



BAZI DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Hazırlayan: İhsan PESÇİ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hasan KARA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İĞDIR-2021

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
İĞDIR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Hazırlayan
İhsan PESÇİ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Hasan KARA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İĞDIR-2021

Her Hakkı Saklıdır

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İhsan PESÇİ

ÖZET

BAZI DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

PESÇİ, İhsan

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hasan KARA

Nisan 2021, 54 sayfa

Bu çalışmada, bazı özel toplama metotları anlatılmış ve bu metotların regülerlikleri incelenmiştir.

Ayrıca dizi uzaylarında; diziden-diziye, seriden-diziye ve seriden-seriye dönüşümleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Toplama, Dizi, Etki Alanı, Matris sınıfları

ABSTRACT

MATRIX TRANSFORMATION ON SOME SEQUENCE SPACE

PESÇİ, İhsan

Master Thesis,

Department of Mathematics

Thesis Adviser: Assist. Prof. Hasan KARA

April 2021, 54 pages

In this study, some special addition methods are explained and the regularity of these methods are examined.

Also in sequence spaces; sequence-to-sequence, series-to-sequence and series-to-series transformations are studied.

Keywords: Addition, Sequence, Impact Area, Matrix Classes

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alıŐma Iğdır Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

ÇalıŐmalarımda her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hasan KARA'ya en içten dileklerle teşekkür ederim.

ÇalıŐmalarım esnasında vermiŐ oldukları destekten dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İhsan PESCI

Nisan 2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1.GİRİŞ	1
2.KURAMSAL TEMELLER	4
2.1.Tanım ve Teoremler	4
2.2.Hemen Hemen Yakınsak Dizi	5
2.3.Limitleme ve Toplanabilme	8
3.MATERYAL VE METOT	13
3.1. Cesaro Toplama Metodu	13
3.2. Nörlund Ortalaması	16
3.3. Riesz Ortalaması.....	19
3.4. Hausdorff Ortalaması	20
3.5. Abel Metodu.....	23
4.BULGU VE TANIMLAR	27
4.1.Diziden-Diziye Dönüşüm.....	29
4.2.Seriden-Diziye Dönüşüm	43
4.3. Seriden-Seriye Dönüşüm.....	49
5.TARTIŞMA VE SONUÇ	53
KAYNAKÇA	54

SİMGELER VE KISALTMALAR

- N**..... Doğal sayılar
- R**..... Reel sayılar
- C**..... Reel veya kompleks değerli yakınsak diziler uzayı
- $c_0: C$** üzerinde tanımlanmış bütün sıfır diziler uzayı
- $s: C$** üzerinde tanımlanmış bütün diziler uzayı
- $\gamma: C$** üzerinde tanımlanmış yakınsak seri teşkil eden diziler uzayı
- $\Gamma: x$** üzerinde tanımlanmış yakınsak seri teşkil eden diziler uzayı
- $X: p$** yarımnormuyla yarımnormlanmış kompleks lineer tam olmayan bir dizi
- $X(A)$** A matrisinin karakteristiği
- (X, Y)** X dizi uzayını Y uzayı içine dönüştüren bütün A matrisinin cümlesi
- $\ell_\infty: C$** üzerinde tanımlanmış bütün sınırlı diziler uzayı
- $\sum a_n$** : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
- (S_n)** : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

1.GİRİŞ

Toplanabilme daha çok analiz ve uygulamalı matematik de kullanılan bir teoridir. 19. yüzyılın sonlarında toplanabilme ile ilgili önemli adımlar atılmıştır. Newton ve Leibnitz sonsuz serileri kullanan ilk matematikçilerdir. Toplanabilme teorisi Cesàro, Riesz, Nörlund, Abel, Borel tarafından kullanılan metotlar ile elde edilmiştir. Daha sonra bu klasik metotların yerine daha genel bir matris metodu kullanılarak, matris dönüşümü teorisi harekete geçirilmiştir. İraksak bir seriyi veya ıraksak bir diziyi toplamanın veya yakınsatmanın en yaygın yöntemi sonsuz matrisleri kullanmaktır.

Bu çalışmanın amacı, limitlenebilme ve toplanabilme tanımlarını yaparak bazı özel toplama metotları ve bu metotların regülerlikleri hakkında bilgi vermektir. Ayrıca dizi uzaylarında; diziden-diziye, seriden-diziye ve seriden-seriye dönüşümleri hakkında bilgi vermektir.

Bir $x \in \ell_\infty$ dizisinin bütün Banach limitleri çakışiyorsa, x 'e hemen hemen yakınsak dizi denir. f , hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini gösterebilir. Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f ile sıfıra yakınsayan hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f_0 ile gösterilecektir. Lorentz (1948) bir x dizisinin bir s sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şartın n 'ye göre düzgün olarak,

$n = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m}}{m+1} = s$$

olduğunu ispatladı.

Eğer $x \in c$ ise $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dir. Herhangi bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$d_{mn} = d_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m x_{n+i} \quad (*)$$

yazalım. Lorentz'den (1948), f tüm hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini göstermek üzere,

$x \in f \Leftrightarrow n$ 'ye göre düzgün olarak $m \rightarrow \infty$ iken $d_{mn} \rightarrow s$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda $f - \lim x = s$ yazılır.

$$\sum a_n$$

sonsuz serisi verilsin. Bu seri kısaca a ile gösterilecektir.

$$x_n = a_0 + a_1 \dots + a_n \quad (**)$$

olsun. a ile x arasındaki bağıntı $(**)$ ile verilecektir.

$d_{-1,n} = d_{-1,n}(x) = x_{n-1}$ olarak tanımlansın. $m, n \geq 0$ için,

$$\phi_{mn} = \phi_{mn}(a) = d_{mn} - d_{m-1,n}$$

yazılır. Buradan,

$$\phi_{0,n} = d_{0,n} - d_{-1,n} = x_n - x_{n-1} = a_n$$

ve

$$\phi_{mn} = \frac{1}{m(m+1)} \sum_{v=1}^m v a_{n+v} \quad (***) \text{ olarak elde edilir.}$$

Eğer n ye göre düzgün olarak

$$\sum_m |\phi_{mn}|$$

yakınsak ise a serisine veya x dizisine mutlak hemen hemen yakınsaktır denir. Das *etol*, (1984).

Bu tanım Das and Mishra (1988) tarafından aşağıdaki şekilde genellemiştir.

Eğer $k \geq 1$ olmak üzere n ye göre düzgün olarak,

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\phi_{mn}|^k < \infty \quad (***)$$

ise a serisine veya x dizisine $k \geq 1$ ile mutlak hemen hemen yakınsaktır denir. Das and Mishra, 1988).

(*) ifadesi gereği; $x \in \ell_{\infty}$ ve $d_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m x_{n+i}$ olduğunu biliyoruz.

Eğer $m \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak;

$$d_{mn}(|x - s|) = \frac{1}{m(m+1)} \sum_{i=0}^m |x_{i+n} - s| \rightarrow 0$$

olacak şekilde $s \in \mathbb{C}$ varsa $x = (x_n)$ dizisine s değerine kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir ve bu durum $|f| - \lim x = s$ şeklinde yazılır.

Das and Mishra (1988), bu tanımı $k \geq 1$ olmak üzere bir k indeksi ile aşağıdaki şekilde genelleştirdiler.

Eğer, $m \rightarrow \infty$ iken, n ye göre düzgün olarak;

$$d_{mn}(|x - s|^k) = \frac{1}{(m+1)} \sum_{i=0}^m |x_{i+n} - s|^k \rightarrow 0$$

olacak şekilde bir $s \in \mathbb{C}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine s ye $k \geq 1$ indeksi ile kuvvetli hemen hemen toplanabilirdir denir. Bu durumda, $[f]_k - \lim x = s$ yazılır.

Das and Mishra(1988), $\ell^{\wedge} \subset [f]_k$ olduğunu ve $x \in [f]_k$ olduğunu ve $x \in [f]$ ise,

$$|f| - \lim x = f - \lim x = s$$

olduğunu ispatladılar (Kaya, 2009).

2.KURAMSAL TEMELLER

TOPLANABİLME VE BAZI ÖZEL TOPLAMA METODLARI

2.1.Tanım ve Teoremler

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı tanım ve teoremlere yer vereceğiz.

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay)

X boş kümeden farklı C reel veya *kompleks* sayı olsun.

$$i) X \times X \rightarrow X$$

$$ii) C \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine C cismi üzerinde bir lineer uzay denir. $\forall \lambda, \mu \in C$ ve $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

- I. $x + y = y + x$,
- II. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- III. $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır,
- IV. Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$,
- V. $1 \cdot X = X$,
- VI. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
- VII. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
- VIII. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

Tanım 2.1.2. (Lineer Dönüşüm)

X, Y lineer iki uzay ve λ, μ skaler olmak üzere, $x_1, x_2 \in X$ için,

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2) \text{ ise,}$$

$A: X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm denir.

Tanım 2.1.3. (Matris Dönüşümü)

$A = (a_{nk})$, $(n, k = 1, 2, \dots)$ *kompleks* terimli bir sonsuz matris ve $X, Y; S$ –uzayının *iki* reel alt uzayı olsun. Bu durumda $X = (x_k) \in X$ olduğunda

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

olarak tanımlanan $Ax = (A_n(x)) \in Y$ ise, $A = (a_{nk})$ matrisinin X ve Y -ye bir matris dönüşümü tanımladı söylenir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Eğer limit korunmuş ise $A \in (X, Y; p)$ yazılır.

$Ax = (A_n(x))$ dizisine, $x = (x_k)$ dizisinin $A = (a_{nk})$ matrisi vasıtasıyla yapılan dönüşüm denir.

Tanım 2.1.4. (**Banach Uzayı**)

Bir Banach uzayı tam normlu bir lineer uzaydır. Buradaki tamlık $x_n \in X$ için $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) olduğunda bir $x \in X$ mevcuttur.

Öyle ki; $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$) olur.

