

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**LOKAL MORREY-LORENTZ UZAYLARINDA RIESZ POTANSİYELİNİN
SINIRLILIĞI**

Yüksel KARGACI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2021**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LOKAL MORREY-LORENTZ UZAYLARINDA RIESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI

Yüksel KARGACI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Canay AYKOL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Lorentz ve Morrey uzaylarının tanımları ve bu uzayların temel özellikleri hatırlatılmıştır. Ardından Hardy operatörleri için (p, q) tipli eşitsizlikler verilmiş ve son olarak Hardy operatörlerinin lokal Morrey uzaylarında sınırlılığı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde lokal Morrey-Lorentz uzayları tanıtılarak temel özellikleri verilmiş, ardından bu uzaylarda Riesz potansiyelinin sınırlılığı verilmiştir.

Dördüncü bölüm bazı uygulamalara ayrılmıştır. Bu bölümde, üçüncü bölümde verilen sonuçlar Riesz potansiyeli ile ilişkili olan kesirli maksimal operatör, kesirli Marcinkiewicz operatörü ve bazı analitik yarı grupların rasyonel kuvvetlerine uygulanmıştır.

Beşinci bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Nisan 2021, 45 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lokal Morrey-Lorentz uzayları, Hardy operatörü, Riesz potansiyeli, kesirli maksimal operatör.

ABSTRACT

Master Thesis

THE BOUNDEDNESS OF RIESZ POTENTIAL IN THE LOCAL MORREY- LORENTZ SPACES

Yüksel KARGACI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Canay AYKOL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and theorems are given. Definitions and basic properties of Lorentz and Morrey spaces are reminded. After that, (p, q) type inequalities for Hardy operators are given and the boundedness of Hardy operators in local Morrey spaces is investigated.

In the third chapter, local Morrey-Lorentz spaces are investigated and their basic properties are given. Then, the boundedness of Riesz potential in local Morrey-Lorentz spaces is given.

The fourth chapter is devoted to some applications. In this chapter, the results given in the third chapter are applied to the fractional maximal operator, fractional Marcinkiewicz operator and rational powers of some analytic semi-groups.

In the fifth chapter, the results obtained in the thesis are discussed.

April 2021, 45 pages

Key Words: Local Morrey-Lorentz spaces, Hardy operator, Riesz potential, fractional maximal operator.

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu alıőmanın oluşmasında beni yönlendiren, her zaman daha ileriye gidebilmem için aba harcayan, sadece bilimsel anlamda değil her konuda bana olan desteğini esirgemeyen sayın hocama, bu süreçte manevi olarak yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Yüksel KARGACI
Ankara. Nisan 2021



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Temel Tanım ve Teoremler	5
2.2 Lorentz Uzayları	12
2.3 Morrey Uzayları	21
3. LOKAL MORREY-LORENTZ UZAYLARI	28
3.1 Lokal Morrey-Lorentz Uzaylarında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı	29
4. BAZI UYGULAMALAR	36
4.1 Kesirli Maksimal Operatör	36
4.2 Kesirli Marcinkiewicz Operatörü	37
4.3 Bazı Analitik Yarı Grupların Rasyonel Kuvvetleri	39
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER DİZİNİ

R^n	n- boyutlu Öklid uzayı
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L_{p,\lambda}$	Morrey uzayı
$LM_{p,\lambda}$	Lokal Morrey uzayı
$WLM_{p,\lambda}$	Zayıf Lokal Morrey uzayı
μ_f	f nin dağılım fonksiyonu
f^*	f nin azalan yeniden düzenlemesi
$L_{p,q}$	Lorentz uzayı
$M_{p,q,\lambda}^{loc}$	Lokal Morrey-Lorentz uzayı
$WM_{p,q,\lambda}^{loc}$	Zayıf Lokal Morrey Lorentz uzayı
\hat{f}	f nin Fourier dönüşümü
S	Schwarz uzayı
I_α	Riesz potansiyeli
$H_{(\gamma)}^\beta$	Ağırlıklı Hardy operatörü
$\mathcal{H}_{(\gamma)}^\beta$	Ağırlıklı eşlenik Hardy operatörü
P_η	Hardy operatörü
\mathcal{P}_η	Eşlenik Hardy operatörü
w_n	R^n de birim kürenin hacmi

1. GİRİŞ

$M_{p,q;\lambda}^{loc} := M_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzayları, $0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t) \right\|_{L_q(0,r)}$$

quasi-normu sonlu olacak şekilde tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır, burada f^* , f in azalan yeniden düzenlemesidir. Bu uzaylar, literatürde ilk kez C. Aykol'un doktora tezinde tanımlanmış (Aykol, 2013) ve bu tezde, verilen bazı uzaylar arasındaki bazı gömme teoremleri ispatlanmıştır. $\lambda < 0$ ya da $\lambda > 1$ durumunda $M_{p,q;\lambda}^{loc} = \mathbf{0}$ olup, burada $\mathbf{0}$, R^n üzerinde sifıra denk olan tüm fonksiyonların kümesidir. $\lambda = 0$ durumunda $L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzayları, $p = q$ olması durumunda $M_{p;\lambda}^{loc}(R^n)$ lokal Morrey uzayları ve $\lambda = 1$ durumunda $\Lambda_{\infty, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}(R^n)$ klasik Lorentz uzayı elde edilmektedir. Dolayısıyla lokal Morrey- Lorentz uzayları Lorentz uzaylarının doğal bir genelleştirilmesidir. $0 < q \leq p < \infty$ ve $0 < \lambda \leq \frac{q}{p}$ durumunda lokal Morrey -Lorentz uzayları $WL_{\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{q}}(R^n)$ zayıf Lebesgue uzaylarına denktir. $q = \infty$ durumunda ise $WL_p(R^n)$ zayıf Lebesgue uzayları elde edilmektedir. $0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $WM_{p,q;\lambda}^{loc} \equiv WM_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ zayıf lokal Morrey- Lorentz uzayları

$$\|f\|_{WM_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t) \right\|_{WL_q(0,r)}$$

quasi-normu sonlu olacak şekilde tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayını göstermektedir. lokal Morrey- Lorentz uzaylarında Hilbert dönüşümü, maksimal operatör, Calderon-Zygmund singüler integral operatörü ve Riesz potansiyelinin sınırlılığı ve bu sınırlılıklar yardımıyla elde edilen sonuçlar sırasıyla (Aykol vd, 2016, Guliyev vd. 2016, 2020) tarafından ortaya konulmuştur.

E, R^n in ölçülebilir bir alt kümesi ve $f, E \rightarrow R$ ye ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f nin dağılım fonksiyonu

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in E: |f(x)| > \lambda\}), \quad \lambda \geq 0$$

olmak üzere, f nin azalan yeniden düzenlemesi f^* , $(0, |E|)$ üzerinde

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0: \mu_f(\lambda) \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq \infty$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $\mu_{f^*} = \mu_f$ dir.

Bir fonksiyonun yeniden düzenlemesi kavramı harmonik analizde önemli bir araçtır ve bir çok eşitsizlikte anahtar rol oynamaktadır. Sistematik olarak Hardy ve Littlewood tarafından tanımlanmış, reel ve harmonik analizde, singüler integrallerin araştırılmasında, fonksiyon uzayları ve interpolasyon teorisinde birçok matematikçi tarafından kullanılmıştır. (Bennett ve Sharpley 1988; Kristiansson 2002).

Azalan yeniden düzenleme kavramı George G. Lorentz tarafından (Lorentz;1950,1951)

$L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzaylarının tanımlanmasında kullanılmıştır.

$L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzayları

$$\|f\|_{L_{p,q}(R^n)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

sonlu olacak biçimde ölçülebilir fonksiyonların sınıflarının kümesi olarak tanımlanır.

$L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzaylarında $0 < p < \infty, p = q$ alınması halinde

$$\|f\|_{L_p(R^n)} := \left(\int_{R^n} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ alınması halinde

$$\|f\|_{L_\infty(E)} := \sup\{a: |\{y \in E: |f(y)| \geq a\}| > 0\}$$

Lebesgue uzayları elde edilir.

$0 < p < \infty, q = \infty$ alınması halinde ise

$$\|f\|_{WL_p(E)} := \sup_{0 < t \leq |E|} t^{1/p} f^*(t), \quad 1 \leq p < \infty$$

zayıf Lebesgue uzayı elde edilir ve $p = q = \infty$ alınması durumunda

$$\|f\|_{WL_\infty} = \|f\|_{L_\infty} \text{ bulunur.}$$

Morrey uzayları ilk defa C.B. Morrey (1938) tarafından tanımlanmıştır. Eliptik diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının elde edilmesinde ve kısmi diferansiyel denklemler teorisinde önemli yere sahiptir.

$0 \leq \lambda < n, 1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_{p,\lambda}^{loc}(R^n)$ olmak üzere $L_{p,\lambda}(R^n)$ Morrey uzayları

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{L_{p,\lambda}(R^n)} = \sup_{x \in R^n, r > 0} r^{\frac{-\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,t))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır (Morrey, 1938). Burada $B(x, t)$, R^n de x merkezli ve t yarıçaplı açık yuvarı belirtmektedir.

$\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ iken $L_{p,\lambda}(R^n) = \emptyset$ dir. Burada \emptyset, R^n de sıfıra denk olan fonksiyonların kümesini belirtmektedir.

$0 \leq a < n$ için olmak üzere kesirli maksimal operatör

$$M_\alpha f(x) = \sup_{t > 0} \frac{1}{|B(x, t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy, \quad x \in R^n$$

şeklinde tanımlanır, burada $|B(x, t)|$, $B(x, t)$ nin Lebesgue ölçüsüdür ki,

$|B(x, t)| = w_n t^n$ olup, burada w_n ise R^n de birim kürenin hacmini göstermektedir.

Bu eşitlikte $a = 0$ alındığında Hardy -Littlewood maksimal fonksiyonu Mf elde edilir ki bu da

$$Mf(x) = \sup_{t > 0} \frac{1}{|B(x, t)|} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy, \quad x \in R^n$$

dir.

$f \in L_{loc}^1(R^n)$ olmak üzere I^α Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n, \quad f \in L_1^{loc}(R^n)$$

şeklinde tanımlanır.

I_α Riesz potansiyeli Fourier dönüşümü teorisinde, kısmi türevli denklemler teorisinde, olasılık teorisinde (Markov süreçleri için potansiyel fonksiyonlar ve durağan rasgele süreçlerin spektral yoğunluk fonksiyonları çalışmasında), fonksiyonel analizde özel olarak operatörlerin interpolasyonu teorisinde geniş uygulamalara sahiptir.

