T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİSER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Kumsal ATLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Şubat-2021

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Kumsal ATLI tarafından yapılan "Riser Denkleminin Çözümlerinin Patlaması" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Prof.Dr. Şevket GÜR

Üye : Doç.Dr. Halis YILMAZ

Üye : Doç.Dr. Erhan PİŞKİN

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 26/02/2021

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösterip gösterdiği sabırla destek olan, akademik bilgileri ve tecrübesi ile tezimin hazırlanmasında yardımcı olan ayrıca bana her türlü destek ve olanağı sağlayan, çok değerli ve kıymetli hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Erhan PİŞKİN'e en içten duygularımla saygı, hürmet ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan yakın arkadaşım Ece AYDENİZ'e, yardımları ve desteğinden dolayı Hazal YÜKSEKKAYA'ya ve bu süre zarfında gösterdiği sabır, her türlü yardım ve desteği için ve de üzerimde olan çokça emeklerinden dolayı özellikle Nazlı IRKIL'a sevgilerimi ve teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca gösterdikleri sabır için en kıymetlim annem ve aileme emeklerinden dolayı sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım, rahmetli babama minnetle.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

RİSER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kumsal ATLI

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2021

Bu tezin ilk bölümünde fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan diferansiyel denklemlere kısaca değinilmiş ve çözümlerin patlaması ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde riser problemlerinin çözümlerin patlaması ile ilgili yapılan çalışmalar ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, lemma, teorem ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm üç kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda zayıf sönüm terimli riser denkleminin çözümlerinin patlaması, ikinci kısımda logaritmik kaynak terim içeren riser denkleminin çözümlerinin patlaması, üçüncü kısımda ise güçlü sönüm terimli riser denkleminin çözümlerinin patlaması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zayıf sönüm terim, Güçlü sönüm terim, Başlangıç enerjisi, Patlama, Riser denklemi, Logaritmik kaynak terim,

ABSTRACT

BLOW UP OF SOLUTION OF THE RISER EQUATION

MASTER THESIS

Kumsal ATLI

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2021

In the first chapter of this thesis, differential equations emerging in applied sciences, such as engineering and science, are briefly dealt with, and the basic information regarding blow up of solutions is given.

In the second chapter, developments of blow up of solutions of riser equation are investigated.

In the third chapter, basic definitions, lemma, theorems, inequalities that will be used throughout the thesis are given.

In the fourth chapter is composed of three sections. In the first section, blow up of solutions of riser equation with weak damping terms are studied. In the second section, blow up of solutions of riser equation logarithmic source terms involving are studied. In the third section, blow up of solutions of riser equation with strong damping terms are studied.

Keywords: Weak damping term, Strong damping term, Initial Energy, Blow up, Riser equation, Logarithmic source term.

KISALTMA VE SİMGELER

u_t	: Zayıf Sönüm Terimi
u_{xxt}	: Güçlü Sönüm Terimi
C(R)	: Sürekli Fonksiyon Uzayı

1. GİRİŞ

Yaşadığımız bilim ve teknoloji çağında görülen değişim ve gelişmeler hızla ilerlemektedir. Bu değişim ve gelişmelere ayak uydurmak, karşılaştığımız problemleri çözmek, bu değişim ve gelişmeleri günlük hayata transfer etmek için matematik önemli bir role sahiptir. Matematiği günlük hayata transfer etmenin en etkili yollarından biri matematiksel modellemelerdir. Matematiksel modelleme, gerçek hayat problemlerinin matematiksel terimlerle ifade edilmesidir [Cheng 2001]. Matematiksel modelleme süreci, gerçek hayat problemlerinin çözümlerinin araştırılması için matematiksel bir probleme dönüştürülmesiyle başlamaktadır. Elde edilen problem matematiksel yöntemle çözülmekte ve oluşturulan matematiksel çözümler gerçek hayata uyarlanıp yorumlanmaktadır.

Modellemelerden elde edilen problemler fizik, mühendislik, kimya, biyoloji, bilgisayar, ekonomi gibi bir çok alanla ilgili olabilmektedir. Bu problemler adi diferansiyel denklemler veya kısmi diferansiyel denklemler şeklinde karşımıza çıkabilmektedir. Elde edilen bu denklemlerin çözümü çoğu zaman zor ve karmaşık olabilmektedir. Bu nedenle, denklemleri başlangıç ve sınır koşullarıyla sınırlandırarak, iyi tanımlı bir çözüm bulabilmek için öncelikle çözümün varlığı, varsa eğer çözümün tekliği ve başlangıç verilerine olan bağımlılığı araştırılır. Elde edilen çözümün varlığı ve tekliği, her ne kadar çözüm tam olarak bilinmese de çözüme yönelik bir fikre sahip olmamızı sağlar.

Matematiksel disiplinler içerisinde diferansiyel denklemler teorisi en önemli teoridir [Myint-U ve Debnath 2007]. Genelde, kısmi diferansiyel denklemler çoğu fiziksel teoremlerde karşımıza çıkmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için birden fazla yöntem vardır ve her yöntem belirli bir denklem türüne uygulanabilir. Dolayısıyla denklemi çözerken veya çözmeden önce denklemi tam olarak analiz etmek gerekir.

Karşımıza çıkan temel teorik soru, denklemin ve ek koşullar verilerek elde edilen problemin iyi konulmuş olup olmadığıdır. Fransız matematikçi Jacques Hadamard' a (1865-1963) göre bir problem aşağıdaki koşulları sağlarsa iyi konulmuştur.

I) Varlık: problem bir çözüme sahip olmalı,

II) Teklik: problemin çözümü tek olmalı,

III) Kararlılık: başlangıç ve/veya sınır koşullarındaki küçük bir değişiklik çözümde küçük bir değişikliğe sebep olmalıdır.

Eğer yukarıdaki koşulların bir ya da daha fazlası yoksa problemin kötü konulmuş olduğunu söyleyebiliriz.

Bunun için bir örnek verelim:

$$u_t + u_{xx} = 0$$

denkleminin

$$u_1(x,0) = 0$$

başlangıç koşulunu sağlayan tek çözümü

$$u_1(x,t) = 0$$

dır. Başlangıç koşulu

$$u_2(x,0) = \frac{\sin(nx)}{10^{50}}$$

olarak alınırsa, çözüm

$$u_2(x,t) = \frac{e^{n^2 t}\sin(nx)}{10^{50}}$$

elde edilir. Yukarıda görüldüğü üzere başlangıç verilerinde küçük

$$|u_1(x,0) - u_2(x,0)| = \frac{\sin(nx)}{10^{50}}$$

bir değişiklik yapıldığında, çözümde

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| = \left|\frac{e^{n^2 t}\sin(nx)}{10^{50}}\right|$$

$$n \to \infty \text{ için } \left|\frac{e^{n^2 t}\sin(nx)}{10^{50}}\right| \to \infty$$

büyük değişikliğe yol açmaktadır. Dolayısıyla verilen problem iyi konulmuş değildir [Pişkin 2018].

Yapılan çalışmalara göre, lineer olmayan diferansiyel denklemler lineer olan denklemlere oranla gerçek dünyayla daha çok bağlantılı olduğu için elde edilen matematiksel modellemelerin çoğu lineer olmayan diferansiyel denklemlerle olur [Pinchover ve Rubinstenin 2005]. Bazı diferansiyel denklemlerde, zamanın bazı sonlu $T > 0$ zamanına yaklaştığında, değişkenler sonsuza gider. Değişkenlerin sonsuz büyümesinden dolayı da çözümler global olarak yok olur. Bu olaya blow up (çözümlerin patlaması) veya global çözümlerin yokluğu denilmektedir. Blow up latincede patlama anlamına gelir. Patlama konusu özellikle 1960' lı yıllarda; Kaplan (1963), Friedman (1965) ve Fujita (1966) tarafından bu konuda genel bir yaklaşım verildikten sonra zamanla daha kapsamlı çalışılmıştır.

Bu çalışmamızda lineer olmayan riser probleminin patlamasını çalıştık. Riser, deniz yüzeyindeki bir gemi veya platformdan deniz tabanındaki bir kaynağa uzanan, açık denizlerde sondaj işlemlerinde kullanılan uzun ince dikey bir borudur [Köhl 1993]. Dalga, akıntı, yüzen platform veya gemi hareketinin borulara değmesiyle oluşan titreşimlerin sonucunda dördüncü dereceden kısmi türevli hareket denklemi ortaya çıkmaktadır. Bu denklemlere Riser dalga denklemleri denir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde esas amacımız aşağıdaki

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xxt} + 2\beta u_{xxxx} - 2\left[(ax+b)\, u_x\right]_x \\ +\frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xxx} - \left[(ax+b)\, u_x^3\right]_x - \beta\left(u_{xx}^2 u_x\right) = f(u) \end{cases}$$

güçlü sönüm terim içeren doğrusal olmayan riser dalga denkleminin çözümlerinin sonlu zamanda patlaması için yeterli koşulları ifade etmektir.

Sun (1986)

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t + 2\beta u_{xxxx} - 2\left[(ax+b)\, u_x\right]_x + \frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xxx} \\ - \left[(ax+b)\, u_x^3\right]_x - \beta\left(u_{xx}^2 u_x\right) = f(u) \end{cases} \tag{2.0.1}$$

denkleminde $f = 0$ ve $\beta = 0$ alarak $t \to 0$ için denklemin çözümünün global olduğunu göstermiştir. Bayrak ve Can (1997), (2.0.1) yarı lineer hiperbolik tipten zayıf sönüm terime sahip riser denklemini sınır-değer şartları ile çözümlerinin global yokluğunu elde etmişlerdir. Hao, Li ve Zhang (2007) (2.0.1) denkleminin negatif başlangıç enerjisine sahip çözümler için sonlu zamanda patladığını ve negatif olmayan başlangıç enerjisine sahip çözümler için de global varlığını gösterdiler. Zhao (2017), (2.0.1) denklemini zayıf sönüm terimlerle ele alarak hem pozitif başlangıç enerjisi hem de negatif başlangıç enerjisi için çözümlerinin patladığını gösterdi. Esquivel-Avila (2009, 2017), (2.0.1) denkleminin çözümlerinin patlamasını ele aldı ve global yokluğunu gösterdi. Kalantarov ve Kurt (1997)

$$mu_{tt} + ku_{xxxx} - \left[a(x)\, u_x\right]_x + \gamma u_{tx} + bu_t\,|u_t|^p = 0$$

denkleminin başlangıç sınır değer problemini ele alarak çözümün global olduğunu göstermişlerdir. Burada p, m, k, b pozitif sayılar, γ reel sayı ve $\forall x \in [0,l]$ için $a(x)$, $C^1[0,l]$ fonksiyonuna aittir. Gmira ve Guedda (2002)

$$\begin{cases} u_{tt} + \rho u_t + \beta\Delta^2 u - div\left(g(x) \bigtriangledown u\right) + \Gamma\Delta\left(|\bigtriangledown|^2 \Delta u\right) \\ -div\left(h\,|\bigtriangledown|^{p-2} \bigtriangledown u\right) - \Gamma div\left((\Delta u)^2 \bigtriangledown u\right) = f(u) \end{cases} \tag{2.0.2}$$

denkleminin çözümünün sonlu zamanda patladığını gösterdiler. Burada $\rho \geq 0$, $p \geq 1$ dır.