2.2.Hemen Hemen Yakınsak Dizi

Tanım 2.2.1. Bir $x \in \ell_{\infty}$ dizisinin bütün *Banach* limitleri çakışiyorsa, x 'e hemen hemen yakınsak dizi denir. f , hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini gösterebilir. Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f ile sıfıra yakınsayan hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f_0 ile gösterilecektir. Lorentz (1948) bir x dizisinin bir s sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şartın n 'ye göre düzgün olarak,

$n = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m}}{m+1} = s$$

olduğunu ispatladı. Eğer $x \in c$ ise $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ dir.

Herhangi bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$d_{mn} = d_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m x_{n+i} \quad (*)$$

alalım. Lorentz'den (1948), f tüm hemen hemen yakınsak dizilerin kümesini göstermek üzere,

$x \in f \Leftrightarrow n$ ye göre düzgün olarak $m \rightarrow \infty$ iken $d_{mn} \rightarrow s$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda $f - \lim x = s$ yazılır.

$$\sum a_n$$

sonsuz serisi verilsin. Bu seri kısaca a ile gösterilecektir.

$$x_n = a_0 + a_1 \dots + a_n \quad (**)$$

olsun. a ile x arasındaki bağıntı (**) ile verilecektir.

$$d_{-1,n} = d_{-1,n}(x) = x_{n-1} \text{ olarak tanımlansın. } m, n \geq 0 \text{ için,}$$

$$\phi_{mn} = \phi_{mn}(a) = d_{mn} - d_{m-1,n}$$

yazılır. Buradan,

$$\phi_{0,n} = d_{0,n} - d_{-1,n} = x_n - x_{n-1} = a_n$$

ve

$$\phi_{mn} = \frac{1}{m(m+1)} \sum_{v=1}^m v a_{n+v} \quad (***) \text{ olarak elde edilir.}$$

Eğer n ye göre düzgün olarak

$$\sum_m |\phi_{mn}|$$

yakınsak ise a serisine veya x dizisine mutlak hemen hemen yakınsaktır denir. Das ve etol, 1984).

Bu tanım Das and Mishra (1988) tarafından aşağıdaki şekilde genellemiştir. Eğer $k \geq 1$ olmak üzere n ye göre düzgün olarak,

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} |\phi_{mn}|^k < \infty \quad (***)$$

ise a serisine veya x dizisine $k \geq 1$ ile mutlak hemen hemen yakınsaktır denir. Das and Mishra, 1988).

(*)ifedesi gereği; $x \in \ell_\infty$ ve $d_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m x_{n+i}$ olduğunu biliyoruz.

Eğer $m \rightarrow \infty$ iken n ye göre düzgün olarak;

$$d_{mn}(|x - s|) = \frac{1}{m(m+1)} \sum_{i=0}^m |x_{i+n} - s| \rightarrow 0$$

olacak şekilde $s \in \mathbb{C}$ varsa $x = (x_n)$ dizisine s değerine kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir ve bu durum $|f| - \lim x = s$ şeklinde yazılır.

Das and Mishra (1988), bu tanımı $k \geq 1$ olmak üzere bir k indeksi ile aşağıdaki şekilde genelleştirdiler.

Eğer, $m \rightarrow \infty$ iken, n ye göre düzgün olarak

$$d_{mn}(|x - s|^k) = \frac{1}{(m+1)} \sum_{i=0}^m |x_{i+n} - s|^k \rightarrow 0$$

olacak şekilde bir $s \in \mathbb{C}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine s ye $k \geq 1$ indeksi ile kuvvetli hemen hemen toplanabilir denir. Bu durumda, $[f]_k - \lim x = s$ yazılır.

Das and Mishra(1988), $\ell^{\wedge} \subset [f]_k$ olduğunu ve $x \in [f]_k$ olduğunu ve $x \in [f]$ ise,

$$|f| - \lim x = f - \lim x = s$$

olduğunu ispatladılar. Bu sonuç Das and Mishra (1988) tarafından aşağıdaki örnek ve açıklamalar ile genelleştirilmiştir.

Örnek 1:

$x = (1, 0, 1, \dots)$ dizisi alınsın.

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{2} (L(x) + L(Dx)) = \frac{1}{2} (L(1, 0, 1, 0, 1, \dots) + (0, 1, 0, 1, \dots)) \\ &= \frac{1}{2} (L(1, 1, 1, 1, 1, \dots)) = \frac{1}{2} (L(e)) = \frac{1}{2} (1) = \frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Daha sonraları; hemen hemen yakınsak diziler uzayı King (1966), Duran (1972) ve Savaş (1990) tarafından incelenmiştir. Maddox (1978) kuvvetli hemen hemen yakınsak dizi tanımını verdi ve

$$[f] = \left\{ x: \lim_m \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m |x_{i+n} - s| < 0, n'ye göre düzgün \right\}$$

şeklinde tanımladı. Das *etol.*, (1984) mutlak hemen hemen yakınsaklık kavramını aşağıdaki gibi tanımlayarak çalıştılar.

$$\phi_{mn}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{v=1}^m v a_{n+v}$$

olmak üzere,

$$\ell^\wedge = \left\{ x: \sum_m |\phi_{mn}(x)|, n'ye göre düzgün \right\}$$

$$\ell^\wedge = \left\{ x: \sup_n \sum_m |\phi_{mn}(x)| < \infty \right\}$$

olarak tanımladılar (Kaya, 2009).

2.3.Limitleme ve Toplanabilme

Tanım 2.3.1. Herhangi bir $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun. T herhangi bir lineer dönüşüm olmak üzere;

$$T - \lim S_n = s$$

ise,

$$\sum a_n$$

serisi s'ye T-limitlenebilir denir ve

$$\sum a_n = s(T)$$

veya

$$S_n \rightarrow s(T)$$

şeklinde gösterilir. Burada T dönüşümü bir toplam metodudur. Bu metodun amacı daha önce bilinen yakınsaklık ölçüleri yardımıyla karakteri tayin edilemeyen sonsuz serilerin karakterlerini tayin etmek veya başka anlamda ıraksak olan bazı sonsuz serilere belli bir s sayısı karşılık getirmektedir.

Tanım 2.3.2.

$\sigma = (S_k)$ dizisi ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

matrisi verilmiş olsun. (t_n) dizisini, $\forall n$ için

$$(t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k$$

şeklinde tanımlanan metot bir matris metodudur. Bu dönüşüm lineerdir. Şöyle ki;

$$i) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} (S_k + S'_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S'_k$$

$$ii) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_{nk} S_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k$$

şartları sağlanmaktadır. Eğer,

$$A_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k$$

$\forall n$ için mevcut ve $A_n(\sigma) \rightarrow s$, $(n \rightarrow \infty)$ ise, S_k dizisi s 'ye *A limitlenebilir* denir. *A limitlenebilen* bütün dizilerin kümesine *A matrisinin* yakınsaklık alanı denir ve $F(A)$ ile gösterilir.

Teorem: Bir T lineer dönüşümünün $F(t)$ yakınsaklık alanı bir vektör uzayıdır.

İspat: $F(t)$ nin toplama ve skalerle çarpma işlemine göre kapalı olduğunu göstermeliyiz.

$\sigma, \tau \in F(t)$ ve $T\sigma$ ile $T\tau$ mevcut olsun.

$T(\sigma + \tau) = T\sigma + T\tau$ toplamı yakınsak ve $T(a\sigma) = aT(\sigma)$ yakınsaktır.

O halde, $T(\sigma + \tau)$ ve $T(a\sigma)$ yakınsak olup $F(t)$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.3.3. Yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren bir A matrisine konservatif (yakınsaklığı koruyan) matris denir. Konservatif Matrislerden karakteristiği sıfır olanlar **conull**, karakteristiği sıfırdan farklı olanlar **coregüler** olarak adlandırılırlar.

Tanım 2.3.4. Bir $A = (a_{nk})$ matrisi yakınsak bir diziyi yine yakınsak bir diziye aynı limitle dönüştürüyorsa A dönüşümüne **Regülerdir** denir.

Örnek 2:

$S_n \rightarrow \varepsilon$ iken,

$$\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \rightarrow \varepsilon \quad \text{dir.} \quad \dots (1.3)$$

Cauchy Teoreminden biliyoruz. O halde, S_n dizisini (1.3) deki diziye dönüştüren metot regülerdir ve bu metot aritmetik ortalama olarak bilinir.

Örnek 3:

$$t_n = \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dönüşümünü alalım. Bu dönüşümün regüler olması için $\lim S_n = \lim t_n$ olmalıdır. (S_n) yakınsak ise $\lim S_n = s$ limiti vardır. Bu nedenle $\lim S_{n+1} = s$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} \lim t_n &= \lim \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}((\lim S_n) + (\lim S_{n+1})) \\ &= \frac{1}{2}(s + s) = s \end{aligned}$$

$$\lim t_n = \lim S_n = s$$

olduğundan bu dönüşüm regülerdir. Bu tanımlara göre regüler matrisler konservatif matrislerin özel halidir denilebilir. A bir konservatif matris ise $A \in (c, c)$, A regüler matris ise $A \in (c, c; p)$ yazılabilir.

Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar *Teoplitz Teoremiyle* aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

$$A \in (c, c; p) \Leftrightarrow \begin{cases} i) & \sup_n \sum_k a_{nk} < \infty \\ ii) & a_{nk} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit}) \\ iii) & \sum_k a_{nk} \rightarrow 1, (n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

Tanım 2.3.5. Her sınırlı diziyi yakınsak bir diziye dönüştüren bir matrise *Schur Matrisi* denir. *Schur Teoreminin* ifadesi şu şekildedir.

$$A \in (l_\infty, c) \Leftrightarrow \begin{cases} i) & \sum_k a_{nk} \\ ii) & \lim_n a_{nk} \end{cases} \quad \begin{array}{l} n' \text{ e göre düzgün yakınsak} \\ (k \text{ sabit}) \text{ mevcut} \end{array}$$

Bir *Schur Matrisinin* karakteristiği sıfırdır. Çünkü *Schur Teoreminin* (i) şartı gereğince;

$$\sum_k (\lim_n a_{nk}) = \lim_n \sum_k a_{nk}$$

eşitliği var ve $X(A)=0$ dir. *Toeplitz* şartlarına göre

$$\lim_n a_{nk} = 0 \text{ ve } \lim_n \sum_k a_{nk} = 1$$

olduğundan regüler bir matrisin karakteristiği 1 dir. Bir regüler matris mutlaka bazı iraksak serileri toplayabilir. Fakat bir regüler matris her sınırlı diziyi limitleyemez. Yani, bir A matrisi hem regüler hem de Schur matrisi olamaz. Buna dair ilk ispat Steinhaus tarafından yapılmıştır.

