliğini sağlayarak bir rak yapısı taşıdığı gösterilebilir.

Sonuç 3.1.1. (Covez , 2010) Eğer $(X, \rightarrow, \leftarrow, 1)$ bir digrup ise (X, \triangleright) bir raktır.

İspat. Her $x, y \in X$ için

$$x \triangleright y := x \rightarrow y \leftarrow x^{-1}$$

çarpımı rak yapısının

$$x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$$

kendi üzerine dağılma özelliğini sağlamalıdır.

$$\begin{aligned}
 (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) &= ((x \rightarrow y) \leftarrow x^{-1}) \triangleright (x \rightarrow z \leftarrow x^{-1}) \\
 &= (((x \rightarrow y) \leftarrow x^{-1}) \rightarrow (x \rightarrow (z \leftarrow x^{-1}))) \leftarrow (x \rightarrow (y \leftarrow x))^{-1}
 \end{aligned}$$

Digrubun özelliğinden $(x \rightarrow y)^{-1} = y^{-1} \rightarrow x^{-1}$ uygulanırsa

$$= (((x \rightarrow y) \rightarrow x^{-1}) \rightarrow (x \rightarrow (z \leftarrow x^{-1}))) \leftarrow (x \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}))$$

Digrubun birinci aksiyomu $x \rightarrow (y \leftarrow z) = (x \rightarrow y) \leftarrow z$ uygulanırsa

$$= (((x \rightarrow y) \rightarrow x^{-1}) \rightarrow x \rightarrow (z \leftarrow x^{-1})) \leftarrow (x \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}))$$

$$= ((x \rightarrow y) \rightarrow (x^{-1} \rightarrow x) \rightarrow (z \leftarrow x^{-1})) \leftarrow (x \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}))$$

burada $x \rightarrow x^{-1} = 1$ uygulanırsa

$$= ((x \rightarrow y) \rightarrow 1) \rightarrow (z \leftarrow x^{-1})) \leftarrow (x \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}))$$

$$= ((x \rightarrow y) \rightarrow (z \leftarrow x^{-1})) \leftarrow (x \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}))$$

Digrubun birinci aksiyomu $x \rightarrow (y \leftarrow z) = (x \rightarrow y) \leftarrow z$ uygulanırsa

$$= (x \rightarrow y) \rightarrow ((z \leftarrow x^{-1}) \leftarrow (x \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1})))$$

$$= (x \rightarrow y) \rightarrow (((z \leftarrow x^{-1}) \leftarrow x) \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}))$$

$$= (x \rightarrow y) \rightarrow ((z \leftarrow (x^{-1} \leftarrow x) \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1})))$$

burada tekrar $x \rightarrow x^{-1} = 1$ uygulanırsa

$$= (x \rightarrow y) \rightarrow ((z \leftarrow 1) \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}))$$

digrubun ikinci aksiyomu $z \rightarrow 1 = z$ uygulanırsa

$$= (x \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow (y^{-1} \leftarrow x^{-1}))$$

Digrubun birinci aksiyomu $x \rightarrow (y \leftarrow z) = (x \rightarrow y) \leftarrow z$ uygulanırsa

$$= x \rightarrow (y \rightarrow (z \rightarrow y^{-1})) \leftarrow x^{-1}$$

$$= x \triangleright (y \triangleright z)$$

olur.

Tanım 3.1.4. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) G bir grup ve X , G -küme olsun. $p : X \rightarrow G$ dönüşümü her $g \in G$ ve her $x, y \in X$ için

$$p(g \cdot x) = gp(x)g^{-1}$$

sağlıyorsa p dönüşümü ile X 'e ekli rak denir.

Önerme 3.1.3. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $X, p : X \rightarrow G$ dönüşümü ile ekli rak olsun. Her $x, y \in X$ için

$$x \triangleright y = p(x) \cdot y$$

eşitliği ile X bir raktır.

İspat. X, G - küme olduğundan G 'nin X üzerine

$$\varrho : G \times X \rightarrow X$$

$$(g, h) \mapsto \varrho(g, h) = g \cdot h$$

etkisi vardır.

Her $x, y, z \in X$ için

$$x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$$

sağladığı gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) &= (p(x) \cdot y) \triangleright (p(x) \cdot z) \\ &= p((p(x) \cdot y)) \cdot (p(x) \cdot z) \end{aligned}$$

p dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} &= (p(x)p(y)p(x)^{-1}(p(x) \cdot z)) \\ &= (p(x)p(y)p(x)^{-1}p(x)) \cdot z \end{aligned}$$

$p(x)^{-1}p(x) = e$ olduğundan,

$$\begin{aligned} &= (p(x)p(y)) \cdot z \\ &= p(x) \cdot (p(y) \cdot z) \\ &= p(x) \cdot (y \triangleright z) \\ &= x \triangleright (y \triangleright z) \end{aligned}$$

$y \mapsto x \triangleright y := p(x) \cdot y$ birebir olduğu gösterilirse,

$$\begin{aligned} p(x) \cdot y_1 &= p(x) \cdot y_2 \\ p(x)^{-1}p(x)y_1^{-1} &= p(x)^{-1}p(x)y_2 \\ y_1 &= y_2. \end{aligned}$$

Her $z \in X$ için $z = p(x) \cdot y$ olacak şekilde bir $y \in X$ olduğu gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} z &= p(x) \cdot y \\ p(x)^{-1} \cdot z &= p(x)^{-1} \cdot p(x)y \\ p(x)^{-1} \cdot z &= y \end{aligned}$$

olduğundan $x \triangleright y$ örtendir.

Örnek 3.1.3. (Covez , 2010) Bir G grubunun kendi üzerine etki eden $Id : G \rightarrow G$ eşlenik işlemi ile ekli rak olduğu görülebilir.

$g, h \in G$ için

$$\begin{aligned} Id(gh) &= Id(ghg^{-1}) \\ &= gId(h)g^{-1} \\ &= Id(h)g. \end{aligned}$$

Örnek 3.1.4. (Covez , 2010) X bir digrup olsun. $i : X \rightarrow I(X)$ bir ekli rak örneğidir. $I(X) = \{x^{-1} \in X | x \in X\}$ bir grup ve $x^{-1} \in I(X)$, $x, y \in X$ olmak üzere

$$x^{-1} \cdot y = x^{-1} \rightarrow y \leftarrow (x^{-1})^{-1}$$

şeklinde X in üzerine etkisi vardır.

$$\begin{aligned} i(x^{-1} \cdot y) &= i(x^{-1} \rightarrow y \leftarrow (x^{-1})^{-1}) \\ &= x^{-1} \rightarrow i(y) \leftarrow (x^{-1})^{-1} \\ &= x^{-1} \triangleright i(y) \end{aligned}$$

olur. Buradan, i dönüşümü ekli rak olma şartını sağlar.