Her bir $t > 0$ olmak üzere $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı her bir f ölçülebilir fonksiyonu için

$$(S_{\alpha}f)(t) = t^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_0^t f(s)ds + \int_t^{\infty} s^{\frac{\alpha}{n}-1} f(s)ds$$

operatörü A.P.Calderon tarafından (Calderon,1966) tanımlanmıştır.

Tezin amacı Riesz potansiyelinin ve kesirli maksimal operatörlerin $M_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ lokal Morrey- Lorentz uzaylarında sınırlılığını elde etmektir. Lorentz ve Morrey uzayları tanımları hatırlatılarak bu uzaylarda kesirli maksimal operatörler ve Riesz potansiyelinin sınırlılıkları verilecektir. Lokal Morrey-Lorentz uzaylarında belirtilen operatörlerin sınırlılığının elde edilmesinde Hardy ve eşlenik Hardy operatörlerinin lokal Morrey- Lorentz uzaylarındaki kuvvetli ve zayıf sınırlılıklarından yararlanılacaktır.

Elde edilen sonuçların uygulaması olarak ise $M_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ uzaylarında kesirli maksimal operatör, kesirli Marcinkiewicz operatörü ve bazı analitik yarı grupların kesirli kuvvetleri gibi özel operatörlerin sınırlılığı verilecektir.

Tez boyunca C , uygun parametrelerden bağımsız pozitif bir sabit için kullanılacaktır ve her seferinde aynı olma koşulu bulunmamaktadır. $p \in [1, \infty]$ için $p', pp' = p + p'$ şeklinde tanımlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1 X bir K cismi üzerinde bir vektör olmak üzere,

$$\|\cdot\|: X \rightarrow R \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü için, her $x, y \in X$ ve her $a \in K$ için

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N2) \quad \|ax\| = |a| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özellikleri gerçekleşsin. Bu durumda $\|\cdot\|$ dönüşümüne X üzerinde norm adı verilir.

$(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ uzayı genel olarak X ile ifade edilir.

Tanım 2.1.2 (N3) eşitsizliği $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ olacak şekilde bir C sabiti ile gerçekleşiyorsa bu durumda dönüşüm quasi-norm olarak adlandırılır.

(i) T operatörünün tanım bölgesi $D(T)$ bir vektör uzayı olup değer bölgesi $R(T)$, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

(ii) Her $x, y \in D(T)$ ve her $a \in K$ sabiti için

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(ax) = aTx$$

eşitlikleri gerçekleşiyorsa bu durumda T ye bir lineer operatördür denir.

Tanım 2.1.3 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X, T: D(T) \rightarrow Y$ ve T bir lineer operatör olsun. $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir C reel sayısı varsa, T operatörüne X uzayından Y uzayına sınırlı operatördür denir.

T nin normu; $\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.4 X bir küme ve μ , X üzerinde bir σ -cebiri olmak üzere (X, μ) ikilisine bir ölçülebilir uzay, μ deki her bir kümeye de μ -ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme denir.

Tanım 2.1.5 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay, $f: X \rightarrow R$ olsun. Her $\gamma \in R$ için

$$f^{-1}(] \gamma, \infty[) = \{x \in X: f(x) > \gamma\} \in \Sigma$$

eşitliği sağlanıyor ise f ye ölçülebilir fonksiyon denir.

(X, Σ) bir ölçülebilir uzay olmak üzere, Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu eğer;

- (i) $\mu(\Phi) = 0$
- (ii) Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$
- (iii) Σ daki her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerine sahip ise μ fonksiyonuna ölçü denir. Eğer her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.1.6 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir Σ, σ cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan (X, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.7 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere, X üzerinde tanımlı μ -ölçülebilir fonksiyonların sınıfı $M(X, \Sigma)$ ya da $M(X, \mu)$, X üzerinde negatif olmayan μ -ölçülebilir fonksiyonların sınıfı $M^+(X, \Sigma)$ ve $M(X, \Sigma)$ deki μ -h.h.y sonlu fonksiyonlar sınıfı $M_0(X, \Sigma)$ ile gösterilir. $M(R^n)$ ile R^n üzerinde tüm sonlu Borel ölçülerinin uzayını belirtir.

Tanım 2.1.8 X bir küme ve $P(X)$ te X in bir kuvvet kümesi; $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

- (i) $\mu^*(\Phi) = 0$
- (ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
- (iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- (iv) Her bir $n \in N$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Tanım 2.1.9 $(I_k), R$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \{(I_k): A \subset \bigcup I_k\}$$

olsun. $P(R)$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k): (I_k) \in \tau_A\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçü olur ve bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir.

n – boyutlu R^n uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlayabilmek için

$$I = \{x: a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

n – boyutlu kapalı aralıklarını alalım. Aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

olacaktır. $E \subset R^n$ kümesinin dış ölçüsü

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k): E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ bir aralık}\}$$

şeklinde ifade edilir. Her $A \subset R^n$

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (R^n - E))$$

eşitliği sağlanıyor ise bu takdirde E kümesine Lebesgue ölçülebilir küme denir.

Tanım 2.1.10 $M(R^n, \lambda^*)$, R^n nin λ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen alt kümelerinin sınıfı olsun. λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $M(R^n, \lambda^*)$ sınıfına da $B(R^n)$ sınıfına olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, λ ile gösterilir.

Tanım 2.1.11 $M(X, \Sigma, \mu)$ ölçü uzayı olmak üzere bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önermeye hemen her yerde (h.h.y) doğrudur denir.

Tanım 2.1.12 $M(X, \Sigma, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\|f\|_{L_p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| & p = \infty \end{cases}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayına $L_p(X)$ Lebesgue uzayı denir.

$E \subset R^n$ ölçülebilir bir küme olmak üzere E nin Lebesgue ölçüsü

$$|E| = \int_E dx$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.13 R^n üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyonların kümesi

$$\int_K |f| d\mu$$

sonlu olacak biçimde fonksiyonların sınıfı olarak ifade edilir ve $f \in L_1^{loc}(R^n)$ ile gösterilir. Burada K, R^n Öklid uzayında bir kompakt küme ve f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyondur.

Teorem 2.1.1 (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f \in L_p(R^n), g \in L_q(R^n)$ olsun.

Bu durumda $fg \in L_1(R^n)$ olup

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 2.1.2 (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$ ve $f, g \in L_p(R^n)$ olsun. Bu durumda $f + g \in L_p(R^n)$ olur ve

$$\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 2.1.3 (Chebychev Eşitsizliği) $t > 0$ ve μ_f, f in dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$t^p \mu_f(t) \leq \int_{\{x \in R^n: |f(x)| > t\}} |f(x)|^p dx$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 2.1.4 $p < q$ ve $E \subset \mathbb{R}^n, |E| < \infty$ olsun. Bu takdirde $L_q(E) \subset L_p(E)$ gömülmesi gerçekleşir.

Tanım 2.1.14 $1 \leq p, q \leq \infty$ ve $T: L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$ bir operatör olsun. Eğer her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$T: L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L_q} \leq C\|f\|_{L_p}$$

sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti varsa T operatörü (p, q) tipli operatör olarak adlandırılır.

μ bir ölçü ve her pozitif a sayısı için

$$\mu\{x: |Tf(x)| > a\} \leq \left(\frac{A\|f\|_{L_p}}{a}\right)^q, \quad q < \infty$$

sağlanacak biçimde a ve f den bağımsız bir C sabiti varsa T operatörü zayıf (p, q) tipli operatör olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.15 $0 \leq a < n$ için olmak üzere kesirli maksimal operatör

$$M_a f(x) = \sup_{t>0} |B(x, t)|^{\frac{a}{n}-1} \int_{B(x, t)} |f(y)| dy,$$

şeklinde tanımlanır, burada $B(x, t)$, x merkezli t yarıçaplı açık bir yuvardır ($x \in \mathbb{R}^n$).

$|B(x, t)|$ ise $B(x, t)$ nin Lebesgue ölçüsüdür ki, $|B(x, t)| = w_n t^n$ olup, burada w_n ise \mathbb{R}^n de birim kürenin hacmini göstermektedir.

Tanım 2.1.16 (Samko, 2012)

φ , $(0, \infty)$ aralığında ölçülebilir bir fonksiyon ve γ ile β da birer gerçel sayı olsun. φ üzerine güçlü ağırlıklı etki eden ağırlıklı Hardy operatörleri

$$H_{(\gamma)}^{\beta} \varphi(t) = t^{\gamma+\beta-1} \int_0^t \frac{\varphi(y)}{y^{\gamma}} dy, \quad \mathcal{H}_{(\gamma)}^{\beta} \varphi(t) = t^{\gamma+\beta} \int_t^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y^{\gamma+1}} dy, \quad t > 0.$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.17 (Anderson ve Muckenhoupt, 1982)

φ , $(0, \infty)$ aralığında ölçülebilir bir fonksiyon ve η bir gerçel sayı olsun.

P_η ve \mathcal{P}_η Hardy operatörleri ,

$$P_\eta \varphi(t) = t^{-\eta} \int_0^t \varphi(s) ds, \quad \mathcal{P}_\eta \varphi(t) = t^{-\eta} \int_t^\infty \varphi(s) ds$$

ile tanımlanır.

Hardy operatörleri harmonik analizde birçok operatörün farklı fonksiyon uzaylarında sınırlılığının elde edilmesinde anahtar rol oynamaktadır.

Bu tezde yukarıda tanımlanan Hardy operatörlerinin lokal Morrey uzaylarında sınırlılığı kullanılarak, Riesz potansiyeli, kesirli maksimal operatör, kesirli Marcinkiewicz operatörü ve bazı analitik yarı grupların kesirli kuvvetleri gibi özel operatörlerin $M_{p,q,\lambda}^{loc}(R^n)$ uzaylarında sınırlılığı ispatlanacaktır.

Tanım 2.1.18 (Fourier Dönüşümü) $f \in L_1(R^n)$ olsun.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} f(y) e^{-i(x,y)} dy$$

ile verilen \hat{f} fonksiyonu f nin Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Burada

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

dir.

Tanım 2.1.19 (Schwarz Uzayı) R^n uzayında sonsuz kez diferensiyellenebilir ve istenilen α ve β katlı indisleri için

$$\sup_{x \in R^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına Schwarz uzayı denir ve 'S' ile gösterilir.