Teorem(Steinhaus): Herhangi bir A regüler matrisi verilmiş olsun. Bu durumda A toplanamayan sınırlı bir dizi mevcuttur.

İspat: A matrisi *regüler* olduğundan $X(A) = 1$ olup A bir *Schur* matrisi değildir. A sınırlı bir diziyi limitleyemediğine göre bir A *limitlenemeyen* dizi daima vardır diyebiliriz.



3.MATERYAL VE METOT

ÖZEL TOPLAMA METOTLARI

3.1. Cesaro Toplama Metodu

Tanım 3.1.1: $k > -1$ olmak üzere $A = (a_{nk})$ matrisini,

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olarak alalım. Burada $n \geq 1$ için,

$$A_n^r = \frac{1}{n!} [(r+1)(r+2) \dots (r+n)] \quad (1.4)$$

ve $A_0^r = 1$ dir.

$$\sum_k a_{nk}$$

serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_k) olsun. Eğer,

$$\lim_n \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} S_k = s \quad (1.5)$$

ise,

$$\sum_k a_k$$

serisi s 'ye (C, r) toplanabilir denir ve

$$\sum_k a_k = s(C, r) \text{ yazılır.}$$

$$A_n^r = \binom{n+r}{n}$$

$$A_{n-k}^{r-1} = \binom{n-k+r-1}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k+r-1}{n-k} S_k = \sum_{k=0}^n \binom{k+r-1}{k} S_{n-k}$$

olduğundan (1.5) eşitliğini

$$\lim_n \frac{\sum_{k=0}^n \binom{k+r-1}{k} S_{n-k}}{\binom{n+r}{n}} = s \quad (1.6)$$

şeklinde yazabiliriz. (1.6) eşitliği (S_k) dizisinin s 'ye (C, r) limitlenebildiğini ifade eder.

Örnek 4:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \text{ serisi } \frac{1}{2} \text{ sayısına } (C, 1) \text{ toplanabilir.}$$

Bu serinin kısmi toplamlar dizisi $\forall n \in N$ için,

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ dir. } S_n \text{ dizisinin yakınsak olmadığı açıktır.}$$

$$t_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + (-1)^n}{n+1} \right)$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + (-1)^n}{n+1} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

olur. Bu da,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1}{2} (C, 1) \text{ demektir.}$$

Teorem: $r \geq 0$ olursa $(C, 1)$ Cesaro toplama metodu regülerdir.

İspat: Toeplitz şartlarının sağlandığını görelim. Bunun için,

$$\begin{aligned} (1-x)^{-r-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{n} x^n & (|x| < 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^r) x^n & (1.7) \end{aligned}$$

eşitliğinden yararlanacağız. Benzer olarak,

$$(1-x)^{-p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^p) x^n \quad (p \geq 0)$$

yazalım. Bu iki eşitliğin taraf tarafa çarpımını alırsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{r+p+1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^r x^n \sum_{n=0}^{\infty} A_n^p x^n && \text{bulunur. Burada,} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) && (1.8) \end{aligned}$$

Cauchy çarpımından yararlanırsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{n-k}^p A_k^r \right) x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^{p+r+1}) x^n, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (A_{n-k}^p A_k^r) &= A_n^{p+r+1} && (1.9) \end{aligned}$$

Elde edilir. (1.9) da $r = 0$ alınırsa, $A_k^0 = 1$ olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{n-k}^p = A_n^{p+1}$$

Bulunur. Bu son eşitlikte $p = r - 1$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} = 1 \quad (1.10)$$

olur. (C, r) Cesaro metodunda

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} \quad (0 \leq k \leq n)$$

olur. Hipotezden dolayı $a_{nk} \geq 0$ olacağından (1.10) gereğince,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} = 1 \text{ dir.}$$

Bu durumda,

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty, \quad \sum a_{nk} \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty)$$

şartları sağlanmaktadır. Şimdi de $\lim_n a_{nk} = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\binom{n+k}{n} \sim n^k \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

Buna göre,

$$A_{n-k}^{r-1} \rightarrow \frac{(n-k)^{r-1}}{\Gamma(r+1)} \text{ dir. O halde,}$$

$$\begin{aligned} \lim_n a_{nk} &= \lim_n \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} \\ &= \lim \frac{(n-k)^{r-1}}{\Gamma(r)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)}{n^r} = 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Böylece *Toeplitz* şartları sağlanmış olur.

$r = 1$ olursa,

$$\lim_n \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} S_{n-k}}{\binom{n+r}{n}} = s \text{ eşitliği,}$$

$$\lim_n \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} = s \text{ şeklinde girer.}$$

Bu ifade aritmetik ortalama belirtiğine göre (C, r) Cesaro toplama metodu $r = 1$ için aritmetik ortalamadır.

Eğer $r = 0$ alınırsa, $A = (a_{nk})$ matrisi birim matris olur. Yani, (C, r) Cesaro toplama metodu $r = 0$ için adi yakınsaklığa karşılık gelir.

3.2. Nörlund Ortalaması

Tanım 3.2.1. P_n hepsi birden sıfır olamayan pozitif sayıların bir dizisi ve

$$(P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n) \text{ olmak üzere,}$$

$$t_n = \frac{p_n S_1 + \dots + p_n S_n}{P_n} \text{ dönüşümüne } (N, P_n) \text{ Nörlund Ortalaması denir.}$$

(N, P_n) metodunun matrisi ise,

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{n-k} + 1}{P_n}, & (k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem: (N, P_n) Nörlund ortalamasının regüler olması için gerekli ve yeterli şart;

$$\frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \text{ olmasıdır.}$$

İspat:

$$\forall k \text{ için,} \quad 0 \leq a_{nk} = \frac{p_{n-k} + 1}{P_n} \leq \frac{p_{n-k} + 1}{p_{n-k} + 1} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty), \text{ yine } \forall k \text{ için,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \frac{p_n}{P_n} + \dots + \frac{p_1}{P_n} = 1$$

olur. Bu da *Toeplitz* Teoreminin 2 şartını sağlar. O halde, (N, P_n) ortalaması Regülerdir.

Toeplitz teoreminin 2. şikkından $\forall k$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$$

olduğundan $k = 1$ iken $a_{n1} \rightarrow 0$ olur. Bu da;

$$\frac{p_n}{P_n} = a_{n1} \rightarrow 0 \text{ demektir.}$$

Şimdi bir sonraki teoremin ispatında kullanacağımız bir *lemma* verelim.

Lemma: (Binom Katsayıları)

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{v=0}^n \binom{v+k-1}{k-1}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: k herhangi pozitif sayı olsun. Tümevarım ile sonuca gideceğiz.

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^1 \binom{v+k-1}{k-1} &= \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} \\
&= \frac{(k-1)! + k!}{(k-1)!} \\
&= \frac{k(k+1)(k-1)!}{(k)!} \\
&= \frac{(k+1)!}{(k)!} \\
&= \binom{k+1}{k}
\end{aligned}$$

olur. Sonucun n için doğru olduğunu kabul edersek,

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^{n+1} \binom{v+k-1}{k-1} &= \binom{n+k}{k-1} + \binom{n+k}{k} \\
&= \frac{(n+k)! + k!}{(n+1)! k!} + \frac{(n+k)!}{n! k!} \\
&= \frac{(n+k+1) \cdot (n+k)!}{(n+1)! k!} + \frac{(n+k)!}{n! k!} \\
&= \binom{n+1+k}{k} \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Teorem: (C, k) matrisi her k için *regüler* bir *Nörlund* Ortalamasıdır.

İspat:

$$P_n = \binom{n+k-1}{k-1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

alalım. Yukarıdaki Lemma gereği, (C, k) bir *Nörlund* Ortalamasıdır. *Regülerlik* için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n-1+k}{k-1}}{\binom{n+k}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n+k} = 0$$

olur.

3.3. Riesz Ortalaması

Tanım 3.3.1. (P_n) hepsi birden sıfır olamayan pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$p_1 > 0$ ve $P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ olmak üzere,

$$t_n = \frac{p_1 s_1 + \dots + p_n s_n}{P_n}$$

dönüşümüne (R, P_n) Riesz ortalaması denir. Riesz metodun matrisi ise;

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_n}{P_n}, & (k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

ile ifade edilir.

Teorem: (R, P_n) Riesz ortalamasının Regüler olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $P_n \rightarrow \infty$ olmalıdır.

İspat: Her Riesz Ortalaması için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

olur ki buda her Riesz Ortalamasının bir limitleme metodu olduğunu belirtir. Ayrıca eğer, $P_n \rightarrow \infty$ ise, $\forall k$ için $n \rightarrow \infty$ olduğunda,

$$a_{nk} = \frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0$$

olur ve dolayısıyla metot *Regülerdir*.

Tersine olarak eğer, (R, P_n) ortalaması *Regüler* ve $P_n \neq 0$ ise $n \rightarrow \infty$ için,

$$a_{nk} = \frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0$$

elde ederiz ki bu $P_n \rightarrow \infty$ olduğunu ifade eder.

Cesaro Ortalaması gerek *Nörlund* ve gerekse *Riesz* Ortalamalarının her k için $p_k = 1$ alınması halinde elde edilen en önemli özel haldir.

En basit dönüşüm olan özdeşlik dönüşümü sadece bir *Nörlund* Ortalaması olarak ifade edilir. Bunu elde etmek için, $p_1 = 1$ ve $p_k = 0$ ($k \geq 2$) almak gerekir.

$$p_1 = p_2 = 1, \quad p_k = 0 \quad (k \geq 3) \text{ olursa,}$$

$t_1 = s_1, t_k = 1/2 (s_{k-1} + s_k), \quad (k \geq 2)$ dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm ise bir *Riesz Ortalaması* olarak ifade edilemez.

3.4. Hausdorff Ortalaması

Tanım 3.4.1.

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^n \binom{n}{k}, & (k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}$$

$\delta = \delta_{nk}, \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots)$ olarak tanımlanan metoda Hausdorff metodu denir.

