

T.C.
KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

**B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİNİN BAZI UYGULAMALARI**

Danışman:
Doç. Dr. Ahmet BOZ

Hazırlayan:
Işıl Özge KILINÇ

Kütahya - 2021

Kabul ve Onay

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma, Jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi	İmza	
	Kabul	Red
Doç. Dr. Ahmet BOZ		
Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU		
Dr. Öğr. Üyesi İlkem TURHAN ÇETİNKAYA		

Onay

İmza

Prof. Dr. Şahmurat ARIK

Enstitü Müdürü

Bilimsel Etik Bildirimi

Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığım “B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN BAZI UYGULAMALARI” adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlandığı aşamaya kadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığımı, bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

...../...../2021

İmza

Işıl Özge KILINÇ

ÖZET

B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN BAZI UYGULAMALARI

KILINÇ, Işıl Özge
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet BOZ
Şubat, 2021, 83 sayfa

Kısmi türevli diferansiyel denklemler, lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler olarak iki sınıfta incelenebilir. Uygulama alanlarına bağlı olarak da çeşitleri kendi içlerinde artmaktadır (Debnath, 2011). Bu yüksek lisans tezinde, zamana ve konuma bağlı bazı bir boyutlu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için nümerik çözüm araştırılacaktır. Model problem olarak, KdV Burgers, Gardner, Adveksiyon-Difüzyon, MRLW denklemleri seçilecektir. Çözümleri araştırırken zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemi, konum ayrıştırması için ise Galerkin yöntemi çalışılacaktır. Bu nümerik yöntemler, model problemlere uygulanacaktır.

İlk bölümde ileriki bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı temel kavramlar açıklanmıştır. İlk olarak solitary dalgalar, soliton, hata normları, sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, Galerkin yöntemi ve kollokasyon yöntemi tanıtılmıştır. Spline fonksiyon kavramı anlatıldıktan sonra kübik B-spline ve genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bu bölümün sonunda, sonraki bölümlerde sayısal çözümü araştırılacak olan KDV Burgers Denklemi, Gardner Denklemi, Adveksiyon - Difüzyon Denklemi, Düzenlenmiş Uzun Dalga Denklemi için literatür taraması yapılmıştır.

Diğer bölümlerde sırasıyla, KDV Burgers, Gardner, Adveksiyon - Difüzyon, Düzenlenmiş Uzun Dalga (MRLW) denklemlerinin genişletilmiş kübik B-spline yöntemiyle sayısal olarak çözümleri incelenmiştir. Her biri için ikişer test problemi, tam sonuçlarla önerilen yöntemi karşılaştırmak için kullanılmıştır.

Sonuç bölümünde genişletilmiş kübik B-spline yönteminin bu denklemlere uygulanışı hakkında elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genişletilmiş B-spline, KDV Burgers Denklemi, Gardner Denklemi, Adveksiyon-Difüzyon Denklemi, Düzenlenmiş Uzun Dalga Denklemi.

ABSTRACT

SOME APPLICATIONS OF FINITE ELEMENT METHOD WITH B-SPLINE FUNCTIONS

KILINÇ, Işıl Özge

Master Thesis, Department of Mathematic

Supervisor: Doç. Dr. Ahmet BOZ

February, 2021, 83 pages

Partial differential equations can be examined in two classes as linear and nonlinear partial differential equations. Depending on the application areas, the varieties are increasing in themselves. In this master thesis, the numerical solution will be investigated for some one-dimensional nonlinear partial differential equations depending on time and position. As the model problem, KdV Burgers, Gardner, Advection-Diffusion, MRLW equations will be chosen. while researching solutions, Crank-Nicolson method will be used for time parsing and Galerkin method will be used for location parsing. These numerical methods will be applied to model problems. In the first part, some basic concepts that will be needed in the following chapters are explained.

Firstly, solitary waves, soliton, error norms, finite difference method, finite element method, Galerkin method and collocation method are introduced. After explaining the concept of spline function, cubic B-spline and expanded cubic B-spline functions are defined. At the end of this chapter, literature review has been made for KDV Equation, Gardner Equation, Advection-Diffusion Equation, MRLW Equation, whose numerical solution will be investigated in the following chapters.

In other chapters, numerical solutions of KDV Burgers, Gardner, Advection - Diffusion, Modified Regularized Long Wave (MRLW) equations by expanded cubic B-spline method, respectively, have been examined. Two test problems for each were used to compare the proposed method with the exact results.

In the conclusion part, the results obtained about the application of the expanded cubic B-spline method to these equations are compared.

Keywords: Extended B-spline, KDV Burgers Equation, Gardner Equation, Advection - Diffusion Equation, Modified Regularized Long Wave Equation.

Teşekkür

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca benden yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Ahmet BOZ'a bana ayırdığı zaman ve sağladığı destek için minnettarım. Ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı da teşekkürü borç bilirim. Manevi desteğini her an yanımda hissettiğim eşime, varlığıyla bana güç veren canım kızıma ve üzerimdeki büyük emeklerinden dolayı aileme gönülden teşekkürler.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	<u>Sayfa</u>
ABSTRACT	iv
TABLolar DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
KISALTMALAR DİZİNİ	x
GİRİŞ	xi
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. KULLANILAN DENKLEMLER VE YÖNTEMLER.....	3
1.1.1. Solitary Dalgalar ve Soliton	3
1.1.2. Hata Normları.....	4
1.1.3. Sonlu Farklar Yöntemi.....	4
1.1.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	6
1.1.5. Galerkin Yöntemi	7
1.1.6. Kollokasyon Yöntemi	8
1.1.7. Spline Fonksiyonlar	8
1.1.8. B-Spline Fonksiyonlar	9
1.1.8.1. Kübik B-Spline Fonksiyonlar	9
1.1.8.2. Genişletilmiş Kübik B-Spline Fonksiyonlar	11
1.1.9. KdV Burgers Denklemi İçin Literatür Taraması.....	14
1.1.10. Gardner Denklemi İçin Literatür Taraması.....	15
1.1.11. Adveksiyon - Difüzyon Denklemi İçin Literatür Taraması.....	17
1.1.12. Düzenlenmiş Uzun Dalga Denklemi İçin Literatür Taraması.....	17

İKİNCİ BÖLÜM

KDV BURGERS DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

2.1. METODUN UYGULANMASI	20
2.1.1. Sayısal Çözüm	20
2.1.2. Test Problemleri.....	25
2.1.2.1. Birinci Test Problemi.....	26
2.1.2.2. İkinci Test Problemi.....	29
2.2. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	31

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

GARDNER DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

3.1. METODUN UYGULANMASI	33
3.1.1. Sayısal Çözüm	33
3.1.2. Test Problemleri.....	37
3.1.2.1. Birinci Test Porblemi.....	38
3.1.2.2. İkinci Test Problemi.....	40
3.2. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	43

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B- SPLİNE YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

4.1. METODUN UYGULANMASI	45
4.1.1. Sayısal Çözüm	45
4.1.2. Test Problemleri.....	47
4.1.2.1. Birinci Test Problemi.....	47
4.1.2.2. İkinci Test Problemi.....	49
4.2. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	51

BEŞİNCİ BÖLÜM

DÜZENLENMİŞ UZUN DALGA DENKLEMİNİN (MRLW), GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

5.1. METODUN UYGULANMASI	53
5.1.1. Sayısal Çözüm	53
5.1.2. Test Problemleri.....	56
5.1.2.1. Birinci Test Problemi.....	56
5.1.2.2. İkinci Test Problemi.....	57
5.2. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	60

SONUÇ.....	61
-------------------	-----------

KAYNAKLAR	63
------------------------	-----------

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri.....	10
Tablo 2.1: Bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri	13
Tablo 3.1: Maksimum hata normu ile elde edilen (MQ),(IQ) ve (GA) sonuçlarının karşılaştırılması	27
Tablo 3.2: Farklı λ değerleri ve farklı zamanlar için C_1, C_2, C_3, C_4 büyüklüklerindeki değişim	29
Tablo 4.1: Farklı genişletme parametreleri kullanılarak elde edilen hata normları	40
Tablo 4.2: Farklı genişletme parametreleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri	40
Tablo 4.3: Tepe noktadaki korunum sabitlerinin başlangıç değeri ve mutlak değişkenleri	42
Tablo 5.1: Farklı Courant sayıları için tüm belge üzerinde ortaya çıkan hatalar	48
Tablo 5.2: λ 'nın farklı değerleri için $Cr = 0,25$ ve $t = 9600s$ alınarak elde edilen hata değerleri.....	49
Tablo 5.3: Farklı yöntemlerle elde edilen sonuçların karşılaştırılması	51
Tablo 6.1: L_∞ hata normu ve I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin değerleri.....	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1: Basit bir dalga profili.....	3
Şekil 2.1: λ serbest parametresi 0'dan farklı seçildiğinde fonksiyonun şekli	12
Şekil 3.1: $\vartheta = 0.001$ değeri için $t = 1$ zamanında dalganın durumu	27
Şekil 3.2: $\vartheta = 0.005$ değeri için $t = 1$ zamanında dalganın durumu	27
Şekil 3.3: $\vartheta = 0.01$ değeri için $t = 1$ zamanında dalganın durumu	28
Şekil 4.1: $\vartheta = 0.001$ değeri için $t = 1$ zamanında maksimum hata dağılımı	28
Şekil 4.2: $\vartheta = 0.005$ değeri için $t = 1$ zamanında maksimum hata dağılımı	28
Şekil 4.3: $\vartheta = 0.01$ değeri için $t = 1$ zamanında maksimum hata dağılımı	28
Şekil 5.1: $\Delta t = 0.1$ için pozitif tek solitary dalga şekli	38
Şekil 6.1: $\lambda = 0$, $\Delta t = 0.1$ ve $N = 100$ alınarak ortaya çıkan hata dağılımı	39
Şekil 6.2: $\lambda = -0.00840$, $\Delta t = 0.1$ ve $N = 100$ alınarak ortaya çıkan hata dağılımı	39
Şekil 7.1: $t = 0$ anında dalga yüksekliği	41
Şekil 7.2: $t = 5$ anında dalga yüksekliği	41
Şekil 7.3: $t = 10$ anında dalga yüksekliği	42
Şekil 7.4: $t = 15$ anında dalga yüksekliği	42
Şekil 8.1: $t = 9600$ zamanından sonraki başlangıç dağılımı	48
Şekil 8.2: $t = 9600$ zamanındaki mutlak hata dağılımı	49
Şekil 8.3: $t = 5$ zamanına kadar olan farklı zamanlardaki nümerik çözümler	50
Şekil 8.4: Uygulanan yöntem için mutlak hata dağılımı	50
Şekil 9.1: $-1 \leq \lambda \leq 1$ aralığında L_∞ hata normu	57
Şekil 9.2: Farklı zamanlarda iki solitary dalga etkileşimi	58
Şekil 9.3: I_1 için elde edilen mutlak hata grafiği	59
Şekil 9.4: I_2 için elde edilen mutlak hata grafiği	59
Şekil 9.5: I_3 için elde edilen mutlak hata grafiği	59

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	Açıklama
AD	Adveksiyon Difüzyon
ADD	Adveksiyon Difüzyon Denklemi
KdVB	Korteweg de-Vries-Burgers
KdV	Korteweg de-Vries
MRLW	Modified Regularized Long Wave
RLW	Regularized Long Wave
MQ	Multi Kuadratik
IMQ	Ters Multi Kuadratik
IQ	Ters Kuadratik
GA	Gaus
MEW	Modified Equal Width
CDQ	Cosine Açılım Metodu
LPDQ	Lagrange Polinomları

GİRİŞ

Bu çalışmada zamana ve konuma bağlı bazı bir boyutlu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için nümerik çözüm araştırılacaktır. Model problem olarak, KdV Burgers, Gardner, Adveksiyon-Difüzyon, MRLW denklemleri seçilecektir. Çözümleri araştırırken daha az hatayla sonuçlar elde edebilmek için zaman ve konum ayrıştırması, Crank-Nicolson yöntemi ve Galerkin yöntemi kullanılarak yapılacaktır.

İlk bölümde solitary dalgalar, soliton, hata normları, sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, Galerkin yöntemi ve kollokasyon yöntemi tanıtılmıştır. Spline fonksiyon kavramı anlatıldıktan sonra kübik B-spline ve genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar tanımlanmıştır ve bu fonksiyonlarının sınır şartlarındaki çözüm kümeleri incelenmiştir. Bu bölümün sonunda, sonraki bölümlerde sayısal çözümü araştırılacak olan KDV Burgers Denklemi, Gardner Denklemi, Adveksiyon - Difüzyon Denklemi, Düzenlenmiş Uzun Dalga Denklemi için literatür taraması yapılmıştır.

Diğer bölümlerde sırasıyla, KDV Burgers, Gardner, Adveksiyon - Difüzyon, Düzenlenmiş Uzun Dalga (MRLW) denklemlerinin genişletilmiş kübik B-spline yöntemiyle sayısal olarak çözümleri incelenmiştir. Zaman ayrışımı için Crank-Nicolson metodu kullanılmıştır, konum ayrışımı için ise kollokasyon metodu kullanılmıştır Her biri için ikişer test problemi, tam sonuçlarla önerilen yöntemi karşılaştırmak için kullanılmıştır. Farklı test problemleri ve farklı parametreler için elde edilen tüm sonuçlar incelendiğinde genel olarak λ 'nın sıfırdan farklı değerleri için elde edilen hata normları, $\lambda = 0$ durumundaki hata normu ile karşılaştırılmıştır. Böylece genişletilmiş kübik B-spline yöntemi ile kübik B-spline yöntemi kıyaslanmıştır.

Sonuç bölümünde genişletilmiş kübik B-spline yönteminin bu denklemlere uygulanışı hakkında elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Grafiklere bakıldığında genişletilmiş kübik B-spline yönteminin dalganın hareketini iyi modellediği görülmüştür. Problemi çözmedeki başarısı açısından bakıldığında benzer tipteki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri araştırılırken genişletilmiş kübik B-spline metodunun kullanılması tavsiye edilir.



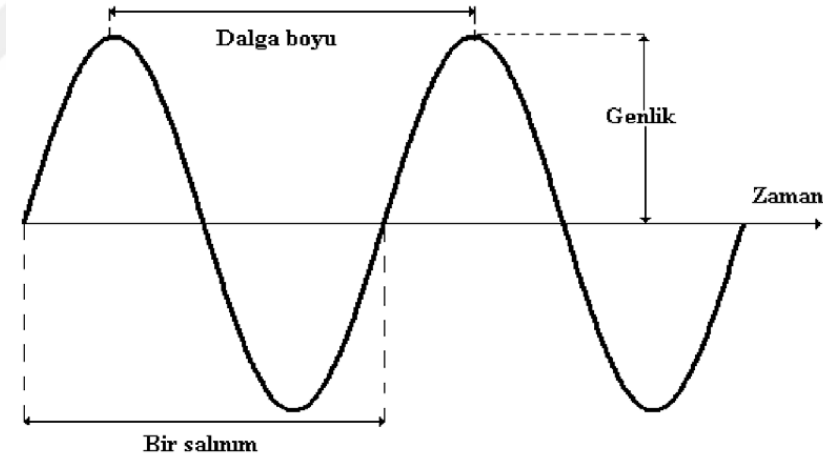
BİRİNCİ BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

1.1. KULLANILAN DENKLEMLER VE YÖNTEMLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlardan kısaca bahsedilmiştir. İlk olarak soliton-solitary dalgalar, hata normları, sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri özetlenmiştir. Galerkin ve kollokasyon yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. B-Spline fonksiyonlardan kübik B-Spline ve genişletilmiş kübik B-Spline fonksiyonlar çözümlenmiştir. Tezde sayısal çözümleri araştırılacak olan, KdV Burgers, Gardner, Adveksiyon-Difüzyon, MRLW denklemleri literatür taraması ile tanıtılmıştır.

1.1.1. Solitary Dalgalar ve Soliton

Enerjinin taşınmasını sağlayan ve bir ortamda veya boşlukta yayılan titreşimlere dalga denir. Bilinen en yaygın dalga özelliği gösteren titreşimler ses, ışık, atomun içindeki tanecik hareketleri ve suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar (Şekil 1.1).



Frekans: Birim zamandaki salınımların sayısı

Şekil 1.1: Basit bir dalga profili.

Ses dalgaları mekaniksel dalgalardır. Mekaniksel dalgalar yayılabilmek için bir ortama ihtiyaç duyarlar bunun aksine elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar boşlukta bile ilerleyebilirler. Bir ortamdaki dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır (Crawford, 1968).

Dalgaları iki kısımda inceleyebiliriz bunlar; duran dalgalar ve ilerleyen dalgalar. Duran dalgalar, pozisyonu değişmeyen dalgalar. Bu dalgalar, dalga bulduğu ortamla dalga hareket yönünün zıt olması durumunda veya durağan ortamda birbirine zıt yönde hareket eden dalgaların kesişmesi sonucunda oluşabilirler. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan başka noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalar.

Solitonlar lineer olmayan dalgalar. Solitary dalga özelliğine sahiptir yani şekli ve hızı değişmeden yayılan dalgalar ayrıca parçacık özelliğine sahiptir yani karşılıklı çarpışmaya karşı karardır ve çarpışma sonrasında kendi özelliklerini koruyabilirler (Wadati, 2001).

1.1.2. Hata Normları

Çözümü yapılacak olan başlangıç sınır değer problemleri için önerilen yöntemin doğruluğunu ve geçerliliğini kontrol etmek amacıyla hata normları kullanılır. L_2 ve L_∞ olarak ifade edilen hata normları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j - U_j|^2}$$

$$L_\infty = \max_j |u_j - U_j|$$

Burada u_j başlangıç sınır değer probleminin tam çözümünü, U_j de başlangıç sınır değer probleminin nümerik çözümünü ifade eder.

1.1.3. Sonlu Farklar Yöntemi

Fen ve mühendislik alanlarındaki fiziksel olayları modelleyen problemler genellikle diferansiyel denklem sistemleri ile ifade edilir. Bu denklem sistemleri; adi diferansiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleridir. Bu denklem sistemlerinin sayısal çözümlerinin olmadığı ya da çözümlerin çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları bu yöntemlerden ikisidir (Dağ, Irk, & Sarı, 2013).

Sonlu farklar metodu bir diferansiyel denklemin tanım aralığını, belirli sayıdaki alt aralıklara ayırarak her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark

yaklaşımlarının yazılmasıdır. Bu yöntemle diferansiyel denklem kolaylıkla çözülebilecektir.

Bir bağımsız değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla elde edilir. Sonlu fark yaklaşımını elde etmek için öncelikle $[a, b]$ konum aralığı, N bir pozitif tamsayı, $h = (b - a)/N$ olmak üzere

$$x_m = a + mh, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (1.1)$$

formundaki bölünme noktalarına ayrılın. Bu durumda, $u(x)$ fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere, $u(x_m + h)$ ve $u(x_m - h)$ ifadelerinin x_m noktasındaki Taylor seri açılımları

$$u(x_m + h) = u(x_m) + hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots, \quad (1.2)$$

$$u(x_m - h) = u(x_m) - hu_x(x_m) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots, \quad (1.3)$$

olarak yazılabilir. Konuma göre birinci türev için sonlu fark yaklaşımı elde etmek istenirse (1.2-1.3) eşitliklerinden $u_x(x_m)$ teriminin çekilmesi sonucunda

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m+h)-u(x_m)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}(x_m) + \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots, \quad (1.4)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m)-u(x_m-h)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}(x_m) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_m) + \dots, \quad (1.5)$$

yazılabileceğinden u ifadesinin x_m noktasındaki birinci türevi

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m+h)-u(x_m)}{h} + O(h) \Rightarrow (u_x)_m = \frac{u_{m+1}-u_m}{h} + O(h), \quad (1.6)$$

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m)-u(x_m-h)}{h} + O(h) \Rightarrow (u_x)_m = \frac{u_m-u_{m-1}}{h} + O(h), \quad (1.7)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.6-1.7) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve $O(\cdot)$ ile gösterilir. Hatanın derecesi ne kadar yüksek olursa yaklaşım da genelde o kadar iyi olacaktır. Eğer hatanın derecesi yükseltmek istenirse (1.3) eşitliği, (1.2) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$u_x(x_m) = \frac{u(x_m+h)-u(x_m-h)}{2h} + O(h^2),$$

$$(u_x)_m = \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + O(h^2), \quad (1.8)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir (Irk, 2007).

1.1.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi fen ve mühendislik alanlarında karşılaşılan problemlerin çözümünde sıkça kullanılır, ayrıca bu yöntem kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için de kullanılan bir nümerik yöntemdir. Bu yöntem ile ısı transferi, akışkan akışı, yapısal analiz, elektromanyetik potansiyel ve kitle taşımacılığı gibi alanlarda ortaya çıkan problemlerin çözümleri araştırılabilir (Burnett, 1987).

Sonlu elemanlar yönteminde problemin çözüm bölgesi, alt bölgelerin birleşimi olarak gösterilir. (Reddy, 1993), bu yöntemi antik matematikçilerin Ω sayısının değerini hesaplayabilmek için kullandıklarını ve bu yöntemle Ω sayısının yaklaşık 40 basamağını doğru hesaplayabildiklerini anlatmıştır. Bu hesaplamalar için bir çember sonlu sayıda kenarları olan bir çokgen olarak gösterilmiş ve bu çokgenin her bir kenarı sonlu eleman olarak ele alınmıştır.