Tanım 3.1.5. (Covez , 2010) $p : X \rightarrow G$ ve $q : Y \rightarrow H$ iki ekli rak olsun. Ekli rakların bir morfizmi $f : (X \rightarrow G) \rightarrow (Y \rightarrow H)$,

- 1) $f_d : G \rightarrow H$ dönüşümü, grupların bir morfizmidir.
- 2) $f_u : X \rightarrow Y$, her $g \in G$ ve $x \in X$ için $f_u(g \cdot x) = f_d(g) \cdot f_u(x)$ dir.
- 3) Aşağıdaki diyagram değişimlidir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_u} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ G & \xrightarrow{f_d} & H \end{array}$$

şartlarını sağlayan $f = (f_u, f_d)$ dönüşüm çiftidir.

Önerme 3.1.4. (Covez , 2010) $f : (X \rightarrow G) \rightarrow (Y \rightarrow H)$ ekli rakların bir morfizmi olsun. Buradan, $f_u : X \rightarrow Y$ rakların morfizmidir.

Tanım 3.1.6. (Kinyon , 2007) X rakı her $x \in X$ için

$$1 \triangleright x = x , x \triangleright 1 = 1$$

olacak şekilde bir $1 \in X$ elemanına sahipse X 'e noktasal rak denir.

Örnek 3.1.5. (Kinyon , 2007) Bir grubun eşlenik rakı, bir noktasal raktır. Her $g, h \in G$ için $g \triangleright h := ghg^{-1}$

$$e \triangleright h = ehe^{-1} = h$$

$$h \triangleright e = heh^{-1} = e$$

olacak şekilde $e \in G$ elemanı vardır.

Örnek 3.1.6. (Covez , 2010) Bir digrup $(X, \rightarrow, \leftarrow)$

$$x \triangleright y = x \rightarrow y \leftarrow x^{-1}$$

çarpımı ile rak olduğu Sonuç 3.1.1 de gösterildi.

\rightarrow, \leftarrow çarpımlarının birim elemanı, bu rakı noktasal rak yapar. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} x \triangleright 1 &= x \rightarrow 1 \leftarrow x^{-1} \\ &= (x^{-1})^{-1} \rightarrow x^{-1} = 1 \end{aligned}$$

ve

$$1 \triangleright x = 1 \rightarrow x \leftarrow 1 = x$$

olur. Buradan digrup $(X, \rightarrow, \leftarrow)$ bir noktasal rak yapısı oluşturur.

Tanım 3.1.7. (Covez , 2010) X bir rak yapısı ile bir topolojik uzay olsun. Eğer $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ çarpımı sürekli ve her $x \in X$ için μ_x bir homeomorfizm ise X e topolojik rak denir. Eğer X noktasal bir rak ise X topolojik rakı noktasaldır.

Tanım 3.1.8. (Covez , 2010) X rak yapısı ile diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ çarpımı diferensiyellenebilir ve her $x \in X$ için μ_x diffeomorfizm ise X e diferensiyellenebilir rak denir.

3.2 Lie Rak

Tanım 3.2.1. (Kinyon , 2007) X noktasal rak yapısı ile bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ her $x \in X$ için diferensiyellenebilir bir dönüşüm ise $(X, \triangleright, 1)$ bir Lie rakıdır.

Örnek 3.2.1. (Kinyon , 2007) R bir Lie grup, W bir R -modül ve $X := W \times R$ olsun. Her $u, v \in W, A, B \in R$ için $\rightarrow, \leftarrow : X \times X \rightarrow X$ çarpımının kuralı

$$(u, A) \rightarrow (v, B) = (Av, AB)$$

$$(u, A) \leftarrow (v, B) = (u, AB)$$

$$(u, A)^{-1} = (0, A^{-1})$$

$$1 = (0, 1)$$

şeklinde tanımlandığında $(X, \rightarrow, \leftarrow)$ bir lineer digrup olur. Buradan indirgenen $(X, \triangleright, 1)$ rakı,

$$(u, A) \triangleright (v, B) := (Av, ABA^{-1})$$

şeklinde tanımlanan bir lineer Lie rak olur. Bunun için digrubun rak çarpımı kullanılır.

$$\begin{aligned} (u, A) \triangleright (v, B) &= (u, A) \rightarrow (v, B) \leftarrow (u, A)^{-1} \\ &= (u, A) \rightarrow (v, B) \leftarrow (0, A^{-1}) \\ &= (Av, AB) \leftarrow (0, A^{-1}) \\ &= (Av, ABA^{-1}) \end{aligned}$$

Örnek 3.2.2. (Kinyon , 2007) R bir Lie grup ve W bir R -modül olsun. Burada, her $u, v \in W, A, B \in R$ için $X := W \times R$ üzerinde $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ işlemi

$$(u, A) \triangleright (v, B) := (Av, ABA^{-1})$$

olarak tanımlanır. $1 = (0, 1)$ olarak alınsın. Buradan $(X, \triangleright, 1)$ bir Lie rakıdır. Dahası, bu yapıya bir lineer Lie rak denir.

R bir Lie grup olduğundan tanımlanan işlemler diferensiyellenebilir olur. Çarpımın noktasal rak yapısı olduğu

$$(0, 1) \triangleright (u, A) = (1u, 1A1^{-1}) = (u, A)$$

$$(u, A) \triangleright (0, 1) = (A0, A1A^{-1}) = (0, 1)$$

buradan gösterilebilir.

4 LİE RAKOİDLER

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmuştur. Birinci alt bölümde, rakoid tanımı için gerekli olan ikili kesit, önkategori ve yarı önkategori tanımları verilmiştir. Bir grupoidin eşlenik işlemi ile bir rakoid yapısı elde edildiği gösterilmiştir. İkinci alt bölümde, ekli rakoid yapısı tanıtılmıştır. Üçüncü alt bölümde ise Lie rakoid yapısının tanımı için gerekli olan diferensiyellenebilir ikili kesit ve diferensiyellenebilir önkategori tanımları verilmiştir. Bir Lie grupoid ile bir Lie rakoid arasındaki ilişki incelenmiştir. Ekli Lie rakoid yapısı tanıtılmıştır.

4.1 Rakoidler

Bu alt bölümde rakoid yapısı tanıtılmıştır. Ancak, öncesinde rakoidin tanımını için gerekli olan küçük önkategori ve yarı-önkategori tanımları verilmiştir. Rakoid yapısı tanıtıldıktan sonra grupoid ile olan ilişkisi incelenmiştir.