Tanım 3.4.2. μ_n -ler $(0, 1)$ aralığında sınırlı salımlı bir $\phi(x)$ momentleri yani,

$$\mu_n = \int_0^1 x^n d\phi(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ise, (μ_n) **dizisine bir moment dizisi** adı verilir.

x^0 fonksiyonu $x=0$ da sürekli olarak alınmıştır. Yani, $x^0 = 1$ ve $\phi(0) = 0$ ve

$$\mu_0 = \int_0^1 d\phi(x) = 1$$

olduğu kabul edilir. Moment dizisi olma şartları $\phi(1) = 1$ sonucunu gerektirir.

Tanım 3.4.3. $\mu_{nk} = \mu_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ ve $\mu_{nk} = 0 \quad (n \neq k)$ olmak üzere,

$\mu = (\mu_{nk})$ köşegensel bir matris olsun. Eğer, (μ_n) bir moment dizi ise,

$A = \delta\mu\delta$ matrisine bir *Hausdorff* matrisi adı verilir. $A = (a_{nk})$ Hausdorff Matrisinin elemanları,

$$a_{nk} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{nm} \cdot \left[\sum_{j=0}^{\infty} \mu_{mj} \cdot \delta_{jk} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{nm} \cdot \mu_m \delta_{mk} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ile verilir. Buna göre,

$$a_{nk} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{nm} \mu_m \delta_{mk} , & (k \leq n) \\ 0, & (k > n) \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Sonuç olarak ($k \leq n$ ise,

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \int_0^1 \sum_{m=k}^n \delta_{nm} x^m \delta_{mk} d\phi(x) = \int_0^1 \sum_{m=k}^n (-1)^{m+n} \binom{n}{m} x^m d\phi(x) \\ &= \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)} d\phi(x) \quad \text{olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Teorem: Hausdorff matrisi ile tanımlanan limitleme metodunun *Regüler* olması için gerek ve yeter şart $\phi(x)$ in başlangıç noktasında sürekli olmasıdır.

İspat: Her moment dizi için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{(n-k)} d\phi(x) \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)} d\phi(x) \\ &= \int_0^1 d\phi(x) = 1 \quad \text{olur. Yani} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1 \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{(n-k)} d\phi(x) \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)} |d\phi(x)| \\ &= \int_0^1 |d\phi(x)| \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre, $A = (a_{nk})$ 'nin Regüler olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ olmalıdır.}$$

Eğer $\phi(x)$ başlangıç noktasında sürekli ise,

$$\begin{aligned} |a_{nk}| &\leq \int_0^1 x^k (1-x)^{(n-k)} |d\phi(x)| \quad \text{dir. } \forall \xi \text{ için } 0 < \xi < 1, \\ &\leq \int_0^\xi |d\phi(x)| + \binom{n}{k} (1-\xi)^{n-k} \int_0^1 |d\phi(x)| \\ &= \int_0^\xi |d\phi(x)| + 0(1), \quad (n \rightarrow \infty) \text{ yazılır. Buradan,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{nk}| &= 0 \quad \text{olduğu anlaşılır.} \end{aligned}$$

Diğer yandan, $\forall \xi$ için $0 < \xi < 1$,

$$\begin{aligned} |a_{nk}| &\geq \left| \int_0^\xi d\phi(x) \right| - \left| \int_\xi^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)} d\phi(x) \right| \\ &\geq \left| \int_0^\xi d\phi(x) \right| - \binom{n}{k} x^k (1-\xi)^{(n-k)} \int_0^1 |d\phi(x)| \\ &= \left| \int_0^\xi d\phi(x) \right| - 0(1), \quad n \rightarrow \infty \text{ dir.} \end{aligned}$$

Eğer,

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{nk}| = 0$ ve $\phi(0) = 0$ ise, buradan $\phi(x)$ 'in başlangıç noktasında sürekli olduğu ortaya çıkar. Bu ise ispatı tamamlar.

3.5. Abel Metodu

Tanım 3.5.1. z kompleks bir değişken olsun. Eğer birim çemberin $z = 1$ den geçen iki kirişin arasında kalan herhangi bir yol boyunca $z \rightarrow 1$ iken,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = s$$

oluyorsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Serisi s değerine *Abel* metodu yardımıyla limitlenebilir denir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(\text{Abel})$$

yazılır.

Örnek 5:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

(Abel) yazılabilir. Çünkü $|z| < 1$ için,

$$f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \frac{1}{1+z} \text{ olur}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

oluyor.

Örnek 6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n = -\frac{1}{4} \text{ Abel dir.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^n = z \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$= z \frac{d}{dz} \frac{1}{(1+z)} = z \cdot \left(-\frac{1}{(1+z)^2} \right) = \frac{-z}{(1+z)^2}, \quad |z| < 1$$

olur. Basit bir şekilde görebiliriz ki;

$$z \rightarrow 1 \text{ iken } \frac{-z}{(1+z)^2} \rightarrow -\frac{1}{4} \text{ oluyor.}$$

O halde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n = -\frac{1}{4} \text{ Abel dir.}$$

Teorem: Abel metodu *regülerdir*.

İspat:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak olsun.

$S_{n,p} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_p$ olsun. Bu durumda,

$|S_{n,p}| < \varepsilon$, $(n_0 \leq n < p)$ olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır. Bu durum;

$$\begin{aligned} \sum_{v=n}^m a_v z^v &= S_{n,n} z^n + (S_{n,n+1} - S_{n,n}) z^{n+1} + \dots + (S_{n,m} - S_{n,m-1}) z^m \\ &= S_{n,n} (z^n - z^{n+1}) + \dots + S_{n,n-1} (z^{m-1} - z^m) + S_{n,m} z^m \end{aligned}$$

sonucunu gerektirir. Dolayısıyla, $n \geq n_0$ için;

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v=n}^m a_v z^v \right| &\leq \varepsilon \left\{ \sum_{v=n}^{m-1} |z^v - z^{v+1}| + |z^m| \right\} \\ &< \varepsilon \left\{ |1-z| \sum_{v=0}^{\infty} |z^v| + 1 \right\} = \varepsilon \left\{ \frac{|1-z|}{1-|z|} + 1 \right\} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu ise;

$$|z| < 1 \text{ ve } \frac{|1-z|}{1-|z|} < k \quad (1.11)$$

olduğunda,

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_n z^n$$

serisinin Cauchy bakımında düzgün yakınsak olmasını gerektirir. Seri $z = 1$ noktasında yakınsak olduğundan, bu nokta düzgün yakınsaklık dâhildir ki, bu bölge (1.11) ve $|z| \leq 1$ ile tanımlanmıştı. Bu şartın tanımında belirlenen doğrultuda gerçek olduğu açıkça görülmektedir.

Eğer z ve $z + h$ ($z = 1$ 'de içeren) açısız bölgede iki nokta ise,

$$S_n(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v, \quad r_n(z) = \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v z^v$$

ve

$$s(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \text{ dir. Buradan,}$$

$$\begin{aligned} |s(z+h) - S(z)| &= |S_n(z+h) - S_n(z) + r_n(z+h) - r_n(z)| \\ &\leq |S_n(z+h) - S_n(z)| + |r_n(z+h) - r_n(z)| \end{aligned}$$

bulunur. $\forall n$ için, $S_n(z)$ bir polomdur dolayısıyla, z nin sürekli bir fonksiyonudur. Sabit bir ξ 'a karşılık, düzgün yakınsaklık bölgesinde her z ve $z + h$ için,

$$|r_n(z+h)| < \varepsilon, \quad |r_n(z)| < \varepsilon, \quad (n > n_0)$$

olacak şekilde bir n_0 seçilebilir. Sabit bir ($n > n_0$) ve sabit bir z için de,

$$|S_n(z+h) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (|h| < \delta)$$

olacak şekilde bir δ seçilebiliriz. Bu eşitsizlikleri birleştirirsek,

$$|S(z+h) - S(z)| < 3\varepsilon, \quad (|h| < \delta)$$

bulunur. Buda $S(z)$ 'nin $z = 1$ noktasını içeren açısız bölgede sürekli olduğunu ispatlar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

serilerinin her ikisi de birim çember içinde mutlak yakınsak olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

olur. Buna göre limitleme metodu,

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

olarak tanımlanır.



4.BULGU VE TANIMLAR

DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

$A = (a_{nk}); (n, k = 1, 2, \dots)$ satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks veya reel terimli matris olsun. X, Y : S -uzayında reel alt kümeleri olan $\ell_1, \ell_\infty, c, c_0, \ell_p$ bir dizi uzayında herhangi ikisini temsil etsin. Buradaki her bir küme C kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzay olduğundan,

$\forall x = (x_k) \in X$ dizisi, $X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ vektörel fonksiyon olarak yazılabilir. Buna göre A

matrisi ile X matrisinin çarpımı kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Eşitliği elde edilir. Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için yukarıdaki toplamların varlığını kabul ediyoruz.

Yani, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisinin yakınsak olduğunu kabul ediyoruz. Eğer her bir terimi bir sonsuz seri olan $Ax = (A_n(x))$ dizisi Y dizi uzayının bir elemanı ise, $A = (a_{nk})$ matrisine X dizi uzayından Y dizi uzayına içine bir dönüşüm denir ve $A \in (X, Y)$ şeklinde gösterilir. Bu dönüşüm lineerdir.

$A(x)$ dizisinin genel terimi;

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nk}x_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \text{ serisidir. Bunu,}$$

$$A(x) = (A_n(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

şeklinde ifade edeceğiz.