Tanım 2.1.20 (Riesz Potansiyeli) f yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in S$ olmak üzere

$$F^{-1}(\hat{f}(x)) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy$$

dir. $e^{i(xy)} = e^{i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}$ olmak üzere

$$(-\Delta)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} (-\Delta e^{i(xy)}) \hat{f}(y) dy$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} \left(-\frac{\partial^2 e^{ix_1 y_1}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 e^{ix_2 y_2}}{\partial x_2^2} - \dots + \frac{\partial^2 e^{ix_n y_n}}{\partial x_n^2} \right) \hat{f}(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} |y|^2 e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir.

$$I_\alpha f = F^{-1}|y|^{-\alpha} Ff, \quad f \in S \quad (2.1.1)$$

olduğundan

$$(-\Delta)f = F^{-1}|y|^2 Ff$$

yazılabilir. Bilindiği gibi Laplace operatörü eliptik operatördür. P. Seeley göstermiştir ki eğer bir eliptik L operatörü için

$$Lf = F^{-1}\Phi(x)Ff$$

formülü mevcut ise o zaman onun istenilen kompleks kuvveti için

$$L^z f = F^{-1}\Phi^z(x)Ff$$

geçerlidir. Dolayısıyla bu ifadeye göre Laplace operatörü için

$$(-\Delta)^z f = F^{-1}|y|^{2z} Ff$$

yazılabilir. Buradan görülmektedir ki $z = -\frac{\alpha}{2}$ için

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = F^{-1}|y|^{-\alpha} Ff \quad (2.1.2)$$

geçerlidir.

(2.1.1) ve (2.1.2) eşitliklerinden Riesz potansiyeli ve $-\Delta$ nın genelleşmiş anlamda Fourier dönüşümlerinin aynı olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad 0 < \alpha < n$$

ifadesi yazılabilir. (2.1.2) formülü Riesz potansiyelinin ne kadar önemli bir operatör olduğunu gösterir. Çünkü (2.1.2) nin yardımıyla Laplace operatörünün negatif kuvvetleri tanımlanabilir, burada $0 < \alpha < n$ olmak üzere

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

operatörüne Riesz potansiyeli denir.

I_α Riesz potansiyeli Fourier dönüşümü teorisinde, kısmi türevli denklemler teorisinde, olasılık teorisinde (Markov süreçleri için potansiyel fonksiyonlar ve durağan rasgele süreçlerin spektral yoğunluk fonksiyonları çalışmasında), fonksiyonel analizde özel olarak operatörlerin interpolasyonu teorisinde geniş uygulamalara sahiptir.

2.2 Lorentz Uzayları

$L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzayları George G. Lorentz tarafından tanımlanmıştır (Lorentz; 1950,1951) L_p uzaylarının genelleşmesi olan Lorentz uzayları, Banach uzaylarıdır ve yeniden düzenleme altında değişmeyen bir interpolasyon uzayı olup harmonik analizde birçok uygulama alanına sahiptir.

Bu kısımda öncelikle dağılım fonksiyonu ve ardından bir fonksiyonun yeniden düzenlemesi tanıtılacaktır. Daha sonra $L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzaylarından bahsedilecek ve bu uzayların temel özellikleri verilecektir.

Dağılım fonksiyonu ve azalan yeniden düzenlemenin özellikleri (Kristiansson, 2002) de detaylı bir şekilde ispatlanmıştır.

Tanım 2.2.1 (Dağılım Fonksiyonu) $f: R^n \rightarrow C$ olmak üzere $\mu_f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ dağılım fonksiyonu

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in R^n: |f(x)| > \lambda\}), \quad \lambda \geq 0$$

şeklinde tanımlanır. Dağılım fonksiyonu yalnızca f in mutlak değerine bağlı olup azalandır.

Şimdi bir fonksiyonun azalan yeniden düzenlemesi kavramı tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.2 (Azalan Yeniden Düzenleme) $f: R^n \rightarrow C$ olmak üzere f fonksiyonunun azalan yeniden düzenlemesi

$$f^*: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$$

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0: \mu_f(\lambda) \leq t\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.1 (Eşitsizlikler)

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$$

ve

$$(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1)g^*(t_2)$$

eşitsizlikleri her $t_1, t_2 \geq 0$ için gerçekleşir. Özel olarak

$$(f + g)^*(t) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2)$$

ve

$$(fg)^*(t) \leq f^*(t/2)g^*(t/2)$$

eşitsizlikleri her $t \geq 0$ için sağlanır.

Tanım 2.2.3 (*' operatörü)**

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere, $f^{**}: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.4 (Lorentz Uzayları) $0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty$ olsun.

$L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz Uzayları

$$\|f\|_{L_{p,q}(R^n)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

sonlu olacak biçimde tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıflarının kümesidir.

$p = q = \infty$ ise bu durumda, $L_{\infty,\infty}(R^n) \equiv L_\infty(R^n)$ olur.

$1 \leq q \leq p$ ya da $p = q = \infty$ ise bu durumda $\|f\|_{L_{p,q}}$ fonksiyoneli bir norm belirtir.

$0 < q < p < r \leq \infty$ ve $E \subset R^n, |E| < \infty$ olmak üzere E üzerinde

$$L_r(R^n) \equiv L_{r,r}(R^n) \subset L_{p,q}(R^n) \subset L_{p,p}(R^n) \subset L_{p,r}(R^n) \subset L_{q,q}(R^n) \equiv L_q(R^n)$$

sürekli gömülmeleri gerçekleşir.

$L_{p,q}(R^n)$ Lorentz Uzayları için $p = \infty$ ve $0 < q < \infty$ durumu ile ilgilenilmez. Bunun nedeni $\|f\|_{\infty,q} < \infty$ olmasının ancak R^n üzerinde $f = 0$, μ -hhy olması ile gerçekleşiyor olmasındandır. Bu durum aşağıdaki şekilde görülebilir.

$L_{p,q}(R^n)$ in aşikar bir uzay olmadığını varsayalım. O halde $f \in L_{\infty,q}(R^n)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu olacaktır, öyle ki $c < 0$ ve $A \in R^n$ pozitif ölçülü küme olmak üzere her $x \in A$ için $|f(x)| > c$ sağlanır.

Buradan

$$\|f\|_{\infty,q}^q = \int_0^\infty f^*(t)^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^\infty (f \chi_A)^*(t) \frac{dt}{t} \geq \int_0^{\mu(A)} c^q \frac{dt}{t} = \infty$$

elde edilir. Bu ise $L_{\infty,q}(R^n)$ uzayının tek elemanının sıfır fonksiyonu olduğunu gösterir.

$L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzayları, $L_p(R^n)$ Lebesgue uzaylarının genelleştirilmesi olarak görülebilir. Bunun sebebi eğer $p = q$ alınırsa, $0 < p \leq \infty$ için $L_{p,p}(R^n) = L_p(R^n)$ eşitliğinin elde edilmesidir. Gerçekten, $0 < p < \infty$ için $\| \cdot \|_{L_{p,q}}$ tanımından

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_{p,p}} &= \left(\frac{p}{p} \int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^p dt/t \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^\infty t (f^*(t))^p dt/t \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p dt \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \\
&= \|f\|_{L_p}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

f^* in azalan fonksiyon oluşundan $p = \infty$ için

$$\|f\|_{L_{\infty,\infty}(R^n)} = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \text{ess sup}_{S \in R^n} |f(x)| = \|f\|_{L_\infty(R^n)}$$

bulunur. Dolayısıyla $\|f\|_{L_{p,p}} = \|f\|_{L_p}$ olup normların eşitliğinden $L_{p,p}(R^n) = L_p(R^n)$ olduğu görülür.

$L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzayı bir lineer uzaydır ve $\|f\|_{L_{p,q}}$ fonksiyoneli bir quasi-norm dur. Ayrıca $1 \leq q \leq p$ ya da $p = q = \infty$ ise, $\|f\|_{L_{p,q}}$ bir normdur.

Uyarı 2.2.1

(i) μ_f dağılım fonksiyonu yardımıyla Lorentz uzayları

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(p \int_0^\infty (t \mu_f(t)^{\frac{1}{p}})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t \mu_f(t)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

sonlu olacak biçimdeki $f: R^n \rightarrow \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonların sınıfı olarak da verilir. (Grafakos, 2004).

(ii) $L_{p,q}(R^n)$ Lorentz uzayı f^{**} fonksiyonu kullanılarak $1 < p, q < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{L_{p,q}(R^n)}^* := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$\|\cdot\|^*$ fonksiyoneli $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ veya $p = q = \infty$ durumlarında $L_{p,q}(R^n)$ üzerinde bir norm belirtir.

$1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ ise, o halde

$$\|f\|_{L_{p,q}} \leq \|f\|_{L_{p,q}}^* \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L_{p,q}}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Her bir $t > 0$ olmak üzere $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı her bir f ölçülebilir fonksiyonu için

$$(S_\alpha f)(t) = t^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_0^t f(s) ds + \int_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n}-1} f(s) ds$$

operatörü A.P. Calderon tarafından (Calderon, 1966) tanımlanmıştır.

Teorem 2.2.2 (O'Neil, 1963), (Sawyer, 1990)

Eğer,

$$(S_\alpha f^*)(1) = \int_0^1 f^*(s) ds + \int_1^\infty s^{\frac{\alpha}{n}-1} f^*(s) ds < \infty \quad (2.2.1)$$

koşulu $f \in L_1^{loc}(R^n)$ için sağlanıyorsa $I_\alpha f(x), x \in R^n$ Riesz potansiyeli hemen her yerde vardır.

Bundan başka;

$$(I_\alpha f)^*(t) \leq C S_\alpha(f^*)(t), \quad 0 < t < \infty$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada f^* ifadesi

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0: |\{y \in \mathbb{R}^n: |f(y)| > \lambda\}| \leq t\}, \quad \forall t \in (0, \infty)$$

ile tanımlanan ve f in azalan yeniden düzenlemesidir, C ise f ve t den bağımsız keyfi bir sabittir.

Aşağıda Riesz potansiyeli hakkında iyi bilinen bir teorem verilmiştir.

Teorem 2.2.3 (Guliyev vd., 2007)

$0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $p < q < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ olsun ve $f \in L_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu

(2.2.1) koşulunu sağlasın. Bu takdirde I_α Riesz potansiyeli hemen her yerde vardır.

Bundan başka,

(i) $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $1 \leq r \leq s \leq \infty$ olsun. Bu durumda I_α operatörünün $L_{p,r}$

Lorentz uzayından $L_{q,s}$ Lorentz uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} \text{ olmasıdır.}$$

(ii) $p = 1$ olsun. Bu durumda I_α operatörünün $L_{1,r}$ Lorentz uzayından WL_q

Lorentz uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter koşul $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olmasıdır.

İspat. Yeter Koşul:

(i) $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $1 \leq r \leq s \leq \infty$, $f \in L_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ olsun.