Tanım 4.1.1. (*Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016*) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$, M 'de bir grupoid olsun.

a) Γ 'nın ikili kesiti aşağıdaki iki denk ifadeden biridir:

1) $s : \Sigma \rightarrow M$ ve $t : \Sigma \rightarrow M$ kaynak ve hedef dönüşümleri birebir ve örten olan bir $\Sigma \subset \Gamma$ altkümesidir.

2) s kaynak dönüşümüne sağdan ters olan ve $t \circ \sigma : M \rightarrow M$ birebir ve örten olan bir $\sigma : M \rightarrow \Gamma$ dönüşümüdür.

b) Σ ikili kesiti için, Σ sol işlemi olan, Γ 'nın bire-bir ve örten dönüşümü

$$\begin{aligned} \ell_\Sigma : \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ \gamma &\mapsto \sigma((t \circ \sigma)^{-1}(s(\gamma)))\gamma = \Sigma \star \{\gamma\}. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

c) Benzer şekilde sağ dönüşümü:

$$\begin{aligned} r_\Sigma : \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ \gamma &\mapsto \gamma\sigma(t(y)) = \{\gamma\} \star \Sigma \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

d) Eşlenik işlemi $\tilde{\sigma}(m) = (\sigma(t \circ \sigma)^{-1}(m))^{-1}$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} c_\Sigma : \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ \gamma &\mapsto \sigma((t \circ \sigma)^{-1}(s(\gamma)))\gamma\tilde{\sigma}(t(\gamma)) = \Sigma \star \{\gamma\} \star \Sigma^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.2. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) (Γ, M) küme çifti, $s \circ \epsilon = t \circ \epsilon = id_M$ olacak şekilde $s, t : \Gamma \rightarrow M$ örten dönüşümleri ve $\epsilon : M \rightarrow \Gamma$ dönüşümü ile bir küçük önkategoridir. Kısaltık adına $1_m = \epsilon(m)$ olarak alınacaktır. Bu (Γ, M) küme çifti yarı-önkategori olarak da adlandırılır.

Tanım 4.1.3. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M, M$ üzerinde bir yarı-önkategori olsun. Γ nin ikili kesiti aşağıdaki iki ifadeden birine denktir:

- 1) $s : \Sigma \rightarrow M$ ve $t : \Sigma \rightarrow M$ kaynak ve hedef dönüşümleri birebir ve örten olan bir $\Sigma \subset \Gamma$ altkümesidir.
- 2) s kaynak dönüşümüne sağdan ters olan ve $t \circ \sigma : M \rightarrow M$ birebir ve örten olan bir $\sigma : M \rightarrow \Gamma$ dönüşümüdür.

Her $m, n \in M$ için, Γ daki kaynağı m , hedefi n olan elemanların kümesi $\Gamma_{(m)}^{(n)}$ olarak ifade edilir. Her Σ ikili kesiti için, $s : \Sigma \rightarrow \Gamma$ nin sağ tersine karşılık gelen dönüşümü σ ile gösterilir ve $\underline{\sigma} : M \rightarrow M, M$ nin birebir ve örten dönüşümü $t \circ \sigma$ olarak ifade edilir.

Tanım 4.1.4. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) Σ ikili kesiti ve $\triangleright : \gamma \in \Gamma_{(m)}^{(n)} \rightarrow \Gamma_{\underline{\sigma}(m)}^{\underline{\sigma}(n)}$ için,

$$\triangleright : (\Sigma, \gamma) \mapsto \Sigma \triangleright \gamma$$

işlemi ile $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ yarı-önkategorisi

a) Her Σ ikili kesiti için, $\Sigma \triangleright - : \Gamma \rightarrow \Gamma$ bir birebir ve örten dönüşümdür.

b) Her Σ, \mathcal{T} ikili kesitleri ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\Sigma \triangleright (\mathcal{T} \triangleright \gamma) = (\Sigma \triangleright \mathcal{T}) \triangleright (\Sigma \triangleright \gamma)$$

kendi üzerine dağılma özelliğini sağlar.

şartlarını sağlıyorsa Γ ya bir rakoid denir.

Önerme 4.1.1. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) Bir grupoidin her Σ, γ ikili kesitleri için tanımlı

$$\Sigma \triangleright \gamma = \Sigma \star \gamma \star \Sigma^{-1}$$

eşlenik işlemiyle bir rakoid yapısıdır.

İspat. $\Sigma \triangleright \gamma = \Sigma \star \{\gamma\} \star \Sigma^{-1}$ rakoid tanımının sağlandığı gösterilsin.

a) $\Sigma \triangleright - : \Gamma \rightarrow \Gamma$ bire-bir ve örten olduğunu göstermek için

i) $\Sigma \triangleright \gamma_1 = \Sigma \triangleright \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} \Sigma \star \{\gamma_1\} \star \Sigma^{-1} &= \Sigma \star \{\gamma_2\} \star \Sigma^{-1} \\ \{\gamma_1\} &= \{\gamma_2\} \end{aligned}$$

ii) $\forall \gamma' \in \Gamma$ için $\Sigma \triangleright \gamma = \gamma'$ olacak şekilde $\exists \gamma \in \Gamma$ olduğu gösterilmektedir.

$$\Sigma \star \{\gamma\} \star \Sigma^{-1} = \gamma'$$

Her iki tarafa sağdan Σ ve soldan Σ^{-1} uygulanırsa

$$\Sigma^{-1} \star \Sigma \star \{\gamma\} \star \Sigma^{-1} \star \Sigma = \Sigma^{-1} \star \gamma' \star \Sigma$$

Γ grupoid olduğu için $\Sigma^{-1} \star \Sigma = e$ olduğu söylenebilir. Buradan da

$$\begin{aligned} \{\gamma\} &= \Sigma^{-1} \star \gamma' \star \Sigma \\ \gamma &= \Sigma^{-1} \triangleright \gamma' \end{aligned}$$

$(\Sigma^{-1} \in \Gamma)$ olur.

b) $\forall \Sigma, \Upsilon \in \text{Bis}(\Gamma)$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\Sigma \triangleright (\Upsilon \triangleright \gamma) = (\Sigma \triangleright \Upsilon) \triangleright (\Sigma \triangleright \gamma) \quad (9)$$

kendi üzerine dağılma özelliğinin sağlandığı gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} \Sigma \triangleright (\Upsilon \triangleright \gamma) &= \Sigma \star (\Upsilon \triangleright \gamma) \star \Sigma^{-1} \\ &= \Sigma \star (\Upsilon \star \{\gamma\} \star \Upsilon^{-1}) \star \Sigma^{-1} \\ &= (\Sigma \star \Upsilon) \triangleright \gamma \end{aligned} \quad (10)$$