β ve Γ negatif olmayan sabitler ve $g,h\in C^{1}\left(\overline{\Omega},R^{+}\right)$ dır. Messaoudi ve Houari (2006)

$$\begin{cases} u_{tt}+\rho\left|u_{t}\right|^{m-2}u_{t}+\beta\Delta^{2}u-div\left(g\left(x\right)\bigtriangledown u\right)+\Gamma\Delta\left(\left|\bigtriangledown\right|^{2}\Delta u\right) \\ -div\left(h\left|\bigtriangledown\right|^{p-2}\bigtriangledown u\right)-\Gamma div\left(\left(\Delta u\right)^{2}\bigtriangledown u\right)=\left|u\right|^{l-2}u \end{cases} \tag{2.0.3}$$

(2.0.2) denklemini, sönüm terim içeren lineer olmayan (2.0.3) denklemine genelleyerek global yokluğunu çalıştılar. Burada $p,l,m\geq1$, $\rho\geq0$ dır. β ve Γ negatif olmayan sabitler ve $g,h\in C^{1}\left(\overline{\Omega},R^{+}\right)$ dır. Çelebi, Gür ve Kalantarov (2011)

$$u_{tt}+k\Delta^{2}u+a\Delta u+\overrightarrow{g}.\nabla u_{t}+b\left|u_{t}\right|^{p}u_{t}=0$$

probleminin çözümlerinin $t\rightarrow\infty$ için sıfıra gittiğini gösterdiler. Irkıl ve Pişkin (2021)

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha u_{t}+2\beta u_{xxxx}-2\left[\left(ax+b\right)u_{x}\right]_{x}+\frac{\beta}{3}\left(u_{x}^{3}\right)_{xxx} \\ -\left[\left(ax+b\right)u_{x}^{3}\right]_{x}-\left(\beta u_{xx}^{2}u_{x}\right)_{x}=\left|u\right|^{p-2}u\ln\left|u\right| \end{cases}$$

logaritmik kaynak terim içeren riser denkleminin çözümlerinin sonlu zamanda patladığını gösterdiler.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, diferansiyel denklemler ve fonksiyonel analiz ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. Daha sonra Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı, bazı önemli eşitlik ve eşitsizlikler ve çözümlerin patlaması ile ilgili bazı lemmalara yer verilecektir. [Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Evans 1998, Kesavan 1989, Pişkin 2013, Pişkin 2017, Pişkin 2018, Polat 2005].

3.1. Temel Bilgiler

Tanım 3.1.1. Bir fonksiyon ve onun sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemler diferansiyel denklemlerdir. Bir diferansiyel denklemde bağımlı ve bağımsız değişkenler olmak zorunda değildir. Lakin bağımlı değişkenin herhangi bir mertebeden türev veya türevleri olmak zorundadır.

Tanım 3.1.2. Bir tek bağımsız değişkenin bir tek bağımlı değişkene göre türevlerini içeriyorsa buna adi (bayağı) diferansiyel denklem denir. En genel adi (bayağı) diferansiyel denklemi

$$f(x,\ y,\ y', ...,\ y^{(n)}) = 0$$

şeklinde veya $y^{(n)}$ yalnız bırakılabiliyorsa

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y', ...,\ y^{(n-1)})$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.3. Bilinmeyen bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu, x ve y bağımsız değişkenlerinin bağımlı değişkenlerine göre türevlenmesine kısmi türevli diferansiyel denklem denir ve $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$ şeklinde gösterilir. u bağımlı fonksiyonunun x, y değişkenlerine göre kısmi türevler içeren en genel kısmi diferansiyel denklem,

$$F\left(x,\ y,\ u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy,} u_{xy}, ...\right) = 0$$

veya

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, ...\right) = 0$$

dır.

Tanım 3.1.4. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesi diferansiyel denklemin mertebesi (basamağı), en yüksek mertebeli türevin cebirsel kuvvetine de diferansiyel denklemin derecesi denir.

Örneğin;

$$y''' + 5x\left(y''\right)^3 + 2y = e^x$$

denklemi 3. mertebe, 1. derecedendir.

Tanım 3.1.5. Bir diferansiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden ve bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorlarsa denkleme doğrusal (lineer) denklem, aksi takdirde doğrusal olmayan (nonlineer) denklem denir.

Örneğin;

$$u_{xx} + \sin xu_y = xyu$$

denklemi lineer bir denklemdir.

Tanım 3.1.6. Lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemde eğer denklem sadece en yüksek mertebeden türevlerine göre lineer ise bu denklem yarı lineer denklemdir.

Örneğin;

$$u_x u_{xx} + 5u_{xy} = y$$

denklemi yarı lineer bir denklemdir.

Yarı lineer bir denklemin en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerden oluşuyorsa bu denklem hemen hemen lineer denklemdir.

Örneğin;

$$u_{xx} - 3u_{yy} + 3xu^2 = 0$$

denklemi hemen hemen lineer bir denklemdir.

3.2. Metrik Uzay, Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı

Tanım 3.2.1. $X \neq 0$ olmak üzere $X \times X$ den $R^+ \cup \{0\}$ a tanımlanan bir d fonsiyonu

$$(x, y) \to d(x, y)$$

verilsin. d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik , (X, d) ikilisine de metrik uzay denir:

$\forall x, y, z \in X$ olmak üzere

I) $d(x, y) \geq 0$

II) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

III) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)

IV) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği).

Tanım 3.2.2. X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olmak üzere $x \to \|x\|$ dönüşümünü sağlayan

$$\|.\| : X \to R$$

fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$ ve $\forall a \in R$ için

I) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ ve $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0$

II) $\|a\overrightarrow{x}\| = |a| \, \|\overrightarrow{x}\|$

III) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ (üçgen eşitsizliği)

X uzayı yukarıdaki şartları sağlıyorsa X üzerinde normdur denir. X normlu uzayı kısaca $(X, \ \|.\|)$ biçiminde gösterilir. $\|x\|$ sayısı da $x \in X$ elemanının normudur.

Tanım 3.2.3. X bir reel vektör uzayı olsun. $\forall \, x, y, z \in X$ ve $a \in R$ için $X \times X$ uzayı üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan

$$\langle ., . \rangle : X \times X \to R$$

fonksiyonuna iç çarpım denir;

I) $\langle x, x \rangle \geq 0; \ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

II) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \,,$

III) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle \,,$

IV) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \,.$

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\| : X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır.

Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya iç çarpım uzayı denir.

3.3. Lebesgue uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.3.1. Ω, R^n de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω da tanımlı tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfı aşağıdaki şart altında

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ uzayı olarak isimlendirilir. $L^p(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile Banach uzayıdr.

3.4. Sobolev Uzayı

Tanım 3.4.1. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

uzayına Sobolev uzayı denir. Bu uzay

$1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_P(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

normları ile Banach uzayıdır.

Tanım 3.4.2. (Sobolev Gömülme Teoremi). Ω, R^n de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ koşulları altındaki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olacak şekilde;

I) $mp > n$ ise $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$

II) $mp = n$ ise $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$

veya

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Burada $p = 1$ şeklinde seçilirse

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

olarak elde edilir.

III) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \, p \leq q \leq p^*$$

ya da

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; p \leq q \leq p^*$$

şeklindedir. Burada

$$p* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

dır.

3.5. Bazı Önemli Eşitlik ve Eşitsizlikler

Lemma 3.5.1. $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1} \left(a^p + b^p\right)$$

dır.

Lemma 3.5.2. (Young Eşitsizliği). Eğer $a, b \in R, \, p > 1, \, \varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $p = q = 2$ ve a yerine δa, b yerine $\frac{b}{\delta}$ alınırsa

$$|ab| \leq \frac{\delta^2 a^2}{2} + \frac{b^2}{2\delta^2}$$

olur.

Lemma 3.5.3. (Hölder Eşitsizliği). $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlasın. Eğer $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ olarak seçilirse

$$uv \in L^1(\Omega)$$

ve

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerli olur.

Lemma 3.5.4. (Sobolev Poincare Eşitsizliği).

p sayısı $2 \leq p < \infty$ $(n = 1, 2)$ ve $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ olsun. Bu durumda $C_* = C_*(\Omega, p)$ ve $u \in H_0^1(\Omega)$ için,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_* \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.5.5. (Green Özdeşliği). $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ olmak üzere

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ dır.

3.6. Georgiev ve Todorova Metodu

Bu metot 1994 yılında Georgiev ve Todorova [Georgiev ve Todorova 1994] tarafından elde edilmiştir. Bu metodun temel fikri uygun seçilmiş bir $\psi(t)$ fonksiyoneli için

$$\psi'(t) \geq c_1 \psi^{c_2}(t)$$

$(c_1 > 0, c_2 > 1, t \geq 0)$ diferansiyel eşitsizliğini elde etmektir. Buradan $(0, t)$ aralığında integral alınırsa

$$\frac{\psi'(t)}{\psi^{c_2}(t)} \geq c_1,$$

$$\frac{\psi^{1-c_2}(t)}{1-c_2} - \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{1-c_2} \geq c_1 t$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\psi^{c_2-1}(t) \geq \frac{1}{\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t}$$

elde edilir. Böylece paydayı sıfır yapan

$$\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t = 0,$$

$$t = \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{c_1(c_2-1)}$$

zamanında $\psi(t)$ sınırsız olur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Dördüncü bölüm üç kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda zayıf sönüm terimli riser denkleminin çözümlerinin patlaması, ikinci kısımda logaritmik kaynak terim içeren riser denkleminin çözümlerinin patlaması, üçüncü kısımda ise tezin esas özgün kısmını oluşturan güçlü sönüm terimli riser denkleminin çözümlerinin patlaması çalışılmıştır.

4.1. Zayıf Sönüm Terimli Riser Denkleminin Çözümlerinin Patlaması

Bu bölümde,

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha u_t+2\beta u_{xxxx}-2\left[(ax+b)\,u_x\right]_x \\ +\frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xxx}-\left[(ax+b)\,u_x^3\right]_x-\beta\left(u_{xx}^2u_x\right) \\ =f(u)\,, \qquad (x,t)\in[0,1]\times(0,T) \\ u(0,t)=u(1,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t)=0, \quad t\in(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x)\,,\ u_t(x,0)=u_1(x)\,, \qquad x\in[0,1] \end{cases} \tag{4.1.1}$$

riser denkleminin başlangıç- sınır değer problemi ele alınacaktır [Hao ve arkadaşları 2007]. Burada a, b, α, β negatif olmayan sabitlerdir ve $f(u)\in C(R)$ dir. Bu çalışmada $F(u)=\int_0^u f(s)\,ds$ olarak tanımlanmış (4.1.1) başlangıç-sınır değer probleminin $E(0)<0$ şartı altında çözümlerinin sonlu zamanda patladığı kanıtlanmıştır. Burada (4.1.1) denkleminin enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2+\beta\|u_{xx}\|^2+\int_0^1(ax+b)\,u_x^2dx+\frac{\beta}{2}\|u_xu_{xx}\|^2 \\ &\quad +\frac{1}{4}\int_0^1(ax+b)\,u_x^4dx-\int_0^1F(u)\,dx \end{aligned}$$

dır.

Lemma 4.1.1. $u(x,t)$, (4.1.1) probleminin bir çözümü olsun. $t\geq 0$ için $E(t)$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyondur, yani

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\alpha\|u_t\|^2\leq 0$$

dır.

İspat. (4.1.1) denkleminin u_t ile çarpıp $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa istenen elde edilir.

Lemma 4.1.2. $u(x,t)$, (4.1.1) probleminin bir çözümü olsun. Ayrıca $C > 1$ pozitif sabit olmak üzere

$$2 < r \leq 4$$

için

$$\|u\|_4^r \leq C(\|u\|_4^4 + \|u_x\|^2)$$

dir.