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f\|_{L_{q,s}} &= \left\| (I_\alpha f)^*(t) t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \right\|_{L_s(0,\infty)} \\ &\leq A_1 \left(\int_0^\infty t^{s(\frac{\alpha}{n}-1) + \frac{s}{q} - 1} \left(\int_0^t f^*(s) ds \right)^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

$$+A_1 \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty s^{\frac{a}{n}-1} f^*(s) ds \right)^s t^{\frac{s}{q}-1} dt \right)^{\frac{1}{s}}$$

olur.

$$\left(\int_0^\infty t^{s(\frac{a}{n}-1)+\frac{s}{q}-1} \left(\int_0^t f^*(\tau) d\tau \right)^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}$$

Eşitsizliğin geçerli olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \tau^{s(\frac{a}{n}-1)+\frac{s}{q}-1} d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^t \tau^{\frac{r}{p}-1} d\tau \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &= s^{-\frac{1}{s}} \left(1 - \frac{a}{n} - \frac{1}{q} \right)^{-\frac{1}{s}} \left(\frac{p'}{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} \sup_{t>0} t^{\frac{a}{n}-1+\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} \end{aligned}$$

olmasıdır. Burada $C_1 \leq s^{-\frac{1}{s}} \left(1 - \frac{a}{n} - \frac{1}{q} \right)^{-\frac{1}{s}} \left(\frac{p'}{r'} \right)^{\frac{1}{r'}} s^{\frac{1}{s}} (s')^{\frac{1}{r'}} = (p')^{\frac{1}{s}} \left(\frac{p's'}{r'} \right)^{\frac{1}{r'}}$

olup, bunun yanında,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \tau^{\frac{a}{n}-1} f^*(\tau) d\tau \right)^s t^{\frac{s}{n}-1} dt \right)^{1/s} \leq C_2 \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliğin geçerli olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \left(\int_0^t \tau^{\frac{s}{q}-1} d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_t^\infty \tau^{\frac{a}{n}-1} r'^{\frac{r'}{p}+\frac{r'}{r}} d\tau \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &= \left(\frac{q}{s} \right)^{\frac{1}{s}} (r')^{-\frac{1}{r'}} \left(\frac{1}{p} - \frac{a}{n} \right)^{-\frac{1}{r'}} \sup_{t>0} t^{\frac{a}{n}-\frac{1}{p}-\frac{1}{d}} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} \end{aligned}$$

olmasıdır. Burada $C_2 \leq \left(\frac{q}{s} \right)^{\frac{1}{s}} (r')^{-\frac{1}{r'}} \left(\frac{1}{p} - \frac{a}{n} \right)^{-\frac{1}{r'}} r^{\frac{1}{s}} (r')^{\frac{1}{r'}} = \left(\frac{qr}{s} \right)^{1/s} q^{1/r'}$

şeklindedir. Böylece

$$\|I_a f\|_{L_{q,s}} \leq A_1 (C_1 + C_2) \|f\|_{L_{p,r}}$$

bulunur.

(ii) $p = 1, 1 - \frac{1}{q} = \frac{a}{n}, 1 \leq r \leq \infty$ ve $f \in L_{1,r}(R)^n$ olsun.

$$\|I_a f\|_{WL_q} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} (I_a f)^*(t)$$

$$\begin{aligned}
&\leq A_1 \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} \left(t^{\frac{a}{n}-1} \int_0^t f^*(s) ds + \int_0^\infty s^{\frac{a}{n}-1} f^*(s) ds \right) \\
&= A_1 \sup_{t>0} \int_0^t f^*(s) ds + A_1 \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}} \int_t^\infty s^{-\frac{1}{q}} f^*(s) ds \\
&\leq A_1 \|f^*\|_{L_1(0,\infty)} = 2A_1 \|f\|_{L_{1,r}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Gerek Koşul:

(i) Farz edelim ki $I_a, L_{p,r}(R^n)$ den $L_{q,s}(R^n)$ e sınırlı ve $1 < p < \frac{n}{a}$ olsun.

$t > 0$ için $f_t(x) =: f(tx)$ tanımlayalım. Buradan

$$\|f_t\|_{L_{p,r}} = t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_{p,r}}$$

$$I_a f_t(x) = t^{-a} I_a f(tx)$$

ve

$$\|I_a f_t\|_{L_{q,s}} = t^{-a-\frac{n}{q}} \|I_a f\|_{L_{q,s}}$$

olup, I_a operatörü $L_{p,r}(R^n)$ den $L_{q,s}(R^n)$ e sınırlı olduğundan

$$\|I_a f\|_{L_{q,s}} \leq C \|f\|_{L_{p,r}}$$

elde edilir, burada C, f ten bağımsız bir sabittir. Böylece

$$\Rightarrow \|I_a f\|_{L_{q,s}} \leq C t^{a+\frac{n}{q}} \|f_t\|_{L_{p,r}} = C t^{a+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_{p,r}}$$

elde edilir.

Eğer $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{a}{n}$ ise her $f \in L_{p,r}(R^n)$ için $t \rightarrow 0$ iken $\|I_a f\|_{L_{q,s}} = 0$ olur.

Eğer $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{a}{n}$ ise her $f \in L_{p,r}(R^n)$ için $t \rightarrow \infty$ iken $\|I_a f\|_{L_{q,s}} = 0$ olur.

Buradan $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{a}{n}$ dir.

(ii) I_a operatörünün $\|L_{1,r}(R^n)\|$ den $WL_q(R^n)$ e sınırlı olduğunu kabul edelim.

$$\|f_t\|_{L_{1,r}} = t^{-n}\|f\|_{L_{1,r}}$$

ve

$$\|I_a f_t\|_{WL_q} = t^{-a-\frac{n}{q}}\|I_a f\|_{WL_q}$$

I_a nın $L_{1,r}(R^n)$ den $WL_q(R^n)$ e sınırlılığından

$$\|I_a f\|_{WL_q} \leq C\|f\|_{L_{1,r}}$$

elde edilir, burada C, f ten bağımsız bir sabit sayıdır.

$$(I_a f_t)_*(\tau) = \tau^{-n}(I_a f)_*(t^a, \tau)$$

$$\|I_a f_t\|_{WL_q} = t^{-a-\frac{n}{q}}\|I_a f\|_{WL_q}$$

ve

$$\|I_a f\|_{WL_q} = t^{a+\frac{n}{q}}\|I_a f_t\|_{WL_q} \leq C t^{a+\frac{n}{q}}\|f_t\|_{L_{1,r}} = C t^{a+\frac{n}{q}-n}\|f\|_{L_{1,r}}$$

Eğer $1 < \frac{1}{q} + \frac{a}{n}$ ise her $f \in L_{1,r}(R^n)$ için $t \rightarrow 0$ iken

$$\|I_a f\|_{WL_q} = 0$$

Eğer $1 > \frac{1}{q} + \frac{a}{n}$ ise her $f \in L_{1,r}(R^n)$ için $t \rightarrow \infty$ iken

$$\|I_a f\|_{WL_q} = 0$$

bulunur. Buradan $1 = \frac{1}{q} + \frac{a}{n}$ olmalıdır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

2.3 Morrey Uzayları

Morrey uzayları ilk defa C.B.Morrey (1938) tarafından tanımlanmıştır. Eliptik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının elde edilmesinde ve kısmi diferensiyel denklemler teorisinde önemli yere sahiptir.

Tanım 2.3.1 (Morrey Uzayları) $0 \leq \lambda < n, 1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(R^n)$ olmak üzere

$$L_{p,\lambda} \equiv \|f\|_{L_{p,\lambda}(R^n)} = \sup_{x \in R^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır (Morrey, 1938). $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ iken

$L_{p,\lambda}(R^n) = \emptyset$ dir. Burada \emptyset, R^n de 0 a denk olan fonksiyonların kümesini belirtmektedir.

Lemma 2.3.1 $1 \leq p < \infty$ olsun. O halde

$$L_{p,n}(R^n) = L_\infty(R^n)$$

ve

$$\|f\|_{L_{p,n}} = w_n^{\frac{1}{n}} \|f\|_{L_\infty}$$

gerçeklenir.

Ayrıca $1 \leq p < \infty, f \in WL_p^{loc}(R^n)$ olmak üzere $WL_{p,\lambda}(R^n)$ ile

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WL_{p,\lambda}(R^n)} = \sup_{x \in R^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayını belirtmektedir.

Burada,

$$\|f\|_{WL_p(B(x,r))} \equiv \|f \chi_{B(x,r)}\|_{WL_p(R^n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{t>0} t (f \chi_{B(x,r)})_*^{1/p}(t) \\
&= \sup_{t>0} t |\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}|^{1/p} \\
&= \sup_{t>0} t^{1/p} (f \chi_{B(x,r)})^*(t) < \infty
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Ayrıca,

$$WL_p(R^n) = WL_{p,0}(R^n)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Bundan başka $L_{p,\lambda}(R^n) \subset WL_{p,\lambda}(R^n)$ gömülmesi gerçekleşir. Gerçekten, Chebychev eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\|f\|_{WL_{p,\lambda}}^p &= \sup_{x \in R^n, r>0} r^{-\lambda} \sup_{t>0} t^p (f \chi_{B(x,r)})_* (t) \\
&= \sup_{x \in R^n, r>0} r^{-\lambda} \sup_{t>0} t^p |\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}| \\
&= \sup_{x \in R^n, r>0} r^{-\lambda} \sup_{t>0} t^p \left(\int_{y \in B(x,r) : |f(y)| > t} dy \right) \\
&\leq \sup_{x \in R^n, r>0} r^{-\lambda} \sup_{t>0} \left(\int_{y \in B(x,r) : |f(y)| > t} |f(y)|^p dy \right) \\
&\leq \sup_{x \in R^n, r>0} r^{-\lambda} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right) \\
&= \|f\|_{L_{p,\lambda}}^p
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.3.2 $1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $0 \leq \lambda < n$ olsun. Bu durumda $a = \frac{n-\lambda}{p}$ olmak üzere

$$L_{p,\lambda}(R^n) \subset L_{1,n-a}(R^n)$$

gömülmesi sağlanır. Bundan başka,

$$\|f\|_{1,n-a} \leq w_n^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L_{p,\lambda}}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Tanım 2.3.2 (Lokal Morrey Uzayları) $0 \leq p < \infty, 0 \leq \lambda \leq 1$ ve $f \in L_p^{loc}(0, \infty)$ olsun. $L_{p,\lambda}(0, \infty)$ lokal Morrey uzayları

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(0,\infty)} = \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(0,r)}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır.

Benzer şekilde, $0 \leq p < \infty, 0 \leq \lambda \leq 1$ ve $f \in WL_p^{loc}(0, \infty)$ olsun. $WL_{p,\lambda}(R^n)$ zayıf lokal Morrey-Lorentz uzayları

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(R^n)} = \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(0,r)}$$

sonlu olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır.

Teorem 2.3.1 (Andersen ve Muckenhoupt, 1982)

$1 \leq p \leq q < \infty$ ve u ile v negatif olmayan ağırlık fonksiyonları olsun. Aşağıdaki (p,q) zayıf tip eşitsizlikler geçerlidir.