Diğer taraftan bakılırsa

$$\begin{aligned}
(\Sigma \triangleright \Upsilon) &\triangleright (\Sigma \triangleright \gamma) \\
&= (\Sigma \triangleright \Upsilon) \star (\Sigma \triangleright \gamma) \star (\Sigma \triangleright \Upsilon)^{-1} \\
&= (\Sigma \star \Upsilon \star \Sigma^{-1}) \star \Sigma \star \{\gamma\} \star \Sigma^{-1} \star (\Sigma \star \Upsilon \star \Sigma^{-1})^{-1} \\
&= \Sigma \star \Upsilon \star \{\gamma\} \star \Upsilon^{-1} \star \Sigma^{-1} \\
&= \Sigma \star \Upsilon \star \{\gamma\} \star (\Sigma \star \Upsilon)^{-1} \\
&= (\Sigma \star \Upsilon) \triangleright \gamma
\end{aligned} \tag{11}$$

(10) ve (11) gözönüne alındığında (9) eşitliği sağlanmaktadır.

Önerme 4.1.2. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) Bir grupoidin her bir eşlenik sınıfı bir rakoiddir.

4.2 Ekli Rakoidler

Bu alt bölümde ekli raklardan rak oluşturma mekanizmasının genelleştirilmiş hali olan ekli rakoid yapısı incelenmiştir.

Teorem 4.2.1. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s', t' : \Gamma \rightrightarrows M$ bir grupoid, $s, t : X \rightrightarrows M$ bir önkategori ve $p : X \rightarrow \Gamma$ önkategorilerin bir morfizmi olsun.

- 1) p dönüşümü X ve Γ 'nin kaynak ve hedef dönüşümlerini birbirine bağlar.
Yani, X 'in ikili kesitinin p altındaki görüntüsü Γ 'nin ikili kesitidir.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{p} & \Gamma \\
\left\| \begin{array}{c} s \\ t \end{array} \right. & & \left\| \begin{array}{c} s' \\ t' \end{array} \right. \\
M & \xrightarrow{Id_M} & M
\end{array}$$

- 2) p dönüşümü $\epsilon : M \rightarrow X$ ve $\epsilon' : M \rightarrow \Gamma$ dönüşümlerini birbirine bağlar.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{p} & \Gamma \\
\left\| \begin{array}{c} \epsilon \\ \epsilon' \end{array} \right. & & \left\| \begin{array}{c} \epsilon \\ \epsilon' \end{array} \right. \\
M & \xrightarrow{Id_M} & M
\end{array}$$

Her $\Sigma \in \text{Bis}(\Gamma)$ ve her $x \in X$ için $\text{Bis}(\Gamma)$ ikili kesitler grubunun X üzerinde

$$p(\Sigma \cdot x) = \Sigma \star p(x) \star \Sigma^{-1} \quad (12)$$

şeklinde bir etkisi olsun. Her $m \in M$ için $1'_m = \epsilon'(m)$ olacak şekilde

$$p(\Upsilon) \cdot 1'_m = 1'_m, \Upsilon \in \text{Bis}(X)$$

olur. O zaman;

$$\Upsilon \triangleright x = p(\Upsilon) \cdot x$$

yönergesi her $x \in X$ ve X 'in her Υ ikili kesiti için X üzerinde bir noktasal rakoid yapısı tanımlar.

İspat. İlk diyagram ele alındığında

$$p : \text{Bis}(X) \rightarrow \text{Bis}(\Gamma)$$

şeklinde ikili kesit kümeleri arasındaki dönüşüm indirgenir.

$$p(\Sigma \cdot x) = \Sigma \star p(x) \star \Sigma^{-1}$$

ekli rak olma özelliği, $s(g \cdot x) = \underline{g}(s(x))$ ve $t(g \cdot x) = \underline{g}(t(x))$ olduğunu gösterir.

Burada \underline{g} , g ikili kesiti ile ilişkili bir diffeomorfizmdir.

Kendi üzerine dağılma özelliği her $\Sigma, \Upsilon \in \text{Bis}(X)$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned} (\Sigma \triangleright \Upsilon) \triangleright (\Sigma \triangleright x) &= (p(\Sigma) \cdot \Upsilon) \triangleright (p(\Sigma) \cdot x) \\ &= p(p(\Sigma) \cdot \Upsilon) \cdot (p(\Sigma) \cdot x) \\ &= (p(\Sigma) \star p(\Upsilon) \star p(\Sigma)^{-1}) \cdot (p(\Sigma) \cdot x) \\ &= (p(\Sigma) \star p(\Upsilon) \star p(\Sigma)^{-1} \star p(\Sigma)) \cdot x \\ &= (p(\Sigma) \star p(\Upsilon)) \cdot x \\ &= p(\Sigma) \cdot (p(\Upsilon) \cdot x) \\ &= p(\Sigma) \cdot (\Upsilon \triangleright x) \\ &= \Sigma \triangleright (\Upsilon \triangleright x) \end{aligned}$$

sağlanmaktadır.

p dönüşümü X 'in özdeşliğini Γ 'nin özdeşliğine bağladığından her $m \in M$ ve her $x, y \in X$

$$\begin{aligned} 1_m \triangleright y &= p(1_m) \cdot y \\ &= 1'_m \cdot y \\ &= y \end{aligned}$$

ve

$$x \triangleright 1_m = p(x) \cdot 1'_m = 1'_m$$

olur.

4.3 Lie Rakoid Yapısı

Bu alt bölüm de öncelikle Lie rakoid yapısının tanımında gerekli olan diferensiyellenebilir önkategori ve diferensiyellenebilir ikili kesit kavramlarının tanımları verilmiştir. Daha sonra, Lie rakoid yapısının tanımı sunulmuştur. Bir Lie grupoid yapısından bir Lie rakoid yapısına geçiş incelenmiştir. Son olarak Lie rakoid ile Lie algebroid arasındaki ilişki sunulmuştur.

Tanım 4.3.1. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ örten submersiyonlar ve $s \circ \epsilon = t \circ \epsilon = id_M$ olan $\epsilon : M \rightarrow \Gamma$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile (Γ, M) diferensiyellenebilir manifold çifti diferensiyellenebilir bir önkategoridir.

Tanım 4.3.2. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ bir diferensiyellenebilir önkategori olsun. s 'e sağdan ters dönüşüm $\sigma : M \rightarrow \Gamma$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\underline{\sigma}$ birebir örten dönüşümü bir diffeomorfizm ise $\Sigma \subset \Gamma$, $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ 'nin bir diferensiyellenebilir ikili kesitidir.

s ve t 'nin kısıtlamaları M üzerinde diffeomorfizm olan diferensiyellenebilir ikili kesitler, Γ 'nın altmanifoldlarıdır.