Sonlu elemanlar metodundaki amaç karmaşık bir problemi basite indirgeyerek çözümü kolaylaştırmaktır. Bunun için problem, uygun şekilde seçilen birçok alt elemana bölünür bu elemanlar “düğüm” adı verilen ve anlamlı numaralandırılan noktalarda problemin yapısına uygun olarak birleştirilince denklem takımları elde edilir. Bu işlemden sonra, ifade edilmek istenen büyüklüğün bölge içerisinde değişimini gösteren bir interpolasyon fonksiyonu belirlenir. Fonksiyon gerçeğe yakın seçildikçe çözüme yaklaşım iyi olur. Asıl problem basit bir probleme indirgendiğinden kesin sonuç yerine yaklaşık bir sonuç elde edilmektedir (Clough, 1960; Hillier & Lieberman, 1974; Hinton & Owen, 1977; Moaveni, 2003; Segerlind, 1976; Zienkiewicz & Morgan, 2006).

Sonlu elemanlar yönteminin integral formları varyasyonel ve ağırlıklı rezidü yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan elde edilir. Varyasyonel yöntemler genelde fonksiyonel olarak bilinen özel bir integral bağıntısının maksimum veya minimumunu oluşturan noktasal parametreleri bulmayı amaçlar. Fonksiyonelin ekstremumunu üreten çözüm sınır şartlarını da sağlar ancak bu fonksiyonelin bulunması bazen çok zor olmakta bazen de mümkün olmamaktadır. Bu nedenle orjinal diferansiyel denklemden integral formunun elde edildiği çeşitli ağırlıklı rezidü yöntemleri mevcuttur.

L bir lineer diferansiyel operatör, $f(x)$ bilinen bir fonksiyon, $u(x)$ aranan çözüm ve Ω tanım bölgesi olmak üzere

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.1)$$

şeklinde diferansiyel denklemin sayısal çözümü için ağırlıklı kalan metodu kullanıldığında, aranan $u(\cdot)$ ifadesi yerine

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x) \quad (2.2)$$

formundaki bir $U(x)$ sonlu yaklaşım seri toplamı kullanılır. Burada $\varphi_j(x)$, ($j = 1, \dots, N$) Ω bölgesi üzerinde tanımlı fonksiyon kümesidir. $\varphi_j(\cdot)$ fonksiyonları problem için verilen sınır şartlarını sağlayacak biçimde seçilirler. a_j ler ise belirlenmesi gereken serbest parametrelerdir. $U(\cdot)$, (2.1) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$LU(x) - f(x) = R(x) \quad (2.3)$$

olarak tanımlanan $R(x)$ kalanı elde edilir. Bu yöntem ile a_j parametrelerinin belirlenmesinde, $R(x)$ kalanı ile W_i ağırlık fonksiyonunun çarpımının Ω bölgesi üzerinde integralinin sıfır olması istenir. Dolayısıyla

$$\int_{\Omega} W_i(\cdot) R(\cdot) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

olarak N bilinmeyenli N tane denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sistemi çözülerek a_j parametreleri bulunur ve (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa $U(x)$ yaklaşık çözümüne ulaşılır.

1.1.5. Galerkin Yöntemi

Galerkin yöntemi bir varyasyon yöntemi olup diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde kullanılmaktadır. Bir önceki alt bölümde tanımlanan (2.4) eşitliğindeki W_i ağırlık fonksiyonu φ_i yaklaşım fonksiyonuna eşit alınırsa bu yöntem Galerkin yöntemi olarak bilinir. Bu durumda eğer konum aralığı $[a, b]$ olarak kabul edilir ve (2.2) çözümü (2.1) eşitliğinde yerine yazılarak eşitliğin her iki tarafı $\varphi_i(x)$ ile çarpıldıktan sonra integrali alınırsa

$$\int_a^b \varphi_i(L \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x) - f(x)) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

elde edilir. Ulaşılan denklem sistemi ise açık olarak N tane denklemden oluşan

$$\varphi_i = L(a_j \varphi_j(x)) - f(x)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a_1 \int_a^b \varphi_1 Q_1 dx + a_2 \int_a^b \varphi_1 Q_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \varphi_1 Q_N dx &= 0 \\ a_1 \int_a^b \varphi_2 Q_1 dx + a_2 \int_a^b \varphi_2 Q_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \varphi_2 Q_N dx &= 0 \\ \dots \\ a_1 \int_a^b \varphi_N Q_1 dx + a_2 \int_a^b \varphi_N Q_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \varphi_N Q_N dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

formunda yazılabilir. Denklem sistemi kolaylıkla çözülerek $a_1, a_2, \dots, a_n$ bilinmeyen katsayıları bulunabilir.

1.1.6. Kollokasyon Yöntemi

Kollokasyon metodu, ağırlıklı kalan metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta W_i ağırlık fonksiyonları yerine

$$W_i = \delta(x - x_i) \quad (2.7)$$

olacak şekilde Dirac Delta fonksiyonları seçilir.

Dirac Delta fonksiyonları $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\int_a^b \delta(x - x_i) (L \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x) - f(x)) dx = (L[a_i \varphi_i(x)] - f(x))|_a^b = 0 \quad (2.8)$$

olacak şekilde önemli bir özelliğe sahiptir. Buradan N tane bağımsız değişken ve N tane denklemden oluşan sistemden $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ bilinmeyen katsayıları kolaylıkla bulunur.

1.1.7. Spline Fonksiyonlar

İlk olarak 1946 yılında Schoenberg tarafından tanıtılmıştır (Schoenberg, 1946). Bununla birlikte spline fonksiyonlar ancak 1960 yılından sonra matematiksel modellere ve fiziksel problemlere uygulanmıştır.

$[a, b]$ aralığının bir parçalanması üzerindeki tüm noktaları sağlayan polinom fonksiyonların derecesi, nokta sayısı arttıkça artacaktır. Bununla birlikte $[a, b]$ aralığını alt aralıklara bölerek belirlenen alt aralıklarda daha düşük dereceden polinom fonksiyonlar tanımlanabilir. Spline fonksiyon kavramı bu düşünceden ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla spline interpolasyon parçalı polinom yaklaşımıdır. Yani verilen çözüm

aralığı sonlu sayıda alt aralıklara bölünerek her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlar yardımı ile yaklaşımlar elde edilir. Spline fonksiyonlar,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

sonlu parçalanışının her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında k . dereceden uygun polinomlar olup, tanımlanan her alt aralıkta $(k - 1)$. mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlardır.

Spline fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir (Doğan, 2013) :

- Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri kolay hesaplanabilen spline fonksiyonlardır.
- Sayısal analizde ve yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması durumunda matrisler ortaya çıkar. Bu matrislerin tersi kolayca alınabilir. Dolayısıyla spline fonksiyonlar kullanıldığında elde edilen denklem sistemleri rahatlıkla çözülebilir.
- Yeteri kadar alt bölmelere ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyon; k . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilebilir.
- Düşük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

1.1.8. B-Spline Fonksiyonlar

B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır.

B-spline fonksiyonların oluşturulacağı noktaların bir kümesi

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \infty = -\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \infty \quad (2.9)$$

olmak üzere çalışmamızda kullanacağımız kübik B-spline ve genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarını incelenmiştir.

1.1.8.1. Kübik B-Spline Fonksiyonlar

x_i 'ler $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere, x_i noktalarında

$E_i(x)$ kübik B-spline fonksiyonları

$$E_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-2})^3}{h^3} & [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{h^3+3h^2(x-x_{i-1})+3h(x-x_{i-1})^2-3(x-x_{i-1})^3}{h^3} & [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{h^3+3h^2(x_{i+1}-x)+3h(x_{i+1}-x)^2-3(x_{i+1}-x)^3}{h^3} & [x_i, x_{i+1}], \\ \frac{(x_{i+2}-x)^3}{h^3} & [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır (Prenter, 2008). Burada $h = x_{m+1} - x_m$ dir. Kübik B-spline fonksiyonları ile onların birinci ve ikinci mertebeden türevleri $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Ayrıca $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı E_{i-1}, E_i, E_{i+1} ve E_{i+2} gibi (1.16)'da tanımlanan ardışık dört kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. $E_m(x)$ ve onun ikinci mertebeye kadar olan $E'_i(x), E''_i(x)$ türevlerinin bölünme noktalarındaki değerleri Tablo 1.1' de görülmektedir.

Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri.

	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
$E_i(x)$	0	1	4	1	0
$h E'_i(x)$	0	3	0	-3	0
$h^2 E''_i(x)$	0	6	-12	6	0

U_N yaklaşık çözümü ise kübik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$U_N(x, t) = \delta_{-1}(t)E_{-1}(x) + \delta_0(t)E_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)E_{N+1}(x) \quad (2.11)$$

formunda yazılabilir. Bununla birlikte $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı, E_{i-1}, E_i, E_{i+1} ve E_{i+2} gibi dört tane B-spline tarafından örtüldüğünden U için yaklaşım ifadesi ve onun ilk iki türevi

$$U_i(x, t) = \sum_{j=i-1}^{i+2} E_j(x) \delta_j(t) \quad (2.12)$$

$$U'_i(x, t) = \sum_{j=i-1}^{i+2} E'_j(x) \delta_j(t) \quad (2.13)$$

$$U''_i(x, t) = \sum_{j=i-1}^{i+2} E''_j(x) \delta_j(t) \quad (2.14)$$

formunda ifade edilebilir.

Dolayısıyla U_i yaklaşık çözümü ve ikinci mertebeye kadar olan türevleri δ parametresine göre;

$$U_i = U(x_i) = \delta_{i-1} + 4\delta_i + \delta_{i+1}, \quad (2.15)$$

$$U_i' = U'(x_i) = \frac{3}{h}(\delta_{i+1} - \delta_{i-1}), \quad (2.16)$$

$$U_i'' = U''(x_i) = \frac{6}{h^2}(\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1}), \quad (2.17)$$

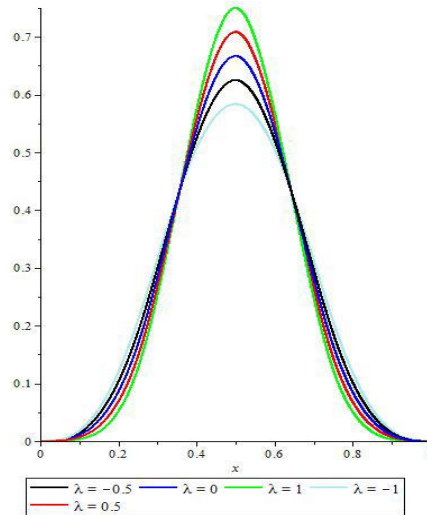
biçiminde yazılabilir.

1.1.8.2. Genişletilmiş Kübik B-Spline Fonksiyonlar

$\pi, [a, b]$ üzerinde eşit aralıklara bölünsün. $\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $h = \frac{b-a}{N}$ olsun. Klasik kübik B-spline fonksiyonların genişletilmiş formu E_i aşağıdaki şekilde ifade edilir (3.1).

$$E_i(x) = \begin{cases} \frac{(4h(1-\lambda)(x-x_{i-2})^3 + 3\lambda(x-x_{i-2})^4)}{24h^4}, & [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ \frac{((4-\lambda)h^4 + 12h^3(x-x_{i-1}) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{i-1})^2 - 12h(x-x_{i-1})^3 - 3\lambda(x-x_{i-1})^4)}{24h^4}, & [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{((4-\lambda)h^4 + 12h^3(x_{i+1}-x) + 6h^2(2+\lambda)(x_{i+1}-x)^2 - 12h(x_{i+1}-x)^3 - 3\lambda(x_{i+1}-x)^4)}{24h^4}, & [x_i, x_{i+1}] \\ \frac{(4h(1-\lambda)(x_{i+2}-x)^3 + 3\lambda(x_{i+2}-x)^4)}{24h^4}, & [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.1)$$

Bunlar, çözümde kullanılacak taban fonksiyonlardır. Burada reel λ serbest parametredir. Aslında klasik kübik B-spline fonksiyonlar genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarda $\lambda = 0$ alınması durumudur. Ortaya çıkan kübik B-spline fonksiyonlar kümesi $E_i(x) [x_0, x_N]$ 'de tanımlı taban fonksiyonlarıdır. λ serbest parametresi 0'dan farklı seçildiğinde fonksiyonun şekli Şekil 2.1'deki gibi değişir.



Şekil 2.1: λ serbest parametresi 0'dan farklı seçildiğinde fonksiyonun şekli.

Kaynak: Ersoy, Korkmaz, Dağ, 2017

λ grid noktalarında her genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonun kendisi ve türev değerleri Tablo 2.1'deki gibidir.

$$\frac{(4h(1-\lambda)(x-x_{i-2})^3 + 3\lambda(x-x_{i-2})^4)}{24h^4}$$

x yerine x_{i-2} yazılırsa sonuç 0 olur,

$$\frac{(4h(1-\lambda)(x-x_{i-2})^3 + 3\lambda(x-x_{i-2})^4)}{24h^4}$$

x yerine x_{i-1} yazılırsa sonuç $\frac{4-\lambda}{24}$ olur,

$$\frac{((4-\lambda)h^4 + 12h^3(x-x_{i-1}) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{i-1})^2 - 12h(x-x_{i-1})^3 - 3\lambda(x-x_{i-1})^4)}{24h^4}$$

x yerine x_i yazılırsa sonuç $\frac{2\lambda+16}{24}$ olur,

$$\frac{((4-\lambda)h^4 + 12h^3(x_{i+1}-x) + 6h^2(2+\lambda)(x_{i+1}-x)^2 - 12h(x_{i+1}-x)^3 - 3\lambda(x_{i+1}-x)^4)}{24h^4}$$

x yerine x_{i+1} yazılırsa sonuç $\frac{4-\lambda}{24}$ olur,

$$\frac{(4h(1-\lambda)(x_{i+2}-x)^3 + 3\lambda(x_{i+2}-x)^4)}{24h^4}$$

x yerine x_{i+2} yazılırsa sonuç 0 olur,

$$\frac{(12h(1-\lambda)(x-x_{i-2})^2 + 12\lambda(x-x_{i-2})^3)}{24h^4}$$

x yerine x_{i-2} yazılırsa sonuç 0 olur,

$$\frac{(12h(1-\lambda)(x-x_{i-2})^2 + 12\lambda(x-x_{i-2})^3)}{24h^4}$$

x yerine x_{i-1} yazılırsa sonuç $\frac{1}{2h}$ olur,

$$\frac{(12h^3 + 12h^2(2+\lambda)(x-x_{i-1}) - 36h(x-x_{i-1})^2 - 12\lambda(x-x_{i-1})^3)}{24h^4}$$

x yerine x_i yazılırsa sonuç 0 olur,

$$\frac{(-12h^3 - 12(2+\lambda)(x_{i+1}-x)^1 + 36h(x_{i+1}-x)^2 + 12\lambda(x_{i+1}-x)^3)}{24h^4} \quad x \text{ yerine } x_{i+1} \text{ yazılırsa sonuç } \frac{-1}{2h} \text{ olur,}$$

$$\frac{(-12h(1-\lambda)(x_{i+2}-x)^2 - 12\lambda(x_{i+2}-x)^3)}{24h^4} \quad x \text{ yerine } x_{i+2} \text{ yazılırsa sonuç } 0 \text{ olur,}$$

$$\frac{(24h(1-\lambda)(x-x_{i-2})^1 + 36\lambda(x-x_{i-2})^2)}{24h^4} \quad x \text{ yerine } x_{i-2} \text{ yazılırsa sonuç } 0 \text{ olur,}$$

$$\frac{(24h(1-\lambda)(x-x_{i-2})^1 + 36\lambda(x-x_{i-2})^2)}{24h^4} \quad x \text{ yerine } x_{i-1} \text{ yazılırsa sonuç } \frac{2+\lambda}{2h^2} \text{ olur,}$$

$$\frac{(12h^2(2+\lambda) - 72h(x-x_{i-1})^1 - 36\lambda(x-x_{i-1})^2)}{24h^4} \quad x \text{ yerine } x_i \text{ yazılırsa sonuç } \frac{-2\lambda-4}{2h^2} \text{ olur,}$$

$$\frac{(12(2+\lambda) - 72h(x_{i+1}-x)^1 - 36\lambda(x_{i+1}-x)^2)}{24h^4} \quad x \text{ yerine } x_{i+1} \text{ yazılırsa sonuç } \frac{2+\lambda}{2h^2} \text{ olur,}$$

$$\frac{(24h(1-\lambda)(x_{i+2}-x)^1 + 36\lambda(x_{i+2}-x)^2)}{24h^4} \quad x \text{ yerine } x_{i+2} \text{ yazılırsa sonuç } 0 \text{ olur.}$$

x_1 düğüm noktalarındaki $E_i(x)$, $E'_i(x)$ ve $E''_i(x)$ Tablo 2.1'de verilmiştir.

$E_i(x)$, $i = -1, \dots, N+1$ $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur.

Tablo 2.1: Bölünme noktalarındaki genişletilmiş kübik B-spline değerleri.

x	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
$24E_i(x)$	0	$4 - \lambda$	$16 + 2\lambda$	$4 - \lambda$	0
$2hE'_i(x)$	0	1	0	-1	0
$2h^2E''_i(x)$	0	$2 + \lambda$	$-4 - 2\lambda$	$2 + \lambda$	0

Çözüm için $E_i(x)$ genişletilmiş B-spline fonksiyonunun ilk iki türevine ihtiyaç vardır. Denklemi konuma göre parçalayabilmek için $V(x, t) = U_x(x, t)$ eşitliği kullanılacak, bu durumda elde edilecek denklem sistemi;

$$u_x - v = 0 \quad (3.2)$$

U_x yaklaşık çözümü ise genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden daha önce kübik B-spline fonksiyonlarda olduğu gibi

$$U_x(x, t) = \delta_{-1}(t)E_{-1}(x) + \delta_0(t)E_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)E_{N+1}(x) \quad (3.3)$$

formunda yazılabilir. Bununla birlikte $[x_i, x_{i+1}]$, aralığı , E_{i-1} , E_i , E_{i+1} ve E_{i+2} olarak dört tane spline tarafından örtüldüğünden U için yaklaşım ifadesi ve ilk iki türevi

$$U_i(x, t) = \sum_{j=i-1}^{i+2} E_j(x) \delta_j(t) \quad (3.4)$$

$$U'_i(x, t) = \sum_{j=i-1}^{i+2} E'_j(x) \delta_j(t) \quad (3.5)$$

$$U''_i(x, t) = \sum_{j=i-1}^{i+2} E''_j(x) \delta_j(t) \quad (3.6)$$

formunda ifade edilebilir. Dolayısıyla U_i yaklaşık çözümü ve ikinci mertebeye kadar olan türevleri δ parametresine göre

$$U_i = U(x_i) = \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i-1} + \frac{8+\lambda}{12} \delta_i + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i+1} , \quad (3.7)$$

$$U'_i = U'(x_i) = \frac{1}{2h} (\delta_{i-1} - \delta_{i+1}), \quad (3.8)$$

$$U''_i = U''(x_i) = \frac{2+\lambda}{2h^2} (\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1}), \quad (3.9)$$

biçiminde yazılabilir.

1.1.9. KdV Burgers Denklemi İçin Literatür Taraması

KdVB denklemi (Ruderman, 1975)'de belirtildiği gibi plazma dalgaları veya tüm sistemlerin özvektörleri için varlık ve yokluğu gibi farklı durumlarda ortaya çıkabilir. Viscosity ve eylemsizlik terimlerini içeren uzun yer çekimi dalgaları KdVB denkleminin esinlenilerek çalışılmıştır. Bampi ve Morra (1981) çalışmasında balans denkleminin çözümleri elde edilmiştir. KdVB denklemi için Jacobi Cosine fonksiyonları yardımıyla Weierstrass P fonksiyonu çözümü Kalinovski ve Grundland (1981) çalışmasında ifade edilmiştir. Bu çalışmada 1. mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin homojen olmayan çözümleri için Reimann değişkenleri yardımıyla çözümleri de mevcuttur. (Brugarino & Pantano, 1983), değişken katsayılı homojen olmayan KdVB denklemlerinin Jacobi elliptic tip çözümünü elde etmiştir.

Birleşik KdVB denklemi için bazı hareketli solitary dalga çözümleri de (Parkes & Duffy, 1997)'de verilmiştir. KdVB denklemi için belirli analitik çözümler değişken çözümleri ve bazı teoremlerin ispatları kullanılarak (Shu, 1987)'de ispat edilmiştir. Lineer yayılma ve lineer olmayan yayılmanın korunumlu olmayan teoremlerini içeren genişletilmiş KdVB denklemi için çözümler (Gromov & Tyutin, 1997)'da incelenmiştir. (Malkov, 1996) Asynptotic hareketli dalga çözümlerini çalışmıştır. KdVB denkleminin

farklı değerler için hareketli dalga çözümleri α biskosite sabiti alınarak (Pego, Smereka, & Weinstein, 1993)'de ifade edilmiştir.