(i) $\eta > 0$ olsun. Eğer

$$B(\eta; \alpha) = \sup_{\xi > 0} \left(\int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{\xi}{x}\right)^{\alpha} \left(\frac{u(x)}{x^{\eta q}}\right) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\xi} v(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (2.3.1)$$

ifadesi $\alpha > 0$ için sonlu ise (u, v) ikilisi P_{η} için (p,q) zayıf tipli ağırlık çiftidir; yani

$$B(\eta; \alpha) = \left(\int_{\{t \in (0, \infty) : |P_{\eta} \varphi(t)| > \mu\}} u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \mu^{-1} \left(\int_0^{\infty} |\varphi(t)|^p v(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.2)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(ii) $\eta < 0$ olsun. Eğer

$$B(\eta; \alpha) = \sup_{\xi > 0} \left(\int_0^\xi \left(\frac{x}{\xi} \right)^\alpha \left(\frac{u(x)}{x^{\eta q}} \right) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\xi^\infty v(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (2.3.3)$$

ifadesi $\alpha > 0$ için sonlu ise (u, v) ikilisi \mathcal{P}_η için (p, q) zayıf tipli ağırlık çiftidir; yani

$$B(\eta; \alpha) = \left(\int_{\{t \in (0, \infty) : |\mathcal{P}_\eta \varphi(t)| > \mu\}} u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \mu^{-1} \left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^p v(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.4)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(2.3.2) ve (2.3.4) eşitsizliklerinde C sabitinin en küçük seçilmesi durumunda P_η ve \mathcal{P}_η nın zayıf normları $\|P_\eta\|_{w'}$, $\|\mathcal{P}_\eta\|_{w'}$ olarak gösterilir. Bunun yanında,

$$[\alpha / (\eta q + \alpha)]^{1/q} B(\eta; \alpha) \leq \|P_\eta\|_{w'} \leq \left[\frac{(\eta q + \alpha)}{\eta} \right]^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{p'}} B(\eta; \alpha) \quad \text{ve}$$

$$\left[\frac{\alpha}{(\alpha - \eta q)} \right]^{\frac{1}{q}} B(\eta; \alpha) \leq \|\mathcal{P}_\eta\|_{w'} \leq \left[\frac{(\eta q - \alpha)}{\eta} \right]^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{p'}} B(\eta; \alpha)$$

şeklindedir.

Burada, $u(\tau) = v(\tau) = \chi_{(0, \tau)}(\tau)$ alınırsa (2.3.2) ve (2.3.4) deki eşitsizlikler yardımıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\left(\int_{\{\tau \in (0, \infty) : |\mathcal{P}_\eta \varphi(\tau)| > \mu\}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \mu^{-1} \left(\int_0^t |\varphi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.5)$$

$$\left(\int_{\{\tau \in (0, \infty) : |P_\eta \varphi(\tau)| > \mu\}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \mu^{-1} \left(\int_0^t |\varphi(\tau)|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.6)$$

Aşağıdaki iki lemma ile Morrey ve zayıf Morrey uzaylarındaki $H_{(\gamma)}^\alpha$ ve $\mathcal{H}_{(\gamma)}^\alpha$ Hardy operatörlerinin sınırlılıkları verilecektir.

Lemma 2.3.3 (Samko, 2012)

$0 < \lambda < 1, 0 < \beta < 1 - \lambda, 1 \leq r < \frac{1-\lambda}{\beta}$ ve $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{\beta}{1-\lambda}$ olsun. Eğer $\gamma < \frac{1}{r'} + \frac{\lambda}{r'}$ ise

$H_{(\gamma)}^{\alpha}$, $LM_{r,\lambda}(0, \infty)$ dan $LM_{s,\lambda}(0, \infty)$ uzayına sınırlıdır, ve eğer $\gamma > \frac{\lambda-1}{r}$

ise $\mathcal{H}_{(\gamma)}^{\alpha}$ operatörü $LM_{r,\lambda}(0, \infty)$ dan $LM_{s,\lambda}(0, \infty)$ uzayına sınırlıdır.

Lemma 2.3.4 $0 < \lambda < 1, 0 < \beta < 1 - \lambda, 1 \leq r < \frac{1-\lambda}{\beta}$ ve $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{\beta}{1-\lambda}$ olsun. Eğer

$\gamma = \frac{1}{r'} + \frac{\lambda}{r'}$ ise $H_{(\gamma)}^{\alpha}$ operatörü $LM_{r,\lambda}(0, \infty)$ dan $WLM_{s,\lambda}(0, \infty)$ uzayına sınırlıdır ve eğer

$\gamma = \frac{1}{r'} + \frac{\lambda}{r} - \beta$ ise $\mathcal{H}_{(\gamma)}^{\alpha}$ operatörü $LM_{r,\lambda}(0, \infty)$ dan $WLM_{s,\lambda}(0, \infty)$ uzayına sınırlıdır.

İspat İspat için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\left\| H_{(\gamma)}^{\beta} \varphi \right\|_{WL_{s,\lambda}(0,\infty)} \leq C \|\varphi\|_{L_{r,\lambda}(0,\infty)} \Leftrightarrow \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda+\lambda}{s+r}} \frac{\left\| H_{(\gamma)}^{\beta} \varphi \right\|_{WL_{s,\lambda}(0,t)}}{\|\varphi\|_{L_{r,\lambda}(0,t)}} \leq C < \infty \quad (2.3.7)$$

$\gamma = \frac{1}{r'} + \frac{\lambda}{r}$ olsun.

$$\begin{aligned} \left\| H_{(\gamma)}^{\beta} \varphi \right\|_{WL_{s,\lambda}(0,\infty)} &= \left\| \chi_{(0,t)}(\tau) H_{(\gamma)}^{\beta} \varphi(\tau) \right\|_{WL_{s,\lambda}(0,\infty)} \\ &= \sup_{\mu>0} \mu \left(\int_{\{\tau \in (0,t) : |H_{(\gamma)}^{\beta} \varphi(\tau)| > \mu\}} d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \sup_{\mu>0} \mu \left\{ \tau \in (0,t) : \tau^{\frac{\lambda-1}{r} + \beta} \int_0^{\tau} \varphi(y) y^{-1 + \frac{1-\lambda}{r}} dy > \mu \right\}^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

(2.3.1) de, $\eta = \frac{1-\lambda}{r} - \beta = \frac{1-\lambda}{s} > 0$, $u(\tau) = \chi_{(0,t)}(\tau)$, $v(\tau) = \chi_{(0,t)}(\tau) \tau^{r+\lambda-1}$

alınırsa bazı $a > 0$ değerleri için,

$$\begin{aligned}
B(\eta, \alpha) &= \sup_{\xi > 0} \xi^{\frac{\alpha}{s}} \left(\int_{\xi}^{\infty} \chi_{(0,t)}(\tau) \tau^{-\alpha} \tau^{-s \left(\frac{1-\lambda}{s} \right)} d\tau \right)^{1/s} \left(\int_0^{\xi} \chi_{(0,t)}(\tau) \tau^{(r+\lambda-1) \left(-\frac{1}{r-1} \right)} d\tau \right)^{1/r'} \\
&= \sup_{0 < \xi < t} \xi^{\frac{\alpha}{s}} \left(\int_{\xi}^t \tau^{-\alpha} \tau^{\lambda-1} d\tau \right)^{1/s} \left(\int_0^{\xi} \chi_{(0,t)}(\tau) \tau^{-\frac{r}{r-1} - \frac{\lambda}{r-1} + \frac{1}{r-1}} d\tau \right)^{1/r'} \\
&\leq C \sup_{\xi > 0} \xi^{\frac{\alpha}{s}} \xi^{-\frac{\alpha}{s} + \frac{\lambda}{s} - 1 - \frac{\lambda}{r} + \frac{1}{r} + 1 - \frac{1}{r}} \\
&= C \sup_{t > 0} t^{-\frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda}{s}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.1 (i) ifadesinden (2.3.7) deki $\frac{\|H_{(\gamma)}^{\beta} \varphi\|_{WL_s(0,t)}}{\|\varphi\|_{L_r(0,t)}}$ yerine bu ifade yazılırsa

$C \cdot \sup_{t > 0} t^{-\frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{s} + \frac{\lambda}{r}} = C < \infty$ elde edilir.

$\gamma = 1 + \frac{\lambda-1}{r} - \beta$ olsun. İspat $H_{(\gamma)}^{\beta}$ nın sınırlılığının gösterildiği metoda benzer şekilde yapılır.

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{H}_{(\gamma)}^{\beta} \varphi \|_{WL_s(0,\infty)} &= \left\| \chi_{(0,t)}(\tau) \mathcal{H}_{(\gamma)}^{\beta} \varphi(\tau) \right\|_{WL_s(0,\infty)} \\
&= \sup_{\mu > 0} \mu \left(\int_{\{\tau \in (0,t) : |\mathcal{H}_{(\gamma)}^{\beta} \varphi(\tau)| > \mu\}} d\tau \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \sup_{\mu > 0} \mu \left\| \left\{ \tau \in (0,t) : \tau^{1+\frac{\lambda-1}{r}} \int_{\tau}^{\infty} f(y) y^{-2+\frac{1-\lambda}{r}+\beta} dy > \mu \right\} \right\|^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

(2.3.3) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\eta = \frac{1-\lambda}{r} - 1 = \beta + \frac{1-\lambda}{s} - 1 < 0, u(\tau) = \chi_{(0,t)}(\tau), v(\tau) = \chi_{(0,t)}(\tau) \tau^{2r+\lambda-1-\beta r}$$

olmak üzere bazı $a > 0$ değerleri için

$$\begin{aligned}
& B(\eta, \alpha) \\
&= \sup_{\xi > 0} \xi^{-\frac{\alpha}{s}} \left(\int_0^{\xi} \chi_{(0,t)}(\tau) \tau^{\alpha} \tau^{\left(1 + \frac{\lambda-1}{s} - \beta\right)s} d\tau \right)^{1/s} \left(\int_{\xi}^{\infty} \chi_{(0,t)}(\tau) \tau^{(2r+\lambda-1-\beta r)\left(-\frac{1}{r-1}\right)} d\tau \right)^{1/r'} \\
&\leq C \sup_{0 < \xi < t} \xi^{\frac{\lambda-1}{s} + \frac{1}{s} - 1 - \frac{\lambda}{r} + \frac{1}{r} + 1 - \frac{1}{r}} \leq C \sup_{t > 0} t^{-\frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda}{s}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.1 (ii) ifadesinde $\frac{\|H_{(y)}^{\beta} \varphi\|_{WL_s(0,t)}}{\|\varphi\|_{L_r(0,t)}}$ yerine yazılırsa,

$C \cdot \sup_{t > 0} t^{-\frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{s} + \frac{\lambda}{r}} = C < \infty$ bulunur ki, bu da ispatı tamamlar.