$s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ 'nin bir Lie grupoid olduğu özel durumda, yukarıdaki tanımdan diferensiyellenebilir ikili kesitler, kesinlikle bilinen Lie Grupoid teorisinden diferensiyellenebilir ikili kesitlerdir.

Bütün diferensiyellenebilir ikili kesitler kümesi $Bis(\Gamma)$ olarak tanımlansın. O halde $\underline{\sigma}$ ya

$$\underline{\sigma} = t \circ \sigma : m \rightarrow t(\sigma(m))$$

, M 'nin diffeomorfizmine karşılık gelir.

Önerme 4.3.1. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$, M kompakt baz manifoldu ile bir diferensiyellenebilir önkategori olsun. O zaman ikili kesitlerin kümesi $Bis(\Gamma)$, $C^\infty(M, \Gamma)$ 'nin bir altmanifoldudur.

Tanım 4.3.3. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ diferensiyellenebilir bir önkategori, her $\Sigma \in \text{Bis}(\Gamma)$ ikili kesiti ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} \triangleright : \text{Bis}(\Gamma) \times \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ (\Sigma, \gamma) &\mapsto \Sigma \triangleright \gamma \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir dönüşümü ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa Γ ya bir Lie rakoid denir.

1. $\text{Bis}(\Gamma)$ 'yi Lie rakı yapmayı sağlayan $\triangleright : (\Sigma, \Upsilon) \mapsto \Sigma \triangleright \Upsilon$ diferensiyellenebilir dönüşümü

a) $\Sigma \triangleright - : \Gamma \rightarrow \Gamma$, her $\Sigma \in \text{Bis}(\Gamma)$ için diffeomorfizmdir.

b) Her $\Sigma, \Upsilon \in \text{Bis}(\Gamma)$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\Sigma \triangleright (\Upsilon \triangleright \gamma) = (\Sigma \triangleright \Upsilon) \triangleright (\Sigma \triangleright \gamma)$$

kendi üzerine dağılma özelliğini sağlar.

2. Her $\Sigma \in \text{Bis}(\Gamma)$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$s(\Sigma \triangleright \gamma) = \underline{\sigma}(s(\gamma)), \quad t(\Sigma \triangleright \gamma) = \underline{\sigma}(t(\gamma))$$

dönüşümleriyle uyumludur.

Bir birimli Lie rakoid ve her $m \in M$ için $1_M = \epsilon(M)$ ve $\Sigma \triangleright 1_m = 1_{\underline{\sigma}(m)}$ ile $1_M \triangleright \gamma = \gamma$ şartları sağlanır.

(Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) Lie rakoidlerin bir morfizmi, ikili kesitlerin Lie rakılarının bir diferensiyellenebilir morfizmini indirgeyen diferensiyellenebilir önkategorilerin altındaki bir diferensiyellenebilir morfizmdir.

Bir Lie rakoid, Tanım4.1.4 anlamında bir rakoid değildir. Rak çarpımı, bütün ikili kesitler kümesi üzerinde değil sadece diferensiyellenebilir ikili kesitler üzerinde tanımlanmıştır.

Önerme 4.3.2. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) Bir Lie grupoid eşlenik işlemiyle bir Lie rakoid yapısıdır.

İspat. $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ bir Lie grupoidi olsun. O zaman bir $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ diferensiyellenebilir önkategorisi vardır. Lie rakoidin ikili kesitleri Lie grupoidin ikili kesitleridir. Buradan her bir $\Sigma \in \text{Bis}(\Gamma)$ ikili kesiti için bir $\Sigma^{-1} \in \text{Bis}(\Gamma)$ ters ikili kesiti vardır.

Her $\Sigma \in \text{Bis}(\Gamma)$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\triangleright : (\Sigma, \gamma) \mapsto \Sigma \triangleright \gamma := \Sigma \gamma \Sigma^{-1}$$

$\Sigma \triangleright \gamma \in \Gamma$ olacak şekilde tanımlanır.

$$\Sigma \triangleright (\Upsilon \triangleright \gamma) = (\Sigma \triangleright \Upsilon) \triangleright (\Sigma \triangleright \gamma)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} \Sigma \triangleright (\Upsilon \triangleright \gamma) &= \Sigma \triangleright (\Upsilon \star \{\gamma\} \star \Upsilon^{-1}) \\ &= \Sigma \star (\Upsilon \star \{\gamma\} \star \Upsilon^{-1}) \star \Sigma^{-1} \end{aligned}$$

Lie grupoidin ikili kesitleri olduğundan

$$= \Sigma \star \Upsilon \star \{\gamma\} \star \Upsilon^{-1} \star \Sigma^{-1}$$

$\Upsilon^{-1} \star \Sigma^{-1} = (\Sigma \star \Upsilon)^{-1}$ uygulanırsa

$$= (\Sigma \triangleright \Upsilon) \triangleright \gamma \tag{13}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} (\Sigma \triangleright \Upsilon) \triangleright (\Sigma \triangleright \gamma) &= (\Sigma \star \Upsilon \star \Sigma^{-1}) \star (\Sigma \star \{\gamma\} \star \Sigma^{-1}) \star (\Sigma \star \Upsilon \star \Sigma^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Σ Lie grupoid ikili kesiti olduğundan $\Sigma \star \Sigma^{-1}$ birimi verir.

$$= \Sigma \star \Upsilon \star \{\gamma\} \star \Upsilon^{-1} \star \Sigma^{-1}$$

$\Upsilon^{-1} \star \Sigma^{-1} = (\Sigma \star \Upsilon)^{-1}$ uygulanırsa

$$\begin{aligned} &= \Sigma \star \Upsilon \star \{\gamma\} \star (\Sigma \star \Upsilon)^{-1} \\ &= (\Sigma \triangleright \Upsilon) \triangleright \gamma \end{aligned} \tag{14}$$

(13) ve (14) birbirlerine eşit olduğundan kendi üzerine dağılma özelliği sağlanır. Her $m \in M$ için $\Sigma \triangleright 1_m = 1_{\underline{\sigma}(m)}$ ve $1_M = \epsilon(M)$ ile $1_M \triangleright \gamma = \gamma$ sağlanır. \triangleright işlemi $\text{Bis}(\Gamma)$ üzerindeki C^∞ yapısına göre açıkça diferensiyellenebilir olur.

Teorem 4.3.1. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) Bir kompakt manifold üzerindeki bir Lie rakoid, bir tanjant Lie algebroid meydana getirir.

(Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ bir noktasal Lie rakoid olsun.