KdVB denkleminin bazı hiperbolik fonksiyonların kuvvetlerini içeren tam çözümleri homojen denge tekniği ile (Wang M. , 1996)'de elde edilmiştir. (Zhao, 2006) hiperbolik fonksiyon metodu ile ve Wu, yeni tip solitary dalga için emilasyon tekniği ile KdVB denkleminin çözümlerini incelemiştir. KdVB denklemini uyumlu dalga dönüşümleri yardımıyla adi diferansiyel denkleme dönüştürdükten sonra katsayıları hesaplanır ve tahmini çözümdeki parametreler verilen denklemde yerine yazılır. Jiashi (Yuanxi & Jiashi, 2005) süperpozisyon metoduyla KdVB denklemi için birçok solitary dalga çözümü geliştirilmiştir. (Wazzan, 2007)'de ise KdVB denklemi için Riccati denklemine dayanan genişletilmiş tanh fonksiyonu ile trigonometrik hiperbolik ve kompleks fonksiyon içeren çoklu soliton çözümleri elde etmiştir. (Soliman, 2006) denklemin tanh-tip, coth-tip ve düzenlenmiş genişletilmiş tanh metodu ile tam çözümlerini elde etmiştir. (Wang, Liu, & Zhang, 2014)'de ise KdVB denklemi için G'/G açılımı kullanılarak *tanh* tip çözüm elde edilmiştir. (Kudryashov, 2009), aynı zamanda Fisher denkleminin hareketli dalga çözümü ile KdVB denkleminin hareketli dalga çözümünün aynı formda olduğunu göstermiştir. KdVB gibi denklemlerin çözümü için bazı farklı nümerik teknikler de mevcuttur. Bunlardan bir tanesi Bubnov-Galerkin B-spline sonlu elemanlar yöntemi kullanılmasıyla elde edilen çözümlerdir (Zaki, 2000a). Yine aynı denklem için Kuintik B-spline fonksiyon yardımıyla kollokasyon çözümleri yapılmıştır (Zaki, 2000b). Ayrıca periyodik başlangıç koşullarını içeren KdVB denkleminin nümerik çözümü için Lineer Galerkin-Fourier Spektral Tekniği uygulanmıştır (Lü & Lu, 2006). 4. Mertebeden Runge-Cutta yöntemi ile Chebysheu polinomlarının türevlenmesine dayanan spektral kollokasyon metodu ile nümerik çözümler ve başlangıç sınır değer problemlerine uygulamaları (Khater, Temsah, & Hassan, 2008)'de mevcuttur. Son olarak KdVB denkleminin (El-Danaf, 2008) tarafından yapılan koşulsuz kararlı septik B-spline kollokasyon metodu incelenmeye değer bir çalışmadır.

1.1.10. Gardner Denklemi İçin Literatür Taraması

Gardner denklemi integrallenebilir bir sistemdir ve Miura dönüşümü ile KdV denklemine dönüşür (Demler & Maltsev, 2011). Gardner denklemi negatif iyon akustik plazma dalgalarının yayılımını anlamak için faydalı bir modeldir (Ruderman, Talipova ,

& Pelinovsky, 2008). Bu denklem bir boyutta plazma hareketi denklem sistemlerinden elde edilir.

Gardner denklemi geniş genliğe sahip dalgaların iyi tanımlanmasını sağlar (Kamchatnov, et al., 2013). Denklemin çözümünün sınıflandırılmasında lineer olmayan terimlerin yapısı çok önemlidir. Özellikle ϑ sabitinin işareti çözümde önemli rol oynamaktadır. Gardner denkleminde ε ve ϑ aynı işaretli olduğunda kıyıdaki dalgalarda özel şekiller meydana gelir, bu da kararsızlık durumundan kaynaklanır (Grimshaw, Pelinovsky, Taipova, & Sergeeva, 2010). Denkleme güç terimi ilave edildiğinde denklem topografik yapıda tabakalı akışkanlı modeller (Kamchatnov, et al., 2013). Bu denklemle ilgili yapılmış bazı çalışmalar şu şekilde özetlenebilir; (Slyunyaev & Pelinovski, 1999). Darboux dönüşümleri yardımıyla iki soliton dalga etkileşimi çözümü elde etmiştir. Tanh metodu ile Gardner denkleminin hareketli çözümleri elde edilmiştir (Hu, Tan, & Hu, 2016). Soliton-Cnoidal ya da Soliton-Periodik şeklindeki dalgaların etkileşimlerin elde edilen çözümler vardır. Riccati açılımını içeren başka çözüm metotları da uygulanmıştır (Wei-Feng, Sen-Yue, Jun, & Han-Wei, 2014). Hareket integralleri de denklemin pertürbe edilmiş formu için elde edilmiştir (Jia-Ren, Liu-Xian, & Guang-Hui, 2000). Tekil pertürbe edilmiş Gardner denklemi için hareketli solitary dalga çözümü mevcuttur (Bekir, 2009). Ayrıca Gardner denkleminin farklı metotlarla elde edilmiş tam çözümleri de mevcuttur. Tanh ve coth fonksiyonlarını içeren tanh metodunun genişletilmiş formu ile tam çözümler elde edilmiştir (Fu, Liu, & Liu, 2004). Riccati denklemleri yardımıyla solitary dalga ve periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir. Bazı solitary, periyodik, üstel, kesirli ve kompleks tip hareketli dalga denklemleri için G''/G yöntemiyle tam çözüm çalışmaları yapılmıştır (Lü, Liu, & Niu, 2010); (Akbar, Hj, & Ali, 2012). Bu çözümlerin dışında bazı trigonometrik fonksiyon çözümleri (Naher & Abdullah, 2012; Jawad, 2012; Taghizade & Neirameh, 2010) hiperbolik fonksiyon çözümleri (Wazwaz, 2007) ve diğer bazı çözümler (Nishiyama & Noi, 2016) elde edilerek çalışma haline getirilmiştir. Gardner benzeri denklemlerin nümerik çözümleri için sonlu fark yöntemleri (Rageh, Salem, & El-Salam, 2014), sınırlayıcı taylor yaklaşımı yöntemleri (Rubin & Graves Jr, 1975), polinomsal kuintik B-spline (Hamdi, Morse, Halphen, & Schiesser, 2011) ve farklı başlangıç sınır değer problemlerinin çözümleri (Wazwaz, 2009) literatürde mevcuttur.

1.1.11. Adveksiyon - Difüzyon Denklemi İçin Literatür Taraması

Gerçek hayatta fizik ve mühendislik problemlerinin birçoğu AD denklemi yardımıyla modellenabilmektedir. AD denkleminin çözümü parametrelerin seçimine göre keskin davranışlar gösterebilmektedir. Bu nedenle nümerik çözümler dik çözümlerin modellenmesiyle ilgilenmektedir. Spline fonksiyonlar kullanılarak bugüne kadar AD denkleminin birçok nümerik çözümü yapılmıştır (Ahmad, 2000). Sürekliliği korumak için B-spline fonksiyonlara serbest parametrelerin yanında yüksek mertebeli terimler ilave edilir. Bu terimler parçalı fonksiyonlar şeklindeki genişletilmiş B-spline fonksiyonlardır. Farklı serbest parametrelerin kullanılmasıyla genişletilmiş B-spline fonksiyonların yapısı değişir. İlave edilen terimlerin ve serbest parametrelerin genişletilmiş B-spline fonksiyona etkisi (Zoppou, Roberts, & Renka, 2000; Abd Hamid, Abd Majid, & Izani, 2010) tartışılmıştır.

Genişletilmiş B-spline fonksiyonları kullanarak Galerkin ve Crank-Nicolson metotlarının kombinasyonu ile AD denkleminin çözümleri bulunur. Genişletilmiş B-spline fonksiyonların kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde literatürde birkaç çalışma görmek mümkündür. (Dağ, Irk, & Sarı, 2013; Goh, Majid, & Ismail, 2011; Irk, Dağ, & Tombul, 2015).

1.1.12. Düzenlenmiş Uzun Dalga Denklemi İçin Literatür Taraması

Solitary ve soliton şeklindeki dalgalar lineer olmayan dispersive dalga denklemlerinin genel olarak her başlangıç ve sınır koşulu için analitik çözümünü bulmak mümkün değildir. Bu nedenle bu tür denklemlerin çözümleri için nümerik çözümler ele alınır. Lineer olmayan dispersive dalga denklemlerinden biri de MRLW denklemleridir. Bu denklemin en önemli özelliği dalganın şekli değişmeden tek yönde sabit hızda dağılımın gerçekleşmesidir. MRLW denklemi ve alternatif formu olan MEW denklemleri için nümerik çözümlerin yapılması önerilmektedir.

MRLW denklemi sonlu farklar yöntemiyle nümerik olarak çözülmüştür (Khalifa, Raslan, & Alzubaidi, 2007). MQ, GA, IMQ ve IQ radial taban fonksiyonları kullanılarak nümerik çözüm elde edilmiştir (Dereli, 2012). MRLW denklemi için serbest düğüm noktaları tekniğine dayanan kollokasyon metodu kullanılarak çözümler elde edilmiştir (Mokhtari & Mohammadi, 2010). (Tirmizi, 2010; Khalifa, Raslan, & Alzubaidi, 2008; Raslan & Hassan, 2009; Raslan, 2009) çalışmalarında ise kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon yöntemiyle

özmler elde edilmiştir. (Han & Liu , 2003), B-spline fonksiyonların genelleştirilmesiyle nümerik çözümler elde etmiştir. (Xu & Wang, 2008) 4., 5. ve 6. dereceden genişletilmiş B-spline fonksiyonlar ile çözümler elde etmiştir. Genişletilmiş B-spline fonksiyonlar için klasik kübik B-spline fonksiyonlara bir parametre daha ilave edilir. Böylece klasik kübik B-spline eğrisi değişir. Diferansiyel denklemlerin genişletilmiş B-spline fonksiyonlarla nümerik çözümü klasik B-spline fonksiyonlarla çözümü kadar yaygın değildir. Bu konu üzerine de yapılmış birkaç çalışma mevcuttur. Örneęin 2. mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemler (Abd Hamid, Majid, & Ismail, 2011), lineer sınır değer problemi (Abd Hamid, Abd Majid, & Izani, 2010) ve 2. mertebeden lineer sınır değer problemleri (Goh, Majid , & Ismail , 2010, October) genişletilmiş kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile özlmřtir. Genişletilmiş kübik B-spline kollokasyon yöntemi lokal olmayan başlangıç koşullarına sahip bir boyutlu ısı denklemleri için de çalışılmıştır (Goh, Majid , & Ismail, 2011).



İKİNCİ BÖLÜM

KdV BURGERS DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

2.1. METODUN UYGULANMASI

Bu çalışmada KdVB denklemi için bazı başlangıç sınır değer problemlerinin klasik kübik B-spline fonksiyonlarının genişletilmesiyle oluşan kollokasyon çözümleri incelenmiştir. Denklemden 3. mertebeden türev içeren terim ile işlem yapmak yerine mertebeyi indirgemek için denklem sistemi oluşturulmuştur. Bu sistemin zamana göre parçalanması Crank- Nicolson metoduyla gerçekleştirilmiştir. İki başlangıç sınır değer problemi bir analitik çözüm ve diğer durumlar için önerilen yöntem uygulanmıştır.

2.1.1. Sayısal Çözüm

KdVB denklemini aşağıdaki formda ele alınır;

$$u_t + \varepsilon uu_x - \vartheta u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0 \quad a \leq x \leq b \quad (4.1)$$

Burada ε, ϑ ve μ , sıfırdan farklı şekilde alınan reel katsayılardır. Bu çalışmada aşağıdaki şekilde tanımlanmış bazı başlangıç sınır değer problemlerini ele alacağız. Bu denkleme ait başlangıç koşulu $t = 0$ durumudur.

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.2)$$

ve sonlu çalışma bölgesi $[a, b]$ olsun. Bu problem için sınır koşulları aşağıdaki şekilde seçilsin.

$$\begin{aligned} u(a, t) &= g_1(t), & u(b, t) &= g_2(t), \\ u_x(a, t) &= g_3(t), & u_x(b, t) &= g_4(t), \\ u_{xx}(a, t) &= g_5(t), & u_{xx}(b, t) &= g_6(t), \\ u_{xxx}(a, t) &= g_7(t), & u_{xxx}(b, t) &= g_8(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Burada $g_i(t), i = 1, 2, \dots, 8$, x bağımsız fonksiyonlarını belirtir. Bu koşullarda fonksiyonun hem kendisi hem de türevi olduğu için karışık sınır koşuludur.

$\pi, [a, b]$ üzerinde eşit aralıklara bölünsün.

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{N} \text{ olsun.}$$

Klasik kübik B-spline fonksiyonların genişletilmiş formu E_i , (3.1) şeklinde ifade edilir.

(3.1) denklem sistemindeki fonksiyonlar çözümde kullanılacak taban fonksiyonlardır.

Burada λ reel serbest parametredir.

$U(x, t)$ ve $V(x, t)$, $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ 'nin yaklaşık çözümleri olsun. Bu yaklaşık çözümler seriler cinsinden;

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i E_i(x) \\ V(x, t) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \varphi_i E_i(x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $E_{-1}(x), E_0(x), \dots, E_{N+1}(x)$ bilinen fonksiyonlar. δ_i ve φ_i ise hesaplanacak zamana bağlı parametrelerdir.

Tablo 2.1 kullanılarak x_i düğüm noktalarında (4.4) ile verilen yaklaşık çözümler ve bunların 1. ve 2. türevleri hesaplanacaktır. Böylece yaklaşık çözümler ve türevleri (4.5) şeklinde ifade edilir. Kübik B-spline kullanıldığı için üç tane baz fonksiyonu vardır. Katsayılar Tablo 2.1'den alınarak (4.5) eşitlikleri oluşur.

$$\begin{aligned} U_i &= U(x_i, t) = \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i-1} + \frac{8+\lambda}{12} \delta_i + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i+1}, \\ U_i' &= U'(x_i, t) = \frac{1}{2h} (\delta_{i-1} - \delta_{i+1}), \\ U_i'' &= U''(x_i, t) = \frac{2+\lambda}{2h^2} (\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1}), \\ V_i &= V(x_i, t) = \frac{4-\lambda}{24} \varphi_{i-1} + \frac{8+\lambda}{12} \varphi_i + \frac{4-\lambda}{24} \varphi_{i+1}, \\ V_i' &= V'(x_i, t) = \frac{1}{2h} (\varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}), \\ V_i'' &= V''(x_i, t) = \frac{2+\lambda}{2h^2} (\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

(4.1) denklem sistemini konuma göre parçalayabilmek için $V(x, t) = U_x(x, t)$ eşitliği kullanılır ve (4.6) denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} U_t + \varepsilon UV - \vartheta V_x + \mu V_{xx} &= 0 \\ U_x - V &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Şimdi bu denklem sistemi üzerinde Crank-Nicolson formülü ve sonlu fark formülü yardımıyla işleme devam edilir.

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2} \text{ ve zamana göre türevi : } \delta_m^0 = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}$$

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

$$V = \frac{V^{n+1} + V^n}{2}$$

$$\begin{aligned}
U_x &= \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} \\
UV &= \varepsilon \frac{(UV)^{n+1} + (UV)^n}{2} \\
V_x &= \vartheta \frac{(V_x)^{n+1} + (V_x)^n}{2} \\
V_{xx} &= \mu \frac{(V_{xx})^{n+1} + (V_{xx})^n}{2} \\
\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{(UV)^{n+1} + (UV)^n}{2} - \vartheta \frac{V_x^{n+1} + V_x^n}{2} + \mu \frac{V_{xx}^{n+1} + V_{xx}^n}{2} &= 0 \\
\frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} - \frac{V^{n+1} + V^n}{2} &= 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Burada $U^{n+1} = U(x, (n+1)\Delta t)$, $(n+1)$ -inci zaman adımındaki çözümü gösterir.

$U^0 \rightarrow t = 0 \rightarrow 0$ anındaki çözüm

$t^{n+1} = t^n + 1$ ve Δt zaman adımlarıdır.

(4.7) denklem sistemi için $(UV)^{n+1}$ ve $(UV)^n$ terimleri yerine (4.8) eşitliği kullanılır.

(4.8) eşitliği (4.7)'de yerine yazılırsa (4.9) eşitliği elde edilir.

$$(UV)^{n+1} = U^{n+1}V^n + U^nV^{n+1} - U^nV^n \tag{4.8}$$

$$(UV)^n = U^nV^n$$

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon \left(\frac{U^{n+1}V^n + U^nV^{n+1}}{2} \right) - \vartheta \left(\frac{V_x^{n+1} + V_x^n}{2} \right) + \mu \left(\frac{V_{xx}^{n+1} + V_{xx}^n}{2} \right) = 0 \tag{4.9}$$

$$\frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} - \frac{V^{n+1} + V^n}{2} = 0$$

Şimdi (4.4) yaklaşık çözümü ve türevleri (4.5), (4.9)'da kullanıldığında (4.10) ve (4.11) elde edilir.

$$2 \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon (U^{n+1}V^n + U^nV^{n+1}) - \vartheta (V_x^{n+1} + V_x^n) + \mu (V_{xx}^{n+1} + V_{xx}^n) = 0$$

$V^n = L$ ve $U^n = K$ alındığında lineerleştirme gerçekleşir.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{\Delta t} \right) \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^n - \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^n - \right. \\
&\left. \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^n \right) - \vartheta \left(\left(\frac{1}{2h} \right) (\varphi_{i-1}^{n+1} - \varphi_{i+1}^{n+1}) + \left(\frac{1}{2h} \right) (\varphi_{i-1}^n - \varphi_{i+1}^n) \right) + \mu \left(\left(\frac{2+\lambda}{2h^2} \right) (\varphi_{i-1}^{n+1} - \right.
\end{aligned}$$

$$2\varphi_i^{n+1} + \varphi_{i+1}^{n+1}) + \left(\frac{2+\lambda}{2h^2}\right)(\varphi_{i-1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i+1}^n) + \varepsilon L \left(\left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\delta_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{8+\lambda}{12}\right)\delta_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\delta_{i+1}^{n+1} \right) + \varepsilon K \left(\left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{8+\lambda}{12}\right)\varphi_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i+1}^{n+1} \right) = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{4-\lambda}{24} \quad \alpha_2 = \frac{8+\lambda}{12} \quad \beta_1 = \frac{1}{2h} \quad \gamma_1 = \frac{2+\lambda}{2h^2} \quad \gamma_2 = -\frac{4+2\lambda}{2h^2}$$

$$V_{m1} = \left(\frac{2}{\Delta t} + \varepsilon L\right)\alpha_1 \quad V_{m2} = \varepsilon K\alpha_1 - \vartheta\beta_1 + \mu\gamma_1$$

$$V_{m3} = \left(\frac{2}{\Delta t} + \varepsilon L\right)\alpha_2 \quad V_{m4} = \varepsilon K\alpha_2 + \mu\gamma_2$$

$$V_{m5} = \varepsilon K\alpha_1 + \vartheta\beta_1 + \mu\gamma_1 \quad V_{m6} = \left(\frac{2}{\Delta t}\right)\alpha_1$$

$$V_{m7} = \vartheta\beta_1 - \mu\gamma_1 \quad V_{m8} = \left(\frac{2}{\Delta t}\right)\alpha_2$$

$$V_{m9} = -\mu\gamma_2 \quad V_{m10} = -\vartheta\beta_1 - \mu\gamma_1$$

$$V_{m11} = \beta_1 \quad V_{m12} = -\alpha_1$$

$$V_{m13} = -\alpha_2$$

$$K = \alpha_1\delta_{i-1} + \alpha_2\delta_i + \alpha_1\delta_{i+1} \quad L = \alpha_1\varphi_{i-1} + \alpha_2\varphi_i + \alpha_1\varphi_{i+1}$$

Bu kısaltmalar kullanıldığında ifadedeki her bir terim aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left(\left(\frac{2}{\Delta t}\right)\left(\frac{4-\lambda}{24}\right) + \varepsilon L \left(\frac{4-\lambda}{24}\right) \right) \delta_{i-1}^{n+1} = V_{m1}\delta_{i-1}^{n+1}$$

$$\left(\varepsilon K \left(\frac{4-\lambda}{24}\right) - \vartheta \left(\frac{1}{2h}\right) + \mu \left(\frac{2+\lambda}{2h^2}\right) \right) \varphi_{i-1}^{n+1} = V_{m2}\varphi_{i-1}^{n+1}$$

$$\left(\left(\frac{8+\lambda}{12}\right)\left(\frac{2}{\Delta t}\right) + \left(\frac{8+\lambda}{12}\right)\varepsilon L \right) \delta_i^{n+1} = V_{m3}\delta_i^{n+1}$$

$$\left(\mu \left(\frac{2+\lambda}{2h^2}\right) (-2) + \varepsilon K \left(\frac{8+\lambda}{12}\right) \right) \varphi_i^{n+1} = V_{m4}\varphi_i^{n+1}$$

$$\left(\left(\frac{2}{\Delta t}\right)\left(\frac{4-\lambda}{24}\right) + \varepsilon L \left(\frac{4-\lambda}{24}\right) \right) \delta_{i+1}^{n+1} = V_{m1}\delta_{i+1}^{n+1}$$

$$\left(\mu \left(\frac{2+\lambda}{2h^2}\right) + \varepsilon K \left(\frac{4-\lambda}{24}\right) + \vartheta \left(\frac{1}{2h}\right) \right) \varphi_{i+1}^{n+1} = V_{m5}\varphi_{i+1}^{n+1}$$

$$\left(\left(\frac{2}{\Delta t}\right)\left(\frac{4-\lambda}{24}\right) \delta_{i-1}^n \right) = V_{m6}\delta_{i-1}^n$$

$$\left(\left(\frac{1}{2h}\right)\vartheta + \left(\frac{2+\lambda}{2h^2}\right)\mu \right) \varphi_{i-1}^n = V_{m7}\varphi_{i-1}^n$$

$$\left(\left(\frac{2}{\Delta t}\right)\left(\frac{8+\lambda}{12}\right) \right) \delta_i^n = V_{m8}\delta_i^n$$

$$\left(\mu\left(\frac{4+2\lambda}{2h^2}\right)\right)\varphi_i^n = V_{m9}\varphi_i^n$$

$$\left(\left(\frac{2}{\Delta t}\right)\left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\right)\delta_{i+1}^n = V_{m6}\delta_{i-1}^n$$

$$\left(\vartheta\left(\frac{1}{2h}\right) - \mu\left(\frac{2+\lambda}{2h^2}\right)\right)\varphi_{i+1}^n = V_{m10}\varphi_{i+1}^n$$