3. LOKAL MORREY-LORENTZ UZAYLARI

$0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $M_{p,q;\lambda}^{loc} \equiv M_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ lokal Morrey- Lorentz uzayları

$$\|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t) \right\|_{L_q(0,r)}$$

sonlu quasinormlu bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayları olarak tanımlanır. Lokal Morrey- Lorentz uzayları literatürde ilk kez C. Aykol un doktora tezinde tanımlanmış (Aykol, 2013) ve bu tezde verilen uzaylar arasındaki bazı gömme teoremleri ispatlanmıştır.

Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > 1$ ise $M_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n) = \Theta$ dir. Burada Θ , R^n üzerinde sıfıra eşit bütün fonksiyonların kümesidir.

Ayrıca $M_{p,q;0}^{loc}(R^n) = L_{p,q}(R^n)$ ve $M_{p,p;\lambda}^{loc} \equiv M_{p;\lambda}^{loc}(R^n)$. $\lambda = 1$ limit durumunda $M_{p,q;1}^{loc}(R^n)$ uzayı $\Lambda_{\infty, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}(R^n)$ klasik Lorentz uzayıdır.

$$M_{p,\infty;\lambda}^{loc} = L_{p,\infty} = WL_p \text{ olur.}$$

Burada, $WM_{p,q;\lambda}^{loc} \equiv WM_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ ile bütün ölçülebilir fonksiyonların zayıf lokal Morrey- Lorentz uzayları gösteriliyor ki bu uzayların quasinormu

$$\|f\|_{WM_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| \tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(\tau) \right\|_{WL_q(0,r)}$$

dir.

Lemma 3.1 $0 < p \leq p < \infty, \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{q}$ ve $0 < \lambda \leq \frac{p}{q}$ olsun, bu durumda

$\left(\frac{q}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{WL_s} \leq \|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} \leq \lambda^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{WL_s}$ dir. Özel olarak $\|f\|_{WL_\infty} = \|f\|_{M_{\frac{q}{\lambda},q;\lambda}^{loc}}$ dir.

3.1 Lokal Morrey- Lorentz Uzaylarında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

Bu kısımda Guliyev, Aykol, Küçükaslan ve Şerbetçi tarafından 2020 yılında elde edilen Riesz potansiyelinin lokal Morrey-Lorentz uzaylarında sınırlılığına ilişkin sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.1.1

$0 < \alpha < n$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 \leq r \leq s \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{r}{r+\lambda} \leq p \leq \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1}$ ve $f \in M_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ fonksiyonu (2.2.1) koşulunu sağlasın. Bu durumda $I_\alpha(f)$ Riesz potansiyeli hemen her yerde vardır.

Bundan başka;

- (i) Eğer $\frac{r}{r+\lambda} < p < \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1}$ ise $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{\alpha}{n}$ koşulu I_α operatörünün $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.
- (ii) Eğer $p = \frac{r}{r+\lambda}$ ise $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} - \frac{\lambda}{s}$ koşulu I_α operatörünün $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $WM_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.

Bu teoremin ispatı yapılırken $M_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ lokal Morrey-Lorentz uzaylarında, Riesz potansiyeli I_α nın sınırlı olması için gerek ve yeter koşullar elde edilecektir. Bunun için de Lemma 2.3.3 ve Lemma 2.3.4 deki eşitsizliklerin düzenlenmiş hali kullanılacaktır.

İspat.

f fonksiyonu eğer (2.2.1) koşulunu sağlıyorsa, Teorem 2.2.2 den dolayı, $I_\alpha f(x)$, $x \in R^n$ Riesz potansiyeli hemen her yerde vardır.

(i) Yeter Koşul:

$\frac{r}{r+\lambda} < p < \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1}$ olsun. İkinci eşitsizliği kullanarak,

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} (I_\alpha f)^*(\tau) \right\|_{L_s(0,t)} \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \left(\tau^{\frac{\alpha}{n} - 1} \int_0^\tau f^*(y) dy + \int_\tau^\infty y^{\frac{\alpha}{n} - 1} f^*(y) dy \right) \right\|_{L_s(0,t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{-\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{a}{n} - 1} \int_0^\tau f^*(y) dy \right\|_{L_s(0,t)} \\
&\quad + C \sup_{t>0} t^{\frac{-\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \int_\tau^\infty y^{\frac{a}{n} - 1} f^*(y) dy \right\|_{L_s(0,t)} \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

I_1 i hesaplanırsa,

$$I_1 = C \sup_{t>0} t^{\frac{-\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{a}{n} - 1} \int_0^\tau f^*(y) dy \right\|_{L_s(0,t)} = C \left\| H_{(\gamma)}^\beta g \right\|_{L_{s,\lambda}(0,\infty)}$$

$\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ alınır ve Hardy operatörü $H_{(\gamma)}^\beta$ göz önüne alınırsa $g(t) = t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} f^*(t)$ olur.

Böylece

$\beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} + \frac{a}{n}$ elde edilir. Lemma 2.3.2 den, $\beta = (1 - \lambda) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$ olur. Buradan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) + \frac{a}{n}$ elde edilir.

Bu yüzden, $H_{(\gamma)}^\beta$ operatörü $L_{r,\lambda}(0, \infty)$ uzayından $L_{s,\lambda}(0, \infty)$ uzayına $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} < \frac{1}{r'} + \frac{\lambda}{r}$ koşulu altında sınırlıdır.

Daha sonrasında,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \left\| H_{(\gamma)}^\beta g \right\|_{L_{s,\lambda}(0,\infty)} \leq C \|g\|_{L_{r,\lambda}(0,\infty)} \\
&= C \sup_{t>0} t^{\frac{-\lambda}{r}} \left\| \tau^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} f^*(\tau) \right\|_{L_r(0,t)} = C \|f\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \tag{3.1.1}
\end{aligned}$$

I_2 yi düşünüldüğünde,

$$\begin{aligned}
I_2 &= C \sup_{t>0} t^{\frac{-\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \int_\tau^\infty y^{\frac{a}{n} - 1} f^*(y) dy \right\|_{L_s(0,t)} \\
&= C \left\| \mathcal{H}_{(\gamma)}^\beta g \right\|_{L_{s,\lambda}(0,\infty)}
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{(\gamma)}^\beta$ Hardy operatöründe $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} - \frac{a}{n}$ ve $g(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} f^*(t)$ alınır. Buradan

$\beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} + \frac{a}{n}$ elde edilir. Lemma 2.3.2 den, $\beta = (1 - \lambda) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$ olduğundan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) + \frac{a}{n}$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{H}_{(\gamma)}^\beta$ operatörü $L_{r,\lambda}(0, \infty)$ Morrey uzayından uzayından $L_{s,\lambda}(0, \infty)$ uzayına $\frac{\lambda-1}{r} < \gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} - \frac{a}{n}$ koşulu altında sınırlıdır. Ardından ,

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \mathcal{H}_{(\gamma)}^\beta g \right\|_{L_{s,\lambda}(0,t)} &\leq C \|g\|_{L_{r,\lambda}(0,\infty)} \\ &= C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} f^*(\tau) \right\|_{L_r(0,t)} = C \|f\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

(3.1.1) ve (3.1.2) deki eşitsizliklerden $M_{p,q;\lambda}^{loc}$ den $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ ya I_a operatörünün sınırlılığı elde edilir.

(ii) Gerek Koşul:

I_a operatörünün $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ den $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ ya sınırlı olduğunu varsayalım, ve

$$\frac{r}{r+\lambda} < p < \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n} \right)^{-1} \text{ olsun.}$$

$\tau > 0$ için $f_\tau(x) =: f(\tau x)$ olarak tanımlayalım. Buradan $f_\tau^*(t) =: f^*(t\tau^n)$ ve

$$\begin{aligned} \|f_\tau\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{r}} \left\| y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} f_\tau^*(y) \right\|_{L_r(0,t)} \\ &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{r}} \left\| y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} f^*(y\tau^n) \right\|_{L_r(0,t)} \\ &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{r}} \tau^{-\frac{n}{p}} \left\| y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} f^*(y) \right\|_{L_r(0,t\tau^n)} \\ &= \tau^{-\frac{n}{p}+\frac{n\lambda}{r}} \sup_{t>0} (t\tau^n)^{-\frac{\lambda}{r}} \left\| y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} f^*(y) \right\|_{L_r(0,t\tau^n)} \end{aligned}$$

$$= \tau^{-n\left(\frac{1-\lambda}{p}-\frac{\lambda}{r}\right)} \|f\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}}$$

Aynı zamanda

$$(I_a f_\tau)(x) = \tau^{-a}(I_a f)(\tau x)$$

$$(I_a f_\tau)^*(t) = \tau^{-a}(I_a f)^*(t\tau^n)$$

ve

$$\begin{aligned} \|I_a f_\tau\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{-\lambda}{s}} \left\| y^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} (I_a f_\tau)^*(y) \right\|_{L_s(0,t)} \\ &= \tau^{-a} \sup_{t>0} t^{\frac{-\lambda}{s}} \left\| y^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} (I_a f)^*(y\tau^n) \right\|_{L_s(0,t)} \\ &= \tau^{-a} \sup_{t>0} t^{\frac{-\lambda}{s}} \left(\int_0^t (y\tau^n)^{\frac{s}{q}-1} ((I_a f)^*(y\tau^n))^s d((y\tau^n)) \right)^{\frac{1}{s}} \tau^{-\frac{n}{q}} \\ &= \tau^{-a-\frac{n}{q}+\frac{n\lambda}{s}} \sup_{t>0} (t\tau^n)^{\frac{-\lambda}{s}} \left\| y^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} I_a f^*(y) \right\|_{L_s(0,t)} \\ &= \tau^{-a-n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)} \|I_a f\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} \end{aligned}$$

I_a operatörü $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ den $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlı olduğundan,

$\|I_a f\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} \leq C \|f\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}}$ buluruz ki burada C, f ten bağımsız keyfi bir sabittir.

Buradan,

$$\begin{aligned} \|I_a f\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} &= \tau^{a+n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)} \|I_a f_\tau\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} \\ &\leq C \tau^{a+n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)} \|f_\tau\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \\ &= \tau^{a+n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)-n\left(\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{r}\right)} \|f\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \\ &= \tau^{a+n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-n\lambda\left(\frac{1}{r}-\frac{\lambda}{s}\right)} \|f\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \end{aligned}$$

Eğer

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) + \frac{a}{n} \text{ ise } \tau \rightarrow 0 \text{ her } f \in M_{p,r;\lambda}^{loc} \text{ için } \|I_a f\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} = 0 \text{ dir.}$$

Eğer

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) + \frac{a}{n} \text{ ise } \tau \rightarrow \infty \text{ her } f \in M_{p,r;\lambda}^{loc} \text{ için } \|I_a f\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} = 0 \text{ dir.}$$

Böylece $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) + \frac{a}{n}$ elde edilir.