$\epsilon^*T\Gamma : T\Gamma \rightarrow T\Gamma$, $\epsilon : M \rightarrow \Gamma$ boyunca geri çağırma olduğu düşünölsün. Buradan, $\epsilon^*T\Gamma$ nın $m \in M$ deki lifi

$$T_s, T_f : \epsilon^*T\Gamma \rightarrow TM$$

diferensiyellenebilir kaynak ve hedef dönüşömlerinden

$$T_{1_M}t : T_{1_M}\Gamma \rightarrow T_mM \text{ ve } T_{1_M}s : T_{1_M}\Gamma \rightarrow T_mM$$

elde edilir.

$T_s : \epsilon^*T\Gamma \rightarrow TM$ nin çekirdeğini dikkate alarak sonsuz küçük Lie algebroid denilen bir A vektör demeti tanımlanır.

$$A := \text{Cek}(T_s) = \coprod_{m \in M} \text{Cek}(T_{1_m}s) \subset \coprod_{m \in M} T_{1_m}\Gamma = \epsilon^*T\Gamma.$$

Vektör demeti submersiyon $T_t : \epsilon^*T\Gamma \rightarrow TM$ yi $A \subset \epsilon^*T\Gamma$ ile kısıtlayarak bir $\rho : A \rightarrow TM$ anchor dönüşümü tanımlanır.

$$\rho = -T_t|_A . \quad (15)$$

Yukarıdaki yapı, bir Lie grupoid ile ilişkilendirilen Lie algebroid yapısıdır.

Lemma 4.3.1. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) A ve M iki manifold olsun. $b : M \rightarrow T\Gamma, m \mapsto b_m \in A_m \subset T_{1_m}M$ bir dönüşüm olarak görölen A nın her kesiti için, $\Sigma_0 = \epsilon(M)$ ve $\frac{\partial}{\partial u}|_{u=0} \sigma_u(m) \subset T_{1_m}\Gamma$ olacak ve Γ nın her $m \in M$ için b_m ile örtüşeceği şekilde Γ nın ikili kesitlerinden oluşan $(\Sigma_u)_{u \in I}$ diferensiyellenebilir ailesi vardır. Diğer taraftan, $\text{Bis}(\Gamma)$ daki her bir $(\Sigma_u)_{u \in I}$ ailesi için, $\Sigma_0 = \epsilon(M)$ olacak şekilde, $m \mapsto \frac{\partial}{\partial u}|_{u=0} \sigma_u(m)$ ataması A nın diferensiyellenebilir bir kesitidir.

Burada, $I =]-1, +1[$ olarak düşünölmektedir.

Önerme 4.3.3. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $\text{Bis}(\Gamma)$ nın $\epsilon(M)$ ikili kesitindeki tanjant uzayı $T_{\epsilon(M)}\text{Bis}(\Gamma)$, $\Gamma(A)$ ya izomorftür.

Şimdi A üzerinde bir $\Sigma \in Bis(\Gamma)$ ikili kesitinin adjoint etkisi tanımlanabilir.

(Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $\underline{\sigma}, \Sigma$ ya bağlı M nin diffeomorfizmi ve

$$\begin{aligned}\Sigma^\triangleright : \Gamma &\rightarrow \Gamma \\ \gamma &\rightarrow \Sigma \triangleright \gamma\end{aligned}$$

olsun.

Bir Lie rakoidin tanımından, aşağıdaki diyagramlar değişimlidir:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\underline{\sigma}} & M \\ \epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ \Gamma & \xrightarrow{\Sigma^\triangleright} & \Gamma \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\Sigma^\triangleright} & \Gamma \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{\underline{\sigma}} & M \end{array}$$

$\gamma = 1_m$ noktasında diferensiyellenebilen (bundan sonra $\epsilon(M)$, m olarak gösterilecek.) diyagramların ilki,

$$T_M \Sigma^\triangleright - : T_m M \rightarrow T_{\underline{\sigma}(m)} M$$

verir. Yukarıdaki diyagramların ikincisinin $m \in M$ noktasındaki diferensiyeli aşağıdaki değişimli diyagramdır:

$$\begin{array}{ccc} T_m \Gamma & \xrightarrow{T_m \Sigma^\triangleright} & T_{\underline{\sigma}(m)} \Gamma \\ T_m s \downarrow & & \downarrow T_{\underline{\sigma}(m)} s \\ T_m M & \xrightarrow{T_m \underline{\sigma}} & T_{\underline{\sigma}(m)} M \end{array}$$

Yani,

$$T_m \Sigma \triangleright - : Cek(T_m s) \rightarrow Cek(T_{\underline{\sigma}(m)} s)$$

Ad_Σ , kısıtlanmış vektör demetlerinin morfizmi olarak ifade edilir ve adjoint dönüşüm denir.

$$Ad_\Sigma := T_m \Sigma^\triangleright |_A .$$

Σ^\triangleright nin tersi $(\Sigma^\triangleright)^{-1}$ vardır ve $\epsilon(M)$ de diferensiyeli Ad_Σ nın tersidir. Özellikle, Ad_Σ , A nın kesitlerinin uzayı $\Gamma(A)$ üzerinde bir lineer operatör olarak görülür. Her $a \in \Gamma(A)$ kesiti için, $Ad_\Sigma m \in M$ deki değeri $Ad_\Sigma a_{\underline{\sigma}^{-1}(m)}$ olan A nın bir kesiti olarak tanımlansın. Her $m \in M$ için

$$Ad_\Sigma a = Ad_\Sigma a_{\underline{\sigma}^{-1}(m)}. \quad (16)$$

Burada $Ad_\Sigma a$ ya M üzerinde diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu uygulanırsa

$$Ad_\Sigma f a = (\underline{\sigma}^{-1})^* f(Ad_\Sigma a) \quad (17)$$

olur.

Lemma 4.3.2. (*Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016*) $Bis(\Gamma) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ adjoint etkisi, C^∞ diferensiyellenebilir yapısı olan $Bis(\Gamma)$ ve $\Gamma(A)$ ile diferensiyellenebilir olur.

Ayrıca, her Σ, \mathcal{T} ikili kesiti için

$$\Sigma \triangleright (\mathcal{T} \triangleright \gamma) = (\Sigma \triangleright \mathcal{T}) \triangleright (\Sigma \triangleright \gamma)$$

bağıntısı

$$\Sigma^\triangleright \circ \mathcal{T}^\triangleright = (\Sigma \triangleright \mathcal{T})^\triangleright \circ \Sigma^\triangleright$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan, $a \in A_m \subset T_{1_m}\Gamma$ yönünde bir $m \in M$ noktasındaki diferensiyeli alındığında

$$Ad_\Sigma \circ Ad_{\mathcal{T}} a = Ad_{\Sigma \triangleright \mathcal{T}} \circ Ad_\Sigma a \quad (18)$$

olur.