Terimler tek tek yerine yazıldığında iterasyon için aranan eşitlik elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} V_{m1}\delta_{i-1}^{n+1} + V_{m2}\varphi_{i-1}^{n+1} + V_{m3}\delta_i^{n+1} + V_{m4}\varphi_i^{n+1} + V_{m1}\delta_{i+1}^{n+1} + V_{m5}\varphi_{i+1}^{n+1} &= V_{m6}\delta_{i-1}^n + \\ V_{m7}\varphi_{i-1}^n + V_{m8}\delta_i^n + V_{m9}\varphi_i^n + V_{m6}\delta_{i+1}^n + V_{m10}\varphi_{i+1}^n \end{aligned} \quad (4.10)$$

Benzer şekilde işlem kolaylığı olması açısından (4.9)'daki 2.denklem 2 ile çarpılıp (4.5)'deki eşitlikler (4.9)'da yerine yazılırsa (4.11) denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned} (U_x^{n+1} + U_x^n) - (V^{n+1} + V^n) &= 0 \\ \left(\frac{1}{2h}\right)(\delta_{i-1}^{n+1} - \delta_{i+1}^{n+1}) - \left(\frac{1}{2h}\right)(\delta_{i-1}^n - \delta_{i+1}^n) - \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i-1}^{n+1} - \left(\frac{8+\lambda}{12}\right)\varphi_i^{n+1} - \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i+1}^{n+1} - \\ \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i-1}^n - \left(\frac{8+\lambda}{12}\right)\varphi_i^n - \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i+1}^n &= 0 \\ \left(\frac{1}{2h}\right)\delta_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{2h}\right)\delta_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i-1}^{n+1} - \left(\frac{8+\lambda}{12}\right)\varphi_i^{n+1} - \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i+1}^{n+1} &= \left(\frac{1}{2h}\right)(\delta_{i-1}^n - \\ \delta_{i+1}^n) + \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i-1}^n + \left(\frac{8+\lambda}{12}\right)\varphi_i^n + \left(\frac{4-\lambda}{24}\right)\varphi_{i+1}^n \end{aligned}$$

Denklem δ_{i-1} , φ_{i-1} , δ_i , φ_i , δ_{i+1} , φ_{i+1} sıralamasıyla düzenli yazılırsa;

$$\begin{aligned} \beta_1\delta_{i-1}^{n+1} - \alpha_1\varphi_{i-1}^{n+1} + 0\delta_i^{n+1} - \alpha_2\varphi_i^{n+1} - \beta_1\delta_{i+1}^{n+1} - \alpha_1\varphi_{i+1}^{n+1} &= -\beta_1\delta_{i-1}^n + \alpha_1\varphi_{i-1}^n + \\ 0\delta_i^n + \alpha_2\varphi_i^n + \beta_1\delta_{i+1}^n + \alpha_1\varphi_{i+1}^n \\ V_{m11}\delta_{i-1}^{n+1} + V_{m12}\varphi_{i-1}^{n+1} + 0\delta_i^{n+1} + V_{m13}\varphi_i^{n+1} + V_{m11}\delta_{i+1}^{n+1} - V_{m12}\varphi_{i+1}^{n+1} &= \\ -V_{m11}\delta_{i-1}^n - V_{m12}\varphi_{i-1}^n + 0\delta_i^n - V_{m13}\varphi_i^n - V_{m11}\delta_{i+1}^n + V_{m12}\varphi_{i+1}^n \end{aligned} \quad (4.11)$$

Burada (4.10) ve (4.11)'deki katsayılar aşağıdaki şekildedir. Böylece (4.10), (4.11) denklem sistemi $Ax^{n+1} = Bx^n$ şeklinde aşağıdaki (4.12) matris formunda yazılabilir.

$$A = \begin{bmatrix} V_{m1} & V_{m2} & V_{m3} & V_{m4} & V_{m1} & V_{m5} & & \\ V_{m11} & V_{m12} & 0 & V_{m13} & V_{m11} & -V_{m12} & & \\ \dots & \dots & V_{m1} & V_{m2} & V_{m3} & V_{m4} & V_{m1} & V_{m5} \\ \dots & \dots & V_{m11} & V_{m12} & 0 & V_{m13} & V_{m11} & -V_{m12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & V_{m1} & V_{m2} & V_{m3} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\text{Ve} \quad (4.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} V_{m6} & V_{m7} & V_{m8} & V_{m9} & V_{m6} & V_{m10} \\ -V_{m11} & -V_{m12} & 0 & -V_{m13} & -V_{m11} & V_{m12} \\ \dots & \dots & V_{m6} & V_{m7} & V_{m8} & V_{m9} & V_{m6} & V_{m10} \\ \dots & \dots & -V_{m11} & -V_{m12} & 0 & -V_{m13} & -V_{m11} & V_{m12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & V_{m6} & V_{m7} & V_{m8} & \dots \end{bmatrix}$$

(4.12) denklem sisteminde $2N + 2$ denklem $2N + 6$ bilinmeyen parametre ortaya çıkmaktadır. Bilinmeyen parametreler

$$X^{n+1} = (\delta_{-1}^{n+1}, \varphi_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \varphi_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \varphi_{N+1}^{n+1})$$

Denklem sisteminin tek bir çözümü olabilmesi için

$$U_x(a, t) = 0, U_x(b, t) = 0, V_x(a, t) = 0, V_x(b, t) = 0$$

Sınır koşulları yardımıyla $\delta_{-1}, \varphi_{-1}, \delta_{N+1}, \varphi_{N+1}$ parametreleri için $\delta_{-1} = \delta_1, \varphi_{-1} = \varphi_1$, eşitlikleri kullanılacaktır. Bu işlem yapıldıktan sonra sistem $2N + 2$ lineer denklem ve $2N + 2$ bilinmeyenden oluşan çözülebilir bir sistem haline gelir. Eşitliğin sağ tarafı n -inci zaman adımı için sadece bilinen parametrelerden oluştuğundan denklem sisteminin $n + 1$ -inci adımdaki çözümü elde edilir. Bu tekrarlama bağıntısında hesaplamaya başlayabilmek için X^0 başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır.

$$d_1 = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}) \text{ ve } d_2 = (\varphi_{-1}, \varphi_0, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1})$$

Başlangıç parametreleri aşağıdaki eşitliklerden hesaplanır.

$$U_{xx}(a, 0) = 0 = \gamma_1 \delta_{-1}^0 + \gamma_2 \delta_0^0 + \gamma_1 \delta_1^0$$

$$U_{xx}(x_i, 0) = \gamma_1 \delta_{i-1}^0 + \gamma_2 \delta_i^0 + \gamma_1 \delta_{i+1}^0 = U_{xx}(x_i, 0), i = 1, \dots, N - 1$$

$$U_{xx}(b, 0) = 0 = \gamma_1 \delta_{N-1}^0 + \gamma_2 \delta_N^0 + \gamma_1 \delta_{N+1}^0$$

$$V_x(a, 0) = 0 = \varphi_{-1}^0 - \varphi_1^0$$

$$V_x(x_i, 0) = 0 = \varphi_{i-1}^0 - \varphi_{i+1}^0 = V_x(x_i, 0), i = 1, \dots, N - 1$$

$$V_x(b, 0) = 0 = \varphi_{N-1}^0 - \varphi_{N+1}^0$$

2.1.2. Test Problemleri

Bu bölümde KdVB denklemi için başlangıç sınır değer probleminin nümerik çözümü incelenmiştir. Genişletilmiş B-spline kollokasyon metodundan elde edilen sonuçların doğruluğu grafik gösterimiyle, nümerik ve analitik çözümler

arasındaki farkın ölçülmesiyle ve maksimum hata normu ile elde edilen sonuçların karşılaştırılmasıyla ifade edilmiştir.

2.1.2.1. Birinci Test Problemi

KdVB denkleminin aşağıdaki formda verilen başlangıç sınır değer problemi ele alınsın. Başlangıç şartı;

$$u(x, 0) = -\frac{6\vartheta^2}{25\mu} \left[1 + \tanh\left(\frac{\vartheta x}{10\mu}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\vartheta x}{10\mu}\right) \right] \quad (4.13)$$

ve sınır koşulları ise;

$$u(a, t) = -\frac{6\vartheta^2}{25\mu} \left[1 + \tanh\left(\frac{\vartheta}{10\mu} \left(a + \frac{6\vartheta^2}{25\mu} t\right)\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\vartheta}{10\mu} \left(a + \frac{6\vartheta^2}{25\mu} t\right)\right) \right]$$

$$u(b, t) = -\frac{6\vartheta^2}{25\mu} \left[1 + \tanh\left(\frac{\vartheta}{10\mu} \left(b + \frac{6\vartheta^2}{25\mu} t\right)\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\vartheta}{10\mu} \left(b + \frac{6\vartheta^2}{25\mu} t\right)\right) \right]$$

şeklinde olsun (Fan & Zhang, 1998). Belirtilen çalışmada özel olarak $\varepsilon = 1$ seçilmesiyle (4.14) formunda analitik çözüm ele alınmıştır.

$$u(x, t) = -\frac{6\vartheta^2}{25\mu} \left[1 + \tanh\left(\frac{\vartheta}{10\mu} \left(x + \frac{6\vartheta^2}{25\mu} t\right)\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\vartheta}{10\mu} \left(x + \frac{6\vartheta^2}{25\mu} t\right)\right) \right] \quad (4.14)$$

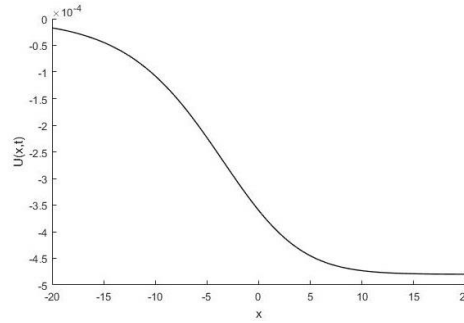
Bu çözüm, sabit, *tanh* bileşeni ve *sech* bileşeni olmak üzere üç bileşenden oluşur. Bu bileşenler zaman ilerledikçe x eksenini üzerindeki hareketli dalga durumunu gösterir. Daha önce yapılan benzer çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için sabit parametreler ele alınacaktır. $\mu = 0.01$, $h = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ alınarak $[-20, 20]$ aralığı üzerinde $t = 1$ zamanı için algoritma çalıştırılır. $\vartheta = 0,001, 0,005$ ve $0,01$ seçildiğinde dalganın durumu Şekil 3.1 - 3.3 ile gösterilmiştir. ϑ dağılım parametresidir. ϑ 'nin artışı Burgers tipindeki çözümlerin ve dalgaların daha dik hale gelmesini sağlar. Her farklı durum için maksimum hata dağılımı Şekil 4.1-4.3 ile gösterilmiştir. Her üç durum için hata dağılım grafiği göstermektedir ki hata dalganın inişe geçtiği noktanın yakınında büyümektedir.

Maksimum hata normu ile elde edilen sonuçlar radial tabanlı multi kuadratik kollokasyon metodu (MQ), ters kuadratik (IQ) ve Gaus(GA) formu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçlar Tablo 3.1'de verilmiştir.

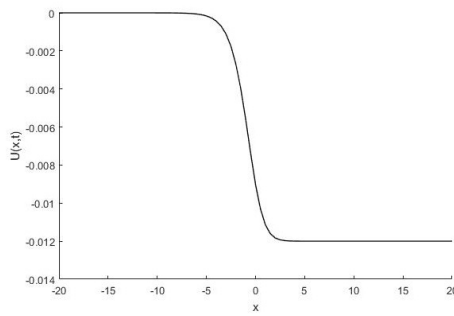
Tablo 3.1: Maksimum hata normu ile elde edilen (MQ),(IQ) ve (GA) sonuçlarının karşılaştırılması

t	$\lambda = 0$	$\lambda = -1.969$	MQ (Haq & Uddin , 2009)	GA (Haq & Uddin , 2009)	IQ (Haq & Uddin , 2009)
1	9.441×10^{-11}	7.271×10^{-11}	6.822×10^{-9}	7.913×10^{-9}	4.077×10^{-7}
10	1.269×10^{-10}	9.509×10^{-11}	2.479×10^{-8}	3.294×10^{-6}	1.270×10^{-6}

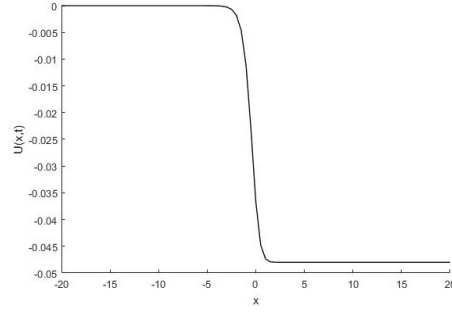
Yapılan hesaplamalarda $\varepsilon = 1$, $\vartheta = 0.004$, $\Delta t = 0.001$, $h = 0.05$ olarak alınmıştır. Tablodan görülmektedir ki önerilen yöntem ile elde edilen sonuçlar 10^{-11} hassasiyetindedir. Yani diğer yöntemlere göre daha az hatalı sonuçlar elde edildiği görülmektedir.



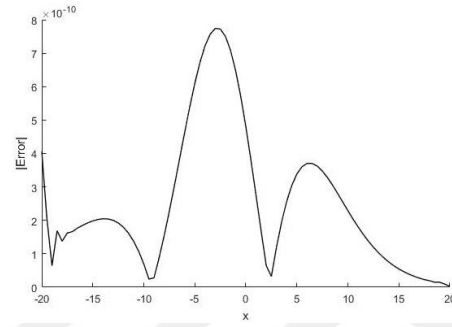
Şekil 3.1: $\vartheta = 0.001$ değeri için $t = 1$ zamanında dalganın durumu.



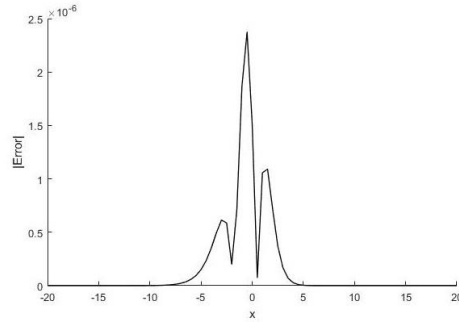
Şekil 3.2: $\vartheta = 0.005$ değeri için $t = 1$ zamanında dalganın durumu.



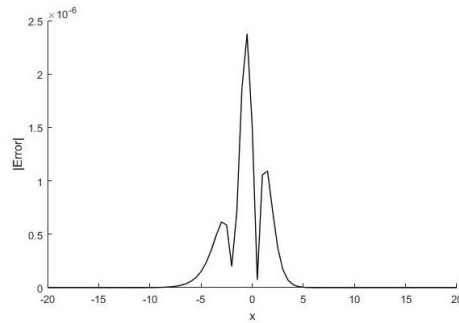
Şekil 3.3: $\vartheta = 0.01$ değeri için $t = 1$ zamanında dalganın durumu.



Şekil 4.1: $\vartheta = 0.001$ değeri için $t = 1$ zamanında maksimum hata dağılımı.



Şekil 4.2: $\vartheta = 0.005$ değeri için $t = 1$ zamanında maksimum hata dağılımı.



Şekil 4.3: $\vartheta = 0.01$ değeri için $t = 1$ zamanında maksimum hata dağılımı.

2.1.2.2. İkinci Test Problemi

Bu test probleminde $\vartheta = 0$ durumunda KdVB denklemini incelenir. Dağılım teriminin elimine edilmesiyle KdVB denklemi KdV denklemine dönüşür. Önerilen metodun doğruluğunu kontrol etmek için başlangıç itmesi şeklinde tanımlanan bir eşitliğe (4.15) ihtiyaç vardır.

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \frac{|x| - 25}{5} \right] \quad (4.15)$$

Çözüm $[-50, 150]$ aralığında $t = 800$ zamanına kadar aranarak sonuçlar elde edilir (Gardner, Gardner, & Ali, 1989; Ersoy & Dağ, 2015; Korkmaz, 2010). Uzun süren bu işlemler sırasında aşağıdaki korunum sabitlerinin çok düşük olduğu gözlemlenmektedir (Korkmaz, 2010; Miura, Gardner, & Kruskal, 1968).

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u dx & C_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u^3 - \frac{3\mu}{\varepsilon} (u_x^2) \right) dx & C_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u^4 - 12 \frac{\mu}{\varepsilon} (u u_x^2) + 7.2 \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} u_{xx}^2 \right) dx \end{aligned}$$

λ genişletme parametresinin farklı seçimleri için yukarıda belirtilen C_1, C_2, C_3, C_4 korunum sabitleri diferansiyel kuadratur metoduna dayanan Cosine açılım metodu (CDQ) ve Lagrange Polinomları (LPDQ) 4. Mertebeden Runge-Cutta yöntemi ile birleştirildiğinde elde edilen sonuçlar Tablo 3.2’de verilmiştir. Tablo incelendiğinde farklı λ değerleri ve farklı zamanlar için C_1, C_2, C_3, C_4 büyüklüklerinde çok az değişim olduğu görülmektedir.

Tablo 3.2: Farklı λ değerleri ve farklı zamanlar için C_1, C_2, C_3, C_4 büyüklüklerindeki değişim.

Metot	λ	t	C_1	C_2	C_3	C_4
		0	50.000	45.000	42.301	40.442
Uygulanan Metot	0	200	50.001	45.002	42.404	40.983
		400	49.999	45.003	42.451	41.264
		600	49.999	45.003	42.453	41.290
		800	50.001	45.003	42.454	41.297
Uygulanan Metot	-1	200	50.000	44.870	34.523	9.396
		400	50.000	44.785	29.485	-7.116
		600	50.000	44.773	28.803	-8.721
		800	50.000	44.771	28.705	-8.904

Tablo 3.2: Farklı λ değerleri ve farklı zamanlar için C_1, C_2, C_3, C_4 büyüklüklerindeki değişim (Devam).

Uygulanan Metot	-0.5	200	50.000	44.957	39.748	30.237
		400	50.000	44.928	38.050	24.631
		600	50.000	44.924	37.811	24.061
		800	50.000	44.923	37.776	23.991
Uygulanan Metot	-0.25	200	50.000	44.983	41.263	36.353
		400	50.000	44.971	40.557	34.078
		600	50.000	44.969	40.455	33.846
		800	50.000	44.969	40.439	33.814
Uygulanan Metot	-0.125	200	50.000	44.969	40.439	33.814
		400	50.000	44.988	41.567	37.900
		600	50.000	44.987	41.519	37.804
		800	50.000	44.987	41.511	37.791
Uygulanan Metot	1	200	50.000	45.047	45.072	51.883
		400	49.997	45.078	46.889	58.291
		600	50.001	45.082	47.140	58.933
		800	50.004	45.082	47.174	58.994
Uygulanan Metot	0.5	200	50.001	45.029	44.006	47.514
		400	49.997	45.048	45.113	51.442
		600	50.001	45.051	45.273	51.885
		800	50.002	45.050	45.286	51.881
Uygulanan Metot	0.25	200	50.001	45.017	43.294	44.606
		400	49.999	45.028	43.930	46.907
		600	49.999	45.029	44.016	47.144
		800	50.000	45.029	44.031	47.186
Uygulanan Metot	0.5	200	50.000	44.957	39.748	30.237
		400	50.000	44.928	38.050	24.631
		600	50.000	44.924	37.811	24.061
		800	50.000	44.923	37.776	23.991
Uygulanan Metot	0.125	200	50.001	45.001	42.786	42.899
		400	49.998	45.016	43.233	44.248
		600	50.001	45.017	43.280	44.387
		800	50.000	45.017	43.286	44.396

Tablo 3.2: Farklı λ değerleri ve farklı zamanlar için C_1, C_2, C_3, C_4 büyüklüklerindeki değişim (Devam).

CDQ (Korkmaz, 2010)		200	49.997	45.001	42.301	43.835
		400	50.017	45.005	42.304	68.403
		600	50.006	45.003	42.303	59.367
		800	49.944	45.019	42.314	166.836
PDQ (Korkmaz, 2010)		200	49.984	45.001	42.301	40.442
		400	49.985	45.001	42.301	40.442
		600	49.977	45.001	42.301	40.442
		800	49.965	45.000	42.301	40.442

2.2. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

İlk olarak klasik polinomlardan oluşan kübik B-spline fonksiyonların genişletilmiş formu kollokasyon yöntemine uygulanarak KdVB denkleminin genişletilmiş kübik B-spline çözümü incelenmiştir. Önerilen yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için iki başlangıç sınır değer probleminin çözümü incelenmiştir. Sonuçların doğruluğunu göstermek için maksimum hata normu kullanılmıştır. Çalışmada elde edilen sonuçlar daha önce yapılan bazı çalışmalarla karşılaştırıldığında önerilen metot ondalık kısmında en az iki basamak daha iyi sonuç vermektedir. Genişletme parametresinin en iyi seçimiyle kübik B-spline fonksiyonlar yardımıyla ileriye dönük çalışmalar yapılabilir. Daha iyi sonuçlar üretebilmek için kullanılan nümerik algoritma üzerinde farklı çalışmalar yapılabilir.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

**GARDNER DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE YÖNTEMİ
İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

3.1. METODUN UYGULANMASI

Geniştirilmiş B-Spline polinomlar klasik B-spline polinomlarla elde edilen sonuçların iyileştirilmesine imkan sağlar. En iyi genişletme parametresi sıfırı içeren bazı aralıkların taranmasıyla elde edilir. Bu çalışmanın amacı bazı başlangıç ve sınır değerleri yardımıyla Gardner denkleminin genişletilmiş kübik B-spline metoduyla çözümünü incelemektir. Bazı analitik çalışmalardan çıkarılan test problemleri uygulanan yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu gösterecektir.