(i) **Yeter Koşul:**

$p = \frac{r}{r+\lambda}$, $1 \leq r \leq s < \infty$ ve $f \in M_{p,r;\lambda}^{loc}$ olsun. Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|I_a f\|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} (I_a f)^*(\tau) \right\|_{WL_s(0,t)} \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \left(\tau^{\frac{a}{n}-1} \int_0^\tau f^*(y) dy + \int_\tau^\infty f^*(y) y^{\frac{a}{n}-1} dy \right) \right\|_{WL_s(0,t)} \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{a}{n} - 1} \int_0^\tau f^*(y) dy \right\|_{WL_s(0,t)} \\ &\quad + C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \int_\tau^\infty f^*(y) y^{\frac{a}{n}-1} dy \right\|_{WL_s(0,t)} \\ &= N_1 + N_2 \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

N_1 i bulmak için,

$$N_1 = C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{a}{n} - 1} \int_0^\tau f^*(y) dy \right\|_{WL_s(0,t)} = C \left\| H_{(\gamma)}^\beta h \right\|_{WL_{s,\lambda}(0,\infty)}.$$

$H_{(\gamma)}^\beta$ Hardy operatöründe $\gamma = 1 + \frac{\lambda-1}{r}$ ve $h(t) = t^{1+\frac{\lambda-1}{r}} f^*(t)$ alınırsa,

buradan $\beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{a}{n} - 1 - \frac{\lambda}{r}$ elde edilir. Lemma 2.3.4 den, $\beta = (1 - \lambda) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$

ve ardından $1 - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ elde edilir. Böylece,

$$N_1 \leq C \left\| H_{(\gamma)}^\beta h \right\|_{WL_{s,\lambda}(0,\infty)} \leq C \|h\|_{L_{r,\lambda}(0,\infty)}$$

$$= C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{r}} \left\| \tau^{1+\frac{\lambda-1}{r}} f^*(\tau) \right\|_{L_r(0,t)} = C \|f\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \quad (3.1.3)$$

Şimdi N_2 yi bulmak için,

$$N_2 = C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} \int_{\tau}^{\infty} f^*(y) y^{\frac{a}{n}-1} dy \right\|_{WL_s(0,t)} = C \left\| \mathcal{H}_{(\gamma)}^{\beta} h \right\|_{WL_{q,\lambda}(0,\infty)}$$

$\mathcal{H}_{(\gamma)}^{\beta}$ Hardy operatöründe $\gamma = 1 + \frac{\lambda-1}{r} - \frac{a}{n}$ ve $h(t) = t^{1+\frac{\lambda-1}{r}} f^*(t)$ alınır.

burada $\beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{a}{n} - 1 - \frac{\lambda}{r}$ elde edilir. Lemma 2.3.4 den $\beta = (1 - \lambda) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$ ve ardından $1 - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ elde edilir. Bu yüzden $\mathcal{H}_{(\gamma)}^{\beta}$ Hardy operatörü $L_{r,\lambda}(0, \infty)$ Morrey uzayından $WL_{s,\lambda}(0, \infty)$ uzayına sınırlıdır. Buradan,

$$\begin{aligned} N_2 &\leq C \left\| \mathcal{H}_{(\gamma)}^{\beta} \right\|_{WL_{s,\lambda}(0,\infty)} \leq C \|h\|_{L_{r,\lambda}(0,\infty)} \\ &= C \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| \tau^{1+\frac{\lambda-1}{r}} f^*(\tau) \right\|_{L_r(0,t)} = C \|f\|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

(3.1.3) ve (3.1.4) deki eşitsizliklerden Riesz potansiyeli I_a nın $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ den $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlılığı elde edilmiş olur.

(ii) Gerek Koşul:

Riesz potansiyeli I_a nın $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ den $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına $p = \frac{r}{r+\lambda}$ için sınırlı olduğunu kabul edelim.

$\tau > 0$ için $f_{\tau}(x) =: f(\tau x)$ olarak tanımlayalım.

$$\|f_{\tau}\|_{M_{\frac{r}{r+\lambda},r;\lambda}^{loc}} = \tau^{-n} \|f\|_{M_{\frac{r}{r+\lambda},r;\lambda}^{loc}} \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} \|I_a f_{\tau}\|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| y^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} (I_a f_{\tau})^*(y) \right\|_{WL_s(0,t)} \\ &= \tau^{-a} \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| y^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} (I_a f)^*(y \tau^n) \right\|_{WL_s(0,t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau^{-a-\frac{n}{q}+\frac{n\lambda}{s}} (t\tau^n)^{-\frac{\lambda}{s}} \left\| y^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} (I_a f)^*(y) \right\|_{WL_s(0,t)} \\
&= \tau^{-a-n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)} \| I_a f \|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}}
\end{aligned}$$

Böylece I_a operatörü $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $WM_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlıdır.

$$\| I_a f \|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} \leq C \| f \|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}}$$

olup burada C, f ten bağımsız keyfi bir sabittir. Böylece

$$\begin{aligned}
\| I_a f \|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} &= \tau^{a+n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)} \| (I_a f)_\tau \|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} \\
&\leq C \tau^{a+n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)} \| f_\tau \|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \\
&= \tau^{a+n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)-n} \| f \|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}} \\
&= \tau^{a+n\left(\frac{1}{q}-1-\frac{\lambda}{r}\right)+n\lambda\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)} \| f \|_{M_{p,r;\lambda}^{loc}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $1 < \frac{1}{q} + \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ ise $M_{\frac{r}{r+\lambda},r;\lambda}^{loc}$ uzayındaki her f için

$\tau \rightarrow 0$ iken $\| I_a f \|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} = 0$ dir.

$\tau \rightarrow \infty$ iken $1 > \frac{1}{q} + \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ ise $M_{\frac{r}{r+\lambda},r;\lambda}^{loc}$ uzayındaki her f için $\| I_a f \|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} = 0$ dir.

Böylece $1 - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ eşitliği elde edilir ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 3.1 $\lambda=1$ limit durumunda $M_{p,q;\lambda}^{loc}$ uzayının klasik Lorentz uzayı

$\Lambda_{\infty,t^p-\frac{1}{q}}$ (Aykol vd., 2013) olduğuna dikkat edilmelidir. I_a nın $\Lambda_{\infty,t^p-\frac{1}{q}}$ daki sınırlılığı

(Savner, 1990) da gösterilmiştir.

4. BAZI UYGULAMALAR

Üçüncü bölümde elde edilen sonuçlar, Riesz potansiyeli ile ilişkili olan farklı operatörlere uygulanabilir. Bu sonuçlar kesirli maksimal operatöre, kesirli Marcinkiewicz operatörüne ve bazı analitik yarı grupların rasyonel kuvvetlerine uygulanacaktır.

4.1 Kesirli Maksimal Operatör

$0 \leq a < n$ için olmak üzere kesirli maksimal operatör

$$M_a f(x) = \sup_{t>0} |B(x, t)|^{\frac{a}{n}-1} \int_{B(x, t)} |f(y)| dy,$$

şeklinde tanımlanır, burada $B(x, t)$, x merkezli t yarıçaplı açık bir yuvardır ($x \in \mathbb{R}^n$).

$|B(x, t)|$ ise $B(x, t)$ nin Lebesgue ölçüsüdür ki, $|B(x, t)| = w_n t^n$ olup, burada w_n ise \mathbb{R}^n de birim kürenin hacmini gösterir. M_a kesirli maksimal operatörü Riesz potansiyel operatörüne çok yakındır ki,

$$M_a f(x) \leq w_n^{\frac{a}{n}-1} (I_a |f|)(x) \quad (4.1.1)$$

eşitsizliği gerçekleşir. (4.1.1) eşitsizliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1

$0 < a < n$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 \leq r \leq s \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{r}{r+\lambda} \leq p \leq \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n}\right)^{-1}$ ve

$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{a}{n}$ olsun.

(i) Eğer $\frac{r}{r+\lambda} < p < \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n}\right)^{-1}$ ise $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{a}{n}$ koşulu M_a kesirli maksimal operatörünün $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.

(ii) Eğer $p = \frac{r}{r+\lambda}$ ise $1 - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ koşulu M_a kesirli maksimal operatörünün $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlılığı için gerek ve yeter koşuldur.

İspat: $0 < \alpha < n$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 \leq r \leq s \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{r}{r+\lambda} \leq p \leq \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n}\right)^{-1}$ olsun.

Yeter Koşul. (i) ve (ii) nin yeter koşulu Teorem 3.1.1 ve (4.1.1) eşitsizliklerinden elde edilir.

Gerek Koşul.

(i) Farzedelim ki M_a operatörü $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına

$\frac{r}{r+\lambda} < p < \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n}\right)^{-1}$ için sınırlı olsun. Böylece

$$M_a f_\tau(x) = \tau^{-a} M_a f(\tau x) \text{ ve } \|M_a f_\tau\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}} = \tau^{-a-n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)} \|M_a f\|_{M_{q,s;\lambda}^{loc}}$$

yazılabilir.

Teorem 3.1.1 den

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{a}{n} \text{ elde edilir.}$$

(ii) Farzedelim ki M_a operatörü $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $WM_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına $p = \frac{r}{r+\lambda}$ için sınırlı olsun. Buradan

$$M_a f_\tau(x) = \tau^{-a} M_a f(\tau x) \text{ ve } \|M_a f_\tau\|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} = \tau^{-a-n\left(\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{s}\right)} \|M_a f\|_{WM_{q,s;\lambda}^{loc}} \text{ olur.}$$

Böylece $1 - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ eşitliği elde edilir.

4.2 Kesirli Marcinkiewicz Operatörü

$S^{n-1} = \{x \in R^n: |x| = 1\}$ R^n de $d\sigma$ Lebesgue ölçüsüyle tanımlı birim küre olsun. Ω da aşağıdaki koşulları sağlasın.

(a) Ω , $R^n \setminus \{0\}$ da tanımlı sıfırcı dereceden bir homojen fonksiyondur ki

$$\Omega(tx) = \Omega(x), \text{ her } t > 0 \text{ } x \in R^n \setminus \{0\} \text{ şartı sağlanır.}$$

(b) Ω nın S^{n-1} küresi üzerinde sıfırı vardır ki

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x') = 0.$$

(c.) $\Omega \in Lip_\gamma(S^{n-1}), 0 < \gamma \leq 1$ olsun. Bu durumda bir C sabiti vardır öyle ki

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq C|x' - y'|^\gamma \text{ sağlanır, burada } x', y' \in S^{n-1} \text{ dir.}$$

1958 de Stein, Marcinkiewicz integrali μ_Ω yı daha üst boyutlarda tanımlamıştır.

$$\mu_{\Omega,a}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,a,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \text{ olup, burada}$$

$$F_{\Omega,a,t}(f)(x) = \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1-a}} f(y) dy$$

şeklindedir.

Marcinkiewicz operatörü μ_Ω nın sürekliliği Stein (1970), Chiarenza ve Frasca (1987), Di Fazio ve Ragusa (1991) ve Lu vd. (2007) tarafından kapsamlı bir biçimde çalışılmıştır.

$H = \left\{ h: \|h\| = \left(\int_0^\infty |h(t)|^2 dt/t^3 \right)^{1/2} < \infty \right\}$ olan bir H uzayı olsun. Burada

$$\mu_\Omega(f)(x) = \|F_{\Omega,t}(f)(x)\| \text{ olduğu açıktır.}$$

Minkowski eşitsizliğinden ve Ω koşullarından

$$\begin{aligned} \mu_{\Omega,a}(f)(x) &\leq \int_{R^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1-a}} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} dy. \\ &\leq C \int_{R^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-a}} dy \\ &= I_a(|f|)(x) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1

$0 < \alpha < n$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 \leq r \leq s \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{r}{r+\lambda} \leq p \leq \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n}\right)^{-1}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{a}{n}$ olsun.

- (i) Eğer $\frac{r}{r+\lambda} < p < \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n}\right)^{-1}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{a}{n}$ ise μ_Ω Marcinkiewicz operatörü $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlıdır.
- (ii) Eğer $p = \frac{r}{r+\lambda}$ ve $1 - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ ise μ_Ω Marcinkiewicz operatörü $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $WM_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlıdır.

4.3 Bazı Analitik Yarı Grupların Rasyonel Kuvvetleri

Farzedelim ki, L , L_2 üzerinde bir lineer operatör olsun. L_2 de Gaussian üst sınırını sağlayan $p_t(x, y)$ çekirdeği ile e^{-tL} analitik yarı grubu üretsün ki,

$$|p_t(x, y)| \leq \frac{c_1}{t^{n/2}} e^{-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}} \quad (4.3.1)$$

eşitsizliği gerçeklensin, burada $x, y \in R^n$ ve her $t > 0$ için, $c_1, c_2 > 0$ x, y ile t den bağımsız sabitlerdir.

$0 < a < n$ için L operatörünün rasyonel kuvveti olan $L^{-\frac{a}{2}}$ operatörü

$$L^{-a/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(a/2)} \int_0^\infty e^{-tLf(x)} \frac{dt}{t^{\frac{a}{2}+1}}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada dikkat edilmelidir ki, eğer $L = -\Delta$, R^n üzerinde Laplacian olursa $L^{-a/2}$ de Riesz potansiyeli I_a elde edilir. (4.3.1) özelliği diferensiyel operatörlerin büyük sınıfları için sağlanır. Burenkov ve Guliyev (2009) tarafından Riesz potansiyelleri ile üstten sınırlanan operatörlere örnekler verilmiştir. e^{-tL} yarı grubu (4.3.1) i sağlayan bir çekirdek olan $p_t(x, y)$ ye sahip olduğundan

$$|L^{-a/2} f(x)| \leq CI_a(|f|)(x)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1

$0 < \alpha < n$, $0 \leq \lambda < 1$, $1 \leq r \leq s \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{r}{r+\lambda} \leq p \leq \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n}\right)^{-1}$ ve

$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{a}{n}$ olsun.

- (i) Eğer $\frac{r}{r+\lambda} < p < \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{a}{n}\right)^{-1}$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \frac{a}{n}$ ise $L^{-a/2}$ operatörü $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $M_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlıdır.
- (ii) Eğer $p = \frac{r}{r+\lambda}$ ve $1 - \frac{1}{q} = \frac{a}{n} - \frac{\lambda}{s}$ ise $L^{-a/2}$ operatörü $M_{p,r;\lambda}^{loc}$ uzayından $WM_{q,s;\lambda}^{loc}$ uzayına sınırlıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde,

$0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,q;\lambda}^{loc}} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| \left| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t) \right| \right\|_{L_q(0,r)}$$

sonlu quasinormlu bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı olan $M_{p,q;\lambda}^{loc} \equiv M_{p,q;\lambda}^{loc}(R^n)$ lokal Morrey- Lorentz uzaylarında

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n, f \in L_1^{loc}(R^n)$$

şeklinde tanımlanan Riesz potansiyelinin sınırlılığına yer verilmiştir. Riesz potansiyelinin sınırlılığı yardımıyla elde edilen sonuçlar harmonik analizin klasik operatörlerinden olan

$$M_\alpha f(x) = \sup_{t>0} |B(x,t)|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy$$

M_α kesirli maksimal operatör,

$$\mu_{\Omega,\alpha}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,\alpha,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

$\mu_{\Omega,\alpha}$ kesirli Marcinkiewicz operatörü, ve

L operatörünün rasyonel kuvveti olan

$$L^{-a/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(a/2)} \int_0^\infty e^{-tL f(x)} \frac{dt}{t^{-\frac{a}{2}+1}}$$

$L^{-\frac{a}{2}}$ operatörüne uygulanmıştır.

Lokal Morrey- Lorentz uzayları, klasik Lorentz uzaylarının bir genelleştirilmesi olduğundan bu tezde elde edilen sonuçların harmonik analiz ve fonksiyon uzayları teorisinde birçok uygulamalara sahip olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Adams, D.R., A note on Riesz Potentials, *Duke Math. J.*, 42 (1975), 765-778
- Alvarez, J., Lakey, J., Guzmán-Partida, M., Spaces of bounded λ -central mean oscillation, Morrey spaces, and λ -central Carleson measures, *Collect. Math.* 51 (2000), no. 1, 1–47.
- Andersen, K.F., Muckenhoupt, B., Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions, *Studia Math.* 72 (1982), no. 1, 9–26.
- Aykol C., Genelleştirilmiş Morrey-Lorentz uzayları ve bu uzaylarda maksimal operatörlerin sınırlılığı, [Doktora tezi], Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, ANKARA, 2013.
- Aykol, C., Guliyev, V.S., Şerbetçi, A., Boundedness of the maximal operator in the local Morrey–Lorentz spaces, *J. Inequal. Appl.* 2013 (2013), Paper No. 346.
- Aykol, C., Guliyev, V.S., Küçükaslan, A., Şerbetçi, A., The boundedness of Hilbert transform in the local Morrey–Lorentz spaces, *Integral Transforms Spec. Funct.* 27 (2016), no. 4, 318–330.
- Bennett, C., Sharpley, R., *Interpolation of Operators*, Pure Appl. Math. 129, Academic Press, Boston, 1988.
- Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Guliyev, V.S., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of fractional maximal operators in local Morrey-type spaces, *J. Comput. Appl. Math.* 208 (2007), no. 1, 280–301.
- Burenkov, V.I., Guliyev, V.S., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces, *Potential Anal.* 30 (2009), no. 3, 211–249.
- Burenkov, V.I., Guliyev, V.S., Şerbetçi, A., Tararykova, T.V., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces, *Eurasian Math. J.* 1 (2010), no. 1, 32–53.

- Calderón, A.P. , Spaces between L_1 and L_∞ and the theorem of Marcinkiewicz, *Studia Math.* 26 (1966), 273–299.
- Chiarenza, F., Frasca, M., Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function, *Rend. Mat. Appl.* (7) 7 (1987), no. 3–4, 273–279.
- Di Fazio, G., Ragusa, M.A., Commutators and Morrey spaces, *Boll. Unione Mat. Ital.* A (7) 5 (1991), no. 3, 323–332.
- Guliyev, V.S. , Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in \mathbb{R}^n , (in Russian), Doctor’s degree dissertation, Steklov Mathematical Institute, Moscow, 1994.
- Guliyev, V.S., Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups. some applications (in Russian), Elm, Baku, 1999.
- Guliyev, V.S., Şerbetçi, A., Ekincioğlu, İ., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of rough B-fractional integral operators in the Lorentz spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 336 (2007), no. 1, 425–437.
- Guliyev, V.S., Aykol, C., Küçükaslan, A., Şerbetçi, A., Maximal operator and Calderon–Zygmund operators in local Morrey–Lorentz spaces, *Integral Transforms Spec. Funct.* 27 (2016), no. 11, 866–877.
- Guliyev, V.S., Aykol, C., Küçükaslan, A., Şerbetçi, A., Riesz potential in the local Morrey-Lorentz spaces and some applications, *Georgian Math. J.* 27 (4) (2020) 557-567.
- Ho, K.-P., Sobolev–Jawerth embedding of Triebel–Lizorkin–Morrey–Lorentz spaces and fractional integral operator on Hardy type spaces, *Math. Nachr.* 287 (2014), no. 14–15, 1674–1686.
- Kristiansson E., Decreasing rearrangement and Lorentz $L(p; q)$ spaces [master thesis], Department of Mathematics of the Lulea University of Technology, Lulea; 2002.
- Lorentz G.G., Some new functional spaces, *Ann. of Math.*, 1950; 1, 37-55.
- Lorentz G. G., On the theory of spaces, *Pacific J. Math.* 1 (1951), 411- 429.

- Lu, S., Ding, Y., Yan, D., Singular integrals and related topics, World Scientific, Hackensack, 2007.
- Mingione, G., Gradient estimates below the duality exponent, *Math. Ann.* 346 (2010), no. 3, 571–627.
- Morrey C.B., On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1938), 126-166.
- O’Neil, R., Convolution operators and $L(p, q)$ spaces, *Duke Math. J.* 30 (1963), 129–142.
- Persson, L.E., Ragusa, M.A., Samko, N., Wall, P., Commutators of Hardy Operators in vanishing Morrey Spaces, *AIP Conf.Proc.*1453,859 (2012);<http://dx.doi.org/10.1063/1.4765588>.
- Ragusa, M.A., Embeddings for Morrey–Lorentz spaces, *J. Optim. Theory Appl.* 154 (2012), no. 2, 491–499.
- Samko, N., Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 350 (2009), no. 1, 56–72.
- Samko, N., Weighted Hardy and potential operators in Morrey spaces, *J. Funct. Spaces Appl.* 2012 (2012), Article ID 678171.
- Sawyer, E., Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces, *Studia Math.* 96 (1990), no. 2, 145–158.
- Stein, E.M., On the functions of Littlewood–Paley, Lusin, and Marcinkiewicz, *Trans. Amer. Math. Soc.* 88 (1958), 430–466.
- Stein, E.M., Singular integrals and differentiability properties of functions, *Princeton Math. Ser.* 30, Princeton University Press, Princeton, 1971.