Lemma 4.3.2, $Bis(\Gamma) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$, $(\Sigma, a) \mapsto Ad_\Sigma a$ atamasının $\Sigma = \epsilon(M)$ deki diferensiyelini almaya izin verir. Önerme 4.3.3 de söylendiği gibi $Bis(\Gamma)$ nın $\epsilon(M)$ deki tanjant uzayı tam olarak $\Gamma(A)$ dır. Bu diferensiyel, her iki değişken de C^∞ yapısı taşıdığından dolayı lineer olan sürekli bir $\Gamma(A) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ atamasıdır. Buna, Lie algebroid braket denir ve $a, b \in \Gamma(A)$ ve Lemma 4.3.1 de olduğu gibi Σ_ϵ ikili kesitlerin keyfi bir diferensiyellenebilir ailesi ile

$$[b, a] = \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{u=0} Ad_\Sigma a \quad (19)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.3.2. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) Her Γ Lie rakoidi için,

$$\rho = -Tt|_A$$

ile tanımlanmış anchor dönüşümü ve

$$[b, a] = \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} Ad_{\Sigma} a$$

ile tanımlı braket ile birlikte

$$A := \text{Cek}(T_s) = \coprod_{m \in M} \text{Cek}(T_{1_m} s) \subset \coprod_{m \in M} T_{1_m} \Gamma = \epsilon^* T\Gamma$$

olarak tanımlı vektör demeti bir Lie algebroiddir. Buna Γ Lie rakoidinin, tanjant Lie algebroidi denir.

İspat. İlk olarak, braketin $f \in C^\infty(M)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ile olan uyumu gösterilecektir. Bunun için (19) bağıntısında $(\Sigma_u)_{u \in I}$ diferensiyellenebilir ikili kesitler ailesine karşılık gelen keyfi bir $b \in \Gamma(A)$ ye f fonksiyonu uygulanırsa,

$$[b, fa] = \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} Ad_{\Sigma}(fa)$$

burada (17) bağıntısı uygulanırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} ((\underline{\sigma}_u)^{-1})^* f Ad_{\Sigma}(a) \\ &= f \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} Ad_{\Sigma}(a) + \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} ((\underline{\sigma}_u)^{-1})^* f a \\ &= f[b, a] + \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} ((\underline{\sigma}_u)^{-1})^* f a \end{aligned}$$

olur. Tek parametrelili $\underline{\sigma}_u := t \circ \sigma_u$ diffeomorfizmler ailesinin $u = 0$ daki tanjant uzayının $m \in M$ de bir değeri vardır. Burada σ_u , her $u \in I$ için Σ_u ya karşılık gelen s in kesitidir ve Lemma 4.3.1 da (15) eşitliğindeki anchor tanımını kullanılırsa

$$Tt\left(\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} (\sigma_u(m))\right) = Tt(b_m) = -\rho(b_m)$$

olur. Buradan, tek parametrelili $\underline{\sigma}_u^{-1}$ diffeomorfizmler ailesinin $u = 0$ daki diferensiyellenmesi ile elde edilen vektör alanı, $\rho(b)$ olur. Yani,

$$\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} ((\underline{\sigma}_u)^{-1})^* f = \rho(b)f$$

olur. Bu durumda, Lie algebroid tanımındaki eşitliğin sağlandığı görülür.

Aşağıda, ikili kesitlerin 1-form karakterizasyonu incelenmektedir. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) M keyfi bir manifold olsun. M baz manifoldu ve $\Gamma : T^*M \times M$ ile kaynak ve hedef dönüşümleri, her $m, n \in M$ ve $\alpha \in T_m^*M$ için sırasıyla $s, t : \Gamma \rightarrow M$,

$$t(\alpha, n) = n \text{ ve } s(\alpha, n) = m$$

olan bir diferensiyellenebilir önkategori tanımlansın. $0_m \in T_m^*M$ ile birim elemanı $1_m = (0_m, m)$ dır.

Lemma 4.3.3. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ nin $Bis(\Gamma)$ daki bir ikili kesiti, $\omega \in \Omega^1(M)$ bir 1-form ve $\varphi : M \rightarrow M$ bir diffeomorfizmi ile $(m \mapsto (\omega_m, \varphi(m)))$ formundadır.

Yukarıdaki lemma, $Bis(\Gamma)$ nın elemanlarının $\varphi \in Diff(M)$ ve $\omega \in \Omega^1(M)$ olarak alınmasına izin vermektedir.

$s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ önkategori olmak üzere $\alpha \in T_m^*(M), n \in M$ ile bir keyfi $(\alpha, n) \in \Gamma$ ve bir keyfi $(\omega, \varphi) \in Bis(M)$ için, $\psi^* = (T_{\psi^{-1}(m)}^*\psi)$ anlayışı ile

$$(\omega, \varphi) \triangleright (\alpha, n) = ((\varphi^{-1})^*\alpha, \varphi(n)) \quad (20)$$

şeklinde tanımlanan \triangleright çarpımı ile bir rakoid yapısı tanımlansın. Bu yapı bir Lie rakoid yapısı taşır.

Önerme 4.3.4. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) M , bir manifold olsun. $\alpha \in T_m^*(M), n \in M$ ile $(\alpha, n) \in \Gamma$ ve $(\omega, \varphi) \in Bis(M)$ için

$$(\omega, \varphi) \triangleright (\alpha, n) = ((\varphi^{-1})^*\alpha, \varphi(n)) \quad (21)$$

olarak tanımlı \triangleright işlemi $s, t : \Gamma \rightrightarrows M$ üzerinde bir Lie rakoid yapısıdır.

İspat. Her $(\omega, \varphi), (\eta, \psi) \in Bis(\Gamma)$ ikili kesitleri için

$$(\eta, \psi) \triangleright (\omega, \varphi) := ((\psi^{-1})^*\omega, \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) \quad (22)$$

olduğu biliniyor.