3.1.1. Sayısal Çözüm

Bu çalışmada birleştirilmiş KdV ya da düzenlenmiş KdV denklemi olarak da bilinen Gardner denklemini ele alacağız. Gardner denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$u_t + \varepsilon uu_x + \vartheta u^2 u_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (5.1)$$

Burada; $u = u(x, t)$ ve $\varepsilon, \vartheta, \mu$ sabitlerdir.

Gardner denklemi kuadratik ve kübik formda iki lineer olmayan terim içerir (uu_x kuadratik lineer olmayan, $u^2 u_x$ kübik lineer olmayan). Bu çalışmada Gardner denkleminin genişletilmiş kübik B-spline çözümleri incelenmiştir. Kübik B-spline fonksiyonlar iki defa sürekli türevlenebilir olduğundan Gardner denkleminde mertebenin indirgenmesini sağlamak amacıyla $v = u_x$ parçalanması yapılarak iki denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Bu sistem de genişletilmiş kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle çözülür.

$$\begin{aligned} u_t + u_x(\varepsilon u + \vartheta u^2) + \mu u_{xxx} &= 0 \\ v - u_x &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Bu probleme ait başlangıç değerleri;

$$u(x, 0) = f(x) \quad v(x, 0) = f(x) \quad (5.3)$$

ve homojen Neumann sınır koşulları;

$$\begin{aligned} u_x(a, t) &= 0, & u_x(b, t) &= 0, \\ u_{xx}(a, t) &= 0, & u_{xx}(b, t) &= 0, \\ v_x(a, t) &= 0, & v_x(b, t) &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$v_{xx}(a, t) = 0, \quad v_{xx}(b, t) = 0,$$

π , $[a, b]$ üzerinde eşit aralıklara bölünsün.

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{N} \text{ olsun.}$$

Klasik kübik B-spline fonksiyonların genişletilmiş formu E_i , (3.1) şeklinde ifade edilir.

(3.1) denklem sistemindeki fonksiyonlar, çözümde kullanılacak taban fonksiyonlardır.

Burada reel λ serbest parametredir.

$$U_i = U(x_i, t) = \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i-1} + \frac{8+\lambda}{12} \delta_i + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i+1},$$

$$U_i' = U'(x_i, t) = \frac{1}{2h} (\delta_{i-1} - \delta_{i+1}),$$

$$U_i'' = U''(x_i, t) = \frac{2+\lambda}{2h^2} (\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1}), \quad (5.5)$$

$$V_i = V(x_i, t) = \frac{4-\lambda}{24} \varphi_{i-1} + \frac{8+\lambda}{12} \varphi_i + \frac{4-\lambda}{24} \varphi_{i+1},$$

$$V_i' = V'(x_i, t) = \frac{1}{2h} (\varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}),$$

$$V_i'' = V''(x_i, t) = \frac{2+\lambda}{2h^2} (\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1})$$

(5.2)'deki konuma göre parçalanmış sistemin integrallenmesiyle ve Crank-Nicolson yönteminin uygulanması ile aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2} \text{ ve } \delta_m^0 = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \text{ olmak üzere:}$$

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2} + \vartheta \frac{(U^2 U_x)^{n+1} + (U^2 U_x)^n}{2} + \mu \frac{V_{xx}^{n+1} + V_{xx}^n}{2} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} - \frac{V^{n+1} + V^n}{2} = 0$$

elde edilir. Burada n , eşit Δt zaman adımına göre n -inci zamandaki çözümü ifade eder.

Denklemin lineer olmayan $(UU_x)^n$, $(UU_x)^{n+1}$ ve $(U^2 U_x)^{n+1}$ terimleri aşağıdaki şekilde kullanılır ve (5.6) denklem sisteminde yerine yazılırsa (5.7) denklem sistemi elde edilir.

$$(UU_x)^{n+1} = U^{n+1} U_x^n + U^n U_x^{n+1} - U^n U_x^n,$$

$$(UU_x)^n = U^n U_x^n$$

$$(U^2 U_x)^{n+1} = 2U^{n+1} U^n U_x^n + (U^n)^2 U_x^{n+1} - 2(U^n)^2 U_x^n$$

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n + U^nU_x^n}{2} + \vartheta \frac{2U^{n+1}U^nU_x^n + (U^n)^2U_x^{n+1} - 2(U^n)^2U_x^n + U^{2n}U_x^n}{2} + \mu \frac{V_{xx}^{n+1} + V_{xx}^n}{2} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} - \frac{V^{n+1} + V^n}{2} = 0$$

(5.7)'deki eşitliklerin her iki tarafını 2 ile çarpılır.

$$2 \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + \varepsilon(U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1}) + \vartheta(2U^{n+1}U^nU_x^n + (U^n)^2U_x^{n+1} - (U^n)^2U_x^n) + \mu(V_{xx}^{n+1} + V_{xx}^n) = 0 \quad (5.8)$$

$$U_x^{n+1} + U_x^n - (V^{n+1} + V^n) = 0$$

lineerleştirme gereken yerlerde $U^n = K$ ve $U_x^n = L$ kullanılır.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\Delta t} \right) \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^n - \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^n - \right. \\ & \left. \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^n \right) + \varepsilon L \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^{n+1} \right) + \varepsilon K \left(\left(\frac{1}{2h} \right) (\delta_{i-1}^{n+1} - \right. \\ & \left. \delta_{i+1}^{n+1}) \right) + \vartheta \left(2KL \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^{n+1} \right) \right) + \vartheta K^2 \left(\left(\frac{1}{2h} \right) (\delta_{i-1}^{n+1} - \right. \\ & \left. \delta_{i+1}^{n+1}) \right) - \vartheta KL \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^n + \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^n + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^n \right) + \mu \left(\left(\frac{2+\lambda}{2h^2} \right) (\varphi_{i-1}^{n+1} - 2\varphi_i^{n+1} + \right. \\ & \left. \varphi_{i+1}^{n+1}) \right) + \mu \left(\left(\frac{2+\lambda}{2h^2} \right) (\varphi_{i-1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i+1}^n) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{4-\lambda}{24} \quad \alpha_2 = \frac{8+\lambda}{12} \quad \beta_1 = \frac{1}{2h} \quad \gamma_1 = \frac{2+\lambda}{2h^2} \quad \gamma_2 = -\frac{4+2\lambda}{2h^2}$$

$$V_{m1} = \left(\frac{2}{\Delta t} + \varepsilon L + 2\vartheta KL \right) \alpha_1 + (\varepsilon K + \vartheta K^2) \beta_1 \quad V_{m2} = \mu \gamma_1$$

$$V_{m3} = \left(\frac{2}{\Delta t} + \varepsilon L + 2\vartheta KL \right) \alpha_2 \quad V_{m4} = \mu \gamma_2$$

$$V_{m5} = \left(\frac{2}{\Delta t} + \varepsilon L + 2\vartheta KL \right) \alpha_2 - (\varepsilon K + \vartheta K^2) \beta_1 \quad V_{m6} = \left(\frac{2}{\Delta t} + \vartheta KL \right) \alpha_1$$

$$V_{m7} = \left(\frac{2}{\Delta t} + \vartheta KL \right) \alpha_2$$

$$U^n = K = \alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n$$

$$U_x^n = L = \alpha_1 \varphi_{i-1}^n + \alpha_2 \varphi_i^n + \alpha_1 \varphi_{i+1}^n$$

Bu kısaltmalar kullanıldığında ifadedeki her bir terim (5.8) denklem sisteminde yerine yazılır.

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) \alpha_1 + L\varepsilon \alpha_1 + \beta_1 \varepsilon K + 2KL\vartheta \alpha_1 + K^2 \vartheta \beta_1 \right) \delta_{i-1}^{n+1} + (\mu\gamma_1) \varphi_{i-1}^{n+1} + \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) \alpha_2 + \right. \\
& \left. \alpha_2 \varepsilon L + \alpha_2 \vartheta 2KL \right) \delta_i^{n+1} - (2\mu\gamma_1) \varphi_i^{n+1} + \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) \alpha_1 + L\varepsilon \alpha_1 - \beta_1 \varepsilon K + 2KL\vartheta \alpha_1 - \right. \\
& \left. K^2 \vartheta \beta_1 \right) \delta_{i+1}^{n+1} + (\mu\gamma_1) \varphi_{i+1}^{n+1} = \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) \alpha_1 + KL\vartheta \alpha_1 \right) \delta_{i-1}^n - (\mu\gamma_1) \varphi_{i-1}^n + \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) \alpha_2 + \right. \\
& \left. KL\vartheta \alpha_2 \right) \delta_i^n + (2\mu\gamma_1) \varphi_i^n + \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) \alpha_1 + KL\vartheta \alpha_1 \right) \delta_{i+1}^n - (\mu\gamma_1) \varphi_{i+1}^n
\end{aligned}$$

ve (5.9)

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \varphi_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \varphi_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \varphi_{i+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{2h} \right) (\delta_{i-1}^{n+1} - \delta_{i+1}^{n+1}) = \left(-\frac{1}{2h} \right) (\delta_{i-1}^n - \\
& \delta_{i+1}^n) - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \varphi_{i-1}^n - \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \varphi_i^n - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \varphi_{i+1}^n
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.9) eşitlikleri sadeleştirildiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) + L\varepsilon + 2KL\vartheta \right) \alpha_1 + (\varepsilon K + K^2 \vartheta) \beta_1 \right) \delta_{i-1}^{n+1} + (\mu\gamma_1) \varphi_{i-1}^{n+1} + \left(\left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) + \varepsilon L + \right. \right. \\
& \left. \left. 2KL\vartheta \right) \alpha_2 \right) \delta_i^{n+1} + (\mu\gamma_2) \varphi_i^{n+1} + \left(\left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) + L\varepsilon + 2KL\vartheta \right) \alpha_1 - (\varepsilon K + K^2 \vartheta) \beta_1 \right) \delta_{i+1}^{n+1} + \\
& (\mu\gamma_1) \varphi_{i+1}^{n+1} = \left(\left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) - KL\vartheta \right) \alpha_1 \right) \delta_{i-1}^n - (\mu\gamma_1) \varphi_{i-1}^n + \left(\left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) + KL\vartheta \right) \alpha_2 \right) \delta_i^n - \\
& (\mu\gamma_2) \varphi_i^n + \left(\left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right) + KL\vartheta \right) \alpha_1 \right) \delta_{i+1}^n - (\mu\gamma_1) \varphi_{i+1}^n
\end{aligned}$$

ve (5.10)

$$\begin{aligned}
& -\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_1 \varphi_{i-1}^{n+1} + 0 \delta_i^{n+1} + \alpha_2 \varphi_i^{n+1} + \beta_1 \delta_{i+1}^{n+1} + \alpha_1 \varphi_{i+1}^{n+1} = \beta_1 \delta_{i-1}^n - \alpha_1 \varphi_{i-1}^n + \\
& 0 \delta_i^n - \alpha_2 \varphi_i^n - \beta_1 \delta_{i+1}^n - \alpha_1 \varphi_{i+1}^n
\end{aligned}$$

Bu sistem matris formunda $Ax^{n+1} = Bx^n$ şeklinde ifade edilir (5.11).

$$A = \begin{bmatrix} V_{m1} & V_{m2} & V_{m3} & V_{m4} & V_{m5} & V_{m2} \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \beta_1 & \alpha_1 \\ \dots & \dots & V_{m1} & V_{m2} & V_{m3} & V_{m4} & V_{m5} & V_{m2} \\ \dots & \dots & -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \beta_1 & \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & V_{m1} & V_{m2} & V_{m3} & \dots \end{bmatrix}$$

ve (5.11)

$$B = \begin{bmatrix} V_{m6} & -V_{m2} & V_{m7} & -V_{m4} & V_{m6} & -V_{m2} \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 0 & -\alpha_2 & -\beta_1 & -\alpha_1 \\ \dots & \dots & V_{m6} & -V_{m2} & V_{m7} & -V_{m4} & V_{m6} & -V_{m2} \\ \dots & \dots & \beta_1 & -\alpha_1 & 0 & -\alpha_2 & -\beta_1 & -\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & V_{m6} & -V_{m2} & V_{m7} & \dots \end{bmatrix}$$

(5.11) sistemi $2N + 2$ lineer denklem ve $2N + 6$ bilinmeyenden oluşur.

$$X^{n+1} = (\delta_{-1}^{n+1}, \varphi_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \varphi_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \varphi_{N+1}^{n+1})$$

Bu sistemin tek çözümünün olabilmesi için ilave 4 şarta ihtiyaç vardır.

$$U_x(a, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0, \quad V_x(a, t) = 0, \quad V_x(b, t) = 0$$

Sınır koşullarından $\delta_{-1} = \delta_1, \varphi_{-1} = \varphi_1, \delta_{N-1} = \delta_{N+1}, \varphi_{N-1} = \varphi_{N+1}$ eşitlikleri kullanılarak çözülebilir bir sistem elde edilir.

Algoritmanın hesaplamaya başlayabilmesi için $\delta_i^0, \varphi_i^0, i = -1, \dots, N + 1$ başlangıç parametrelerinin Neuman sınır koşulları kullanılarak hesaplanması gerekir.

$$U_x(a, 0) = 0 = \delta_{-1}^0 - \delta_1^0$$

$$U(x_i, 0) = \gamma_1 \delta_{i-1}^0 + \gamma_2 \delta_i^0 + \gamma_1 \delta_{i+1}^0 = U(x_i, 0), i = 1, \dots, N - 1$$

$$U_x(b, 0) = 0 = \delta_{N-1}^0 - \delta_{N+1}^0$$

$$V_x(a, 0) = 0 = \varphi_{-1}^0 - \varphi_1^0$$

$$V(x_i, 0) = 0 = \gamma_1 \varphi_{i-1}^0 + \gamma_2 \varphi_i^0 + \gamma_1 \varphi_{i+1}^0 = V(x_i, 0), i = 1, \dots, N - 1$$

$$V_x(b, 0) = 0 = \varphi_{N-1}^0 - \varphi_{N+1}^0$$

3.1.2. Test Problemleri

Bu bölümde Gardner denklemi için başlangıç sınır değer probleminin nümerik çözümü ele alınmıştır. Genişletilmiş B-spline kollokasyon metodundan elde edilen sonuçların doğruluğu grafik gösterimiyle, nümerik ve analitik çözümler arasındaki farkın ölçülmesiyle ve korunum kanunlarının incelenmesiyle ifade edilmiştir. Nümerik çözümdeki hataların ölçümü için maksimum hata normu diye tanımlanan (Ersoy Hepson, Korkmaz, & Dağ, 2017) aşağıdaki denklem sistemi kullanılır.

$$L_\infty(t) = |u(x_i, t) - U(x_i, t)|_\infty = \max |u(u_i, t) - U_i^n|$$

Burada $U(x_i, t)$ ve $u(x_i, t)$ nümerik ve analitik çözümü ifade eder.

Gardner denklemi için korunum büyüklükleri (5.12)'deki gibidir. İşlem yapılırken amacımız bunların değişmemesi veya değişimin çok az olmasıdır.

$$\sim \int_a^b \left(\frac{\varepsilon U^3}{3} + \frac{\vartheta U^4}{6} - \mu (U_x)^2 \right) dx \quad (5.12)$$

$$\sim \sum_{i=0}^N \left(\frac{\varepsilon U_i^3}{3} + \frac{\vartheta U_i^4}{6} - \mu (U_x)_i^2 \right) dx$$

$t > 0$ zamanında bu büyüklüklerdeki değişim $C(M_t), C(E_t)$ ve $C(H_t)$ olmak üzere (5.13) şeklindedir.

Burada M_t, E_t ve H_t , t zamanında ölçülen büyüklüklerdir.

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx, & E &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, & H &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon U^3}{3} + \frac{\vartheta U^4}{6} - \mu (U_x)^2 \right) dx \\ C(M_t) &= \left| \frac{M_t - M_0}{M_0} \right| & C(E_t) &= \left| \frac{E_t - E_0}{E_0} \right| & C(H_t) &= \left| \frac{H_t - H_0}{H_0} \right| \end{aligned} \quad (5.13)$$

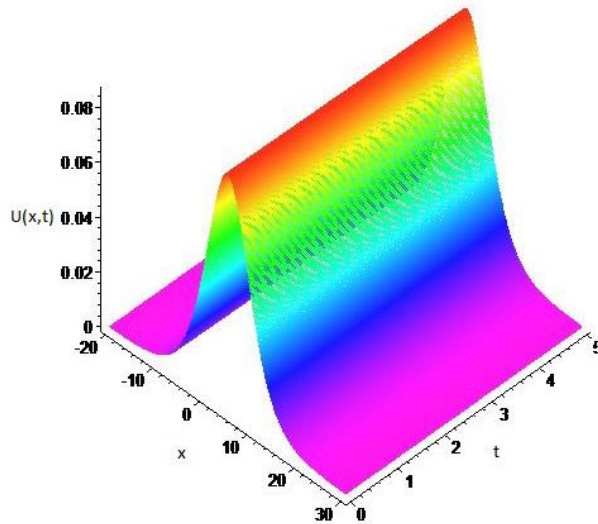
3.1.2.1. Birinci Test Porblemi

İlk nümerik örnek olarak pozitif genliğe sahip tek dalganın yayılımı incelenir. Denklem parametreleri olarak $\varepsilon = 4, \vartheta = -3, \mu = 1$ alınır. (Nishiyama & Noi, 2016) çalışmasına göre tam çözüm:

$$u(x, t) = \frac{2}{12 + 3\sqrt{14} \cosh\left(-\frac{x}{3} + \frac{5}{3} + \frac{t}{27}\right)}$$

şeklinde ele alınır. $t = 0$ alınmasıyla başlangıç değeri elde edilir.

Nümerik hesaplama için $[-20, 30]$ aralığı ele alınarak $t = 5$ zamanına kadar $\Delta t = 0.1$ için hesaplama yapılır. Buna göre pozitif tek solitary dalga Şekil 5.1’de gösterilmiştir.

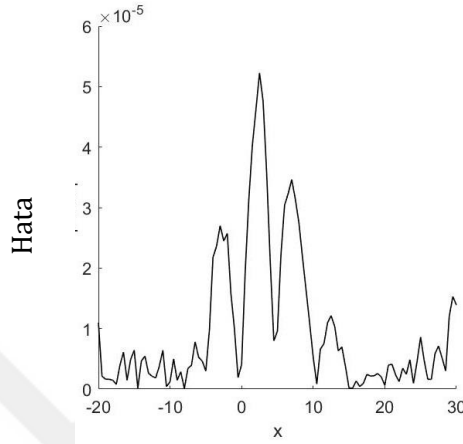


Şekil 5.1: $\Delta t = 0.1$ için pozitif tek solitary dalga şekli.

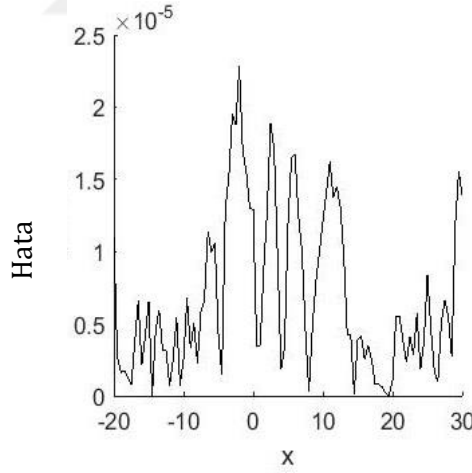
Kaynak: Hepson, Korkmaz ve Dağ, 2017

Ortaya çıkan hata dağılımı ise $\lambda = 0$ genişletme parametresi, $\Delta t = 0.1$ ayrıştırma parametresi ve $N = 100$ aralık sayısı alınarak $t = 5$ zamanına kadar çalıştırıldığında ortaya çıkan durum Şekil 6.1’de gösterilmiştir.

Aynı ayrıştırma parametreleri kullanılarak en iyi genişletme parametresi $\lambda = -0.00840$ için hata dağılımı Şekil 6.2’de gösterilmiştir.



Şekil 6.1: $\lambda = 0$, $\Delta t = 0.1$ ve $N = 100$ alınarak ortaya çıkan hata dağılımı.



Şekil 6.2: $\lambda = -0.00840$, $\Delta t = 0.1$ ve $N = 100$ alınarak ortaya çıkan hata dağılımı.

Farklı genişletme parametreleri kullanılarak elde edilen hata normları Tablo 4.1’deki gibidir.

Tablo 4.1: Farklı genişletme parametreleri kullanılarak elde edilen hata normları.

N	$L_{\infty}(2.5)(\lambda = 0)$	$L_{\infty}(2.5)(\text{çeşitli } \lambda)$	$L_{\infty}(5)(\lambda = 0)$	$L_{\infty}(5)(\text{çeşitli } \lambda)$
100	3.2726×10^{-5}	$(\lambda = -0.00840)1.2330 \times 10^{-5}$	5.22606×10^{-5}	2.2789×10^{-5}
200	2.0537×10^{-5}	$(\lambda = -0.00280)1.4819 \times 10^{-5}$	1.91604×10^{-5}	1.9119×10^{-5}
300	1.4428×10^{-5}	$(\lambda = -0.00094)1.2509 \times 10^{-5}$	1.70403×10^{-5}	1.6944×10^{-5}
400	1.4452×10^{-5}	$(\lambda = -0.00178)1.4440 \times 10^{-5}$	1.61150×10^{-5}	1.5872×10^{-5}

Hesaplanan korunum sabitleri Tablo 4.2’de verilmiştir.

Tablo 4.2: Farklı genişletme parametreleri kullanılarak hesaplanan korunum sabitleri.