Dizilerle matris dönüşümleri arasındaki ilgi toplanabilme teorisiyle bazı özel sonuçlarla doğmuştur. Bu durumu *Euler'in* verdiği şu klasik örnekle biraz daha açıklayalım:

Euler;

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (|x| < 1)$$

ifadesinde $x=1$ yazarak,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

sonucunu elde etti.

$$\sum_n (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

serisi veya bunun kısmi toplamlar dizisi olan $s = S_n = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi Cauchy anlamında ıraksaktır. Bu durumda $s = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ dizisinin limiti $\frac{1}{2}$ olamaz. Buna göre $s -$ dizisinin genel terimi

$$S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

olduğundan, dizinin genel terimlerinin 0 ile 1 aralığında salınması,

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \text{ aritmetik ortalamayı verir. Böylece;}$$

$$\begin{aligned}
t_n &= \frac{1 + (-1)^0 + 1 + (-1)^1 + \cdots + 1 + (-1)^n}{2(n+1)} \\
&= \frac{(n+1) + (1 - 1 + \cdots (-1)^n)}{2(n+1)} = \frac{(n+1) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + (-1)^n}{n+1} \\
\lim_n t_n &= \lim_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + (-1)^n}{n+1} \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki işleme dikkat edilirse;

$t = t_n$ dizisi;

$$s_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

olmak üzere, $s_n = s$ dizisinin

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olarak tanımlanmış $A = (a_{nk})$ matrisiyle, başta tanımlanan biçimde bir dönüşümden ibaret olduğu anlaşılmaktadır. Yine, başta yazılan verilere göre,

$$s = s_n \in \ell_\infty, (A_n(x)) \in c$$

olduğundan, özel bir A matrisi ile sınırlı olan bir diziyi yakınsak bir diziye dönüştürmüş olduk. Amacımız;

$x = (x_k) \in X$ verildiğinde $A(x) \in Y$ olması için A matrisi üzerinde kurulacak gerek ve yeter şartları araştırmaktır. Bunun için ilgili temel teorem ve sonuçlarını vereceğiz. Daha açıklık kazanması bakımından konuyu diziden-diziye, seriden- diziye ve seriden-seriye dönüşümler olmak üzere üç başlıkta inceleyeceğiz.

4.1.Diziden-Diziye Dönüşüm

Reel veya *kompleks* terimli sosuz bir $A = (a_{nk})$ matrisi ve bir (S_n) dizisi verilsin. Bu takdirde (t_n) dizisi,

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1) \quad \text{olarak tanımlansın.}$$

$(t_n) = A((s_n))$ dizisine (s_n) dizisinin A-dönüşüm dizisi denir ve A yada diziden-diziye dönüşüm adı verilir.

Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$$

ise (s_n) dizisi t'ye A-toplanabilir denir ve $A - \lim s_n = t$ ile gösterilir. Bu dönüşümün mevcut olması için (2.1)'in sağındaki serinin her n için yakınsak olması gerekir. Bu durumda A, (s_n) dizisine uygulanabilir denir. A nın bütün yakınsak dizilerine uygulanabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.2)$$

olmasıdır.

Diziden-diziye dönüşüm konusunda ilk önemli çalışma *O.Toeplitz* tarafından 1911 yılında yapılmıştır.

Teorem (*Banach – Steinhaus* Teoremi):

Eğer bir X Banach uzayından normlu Y uzayı içine sınırlı lineer dönüşümlerin bir dizisi $A_n(x)$ ve X üzerinde,

$$\limsup_n \|A_n(x)\| < \infty \quad (2.3)$$

ise, bu taktirde;

$$\sup_n \|A_n(x)\| < \infty$$

olur. Yani, $\|A\|$ normlar dizisi sınırlıdır.

Teorem: $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin.

$$A \in B(c_0, c_0) \text{ ve } \|A\| = M \Leftrightarrow \begin{cases} (i) a_{nk} \rightarrow 0, & (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit}) \\ (ii) M = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \end{cases}$$

olmasıdır.

İspat: Önce $A \in B(c_0, c_0)$ olduğunu gösterelim. $x = (x_k) \in c_0$ olsun. $x = \emptyset = (0, 0, \dots)$ ise, $\forall n \in N$ için,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k = 0$$

olur ki bu durum açıktır. Şimdi $x \neq \emptyset$ olsun. Hipotez gereği,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

serisi $\forall n \in N$ için mutlak yakınsaktır. Çünkü $x_k \rightarrow 0$ olduğundan $\forall \epsilon \in N$ için $|x_k| \leq H$ için,

$$\sum_k |a_{nk}| < \infty \text{ olur.}$$

Diğer yandan $\forall x \in c_0$ için $\|x\| = \max |x_k|$ ise, $|x_k| \leq \|x\|$ olduğundan, $m \geq 1$ için,

$$|A_n(x)| \leq \sum_{k=1}^m |a_{nk}| + M \cdot \max_{k \geq m+1} |x_k| \text{ olur. } (x_k) \in c_0 \text{ olduğundan yeteri kadar}$$

büyük m için,

$$\max_{k \geq m+1} |x_k| < \frac{\epsilon}{2m} \text{ ve } a_{nk} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, \quad k \text{ sabit})$$

olduğundan yeteri kadar büyük n için,

$$\sum_{k=1}^m |a_{nk}| < \frac{\epsilon}{2\|x\|}$$

yazılabilir. Demek ki, m yi şartlara uygun seçerek yeteri kadar büyük n ler için

$$|A_n(x)| \leq \|x\| \cdot \frac{\epsilon}{2\|x\|} + M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$$

olur. O halde $(A_n(x)) \in c_0$ dır. A lineerdir çünkü $\forall x, y \in c_0$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$A(\lambda x + \mu y) = \left(\sum_k a_{nk} (\lambda x_k + \mu y_k) \right) = \lambda \left(\sum_k a_{nk} x_k \right) + \mu \left(\sum_k a_{nk} y_k \right)$$

$$= \lambda A(x) + \mu A(y) \text{ olur.}$$

Şimdi de A 'nın sınırlı olduğunu görelim:

$\forall x = (x_k) \in c_0$ için,

$\|x\| = \sup|x_k| = \max|x_k|$ ve $(A_n(x)) \in c_0$ olduğuna göre;

$$\|A(x)\| = \sup_n |A_n(x)| = \sup_n \left| \sum_k a_{nk} x_k \right| \leq M \|x\| \text{ olur.}$$

Şu halde;

$$\|A(x)\| \leq M \|x\| \Rightarrow A \text{ sınırlıdır.}$$

$A: c_0 \rightarrow c_0$ lineer ve sınırlı olduğundan $A \in B(c_0, c_0)$ dir.

Şimdi de; $\|A\| = M$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \neq \emptyset} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq \emptyset} \frac{M \|x\|}{\|x\|} = M \\ &\Rightarrow \|A\| \leq M \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow M = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists m = m(\epsilon) \text{ öyleki, } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}| > m - \frac{\epsilon}{2} \text{ olur.}$$

Diğer taraftan,

$$\sum_k |a_{mk}| < \infty \text{ ise, } P = P(\epsilon) \text{ öyleki,}$$

$$\sum_{k>p} |a_{mk}| < \frac{\epsilon}{2}, \quad - \sum_{k>p} |a_{mk}| > \frac{-\epsilon}{2} \text{ dir.}$$

Böylece,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}| - \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_{mk}| > M - \epsilon,$$

ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}| > M - \epsilon$$

elde edilir. Şimdi;

$$x_k = \begin{cases} \text{sgn} a_{mk} , & 1 \leq k \leq p \\ 0 & , k > p \end{cases}$$

olacak biçimde $x \in (x_k) \in c_0$ dizisini tanımlayalım. $\|x\| = 1$ dir. Buna göre,

$$|A_m(x)| = \left| \sum_{k=1}^p a_{mk} x_k + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_{mk} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^p a_{mk} \text{sgn} a_{mk} \right| = \sum_{k=1}^p |a_{mk}|$$

ve bu sonuç neticesinde,

$|A_m(x)| > M - \epsilon$ elde edilir. $\|A_m(x)\| = |A_m(x)|$ olduğundan,

$\|A_m(x)\| > M - \epsilon$ olur. Sonuç olarak;

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_n |A_n(x)| \geq |A_m(x)| > M - \epsilon, \quad (\|x\| = 1) \text{ ve}$$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \geq M \quad (2.5)$$

bulunur. (2.4) ve (2.5) den $\|A\| = M$ dir.

$\Rightarrow: e_1: (1, 0, 0, 0, \dots), e_2: (0, 1, 0, 0, \dots), \dots$ olmak üzere, (e_k) dizisi c_0 için bir bazdır.

O halde;

$\forall x \in c_0$ için,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

yazılabilir. A nın lineer ve sürekli olması nedeniyle,

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k A(e_k) \text{ olur.}$$

$\forall k \in N$ için, $e_k \in c_0$ olduğundan hipotez gereğince, $A(e_k) \in c_0$ dir.

$A(e_k), (a_k^1, a_k^2, \dots) \in c_0, (k = 1, 2, \dots)$ şeklinde bir dizi olduğuna göre,

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k A(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (a_k^n), \quad n \in N \text{ olarak yazılabilir.}$$

Buna göre, bu seri dizisinin genel terimi,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k \text{ olur ki gösterilmek istenen de bu idi.}$$

Şimdi de teoremden geçen (i) ve (ii) nin ispatını yapalım.

$\forall k \in N$ için $e_k \in c_0$ olduğuna göre, hipotez gereğince $A(e_k) \in c_0$ yani,

$$(a_k^1, a_k^2, \dots) = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}, \dots) \in c_0 \text{ olacağından,}$$

$a_{nk} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit})$ dir. Bu ise, (i) nin ispatıdır.

$$\forall x \in c_0, \quad A(x) \in c_0 \text{ ve } \|A(x)\| = \max |A_n(x)|,$$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \text{ olduğundan, } \forall k \in N \text{ için}$$

$$|A_n(x)| \leq \|A(x)\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \text{ olur, } A_n: c_0 \rightarrow c_0 \text{ fonksiyoneli sınırlıdır.}$$

Şu durumda; $A_n \in c_0$ dir.

$$\lim_n A_n(x) = 0$$

olduğundan *Banach – Steinhaus* şartları sağlanır. O halde $(\|A_n\|)$ normlar dizisi sınırlıdır. Yani, $\forall n \in N$ için $\|A_n\| \leq H$ olacak şekilde bir H sabiti vardır. Ayrıca,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

olduğuna göre A_n fonksiyonelinin normu,

$$\|A_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \text{ olur. Bu durumda,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq H \text{ olup, } M = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \text{ olur. Böylece } \|A\| = M \text{ olarak bulunur.}$$

Aşağıda *Silverman – Toeplitz* ile *Kojima – Schur* teoremlerinin yalnız ifadesini vereceğiz.

Teorem (Silverman – Toeplitz Teoremi):

$$A \in (c, c; p) \Leftrightarrow \begin{cases} i) \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \\ ii) a_{nk} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit}) \\ iii) \sum_k a_{nk} \rightarrow 1 \ (n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

Teorem (Kojima – Schur Teoremi):

$$A \in (c, c) \Leftrightarrow \begin{cases} i) \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \\ ii) Her bir p \in N için \lim_n \sum_k a_{nk} = a_p \text{ mevcuttur.} \end{cases}$$

Lemma: $\forall n \in N$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| < \infty \text{ ve } \lim_n \sum_k |b_{nk}| = 0 \text{ ise, } \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}|, n'yegöre düzgün yakındır.$$

İspat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \text{ olduğundan,}$$

i) $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon)$ öyle ki $\forall n > n_0(\epsilon)$ için,

$$\sum_{k \geq 1} |b_{nk}| < \epsilon; \forall n \in N \text{ için, } \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| < \infty$$

ii) $1 \leq n \leq n_0(\epsilon)$ olmak üzere, $\exists m = m(n, \epsilon)$ öyle ki,

(i) ve (ii) den;

$\forall n$ için, $\sum_{k \geq m}^{\infty} |b_{nk}|$ kalır. Bu ise $\sum_{k \geq 1}^{\infty} |b_{nk}|$ serisinin n' ye düzgün yakınsadığını gösterir.

Teorem(Schur Teoremi):

$$A: \ell_\infty \rightarrow c, \quad A \in (\ell_\infty, c) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \sum_k |a_{nk}|, n'ye \text{ göre d\u00fczg\u00fcn yak\u00fnsak} \\ (ii) \lim_n a_{nk} \end{cases} \quad \text{mevcut}(k \text{ sabit})$$

İspat: Şartlar gerektirir: $A \in (\ell_\infty, c)$ olsun. Önce (ii) nin gerekliliğini gösterelim.

$A \in (\ell_\infty, c) \Rightarrow \forall x \in \ell_\infty$ için $(A_n(x)) \in c$, özel olarak,

$x = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_\infty$ içinde, $A_n(x) \in c$ olacağından bu dizi için,

$$\lim_n A_n(x) = \lim_n \sum_k a_{nk} x_k = \lim_n a_{np}$$

(mevcut) olur. Burada ki p sabit herhangi bir sayıdır. Şimdi (i) nin gerekliliğini görelim.

$c \subset \ell_\infty$ olduğundan $A \in (\ell_\infty, c) \Rightarrow A \in (c, c)$ dir. Şu halde A aynı zamanda bir $k - \text{matrisidir}$. O halde,

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \text{ dir.}$$

$\lim_n a_{nk}$ mevcut olduğundan ((ii) de göstermiştik.)

$\lim_n a_{nk} = a_k$ diyelim. Buna göre,

$$\sum_k \lim_n |a_{nk}| \leq \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

olduğundan,

$$\sum_k |a_k| < \infty \text{ dir.}$$

$b_{nk} = a_{nk} - a_k$ diyelim. $\lim_n b_{nk}$ (k sabit) mevcut olduğundan ve $\forall n \in N$ için,

$$\sum_k |b_{nk}| = \sum_k |a_{nk} - a_k| \leq \sum_k |a_{nk}| + \sum_k |a_k| < \infty$$

olduğundan $B = (b_{nk})$ da bir $k - \text{matrisidir}$. O halde, $\forall x \in \ell_\infty$ ve $\forall n \in N$ için,

$$\left(\sum_k b_{nk} x_k \right) \in c$$

dir. Şimdi de,

$$\sum_k |b_{nk}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu gösterelim. Farz edelim ki;

$$\lim_n \sum_k |b_{nk}| = b > 0 \text{ olsun. Ayrıca,}$$

$\lim_n \sup \sum_k |b_{nk}| = b > 0$ olsun. (m) pozitif tam sayıların bir alt dizisi,

$\lim_n \sum_k |b_{mk}| = b > 0$ olmak üzere,

$\sum_k |b_{nk}|$ dizisinin bir $\left(\sum_k b_{nk} \right)$ alt dizisi vardır.

$\lim_m \sum_k |b_{mk}| = b$ ve her $k \in N$ için,

$\lim_m b_{mk} = 0$ olduğundan öyle bir $m(1)$ seçebiliriz ki,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} |b_{m(1),k}| - b \right| < \frac{b}{10} \text{ ve } |b_{m(1),k}| < \frac{b}{10} \text{ kalır. Burada,}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{m(1),k}| < \infty \Rightarrow k(1) = 1$ olacak şekilde $k(2) > 1$ seçilirse,

$$\sum_{k=k(2)+1}^{\infty} |b_{m(1),k}| < \frac{b}{10}$$

olur. Yakınsak bir dizinin kalan teoremleri

$$\sum_{k=k(1)+1}^{k(2)} |b_{m(1),k}| = \sum_{k=2}^{k(2)} |b_{m(1),k}|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |b_{m(1),k}| - |b_{m(1),k}| - \sum_{k=k(1)+1}^{\infty} |b_{m(1),k}| \text{ olur. Burada,}$$

$$\left| \sum_{k=2}^{k(2)} |b_{m(1),k}| - b \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} |b_{m(1),k}| - b \right| + |b_{m(1),k}| + \sum_{k=k(2)+1}^{\infty} |b_{m(1),k}|$$

elde edilir. Böylece,

$$\left| \sum_{k=2}^{k(2)} |b_{m(1),k}| - b \right| < \frac{b}{10} + \frac{b}{10} + \frac{b}{10} = \frac{3b}{10}$$

olarak bulunur. Gösterimi kısaltmak adına,

$\sum_{k=p}^q |b_{mk}| = B(m, p, q)$ ile gösterelim. Yine bir $m(\epsilon) > m(1)$ seçebiliriz. Öyleki;

$$|B(m(2), 1, \infty) - b| < \frac{b}{10} \text{ ve } B(m(2), 1, k(2)) < \frac{b}{10} \text{ olur.}$$

Bu takdirde bir $k(3) > k(2)$ kullanabiliriz. Öyle ki;

$$B(m(2), k(3) + 1, \infty) < \frac{b}{10} \text{ olur. Buradan da,}$$

$$|B(m(2), k(2) + 1, k(3) - b) < \frac{3b}{10}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse,

$m(1) < m(2) \dots, 1 = k(1) < k(2) \dots$ bulunur. Öyle ki,

$$B(m(r), 1, k(r) + 1) < \frac{b}{10}$$

$$B(m(r), 1, k(r + 1) + 1, \infty) < \frac{b}{10}$$

$$B(m(r), k(r) + 1, k(r + 1) - b) < \frac{3b}{10}$$

Elde edilir. Şimdi $x \in \ell_{\infty}$ 'u aşağıdaki şekilde tarif edelim.

$$x_k = \begin{cases} 0 & , k = 1 \\ (-1)^r \operatorname{sgn} b_{m(r),k} & , k(r) < k \leq k(r+1) \quad (r = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$x \in \ell_\infty$ için, $\|x\| = \sup |x|$ olduğuna göre bu dizi için $\|x\| = 1$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{m(r),k} x_k - (-1)^r b =$$

$$\sum_{k=1}^{k(r)} b_{m(r),k} x_k + \sum_{k=k(r+1)+1}^{k(r+1)} b_{m(r),k} x_k + \sum_{k=k(r+1)+1}^{\infty} b_{m(r),k} x_k - (-1)^r b$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_{m(r),k} x_k - (-1)^r b \right|$$

$$= \left| (-1)^r \left(\sum_{k=2}^{k(r)} b_{m(r),k} \operatorname{sgn} b_{m(r),k} - (-1)^r b \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=k(r)+1}^{k(r+1)} b_{m(r),k} \operatorname{sgn} b_{m(r),k} + \sum_{k=k(r+1)+1}^{\infty} b_{m(r),k} \operatorname{sgn} b_{m(r),k} \right| - b$$

$$\leq \frac{b}{10} + \frac{3b}{10} + \frac{b}{10} = \frac{b}{2} \text{ olur. Bu eşitlik,}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{m(r),k} x_k \right)$$

nın sınırlı fakat yakınsak olmadığını gösterir. O halde her n doğal sayısı için,

$$(B_n(x)) = \sum_k |b_{mk} x_k|$$

Dizisi yakınsak değildir. Bu ise başta bulduğumuz sonuca aykırıdır. Demek ki,

$$\lim_n \sum_k |b_{nk}| = 0 \text{ dir.}$$

Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_k |b_{nk}| < \infty$$

olduğundan yukarıdaki *Lemma* gereğince,

$$\sum_k |b_{nk}| \text{ serisi } n \text{ ye göre düzgün yakınsaktır.}$$

$$\sum_k |b_{nk}| = \sum_k |b_{nk} + a_k| \text{ ve } \sum_k |a_k| < \infty \text{ olduğu gözönünde bulundurulursa,}$$

$$\sum_k |a_k| \text{ nin düzgün yakınsaklığı ispatlanmış olur.}$$

Şartlar yeterlidir: (i) ve (ii) sağlansın.

$\forall x \in \ell_\infty$ için $|x_k| \leq M$ dir. Buna göre $\forall x \in \ell_\infty$ için,

$$|A_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \leq M \sum_k |a_{nk}| < \infty \text{ dir.}$$

$\sum_k |a_{nk}|$, n 'ye göre düzgün yakınsak olduğundan,

$$\lim_n A_n(x) = \lim_n \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k \lim_n a_{nk} x_k = \sum_k a_k x_k \text{ olur.}$$

Burada $\lim_n a_{nk} = a_k$ dir.

$$\sum_k a_k x_k$$

Serisi mutlak yakınsak olduğundan, bu serinin yakınsak olduğu ise açıktır.

Sonuç:

$$A \in (\ell_\infty, c_0) \Leftrightarrow \sum_k |a_{nk}| \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \text{ dir.}$$

İspat:

$$A \in (\ell_\infty, c_0) \Rightarrow \forall x \in \ell_\infty \text{ için } (A_n(x)) \in c_0 \text{ dir.}$$

Özel olarak $x = (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ sıfır dizisi içinde $(A_n(x)) \in c_0$ dir. Bu arada p 'nci terim 1 dir.

$\lim_n A_n(x) = 0$ olduğundan,

$$\lim_n A_n(x) = \lim_n \sum_k a_{nk} x_k = \lim_n a_{np} = 0 \text{ dir.}$$

A Schur matrisi olduğu için,

$$\sum_k |a_{nk}| \quad n\text{'yegöre düzgün yakınsaktır. O halde,}$$

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = \sum_k \lim_n |a_{nk}| = 0 \text{ dir.}$$

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 0$$

ve $\forall x \in \ell_\infty, \forall x \in N$ için $\exists m = M_x > 0, |x_k| \leq M$ dir. O halde,

$$\lim_n |A_n(x)| \leq \lim_n \sum_k |a_{nk}| |x_k| \leq M \lim_n \sum_k |a_{nk}| = 0$$

ise, $(A_n(x)) \in c_0$ dir. Bu sebeple $A \in (\ell_\infty, c_0)$ dir.

Teorem:

$$A \in (B_v, \ell_\infty) \Leftrightarrow M = \sup_{n,k} |a_{n1} + \dots + a_{nk}| < \infty \text{ dur.}$$

İspat:

$A \in (B_v, \ell_\infty)$ ise, $\forall n \in N$ ve $\forall x = (x_k) \in B_v$ için,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k \quad \text{mevcut ve } |A_n(x)| \leq K_x$$

olacak şekilde bir $K_x > 0$ sabiti vardır. Özel olarak $x=(1, 1, \dots, 1, \dots) \in B_v$ içinde bunlar sağlanacağından bu dizi için,

$$|A_n(x)| = \sum_k |a_{nk}| \leq K_x \quad (\forall n \in N) \text{ olacaktır. Bu ise,}$$

$$\sup_{n,k} \left| \sum_{i=1}^k a_{ni} \right| < \infty \text{ olur ki ispatta istenen de bu idi.}$$

Şart yeterlidir: $x = (x_k) \in B_v$ olsun.

$$S_{nk} = a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nk}$$

olmak üzere *Abel* kısmi toplamına göre,

$$\sum_{k=1}^p a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^p S_{nk}(x_k - x_{k+1}) + S_{np}x_{p+1} \text{ dir. Buradan,}$$

$$\left| \sum_{k=1}^p a_{nk}x_k \right| \leq \sum_{k=1}^p |S_{nk}| |x_k - x_{k+1}| + |S_{np}| |x_{p+1}|$$

bulunur. Hipotez gereğince $\sup_{n,k} |S_{nk}| = M < \infty$ olduğundan,

$$\left| \sum_{k=1}^p a_{nk}x_k \right| \leq M \sum_{k=1}^p |x_k - x_{k+1}| + M|x_{p+1}| \text{ olur.}$$

$B_v \subset c$ olup $\forall x \in B_v$ için,

$$\sum |x_k - x_{k+1}| < \infty \text{ ve } \lim_p |x_p| \text{ mevcut olduğundan,}$$

$$|A_n(x)| = \left| \sum_k a_{nk}x_k \right| \leq H$$

olacak şekilde bir H sabiti bulunabilir. Buradan,

$$\forall x \in B_v \text{ için } (A_n(x)) \in \ell_\infty \text{ dur.}$$

Bu da sonuç olarak $A \in (B_v, \ell_\infty)$ demektir.

Teorem:

$$A \in (B_v, c) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) M = \sup_{n,k} |a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nk}| < \infty \\ (ii) \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad p = (1, 2, \dots) \end{cases}$$

mevcuttur.

İspat:

$A \in (\ell_\infty, \gamma)$ ise, $\forall x \in \ell_\infty$ için,

$A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$ mevcut ve $\sum_k A_n(x)$ yakınsaktır. O halde,

$S_n(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x)$ olmak üzere, $(S_n(x)) \in c$ dir. Halbuki,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=1}^n A_i(x) = \sum_{i=1}^n \sum_k A_{ik}x_k \\ &= \sum_k \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) x_k \\ &= \sum_k b_{nk}x_k = B_n(x) \end{aligned}$$

olduğundan, $(B_n(x)) \in c \Rightarrow B \in (\ell_\infty, c)$ dir.

Şart yeterlidir: $B \in (\ell_\infty, c)$ ise $\forall x \in B \in \ell_\infty$ için,

$$B_n(x) = \sum_k b_{nk}x_k \text{ mevcut ve } (B_n(x)) \in c \text{ dir.}$$

halbuki,

$B_n(x) = S_n(x)$ olduğundan ve kısmi toplamlar dizisi yakınsak olduğundan

$\sum_k A_n(x)$ serisi yakınsaktır. O halde $A \in (\ell_\infty, \gamma)$ dir.

4.2.Seriden-Diziye Dönüşüm

Reel veya kompleks terimli sonsuz bir $B = (b_{n,k})$ matrisi ve bir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisi verilsin. Bu durumda,

$$(t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}a_n, (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

ile tanımlayalım.

$$(t_n) \text{ dizisine } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisinin B-dönüşüm dizisi denir ve B ye de seriden-diziyeye dönüşümü adı verilir. Şayet,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi } t \text{ ye } B - \text{toplabilir olur. Bu dönüşümün olması için;}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} a_n \text{ serisinin } \forall n \in N \text{ yakınsak olması gereklidir. Bu durumda,}$$

$B, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine uygulanabilir denir. B nin bütün yakınsak serilere uygulanması için,

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |b_{n,k} - b_{n,k+1}| < \infty \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.7) \text{ olmalıdır.}$$

Lemma:

$$\sum_k x_k \text{ yakınsak olduğunda } \forall n \in N \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} a_n \text{ serisi de yakınsak ise,}$$

$$\sup_k |b_{nk}| < \infty \text{ olur.}$$

İspat:

Kabul edelim ki $\sup_k |b_{nk}| = \infty$ olsun. Bu takdirde;

$|b_{nk_r}| > r^2 \quad (r \in N)$ olacak şekilde bir (k_r) pozitif tam sayılar dizisi vardır.

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{r^2} \text{Sgn}(b_{nk_r}) & , k = k_r \\ 0 & , k \neq k_r \end{cases}$$

dizisini alalım. Buna göre,

$$\sum_k |x_k| = \sum_r \frac{1}{r^2} < \infty \text{ olur. Bu durumda } \sum_k x_k \text{ yakınsaktır. Buradan,}$$

$$\sum_k b_{nk} x_k = \sum_k b_{nk} \frac{\text{Sgn}(b_{nk_r})}{r^2} = \sum_k |b_{nk_r}| \frac{1}{r^2} > \sum_k (1) = \infty$$

olur ki buda hipoteze aykırıdır. O halde, $\forall n \in N$ için,

$$\sup_k |b_{nk}| < \infty \text{ olur.}$$

Teorem:

$$B \in (\gamma, c) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \sup_n \sum_k |\Delta b_{nk}| < \infty \\ (ii) b_{nk} \rightarrow \beta_k \quad (n \rightarrow \infty, k \text{ sabit}) \end{cases} \text{ mevcuttur.}$$

İspat: Şart gerektir:

$$B \in (\gamma, c) \text{ olsun. } \sum_k x_k \text{ yakınsakise,}$$

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k$$

olmak üzere, $(B_n(x)) \in c$ dir. Özel olarak,

$x = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \gamma$, ($1, p$ inci terimde) içinde limit olduğundan, bu dizi için,

$$\lim_n B_n(x) = \lim_n b_{np}(x) \quad (p \text{ sabit}) \text{ mevcuttur.}$$

Buradan $\lim_n b_{nk}$ var ki bu limit değerini β_k ile gösterirsek;

$$\lim_n b_{np}(x) = \beta_k$$

elde edilir. Buda (ii) nin ispatıdır. Şimdi (i) nin gereğini gösterelim.

$$S_k = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$$

olmak üzere, Abel kısmi toplamına göre,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m b_{nk} x_k &= \sum_{k=1}^{m-1} \Delta b_{nk} S_k + S_m b_{nm}, \quad (\Delta b_{nk} = |b_{n,k} - b_{n,k+1}|) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \Delta b_{nk} (S_k - s) + s \sum_{k=1}^{m-1} \Delta b_{nk} + S_m b_{nm} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \Delta b_{nk} (S_k - s) + s(b_{n1} - b_{nm}) + S_m b_{nm} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$\lim_n S_k = s$ dir. ve $\sum_k x_k$ yakınsaktır olduğundan bu limit vardır.

Hipotez gereğince, $B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}x_k$ yakınsaktır.

Buradan bundan önceki *Lemma* dikkate alınırsa,

$\sup_k |b_{nk}| < \infty$ olur.

$$\sum_{k=1}^m b_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta b_{nk}(S_k - s) + s(b_{n1}) + (S_m - s)b_{nm} \text{ ifadesinde } m \rightarrow \infty$$

alınırsa,

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}x_k = \sum_k \Delta b_{nk}(S_k - s) + sb_{n1} \text{ olarak bulunur.}$$

$\lim_n B_n(x)$ mevcut ve $\lim_n b_{n1} = \beta_1$ olduğundan,

$$\lim_n B_n(x) = \sum_k \Delta b_{nk}(S_k - s) \text{ mevcut olduğu anlaşılır. O halde,}$$

$\sum_k \Delta b_{nk}(S_k - s) \in c$ dir. $(S_k - s) \in c$ olduğundan $B' = (\Delta b_{nk})$ bir k matrisidir.

O halde,

$$\sup_n \sum_k |\Delta b_{nk}| < \infty \text{ dur. Bu ise, (i)nin ispatıdır.}$$

Şart yeterlidir: (i) ve (ii) sağlansın.

$$\sup_n \sum_k |\Delta b_{nk}| < \infty$$

ise, $\forall n \in N$ için;

$$\sum_k |b_{nk} - b_{n,k+1}| < \infty$$

dolayısıyla, $\sum_k b_{nk} - b_{n,k+1}$ serisi yakınsaktır.

$$\lim_m \left(\sum_k (b_{nk} - b_{n,k+1}) \right) = \lim_m (b_{n1} - b_{n,m+1})$$

mevcut olduğundan $\lim_m b_{nm}$ nin de mevcut olduğu anlaşılır.

$$\sum_k x_k \text{ yakınsak ve}$$

$S_k = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$ ve $\lim S_k = s$ olsun. Yukarıdaki yöntem izlenerek;

$$B_n(x) = \sum_k b_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta b_{nk} (S_k - s) + s b_{n1}$$

bulunur. $(S_k - s) \in c_0$ olduğundan $\forall n \in N$ için $|S_k - s| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti vardır

$\forall n \in N$ için (i) den dolayı;

$$\sum_k |\Delta b_{nk}| |S_k - s| \leq K \sum_k |\Delta b_{nk}| < \infty$$

dur. Bu durumda $\forall n \in N$ için,

$$\sum_k \Delta b_{nk} (S_k - s)$$

mutlak yakınsaktır. (ii) den;

$$\lim_n b_{n1} = \beta_1 \text{ olduğuna göre,}$$

$$B_n(x) = \sum_k \Delta b_{nk} (S_k - s) + s b_{n1} \text{ olduğu dikkate alınırsa,}$$

$$\lim_n B_n(x)$$

mevcut olduğu anlaşılır. Buradan da $(B_n(x)) \in c$ olduğu ispatlanmış olur.

$B' = (\Delta b_{nk}) \in (c, c)$ dir. Çünkü $\sup_n \sum_k |\Delta b_{nk}| < \infty$ ve her p sabiti için,

$$\lim_n \sum_{k=p}^{\infty} \Delta b_{nk} = \lim_n (b_{np} - b_{nm}) \text{ olur.}$$

Teorem:

$$B \in (\gamma, c; p) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \sup_n \sum_k |\Delta b_{nk}| < \infty \\ (ii) \lim_n b_{nk} = 1, \quad (k \text{ sabit}) \end{cases}$$

İspat: Şartlar gerektirir: $B \in (\gamma, c; p)$ olsun. Bu durumda

$$\forall x \in A \text{ için } \sum_k x_k \rightarrow s ,$$

$$\lim_n B_n(x) = \lim_n \sum_k b_{nk} x_k = s$$

şartları sağlansın. Özel olarak,

$x = (x_k) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, (1 , p inci terimde) içinde ilgili şartlar sağlanacağından,

$$\sum_k x_k = 1 \text{ olur. Buradan da;}$$

$$\lim_n B_n(x) = \lim_n b_{np} = 1 \text{ olacaktır. O halde,}$$

$$\lim_n b_{np} = 1 \text{ (} p \text{ sabit) dir. Bu da (ii)nin ispatıdır.}$$

Şartlar yeterlidir: (i) ve (ii) sağlansın. (i) den $\forall x \in A$ için

$$\sum_k (b_{nk} - b_{n,k+1})$$

serisi yakınsak ve dolayısıyla,

$$\lim_m \sum_{k=1}^m (b_{nk} - b_{n,k+1}) = \lim_m (b_{n1} - b_{n,m+1}) \text{ mevcut olduğu açıktır.}$$

$$\sum_k x_k = s, \quad S_k = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \text{ olmak üzere,}$$

$$\sum_k b_{nk}x_k = \sum_k \Delta b_{nk}(S_k - s) + sb_{n1} \text{ bulunur. Şimdi,}$$

$$\sum_k \Delta b_{nk}(S_k - s)$$

serisinin n ye düzgün yakınsak olduğunu gösterelim.

$$M = \sup_n \sum_k |\Delta b_{nk}| < \infty \text{ olsun.}$$

$$(S_k - s) \in c_0 \text{ olduğundan } \forall \varepsilon > 0 \text{ için } |S_k - s| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ kalır.}$$

O halde; $\forall x \in N$ için,

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \Delta b_{nk}(S_k - s) \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\Delta b_{nk}| |S_k - s| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

Bulunur. Bu da serinin n' ye düzgün yakınsak olduğu anlamına gelir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \lim_n B_n(x) &= \lim_n \sum_k b_{nk}x_k \\ &= \lim_n \sum_k \Delta b_{nk}(S_k - s) + s \cdot \lim_n b_{n1} \\ &= \sum_k \lim_n \Delta b_{nk}(S_k - s) + s \cdot 1 \\ &= \sum_k \lim (b_{nk} - b_{n,k+1})(S_k - s) + s \\ &= \sum_k (1 - 1)(S_k - s) + s = s \Rightarrow B \in (\gamma, c; p) \end{aligned}$$

olur.

4.3. Seriden-Seriye Dönüşüm

Reel veya *kompleks* terimli sonsuz $C = (c_n, k)$ matrisi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Verilsin bu takdirde (t_n) dizisini,

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

ile tanımlayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \text{ serisine } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Serisine C – dönüşüm serisi denir. Buradaki C ye de seriden-seriye dönüşüm adı verilir. Bu dönüşümün mevcut olması için (2.8) deki ifadenin her n için yakınsak olması gerekir. Bu durumda C ye a_n serisine uygulanabilir denir. C nin bütün yakınsak serilere uygulanabilmesi için gerek ve yeter şart;

$D = (d_{n,k})$ matrisi $(n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots)$ için,

$$c_{1,k} + c_{2,k} + \dots + c_{n,k} = d_{n,k} \quad (2.9)$$

$$c_{1,k} = d_{1,k}, \quad c_{n,k} = d_{n,k} - d_{n-1,k} \quad (2.10)$$

olmak üzere;

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_{n,k} - d_{n-1,k}| < \infty, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.11) \text{ olmalıdır.}$$

Teorem: $A = (a_{nk})$ ve $b = (b_{nk})$ matrisleri arasında

$$b_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ik}$$

bağlantısı mevcut olsun. Bu durumda, $A \in (\gamma, \gamma) \Leftrightarrow B \in (\gamma, c)$ olmalıdır.

İspat:

Şart gerektirir:

$x \in \gamma$ yani, $\sum_k x_k$ yakınsak olsun. $A \in (\gamma, \gamma)$ ise,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

mevcut ve

$$\sum_k A_n(x) = \sum_n \sum_k a_{nk} x_k$$

ifadesi yakınsaktır. Bu serinin kısmi toplamı $S_n(x)$ ise, $S_n(x) \in c$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=1}^n A_i(x) = \sum_{i=1}^n \sum_k a_{ik} x_k = \sum_k \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) x_k \\ &= \sum_k b_{nk} x_k = B_n(x) \Rightarrow (B_n(x)) \in c \Rightarrow B \in (\gamma, c) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Şart yeterdir: $B \in (\gamma, c)$ olsun. Bu taktirde $\forall x \in \gamma$ için,

$$B_n(x) = \sum_k b_{nk} x_k \text{ mevcut ve } (B_n(x)) \in c$$

yani ,

$$\sum_k A_n(x) = \sum_n \sum_k a_{nk} x_k \text{ yakınsaktır. O halde } A \in (\gamma, \gamma) \text{ dir.}$$

Teorem: $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ matrisleri arasında

$$b_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \text{ bağlantısı bulunsun. Bu durumda, } A \in (\gamma, \gamma; p) \Leftrightarrow B \in (\gamma, c; p)$$

olmasıdır.

İspat: Şart gerektirir: $A \in (\gamma, \gamma; p)$ olsun. O halde,

$$\sum_k x_k = s \text{ ise,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = s \text{ dir. Bu çift serinin kısmi toplamlar dizisi,}$$

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) x_k$$

olur. O halde, $\forall x \in (x_k) \in \gamma$ için, $(S_n(x)) \in A$ olup,

$$\sum_k x_k = s \text{ ise,}$$

$\lim_n S_n(x) = s$ dir. Hâlbuki $S_n(x) = B_n(x) \Rightarrow B \in (\gamma, c; p)$ dir.

Şart yeterlidir: $B \in (\gamma, c; p)$ olsun. Bu durumda,

$$B_n(x) = \sum_k b_{nk} x_k$$

mevcut ve

$$\sum_k x_k = s \text{ ise,} \quad \lim_n B_n(x) = s \text{ dir.}$$

halbuki $S_n(x) = B_n(x)$ olduğundan,

$$\lim_n S_n(x) = s \text{ olup,} \quad \sum_n \sum_k a_{nk} x_k = s \text{ dir. O halde } A \in (\gamma, \gamma; p) \text{ dir.}$$

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bir $x \in \ell_\infty$ dizisinin bütün çakışan *Banach limitleri*, x 'e hemen hemen yakınsak dizidir. f , hemen hemen yakınsak dizilerin kümesin olsun. Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f ile, sıfıra yakınsayan hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f_0 ile ifade edilmiş olup bir x dizisinin bir s sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şartın n 'ye göre düzgün olarak,

$n = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+m}}{m + 1} = s$$

olduğu ispatlandı.

KAYNAKÇA

- Altın, Y., “Kuvvetli Cesaro Toplanabilirlik”, *M.Ü. Fen Bilimler Dergisi*, Sayı 2, 1995, s. 1998-2003.
- Çakallı, H. “Topolojik Vektör Uzaylarında Toplanabilme”, *Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi*, Özel Sayı 2, 1985, s. 105-114.
- Hardy, G.H., *Divangert Series*, Oxford, 1949.
- Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, Hafner Publishing Company, 1964.
- Maddox, I.J., *Elements of Fonctional Analysis*, Cambridge Üniversitesi Press, 1970, Chapter 7.
- Petersen, G.M., *Reguler Matrix Transformations*, Mc Graw-Hill Pupliching Comp. Ltd., 1966.
- Vermes, P., “Series-to Series Transformations and Analytic Continuation by Matrix Methads”, *Amer. J.Math.*, 1949, 72, s. 541-562.
- Banach, S., *Théorie Des Óperations Linéaires*. Warsaw. 1932.
- Maddox, I.J., *Elements of Functional Analysis*, Cambridge Universtiy Press, London, 1970.
- Lorentz, G. G., “A Contribution to the Theory of Divergent Sequences”. *Acta Math.*, 1948, 80, s. 167-190.
- Das, G., Mishra, S. K., “Absolute Almost Convergence With An Index”. *Rend. Mat.* 1988. Appl. (7), 8(4), s. 501-510.
- Das, G., Kuttner, B., Nanda, S., “Some Sequence Spaces And Absolute Almost Convergence”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1984, 283(2): 729-739.
- Kaya, M., *Mutlak Hemen Hemen Yakınsaklık ve Mutlak Hemen Hemen Toplanabilme*, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Van 2009.