Her $(\omega, \varphi), (\eta, \psi) \in Bis(\Gamma)$ çifti ve her $(\alpha, n) \in \Gamma$ için

$$(\eta, \psi) \triangleright ((\omega, \varphi) \triangleright (\alpha, n)) = ((\eta, \psi) \triangleright (\omega, \varphi)) \triangleright ((\eta, \psi) \triangleright (\alpha, n)) \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
(\eta, \psi) &\triangleright (\omega, \varphi) \triangleright ((\eta, \psi) \triangleright (\alpha, n)) \\
&= ((\psi^{-1})^* \omega, \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) \triangleright ((\psi^{-1})^* \alpha, \psi(n)) \\
&= (((\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})^{-1})^* (\psi^{-1})^* \alpha, (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) \circ \psi(n)) \\
&= ((\psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1})^* (\psi^{-1})^* \alpha, (\psi \circ \varphi)(n)) \\
&= (\psi^{-1})^* \circ (\varphi^{-1})^* \circ \psi^* (\psi^{-1})^* \alpha \\
&= (((\psi^{-1})^* \circ (\varphi^{-1})^*) \alpha, (\psi \circ \varphi)(n)) \\
&= ((\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})^* \alpha, (\psi \circ \varphi)(n)) \tag{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\eta, \psi) &\triangleright ((\omega, \varphi) \triangleright (\alpha, n)) \\
&= (\eta, \psi) \triangleright ((\varphi^{-1})^* \alpha, \varphi(n)) \\
&= ((\psi^{-1})^* (\varphi^{-1})^* \alpha, \psi \circ \varphi(n)) \\
&= ((\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})^* \alpha, \psi \circ \varphi(n)) \tag{25}
\end{aligned}$$

(24) ve (25) den (23) şartının sağlandığı görülür.

4.3.1 Ekli Lie Rakoid

Bu alt bölümde Teorem 4.2.1 de sunulan ekli rakoid yapısının, diferensiyellenebilir genelleştirilmesi olan ekli Lie rakoid yapısı sunulmuştur.

Teorem 4.3.3. (Laurent-Gengoux and Wagemann , 2016) $s', t' : \Gamma \rightrightarrows M$ bir Lie grupoid ve $s, t : X \rightrightarrows M$ diferensiyellenebilir bir önkategori olsun. Aşağıdaki değişimli diyagram olacak şekilde diferensiyellenebilir $p : X \rightarrow \Gamma$ dönüşümü vardır.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{p} & \Gamma \\
\left. \begin{array}{c} \parallel \\ s \\ \parallel \\ t \end{array} \right\} & & \left. \begin{array}{c} \parallel \\ s' \\ \parallel \\ t' \end{array} \right\} \\
M & \xrightarrow{Id_M} & M
\end{array}$$

Özdeşlik dönüşümleri $\epsilon : M \rightarrow X$ ve $\epsilon' : M \rightarrow \Gamma$ için aşağıdaki değişimli diyagram vardır.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{p} & \Gamma \\
 \uparrow \epsilon & & \uparrow \epsilon' \\
 M & \xrightarrow{Id_M} & M
 \end{array}$$

Kabul edelim ki ikili kesitlerin Lie grubu $Bis(\Gamma)$ nun X üzerine diferensiyellenebilir etkisi olsun. Her $g \in Bis(\Gamma)$ ve her $x \in X$ için

$$p(g \cdot x) = gp(x)g^{-1}$$

olarak tanımlansın. Burada, her $x \in X$ ve her $m \in M$ için $p(x) \cdot 1_m = 1_m$ olur. O zaman $y \in X$ ve bir ikili kesit x için

$$x \triangleright y := p(x) \cdot y$$

çarpımı X üzerinde bir Lie rakoiddir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T.**, 1988, Manifolds, Tensor Analysis, Applications *Springer-Verlag*.
- Brieskorn E.**, 1988, Automorphic sets, braids and singularities, *Contemporary maths*,45-115 pp.
- Brickell F. and Clark R.S.**, 1970, Differentiable Manifolds: An Introduction, *Van Nostrand, London*.
- Brown R.**, 2006, Topology and Groupoids, *BookSurge LLC, Deganwy, United Kingdom*.
- Bourbaki N.**, 1966, Elements of Mathematics General Topology Part1, *Hermann*.
- Conway J. C., Wraith G. C.**, 1959, Correspondence.
- Covez S.**, 2010, The local integration of Leibniz algebras, *Ann. Inst. Fourier(Grenoble)63(1)*, 1-35pp.
- Carmo M.P.**, 1992, Riemannian Geometry, *Birkhauser*.
- Danesh-Naruie G.**, 1970, Theory of Topological Groupoids, PhD. Thesis *University of Southampton, England*.
- Fenn R., Rourke C.**, 1991, Racks and links in codimension two, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*,1, 343-406pp.
- Higgins P.J.**, 1971, Categories and Groupoids, *Van Nostrand, New York*.
- Jacobson N.**, 1985, Basic Algebra I, *W H Freeman*.
- Janich K.**, 1984, Topology, *Springer Verlag, New York*, 5-18 pp.
- Joyce,D.**, 1982, A classifying invariant of knots; the knot quandle, *J. Pure Appl. Alg.*, 37-65 pp.
- Kauffman L. H.**, 1991, Knots and Physics, *World Scientific*.
- Kinyon M.**, 2007, Leibniz algebras, Lie racks, and Digroups, *J.Lie Theory* 17(1), 99-114 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Kobayashi S., Nomizu K.**, 1963, Foundation of differential geometry, Vol.I, *Interscience Tracts in Pure and Applied Math., No.15, John Wiley and Sons, Inc., New York.*
- Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F.**, 1990, Poisson - Nijenhuis Structures, *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theo*, 53(35-81).
- Laurent-Gengoux C. and Wagemann F.**, 2016, Lie Rackoids, *Ann. Global Anal. Geom.* 50(2016),no.2,187-207 *arXiv:1511.03018.*
- Lee J.M.**, 2002, Introduction to Smooth Manifolds, *Springer-Verlag, New York.*
- Mackenzie K.**, 2005, General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids, *London Mathematical Society Lecture Note Series 213, Cambridge University Press.*
- Mackenzie K.**, 1987, Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, *London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 124, Cambridge University Press, Cambridge.*
- Moerdijk I., Mrcun J.**, 2003, Introduction to Foliations and Lie Grupoids, *Cambridge University, New York.*
- Mucuk O.**, 2010, Topoloji ve Kategoriler, *Nobel yayın.*
- Ryder H. J.**, 1993, The structure of racks, Ph.D. Thesis, *University of Warwick.*
- Srinivas Rau S., Shreecharan T.**, 2015, On the axioms of Leibniz algebroids associated to Nambu-Poisson manifolds *Researchgate.*
- Smith J.D.H.**, 2016, Introduction to Abstract Algebra, *Crc Press, Iowa USA.*
- Şahin B.**, 2012, Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, *Nobel yayın.*
- Varadarajan V.S.**, 2004, Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations, *1st edition, Springer.*

Yano K., Kon M., 1984, Structure on manifolds, *World Scientific Publishing, Singapore.*

Warner F.W., 1983, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, *Springer-Verlag, New York.*