N	M_0	E_0	H_0	$C(M_5)$	$C(E_5)$	$C(H_5)$
100	1.0445	0.0601	0.0040	5.4748×10^{-6}	3.8176×10^{-8}	1.5233×10^{-6}
200	1.0445	0.0601	0.0040	3.2669×10^{-6}	5.1126×10^{-8}	1.7003×10^{-6}
300	1.0445	0.0601	0.0040	2.4190×10^{-7}	2.1767×10^{-8}	2.8351×10^{-6}
400	1.0445	0.0601	0.0040	1.3753×10^{-6}	2.0910×10^{-10}	3.3939×10^{-6}

3.1.2.2. İkinci Test Problemi

Bu örnekte başlangıç hareketiyle dalga üretimini incelenir. Aşağıdaki formda Gardner denklemi ele alınır.

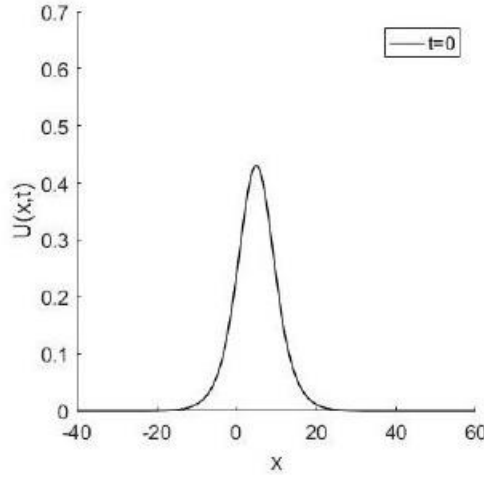
$$u_t + \varepsilon u u_x + \vartheta u^2 u_x + \mu u_{xxx} + \epsilon = 0 \quad (5.14)$$

Pozitif başlangıç hareketinin üretilmesinde 0’dan farklı reel ϵ değerlerinin alınması faydalı olur.

(5.14) Gardner denkleminde $\varepsilon = 10$, $\vartheta = -3$, $\mu = 1$ parametreleriyle elde edilen çözüm (5.15) ele alınırsa;

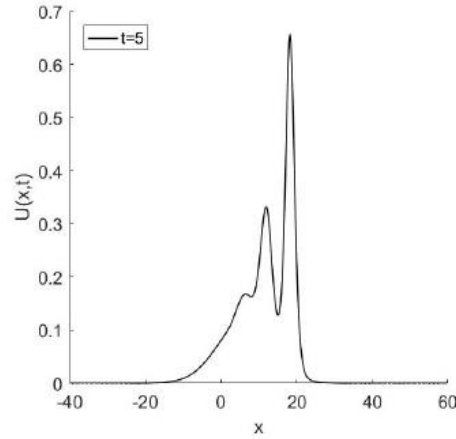
$$u(x, t) = \frac{2}{3} \frac{1}{4 + \sqrt{14} \cosh\left(\frac{x-5}{3}\right)} \quad (5.15)$$

Çözüm algoritması $[-40,60]$ sonlu aralığında $\Delta t = 0.01$ alınarak $t = 15$ zamanına kadar çalıştırılınca Şekil 7.1’de pozitif başlangıç hareketine bakıldığında $x = 5$ konumunda dalga yüksekliği 0.4305 olduğu görülür.



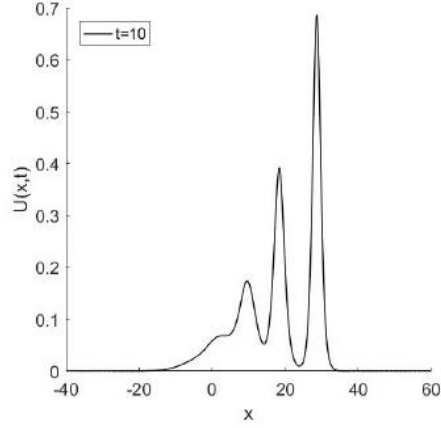
Şekil 7.1: $t = 0$ anında dalga yüksekliği.

Yayıma devam ettiğinde $t = 5$ anında dalga boyu 0.6568 olup konum $x = 18.25$ ’dir Şekil 7.2. Takip eden ilk solitary dalga bu zamanda gözlemlenmektedir.



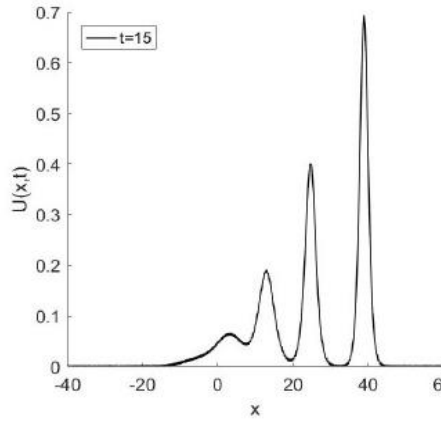
Şekil 7.2: $t = 5$ anında dalga yüksekliği.

Oluşan ilk 3 dalga ise $t = 10$ anında görülmüştür Şekil 7.3’deki gibidir.



Şekil 7.3: $t = 10$ anında dalga yüksekliği.

$t = 15$ anında ise dalga boyu 0.6941 olur Şekil 7.4. Oluşan dalganın en yüksek tepe noktası $x = 39$ konumundaki korunum sabitlerinin başlangıç değeri ve mutlak değişkenleri $\lambda = 0$ için Tablo 4.3’de verilmiştir.



Şekil 7.4: $t = 15$ anında dalga yüksekliği.

Tablo 4.3: Tepe noktadaki korunum sabitlerinin başlangıç değeri ve mutlak değişkenleri.

t	M_0	E_0	H_0	$C(M_15)$	$C(E_15)$	$C(H_15)$
5	5.2255	1.5033	1.5994	8.0719×10^{-7}	3.0588×10^{-5}	1.2886×10^{-3}
10	5.2255	1.5033	1.5994	2.7652×10^{-6}	4.1342×10^{-5}	1.8485×10^{-3}
15	5.2255	1.5033	1.5994	7.0380×10^{-6}	6.1132×10^{-4}	2.1571×10^{-3}

3.2. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bazı başlangıç ve sınır değer problemleri Gardner denkleminde uygulanarak genişletilmiş kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle çözümü incelenmiştir. İlk örnekte analitik ve nümerik çözüm arasındaki fark, farklı ayrıştırma parametreleri için maksimum hata normu olarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçların grafikleri ve tablolar incelendiğinde uygulanan yöntemin geçerli ve güvenilir bir yöntem olduğu söylenebilir. İkinci örnek için önerilen algoritma oldukça başarılı sonuçlar vermiştir. Mutlak değişkenler ve korunum sabitleri beklenen ve istenilen sonuçlar olarak karşımıza çıkmıştır.





DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

ADVEKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

4.1. METODUN UYGULANMASI

Bu çalışmada genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak adveksiyon–difüzyon denkleminin (ADD) nümerik çözümü incelenmiştir. Genişletilmiş kübik B- spline Galerkin metodunu uygulayabilmek için konum parçalanmasına, Crank-Nicolson metodu için ise zaman parçalanmasına ihtiyaç duyulmuştur. Metodun doğruluğunun incelenmesi için ise maksimum hata normu dikkate alınmıştır. Uygulanan yöntemin doğruluğunu test etmek için ise bazı klasik test problemleri incelenerek karşılaştırmalar yapılmıştır.

4.1.1. Sayısal Çözüm

Bir boyutlu taşıma ve yayılma işlemleriyle tanımlanan difüzyon denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilsin.

$$\frac{du}{dt} + \varepsilon \frac{du}{dx} - \mu \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (6.1)$$

Burada $u(x, t)$ fonksiyonu t zamanında ve x konumunda çözümü. ε, μ Sırasıyla düzenli akış hızını ve sabit yayılma katsayısını ifade eden parametrelerdir. (6.1) denklemi için başlangıç ve sınır koşulları (6.2), (6.3) şeklinde seçilsin.

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq i \quad (6.2)$$

$$u(x, t) = f_0(t), u(i, t) = f_i(t) \text{ ya da } \mu \frac{du}{dx} \Big|_i = E_i(t) \quad (6.3)$$

Burada i ve E_i parametreleri sırasıyla kanalın uzunluğu ve $x = i$ sınırındaki akışı temsil etmektedir. u_0, f_0, f_i bilinen fonksiyonlardır.

Klasik kübik B-spline fonksiyonların genişletilmiş formu E_i , (3.1) şeklinde ifade edilir.

Genişletilmiş kübik B-spline çözümü için u analitik çözümüne yaklaşım olarak kabul edilen U yaklaşık çözümü (6.4) şeklinde ifade edilir.

$$u(x, t) \sim U(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i(t) E_i(x) \quad (6.4)$$

Burada $\delta_i(t)$ ifadeleri zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir. Düğüm noktalarında U yaklaşık çözümü ve türev değerleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$U_i = U(x_i, t) = \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i-1} + \frac{8+\lambda}{12} \delta_i + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i+1},$$

$$U_i' = U'(x_i, t) = \frac{1}{2h} (\delta_{i-1} - \delta_{i+1}),$$

$$U_i'' = U''(x_i, t) = \frac{2+\lambda}{2h^2} (\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1}) \quad (6.5)$$

$[0, i]$ aralığı üzerinde ağırlık fonksiyonu olarak genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları seçersek Galerkin metodundan ADD için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_0^i E_i(x)(u_i + \varepsilon u_x - \mu u_{xx}) dx = 0 \quad (6.6)$$

$[x_k, x_{k+1}]$ alt elemanı üzerinde (6.4) ve (6.6) eşitlikleri tekrar yazılırsa (6.7) ve (6.8) elde edilir. Burada $\delta_i(t)$ büyüklükleri $i = k - 1, \dots, k + 2$ eleman parametreleridir. $E_j(x)$, $j = k - 1, \dots, k + 2$ bilinen şekil fonksiyonlarıdır. Galerkin ayrıştırma algoritmasına göre U_t, U_x, U_{xx} yerine u_t, u_x, u_{xx} yazılırsa (6.9) elde edilir.

$$U^e = E_{k-1}(x)\delta_{k-1}(t) + E_k(x)\delta_k(t) + E_{k+1}(x)\delta_{k+1}(t) + E_{k+2}(x)\delta_{k+2}(t) \quad (6.7)$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} E_j(x)(u_t + \varepsilon u_x - \mu u_{xx}) dx = 0 \quad (6.8)$$

$$\sum_{i=k-1}^{k+2} \left\{ \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} E_j E_i dx \right) \dot{\delta}_i + \varepsilon \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} E_j E'_i dx \right) \delta_i - \mu \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} E_j E''_i dx \right) \delta_i \right\} \quad (6.9)$$

$j = k - 1, \dots, k + 2$; $k = 0, 1, K, N - 1$ ve $\dot{\delta}$ sembolü zamana göre türevi ifade eder. (6.9) denklemindeki integraller (6.10) şeklinde ifade edilirse P^e, R^e ve S^e 4x4 boyutlu eleman matrislerini temsil eder. Bu matrisler (6.9) denklem sisteminde yerine yazıldığında (6.11) denklem sistemi oluşur.

$$P_{ji}^e = \int_{x_k}^{x_{k+1}} E_j E_i dx \quad R_{ji}^e = \int_{x_k}^{x_{k+1}} E_j E'_i dx \quad S_{ji}^e = \int_{x_k}^{x_{k+1}} E_j E''_i dx \quad (6.10)$$

$$P^e \dot{\delta}^e + (\varepsilon R^e - \mu S^e) \delta^e \quad (6.11)$$

Burada $\delta^e = (\delta_{k-1}, \dots, \delta_{k+2})^T$ şeklindedir. Tüm sistemdeki elemanların (6.11)'de yerine yazılmasıyla aşağıdaki küresel sistem oluşur.

$$P \dot{\delta} + (\varepsilon R - \mu S) \delta = 0 \quad (6.12)$$

Burada P, R ve S 'ye karşılık gelen eleman matrisleri tarafından çoğaltılarak P^e, R^e, S^e ve $\delta = (\delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1})^T$ tüm eleman parametrelerini içerir.

Bilinmeyen parametreler δ için Crank-Nicolson metodunu kullanırız.

$$\delta = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{2}, \quad \dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$$

Crank-Nicolson formülünün kullanılmasıyla (6.12) eşitliği aşağıdaki tekraralama bağıntısı haline gelir.

$$\left[P + \frac{\Delta t}{2} (\varepsilon R - \mu S) \right] \delta^{n+1} = \left[P - \frac{\Delta t}{2} (\varepsilon R - \mu S) \right] \delta^n \quad (6.13)$$

Tekrarlama işlemine başlamadan önce sınır koşullarını (6.13) sistemine dahil edilirse, δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} şartları sistemden elimine edilince aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$u(0, t) = \frac{4-\lambda}{24} \delta_{-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12} \delta_0^0 + \frac{4-\lambda}{24} \delta_1^0 = f_0(t),$$

$$u(i, t) = \frac{4-\lambda}{24} \delta_{N-1}^n + \frac{8+\lambda}{12} \delta_N^n + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{N+1}^n = f_i(t)$$

Böylece septa köşegensel matrisi elde edilir.

(6.13) sisteminin tekrarlanması sürdürülürse, δ^0 başlangıç parametreleri elde edilir.

(6.2) başlangıç koşulu ve (6.3) sınır koşulları kullanılırsa;

$$\begin{aligned} u'(x_0, 0) &= \frac{1}{2h} (\delta_{-1} - \delta_1) \\ u(x_i, 0) &= \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i-1} + \frac{8+\lambda}{12} \delta_i + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N \\ u'(x_N, 0) &= \frac{1}{2h} (\delta_{N-1} - \delta_{N+1}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Matris denklemi (6.14), Thomas algoritması ile çözülür. Böylece U yaklaşık çözümü, (6.4)'deki seri çözüm formundaki değerler kullanılarak bilinmeyen δ değerleri hesaplanır.

4.1.2. Test Problemleri

Verilen algoritmanın doğruluğunu göstermek için iki test problemi uygulanır. İşlemlerde yapılan hata ölçümünde maksimum hata normu (L_∞) kullanılır.

$$L_\infty = \|u^{tam} - u^{nümerik}\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j^{tam} - u_j^{nümerik}| \quad (6.15)$$

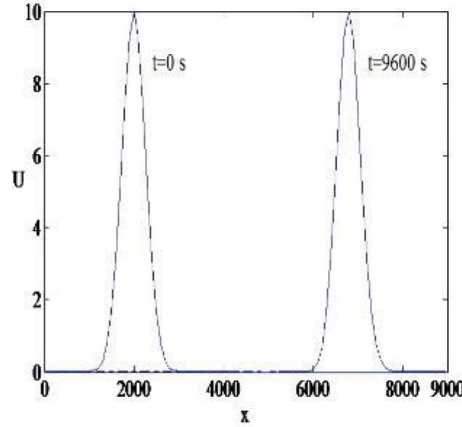
Nümerik hesaplamalarda genişletilmiş kübik B-spline içinde geçen λ değeri, test problemlerinden en iyi sonucu elde edebilecek şekilde taranarak seçilir. Test problemlerinde geçen C_r , Courant sayısı $C_r = \varepsilon \frac{\Delta t}{h}$ şeklindedir.

4.1.2.1. Birinci Test Problemi

Birinci örnekte $\mu = 0$ alınarak $\varepsilon = 0,5m/s$ sabit hızda hesaplamalar yapılmıştır. Bu durumda analitik çözüm (6.16) şeklinde elde edilmiştir (Görgülü, Dağ, Doğan, & Irk, 2018).

$$u(x, t) = 10\exp\left(-\frac{1}{2p^2}(x - x_0 - \varepsilon t)^2\right) \quad (6.16)$$

Burada $p = 264m$ ve $x_0 = 2km$ alınmıştır. (6.16)'den başlangıç değeri, $t = 0$ alınmasıyla elde edilmiştir. $[0,9000]$ aralığının sınırlarında (6.16) denkleminin değeri 0 olarak seçilir. Şekil 8.1 $t = 9600$ zamanından sonraki başlangıç dağılımını göstermektedir.



Şekil 8.1: $t = 9600$ zamanından sonraki başlangıç dağılımı.

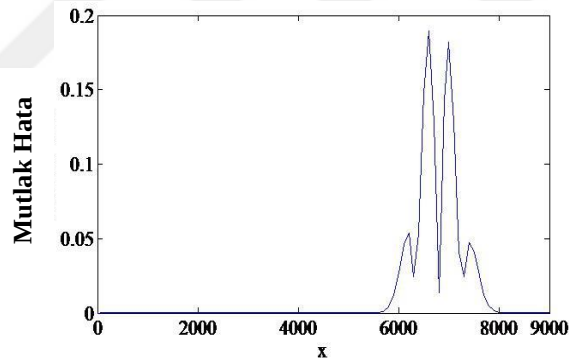
Tablo 5.1'de farklı Courant sayıları için tüm belge üzerinde ortaya çıkan hatalar gösterilmiştir. Tabloya göre farklı courant sayıları için uygulanan yöntemin sonuçları daha önce yapılan çalışmalarla uyumlu olduğu görülmektedir. λ 'nın farklı değerleri için $C_r = 0,25$ ve $t = 9600s$ alınarak elde edilen hata değerleri Tablo 5.2'de verilmiştir. Şekil 8.2'de ise uygulanan yöntemin $t = 9600$ 'de mutlak hata dağılımı gösterilmiştir.

Tablo 5.1: Farklı Courant sayıları için tüm belge üzerinde ortaya çıkan hatalar.

C_r	h	Δt	λ	ECBSGM	(Irk, Dağ, & Tombul, 2015)	(Dağ, Irk, & Tombul, 2006)
0.125	200	50	-0.568169	2.18E-1	1.29	5.18E-1
0.25	100	50	-0.142055	1.90E-1	3.25E-1	3.76E-1
0.50	50	50	-0.032925	1.90E-1	1.98E-1	3.73E-1
0.50	10	10	-0.027064	7.50E-3	7.51E-3	
0.50	1	1	-0.027064	7.50E-5	7.50E-5	
0.50	0.5	0.5	-0.498015	1.88E-5	1.88E-5	

Tablo 5.2: λ 'nın farklı değerleri için $Cr = 0,25$ ve $t = 9600s$ alınarak elde edilen hata değerleri.

λ	ECBSGM
-10	0.9200226
-5	0.4351456
-1	0.1968777
-0.5	0.1908966
-0.14205	0.1896909
0	0.1898749
0.14205	0.1904208
0.5	...
1	
5	
10	



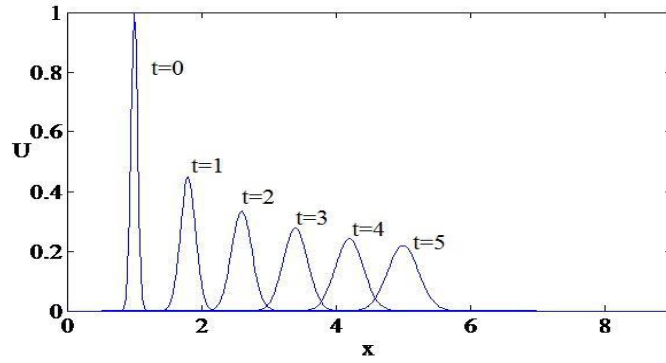
Şekil 8.2: $t = 9600$ zamanındaki mutlak hata dağılımı.

4.1.2.2. İkinci Test Problemi

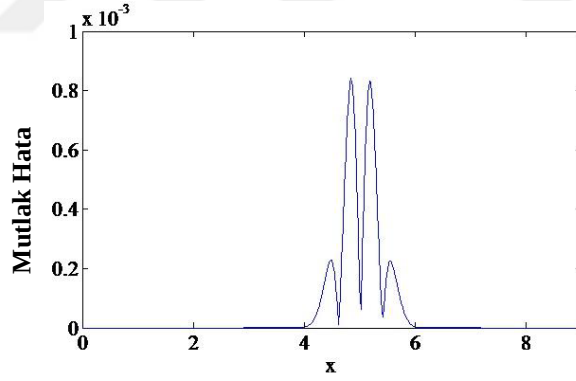
Bu test probleminde adveksiyon ve difüzyonun her ikisini birlikte incelenmiştir. $[0,9]$ aralığı üzerinde bir boyutlu Adveksiyon-Difüzyon denkleminin analitik çözümü (6.17) ile verilmiştir (Sankaranarayanan, Shankar, & Cheong, 1998). Burada ε hızı, μ yayılma katsayısını ve x_0 başlangıç Gaus itme merkezini gösterir (Görgülü, Dağ, Doğan, & Irk, 2018).

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-\varepsilon t)^2}{\mu\sqrt{4t+1}}\right) \quad (6.17)$$

(6.17) denklemi için başlangıç değerini $t = 0$ olarak sınır değerlerini ise $u(0,t) = u(9,t) = 0$ seçerek hesaplama yapılır. $\Delta t = 0.0125$ Zaman adımı için yapılan hesaplamaların sonuçları gösterilmiştir. Bu hesaplamalarda $\mu = 0.005m^2/s$ ve $\varepsilon = 0.8m/s$ alınmıştır. Şekil 8.3 $t = 5$ zamanına kadar olan farklı zamanlardaki nümerik çözümleri gösterir. Şekil 8.4’de ise uygulanan yöntem için mutlak hata dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 8.3: $t = 5$ zamanına kadar olan farklı zamanlardaki nümerik çözümler.



Şekil 8.4: Uygulanan yöntem için mutlak hata dağılımı.

Uygulanan yöntemle elde edilen sonuçlar ile farklı yöntemlerden elde edilen sonuçların karşılaştırılması Tablo 5.3’de verilmiştir.