İspat. İki durum vardır:

Durum 1. Eğer $\|u\|_4 \leq 1$ ise Sobolev gömülme teoreminden

$$\|u\|_4^r \leq \|u\|_4^2 \leq C\|u_x\|^2 \tag{4.1.2}$$

dır.

Durum 2. Eğer $\|u\|_4 > 1$ ise

$$\|u\|_4^r \leq \|u\|_4^4 \tag{4.1.3}$$

olur. Buradan (4.1.2) ve (4.1.3) ifadelerinin birleşiminden lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi problem ile ilgili temel teoremimizi ifade ve ispat edelim:

Teorem 4.1.1. $u(x,t)$, (4.1.1) probleminin bir çözümü olsun. Ayrıca A pozitif sabit olmak üzere, $f(s)$ fonksiyonu $s \in R$ için

$$sf(s) \geq (4+A)F(s) \tag{4.1.4}$$

şartını sağlasın. Ayrıca

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \beta\|u_{0xx}\|^2 + \int_0^1 (ax+b)\,u_{0x}^2 dx \\ &\quad + \frac{\beta}{2}\|u_{0x}u_{0xx}\|^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 (ax+b)\,u_{0x}^4 dx - \int_0^1 F(u_0)\,dx \\ &< 0 \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 u_0 u_1 dx > 0 \tag{4.1.5}$$

olsun. Bu durumda (4.1.1) probleminin $u(x,t)$ çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. İlk olarak $H(t)$ fonksiyonunu

$$H(t) = -E(t)$$

olacak şekilde tanımlayalım. $H(t)$ nin türevini alıp Lemma 4.1.1 i kullanırsak

$$\frac{d}{dt}H(t) = -\frac{d}{dt}E(t) = \alpha \left\| u_t \right\|^2 \tag{4.1.6}$$

olur. Burada (4.1.6) ifadesinin $[0,1]$ aralığında integrali alınıp $E(t)$ enerji fonksiyonelinin tanımı kullanılırsa

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \int_0^1 F(u)\, dx \tag{4.1.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi

$$L(t) = H^{1-\gamma}(t) + \varepsilon \int_0^1 u u_t dx \tag{4.1.8}$$

olacak şekilde bir $L(t)$ fonksiyonu tanımlansın. Burada γ, $0 < \gamma \leq \frac{1}{4}$ ve ε daha sonra belirlenecek pozitif bir sayıdır. (4.1.8) eşitliğinin türevi alınırsa

$$L'(t) = \alpha (1-\gamma) H^{-\gamma}(t) \left\| u_t \right\|^2 + \varepsilon \left\| u_t \right\|^2 + \varepsilon \int_0^1 u u_{tt} dx$$

elde edilir. (4.1.1) denklemi u ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında integrali alınır ve $\int_0^1 u u_{tt} dx$ terimi çekilirse,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u u_{tt} dx &= -\alpha \int_0^1 u u_t dx - 2\beta \left\| u_{xx} \right\|^2 - 2 \int_0^1 (ax+b)\, u_x^2 dx \\ &\quad -2\beta \left\| u_x u_{xx} \right\|^2 - \int_0^1 (ax+b)\, u_x^4 dx + \int_0^1 u f(u)\, dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.1.8) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &= \alpha\left(1-\gamma\right)H^{-\gamma}(t)\left\|u_t\right\|^2+\varepsilon\left\|u_t\right\|^2-\varepsilon\alpha\int\limits_0^1 uu_t dx \\ &\quad -2\varepsilon\beta\left\|u_{xx}\right\|^2-2\varepsilon\beta\left\|u_x u_{xx}\right\|^2-2\varepsilon\int\limits_0^1\left(ax+b\right)u_x^2 dx \\ &\quad -\varepsilon\int\limits_0^1\left(ax+b\right)u_x^4 dx+\varepsilon\int\limits_0^1 uf\left(u\right)dx \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

olarak elde edilir. (4.1.9) ifadesindeki $\int\limits_0^1 uu_t dx$ terimine $\delta>0$ için Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\int\limits_0^1 uu_t dx \le \frac{\delta^2}{2}\left\|u\right\|^2+\frac{1}{2\delta^2}\left\|u_t\right\|^2$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (4.1.9) ifadesinde yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \alpha\left(1-\gamma\right)H^{-\gamma}(t)\left\|u_t\right\|^2+\varepsilon\left\|u_t\right\|^2 \\ &\quad -\frac{\varepsilon\alpha\delta^2}{2}\left\|u\right\|^2-\frac{\varepsilon\alpha}{\delta^2}\left\|u_t\right\|^2-2\varepsilon\beta\left\|u_{xx}\right\|^2 \\ &\quad -2\varepsilon\int\limits_0^1\left(ax+b\right)u_x^2 dx-\varepsilon\int\limits_0^1\left(ax+b\right)u_x^4 dx \\ &\quad -2\varepsilon\beta\left\|u_x u_{xx}\right\|^2+\varepsilon\int\limits_0^1 uf\left(u\right)dx \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

olur. $H\left(t\right)$ ve $E\left(t\right)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} -2\beta\left\|u_x u_{xx}\right\|^2-\int\limits_0^1\left(ax+b\right)u_x^4 dx &= 4H(t)+2\left\|u_t\right\|^2+4\beta\left\|u_{xx}\right\|^2 \\ &\quad +4\int\limits_0^1\left(ax+b\right)u_x^2 dx-4\int\limits_0^1 F\left(u\right)dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik (4.1.10) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \alpha\left[(1-\gamma)\,H^{-\gamma}(t)-\frac{\varepsilon}{2\delta^2}\right]\|u_t\|^2+3\varepsilon\,\|u_t\|^2 \\ & -\frac{\varepsilon\alpha\delta^2}{2}\|u\|^2+2\varepsilon\beta\,\|u_{xx}\|^2+2\varepsilon\int_0^1(ax+b)\,u_x^2dx \\ & +\varepsilon\int_0^1[uf(u)-4F(u)]\,dx+4\varepsilon H(t) \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

elde edilir. k sonradan belirlenecek olan yeterince büyük pozitif bir sabit olmak üzere $\delta^2=\frac{1}{k}H^{\gamma}(t)$ alınıp (4.1.11) ifadesinde yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \alpha\left[(1-\gamma)-\frac{k\varepsilon}{2}\right]H^{-\gamma}(t)\,\|u_t\|^2+3\varepsilon\,\|u_t\|^2+2\varepsilon\beta\,\|u_{xx}\|^2 \\ & -\frac{\varepsilon\alpha}{2k}H^{\gamma}(t)\,\|u\|^2+2\varepsilon\int_0^1(ax+b)\,u_x^2dx \\ & +\varepsilon\int_0^1[uf(u)-4F(u)]\,dx+4\varepsilon H(t) \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

elde ederiz. Sobolev-Poincare eşitsizliğinden

$$\|u\|^2\leq\frac{1}{\mu_1}\|u_{xx}\|^2$$

elde edilir. Burada μ_1, pozitif bir sabittir. Üstteki eşitsizlik (4.1.12) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \alpha\left[(1-\gamma)-\frac{k\varepsilon}{2}\right]H^{-\gamma}(t)\,\|u_t\|^2+3\varepsilon\,\|u_t\|^2 \\ & +\varepsilon\left[2\beta-\frac{\alpha H^{\gamma}(t)}{2\mu_1 k}\right]\|u_{xx}\|^2+2\varepsilon\int_0^1(ax+b)\,u_x^2dx \\ & +\varepsilon\int_0^1[uf(u)-(4+A)\,F(u)]\,dx+4\varepsilon H(t)+\varepsilon A\int_0^1F(u)\,dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, iki ayrı durum için inceleme yapılabilir.

1. Durum:

Öyle bir $T_0<\infty$ vardır ki $t\to T_0^-$ iken $H^{\gamma}(t)\to\infty$ dır. Bu durumda,

$\int\limits_0^1 F\left(u\left(x,t\right)\right)dx \to \infty$ olduğundan, $H^{\gamma}(t)$ sonlu bir zamanda patlar. Ayrıca, $f \in C(R)$ için $x \to x_0$ ve $t \to T_0^-$ iken öyle bir $x_0 \in [0,1]$ vardır ki $\int\limits_0^{u(x,t)} f\left(s\right)ds \to \infty$ ve $\left|u\left(x,t\right)\right| \to +\infty$ olur. Böylece $u(x,t)$ çözümü sonlu $T_0 < \infty$ zamanında patlar.

2. Durum:

Herhangi bir sonlu $(0,T^*]$ aralığında, $H^{\gamma}(t)$ sınırlıdır. Bu durumda, herhangi bir sonlu zamanlı $(0,T^*]$ aralığında yeterince büyük bir k seçebiliriz öyle ki $\beta \geq \frac{\alpha H^{\gamma}(t)}{4C^*k}$ sağlanır. k sabit olduğundan, yeterince küçük bir ε seçersek $(1-\eta)-\frac{k\varepsilon}{2} \geq 0$ olur. Bundan dolayı

$$L'(t) \geq 3\varepsilon\left\|u_t\right\|^2 + 4\varepsilon H\left(t\right) + 2\varepsilon b\left\|u_x\right\|^2 + \varepsilon A\int\limits_0^1 F\left(u\right)dx$$

olarak yazılabilir. Daha sonra

$$p = \min\{3, 2b, A\}$$

olarak seçildiğinde,

$$L'(t) \geq p\varepsilon\left[H\left(t\right) + \left\|u_t\right\|^2 + \left\|u_x\right\|^2 + \int\limits_0^1 F\left(u\right)dx\right] \geq 0 \qquad (4.1.13)$$

şeklinde yazılır. $L\left(t\right)$ nin tanımı ve (4.1.7) ifadesinden

$$L(t) \geq L(0) > 0$$

olur. (4.1.5) ifadesinden

$$L(0) = H^{1-\gamma}(0) + \varepsilon\int\limits_0^1 u_0u_1dx > 0$$

elde edilir. Şimdi $L^{\frac{1}{1-\gamma}}\left(t\right)$ yi hesaplayalım. $\int\limits_0^1 uu_tdx$ terimine Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int\limits_0^1\left|uu_t\right|dx \leq \left\|u\right\|\left\|u_t\right\|$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $\frac{1}{1-\gamma}$. kuvvetini alırsak

$$\left|\int_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq \left(\int_0^1 |uu_t|\, dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq \|u\|^{\frac{1}{1-\gamma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{4.1.14}$$

bulunur. Daha sonra $\delta > 0$, $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ olmak üzere Young eşitsizliği uygulanırsa

$$XY \leq \frac{\delta^{\mu}}{\mu} X^{\mu} + \frac{\delta^{-\theta}}{\theta} Y^{\theta} \quad X, Y \geq 0$$

ve ayrıca $\theta = 2(1-\gamma)$ ve $\mu = \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}$ olarak seçilirse (4.1.14) ifadesinden

$$\left|\int_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq C\left(\|u\|^{\frac{2}{1-2\gamma}} + \|u_t\|^2\right)$$

elde edilir. $2 < \frac{2}{1-2\gamma} \leq 4$ olduğundan Lemma 4.1.2 den

$$\left|\int_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq C\left(\|u\|_4^4 + \|u_x\|^2 + \|u_t\|^2\right) \tag{4.1.15}$$

ifadesi oluşur. Sobolev gömülme teoremi ve $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} \|u\|_4^4 &\leq C \|u_x\|_4^4 \\ &\leq C \int_0^1 (ax+b)\, u_x^4 dx \\ &\leq C\left(-H(t) + \int_0^1 F(u)\, dx\right) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlik (4.1.15) de yerine yazılırsa

$$\left|\int_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq C\left[-H(t) + \|u_t\|^2 + \|u_x\|^2 + \int_0^1 F(u)\, dx\right]$$

elde edilir. Şimdi $L^{\frac{1}{1-\gamma}}(t)$ i hesaplamak için her pozitif ξ, η ve $r > 1$ olmak üzere

$$(\xi + \eta)^r \leq 2^{r-1}(\xi^r + \eta^r)$$

eşitsizliğini kullanalım. Burada $r = \frac{1}{1-\gamma} > 1$ seçip ve her $t > 0$ için $L(t)$ nin tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned} L^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) &= \left(H^{1-\gamma}(t) + \varepsilon \int_0^1 u u_t dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ &\leq 2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \left(H(t) + \left|\int_0^1 u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}}\right) \\ &\leq C\left(H(t) + \|u_t\|^2 + \| u_x \|^2 + \int_0^1 F(u)\, dx\right) \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

elde edilir. (4.1.13) ve (4.1.16) ifadelerinden

$$L'(t) \geq q L^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) \tag{4.1.17}$$

elde edilir. Burada q pozitif sabittir. (4.1.17) eşitsizliğinin $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$L^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(t) \geq \frac{1}{L^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}(0) - qt\frac{\gamma}{1-\gamma}} \tag{4.1.18}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (4.1.18) ifadesinden

$$T^* \leq \frac{1-\gamma}{q\gamma L^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(0)}$$

olur ve T^* sonlu zamanda patlar. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.2. Logaritmik Kaynak Terimli Riser Denkleminin Çözümlerinin Patlaması

Bu bölümde logaritmik kaynak terimli

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha u_t+2\beta u_{xxxx}-2\left[(ax+b)\,u_x\right]_x+\frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xxx} & \\ -\left[(ax+b)\,u_x^3\right]_x-\left(\beta u_{xx}^2u_x\right)_x=|u|^{p-2}\,u\ln|u|\,, & (x,t)\in[0,1]\times(0,T) \\ u\,(0,t)=u\,(1,t)=u_{xx}\,(0,t)=u_{xx}\,(1,t)=0, & t\in(0,T) \\ u\,(x,0)=u_0\,(x)\,,\;\; u_t\,(x,0)=u_1\,(x)\,, & x\in[0,1] \end{cases} \tag{4.2.1}$$

riser denkleminin başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır [Irkıl ve Pişkin 2021]. Burada a, b, α, β negatif olmayan sabitlerdir ve $p\geq 4$ tür. Bu çalışmada logaritmik kaynak terimli riser denkleminin $E(0)<0$ şartı altında çözümlerinin sonlu zamanda patladığı kanıtlanmıştır.

Burada (4.2.1) denkleminin enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2+\beta\|u_{xx}\|^2+\int_0^1(ax+b)\,u_x^2dx+\frac{\beta}{2}\|u_xu_{xx}\|^2 \\ &\quad+\frac{1}{4}\int_0^1(ax+b)\,u_x^4dx+\frac{1}{p^2}\|u\|_p^p-\frac{1}{p}\int_0^1u^p\ln|u|\,dx \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

dır. Başlangıç enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\|u_1\|^2+\beta\|u_{0xx}\|^2+\int_0^1(ax+b)\,u_{0x}^2dx+\frac{\beta}{2}\|u_{0x}u_{0xx}\|^2 \\ &\quad+\frac{1}{4}\int_0^1(ax+b)\,u_{0x}^4dx+\frac{1}{p^2}\|u_0\|_p^p-\frac{1}{p}\int_0^1|u_0|^p\ln|u_0|\,dx \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

şeklindedir.

Lemma 4.2.1. $u(x,t)$, (4.2.1) probleminin bir çözümü olsun. Ayrıca $E(t)$, artmayan ve

$$E'(t)=-\alpha\|u_t\|^2\leq 0 \tag{4.2.4}$$

dır.

İspat. (4.2.1) problemi u_t ile çarpıp, $[0,1]$ aralığında integrali alırsak

$$\begin{aligned}&\int_0^1 u_{tt}u_t dx+\alpha\int_0^1 u_tu_t dx+2\beta\int_0^1 u_tu_{xxxx}dx-2\int_0^1 u_t\left[(ax+b)\,u_x\right]_x dx\\&+\tfrac{\beta}{3}\int_0^1 u_t\left(u_x^3\right)_{xxx}dx\ -\int_0^1 u_t\left[(ax+b)\,u_x^3\right]_x dx-\int_0^1 u_t\left(\beta u_{xx}^2u_x\right)_x dx\\&=\int_0^1 u_t\,|u|^{p-2}\,u\ln|u|\,dx\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

elde edilir. (4.2.5) ifadesinin terimlerini sırasıyla hesaplayalım:

İlk terim için

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_tu_{tt}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{d}{dt}\left(u_t^2\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|^2\end{aligned}\tag{4.2.6}$$

elde edilir. İkinci terim için

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^1 u_tu_tdx &= \alpha\int_0^1\left|u_t\right|^2dx\\ &= \alpha\left\|u_t\right\|^2\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

elde edilir. (4.2.5) ifadesinin üçüncü,..., yedinci terimlerine kısmi integrasyon uygulanıp (4.2.1) probleminin sınır şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\beta u_tu_{xxxx}dx &= 2\beta u_tu_{xxx}|_0^1-2\beta\int_0^1 u_{xxx}u_{tx}dx\\ &= 2\beta\left[u_{xxx}\left(1\right)u_t(1)-u_{xxx}(0)u_t(0)\right]-2\beta u_{tx}u_{xx}|_0^1+2\beta\int_0^1 u_{xx}u_{txx}dx\\ &= -2\beta\left[u_{xx}(1)u_{tx}(1)-u_{xx}(0)u_{tx}(0)\right]+2\beta\int_0^1\left(u_{xx}u_{txx}\right)dx\\ &= 2\beta\int_0^1\left(u_{xx}u_{txx}\right)dx=\beta\int_0^1\frac{d}{dt}\left(u_{xx}^2\right)dx\\ &= \beta\frac{d}{dt}\left\|u_{xx}\right\|^2,\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \left(2\left(ax+b\right)u_x\right)_x u_t dx &= -2u_t(ax+b)u_x|_0^1 + 2\int_0^1 \left(ax+b\right)u_x u_{tx} dx \\
&= -2(ax+b)\left[u_t(1)u_x(1) - u_t(0)u_x(0)\right] + 2\int_0^1 \left(ax+b\right)u_x u_{tx} dx \\
&= 2\int_0^1 \left(ax+b\right)u_x u_{tx} dx \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^1 \left(ax+b\right)u_x^2 dx, \qquad (4.2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xxx} u_t dx &= \frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xx} u_t|_0^1 - \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_{xx} u_{tx} dx \\
&= \frac{\beta}{3}\left(\left(u_x^3\right)_{xx}(1)u_t(1) - \left(u_x^3\right)_{xx}(0)u_t(0)\right) - \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_{xx} u_{tx} dx \\
&= \frac{-\beta}{3}\left(u_x^3\right)_x u_{tx}|_0^1 + \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_x u_{txx} dx \\
&= \frac{-\beta}{3}\left(\left(u_x^3\right)_x(1)u_{tx}(1) - \left(u_x^3\right)_x(0)u_{tx}(0)\right) + \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_x u_{txx} dx \\
&= \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_x u_{txx} dx \\
&= \frac{\beta}{3}\int_0^1 3u_x^2 u_{xx} u_{txx} dx \\
&= \frac{\beta}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(u_x^2 u_{xx}^2\right) dx - \frac{\beta}{2}\int_0^1 u_{xx}^2 \frac{d}{dt} u_x^2 dx \\
&= \frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_x u_{xx}\right\|^2 - \beta\int_0^1 u_{xx}^2 u_x u_{xt} dx, \qquad (4.2.10)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 \beta u_t \left(u_{xx}^2 u_x\right)_x dx &= -\beta u_t u_{xx}^2 u_x|_0^1 + \beta \int_0^1 u_{xx}^2 u_x u_{tx} dx \\
&= -\beta \left(u_t(1) u_{xx}^2(1) u_x(1) - u_t(0) u_{xx}^2(0) u_x(0)\right) + \beta \int_0^1 u_{xx}^2 u_x u_{tx} dx \\
&= \beta \int_0^1 u_{xx}^2 u_x u_{tx} dx \qquad (4.2.11)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 \left((ax+b)\, u_x^3\right)_x u_t dx &= -u_t (ax+b) u_x|_0^1 + \int_0^1 (ax+b)\, u_x^3 u_{tx} dx \\
&= -(ax+b)\left(u_t(1) u_x(1) - u_t(0) u_x(0)\right) + \int_0^1 (ax+b)\, u_x^3 u_{tx} dx \\
&= \int_0^1 (ax+b)\, u_x^3 u_{tx} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 (ax+b) \frac{d}{dt} u_x^4 dx \\
&= \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \int_0^1 (ax+b)\, u_x^4 dx \qquad (4.2.12)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Kaynak terim için

$$
|u|^{p-2}\, u u_t = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \left(|u_t|^p\right)
$$

kullanırsak

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_t |u|^{p-2} u \ln|u| \, dx &= \int_0^1 \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \left(|u_t|^p \right) \ln|u| \, dx \\
&= \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(|u|^p \ln|u| \right) dx - \frac{1}{p} \int_0^1 |u|^p \frac{d}{dt} \left(\ln|u| \right) dx \\
&= \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(|u|^p \ln|u| \right) dx - \frac{1}{p} \int_0^1 |u|^{p-2} u u_t dx \\
&= \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(|u|^p \ln|u| \right) dx - \frac{1}{p^2} \int_0^1 \frac{d}{dt} |u|^p \, dx \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 |u|^p \ln|u| - \frac{1}{p^2} \|u\|_p^p \right] \qquad (4.2.13)
\end{aligned}$$

olur. Elde edilen (4.2.6)-(4.2.13) terimleri (4.2.5) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \beta \|u_{xx}\|^2 + \int_0^1 (ax+b) u_x^2 dx + \frac{\beta}{2} \|u_x u_{xx}\|^2 \right. \\
&\left. + \frac{1}{4} \int_0^1 (ax+b) u_x^4 dx - \frac{1}{p} \int_0^1 |u|^p \ln|u| + \frac{1}{p^2} \|u\|_p^p \right] \\
= \; & -\alpha \|u_t\|^2 \qquad (4.2.14)
\end{aligned}$$

olur. Buradan (4.2.2) ve (4.2.14) ifadelerinden

$$E'(t) = -\alpha \|u_t\|^2 \leq 0$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.4) eşitliğinin $[0, t]$ aralığında integrali alınırsa

$$E(t) = -\alpha \int_0^t \int_0^1 |u_t|^2 \, dx + E(0)$$

elde edilir.

Lemma 4.2.2. $\int_0^1 u^p \ln|u| \, dx \geq 0$ olmak üzere herhangi bir $u \in L^p[0,1]$ ve

$$2 \leq s \leq 4 \leq p$$

için

$$\left(\int_0^1 u^p \ln|u|\,dx\right)^{\frac{s}{p}} \le C\left[\int_0^1 u^p \ln|u|\,dx + \|u_{xx}\|^2\right]$$

dır. Burada $C > 0$ pozitif bir sabittir [Kafini ve Messaoudi 2020].

İspat. Eğer $\int_0^1 u^p \ln|u|\,dx > 1$ ise

$$\left(\int_0^1 u^p \ln|u|\,dx\right)^{\frac{s}{p}} \le \int_0^1 u^p \ln|u|\,dx \tag{4.2.15}$$

olur. Eğer $\int_0^1 u^p \ln|u|\,dx \le 1$ ise, herhangi bir $\tau \le 2$ ve

$$\varphi_1 = \{x \in [0,1] \mid |u| > 1\}$$

için

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 u^p \ln|u|\,dx\right)^{\frac{s}{p}} &\le \left(\int_0^1 u^p \ln|u|\,dx\right)^{\frac{\tau}{p}}\\ &\le \left(\int_{\varphi_1} u^p \ln|u|\,dx\right)^{\frac{\tau}{p}}\\ &\le \left(\int_{\varphi_1} |u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{\tau}{p}}\\ &\le \left(\int_0^1 |u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{\tau}{p}}\\ &= \|u\|_{p+1}^{\frac{\tau(p+1)}{p}}\end{aligned}$$

olur. $\tau = \frac{2p}{p+1} < 2$ seçersek

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 u^p \ln|u|\,dx\right)^{\frac{s}{p}} &\le \|u\|_{p+1}^2\\ &\le C\,\|u_{xx}\|^2 \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

olur. (4.2.15) ve (4.2.16) ifadelerinden lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.3. $\int\limits_0^1 u^p \ln|u|\,dx \geq 0$ olmak üzere herhangi bir $u \in L^p[0,1]$ için

$$\|u\|_p^p \leq C\left[\int\limits_0^1 u^p \ln|u|\,dx + \|u_{xx}\|^2\right]$$

dır. Burada $C > 0$ pozitif bir sabittir [Kafini ve Messaoudi 2020].

İspat. $\xi_+ = \{x \in [0,1] \mid |u| > e\}$ ve $\xi_- = \{x \in [0,1] \mid |u| \leq e\}$ olarak tanımlansın. Buradan

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p &= \int\limits_{\xi_+} u^p dx + \int\limits_{\xi_-} u^p dx \\
&\leq \int\limits_{\xi_+} u^p \ln|u|\,dx + \int\limits_{\xi_-} e^p \left|\frac{u}{e}\right|^p dx \\
&\leq \int\limits_{\xi_+} u^p \ln|u|\,dx + e^p \int\limits_{\xi_-} \left|\frac{u}{e}\right|^2 dx \\
&\leq \int\limits_{\xi_+} u^p \ln|u|\,dx + e^{p-2} \int\limits_{\xi_-} |u|^2\,dx \\
&\leq C\left[\int\limits_0^1 u^p \ln|u|\,dx + \|u_{xx}\|^2\right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.4. $C > 0$ pozitif bir sabit olmak üzere

$$\|u\|_2^2 \leq C\left[\left(\int\limits_0^1 u^p \ln|u|\,dx\right)^{\frac{2}{p}} + \|u_{xx}\|^{\frac{4}{p}}\right]$$

dır [Kafini ve Messaoudi 2020].

Lemma 4.2.5. $2 \leq s \leq 4 \leq p$ olmak üzere herhangi bir $u \in L^p[0,1]$ için

$$\|u\|_p^s \leq C\left[\|u\|_p^p + \|u_{xx}\|^2\right]$$

dır. Burada $C > 0$ pozitif bir sabittir [Kafini ve Messaoudi 2020].

İspat. Eğer $\|u\|_p > 1$ ise

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^p \tag{4.2.17}$$

olur. Eğer $\|u\|_p \leq 1$ ise $\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2$ dir. Sobolev gömülme teoreminden

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2 \leq C \|u_{xx}\|^2 \tag{4.2.18}$$

dır. Dolayısıyla (4.2.17) ve (4.2.18) ifadelerinden lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi problem ile ilgili temel teoremimizi ifade ve ispat edelim:

Teorem 4.2.6. $E(0) < 0$ ve $\int_0^1 u_0 u_1 dx > 0$ olsun. $u(x,t)$, (4.2.2) probleminin çözümü T^* sonlu zamanında patlar. Ve

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi\sigma L^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

olarak elde edilir. Burada L (4.2.22) de tanımlanmış, ξ ve σ pozitif sabitler ve $\sigma < 1$ dir.

İspat. İlk olarak $H(t)$ fonksiyonunu

$$H(t) = -E(t) \tag{4.2.19}$$

olarak tanımlayalım. (4.2.2) problemini $t > 0$ için u_t ile çarpıp $[0,1]$ aralığında integralini alırsak

$$H'(t) = -E'(t) = \alpha \|u_t\|^2 \tag{4.2.20}$$

elde edilir. Burada (4.2.3) ve (4.2.19) ifadelerinden

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p}\int_0^1 u^p \ln|u|\, dx \tag{4.2.21}$$

elde ederiz. Şimdi

$$L(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_0^1 u u_t dx \tag{4.2.22}$$

olacak şekilde $L(t)$ fonksiyonu tanımlansın. Burada σ,

$$\frac{4(p-2)}{p^2} < \sigma < \frac{p-2}{2p} \tag{4.2.23}$$

eşitsizliğini sağlayan bir sabit ve ε daha sonra belirlenecek bir sayıdır. Şimdi $L(t)$ nin t ye göre türevi alınıp (4.2.2) ve (4.2.20) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \int_0^1 |u_t|^2 dx + \int_0^1 u u_{tt} dx \\ &= \alpha (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) \|u_t\|^2 + \varepsilon \|u_t\|^2 - 2\varepsilon\beta \|u_x u_{xx}\|^2 \\ &\quad -2\varepsilon\beta \|u_{xx}\|^2 - \varepsilon\alpha \int_0^t u u_t dx - 2\varepsilon \int_0^1 (ax+b) u_x^2 dx \\ &\quad -\varepsilon \int_0^1 (ax+b) u_x^4 dx + \varepsilon \int_0^1 u^p \ln|u| dx \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

olarak elde edilir. (4.2.24) ifadesindeki $\int_0^t u u_t dx$ terimine $\delta > 0$ için Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^1 u u_t dx \leq \frac{\delta^2}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2\delta^2} \|u_t\|^2 \tag{4.2.25}$$

elde edilir. (4.2.25) eşitsizliği (4.2.24) te yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \alpha (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) \|u_t\|^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{\alpha}{2\delta^2}\right) \|u_t\|^2 \\ &\quad -\frac{\varepsilon\alpha\delta^2}{2} \|u\|^2 - 2\varepsilon\beta \|u_x u_{xx}\|^2 - 2\varepsilon\beta \|u_{xx}\|^2 \\ &\quad -2\varepsilon \int_0^1 (ax+b) u_x^2 dx - \varepsilon \int_0^1 (ax+b) u_x^4 dx \\ &\quad +\varepsilon \int_0^1 u^p \ln|u| dx \end{aligned}$$

olur. $0 < m < \frac{p-4}{p}$ ve $\int\limits_0^1 u^p \ln|u|\, dx$ yerine koymak için $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} L'(t) \;\; &\geq \;\; \alpha\left[(1-\sigma)H^{-\sigma}(t) - \frac{\varepsilon}{2\delta^2}\right]\|u_t\|^2 + \varepsilon\left(1 + \frac{p(1-m)}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &+\varepsilon\beta(p(1-m)-2)\|u_{xx}\|^2 + \varepsilon\beta\left(\frac{p(1-m)}{2} - 2\right)\|u_x u_{xx}\|^2 \\ &+\varepsilon p(1-m)H(t) + \varepsilon(p(1-m)-2)\int\limits_0^1 (ax+b)u_x^2 dx \\ &+\varepsilon\left(\frac{p(1-m)}{4} - 1\right)\int\limits_0^1 (ax+b)u_x^4 dx - \frac{\varepsilon\alpha\delta^2}{2}\|u\|^2 \\ &+\varepsilon\frac{(1-b)}{p}\|u\|_p^p + \varepsilon m\int\limits_0^1 u^p \ln|u|\, dx \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

olur. h sonradan belirlenecek olan yeterince büyük pozitif değerli bir sayı olmak üzere

$$\delta^2 = \frac{1}{2h}H^{\sigma}(t)$$

alınıp (4.2.26) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) \;\; &\geq \;\; \alpha\left[(1-\sigma) - h\varepsilon\right]H^{-\sigma}(t)\|u_t\|^2 + \varepsilon\left(1 + \frac{p(1-m)}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &+\varepsilon\beta(p(1-m)-2)\|u_{xx}\|^2 + \varepsilon\beta\left(\frac{p(1-m)}{2} - 2\right)\|u_x u_{xx}\|^2 \\ &+\varepsilon p(1-m)H(t) + \varepsilon(p(1-m)-2)\int\limits_0^1 (ax+b)u_x^2 dx \\ &+\varepsilon\left(\frac{p(1-m)}{4} - 1\right)\int\limits_0^1 (ax+b)u_x^4 dx - \frac{\varepsilon\alpha}{4h}H^{\sigma}(t)\|u\|^2 \\ &+\varepsilon\frac{(1-m)}{p}\|u\|_p^p + \varepsilon m\int\limits_0^1 u^p \ln|u|\, dx \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

elde edilir. (4.2.27) ifadesinde $H^{\sigma}(t)\|u\|^2$ terimine Sonuç 4.2.4 ve Young eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
H^{\sigma}(t)\|u\|^{2} &\leq \left(\frac{1}{p}\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\sigma}\|u\|^{2} \\
&\leq C\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\sigma}\left[\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\frac{2}{p}}+\|u_{xx}\|^{\frac{4}{p}}\right] \\
&\leq C\left[\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\sigma+\frac{2}{p}}+\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\sigma}\|u_{xx}\|^{\frac{4}{p}}\right] \\
&\leq \left[\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\sigma+\frac{2}{p}}+\frac{2}{p}\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\sigma}+\frac{p-2}{p}\|u_{xx}\|^{\frac{4}{p}}\right] \\
&\leq C_{1}\left[\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\sigma+\frac{2}{p}}+\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx\right)^{\frac{\sigma p}{p-2}}+\|u_{xx}\|^{2}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada C ve C_1 pozitif sabitlerdir. (4.2.23) ifadesi kullanılırsa

$$4<\sigma p+2\leq p \text{ ve } 4<\frac{\sigma p^{2}}{p-2}\leq p$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.2.2 den

$$H^{\sigma}(t)\|u\|^{2}\leq C\left(\int_{0}^{1} u^{p}\ln|u|\,dx+\|u_{xx}\|^{2}\right) \tag{4.2.28}$$

olur. (4.2.27) ve (4.2.28) ifadelerinden

$$\begin{aligned} L'(t) \geq{}& \alpha\left[(1-\sigma)-\frac{h\varepsilon}{2}\right]H^{-\sigma}(t)\|u_t\|^2+\varepsilon\left(1+\frac{p(1-m)}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &+\varepsilon\beta\left(p(1-m)-2-\frac{\alpha}{4h}\right)\|u_{xx}\|^2+\varepsilon\beta\left(\frac{p(1-m)}{2}-2\right)\|u_xu_{xx}\|^2 \\ &+\varepsilon p(1-m)H(t)+\varepsilon(p(1-m)-2)\int_0^1(ax+b)u_x^2dx \\ &+\varepsilon\left(\frac{p(1-m)}{4}-1\right)\int_0^1(ax+b)u_x^4dx+\varepsilon\frac{(1-m)}{p}\|u\|_p^p \\ &+\varepsilon\left(m-\frac{\alpha}{4h}\right)\int_0^1u^p\ln|u|\,dx \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

olur. Burada yeterince küçük bir $m>0$ olup

$$p(1-m)-2>0$$

olur ve h büyük seçilirse

$$p(1-m)-2-\frac{\alpha}{4h}>0 \text{ ve } m-\frac{\alpha}{4h}>0$$

olur. h ve m sabit olduğundan ε yeteri kadar küçük seçilirse

$$(1-\sigma)-h\varepsilon\geq 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$L(0)=H^{1-\sigma}(0)+\varepsilon\int_0^1u_0u_1dx>0$$

dır. Böylece (4.2.29) ifadesi

$$\begin{aligned} L'(t) \geq{}& \lambda\varepsilon\Bigg[H(t)+\|u_t\|^2+\|u_{xx}\|^2+\|u_xu_{xx}\|^2+\int_0^1(ax+b)u_x^2dx \\ &+\int_0^1(ax+b)u_x^4dx+\|u\|_p^p+\int_0^1u^p\ln|u|\,dx\Bigg] \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

yazılabilir. Şimdi $L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)$ yi hesaplayalım. $\int_0^1 uu_t dx$ Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 uu_t dx \right| &\leq \|u\| \|u_t\| \\ &\leq C \|u\|_p \|u_t\| \end{aligned}$$

olur ve her tarafın $\frac{1}{1-\sigma}$. kuvveti alınırsa

$$\left| \int_0^1 uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \|u\|_p^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

elde edilir. Şimdi $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\kappa} = 1$ için Young eşitsizliğini uygularsak

$$\left| \int_0^1 uu_t dx \right|^{1/(1-\sigma)} \leq C \left[\|u\|_p^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|u_t\|^{\frac{\kappa}{1-\sigma}} \right] \tag{4.2.31}$$

olur. Lemma 4.2.5 i kullanırsak (4.2.31)

$$\left| \int_0^1 uu_t dx \right|^{1/(1-\sigma)} \leq C \left[\|u_t\|^2 + \|u\|_p^s \right]$$

şeklinde olur. Burada $\kappa = 2/(1-\sigma)$ ve $\mu = 2(1-\sigma)/(1-2\sigma)$ olarak alırız. $s = 2/(1-2\sigma) \leq p$ olarak seçip Lemma 4.2.5 i kullanırsak

$$\left| \int_0^1 uu_t dx \right|^{1/(1-\sigma)} \leq C \left[\|u_t\|^2 + \|u\|_p^p + \|u_{xx}\|_2^2 \right] \tag{4.2.32}$$

olarak elde edilir. Burada (4.2.32) ifadesi $L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)$ olarak tanımlanır. Diğer taraftan $p > 1$

ve $\theta, \varsigma > 0$ olmak üzere $(\theta + \varsigma)^p \leq 2^{p-1}(\theta^p + \varsigma^p)$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_0^1 u u_t dx\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&\leq 2^{1/(1-\sigma)} \left[H(t) + \left|\int_0^1 u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right] \\
&\leq C\left[H(t) + \|u_t\|^2 + \|u\|_p^p + \|u_{xx}\|_2^2\right] \qquad (4.2.33)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $p = \frac{1}{1-\sigma} > 1$ dir. (4.2.30) ve (4.2.33) ifadelerinden

$$L'(t) \geq \xi L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \qquad (4.2.34)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ξ, yalnızca λ, ε ve C ye bağlı pozitif bir sabittir. (4.2.34) ifadesinin $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$L^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{L^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\xi\sigma t}{1-\sigma}} \qquad (4.2.35)$$

olur. Dolayısıyla (4.2.35) ifadesi $L(t)$ nin sonlu bir zamanda patladığını gösterir ve

$$T \leq T^* = \frac{1-\sigma}{\xi\sigma L^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

olarak elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

4.3. Güçlü Sönüm Terimli Riser Denkleminin Çözümlerinin Patlaması

Bu bölümde

$$\begin{cases}
u_{tt} - \alpha u_{xxt} + 2\beta u_{xxxx} - 2\left[(ax+b)u_x\right]_x \\
\quad + \frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xxx} - \left[(ax+b)u_x^3\right]_x - \beta\left(u_{xx}^2 u_x\right) \\
\quad = f(u), \quad (x,t) \in [0,1] \times (0,T) \\
u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\
\quad u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in [0,1]
\end{cases} \qquad (4.3.1)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada a, b, α, β negatif olmayan sabitler, ve $f(u)$ daha sonra belirlenecek bazı koşulları sağlayan bir $C(R)$ fonksiyonudur. $F(u) = \int\limits_0^u f(s)\,ds$ olarak seçilip (4.3.1) başlangıç-sınır değer probleminin $E(0) < 0$ şartı altında çözümlerinin sonlu zamanda patlaması ele alınmıştır.

Öncelikle (4.3.1) enerji fonksiyonelini elde edelim: Bunun için (4.3.1) denklemini u_t ile çarpıp $[0,1]$ aralığında integralini alırsak,

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 u_t u_{tt} dx - \int\limits_0^1 \alpha u_t u_{xxt} dx + \int\limits_0^1 2\beta u_t u_{xxxx} dx \\ &- \int\limits_0^1 2\left[(ax+b)\,u_x\right]_x u_t dx + \int\limits_0^1 \frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xxx} u_t dx \\ &- \int\limits_0^1 \beta u_t \left(u_{xx}^2 u_x\right)_x dx - \int\limits_0^1 \left((ax+b)\,u_x^3\right)_x u_t dx \\ = &\int\limits_0^1 u_t f(u)\,dx \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

elde edilir. Şimdi terimleri sırasıyla hesaplayalım:

İlk terim için

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 u_t u_{tt} dx &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\left|u_t\right|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|^2 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

elde edilir. İkinci terime green özdeşliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} -\int\limits_0^1 \alpha u_t u_{xxt} dx &= \alpha\int\limits_0^1 u_{xt} u_{xt} dx \\ &= \alpha\int\limits_0^1 \left|u_{xt}\right|^2 dx \\ &= \alpha\left\|u_{xt}\right\|^2 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

olarak bulunur. Aşağıda üçüncü,..., yedinci terimlerine sırasıyla kısmi integrasyon uygulayıp ardından (4.3.1) denklemindeki sınır şartlarını kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 2\beta u_t u_{xxxx} dx &= 2\beta u_t u_{xxx}|_0^1 - 2\beta \int_0^1 u_{xxx} u_{tx} dx \\
&= 2\beta \left[u_{xxx}(1) u_t(1) - u_{xxx}(0) u_t(0) \right] - 2\beta u_{tx} u_{xx}|_0^1 + 2\beta \int_0^1 u_{xx} u_{txx} dx \\
&= -2\beta \left[u_{xx}(1) u_{tx}(1) - u_{xx}(0) u_{tx}(0) \right] + 2\beta \int_0^1 \left(u_{xx} u_{txx} \right) dx \\
&= 2\beta \int_0^1 \left(u_{xx} u_{txx} \right) dx = \beta \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(u_{xx}^2 \right) dx \\
&= \beta \frac{d}{dt} \left\| u_{xx} \right\|^2, \qquad (4.3.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 -2u_t \left[(ax+b) u_x \right]_x dx &= -2u_t (ax+b) u_x|_0^1 + 2 \int_0^1 (ax+b) u_x u_{tx} dx \\
&= -2(ax+b) \left[u_t(1) u_x(1) - u_t(0) u_x(0) \right] + 2 \int_0^1 (ax+b) u_x u_{tx} dx \\
&= \frac{d}{dt} \int_0^1 (ax+b) u_x^2 dx, \qquad (4.3.6)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xxx} u_t dx &= \frac{\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{xx} u_t\Big|_0^1 - \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_{xx} u_{tx} dx \\
&= \frac{\beta}{3}\Big(\left(u_x^3\right)_{xx}(1)u_t(1) - \left(u_x^3\right)_{xx}(0)u_t(0)\Big) - \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_{xx} u_{tx} dx \\
&= -\frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_{xx} u_{tx} dx \\
&= \frac{-\beta}{3}\left(u_x^3\right)_{x} u_{tx}\Big|_0^1 + \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_{x} u_{txx} dx \\
&= \frac{-\beta}{3}\Big(\left(u_x^3\right)_{x}(1)u_{tx}(1) - \left(u_x^3\right)_{x}(0)u_{tx}(0)\Big) + \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_{x} u_{txx} dx \\
&= \frac{\beta}{3}\int_0^1 \left(u_x^3\right)_{x} u_{txx} dx \\
&= \frac{\beta}{3}\int_0^1 3u_x^2 u_{xx} u_{txx} dx \\
&= \frac{\beta}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(u_x^2 u_{xx}^2\right) dx - \frac{\beta}{2}\int_0^1 u_{xx}^2 \frac{d}{dt} u_x^2 dx \\
&= \frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_x u_{xx}\right\|^2 - \beta\int_0^1 u_{xx}^2 u_x u_{xt} dx, \qquad (4.3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \beta u_t \left(u_{xx}^2 u_x\right)_x dx &= -\beta u_t u_{xx}^2 u_x\Big|_0^1 + \beta\int_0^1 u_{xx}^2 u_x u_{tx} dx \\
&= -\beta\Big(u_t(1)u_{xx}^2(1)u_x(1) - u_t(0)u_{xx}^2(0)u_x(0)\Big) + \beta\int_0^1 u_{xx}^2 u_x u_{tx} dx \\
&= \beta\int_0^1 u_{xx}^2 u_x u_{tx} dx \qquad (4.3.8)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \left[(ax+b)\,u_x^3\right]_x u_t dx &= -u_t(ax+b)u_x^3|_0^1 + \int_0^1 (ax+b)\,u_x^3 u_{tx} dx \\
&= -(ax+b)\left(u_t(1)u_x^3(1) - u_t(0)u_x^3(0)\right) + \int_0^1 (ax+b)\,u_x^3 u_{tx} dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (ax+b)\,\frac{d}{dt}u_x^4 dx \\
&= \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 (ax+b)\,u_x^4 dx \qquad (4.3.9)
\end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Elde edilen (4.3.3)-(4.3.9) terimleri (4.3.2) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \beta\|u_{xx}\|^2 + \int_0^1 (ax+b)\,u_x^2 dx \right.\\
&\left. +\frac{\beta}{2}\|u_x u_{xx}\|^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 (ax+b)\,u_x^4 dx - \int_0^1 F(u)\,dx\right] \\
= \; & -\alpha\|u_{xt}\|^2
\end{aligned}$$

olur. Buradan (4.3.1) denkleminin enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \beta\|u_{xx}\|^2 + \int_0^1 (ax+b)u_x^2 dx \\
&\quad +\frac{\beta}{2}\|u_x u_{xx}\|^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 (ax+b)u_x^4 dx - \int_0^1 F(u)\,dx
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi problem ile ilgili temel teoremimizi ifade ve ispat edelim:

Teorem 4.3.1. $u(x,t)$, (4.3.1) probleminin bir çözümü olsun. Ayrıca A pozitif sabit olmak üzere, $f(s)$ fonksiyonu $s \in R$ için

$$sf(s) \geq (4+A)F(s) \qquad (4.3.10)$$

sağlasın. Ayrıca

$$E(0) < 0$$

ve

$$\int_0^1 u_0 u_1 dx > 0 \tag{4.3.11}$$

olsun. Bu durumda (4.3.1) probleminin $u(x,t)$ çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. İlk olarak $H(t)$ fonksiyonunu

$$H(t) = -E(t) \tag{4.3.12}$$

olarak tanımlayalım. (4.3.1) problemini $t > 0$ için u_t ile çarparak $[0,1]$ aralığında integralini alırsak,

$$\frac{d}{dt}H(t) = -\frac{d}{dt}E(t) = \alpha \left\| u_{xt} \right\|^2 \tag{4.3.13}$$

olur. Burada (4.3.13) ifadesinin $[0,1]$ aralığında integrali alınıp $E(t)$ enerji fonksiyonelinin tanımı kullanılırsa

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \int_0^1 F(u)\, dx \tag{4.3.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi

$$L(t) = H^{1-\eta}(t) + \varepsilon \int_0^1 u u_t dx \tag{4.3.15}$$

olacak şekilde bir $L(t)$ fonksiyonu tanımlansın. Burada η, $0 < \eta \leq \frac{1}{4}$ ve ε daha sonra belirlenecek pozitif bir sayıdır. (4.3.15) ifadesinin türevi alınırsa

$$L'(t) = (1-\eta)H^{-\eta}(t)H'(t) + \varepsilon \left(\int_0^1 u_t u_t dx + \int_0^1 u u_{tt} dx \right)$$

olur. Elde edilen eşitlikte $H'(t)$ nin yerine (4.3.13) ifadesi yazılıp eşitlik düzenlenirse

$$L'(t) = \alpha(1-\eta)H^{-\eta}(t) \left\| u_{xt} \right\|^2 + \varepsilon \left\| u_t \right\|^2 + \varepsilon \int_0^1 u u_{tt} dx \tag{4.3.16}$$

elde edilir. (4.3.1) denkleminin her terimi u ile çarpıp $[0,1]$ aralığında integralini alırsak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 uu_{tt}dx - \alpha\int_0^1 uu_{xxt}dx + \int_0^1 2\beta uu_{xxxx}dx - \int_0^1 2\left[(ax+b)u_x\right]_x udx \\ & + \int_0^1 \frac{\beta}{3}(u_x^3)_{xxx}udx - \int_0^1 \beta u(u_{xx}^2u_x)_x dx - \int_0^1 \left[(ax+b)u_x^3\right]_x udx \\ = & \int_0^1 uf\left(u\right)dx \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

olarak yazılır. İkinci terime green özdeşliği uygulanırsa

$$-\alpha\int_0^1 uu_{xxt}dx = \alpha\int_0^1 u_xu_{xt}dx \tag{4.3.18}$$

terimi elde edilir. (4.3.17) ifadesinin üçüncü,..., yedinci terimlerine sırasıyla kısmi integrasyon uygulayıp (4.3.1) denkleminin sınır şartlarını kullanırsak

$$\begin{aligned} -\int_0^1 2\beta uu_{xxxx}dx &= -2\beta uu_{xxx}|_0^1 + 2\beta\int_0^1 u_xu_{xxx}dx \\ &= -2\beta(u(1)u(1)_{xxx} - u(0)u(0)_{xxx}) + 2\beta\int_0^1 u_xu_{xxx}dx \\ &= 2\beta u_xu_{xx}|_0^1 - 2\beta\int_0^1 u_{xx}u_{xx}dx \\ &= 2\beta\left(u_x(1)u_{xx}(1) - u_x(0)u_{xx}(0)\right) - 2\beta\int_0^1 u_{xx}u_{xx}dx \\ &= 2\beta\int_0^1 u_{xx}u_{xx}dx \\ &= -2\left\|u_{xx}\right\|^2, \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 2\left[(ax+b)u_x\right]_x u\,dx &= 2u(ax+b)u_x|_0^1 - \int_0^1 2(ax+b)u_xu_xdx \\
&= 2(ax+b)\left(u(1)u_x(1)-u(0)u_x(0)\right) - \int_0^1 2(ax+b)u_xu_xdx \\
&= -2\int_0^1 (ax+b)u_x^2dx, \qquad (4.3.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 \frac{\beta}{3}(u_x^3)_{xxx}udx &= -\frac{\beta}{3}u(u_x^3)_{xx}|_0^1 + \frac{\beta}{3}\int_0^1 u_x(u_x^3)_{xx}dx \\
&= -\frac{\beta}{3}\big(u(1)(u_x^3)_{xx}(1) - u(0)(u_x^3)_{xx}(0)\big) + \frac{\beta}{3}\int_0^1 u_x(u_x^3)_{xx}dx \\
&= \frac{\beta}{3}u_x(u_x^3)_x|_0^1 - \frac{\beta}{3}\int_0^1 u_{xx}3u_x^2u_{xx}dx \\
&= \frac{\beta}{3}\big(u_x(1)(u_x^3)_x(1) - u_x(0)(u_x^3)_x(0)\big) - \frac{\beta}{3}\int_0^1 u_{xx}3u_x^2u_{xx}dx \\
&= -\beta \parallel u_{xx}u_x \parallel^2, \qquad (4.3.21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left[(ax+b)u_x^3\right]_x udx &= (ax+b)u_x^3u|_0^1 - \int_0^1 (ax+b)u_x^3u_xdx \\
&= (ax+b)\big(u_x^3(1)u(1) - u_x^3(0)u(0)\big) - \int_0^1 (ax+b)u_x^3u_xdx \\
&= -\int_0^1 (ax+b)u_x^4dx \qquad (4.3.22)
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \beta u \left(u_{xx}^2 u_x\right)_x dx &= \beta u u_{xx}^2 u_x|_0^1 - \beta \int_0^1 u_x u_{xx}^2 u_x dx \\
&= \beta \left(u(1)u_{xx}^2(1)u_x(1) - u(0)u_{xx}^2(0)u_x(0)\right) - \beta \int_0^1 u_x u_{xx}^2 u_x dx \\
&= -\beta \int_0^1 u_x^2 u_{xx}^2 dx \\
&= -\beta \left\| u_x u_{xx} \right\|^2 \qquad (4.3.23)
\end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Elde edilen (4.3.18)-(4.2.23) terimleri (4.3.17) ifadesinde yerine yazılıp $\int_0^1 u u_{tt} dx$ terimi çekilirse

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u u_{tt} dx &= -\alpha \int_0^1 u_x u_{xt} dx - 2\beta \left\| u_{xx} \right\|^2 \\
&\quad - \int_0^1 (ax+b) u_x^2 dx - 2\beta \left\| u_x u_{xx} \right\|^2 \\
&\quad - \int_0^1 (ax+b) u_x^4 dx + \int_0^1 u f(u)\, dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.3.16) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \alpha(1-\eta) H^{-\eta}(t) \left\| u_{xt} \right\|^2 + \varepsilon \left\| u_t \right\|^2 - \varepsilon\alpha \int_0^1 u_x u_{xt} dx \\
&\quad -2\varepsilon\beta \left\| u_{xx} \right\|^2 - 2\varepsilon\beta \left\| u_x u_{xx} \right\|^2 - 2\varepsilon \int_0^1 (ax+b) u_x^2 dx \\
&\quad -\varepsilon \int_0^1 (ax+b) u_x^4 dx + \varepsilon \int_0^1 u f(u)\, dx \qquad (4.3.24)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin $\int_0^1 u_x u_{xt} dx$ terimine $\delta > 0$ için ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde

$p=q=2$ seçilip Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^1 u_x u_{xt} dx \leq \frac{\delta^2}{2}\|u_x\|^2 + \frac{1}{2\delta^2}\|u_{xt}\|^2 \tag{4.3.25}$$

elde edilir. Elde edilen (4.3.25) eşitsizliği (4.3.24) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \alpha(1-\eta)H^{-\eta}(t)\|u_{xt}\|^2 + \|u_t\|^2 - \frac{\varepsilon\alpha\delta^2}{2}\|u_x\|^2 \\ & -\frac{\varepsilon\alpha}{2\delta^2}\|u_{xt}\|^2 - 2\varepsilon\beta\|u_{xx}\|^2 - 2\beta\|u_x u_{xx}\|^2 \\ & -2\varepsilon\int_0^1 (ax+b)u_x^2 dx - \varepsilon\int_0^1 (ax+b)u_x^4 dx + \varepsilon\int_0^1 uf(u)\,dx \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

olur. $E(t)$ ve $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} -2\beta\|u_x u_{xx}\|^2 - \int_0^1 (ax+b)u_x^4 dx =\ & 4H(t) + 2\|u_t\|^2 + 4\beta\|u_{xx}\|^2 \\ & +4\int_0^1 (ax+b)u_x^2 dx - 4\int_0^1 F(u)\,dx \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik (4.3.26) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \alpha\left[(1-\eta)H^{-\eta}(t) - \frac{\varepsilon}{2\delta^2}\right]\|u_{xt}\|^2 + 3\varepsilon\|u_t\|^2 \\ & +2\varepsilon\beta\|u_{xx}\|^2 + 2\varepsilon\int_0^1 (ax+b)u_x^2 dx \\ & -\frac{\varepsilon\alpha\delta^2}{2}\|u_x\|^2 + \varepsilon\int_0^1 [uf(u) - 4F(u)]dx + 4\varepsilon H(t) \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

sonucu elde edilir. $k>0$ daha sonra belirlenecek bir sabit olmak üzere

$$\delta^2 = \frac{1}{k}H^\eta(t)$$

olarak alınırsa ve (4.3.27) ifadesinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geq{} & \alpha\left[(1-\eta)-\frac{k\varepsilon}{2}\right]H^{-\eta}(t)\left\|u_{xt}\right\|^2+3\varepsilon\left\|u_t\right\|^2 \\
& -\frac{\varepsilon\alpha H^{\eta}(t)}{2k}\left\|u_x\right\|^2+2\varepsilon\beta\left\|u_{xx}\right\|^2+2\varepsilon\int_0^1(ax+b)u_x^2dx \\
& +\varepsilon\int_0^1[uf(u)-4F(u)]dx+4\varepsilon H(t)
\end{aligned}
\tag{4.3.28}
$$

olarak elde edilir. Burada (4.3.28) deki $\left\|u_x\right\|^2$ terimine Sobolev gömülme teoremi uygulanırsa

$$\left\|u_x\right\|^2 \leq \frac{1}{C^*}\left\|u_{xx}\right\|^2$$

olarak elde edilir. Üstteki eşitsizlik (4.3.28) ifadesinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
L'(t) \geq{} & \alpha\left[(1-\eta)-\frac{k\varepsilon}{2}\right]H^{-\eta}(t)\left\|u_{xt}\right\|^2+3\varepsilon\left\|u_t\right\|^2 \\
& +\varepsilon\left[2\beta-\frac{\alpha H^{\eta}(t)}{2C^*k}\right]\left\|u_{xx}\right\|^2+2\varepsilon\int_0^1(ax+b)u_x^2dx \\
& +\varepsilon\int_0^1[uf(u)-(4+A)F(u)]dx+4\varepsilon H(t)+\varepsilon A\int_0^1 F(u)\,dx
\end{aligned}
$$

olur. Burada, iki ayrı durum için inceleme yapılabilir.

1. Durum:

Öyle bir $T_0 < \infty$ vardır ki $t \to T_0^-$ iken $H^{\eta}(t) \to \infty$ dır. Bu durumda, $\int_0^1 F(u(x,t))\,dx \to \infty$ olduğundan, $H^{\eta}(t)$ sonlu bir zamanda patlar. Ayrıca, $f \in C(R)$ için $x \to x_0$ ve $t \to T_0^-$ iken öyle bir $x_0 \in [0,1]$ vardır ki $\int_0^{u(x,t)} f(s)\,ds \to \infty$ ve $|u(x,t)| \to +\infty$ olur. Böylece $u(x,t)$ çözümü sonlu $T_0 < \infty$ zamanında patlar.

2. Durum:

Herhangi sonlu bir $(0,T^*]$ aralığında, $H^{\eta}(t)$ sınırlıdır. Bu durumda, herhangi sonlu zamanlı bir $(0,T^*]$ aralığında yeterince büyük bir k seçebiliriz öyle ki $\beta \geq \frac{\alpha H^{\eta}(t)}{4C^*k}$ sağlanır. k sabit olduğundan, yeterince küçük bir ε seçersek $(1-\eta)-\frac{k\varepsilon}{2} \geq 0$ olur. Bundan dolayı

$$L'(t) \geq 3\varepsilon \left\|u_t\right\|^2 + 4\varepsilon H\left(t\right) + 2\varepsilon p \left\|u_x\right\|^2 + \varepsilon A \int\limits_0^1 F\left(u\right) dx$$

olarak yazılabilir. Daha sonra

$$d = \min\{3, 2p, A\}$$

olarak seçildiğinde,

$$L'(t) \geq d\varepsilon \left[H\left(t\right) + \left\|u_t\right\|^2 + \left\|u_x\right\|^2 + \int\limits_0^1 F\left(u\right) dx \right] \geq 0 \tag{4.3.29}$$

yazılabilir. $L(t)$ nin tanımı ve (4.3.14) ifadesinden

$$L(t) \geq L(0) > 0$$

olur. (4.3.15) ifadesinden

$$L(0) = H^{1-\eta}(0) + \varepsilon \int\limits_0^1 u_0 u_1 dx > 0$$

elde edilir. Şimdi, $L^{\frac{1}{1-\eta}}(t)$ yi elde etmek için $\int\limits_0^1 u u_t dx$ terimine Hölder eşitsizliği uygularsak

$$\int\limits_0^1 \left|u u_t\right| dx \leq \left\|u\right\| \left\|u_t\right\|$$

olarak elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $\frac{1}{1-\eta}$. kuvvetini alırsak

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_0^1 u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\eta}} &\leq \left(\int\limits_0^1 \left|u u_t\right| dx \right)^{\frac{1}{1-\eta}} \\ &\leq \left\|u\right\|^{\frac{1}{1-\eta}} \left\|u_t\right\|^{\frac{1}{1-\eta}} \end{aligned} \tag{4.3.30}$$

bulunur. Daha sonra $\delta > 0$, $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\phi} = 1$ olmak üzere Young eşitsizliği uygulanırsa

$$KN \leq \frac{\delta^{\sigma}}{\sigma} K^{\sigma} + \frac{\delta^{-\phi}}{\phi} N^{\phi} \quad K, N \geq 0$$

ve ayrıca $\phi = 2\left(1-\eta\right)$ ve $\sigma = \frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}$ olarak seçilirse (4.3.30) ifadesinden

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\eta}} &\le \frac{\delta^{\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}}}{\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}}\left\|u\right\|^{\frac{2}{1-2\eta}} + \frac{\delta^{-2(1-\eta)}}{2(1-\eta)}\left\|u_t\right\|^2 \\ &\le \frac{\left(1-2\eta\right)\delta^{\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}}}{2(1-\eta)}\left\|u\right\|^{\frac{2}{1-2\eta}} + \frac{\delta^{-2(1-\eta)}}{2(1-\eta)}\left\|u_t\right\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $C = \min\left\{\frac{(1-2\eta)\delta^{\frac{2(1-\eta)}{1-2\eta}}}{2(1-\eta)}, \frac{\delta^{-2(1-\eta)}}{2(1-\eta)}\right\}$ olarak seçersek

$$\left|\int\limits_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\eta}} \le C\left(\left\|u\right\|^{\frac{2}{1-2\eta}} + \left\|u_t\right\|^2\right)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}0 &< \eta \le \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \le 1-2\eta < 1 \\ &\Rightarrow 1 < \frac{1}{1-2\eta} \le 2 \\ &\Rightarrow 2 < \frac{2}{1-2\eta} \le 4\end{aligned}$$

eşitsizliği ve Lemma 4.1.2 den

$$\left|\int\limits_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\eta}} \le C\left(\left\|u\right\|_4^4 + \left\|u_x\right\|^2 + \left\|u_t\right\|^2\right) \tag{4.3.31}$$

ifadesi oluşur. Sobolev gömülme teoremi ve $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned}\left\|u\right\|_4^4 &\le C\left\|u_x\right\|_4^4 \\ &\le C\int\limits_0^1 \left(ax+b\right)u_x^4 dx \\ &\le C\left(-H(t) + \int\limits_0^1 F\left(u\right)dx\right)\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlik (4.3.31) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\left|\int_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\eta}} \leq C\left[-H(t)+\|u_t\|^2+\|u_x\|^2+\int_0^1 F(u)\,dx\right]$$

bulunur. Şimdi $L^{\frac{1}{1-\eta}}(t)$ hesaplamak için her pozitif X,Y ve $r>1$ için

$$(X+Y)^r \leq 2^{r-1}\left(X^r+Y^r\right)$$

eşitsizliğini kullanalım. $r=\frac{1}{1-\eta}>1$ seçip ve her $t>0$ için $L(t)$ nin tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned} L^{\frac{1}{1-\eta}}(t) &= \left(H^{1-\eta}(t)+\varepsilon\int_0^1 uu_t dx\right)^{\frac{1}{1-\eta}} \\ &\leq 2^{\frac{\eta}{1-\eta}}\left(H(t)+\left|\int_0^1 uu_t dx\right|^{\frac{1}{1-\eta}}\right) \\ &\leq C\left(H(t)+\|u_t\|^2+\|\, u_x\,\|^2+\int_0^1 F(u)\,dx\right) \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

bulunur. (4.3.29) ve (4.3.32) ifadelerinden

$$L'(t) \geq \xi L^{\frac{1}{1-\eta}}(t) \tag{4.3.33}$$

elde edilir. Burada $\xi>0$ şeklinde bir sabittir. (4.3.33) ifadesinden

$$\frac{dL}{dt} \geq \xi L^{\frac{1}{1-\eta}}(t),$$

$$\frac{dL}{L^{\frac{1}{1-\eta}}(t)} \geq \xi dt \tag{4.3.34}$$

elde edilir ve (4.3.34) ifadesinin $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^t \frac{dL}{L^{\frac{1}{1-\eta}}(t)} \geq \int_0^t \xi dt$$

olur, alınan integral düzenlenirse

$$\frac{L^{-\frac{1}{1-\eta}+1}(t)}{-\frac{1}{1-\eta}+1}\Big|_0^t \geq \xi t,$$

$$L^{-\frac{\eta}{1-\eta}}(t) - L^{-\frac{\eta}{1-\eta}}(0) \leq -\frac{\eta}{1-\eta}\xi t,$$

$$L^{-\frac{\eta}{1-\eta}}(t) \leq L^{-\frac{\eta}{1-\eta}}(0) - \frac{\eta}{1-\eta}\xi t,$$

$$L^{\frac{\eta}{1-\eta}}(t) \geq \frac{1}{L^{-\frac{\eta}{1-\eta}}(0) - \xi t\frac{\eta}{1-\eta}}$$

bulunur. Burada

$$T^{*} \leq \frac{1-\eta}{\xi\eta L^{\frac{\eta}{1-\eta}}(0)}$$

olarak elde edilir ve T^{*} sonlu zamanda patlar. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada güçlü sönüm terim içeren riser denkleminin çözümlerinin patlaması başlangıç ve sınır değer koşullarıyla birlikte ele alınmıştır. Riser denklemlerinin çözümlerinin patlaması farklı metotlar kullanılarak çalışılabilir. Ayrıca aynı denklemin enerji azalması, atraktörü gibi matematiksel davranışları da çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R.A., Fournier, J.J.F. (2003). Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Bayrak, V., Can M., (1997). Global Nonexistence and Numerical Instabilities of the Vibrations of a Riser, ***Math. Comput. Appl.,*** 2(1), 45-52.

Brezis, H. 2011. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer.

Cheng, A.K. (2001). Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools. ***The Mathematics Educator***. 6(1), 63-75.

Çelebi, A.O., Gür, Ş., Kalantarov, V.K., (2011). Structural stability and decay estimate for marine riser equations, ***Math. Comput. Modelling***, 54, 3182-3188.

Esquivel-Avila, J.A., (2009). Blow up and boundedness for high energies of a quasilinear riser equation, ***Nonlinear Anal.*** 71, no. 5-6, 1925-1932.

Esquivel-Avila, J.A., (2017). On nonexistence of global solutions of a quasilinear riser equation, ***Adv. Pure. Appl. Math***. 1-9.

Evans, L.C. (1998). Partial differantial equations, Graduate Studies in Mathematics: vol. 19.

Friedman, A., (1965). Remarks on nonlinear parabolic equations, applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics, ***Amer. Math. Soc.***, 3-23.

Fujita, H., (1966). On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ***Sect. IA, Math***., 13: 109-124.

Georgiev, V., Todorova, G., (1994). Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. ***J.Diff.Eq.,*** 107: 295-308.

Gmira, A., Guedda, M., (2002). A Note on the Global Nonexistence of Solutions to Vibrations of a Riser, ***AJSE,*** 27(2A), 197-206.

Hao, J., Li, S., Zhang, Y., (2007). Blow up and global solutions for a quasilinear riser problem, ***Nonlinear Anal. TMA,*** 67, 974-980.

Irkıl, N., Pişkin, E., (2021). Blow up and global existence of solution for a riser problem with logarithmic nonlinearity, (incelemede).

Kafini, M. Messaoudi, S.A., (2020). Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay, ***Appl. Anal.,*** 99(3), 530-547.

Kalantarov, V.K., Kurt, A., (1997). The long-time behavior of solutions of a nonlinear fourth order wave equation, describing the dynamics of marine risers, ***Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik***, 77, 3, 209-215.

Kaplan, S., (1963). On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations, ***Comm. Pure Appl. Math.,*** 16: 305-330.

Kesavan, S. (1989). Topics in functional analysis and applications, John Wiley Sons, India.

Köhl, M., (1993). An extended Lyapunov approach to the stability assessment of marine risers, ***Z. Angew. Math. Mech.*** 73 (2), 85-92.

Messaoudi S.A., Said-Houari B., (2006). A global nonexistence result for the nonlinearly damped multi-dimensional Boussinesq equation. ***Arabian Journal for Science and Engineering,*** 31:57-68.

Myint-U, T., Debnath, L., (2007). Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser Boston.

Pinchover, Y., Rubinstenin, J. (2005). An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge University Press.

Pişkin, E. (2013). Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Pişkin, E. (2017). Sobolev Uzayları, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. (2018). Kısmi Türevli Denklemler, Seçkin Yayıncılık.

Polat, N. (2005). Doğrusal olmayan parobolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu , Doktora Tezi, Dicle Ünivesitesi.

Sun, M.G., (1986). The stress boundary layers of a slender riser in a steady flow, ***Adv. Hydrodyn.*** 4, 32-43.

Zhao, J., (2017). Blow Up of Solutions for a Vibrating Riser Equation with Dissipative Term, ***Journal of Computational Analysis and Applications***, 22, 1, 128-137.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Kumsal ATLI
ÖĞRENCİ NO	18804201
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2020-2021
YARIYIL	☒ Güz ☐ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Riser Denkleminin Çözümlerinin Patlaması
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	62
BENZERLİK ORANI	%13
RAPORLAMA TARİHİ	09/03/ 2021

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 62 sayfalık kısmına ilişkin, 09/03/2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %13 ‘tür.

Uygulanan filtrelemeler:

☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları’nı inceledim ve bu Uygulama Esasları’nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Kumsal ATLI

10/03/2021 Doç.Dr.Erhan PİŞKİN Tez Danışmanı	…./…./2021 Prof.Dr. H. Özlem GÜNEY Anabilim Dalı Başkanı

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.