Tablo 5. 3: Farklı yöntemlerle elde edilen sonuçların karşılaştırılması.

Cr	h	λ	ECBSGM	Metot 1 (Korkmaz & Dağ, 2012)	Metot 2 (Korkmaz & Dağ, 2012)
0.05	0.2	-0.238247	0.1326156	0.1253926	0.1361437
0.10	0.1	-0.238247	0.0042296	0.0069553	0.0145554
0.20	0.05	-0.200000	0.0008429	0.0012117	0.0002886
0.40	0.025	-0.106431	0.0008426	0.0003071	0.0000181

4.2. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için yeni bir algoritma önerilmiştir. Bu algoritma ile genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar yardımıyla iyi bilinen Galerkin sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Yöntemin etkinliğini gösterebilmek için iki test problemiyle çalışılmıştır. Elde edilen sonuçların diğer sonuçlarla karşılaştırılmasından anlaşılmaktadır ki önerilen metot iyi sonuçlar vermektedir.



BEŞİNCİ BÖLÜM

**DÜZENLENMİŞ UZUN DALGA DENKLEMİNİN (MRLW), GENİŞLETİLMİŞ
KÜBİK B-SPLİNE YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

5.1. METODUN UYGULANMASI

Bu çalışmada MRLW denkleminin nümerik çözümü için kollokasyon metodu ile çözümü incelenmiştir. Kollokasyon metodu ile işlem yapılırken genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlardan yararlanılmıştır. Uygulanan yöntemin doğruluğunu göstermek için iki test problemi üzerinde çalışılmıştır. Bu test problemlerinden bir tanesi tek solitary dalga yayılımı bir diğeri ise solitary dalganın etkileşimi şeklindedir.

5.1.1. Sayısal Çözüm

Nümerik çözümü elde edilecek olan MRLW denklemi (7.1) şeklindedir.

$$U_t + U_x + \varepsilon U^2 U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (7.1)$$

Bu denkleme ait başlangıç koşulları $U \rightarrow 0$ ise $x \rightarrow \pm\infty$.

Hesaplama yapabilmek için $[a, b]$ üzerinde fiziki sınır koşulları, yapay sınır koşullarıyla değiştirilir. Bu yapay sınır koşulları;

$$U(a, t) = U_0 ; \quad U(b, t) = U_N , \quad (7.2)$$

$$U_x(a, 0) = 0 ; \quad U(b, 0) = 0$$

Ve başlangıç koşulları $U(x, 0) = f(x)$, $x \in (a, b)$ şeklinde alınacaktır.

π , $[a, b]$ üzerinde eşit aralıklara bölünsün.

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{N} \text{ olsun.}$$

Klasik kübik B-spline fonksiyonların genişletilmiş formu E_i , (3.1) şeklinde ifade edilir.

$E_i(x)$, çözümde kullanılacak taban fonksiyonlardır. Tablo 2.1 kullanılarak (7.3) eşitliği ile 1. ve 2. türevleri içeren (7.4) eşitlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$U_i = U(x_i) = \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i-1} + \frac{8+\lambda}{12} \delta_i + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{i+1} , \quad (7.3)$$

$$U_i' = U'(x_i) = \frac{1}{2h} (\delta_{i-1} - \delta_{i+1}), \quad (7.4)$$

$$U_i'' = U''(x_i) = \frac{2+\lambda}{2h^2} (\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1}),$$

MRLW denklemi için Crank-Nicolson metodunun uygulanması ile U çözümü zaman parametreleri cinsinden (7.5) şeklinde ifade edilir.

$$U^{n+1} - U^n + \frac{\Delta t}{2} [U_x^{n+1} + U_x^n + \varepsilon (U^2)^{n+1} U_x^{n+1} + \varepsilon (U^2)^n U_x^n] - \mu (U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n) = 0 \quad (7.5)$$

(7.5) denklemindeki lineer olmayan terim $\varepsilon(U^2)^{n+1}U_x^{n+1}$ yerine Taylor seri açılımı yardımıyla aşağıdaki gibi yaklaşık bir ifade yazılabilir.

$$(U^2)^{n+1}U_x^{n+1} \approx (U^2)^n(U_x^{n+1} + 2U^n U_x^n U^{n+1} - 2(U^2)^n U_x^n$$

(7.4) eşitliklerinin kullanılmasıyla MRLW denklemi için tam bir ayrıştırma elde edilir (7.6).

$$\begin{aligned} & U^{n+1} - U^n + \frac{\Delta t}{2} [U_x^{n+1} + U_x^n + \varepsilon((U^2)^n(U_x^{n+1} + 2U^n U_x^n U^{n+1} - (U^2)^n U_x^n)] - \\ & \mu(U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n) = 0 \\ & \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^n - \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^n - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^n \right) + \\ & \frac{\Delta t}{2} \left(\left(\frac{\delta_{i-1}^{n+1}}{2h} - \frac{\delta_{i+1}^{n+1}}{2h} + \frac{\delta_{i-1}^n}{2h} - \frac{\delta_{i+1}^n}{2h} \right) + \varepsilon \left(U^{2n} \left(\frac{\delta_{i-1}^{n+1}}{2h} - \frac{\delta_{i+1}^{n+1}}{2h} \right) + 2U^n U_x^n \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^{n+1} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^{n+1} \right) - U^{2n} \left(\left(\frac{\delta_{i-1}^n}{2h} - \frac{\delta_{i+1}^n}{2h} \right) \right) \right) - \mu \left(\left(\frac{2+\lambda}{2h^2} \right) \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^{n+1} - \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^{n+1} + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^{n+1} \right) - \left(\frac{2+\lambda}{2h^2} \right) \left(\left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i-1}^n - \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_i^n + \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_{i+1}^n \right) \right) = 0 \quad (7.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{4-\lambda}{24}, & \alpha_2 &= -\frac{8+\lambda}{12}, & \beta_1 &= \frac{2+\lambda}{2h^2}, & \beta_2 &= -\frac{2+\lambda}{h^2} \\ \gamma_1 &= -\frac{1}{2h}, & \gamma_2 &= \frac{1}{2h}, \end{aligned}$$

Bu kısaltmalar kullanıldığında ifadedeki her bir terim aşağıdaki gibi yazılır. (7.7) denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \delta_{i-1}^{n+1} \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\gamma_1 + \varepsilon(U^{2n} \gamma_1 + 2U^n U_x^n \alpha_1)) - \mu \beta_1 \right) = \delta_{i-1}^{n+1} \left(\alpha_1 (1 + \varepsilon \Delta t U^n U_x^n) + \right. \\ & \left. \frac{\Delta t}{2} (\gamma_1 + \varepsilon U^{2n} \gamma_1) - \mu \beta_1 \right) \\ & \delta_i^{n+1} (-\alpha_2 - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon (2U^n U_x^n) \alpha_2 + \mu \beta_2) = \delta_i^{n+1} (-\alpha_2 (1 + \Delta t \varepsilon U^n U_x^n) + \mu \beta_2) \\ & \delta_{i+1}^{n+1} \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\gamma_1 + \varepsilon(U^{2n} \gamma_1) + \varepsilon 2U^n U_x^n \alpha_1) - \mu \beta_1 \right) = \delta_{i+1}^{n+1} (-\alpha_2 (1 + \Delta t \varepsilon U^n U_x^n) + \\ & \mu \beta_2) \\ & -\delta_{i-1}^n \left(-\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (\gamma_1 + \varepsilon(U^{2n} \gamma_1)) + \mu \beta_1 \right) = \delta_{i-1}^n \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\gamma_1 (1 + \varepsilon U^{2n} \gamma_1)) - \mu \beta_1 \right) \\ & -\delta_i^n (\alpha_2 + \mu \beta_2) = \delta_i^n (-\alpha_2 - \mu \beta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_{i+1}^n \left(-\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} (\gamma_2 + \varepsilon(U^{2^n} \gamma_2)) + \mu\beta_1 \right) = \delta_{i+1}^n \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\gamma_2(1 + \varepsilon(U^{2^n})) - \mu\beta_1) \right) \\
& [\delta_{i-1}^{n+1} \left(\alpha_1(1 + \varepsilon\Delta t U^n U_x^n) + \frac{\Delta t}{2} (\gamma_1 + \varepsilon U^{2^n} \gamma_1) - \mu\beta_1 \right)] + [\delta_i^{n+1} (-\alpha_2(1 + \\
& \Delta t \varepsilon U^n U_x^n) + \mu\beta_2)] + [\delta_i^{n+1} (-\alpha_2(1 + \Delta t \varepsilon U^n U_x^n) + \mu\beta_2)] = \left[\delta_{i-1}^n \left(\alpha_1 + \right. \right. \\
& \left. \frac{\Delta t}{2} (\gamma_1(1 + \varepsilon U^{2^n} \gamma_1)) - \mu\beta_1 \right) \right] + [\delta_i^n (-\alpha_2 - \mu\beta_2)] + [\delta_{i+1}^n \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\gamma_2(1 + \right. \\
& \left. \varepsilon(U^{2^n})) - \mu\beta_1 \right)] \tag{7.7}
\end{aligned}$$

Ortaya çıkan sistem $N + 1$ denklem ve $N + 3$ bilinmeyenden oluştuğundan denklemi çözülebilir hale getirebilmek için $U(a, t) = U_0$, $U(b, t) = U_N$ sınır koşullarından δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri elimine edilir.

$$\delta_{-1} = \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) (U_0 - \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_0 - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_1) ,$$

$$\delta_{N+1} = \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) (U_N - \left(\frac{8+\lambda}{12} \right) \delta_{N-1} - \left(\frac{4-\lambda}{24} \right) \delta_N)$$

δ_{-1} ve δ_{N+1} parametrelerinin elimine edilmesiyle $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu çözülebilir bir denklem sistemi elde edilir.

(7.7) sisteminden iterasyon başlatabilmek için $\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0$ başlangıç parametrelerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için başlangıç koşulu ve 1. türevi kullanılır.

$$U_N(x_i, 0) = U(x_i, 0) , \quad i = 1, \dots, N$$

$$(U_x)_N(x_0, 0) = U'(x_0)$$

$$(U_x)_N(x_N, 0) = U'(x_N)$$

Yukarıda belirtilen koşullardan aşağıdaki üçgensel bant matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix}
-\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} & & \\
\frac{(4-\lambda)}{24} & \frac{(8+\lambda)}{12} & \frac{(4-\lambda)}{24} & & \\
& & & \dots & \\
& & \frac{(4-\lambda)}{24} & \frac{(8+\lambda)}{12} & \frac{(4-\lambda)}{24} \\
& & -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta_{-1}^0 \\
\delta_0^0 \\
\vdots \\
\delta_N^0 \\
\delta_{N+1}^0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
U(x_0) \\
\vdots \\
U(x_N) \\
0
\end{bmatrix} \tag{7.8}$$

5.1.2. Test Problemleri

Bu bölümde düzenlenmiş RLW denklemi için iki test problemi üzerinde çalışılmaktadır. Birinci test problemi için maksimum hata normu (7.9) kullanılır.

$$L_{\infty}(t) = \max |u(u_i, t) - U_i^n| \quad (7.9)$$

Uygulanan nümerik yöntemin doğruluğunu göstermek için çeşitli korunum sabitleri hesaplanarak sonuçlar incelenir. Bu korunum sabitleri kütle, momentum ve enerjiyi temsil etmektedir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u du \approx \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{N-1} (U_m - U_{m+1}) \quad (7.10)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{N-1} (U_m^2 + U_{m+1}^2 + \mu(U_x)_m^2 + \mu(U_x)_{m+1}^2)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (u^4 + \frac{6\mu}{\varepsilon} (u_x)^2) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{N-1} (U_m^4 + U_{m+1}^4 - \frac{6\mu}{\varepsilon} (U_x)_m^2 - \frac{6\mu}{\varepsilon} (U_x)_{m+1}^2)$$

5.1.2.1. Birinci Test Problemi

Bu bölümde MRLW denklemi için tek solitary dalga hareketi üzerinde durulacaktır.

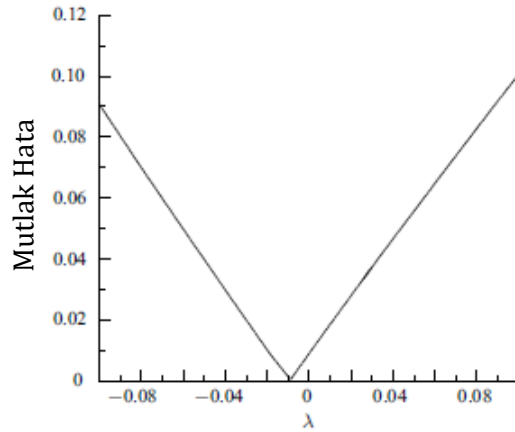
(7.1) denkleminin solitary dalga çözümü (7.11) şeklindedir (Dağ, Irk, & Sarı, 2013).

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}} \operatorname{sech}(k[x - x_0 - (c + 1)t]) \quad (7.11)$$

Burada $k = \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}}$ 'dir. Bu çözüm $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ solitary dalga büyüklüğüne sahip, x_0 merkezli en yüksek pozisyonlu ve $c + 1$ hızlı solitary dalgaya aittir. I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitlerinin analitik değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I_1 = \frac{\pi A}{k} \quad I_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \quad I_3 = \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2)$$

$U_0 = U_N = 0$ başlangıç koşullarıyla birlikte $\varepsilon = 6$, $\mu = 1$, $C = 1$, $X_0 = 40$ ve $A = 1$ parametreleriyle solitary dalga yayılımı incelenir. Bu işlem $h = 0,2$ ve $\Delta t = 0,025$ alınarak $0 \leq x \leq 100$ bölgesi üzerinde yapılır ve daha önceki çalışmalarla karşılaştırılır. MRLW denkleminin nümerik çözümünü bulabilmek için problem, en iyi λ değerini bulmak amacıyla $[-8,1]$ aralığı üzerinde $t = 10$ zamanına kadar incelenir. Bu işleme göre L_{∞} hata normuna ait veriler Şekil 9.1'de gösterilmiştir.



Şekil 9.1: $-1 \leq \lambda \leq 1$ aralığında L_∞ hata normu.

Şekilden görüleceği gibi en düşük mutlak hata $\lambda = -0,0089$ için elde edilmektedir. L_∞ hata normu ve I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitlerinin değerleri Tablo 6.1’de verilmiştir.

Tablo 6.1: L_∞ hata normu ve I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitlerinin değerleri.

	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
Uygulanan Metot	9.0618935	4.4428821	3.2997861	1.4141511
Uygulanan Metot ($\lambda = -0.0089$)	0.7764	4.4428806	3.2997842	1.4141568
(Raslan, 2009) çalışması	1.24757	4.445176	3.302476	1.417411
(Khalifa, Raslan, & Alzubaidi, 2008) çalışması	5.43718	4.44288	3.29983	1.41420
Tam Çözüm		4.4428829	3.2998316	1.4142136

Önceki çalışmalara göre daha iyi sonuçlar verdiği tablo 6.1’den de açıkça görülmektedir.

5.1.2.2. İkinci Test Problemi

Bu bölümde MRLW denklemi için iki pozitif solitary dalga etkileşimi üzerinde durulacaktır. Bu denkleme ait $t=0$ anındaki analitik çözüm (7.12)’de verilmiştir (Dağ, Irk and Sarı, 2012).

$$U(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}(k_1[x - x_1]) + A_2 \operatorname{sech}(k_2[x - x_2]) \quad (7.12)$$

Burada $A_i = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$, $k_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_1+1)}}$ 'dir. $i = 1, 2, \dots$ x_i , c_i 'ler keyfi parametrelerdir.

Hesaplama yapılacak bu çalışmada parametreler $\varepsilon = 6$, $\mu = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1/4$, $x_1 = 25$, $x_2 = 55$ olarak alınıp $t = 0$ 'dan $t = 60$ 'a kadar $[0, 200]$ bölgesinde $\Delta t = 0,01$ ve $h = 0,1$ için yapılır. Bu parametreler büyüklükleri 1 ve 0,5 olan ve en yüksek pozisyonları $x = 20$ ve $x = 50$ 'de alan iki solitary dalga için geçerlidir. I_1 , I_2 , I_3 değişkenlerinin analitik değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

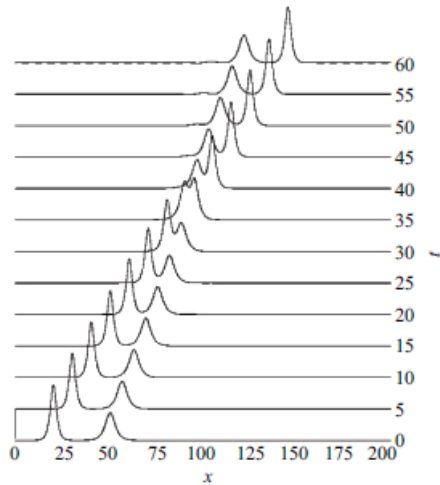
$$I_1 = \frac{\pi}{k_1 k_2} (k_2 A_1 + k_1 A_1) \cong 7,955290304$$

$$I_2 = \frac{2}{k_1 k_2} (k_2 A_1^2 + k_1 A_2^2) + \frac{2\mu}{k_1 k_2} (k_1^2 k_2 A_1^2 + k_1 k_2^2 A_2^2) \cong 4,492401234$$

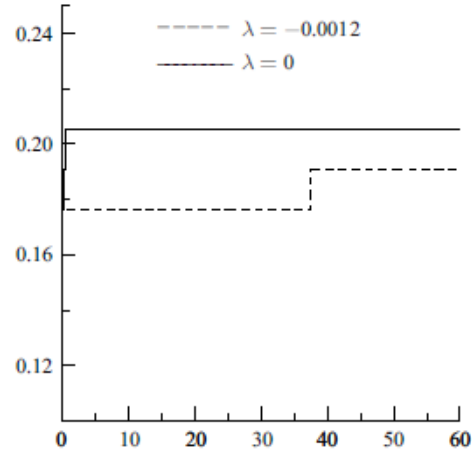
$$I_3 = \frac{4}{3k_1 k_2 \varepsilon} (\varepsilon k_1 A_2^4 - 3\mu k_1 k_2^2 A_2^2 + \varepsilon k_2 A_1^4 - 3\mu k_1^2 k_2 A_1^2) \cong 1,526016961$$

Farklı zamanlarda iki solitary dalga etkileşimi Şekil 9.2'deki gibidir.

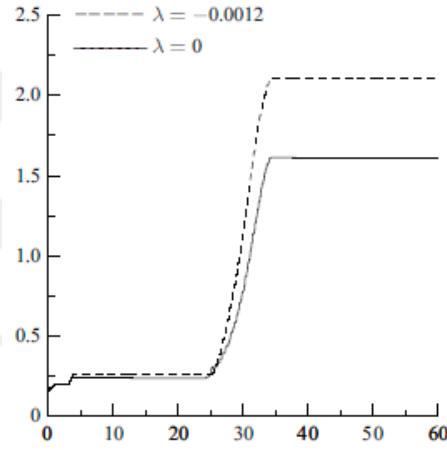
Şekil 9.2: Farklı zamanlarda iki solitary dalga etkileşimi.



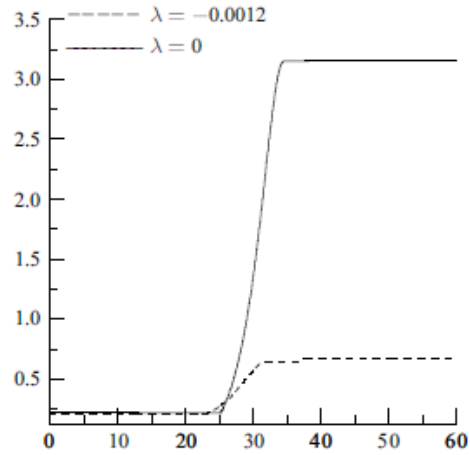
Şekilden de anlaşılacağı gibi başlangıçta $x = 20$ noktasında 1 genliğine sahip olan bir dalga ile $x = 50$ noktasında 0,5 genliğine sahip başka bir dalga mevcuttur. Zaman ilerledikçe dalgalar birbiriyle iletişime girmektedir bunun sonucunda $t = 60$ anında dalgalar birbirinden ayrılmış ve farklı yönlere hareket etmeye başlamıştır. $t = 60$ anında 0,50444 genliğe sahip küçük dalga $x = 120,5$ konumuna yerleşmiş 0,99989 genliğe sahip büyük dalga $x = 143,7$ konumuna yerleşmiştir. I_1 , I_2 , I_3 için elde edilen mutlak hata grafikleri Şekil 9.3 - 9.5'deki gibidir.



Şekil 9.3: I_1 için elde edilen mutlak hata grafiği.



Şekil 9.4: I_2 için elde edilen mutlak hata grafiği.



Şekil 9.5: I_3 için elde edilen mutlak hata grafiği.

5.2. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada zamana bağlı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulmak için sayısal bir yöntem olan genişletilmiş kübik B-spline'in kullanımı anlatılmıştır. Böylece MRLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için kollokasyon yöntemi kullanılarak genişletilmiş kübik B-spline'in adaptasyonu yapılır. Algoritmanın maliyeti genişletilmiş kübik B-spline kollokasyon yönteminde kübik B-spline sıralama yöntemi ile aynıdır. Bu nedenle kolay ve ekonomik bir yöntemdir. MRLW denklemini kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle çözmektense genişletilmiş kübik B-spline'in uygun kollokasyon yöntemiyle çözülmesi biraz daha iyi sonuçlar verir.



SONUÇ

Bu çalışmada KdVB, Gardner, Adveksiyon – Difüzyon ve MRLW denklem sistemlerinin sayısal çözümlerini araştırmak için, genişletilmiş kübik B-Spline yöntemi kullanılmıştır.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan solitary dalgalar, soliton, hata normları, sonlu farklar ve sonlu elemanlar, Galerkin ve kollokasyon yöntemlerinin kullanımı tanıtılmıştır. Ayrıca spline ve B-spline fonksiyonlar tanıtılmış ve bunların alt başlığı olan kübik B-spline ve genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının sınır şartlarındaki çözüm kümeleri formüllerle gösterilerek tablolaştırılmıştır. Birinci bölümde son olarak KdV Burgers, Gardner, Adveksiyon-Difüzyon ve Düzenlemiş Uzun Dalga Denklemleri tanımlanmış ve literatür taraması yapılarak bu denklemler hakkında yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Diğer böümlerde sırayla; KdV Burgers, Gardner, Adveksiyon-Difüzyon ve Düzenlemiş Uzun Dalga Denklemlerinin genişletilmiş kübik B-spline yöntemiyle sayısal çözümü yapılmıştır. Zaman ayrışımı için Crank-Nicolson metodu kullanılmıştır, konum ayrışımı içinse kollokasyon metodu kullanılmıştır. Elde edilen matriste denklem sistemlerinin denklem ve bilinmeyen sayılarının farklı olduğu görülmüştür. Denklemin çözülebilmesi için denklem sayıları ile bilinmeyen sayıları eşit olmalıdır. Bu denklemlerin sınır şartları kullanılarak, bazı bilinmeyenler elimine edilerek sistem çözülebilir hale getirilir.

Nümerik çözümlerin doğruluğu test problemleriyle kontrol edilmiştir. Nümerik çözümler serbest parametre olan λ' 'nın sıfıra eşit olduğu ve sıfırdan farklı olduğu değerler için ayrı ayrı hesaplanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. $\lambda = 0$ alındığında yöntemimiz kübik B-spline yöntemi ile aynı sonuçlar vermektedir. Dolayısıyla farklı test problemleri ve farklı parametreler için elde edilen tüm sonuçlar incelendiğinde genel olarak λ' 'nın sıfırdan farklı değerleri için elde edilen hata normlarının, $\lambda = 0$ durumundakine göre daha küçük değerler aldığı, dolayısıyla genişletilmiş kübik B-spline yönteminin, kübik B-spline yöntemine göre daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Analitik ve nümerik çözümleri daha iyi kıyaslayabilmek için maksimum hata normu hesaplanmıştır. Çizilen hata grafiklerine bakıldığında, oluşan maksimum hatanın o anda oluşan dalganın tepe noktasına karşılık gelen konum değeri civarında olduğu gözlemlenmişti. Grafiklere bakıldığında soliton dalganın

zaman içerisinde şeklinde ciddi bir bozulma olmadan ilerlediği, yani genişletilmiş kübik B-spline yönteminin dalganın hareketini iyi modellediği görülmüştür.

Doğru sonuçlar vermesi ve problemi çözmedeki başarısı açısından bakıldığında benzer tipteki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri araştırılırken genişletilmiş kübik B-spline metodunun kullanılması tavsiye edilir.



KAYNAKLAR

- Abd Hamid, N., Abd Majid, A., & Izani, A. (2010). Extended Cubic B-spline Interpolation Method Applied to Linear Two-Point Boundary Value Problem. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 62.
- Abd Hamid, N., Majid, A. A., & Ismail, A. I. (2011). Extended cubic B-spline method for linear two-point boundary value problems. *Sains Malaysiana*, 40(11), 1285-1290.
- Ahmad, Z. (2000). Numerical soliton for advection-diffusion equation with spatially variable coefficients. *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 6(1): 46-54.
- Ahmad, Z., & Kothiyari, U. C. (2001). Time-line cubic spline interpolation scheme for solution of advection equation. *Computers & fluids*, 30(6), 737-752.
- Akbar, M. A., Hj, N., & Ali, M. (2012). *New solitary and periodic solutions of nonlinear evolution equation by Exp-function method*. World Appl. Sci. J.
- Aksoy, A. M. (2012). *Numerical Solutions of Some Partial Differential Equations Using the Taylor Collocation-Extended Cubic B-spline Functions*. Eskisehir Osmangazi University: (Doctoral Dissertation, Eskişehir).
- Ameen, R. H. (2016). *En küçük kareler B-spline sonlu elemanlar yönteminin diferensiyel problemlerine uygulaması*. (Master's thesis, Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Ay, B. (2015). *Trigonometrik B-spline subdomain galerkin yöntemi ile zamana bağlı bir boyutlu lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri*. (Master's thesis, ESOGÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Bampi, F., & Morro, A. (1981). Effects of viscosity on water waves. *Il Nuovo Cimento C*, 4(5), 551-562.
- Bekir, A. (2009). On traveling wave solutions to combined KdV–mKdV equation and modified Burgers–KdV equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4), 1038-1042.
- Biswas, A., & Zerrad, E. (2008). Soliton perturbation theory for the Gardner equation. *Advanced studies in theoretical physics*, 2(16), 787-794.
- Boztosun, I., Charafi, A., Zerroukat, M., & Djidjeli, K. (2002). Thin-plate spline radial basis function scheme for advection-diffusion problems. *Electronic Journal of Boundary Elements*, (2), 267-282.
- Brugarino, T., & Pantano, P. (1983). KdV-Burgers' equation and nonlinear transmission lines. *Lettere al Nuovo Cimento*(1971-1985), 38(14), 475-479.

- Bulut, H., Akturk, T., & Ucar, Y. (2013). The solution of advection diffusion equation by the finite elements method. *convergence*, 2, 9.
- Burnett, D. S. (1987). *Finite element analysis: from concepts to applications*. Prentice Hall.
- Clough, R. W. (1960). *The finite element method in plane stress analysis*. In Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960.
- Crawford, F. S. (1968). *Waves, berkeley physics course*.
- Dağ, İ., Irk, D., & Sarı, M. (2013). The extended cubic B-spline algorithm for a modified regularized long wave equation. *Chinese Physics B*, 22(4), 040207.
- Dağ, İ., Irk, D., & Tombul, M. (2006). Least-squares finite element method for the advection–diffusion equation. *Applied mathematics and computation*, 173(1), 554-565.
- Debnath, L. (2011). *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media.
- Demler, E., & Maltsev, A. (2011). Semiclassical solitons in strongly correlated systems of ultracold bosonic atoms in optical lattices. *Annals of Physics*, 326(7), 1775-1805.
- Dereli, Y. (2012). Solitary wave solutions of the MRLW equation using radial basis functions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 28(1), 235-247.
- Dhawan, S., Kapoor, S., & Kumar, S. (2012). Numerical method for advection diffusion equation using FEM and B-splines. *Journal of Computational Science*, 3(5), 429-437.
- Dhawan, S., Rawat, S., Kumar, S., & Kapoor, S. (2011, April). Solution of advection diffusion equation using finite element method. In *2011 Fourth International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization* (s. (pp.1-4)). içinde IEEE.
- Doğan, S. (2013). *Advection diffusion denkleminin genişletilmiş Kübik B-spline sonlu elemanlar çözümleri*. (Master's thesis, ESOGÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- El-Danaf, T. S. (2008). Septic B-spline method of the Korteweg-de Vries–Burger’s equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(3), 554-566.
- Ersoy Hepson, Ö., Korkmaz, A., & Dağ, İ. (2017). *Extended B-spline collocation method for KDV-Burgers equation*.

- Ersoy, O., & Dağ, I. (2015). The exponential cubic B-spline algorithm for Korteweg-de Vries equation. *Advances in Numerical Analysis* 2015.
- Fan, E., & Zhang, H. (1998). A note on the homogeneous balance method. *Physics Letters A*, 246(5), 403-406.
- Fu, Z., Liu, S., & Liu, S. (2004). New kinds of solutions to Gardner equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 20(2), 301-309.
- Funaro, D., & Pontrelli, G. (1999). Spline approximation of advection–diffusion problems using upwind type collocation nodes. *Journal of computational and applied mathematics*, 110(1), 141-153.
- Gardner, L. R., & Dağ, I. (1994). A Numerical Solution of the Advection Diffusion Equation Using B-spline Finite Elements. *School of Mathematics, University of Wales*.
- Gardner, L. R., Gardner, G. A., & Ali, A. H. (1989). A Finite Element Solution for the Korteweg-de Vries Equation Using Cubic B Splines. *University of Wales. Pure Mathematics*.
- Gardner, L. R., Gardner, G. A., & Netter, E. (1996, August). A new B-spline finite element method for the advection-diffusion equation. *International Colloquium on Differential equations*.
- Goh, J., & Ismail, A. I. (2012). Cubic B-spline collocation method for one-dimensional heat and advection-diffusion equations. *Journal of Applied Mathematics*.
- Goh, J., Majid, A. A., & Ismail, A. I. (2010, October). A comparison of some splines-based methods for the one-dimensional heat equation. *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*.
- Goh, J., Majid, A. A., & Ismail, A. I. (2011). Extended cubic uniform B-spline for a class of singular boundary value problems. *nuclear physics*, 2, 4.
- Görgülü, M. Z., Dağ, I., Doğan, S., & Irk, D. (2018). Gorgulu, A NUMERICAL SOLUTION OF THE ADVECTION-DIFFUSION EQUATION BY USING EXTENDED CUBIC B-SPLINE FUNCTIONS. *Anadolu Üniversitesi Bilim Ve Teknoloji Dergisi A-Uygulamalı Bilimler ve Mühendislik*, 19(2), 347-355.
- Grimshaw, R., Pelinovsky, E., Taipova, T., & Sergeeva, A. (2010). Rogue internal waves in the ocean: long wave model. *The European Physical Journal Special Topics*, 185(1), 195-208.
- Gromov, E. M., & Tyutin, V. V. (1997). Stationary waves described by a generalized KdV-Burgers equation. *Radiophysics and quantum electronics*, 40(10), 835-840.

- Hamdi, S., Morse, B., Halphen, B., & Schiesser, W. (2011). Conservation laws and invariants of motion for nonlinear internal waves: part II. *Natural hazards*, 57(3), 609-616.
- Han, X. L., & Liu, S. J. (2003). An extension of the cubic uniform B-spline curves. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 15(5), 576-578.
- Haq, S., & Uddin, M. (2009). A mesh-free method for the numerical solution of the KdV–Burgers equation. *Applied Mathematical Modelling*, 33(8), 3442-3449.
- Hepson, O. E., Korkmaz, A., & Dağ, I. (2018). Numerical solutions of the Gardner equation by extended form of the cubic B-splines. *Pramana*, 91(4), 59.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (1974). *Operations Research*. San Francisco, California: Holden-Day.
- Hinton, E., & Owen, D. R. (1977). *Finite element programming*. No. 519.7 H5.
- Hu, H., Tan, M., & Hu, X. (2016). New interaction solutions to the combined KdV–mKdV equation from CTE method. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 21, 64-67.
- Irk, D. (2007). *B-spline Finite Element Solutions of the Some Partial Differential Equation Systems*. Department of Mathematics (Doctoral dissertation).
- Irk, D., Dağ, İ., & Tombul, M. (2015). Extended cubic B-spline solution of the advection-diffusion equation. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 19(4), 929-934.
- Jawad, A. A. (2012). New exact solutions of nonlinear partial differential equations using tan-cot function method. *Studies in Mathematical sciences*, 5(2), 13-25.
- Jia-Ren, Y., Liu-Xian, P., & Guang-Hui, Z. (2000). Soliton perturbations for a combined Kdv-MKdv equation. *Chinese Physics Letters*, 17(9), 625.
- Johnson, R. S. (1970). A non-linear equation incorporating damping and dispersion. *Journal of Fluid Mechanics*, 42(1), 49-60.
- Kalinowski, M. W., & Grundland, M. (1981). An exact solution of the Korteweg-de Vries equation with dissipation. *Letters in Mathematical Physics*, 5(1), 61-65.
- Kamchatnov, A. M., Kuo, Y. H., Lin, T. C., Horng, T. L., Gou, S. C., & Grimshaw, R. H. (2012). Undular bore theory for the Gardner equation. *Physical Review E*, 86(3), 036605.
- Kamchatnov, A. M., Kuo, Y. H., Lin, T. C., Horng, T. L., Gou, S. C., Clift, R., et al. (2013). Transcritical flow of a stratified fluid over topography: analysis of the forced Gardner equation. *arXiv preprint arXiv:1305.3316*.

- Kapoor, S., & Dhawan, S. (2010). B-spline finite element technique for advection-diffusion equation. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 6, 75-94.
- Karpman, V. I. (1973). Nonlinear Waves in Media with Dispersion. *Nelineinye volny v dispersionnykh sredakh. In russian.* Moscow: Nauka.
- Khalifa, A. K., Raslan, K. R., & Alzubaidi, H. M. (2007). A finite difference scheme for the MRLW and solitary wave interactions. *Applied Mathematics and Computation*, 189(1), 346-354.
- Khalifa, A. K., Raslan, K. R., & Alzubaidi, H. M. (2008). A collocation method with cubic B-splines for solving the MRLW equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212(2), 406-418.
- Khater, A. H., Temsah, R. S., & Hassan, M. (2008). A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-type equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 222(2), 333-350.
- Korkmaz, A. (2010). Numerical algorithms for solutions of Korteweg-de Vries equation. *Numerical methods for partial differential equations*, 26(6), 1504-1521.
- Korkmaz, A., & Dağ, İ. (2012). Cubic B- spline differential quadrature methods for the advection- diffusion equation. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.
- Kudryashov, N. A. (2009). On "new travelling wave solutions" of the KdV and the KdV-Burgers equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(5), 1891-1900.
- Lapidus, L., & Pinder, G. F. (2011). *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*. John Wiley & Sons.
- Lin, Y., Xiong, H., Chen, M., Dağ, İ., & Canivar, A. (2011). Taylor- Galerkin method for advection- diffusion equation. *Kybernetes*.
- Lü, H. L., Liu, X. Q., & Niu, L. (2010). A generalized (G'/G)-expansion method and its applications to nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, 215(11), 3811-3816.
- Lü, S., & Lu, Q. (2006). Fourier spectral approximation to long-time behavior of dissipative generalized KdV-Burgers equations. *SIAM journal on numerical analysis*, 44(2), 561-585.
- Malkov, M. A. (1996). Spatial chaos in weakly dispersive and viscous media: a nonperturbative theory of the driven KdV-Burgers equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 95(1), 62-80.

- Miura, R. M., Gardner, C. S., & Kruskal, M. D. (1968). Korteweg- de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *Journal of Mathematical physics*, 9(8), 1204-1209.
- Moaveni, S. (2003). Finite Element Analysis. *A Brief History of the Finite Element Method and ANSYS*.
- Mokhtari, R., & Mohammadi, M. (2010). Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method. *Computer Physics Communications*, 181(7), 1266-1274.
- Naher, H., & Abdullah, F. A. (2012). Some new solutions of the combined KdV-MKdV equation by using the improved G/G-expansion method. *World Applied Sciences Journal*, 16(11), 1559-1570.
- Nishiyama, H., & Noi, T. (2016). Conservative difference schemes for the numerical solution of the Gardner equation. *Computational and Applied Mathematics*, 35(1), 75-95.
- Okamoto, S. I., Sakai, K., Matsumoto, K., Horiuchi, K., & Kobayashi, K. (1998). Development and application of a three-dimensional Taylor–Galerkin numerical model for air quality simulation near roadway tunnel portals. *Journal of Applied Meteorology*, 37(10), 1010-1025.
- Parkes, E. J., & Duffy, B. R. (1997). Travelling solitary wave solutions to a compound KdV-Burgers equation. *Physics Letters A*, 229(4), 217-220.
- Pego, R. L., Smereka, P., & Weinstein, M. I. (1993). Oscillatory instability of traveling waves for a KdV-Burgers equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 67(1-3), 45-65.
- Pepper, D. W., Kern, C. D., & Long Jr, P. E. (1979). Modeling the dispersion of atmospheric pollution using cubic splines and chapeau functions. *Atmospheric Environment* (1967), 13(2), 223-237.
- Prenter, P. M. (2008). *Splines and variational methods*. Courier Corporation.
- Rageh, T. M., Salem, G., & El-Salam, F. A. (2014). Restrictive Taylor approximation for Gardner and KdV equations. *Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech*, 1(3), 1-10.
- Raslan, K. R. (2009). Numerical study of the modified regularized long wave (MRLW) equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(3), 1845-1853.
- Raslan, K. R., & Hassan, S. M. (2009). Solitary waves for the MRLW equation. *Applied Mathematics Letters*, 22(7), 984-989.
- Reddy, J. N. (1993). An introduction to the finite element method. *New York*, 27.

- Rubin , S. G., & Graves Jr , R. A. (1975). *A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*.
- Ruderman, M. S. (1975). Method of derivation of the Korteweg-de Vries-Burgers equation: PMM vol. 39, n^o 4, 1975, pp. 686–694. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 39(4), 656-664.
- Ruderman, M. S., Talipova , T., & Pelinovsky, E. (2008). Dynamics of modulationally unstable ionacoustic wave packets in plasmas with negative ions. *Journal of plasma physics*, 74, 639-656.
- Sankaranarayanan, S., Shankar, N. J., & Cheong, H. (1998). Three-dimensional finite difference model for transport of conservative pollutants. *Ocean Engineering*, 25(6), 425-442.
- Schoenberg, I. J. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae. *Quarterly of Applied Mathematics*, 4(2), 112-141.
- Segerlind, L. J. (1976). *Applied finite element analysis (Vol. 316)*. New York: Wiley.
- Shu, J. J. (1987). The proper analytical solution of the Korteweg-de Vries-Burgers equation. *J. Phys. A: Math. Gen*, 20, 49-56.
- Slyunyaev, A. V., & Pelinovski, E. N. (1999). Dynamics of large-amplitude solitons. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 89(1), 173-181.
- Smith, G. D. (1985). *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press.
- Soliman, A. A. (2006). The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 361(2), 394-404.
- Szymkiewicz, R. (1993). Solution of the advection–diffusion equation using the spline function and finite elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3), 197-206.
- Taghizade, N., & Neirameh, A. (2010). The Solutions of TRLW and Gardner Equations by $(G' G)$ -Expansion Method. *International Journal of Nonlinear Science*, 9(3), 305-310.
- Thongmoon, M., & McKibbin , R. (2006). *A comparison of some numerical methods for the advection-diffusion equation*.
- Thongmoon, M., Tangmanee , S., & McKibbin, R. (2008). A comparison of splines interpolations with standard finite difference methods for one-dimensional

- advection-diffusion equation. *International Journal of Modern Physics C*, 19(08), 1291-1304.
- Tirmizi, I. A. (2010). A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 4151-4160.
- Tsai, T. L., Chiang, S. W., & Yang, J. C. (2006). Examination of characteristics method with cubic interpolation for advection–diffusion equation. *Computers & fluids*, 35(10), 1217-1227.
- Wadati, M. (2001). Introduction to solitons. *Pramana*, 57(5-6), 841-847.
- Wang, G. W., Liu, Y. T., & Zhang, Y. Y. (2014). New exact solutions to the compound KdV-Burgers system with nonlinear terms of any order. *Afrika Matematika*, 25(2), 357-362.
- Wang, M. (1996). Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation. *Physics Letters A*, 213(5-6), 279-287.
- Wazwaz, A. M. (2007). New solitons and kink solutions for the Gardner equation. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 12(8), 1395-1404.
- Wazwaz, A. M. (2009). Solitary Waves Theory. In *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory* (s. pp. 479-502). içinde Berlin, Heidelberg.: Springer.
- Wazzan, L. A. (2007). *MORE SOLITON SOLUTIONS TO THE KDV AND THE KDV-BURGERS*. Proceedings of the Pakistan Academy of Sciences.
- Wei-Feng, Y., Sen-Yue, L., Jun, Y., & Han-Wei, H. (2014). Interactions between solitons and cnoidal periodic waves of the Gardner equation. *Chinese Physics Letters*, 31(7), 070203.
- Xu, G., & Wang, G. Z. (2008). Extended cubic uniform B-spline and -B-spline. *Acta Automat. Sinica*, 34: 980-983.
- Yuanxi, X., & Jiashi, T. (2005). New solitary wave solutions to the KdV-Burgers equation. *International Journal of Theoretical Physics*, 44(3), 293-301.
- Zaki, S. I. (2000). A quintic B-spline Finite elements scheme for the KdVB equation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 188: 121-134.
- Zaki, S. I. (2000). Solitary waves of the Korteweg–de Vries–Burgers' equation. *Computer physics communications*, 126(3), 207-218.
- Zhao, H. (2006). New explicit and exact solutions for a compound KdV-Burgers equation. *Czechoslovak Journal of Physics*, 56(8), 799-805.

Zienkiewicz, O. C., & Morgan, K. (2006). *Finite elements and approximation*. Courier Corporation.

Zoppou, C., Roberts, S., & Renka, R. J. (2000). Exponential spline interpolation in characteristic based scheme for solving the advective–diffusion equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33(3), 429-452.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Kılınç Işıl Özge

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Dumlupınar Üniversitesi	02.2021
Lisans	Mustafa Kemal Üniversitesi	25.08.2014
Lisans	Süleyman Demirel Üniversitesi	27.06.2012

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
11.09.2013	Hatay Sebati Gönenç Ortaokulu	Öğretmen
07.09.2015	Kütahya Ortaca Ortaokulu	Öğretmen
23.01.2017	Kütahya Şehit Ömer Halisdemir İHO	Öğretmen
18.01.2019	Kütahya Çinikent Özel Eğitim Ortaokulu	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce