

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZAMAN GECİKMELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ
ÜZERİNE**

BARIŞ ERKÖSE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. DENİZ AĞIRSEVEN

EDİRNE-2021

Barış ERKÖSE'nin hazırladığı “**Zaman Gecikmeli Schrödinger Denkleminin Çözümleri Üzerine**” başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmza

Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

Prof. Dr. Deniz AĞIRSEVEN

Prof. Dr. Mehmet SEZGİN

Tez Savunma Tarihi: 07 / 06 / 2021

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Prof. Dr. Deniz AĞIRSEVEN
Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Hüseyin Rıza Ferhat KARABULUT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

07 / 06 / 2021

Barış ERKÖSE

Yüksek Lisans Tezi
Zaman Gecikmeli Schrödinger Denkleminin Çözümleri Üzerine
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada, Laplace ve Fourier dönüşümü ve Fourier serileri yöntemi gibi klasik çözüm yöntemleri kullanılarak zaman gecikmeli Schrödinger denkleminin analitik çözümleri elde edilmiştir. Bu tip problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için sonlu fark şemaları yöntemi kullanılmıştır. Kurulan fark şemasının kararlılığı gösterilmiştir. Zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için başlangıç değer problemi ele alınmış ve bu problem için r-modifiyeli Crank-Nicolson fark şeması kurulmuştur. Yöntem sayısal örnekler ile desteklenmiştir.

Yıl : 2021

Sayfa Sayısı : 80

Anahtar Kelimeler : Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi, Fark Şemaları, Laplace Dönüşümü, Fourier Dönüşümü, Fourier Serileri Yöntemi

Master's Thesis

On the Solutions of the Schrödinger Equation with Time Delay

Trakya University Institute of Natural Sciences

Mathematics

ABSTRACT

In this study, analytical solutions of the Schrödinger equation with time delay are obtained by using classical solution methods of Laplace and Fourier Transform and Fourier Series Method. The finite difference scheme method is used for finding the approximate solutions of these type of problems. The stability of the established difference scheme is presented. The initial value problem for the Schrödinger equation with time delay is considered and r-modified Crank-Nicolson difference scheme is constructed for this problem. The method is illustrated by numerical examples.

Year : 2021

Number of Pages : 80

Keywords : Schrödinger Differential Equation with Time Delay, Difference schemes, Laplace Transform, Fourier Transform, Fourier Series Method

TEŞEKKÜR

Akademik eğitimim boyunca matematiksel bilgi ile birlikte çalışma azminin kıymetini de benimseten Sn. Prof. Dr. Deniz AĞIRSEVEN ve Sn. Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e geniş bilgi hazinelerinden bana da bir pay ayırdıkları için ve üzerimdeki bütun emeklerinden ötürü teşekkür ederim.

Tecrübe ve bilgisiyle akademik eđitimime yön veren ArŐ. Gör. Koray TÜRK'e ve destekleriyle her zaman yanımda olan annem Fevziye ERKÖSE ve babam Mehmet ERKÖSE'ye teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2 ZAMAN GECİKMELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ANALİTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLERİ	8
BÖLÜM 3 ZAMAN GECİKMELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN DİFERANSİYEL VE FARK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN KARARLILIK TEOREMLERİ	28
3.1. Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi için Diferansiyel Probleminin Çözümü Üzerine.....	28
3.2. Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi için Fark Probleminin Çözümü Üzerine.....	31
BÖLÜM 4 ZAMAN GECİKMELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN SAYISAL SONUÇLAR	38
4.1. Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi için Neumann Problemin Yaklaşık Çözümlerinin r-Modifiyeli Crank-Nicolson Fark Şemasıyla Elde Edilişi.....	38
4.2. Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi için Lokal Olmayan Başlangıç Değer Probleminin Yaklaşık Çözümlerinin r-Modifiyeli Crank-Nicolson Fark Şeması ile Elde Edilişi.....	44
4.3. r-Modifiyeli Crank-Nicolson Fark Şemasıyla Elde Edilen Hataların Çıkarımları.....	50
BÖLÜM 5 SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	51
KAYNAKLAR.....	53

EKLER.....	58
ÖZGEÇMİŞ.....	70



SİMGELER DİZİNİ

V	Potansiyel enerji
$\psi(x, t)$	$\phi(k)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü
\hat{E}	Enerji operatörü
\hat{p}	Momentum operatörü
\hat{H}	Hamiltonyen operatörü
H	Hilbert uzayı
$[t]$	En küçük tam sayı fonksiyonu
$D(A)$	A 'nın tanım kümesi
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathcal{L}	Laplace dönüşümü
\mathcal{F}	Fourier dönüşümü

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. M , N ve r 'nin Farklı Değerleri İçin $t \in [0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ Aralıklarında (4.2) Fark Şemasının Hataları.....	42
Çizelge 4.2. M , N ve r 'nin Farklı Değerleri İçin $t \in [0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ Aralıklarında (4.5) Fark Şemasının Hataları.....	48



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. $t \in [2,3]$ için tam çözüm.....	43
Şekil 4.2. $t \in [2,3]$ için sayısal çözüm.....	43
Şekil 4.3. $t \in [2,3]$ için tam çözüm.....	49
Şekil 4.4. $t \in [2,3]$ için sayısal çözüm.....	49



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Schrödinger denklemi, kuantum mekaniğindeki dalga fonksiyonlarının davranışlarını, uzaya ve zamana bağlı değişimlerini gösteren bir kısmi diferansiyel denklemdir. Zamana bağlı Schrödinger denklemi, dalga fonksiyonunun zaman içinde yayılımını açıklarken zamandan bağımsız Schrödinger denklemi ise belli enerjinin dalga fonksiyonları için durum denklemdir. $V = 0$ iken yani uzayda kendisini tutan bir potansiyel olmadan dolaşan serbest parçacık durumu göz önüne alınırsa mikroskobik parçacıklar kuantum mekaniğinde dalgalar gibi davrandığından parçacık için iyi bir model;

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

dalga fonksiyonuna karşılık gelen farklı $\hbar k$ momentinde düzlem dalgalarının üst üste bindirilmesi ile oluşturulan bir “dalga paketi” dir. Burada $\psi(x, t)$, bir $\phi(k)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümüdür. \hbar Planck sabiti olmak üzere; momentumun $p = \hbar k = \frac{\hbar}{v}$, de Broglie denklemleri ve $E = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m}$ enerjisi kullanılarak dalga paket denklemi için dalga fonksiyonu

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{\frac{i(px - Et)}{\hbar}} dp$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Herhangi bir sistemin başlangıç durumu ve hareketi tüm zamanlardaki durumunu belirlemeye yeterli olacağından, sistemin durum denklemi, en fazla birinci ve ikinci türevler cinsinden verilir. Zaman ve uzay değişkenleri cinsinden türev alınırsa

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \left(\frac{-iE}{\hbar} \right) e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} dp,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \left(\frac{ip}{\hbar} \right) e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} dp,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \left(\frac{-p^2}{\hbar^2} \right) e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} dp$$

elde edilir. Zamana göre alınan türev $i\hbar$, konuma göre alınan ikinci türev $\frac{-\hbar^2}{2m}$ ile çarpılıp de Broglie bağıntıları kullanılırsa

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

bulunur. Eşitliğin sol tarafı kuantum mekanik durumun kinetik enerjisini verir. Bu serbest parçacığın, herhangi bir potansiyeldeki parçacığa türetilmesini genelleştirmek için V potansiyel enerji olmak üzere; sol tarafa $V\psi$ eklemek gerekir. Buradan zamana bağlı Schrödinger denklemi

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

elde edilir. Enerji operatörü \hat{E} ve momentum operatörü \hat{p}

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

biçiminde tanımlansın. Bir parçacığın, düzlem dalga durumlarının üst üste bindirilmesi olarak tanımlanması göz önüne alınırsa bir $\psi = e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}}$ düzlem dalgası ele alındığında momentum ve enerji operatörleri uygulanarak

$$\hat{E}\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} \right) = i\hbar \left(\frac{-iE}{\hbar} \right) \psi = E\psi,$$

$$\hat{p}\psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} \right) = -i\hbar \left(\frac{ip}{\hbar} \right) \psi = p\psi$$

bulunur. Böylece bu operatörlerin öz değerleri, sırasıyla bir dalga fonksiyonunun enerji ve momentumuna karşılık gelir. Bu gerçeği kullanarak Schrödinger denklemi doğrudan operatörler kullanılarak formüleleştirilebilir. V potansiyel enerji olmak üzere klasik bir parçacığın enerjisi,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

ile verilir. Kuantum mekaniğinde sistemin incelenmesi tüm değişkenlerin bir dalga fonksiyonuna etki eden operatörlere yükseltilmesini gerektirir. Enerji, \hat{H} Hamiltonyen operatörüne dönüşür.

$$\hat{H}\psi = \frac{p^2}{2m}\psi + V\psi$$

İle ifade edilir. \hat{E} enerji operatörü, \hat{H} Hamiltonyen operatörü ile eşitlenirse

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

zamana bağlı Schrödinger denkleminin operatör formülasyonu elde edilir. $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ alınırsa \hat{H} kuantum parçacığının kinetik ve potansiyel enerjilerine ve \hat{E} zaman evrimini üretmek üzere zamana bağlı Schrödinger denklemi

$$\hat{E}\psi = \hat{H}\psi$$

biçiminde ifade edilir (DeCross, Ellinor, Zheng, Williams & Khim, 2020).

Zamana bağlı lineer bir Schrödinger denklemi, H Hilbert uzayında A sınırlı olmayan lineer bir operatör olmak üzere

$$iu_t + Au = f(t)$$

soyut denkleme indirgenebilir.

Fizikteki çeşitli problemlerin Schrödinger denklemlerine yol açtığı bilinmektedir (Biondini, Lottes & Mantzavinos, 2020; Burnham, Futera, Bacic & English, 2020; Eskin & Ralston, 1995; Ita vd., 2020). Schrödinger denklemi için problemlerin çözüm yöntemleri birçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Antoine, Besse & Mouysset, 2004; Gordeziani & Avalishvili, 2005a; Gordeziani & Avalishvili, 2005b; Han, Jin & Wu, 2005; Mayfield, 1989).

Schrödinger denklemin birçok teknolojik uygulaması vardır. Örneğin kuantum cihazlarının modellenmesinde, elektromanyetik dalga yayılımında, su altı akustiğinde, optikte, doğrusal olmayan Kerr ortamında ışın yayılımı için görelî fizik veya plazmalarda karşılaşılan problemleri modellemede özellikle iki boyutlu Schrödinger denklemi yaygın olarak kullanılmaktadır (Arnold, 1998; Kopylov, Popov & Vinogradov, 1995; Levy, 2000; Tappert, 1977).

Kısmi diferansiyel denklemler için sonlu fark yöntemi bilimsel hesaplamada etkili bir yöntemdir. Çok sayıda düğüm noktası kullanmadıkça klasik birinci ve ikinci dereceden fark şemalarını kullanarak sayısal çözüm elde etmek kolay değildir. Hesaplama yükü oldukça yüksek olacağından klasik fark şemalarının bu dezavantajının üstesinden gelmek için makul bir yöntem, yüksek dereceli kompakt sonlu fark şeması tasarlamaktır. Bu tür bir fark şeması kurmak sadece yüksek doğruluklu sayısal çözümlerin bulunmasını sağlamakla kalmaz, aynı zamanda hesaplama yükünden de kurtarır. Kısmi diferansiyel denklemler için sonlu kompakt fark şemalarının araştırılmasıyla ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır. Liao ve çalışma arkadaşları, sınırlı bir bölge üzerinde periyodik sınır koşullu lineer Schrödinger denklemi için dördüncü dereceden kompakt fark şemasını ele almış ve bazı Sobolev gömme eşitsizlikleri ile enerji yöntemini uygulayarak çözümlerin maksimum norm hata kestirimlerini elde etmiştir (Liao, Sun & Shi, 2012; Liao, Sun & Shi, 2010). Gao ve Xie, iki boyutlu Schrödinger denklemi için dördüncü dereceden değişken yönlü kapalı kompakt fark şemaları oluşturmuş ve şemaların yakınsaklık derecesini analiz etmiştir (Gao & Xie, 2011). Xie ve çalışma arkadaşları, tek boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemi için iki yüksek dereceli kompakt sonlu fark şeması önermiş ve ayırık L_2 norm hata kestirimlerini ve yakınsaklık hızını göstermiştir (Xie, Li & Yi, 2009). Hong ve arkadaşları, lineer olmayan Schrödinger denklemini çözmek için kompakt bir şema geliştirmiş ve bu şema için L_∞ optimal hata kestirimini kanıtlamışlardır (Hong, Ji, Kong & Wong, 2017). Hu ve arkadaşları, lineer olmayan ve sınırsız bir bölgede lineer olmayan Schrödinger denklemlerini nümerik olarak çözmek için kompakt sonlu fark şeması tasarlamışlar ve bu şemanın kararlılığını analiz edip yöntemin doğruluğu ve etkinliğini göstermek için sayısal örnekler vermişlerdir (Hu, Li & Jiang, 2020).

Ashyralyev ve Sırma, operatör teori kullanarak bir Hilbert uzayında yarı lineer Schrödinger denklemi için lokal ve lokal olmayan sınır değer problemlerinin tek biçimde çözülebilirliğini incelemişlerdir (Ashyralyev & Sırma, 2009a). Fark şemalarının çözümü için yakınsaklık kestirimleri kurup yöntemin doğruluğunu göstermek için nümerik örnekler vermişler ve bu yöntemlerin lineer olmayan Schrödinger denklemine uygulanabilirliğini tartışmışlardır. Ashyralyev ve Sırma, başka bir çalışmada bir Hilbert uzayında Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer problemini ele almış ve bu problemin yaklaşık çözümleri için ikinci dereceden doğruluklu r -modifiyeli

Crank-Nicolson fark şemaları vermiş, bu fark şemalarının kararlılığını ispatlamışlardır. Dirichlet sınır koşullu Schrödinger denklemi için bir boyutlu lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için bir nümerik yöntem vermişler, bu fark şemalarını iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemini kullanarak çözüp nümerik örneklerle kullandıkları yöntemi desteklemişlerdir (Ashyralyev & Sirma, 2009b).

Ashyralyev ve Ürün, A pozitif tanımlı self adjoint bir operatör olmak üzere, bir H Hilbert uzayında p parametrelili

$$\begin{cases} iu_t + Au + iu = f(t) + p, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi \end{cases}$$

sınır değer probleminin nümerik çözümü için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması oluşturmuşlardır. Bu fark şemasının iyi tanımlılığını ispatlamış ve Schrödinger denklemi için üç tip kontrol parametre problemi için kararlılık kestirimleri elde etmişlerdir (Ashyralyev & Ürün, 2013).

Ashyralyev ve Hiçdurmaz tarafından bir homojen olmayan zaman kesirli Schrödinger denkleme uygulanan birinci dereceden fark şeması için kararlılık analizi verilmiştir. Z-transform yöntemine dayanılarak soyut durum için kararlılık teoremleri ispatlanmıştır. Kararlılık sonuçları, çok boyutlu zaman kesirli Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemlerine uygulanmıştır. Teorik bulgular, bir ve iki boyutlu zaman kesirli Schrödinger denklemleri üzerinde sayısal deneylerle doğrulanmıştır (Hiçdurmaz & Ashyralyev, 2016).

Bu tezde zaman gecikmeli Schrödinger denklemi incelenecektir. Zaman gecikmesi birçok mühendislik uygulamasında meydana gelen en yaygın olaylardan biridir. Kontrol teoride, örneklenmiş veri kontrolü süreci, ölçümden kontrolöre iletimde zaman gecikmesinin meydana geldiği tipik bir örneğidir. Gerçeğe daha yakın modelleme yapmak için gecikme dikkate alınmalıdır.

Lineer ve lineer olmayan zaman gecikmeli Schrödinger denklemlerinin teorisi ve uygulamaları, geniş çapta araştırılmıştır (Chen, Zhou & Zhao, 2010; Guo & Shao, 2005; Guo & Yang, 2010; Wu, 1996; Zhao & Ge, 2011). Örneğin, Yang ve Yao sınır gözleminin sabit bir zaman gecikmesinden etkilendiği değişken katsayılı bir Schrödinger denkleminin sınır stabilizasyonu üzerine çalışmıştır (Yang & Yao, 2013). Bu, sabit katsayılar için ayırma ilkesini (Guo & Shao, 2005) kullanarak (Guo & Yang, 2010) verilmiş olan Schrödinger denklemi için benzer çalışmanın bir genellemesidir. Değişken

katsayılar sistemi, özdeğer ve özvektörlerin asimptotik analizle hesaplanmasına dayanan çözümü bulmak için fazla karmaşık hale getirir. (Wu, 1996) kitabında lineer olmayan Schrödinger denkleminin gecikmeli lokal çözümlerinin varlığı ve tekliği araştırılmıştır. (Chen, Zhou & Zhao, 2010) çalışmasında, ayrık lineer olmayan gecikmeli Schrödinger denklemi için genel çekim noktasının varlığı ve üst yarı sürekliliği oluşturulmuştur. (Zhao & Ge, 2011) makalesinde, bir Hamiltonyen sistem için geometrik tekil pertürbasyon teorisi, diferansiyel manifold teorisi ve düzgün pertürbasyon analizini uygulayarak, lineer olmayan dağınık gecikmeli Schrödinger denkleminin hareketli dalgaları incelenmiştir. Son olarak, gecikme teriminin diğer operatör terimine göre aynı dereceden bir operatör olduğu parabolik gecikmeli denklemler için gecikmeli kısmi diferansiyel denklemlerin teorisi ve uygulamaları geniş çapta araştırılmıştır (Agirseven, 2012; Ardito & Ricciardi, 1980; Ashyralyev & Agirseven, 2013; Ashyralyev & Agirseven, 2014; Ashyralyev & Sobolevskii, 2004; Blasio, 2003; Sinestrari, 1984).

Zaman gecikmeli Schrödinger denklemleri için sonlu fark şemaları yöntemi kullanılarak yapılan az sayıda çalışma mevcuttur (Agirseven, 2018; Ashyralyev & Agirseven, 2020). Bu yüzden bu tür zaman gecikmeli problemlerin araştırılması hem literatüre önemli bir katkı sağlayacak hem de ileride farklı sayısal yöntemlerle karşılaştırma sağlanabilmesi için bir zemin oluşturacaktır. Yapılan modellemelerin daha gerçekçi olması için zaman gecikmesi teriminin konulması önemlidir fakat bu tür problemlerin çözümlerinin zorluğu araştırmacıları gecikme terimini ihmal etmeye yönlendirmektedir. Literatürde zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için yapılan yeterince çalışma olmadığı için bu tezde zaman gecikmeli Schrödinger denklemi örneklenerek hem analitik hem de nümerik çözümler verilip ileride bu tip problemlerin çözümü için bir kaynak oluşturulması sağlanacaktır.

Bu çalışmada H Hilbert uzayı, A self-adjoint pozitif tanımlı operatör, $A \geq \delta$, $\delta > 0$, $0 \leq b \leq 1$ ve φ verilen eleman olmak üzere; zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} i \frac{dv}{dt} + Av(t) = bAv([t]), & t > 0, \\ v(0) = \varphi \end{cases}$$

başlangıç değer problemi araştırılacaktır. Burada $[t]$ en küçük tam sayı fonksiyonudur.

2. Bölümde lineer zaman gecikmeli Schrödinger denklemleri ele alınarak Laplace ve Fourier dönüşümü ve Fourier serileri yöntemi kullanılarak analitik çözümler elde edilmiştir.

3. Bölümde r -modifiyeli Crank-Nicolson fark şeması incelenip kararlılık kestirimleri üzerine teorem kurulup üç tip Schrödinger problemi için teoremlerin uygulaması sağlanmıştır. Bu nedenle bu tez Schrödinger tipi kısmi diferansiyel denklemler tarafından tanımlanan sistemlerin kararlılık kestirimlerinin elde etmek için büyük öneme sahiptir.

4. Bölümde zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için iki tip başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problemlerin nümerik çözümleri için r -modifiyeli Crank-Nicolson fark şemaları kullanılmıştır. Bu fark şemasıyla elde edilecek yaklaşık çözümleri hesaplamak için MATLAB programlama diliyle kapsamlı bir program yazılmıştır. Elde edilen sonuçlar, tam çözümden elde edilen değerler ile karşılaştırılarak hata analizi yapılmıştır. Sonuçlar bir çizelge ile sunulurken r -modifiyeli Crank-Nicolson fark şemaları yönteminin oldukça elverişli olduğu ve birçok probleme uygulanabilirliği gösterilmiştir.

5. Bölüm sonuçlar ve tartışma bölümü olup yapılan çalışmaların sonucu ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar ifade edilmiştir.

BÖLÜM 2

ZAMAN GECİKMELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ANALİTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde zaman gecikmeli Schrödinger denkleminin Fourier serileri, Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü yöntemleri kullanılarak analitik çözümleri bulunmuştur. Öncelikle Fourier serileri yöntemi kullanılarak elde edilen analitik çözümler örneklerle verilmiştir.

Örnek 2.1. Zaman gecikmeli bir boyutlu Schrödinger denklem için

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -0.1 \left[\frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2} + e^{i[t]} \sin x \right], \\ 0 < t < \infty, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

başlangıç ve sınır değer problemi incelenmiştir.

Çözüm. (2.1) probleminin Fourier serileri yöntemi ile çözümü elde edilecektir. A 'nın tanım kümesi

$$D(A) = \{u: u, u'' \in C[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}$$

ile verilsin. A operatörü, $Au(x) = -u''(x)$ ile tanımlanmak üzere;

$$Au(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(x) \neq 0,$$

Sturm-Liouville problemi

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = 0, & 0 < x < \pi, & u(x) \neq 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

sınır değer problemi olarak verilebilir.

(2.2) problemi için denkleme ait karakteristik denklem $-m^2 + \lambda = 0$ 'dır.

$\lambda > 0$ için $m_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ olduğundan

$$u(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{+\sqrt{\lambda}x}$$

genel çözümü bulunur. Başlangıç koşulları kullanılarak

$$u(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$u(\pi) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{+\sqrt{\lambda}\pi} = 0$$

elde edilir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{\lambda}\pi} & e^{+\sqrt{\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi} \neq 0$$

olduğundan, bu denklem sisteminin çözümünden $c_1 = c_2 = 0$ 'dır. Buradan $u(x) = 0$ olarak bulunur.

$\lambda = 0$ için $u(x) = c_1 + c_2 x$ olur. Genel çözüme başlangıç koşulları uygulanırsa

$$c_1 = c_2 = 0$$

olarak elde edilir. Böylece $u(x) = 0$ olur.

$\lambda < 0$ için $m_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ olduğundan

$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ genel çözümü bulunur. Genel çözüme başlangıç koşulları uygulanırsa

$$u(0) = c_1 = 0,$$

$$u(\pi) = c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$$

elde edilir.

$c_2 \neq 0$ olduğu kabul edilirse $\sqrt{-\lambda_k}\pi = k\pi \Rightarrow \lambda_k = -k^2, \quad k = 1,2,3, \dots$ için (2.2)

probleminin çözümleri

$u_k(x) = \sin(kx), \quad k = 1,2,3, \dots$ olarak elde edilir.

O halde

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx)$$

Fourier serileri çözümü olmak üzere bu çözüm (2.1) probleminde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} i \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) \sin(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx) \\ \qquad \qquad \qquad = -0.1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} -A_k(t) k^2 \sin(kx) + e^{it} \sin x \right], \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) \sin(kx) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad (2.3)$$

elde edilir.

Buradan $t \in [0,1]$ için (2.3) problemi yeniden yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} i \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) \sin(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx) \\ \qquad \qquad \qquad = -0.1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} -A_k(0) k^2 \sin(kx) + \sin x \right], \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) \sin(kx) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad (2.4)$$

bulunur. $\sin(kx)$ lerin katsayıları eşitlenerek

$$\left\{ \begin{array}{l} iA'_1(t) + A_1(t) = 0, \\ A_1(0) = 1 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Bu problemin çözümü $A_1(t) = e^{it}$ 'dir.

$k \neq 1$ için incelendiğinde

$$\left\{ \begin{array}{l} iA'_k(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\ A_k(0) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \end{array} \right.$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Bu durumda $k = 2, 3, \dots$ için $A_k(t) = 0$ aşikâr çözümü bulunur.

Böylece $t \in [0,1]$ için kurulan (2.4) probleminin çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx) = e^{it} \sin x$$

olur.

$u(t, x) = e^{it} \sin x$ fonksiyonunun, her $t \in [m, m+1]$, $m \in \mathbb{N}$ için (2.1) probleminin çözümü olduğu tümevarım ile gösterilecektir. $t \in [m-1, m]$ için (2.1) probleminin çözümünün $u(t, x) = e^{it} \sin x$ olduğu kabul edilsin. O halde $u(m, x) = e^{im} \sin x$ olur.

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx) = e^{it} \sin x$$

seri çözümü $t \in [m, m+1]$ için (2.1) probleminde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} i \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) \sin(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(kx) \\ \qquad \qquad \qquad = -0.1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} -A_k(m) k^2 \sin(kx) + e^{im} \sin x \right], \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\ u(m, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(m) \sin(kx) = e^{im} \sin x \end{array} \right. \quad (2.6)$$

başlangıç değer problemi elde edilir. (2.6) probleminde $\sin(kx)$ lerin katsayıları eşitlenerek

$$\left\{ \begin{array}{l} iA'_1(t) + A_1(t) = 0, \\ A_1(m) = e^{im} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

bulunur. Bu durumda $A_1(t) = e^{it}$ 'dir. (2.6) problemi $k \neq 1$ için incelendiğinde

$$\left\{ \begin{array}{l} iA'_k(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\ A_k(m) = 0, \quad k = 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

elde edilir. Bu durumda $k = 2, 3, \dots$ için $A_k(t) = 0$ aşıkâr çözümü bulunur. Böylece (2.6) probleminin çözümü $u(t, x) = e^{it} \sin x$ 'dir. Sonuç olarak her $t \geq 0$ için

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(kx) = e^{it} \sin x$$

fonksiyonu (2.1) probleminin çözümü olarak elde edilir.

Örnek 2.2. Zaman gecikmeli bir boyutlu Schrödinger denklem için

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -0.1 \left[\frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2} + e^{i[t]} \cos x \right], \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

başlangıç ve sınır değer problemi göz önüne alınmıştır.

Çözüm. (2.8) problemine Fourier serileri yöntemi uygulanmıştır. A operatörünün tanım kümesi

$$D(A) = \{u: u, u'' \in C[0, \pi], u'(0) = u'(\pi) = 0\},$$

ile verilsin. A operatörü, $Au(x) = -u''(x)$ ile tanımlanmak üzere;

$$Au(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(x) \neq 0,$$

Sturm-Liouville problemi

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad u(x) \neq 0, \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

sınır değer problemi ile verilebilir. (2.9) problemi için denkleme ait karakteristik denklem $-m^2 + \lambda = 0$ biçimindedir.

$\lambda > 0$ için $m_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ olduğundan

$$u(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{+\sqrt{\lambda}x}$$

genel çözümü bulunur. Başlangıç koşulları uygulanırsa

$$u'(x) = -\sqrt{\lambda} c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + \sqrt{\lambda} c_2 e^{+\sqrt{\lambda}x}$$

olduğundan

$$u'(0) = -\sqrt{\lambda} c_1 + \sqrt{\lambda} c_2 = 0,$$

$$u'(\pi) = -\sqrt{\lambda} c_1 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} + \sqrt{\lambda} c_2 e^{+\sqrt{\lambda}\pi} = 0$$

denklem sistemi oluşturulur.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}\pi} & \sqrt{\lambda} e^{+\sqrt{\lambda}\pi} \end{vmatrix} = \lambda (e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{+\sqrt{\lambda}\pi}) \neq 0$$

olduğundan $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir. Buradan (2.9) probleminin $u(x) = 0$ aşikâr çözümü bulunur.

$\lambda = 0$ için $u(x) = c_1 + c_2x$ 'dir. Genel çözümüne başlangıç koşulları uygulanırsa

$$u'(x) = c_2$$

olduğundan

$$u'(0) = c_2 = 0,$$

$$u'(\pi) = c_2 = 0$$

elde edilir. Buradan $\lambda_0 = 0$ için $u_0(x) = c_1 = 1$ yani $(\lambda_0, u_0(x)) = (0,1)$ olur.

$\lambda < 0$ için $m_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ olduğundan

$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ genel çözümü bulunur. Genel çözüme başlangıç koşulları uygulanırsa

$$u'(x) = \sqrt{-\lambda} c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - \sqrt{-\lambda} c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) \text{ olduğundan}$$

$$u'(0) = \sqrt{-\lambda} c_2 = 0, \quad c_2 = 0,$$

$$u'(\pi) = \sqrt{-\lambda} c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) - \sqrt{-\lambda} c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$-\sqrt{-\lambda} c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) = 0$$

bulunur. $c_1 \neq 0$ kabul edilirse $\sqrt{-\lambda_k} = k$ ve $\lambda_k = -k^2$, $k = 1,2,3, \dots$ olur. Böylece (2.9) probleminin çözümü

$$u_k(x) = \cos(kx), \quad k = 0,1,2, \dots, \text{ elde edilir.}$$

O halde

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(kx)$$

Fourier serileri çözümü (2.8) probleminde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} i \sum_{k=0}^{\infty} B'_k(t) \cos(kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) k^2 \cos(kx) \\ \quad = -0.1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} -B_k([t]) k^2 \cos(kx) + e^{i[t]} \cos x \right], \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(0) \cos(kx) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad (2.10)$$

elde edilir.

$t \in [0,1]$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} i \sum_{k=0}^{\infty} B'_k(t) \cos(kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) k^2 \cos(kx) \\ \qquad \qquad \qquad = -0.1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} -B_k(0) k^2 \cos(kx) + \cos x \right], \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(0) \cos(kx) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad (2.11)$$

olur. Buradan $\cos(kx)$ lerin katsayıları eşitlenerek

$$\left\{ \begin{array}{l} iB'_1(t) + B_1(t) = 0, \\ B_1(0) = 1 \end{array} \right.$$

başlangıç değer probleminin çözümü $B_1(t) = e^{it}$ bulunur.

$k \neq 1$ için incelendiğinde

$$\left\{ \begin{array}{l} iB'_k(t) + k^2 B_k(t) = 0, \\ B_k(0) = 0, \quad k = 0, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

başlangıç değer probleminin $k = 0, 2, 3, \dots$ için $B_k(t) = 0$ aşıkâr çözümü elde edilir.

$t \in [0,1]$ için (2.11) probleminin

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(kx) = e^{it} \cos x$$

çözümü bulunur.

$$u(t, x) = e^{it} \cos x \text{ fonksiyonunun her } t \in [m, m+1], m \in \mathbb{N} \text{ için (2.8)}$$

probleminin çözümü olduğu tümevarım ile gösterilecektir. $t \in [m-1, m]$ için (2.8)

probleminin çözümünün $u(t, x) = e^{it} \cos x$ olduğu kabul edilsin. O halde

$$u(m, x) = e^{im} \cos x \text{ 'dir.}$$

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(kx)$$

seri çözümü $t \in [m, m+1]$ için (2.8) probleminde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} i \sum_{k=0}^{\infty} B'_k(t) \cos(kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) k^2 \cos(kx) \\ \qquad \qquad \qquad = -0.1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} -B_k(m) k^2 \cos(kx) + e^{im} \cos x \right], \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\ u(m, x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(m) \cos(kx) = e^{im} \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad (2.12)$$

elde edilir. $\cos(kx)$ 'lerin katsayıları eşitlenerek

$$\left\{ \begin{array}{l} iB'_1(t) + B_1(t) = 0 \\ B_1(m) = e^{im} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

başlangıç değer probleminin çözümü $B_1(t) = e^{it}$ bulunur. (2.12) problemi $k \neq 1$ için incelendiğinde

$$\left\{ \begin{array}{l} iB'_k(t) + k^2 B_k(t) = 0, \\ B_k(m) = 0, \quad k = 0, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

başlangıç değer probleminin çözümü $k = 0, 2, 3, \dots$ için $B_k(t) = 0$ bulunur. Böylece (2.12) probleminin çözümü $u(t, x) = e^{it} \cos x$ 'dir. Sonuç olarak her $t \geq 0$ için

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(kx) = e^{it} \cos x$$

fonksiyonu (2.8) probleminin çözümü olarak elde edilir.

Örnek 2.3. Zaman gecikmeli bir boyutlu Schrödinger denklemi için

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -0.1 \left[\frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2} + 4e^{i[t]} \cos(2x) \right], \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, x) = \cos(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \pi), \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

başlangıç ve sınır değer problemi incelenmiştir.

Çözüm. (2.14) probleminin çözümü için Fourier serileri yöntemi kullanılmıştır.

$$D(A) = \{u: u, u'' \in C[0, \pi], u(0) = u(\pi), u'(0) = u'(\pi)\},$$

A 'nın tanım kümesi olmak üzere; $Au(x) = -u''(x)$ biçiminde tanımlanan A operatörü için

$$Au(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(x) \neq 0,$$

Sturm-Liouville problemi

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \quad u(x) \neq 0, \\ u(0) = u(\pi), & u'(0) = u'(\pi) \end{cases} \quad (2.15)$$

sınır değer problemi olarak yazılabilir.

(2.15) probleminin karakteristik denklemi $-m^2 + \lambda = 0$ olur.

$\lambda > 0$ için $m_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ bulunur. Elde edilen

$$u(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$$

genel çözüme başlangıç koşulları uygulanırsa

$$u'(x) = -\sqrt{\lambda}c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + \sqrt{\lambda}c_2 e^{\sqrt{\lambda}x} \text{ olduğundan}$$

$$u(0) = u(\pi), \quad c_1 + c_2 = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{+\sqrt{\lambda}\pi},$$

$$u'(0) = u'(\pi), \quad \sqrt{\lambda}(c_2 - c_1) = \sqrt{\lambda}(c_2 e^{\sqrt{\lambda}\pi} - c_1 e^{-\sqrt{\lambda}\pi})$$

bulunur. Buradan

$$c_1(1 - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) + c_2(1 - e^{\sqrt{\lambda}\pi}) = 0,$$

$$c_1(e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - 1) + c_2(1 - e^{\sqrt{\lambda}\pi}) = 0$$

denklem sistemi için

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - e^{-\sqrt{\lambda}\pi} & 1 - e^{\sqrt{\lambda}\pi} \\ e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - 1 & 1 - e^{\sqrt{\lambda}\pi} \end{vmatrix} = 4 - 2(e^{-\sqrt{\lambda}\pi} + e^{\sqrt{\lambda}\pi}) \neq 0$$

olarak bulunur. Bu durumda $c_1 = c_2 = 0$ olur.

$\lambda = 0$ için $u(x) = c_1 + c_2 x$ 'dir. Genel çözüme başlangıç koşulları uygulanırsa

$$u'(x) = c_2 \text{ olduğundan}$$

$$u(0) = u(\pi), \quad c_1 = c_1 + c_2\pi, \quad c_2 = 0$$

bulunur.

$$u'(0) = u'(\pi), \quad c_2 = c_2$$

elde edilir. $u_0(x) = c_1$, $c_1 = 1$ seçilirse $u_0(x) = 0$ yani $(\lambda_0, u_0(x)) = (0,1)$ olur.

$\lambda < 0$ için $m_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ olduğundan

$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ genel çözümünü bulunur. Genel çözüme başlangıç koşulları uygulanırsa

$$u'(x) = \sqrt{-\lambda}c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x) - \sqrt{-\lambda}c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

olduğundan

$$u(0) = u(\pi), c_1 = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi), \quad (2.16)$$

$$u'(0) = u'(\pi), c_2 = c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) - c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.16) ve (2.17) denklemleri düzenlenirse

$$c_1[1 - \cos(\sqrt{-\lambda}\pi)] - c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0,$$

$$c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + c_2[1 - \cos(\sqrt{-\lambda}\pi)] = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) & -\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) \\ \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) & 1 - \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) \end{vmatrix} = 2(\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) - 1) = 0$$

olsun. Buradan

$$(\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) - 1) = 0 \text{ ise } \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = 1 \text{ olur.}$$

$\sqrt{-\lambda_k} = 2k \Rightarrow \lambda_k = -4k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$ için problemin çözümleri, genel çözümde c_1, c_2 keyfi sabitleri uygun biçimde seçilerek

$$u_k(x) = \cos(2kx), u_k(x) = \sin(2kx), \quad k = 1, 2, \dots$$

bulunur.

O halde

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(2kx)$$

Fourier serileri çözümü (2.14) problemine uygulanırsa

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) \sin(2kx) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(2kx) \\
+ i \sum_{k=0}^{\infty} B'_k(t) \cos(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) k^2 \cos(2kx) \\
= -0.1 \left[-4 \sum_{k=1}^{\infty} A_k([t]) k^2 \sin(2kx) \right. \\
\left. -4 \sum_{k=0}^{\infty} B_k([t]) k^2 \cos(2kx) + 4e^{i[t]} \cos(2x) \right], \quad (2.18) \\
0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\
u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) \sin(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(0) \cos(2kx) = \cos(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi
\end{array} \right.$$

elde edilir.

$t \in [0,1]$ için

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) \sin(2kx) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(2kx) \\
+ i \sum_{k=0}^{\infty} B'_k(t) \cos(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) k^2 \cos(2kx) \\
= -0.1 \left[-4 \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) k^2 \sin(2kx) \right. \\
\left. -4 \sum_{k=0}^{\infty} B_k(0) k^2 \cos(2kx) + 4 \cos(2x) \right], \quad (2.19) \\
0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\
u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) \sin(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(0) \cos(2kx) = \cos(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi
\end{array} \right.$$

elde edilir. $\sin(2kx)$ lerin katsayıları eşitlenerek

$$\begin{cases}
iA'_k(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\
A_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots
\end{cases}$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Buradan aşikâr çözüm $A_k(t) = 0, k = 1, 2, \dots$ bulunur.

$\cos(2kx)$ 'lerin katsayıları eşitlenerek

$$\begin{cases} iB_1'(t) + B_1(t) = 0, \\ B_1(0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer problemi bulunur. Bu durumda $B_1(t) = e^{it}$ olur.

$k \neq 1$ için incelendiğinde

$$\begin{cases} iB_k'(t) + k^2 B_k(t) = 0, \\ B_k(0) = 0, \quad k = 0, 2, 3, \dots \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $k = 0, 2, 3, \dots$ için $B_k(t) = 0$ bulunur. Buradan (2.19) probleminin çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(2kx) = e^{it} \cos(2x)$$

olarak elde edilir.

$u(t, x) = e^{it} \cos(2x)$ fonksiyonunun her $t \in [m, m+1]$, $m \in \mathbb{N}$ için (2.14) probleminin çözümü olduğu tümevarım ile gösterilecektir. $t \in [m-1, m]$ için (2.14) probleminin çözümünün $u(t, x) = e^{it} \cos(2x)$ olduğu kabul edilsin. O halde $u(m, x) = e^{im} \cos(2x)$ 'dir.

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(2kx)$$

seri çözümü $t \in [m, m+1]$ için (2.14)'de yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \sum_{k=1}^{\infty} A'_k(t) \sin(2kx) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin(2kx) \\
+ i \sum_{k=0}^{\infty} B'_k(t) \cos(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) k^2 \cos(2kx) \\
= -0.1 \left[-4 \sum_{k=1}^{\infty} A_k(m) k^2 \sin(2kx) \right. \\
\left. -4 \sum_{k=0}^{\infty} B_k(m) k^2 \cos(2kx) + 4e^{im} \cos(2x) \right], \quad (2.20) \\
0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty, \\
u(m, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(m) \sin(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(m) \cos(2kx) = e^{im} \cos(2x), \\
0 \leq x \leq \pi
\end{array} \right.$$

elde edilir. $\sin(2kx)$ lerin katsayıları eşitlenerek

$$\begin{cases}
iA'_k(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\
A_k(m) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots
\end{cases}$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Buradan aşikâr çözüm $A_k(t) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$ bulunur.

$\cos(2kx)$ lerin katsayılarını eşitleyerek

$$\begin{cases}
iB'_1(t) + B_1(t) = 0, \\
B_1(m) = e^{im}
\end{cases}$$

başlangıç değer problemi bulunur. Bu durumda $B_1(t) = e^{it}$ 'dir.

$k \neq 1$ için incelendiğinde

$$\begin{cases}
iB'_k(t) + k^2 B_k(t) = 0 \\
B_k(m) = 0, \quad k = 0, 2, 3, \dots
\end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $k = 0, 2, 3, \dots$ için $B_k(t) = 0$ bulunur. Buradan (2.20) probleminin çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(2kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos(2kx) = e^{it} \cos(2x)$$

olarak elde edilir.

Bu durumda (2.18) probleminin $t \geq 0$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{it} \cos(2x)$$

olarak elde edilir.

Aşağıda verilen örneklerde Laplace dönüşümü metodu kullanılarak elde edilen analitik çözümler araştırılmıştır.

Örnek 2.4. Zaman gecikmeli bir boyutlu Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -0.1 \left[\frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2} - e^{-i[t]} e^{-x} \right], & t > 0, x > 0, \\ u(0, x) = e^{-x}, & 0 \leq x < \infty, \\ u(t, 0) = e^{-it}, & u(t, \infty) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

başlangıç ve sınır değer problemi incelenmiştir.

Çözüm. $m \leq t \leq m + 1, m = 0, 1, 2, \dots$ için (2.21) probleminin çözümü adım-adım bulunacaktır. $0 \leq t \leq 1$ için (2.21) problemi

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, x) = e^{-x}, & 0 \leq x < \infty, \\ u(t, 0) = e^{-it}, & u(t, \infty) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

biçimindedir.

$\mathcal{L}\{u(t, x)\} = u(t, s)$, $u_x(t, 0) = \beta(t)$ olmak üzere; (2.22) probleminde x 'e göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} iu_t(t, s) - s^2 u(t, s) + se^{-it} + \beta(t) = 0, & t > 0, \\ u(0, s) = \frac{1}{s+1}, & u(t, \infty) = 0 \end{cases}$$

başlangıç problemi elde edilir. $\mathcal{L}\{u(t, s)\} = u(\lambda, s)$ olmak üzere; bu probleme t 'ye göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} i\lambda u(\lambda, s) - i \frac{1}{s+1} - s^2 u(\lambda, s) = -\frac{s}{\lambda+i} - \beta(\lambda), \\ u(\lambda, \infty) = 0 \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$u(\lambda, s) = \frac{1}{(i + \lambda)(s + 1)} + \frac{i}{(\lambda + is^2)} \left(\frac{1}{\lambda + i} + \beta(\lambda) \right) \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.23)'ün x 'e göre ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$u(\lambda, x) = \frac{1}{(i + \lambda)} e^{-x} + \left(\frac{1}{\lambda + i} + \beta(\lambda) \right) \frac{-\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda}} \left(e^{\sqrt{i\lambda}x} - e^{-\sqrt{i\lambda}x} \right)$$

olur. $x \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$u(\lambda, \infty) = \left(\frac{1}{\lambda + i} + \beta(\lambda) \right) \frac{-\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda}} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{i\lambda}x}$$

elde edilir. Böylece $u(\lambda, \infty) = 0$, $\lambda > 0$ koşulu kullanılarak

$$\beta(\lambda) = -\frac{1}{\lambda + i}$$

olur. Bu durumda çözüm

$$u(\lambda, x) = \frac{1}{(i + \lambda)} e^{-x}$$

olarak bulunur. t 'ye göre ters Laplace dönüşümü uygulanarak

$$u(t, x) = e^{-it} e^{-x}$$

elde edilir. Böylece $0 \leq t \leq 1$ için (2.21) probleminin çözümü

$$u(t, x) = e^{-it} e^{-x} \text{ olarak bulunur.}$$

$u(t, x) = e^{-it} e^{-x}$ fonksiyonun $m \leq t \leq m + 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$ için (2.21) probleminin çözümü olduğu tümevarım yöntemiyle gösterilecektir. $m - 1 \leq t \leq m$, $m = 1, 2, \dots$ aralığında çözümün $u(t, x) = e^{-it} e^{-x}$ olduğu kabul edilsin. O halde $m \leq t \leq m + 1$ için (2.21) problemi

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(m, x) = e^{-im} e^{-x}, & 0 \leq x < \infty, \\ u(t, 0) = e^{-it}, & u(t, \infty) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

biçimindedir.

$\mathcal{L}\{u(t, x)\} = u(t, s)$, $u_x(t, 0) = \beta(t)$ olmak üzere; (2.24) probleminde x 'e göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} iu_t(t, s) - s^2 u(t, s) + se^{-it} + \beta(t) = 0, & t \geq 0, \\ u(0, s) = \frac{1}{s + 1}, & u(t, \infty) = 0 \end{cases}$$

başlangıç ve sınır değer problemi elde edilir. $\mathcal{L}\{u(t, s)\} = u(\lambda, s)$ olmak üzere; bu probleme t 'ye göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} i\lambda u(\lambda, s) - i\frac{1}{s+1} - s^2u(\lambda, s) = -\frac{s}{\lambda+i} - \beta(\lambda), \\ u(\lambda, \infty) = 0 \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$u(\lambda, s) = \frac{1}{(i+\lambda)(s+1)} + \frac{i}{(\lambda+is^2)} \left(\frac{1}{\lambda+i} + \beta(\lambda) \right) \quad (2.25)$$

elde edilir. (2.25)'ün x 'e göre ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$u(\lambda, x) = \frac{1}{(i+\lambda)} e^{-x} + \left(\frac{1}{\lambda+i} + \beta(\lambda) \right) \frac{-\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda}} \left(e^{\sqrt{i\lambda}x} - e^{-\sqrt{i\lambda}x} \right)$$

olur ve $x \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$u(\lambda, \infty) = \left(\frac{1}{\lambda+i} + \beta(\lambda) \right) \frac{-\sqrt{i}}{\sqrt{2\lambda}} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{i\lambda}x}$$

elde edilir. $u(\lambda, \infty) = 0$ koşulu kullanılarak

$$\beta(\lambda) = -\frac{1}{\lambda+i}$$

olur. Bu durumda çözüm

$$u(\lambda, x) = \frac{1}{(i+\lambda)} e^{-x}$$

olarak bulunur. t 'ye göre ters Laplace dönüşümü alınarak

$$u(t, x) = e^{-it} e^{-x}$$

elde edilir. Böylece $m \leq t \leq m+1$, $m = 0, 1, 2, \dots$ için (2.21) probleminin çözümü

$$u(t, x) = e^{-it} e^{-x}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.5. Zaman gecikmeli bir boyutlu Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -0.1 \left[\frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2} - e^{-i[t]} e^{-x} \right], t > 0, x > 0, \\ u(0, x) = e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty, \\ u(t, 0) = e^{-it}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-it}, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

başlangıç ve sınır değer problemi incelenmiştir.

Çözüm. (2.26) problemin çözümü için Laplace dönüşümü ve adım adım yöntemi birlikte kullanılacaktır. $\mathcal{L}\{u(t, x)\} = u(t, s)$ olacak biçimde x 'e göre Laplace dönüşümü uygulanarak

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} - s^2 u(t, s) + su(t, 0) + u_x(t, 0) = -0.1[s^2 u([t], s) \\ -su([t], 0) - u_x([t], 0) - e^{-i[t]} \frac{1}{1+s}], & t > 0, \\ u(0, s) = \frac{1}{1+s} \end{cases}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, s)}{\partial t} - s^2 u(t, s) + (s-1)e^{-it} = -0.1[s^2 u([t], s) \\ -e^{-i[t]} \frac{s^2}{1+s}], & t > 0, \\ u(0, s) = \frac{1}{1+s} \end{cases} \quad (2.27)$$

başlangıç değer problemi elde edilir.

(2.27) probleminin çözümü adım adım yöntemi kullanılarak elde edilecektir. Bunun için $u(t, s) = \{u_m(t, s) : m-1 \leq t \leq m, m = 1, 2, \dots\}$ olacak şekilde $u(t, s)$ çözümü araştırılsın. $0 \leq t \leq 1$ için (2.27) problemi yeniden yazılırsa

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_1(t, s)}{\partial t} - s^2 u_1(t, s) + (s-1)e^{-it} = -0.1 \left[s^2 \frac{1}{1+s} - \frac{s^2}{1+s} \right], & t > 0, \\ u_1(0, s) = \frac{1}{1+s} \end{cases}$$

biçimindedir. Buradan

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_1(t, s)}{\partial t} - s^2 u_1(t, s) = (1-s)e^{-it}, & t > 0, \\ u_1(0, s) = \frac{1}{1+s} \end{cases} \quad (2.28)$$

olur. (2.28) probleminin çözümü

$$u_1(t, s) = e^{-it} \frac{1}{s+1}$$

olarak bulunur. $u_m(t, s) = e^{-it} \frac{1}{s+1}$, $m = 1, 2, \dots$ olduğu tümevarımla gösterilecektir. Bunun için $u_{m-1}(t, s) = e^{-it} \frac{1}{s+1}$ olduğu varsayalım. Bu durumda (2.27) problemi $m - 1 \leq t \leq m$ için yeniden yazılırsa

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_m(t, s)}{\partial t} - s^2 u_m(t, s) + (s - 1)e^{-it} = -0.1 \left[e^{-im} s^2 \frac{1}{1+s} - e^{-im} \frac{s^2}{1+s} \right], t > 0, \\ u_m(m, s) = e^{-im} \frac{1}{1+s} \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_m(t, s)}{\partial t} - s^2 u_m(t, s) = (1 - s)e^{-it}, & t > 0, \\ u_m(m, s) = e^{-im} \frac{1}{1+s} \end{cases} \quad (2.29)$$

başlangıç değer problemi elde edilir. (2.29) probleminin çözümü

$$u_m(t, s) = e^{-it} \frac{1}{s+1}$$

olarak elde edilir. O halde (2.27) probleminin çözümü

$$u(t, s) = e^{-it} \frac{1}{s+1}$$

şeklinindedir. $u(t, s)$ çözümüne ters Laplace dönüşümü uygulanarak (2.26) probleminin çözümü

$$u(t, x) = e^{-it} e^{-x}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 2.6. Zaman gecikmeli bir boyutlu Schrödinger denklem için

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -0.1 \left[\frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2} - e^{-i[t]} e^{-x^2} (4x^2 - 2) \right] \\ \quad + e^{-it} \left[1 - \frac{1}{4} (4x^2 - 2) \right] e^{-x^2}, & t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(0, x) = e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (2.30)$$

başlangıç ve sınır değer problemi ele alalım.

Çözüm. (2.30) probleminin çözümü için Fourier dönüşümü kullanılacaktır.

BÖLÜM 3

ZAMAN GECİKMELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN DİFERANSİYEL VE FARK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN KARARLILIK TEOREMLERİ

3.1. Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi için Diferansiyel Problemin Çözümü Üzerine

Bu bölümde, H Hilbert uzayında zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} i \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = bAu([t]), & t > 0, \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (3.1)$$

başlangıç değer problemi incelenecektir. Burada A , H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı operatördür. Bu problemin çözümü için verilen kararlılık kestirimleri üzerine teoremin (Agirseven, 2018) ispatı verilecektir. Ayrıca (3.1) probleminin yaklaşık çözümleri için r -modifiyeli Crank-Nicolson fark şeması ve bu şemanın çözümlerinin kararlılık kestirimleri üzerine teorem ispatıyla birlikte verilecektir.

Teorem 3.1. $\varphi \in D(A)$ ve $0 \leq b \leq 1$ olmak üzere, (3.1) probleminin $u(t)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.

- i. $\sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_H \leq \|\varphi\|_H$
- ii. $\sup_{0 \leq t < \infty} \|u'(t)\|_H + \sup_{0 \leq t < \infty} \|Au(t)\|_H \leq 2\|A\varphi\|_H$

İspat. (3.1) probleminin çözümünü elde etmek için adım adım yöntemi kullanılacaktır.

$0 \leq t \leq 1$ için (3.1) problemi yeniden yazılırsa

$$\begin{cases} i \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = bA\varphi, & 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (3.2)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{iAt}u(0) + b \int_0^t (-i)A\varphi e^{iA(t-s)} ds \\ &= e^{iAt}\varphi + bA \int_0^t (-i)e^{iA(t-s)} ds \varphi \\ &= e^{iAt}\varphi + bA \left[A^{-1} \frac{(-i)e^{iAt}e^{-iAs}}{(-i)} \right] \Big|_0^t \varphi \\ &= e^{iAt}\varphi + bA \left[A^{-1}[I - e^{iAt}] \right] \varphi \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$u(t) = b\varphi + (1 - b)e^{iAt}\varphi \quad (3.3)$$

olarak elde edilir. Burada üçgen eşitsizliği ve $\|e^{iAt}\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$\|u(t)\|_H \leq b\|\varphi\|_H + (1 - b)\|e^{iAt}\|_{H \rightarrow H}\|\varphi\|_H,$$

$$\|u(t)\|_H \leq \|\varphi\|_H$$

olur. Böylece

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|u(t)\|_H \leq \|\varphi\|_H \quad (3.4)$$

elde edilir.

$n \leq t \leq n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$ için (3.1) problemi yeniden yazılırsa

$$\begin{cases} i \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = bAu(n), & n < t < n + 1, \\ u(n) = \varphi_n \end{cases}$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} i \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = bA\varphi_n, & n < t < n + 1, \\ u(n) = \varphi_n \end{cases} \quad (3.5)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{iA(t-n)}u(n) + b \int_n^t (-i)A\varphi_n e^{iA(t-s)} ds \\
&= e^{iA(t-n)}\varphi_n + bA \int_n^t (-i)e^{iA(t-s)} ds\varphi_n \\
&= e^{iA(t-n)}\varphi_n + bA \left[A^{-1} \frac{(-i)e^{iA(t-s)}}{(-i)} \right] \Big|_n^t \varphi_n \\
&= e^{iA(t-n)}\varphi_n + bA \left[A^{-1}[I - e^{iA(t-n)}] \right] \varphi_n \\
&= b\varphi_n + (1-b)e^{iA(t-n)}\varphi_n
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$u(t) = bu(n) + (1-b)e^{iA(t-n)}u(n) \quad (3.6)$$

olarak elde edilir. Burada üçgen eşitsizliği ve $\|e^{iA(t-n)}\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ olduğu kullanılarak

$$\|u(t)\|_H \leq b\|u(n)\|_H + (1-b)\|e^{iAt}\|_{H \rightarrow H}\|u(n)\|_H,$$

$$\|u(t)\|_H \leq \|u(n)\|_H$$

olur. Buradan

$$\sup_{n \leq t \leq n+1} \|u(t)\|_H \leq \|u(n)\|_H \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.4) ile (3.7) birlikte düşünülerek her $n = 1, 2, \dots$, için

$$\sup_{n \leq t \leq n+1} \|u(t)\|_H \leq \|\varphi\|_H$$

sağlanır. Böylece (i)'de verilen kararlılık kestirimi

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|_H \leq \|\varphi\|_H$$

elde edilir.

$0 \leq t \leq 1$ için elde edilen çözüm fonksiyonu için (3.3) kullanılırsa

$$u'(t) = i(1-b)Ae^{iAt}\varphi, \quad (3.8)$$

$$Au(t) = bA\varphi + (1-b)Ae^{iAt}\varphi \quad (3.9)$$

formülleri elde edilir. (3.8) ve (3.9) ile üçgen eşitsizliği ve $\|e^{iAt}\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ olduğu

kullanılarak

$$\|u'(t)\|_H \leq (1-b)\|A\varphi\|_H$$

$$\leq \|A\varphi\|_H,$$

$$\|Au(t)\|_H \leq b\|A\varphi\|_H + (1-b)\|A\varphi\|_H$$

$$\leq \|A\varphi\|_H$$

eşitsizlikleri bulunur. Buradan

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|u'(t)\|_H + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Au(t)\|_H \leq 2\|A\varphi\|_H \quad (3.10)$$

elde edilir.

$n \leq t \leq n+1, n = 1, 2, 3, \dots$ için elde edilen (3.6) çözüm fonksiyonundan

$$u'(t) = i(1-b)Ae^{iA(t-n)}u(n) \quad (3.11)$$

$$Au(t) = bAu(n) + (1-b)Ae^{iA(t-n)}u(n) \quad (3.12)$$

formülleri elde edilir. (3.11) ve (3.12) ile üçgen eşitsizliği ve $\|e^{iA(t-n)}\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ kullanılarak

$$\begin{aligned} \|u'(t)\|_H &\leq (1-b)\|Au(n)\|_H \\ &\leq \|Au(n)\|_H, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Au(t)\|_H &\leq b\|Au(n)\|_H + (1-b)\|Au(n)\|_H \\ &\leq \|Au(n)\|_H \end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur. Buradan

$$\sup_{n \leq t \leq n+1} \|u'(t)\|_H + \sup_{n \leq t \leq n+1} \|Au(t)\|_H \leq 2\|Au(n)\|_H \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.10) ve (3.13) birlikte düşünüldüğünde her $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\sup_{n \leq t \leq n+1} \|u'(t)\|_H + \sup_{n \leq t \leq n+1} \|Au(t)\|_H \leq 2\|A\varphi\|_H$$

olur. Dolayısıyla (ii)'de verilen kararlılık kestirimi

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|u'(t)\|_H + \sup_{0 \leq t < \infty} \|Au(t)\|_H \leq 2\|A\varphi\|_H$$

elde edilir.

Böylelikle Teorem 3.1. kanıtlanmış olur.

Teorem 3.1. zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için (3.1) başlangıç değer probleminin çözümünün kararlı olduğunu göstermektedir. Ancak tam çözümü elde etmek her zaman mümkün olmayabilir. Bu nedenle yaklaşık çözümleri elde etmek için sayısal yöntemler geliştirmek önemlidir.

3.2. Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi için Fark Probleminin Çözümü Üzerine

Yaklaşık çözümleri elde etmek için fark şemaları yönteminin oldukça elverişli olduğu bilinmektedir. (3.1) ile verilen zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için

başlangıç değer probleminin abstract halinin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi için r-modifiyeli Crank-Nicolson fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = bA \frac{u_{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N}}{2}, \\ mN + 1 \leq k \leq mN + r, \\ i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + A \frac{u_k - u_{k-1}}{2} = bA \frac{u_{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N}}{2}, \\ mN + r + 1 \leq k \leq (m + 1)N, \\ u_0 = \varphi \end{array} \right. \quad (3.14)$$

biçimindedir.

Teorem 3.2. A, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı operatör olsun. $\varphi \in D(A)$ ve $0 \leq b \leq 1$ olmak üzere (3.14) fark probleminin çözümü u_k aşağıdaki kararlılık kestirimlerini sağlar.

- i. $\sup_{k>0} \|u_k\|_H \leq \|\varphi\|_H$
- ii. $\sup_{k \geq 1} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \|A\varphi\|_H$

İspat. (3.14) fark şeması $m = 0$ için yeniden yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = bA\varphi, \quad 1 \leq k \leq r, \\ i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} = bA\varphi, \quad r + 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \varphi \end{array} \right. \quad (3.15)$$

olur. Burada (3.15) probleminin yeniden düzenlenmesiyle

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k - u_{k-1} - iA\tau u_k = -iAb\tau\varphi, \quad 1 \leq k \leq r, \\ u_k - u_{k-1} - \frac{i\tau A}{2} u_k - \frac{i\tau A}{2} u_{k-1} = -iAb\tau\varphi, \quad r + 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \varphi \end{array} \right.$$

ve buradan

$$\begin{cases} (I - iA\tau)u_k - u_{k-1} = b(-iA\tau)\varphi, & 1 \leq k \leq r, \\ \left(I - \frac{iA\tau}{2}\right)u_k - \left(I + \frac{iA\tau}{2}\right)u_{k-1} = b(-iA\tau)\varphi, & r + 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \varphi \end{cases}$$

elde edilir. $R = (I - i\tau A)^{-1}$ ve $B = \left(I + \frac{i\tau}{2}A\right)\left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1}$ operatörleri tanımlansın.

$$I - R = (-i\tau A)R,$$

$$I - B = (-i\tau A)\left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1}$$

özdeşliklerinden yararlanılmasıyla (3.15) problemi

$$\begin{cases} u_k - Ru_{k-1} = b(I - R)\varphi, & 1 \leq k \leq r, \\ u_k - Bu_{k-1} = b(I - B)\varphi, & r + 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \varphi, \end{cases} \quad (3.16)$$

halini alır. (3.16) probleminin denklemlerine sırasıyla R^{k-j} ve B^{k-j} operatörleri etki edilip düzenlenerek

$$R^{k-j}\{[u_j - Ru_{j-1}] = b(I - R)\varphi\} \Rightarrow R^{k-j}u_j - R^{k-(j-1)}u_{j-1} = bR^{k-j}(I - R)\varphi,$$

$$B^{k-j}\{[u_j - Bu_{j-1}] = b(I - B)\varphi\} \Rightarrow B^{k-j}u_j - B^{k-(j-1)}u_{j-1} = bB^{k-j}(I - B)\varphi$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin her iki yanından sırasıyla j üzerinden 1'den k 'ye ve $r + 1$ 'den k 'ye kadar toplam alınarak

$$\sum_{j=1}^k (R^{k-j}u_j - R^{k-(j-1)}u_{j-1}) = b \sum_{j=1}^k R^{k-j}(I - R)\varphi,$$

$$\sum_{j=r+1}^k (B^{k-j}u_j - B^{k-(j-1)}u_{j-1}) = b \sum_{j=r+1}^k B^{k-j}(I - B)\varphi$$

bulunur. Buradan

$$u_k - R^k u_0 = b(I - R^k)\varphi, \quad 1 \leq k \leq r,$$

$$u_k - B^{k-r} u_r = b(I - B^{k-r})\varphi, \quad r + 1 \leq k \leq N$$

formülleri elde edilir. Birinci eşitlikten $u_r = R^r u_0 + b(I - R^r)\varphi$ değeri ikinci eşitlikte yerine yazılarak (3.15) probleminin çözümü

$$u_k = \begin{cases} b\varphi + (1 - b)R^k\varphi, & 1 \leq k \leq r, \\ b\varphi + (1 - b)B^{k-r}R^r\varphi, & r + 1 \leq k \leq N \end{cases} \quad (3.17)$$

olarak elde edilir. Üçgen eşitsizliği ve

$$\|R^k\|_{H \rightarrow H} = \|((I - i\tau A)^{-1})^k\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |1 - i\tau\lambda|^{-k} = \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{(\sqrt{1 + \tau^2 \lambda^2})^{-k}} \leq 1$$

ile

$$\|B^k\|_{H \rightarrow H} = \left\| \left(\left(I + \frac{i\tau A}{2} \right) \left(I - \frac{i\tau A}{2} \right)^{-1} \right)^k \right\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \left| \frac{1 + \frac{i\tau\lambda}{2}}{1 - \frac{i\tau\lambda}{2}} \right|^k = 1$$

kestirimlerinden yararlanılarak

$$\|u_k\|_H \leq \begin{cases} b\|\varphi\|_H + (1-b)\|R^k\|_{H \rightarrow H}\|\varphi\|_H, & 1 \leq k \leq r, \\ b\|\varphi\|_H + (1-b)\|B^{k-r}\|_{H \rightarrow H}\|R^r\|_{H \rightarrow H}\|\varphi\|_H, & r+1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

bulunur. Böylece

$\|u_k\|_H \leq \|\varphi\|_H$, $1 \leq k \leq N$ elde edilir. Buradan

$$\sup_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq \|\varphi\|_H \quad (3.18)$$

elde edilir.

(3.14) fark şeması $u_{mN} = \varphi_m$ olmak üzere herhangi bir m için yeniden yazılırsa

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = bA \frac{u_{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N}}{2}, \\ mN + 1 \leq k \leq mN + r, \\ i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} = bA \frac{u_{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N}}{2}, \\ mN + r + 1 \leq k \leq (m+1)N, \\ N\tau = 1, \quad m = 1, 2, \dots, \\ u_{mN} = \varphi_m \end{cases} \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.19) problemi düzenlenerek

$$\begin{cases} (I - iA\tau)u_k - u_{k-1} = b(-iA\tau)u_{mN}, & mN + 1 \leq k \leq mN + r, \\ \left(I - \frac{iA\tau}{2} \right) u_k - \left(I + \frac{iA\tau}{2} \right) u_{k-1} = b(-iA\tau)u_{mN}, & mN + r + 1 \leq k \leq (m+1)N, \\ u_{mN} = \varphi_m \end{cases}$$

olarak bulunur. R ve B operatörlerinden ve bu operatörler için verilen özdeşliklerden

yararlanılmasıyla (3.19) problemi

$$\begin{cases} u_k - Ru_{k-1} = b(I - R)u_{mN}, & mN + 1 \leq k \leq mN + r, \\ u_k - Bu_{k-1} = b(I - B)u_{mN}, & mN + r + 1 \leq k \leq (m + 1)N, \\ u_{mN} = \varphi_m \end{cases} \quad (3.20)$$

halini alır. (3.20) probleminin denklemlerine sırasıyla R^{k-j} ve B^{k-j} operatörleri etki edilip düzenlenerek

$$\begin{aligned} R^{k-j}\{[u_j - Ru_{j-1}] = b(I - R)u_{mN}\} &\Rightarrow R^{k-j}u_j - R^{k-(j-1)}u_{j-1} = bR^{k-j}(I - R)u_{mN}, \\ B^{k-j}\{[u_j - Bu_{j-1}] = b(I - B)u_{mN}\} &\Rightarrow B^{k-j}u_j - B^{k-(j-1)}u_{j-1} = bB^{k-j}(I - B)u_{mN} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin her iki yanından sırasıyla j üzerinden $mN + 1$ 'den k 'ye ve $r + 1 + mN$ 'den k 'ye kadar toplam alınarak

$$\begin{aligned} \sum_{j=mN+1}^k R^{k-j}u_j - R^{k-(j-1)}u_{j-1} &= b \sum_{j=mN+1}^k R^{k-j}(I - R)u_{mN}, \\ \sum_{j=mN+r+1}^k B^{k-j}u_j - B^{k-(j-1)}u_{j-1} &= b \sum_{j=mN+r+1}^k B^{k-j}(I - B)u_{mN} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} u_k - R^{k-mN}u_{mN} &= b(I - R^{k-mN})u_{mN}, & mN + 1 \leq k \leq mN + r, \\ u_k - B^{k-mN-r}u_{mN+r} &= bu_{mN}(I - B^{k-mN-r}), & mN + r + 1 \leq k \leq (m + 1)N \end{aligned}$$

formülleri elde edilir. Birinci eşitlikten bulunan $u_k = R^{k-mN}u_{mN} + b(I - R^{k-mN})u_{mN}$ değeri ikinci eşitlikte yerine yazılarak (3.18) probleminin çözümü

$$u_k = \begin{cases} bu_{mN} + (I - b)R^{k-mN}u_{mN}, & mN + 1 \leq k \leq mN + r, \\ bu_{mN} + (1 - b)B^{k-mN-r}R^r u_{mN}, & mN + r + 1 \leq k \leq (m + 1)N \end{cases} \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Üçgen eşitliği ve

$$\|R^{k-mN}\|_{H \rightarrow H} = \|((I - i\tau A)^{-1})^{k-mN}\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |1 - i\tau\lambda|^{-k+mN} \leq 1$$

ile

$$\|B^{k-mN-r}\|_{H \rightarrow H} = \left\| \left(\left(I + \frac{i\tau A}{2} \right) \left(I - \frac{i\tau A}{2} \right)^{-1} \right)^{k-mN-r} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \left| \frac{1 + \frac{i\tau\lambda}{2}}{1 - \frac{i\tau\lambda}{2}} \right|^{k-mN-r} = 1$$

kestirimlerinden yararlanılarak

$$\|u_k\|_H \leq \begin{cases} b\|u_{mN}\|_H + (1-b)\|R^{k-mN}\|_{H \rightarrow H}\|u_{mN}\|_H, \\ mN + 1 \leq k \leq mN + r, \\ b\|u_{mN}\|_H + (1-b)\|B^{k-mN-r}\|_{H \rightarrow H}\|R^r\|_{H \rightarrow H}\|u_{mN}\|_H, \\ mN + r + 1 \leq k \leq (m+1)N \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $mN + 1 \leq k \leq (m+1)N$ aralığı için

$$\|u_k\|_H \leq \|u_{mN}\|_H$$

ve buradan

$$\sup_{mN \leq k \leq (m+1)N} \|u_k\|_H \leq \|u_{mN}\|_H \quad (3.22)$$

bulunur. (3.18) ile (3.22) birlikte düşünüldüğünde

$$\sup_{k>0} \|u_k\|_H \leq \|\varphi\|_H$$

elde edilir ve (i) şıkkı için ispat tamamlanır.

(3.17) formülü kullanılarak

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \begin{cases} i(1-b)R^k A\varphi, & 1 \leq k \leq r, \\ i(1-b)R^r \left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1} A\varphi, & k = r + 1, \\ i(1-b)B^{k-1-r}R^r \left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1} A\varphi, & r + 2 \leq k \leq N \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $\|R^k\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ ve $\|B^k\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ kestirimlerden yararlanılarak

$$\left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \begin{cases} (1-b)\|R^k\|_{H \rightarrow H}\|A\varphi\|_H, & 1 \leq k \leq r, \\ (1-b)\|R^r\|_{H \rightarrow H} \left\| \left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|A\varphi\|_H, & k = r + 1, \\ (1-b)\|B^{k-1-r}\|_{H \rightarrow H}\|R^r\|_{H \rightarrow H} \left\| \left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|A\varphi\|_H, & r + 2 \leq k \leq N, \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$\left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \|A\varphi\|_H$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \|A\varphi\|_H \quad (3.23)$$

olur.

(3.21) formülü kullanılarak

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \begin{cases} i(1-b)R^{k-mN}Au_{mN}, & mN+1 \leq k \leq mN+r, \\ i(1-b)R^r \left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1} Au_{mN}, & k = mN+r+1, \\ i(1-b)B^{k-mN-1-r}R^r \left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1} Au_{mN}, & mN+r+2 \leq k \leq (m+1)N \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $\|R^k\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ ve $\|B^k\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ kestirimlerden yararlanılarak

$$\left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \begin{cases} (1-b)\|R^{k-mN}\|_{H \rightarrow H}\|Au_{mN}\|_H, & mN+1 \leq k \leq mN+r, \\ (1-b)\|R^r\|_{H \rightarrow H} \left\| \left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|Au_{mN}\|_H, & k = mN+r+1, \\ (1-b)\|B^{k-1-r}\|_{H \rightarrow H}\|R^r\|_{H \rightarrow H} \left\| \left(I - \frac{i\tau}{2}A\right)^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \|Au_{mN}\|_H, & mN+r+2 \leq k \leq (m+1)N \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$\left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \|Au_{mN}\|_H$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{mN+1 \leq k \leq (m+1)N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \|Au_{mN}\|_H \quad (3.24)$$

olur. (3.23) ile (3.24) birlikte düşünülüp

$$\sup_{mN+1 \leq k \leq (m+1)N} \|Au_k\|_H \leq \sup_{(m-1)N+1 \leq k \leq mN} \|Au_k\|_H, \quad m = 1, 2, \dots$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\sup_{1 \leq k} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \|A\varphi\|_H$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4

ZAMAN GECİKMELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için lokal olmayan ve Neumann tipinde iki farklı başlangıç sınır değer problemi ele alınacaktır. Tam çözümleri Fourier serileri yöntemiyle elde edilen bu problemlerin yaklaşık çözümleri için r-modifiyeli Crank-Nicolson fark şemaları kullanılmıştır.

4.1. Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi için Neumann Problemin Yaklaşık Çözümlerinin r-Modifiyeli Crank-Nicolson Fark Şemasıyla Elde Edilişi

Bu alt bölümde zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -0.1 \left[\frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2} \right], & 0 < t < \infty, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \cos(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, & 0 \leq t < \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

Neumann problemi incelenecektir. (4.1) ile verilen problemin tam çözümü adım adım ve Fourier serileri yöntemiyle

$$u(t, x) = \cos(x) \begin{cases} 0.9e^{it} + 0.1, & 0 \leq t \leq 1, \\ (0.81 + 0.09e^{-i})e^{it} + 0.09e^i + 0.01, & 1 \leq t \leq 2, \\ (0.729 + 0.162e^{-i} + 0.009e^{-2i})e^{it} \\ + (0.081 + 0.009e^{-i})e^{2i} + 0.009e^i + 0.001, & 2 \leq t \leq 3, \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

olarak bulunur.

(4.1) probleminin $n - 1 \leq t \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ için tam çözümü

$$T_1(t) = 1,$$

$$T_{n+1}(t) = e^{i(t-n)}T_n(t) - 0,1i \int_n^t e^{i(t-s)}T_n(s)ds,$$

olmak üzere $u(t, x) = T_n(t)\cos(x)$, $n - 1 \leq t \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ biçimindedir.

(4.1) problemi için r-modifiyeli Crank-Nicolson fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = -0.1 \frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N}}{h^2}, \\ t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad N\tau = 1, \quad Mh = \pi, \\ mN + 1 \leq k \leq mN + r, \quad 1 \leq n \leq M, m = 0, 1, 2, \dots, \\ i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) \\ = -0.05 \left(\frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N}}{h^2} \right. \\ \left. + \frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N}}{h^2} \right), \\ mN + r + 1 \leq k \leq (m + 1)N, \quad 1 \leq n \leq M, \\ m = 0, 1, 2, \dots, \quad r = 1, 2, \dots, \\ u_n^0 = \cos(x_n) = \cos(nh), \quad 0 \leq n \leq M, \\ -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = u_{M-2}^k - 4u_{M-1}^k + 3u_M^k = 0, \quad k \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

biçimindedir. (4.2) fark şeması

$$U^k = \begin{bmatrix} u_0^k \\ u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-1}^k \\ u_M^k \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1},$$

$$\varphi_r^k = -0.1 \frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N}}{h^2},$$

$$\varphi^k = -0.05 \left(\frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N}}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N}}{h^2} \right)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} A_r U^k + B_r U^{k-1} = \varphi_r^k, & mN + 1 \leq k \leq mN + r, & m = 0, 1, 2, \dots, \\ AU^k + BU^{k-1} = \varphi^k, & mN + r + 1 \leq k \leq (m + 1)N, & m = 0, 1, 2, \dots, \\ U^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(h) \\ \cos(2h) \\ \vdots \\ \cos((M-2)h) \\ \cos((M-1)h) \\ -1 \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1} \end{cases} \quad (4.3)$$

sistemiyle matris formunda ifade edilebilir. Burada

$$a_r = \frac{-1}{h^2}, b_r = \frac{i}{\tau} + \frac{2}{h^2}, c_r = \frac{-i}{\tau}, a = \frac{-1}{2h^2}, b = \frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2}, c = \frac{-i}{\tau} + \frac{1}{h^2}$$

olmak üzere $(M + 1) \times (M + 1)$ boyutundaki A, B, A_r, B_r matrisleri

$$A_r = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_r & b_r & a_r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_r & b_r & a_r & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_r & b_r & a_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_r & b_r & a_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & c & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & c & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)}$$

biçimindedir. (4.3) sistemi çözülerek (4.1) probleminin nümerik çözümleri elde edilir. (t_k, x_n) noktasında (4.1) probleminin tam çözümü $u(t_k, x_n)$ ve nümerik çözümü u_n^k olmak üzere hata analizi

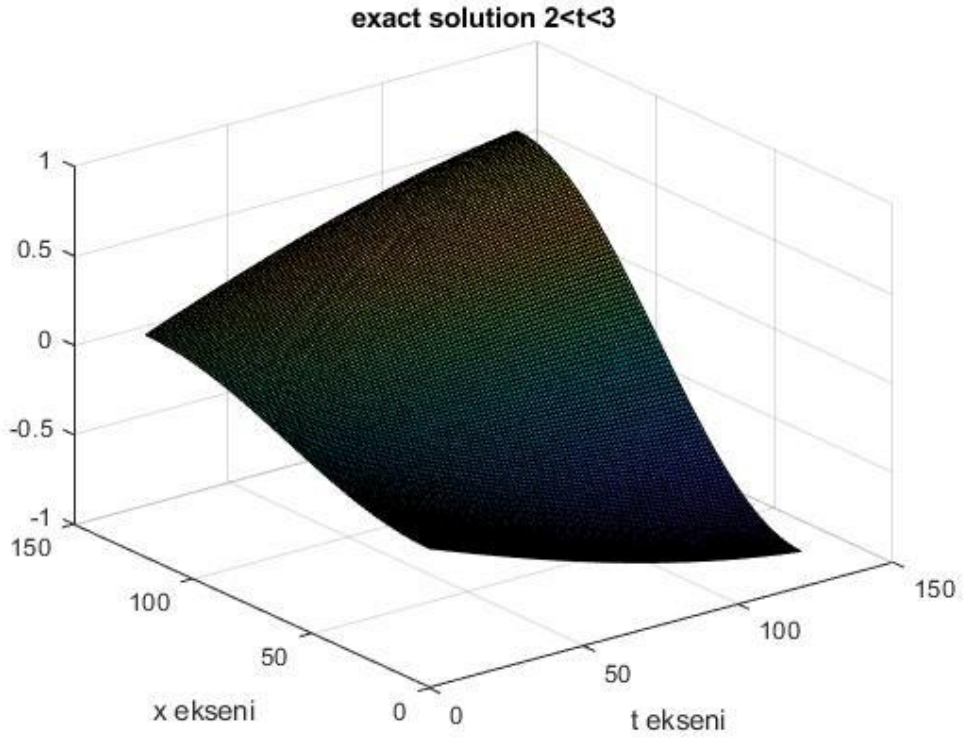
$$E_M^N = \max_{\substack{0 \leq k \leq N \\ 0 \leq n \leq M}} |u(t_k, x_n) - u_n^k|$$

formülü ile elde edilir. M , N ve r 'nin farklı değerleri için oluşturulan Çizelge 4.1 aşağıdaki biçimdedir.

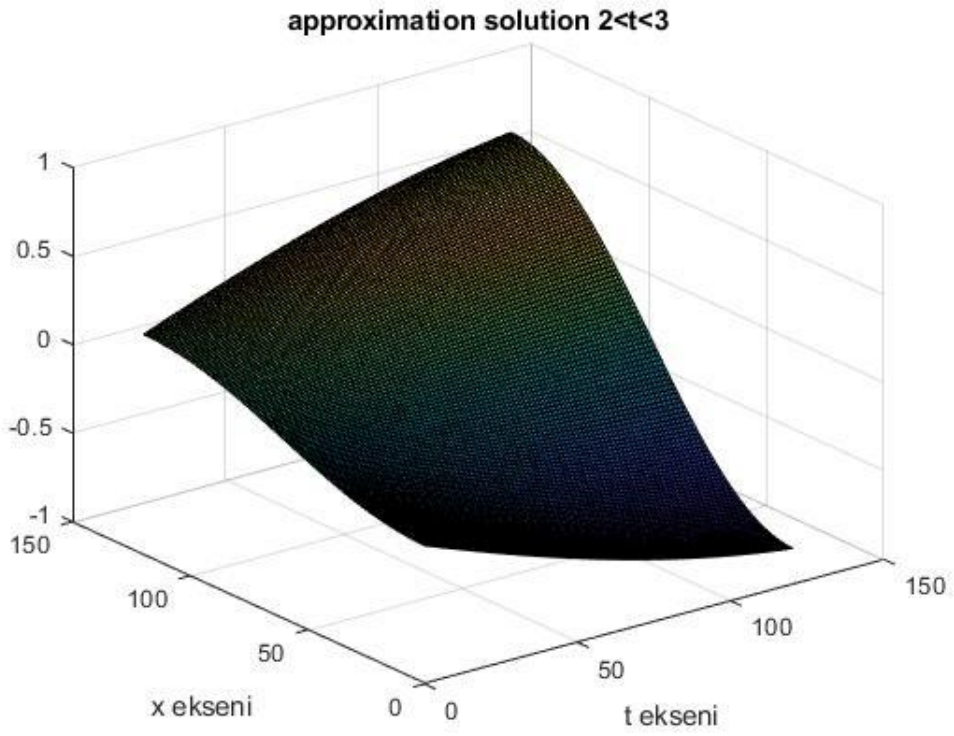
Çizelge 4.1. M , N ve r 'nin Farklı Değerleri İçin $t \in [0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ Aralıklarında
(4.2) Fark Şemasının Hataları

	$M=N=30, r=2$	$M=N=60, r=2$	$M=N=120, r=2$	$M=N=240, r=2$
$t \in [0,1]$	0,00077048	0,00022225	0,000060014	0,0000156
$t \in [1,2]$	0,0015	0,00043478	0,00011616	0,000029986
$t \in [2,3]$	0,0022	0,00061926	0,00016641	0,000043029
	$M=N=30, r=3$	$M=N=60, r=3$	$M=N=120, r=3$	$M=N=240, r=3$
$t \in [0,1]$	0,0012	0,00031447	0,000081369	0,000020721
$t \in [1,2]$	0,0023	0,00060722	0,00015650	0,000039738
$t \in [2,3]$	0,0032	0,00086344	0,00022391	0,000056974
	$M=N=30, r=5$	$M=N=60, r=5$	$M=N=120, r=5$	$M=N=240, r=5$
$t \in [0,1]$	0,0021	0,00053993	0,00013605	0,000034167
$t \in [1,2]$	0,0041	0,0010	0,00026070	0,000065438
$t \in [2,3]$	0,0058	0,0015	0,00037402	0,000093904

Burada verilen fark denkleminin çözümü için EK-A ile verilmiş olan MATLAB programı kullanılmıştır. Bu program ile yaklaşık çözümler bulunup hata analizi yapılmıştır. M ve N 'nin değerleri 120 olarak r 'nin değeri ise 2 olarak alındığında $t \in [2,3]$ için elde edilen tam çözümün ve yaklaşık çözümün grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.1. $t \in [2,3]$ için tam çözüm



Şekil 4.2. $t \in [2,3]$ için yaklaşık çözüm

4.2. Zaman Gecikmeli Schrödinger Denklemi için Lokal Olmayan Başlangıç Değer Probleminin Yaklaşık Çözümlerinin r-Modifiyeli Crank-Nicolson Fark Şeması ile Elde Edilişi

Zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için lokal olmayan başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -0.1 \left[\frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2} \right], & 0 < t < \infty, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi), \quad u(t, 0) = u(t, \pi), & 0 \leq t < \infty \end{cases} \quad (4.4)$$

incelenecektir. (4.4) ile verilen problemin tam çözümü adım adım ve Fourier serileri yöntemiyle

$$u(t, x) = \cos(2x) \begin{cases} 0.6e^{it} + 0.4, & 0 \leq t \leq 1, \\ (0.24e^{-i} + 0.36)e^{it} + 0.24e^i + 0.16, & 1 \leq t \leq 2, \\ (0.096e^{-2i} + 0.288e^{-i} + 0.216)e^{it} \\ \quad + 0.144e^{2i} + 0.192e^i + 0.064, & 2 \leq t \leq 3, \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

(4.4) probleminin $n - 1 \leq t \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ için tam çözümü

$$T_1(t) = 1,$$

$$T_{n+1}(t) = e^{i(t-n)}T_n(t) - 0,4i \int_n^t e^{i(t-s)}T_n(s)ds$$

olmak üzere $u(t, x) = T_n(t)\cos(2x)$, $n - 1 \leq t \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ biçimindedir.

(4.4) problemi için r-modifiyeli Crank-Nicolson fark şeması

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{4} \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = -0.1 \frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N}}{h^2} \\
t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad N\tau = 1, \quad Mh = \pi, \\
mN + 1 \leq k \leq r + mN, \quad r = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, \\
i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{8} \left(\frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) \\
= -0.05 \left(\frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N}}{h^2} \right. \\
\left. + \frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N}}{h^2} \right), \\
mN + r + 1 \leq k \leq (m + 1)N, \\
u_n^0 = \cos(2x_n), \quad 0 \leq n \leq M, \quad u_0^k = u_M^k, \\
\frac{-3u_2^k + 4u_1^k - u_0^k}{h^2} = \frac{3u_M^k - 4u_{M-1}^k + u_{M-2}^k}{h^2}
\end{array} \right. \quad (4.5)$$

biçimindedir. (4.5) fark şeması

$$U^k = \begin{bmatrix} u_0^k \\ u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{M-1}^k \\ u_M^k \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1},$$

$$\varphi_r^k = -0.1 \frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N}}{h^2},$$

$$\varphi^k = -0.05 \left(\frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k}{N+1} \rfloor N}}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N} - 2u_n^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N} + u_{n-1}^{\lfloor \frac{k-1}{N+1} \rfloor N}}{h^2} \right)$$

olmak üzere

$$\left\{ \begin{array}{l} C_r U^k + D_r U^{k-1} = \varphi_r^k, \quad mN + 1 \leq k \leq mN + r, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ CU^k + DU^{k-1} = \varphi^k, \quad mN + r + 1 \leq k \leq (m + 1)N, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ U^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2h) \\ \cos(4h) \\ \vdots \\ \cos(2(M-2)h) \\ \cos(2(M-1)h) \\ 1 \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

matris katsayılı sistemle ifade edilir. Burada

$$c_r = \frac{-1}{4h^2}, d_r = \frac{i}{\tau} + \frac{1}{2h^2}, e_r = \frac{-i}{\tau}, c = \frac{-1}{8h^2}, d = \frac{i}{\tau} + \frac{1}{4h^2}, e = \frac{-i}{\tau} + \frac{1}{4h^2}$$

olmak üzere $(M + 1) \times (M + 1)$ boyutundaki C, D, C_r, D_r matrisleri

$$C_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_r & d_r & c_r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_r & d_r & c_r & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_r & d_r & c_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_r & d_r & c_r \\ 3 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$D_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & e_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & d & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & d & c \\ 3 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & e & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & e & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & e & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & e & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)}$$

biçimindedir.

(4.6) sistemi çözümlenerek (4.4) probleminin nümerik çözümleri elde edilir. (t_k, x_n) noktasında (4.4) probleminin tam çözümü $u(t_k, x_n)$ ve nümerik çözümü u_n^k olmak üzere hata analizi

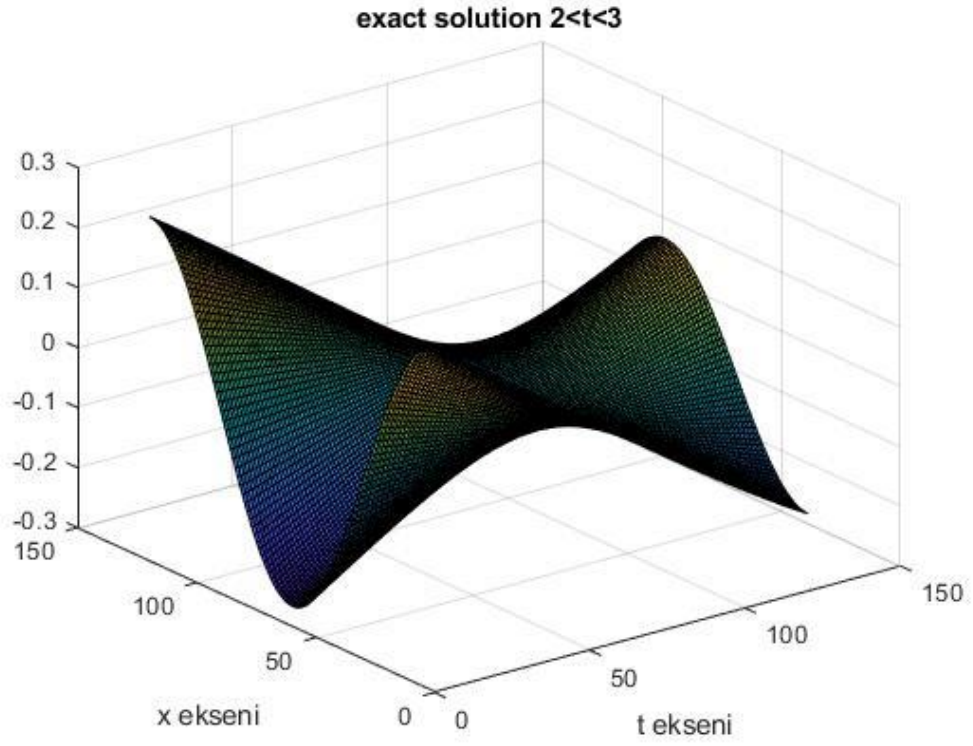
$$E_M^N = \max_{\substack{0 \leq k \leq N \\ 0 \leq n \leq M}} |u(t_k, x_n) - u_n^k|$$

formülü ile elde edilebilir. M , N ve r 'nin farklı değerleri için elde edilen Çizelge 4.2 aşağıdaki biçimdedir.

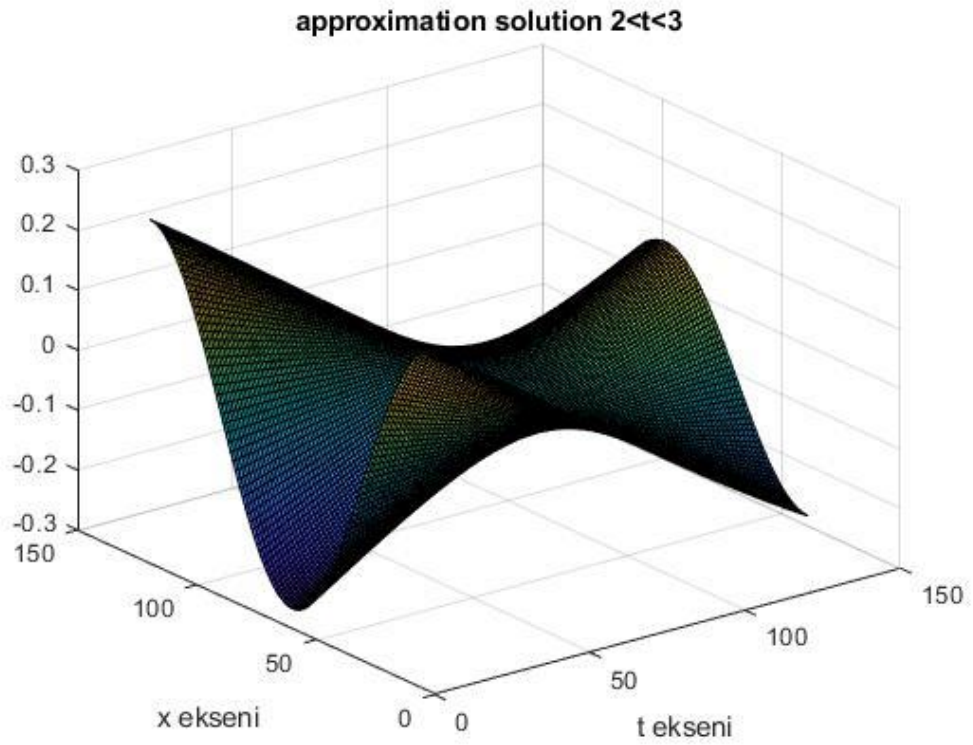
Çizelge 4.2. M , N ve r 'nin Farklı Değerleri İçin $t \in [0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ Aralıklarında (4.5) Fark Şemasının Hataları

	$M=N=30, r=2$	$M=N=60, r=2$	$M=N=120, r=2$	$M=N=240, r=2$
$t \in [0,1]$	0,0016	0,00047604	0,00012898	0,000033959
$t \in [1,2]$	0,0030	0,00086445	0,00023415	0,000060597
$t \in [2,3]$	0,0035	0,0011	0,00030112	0,000079093
	$M=N=30, r=3$	$M=N=60, r=3$	$M=N=120, r=3$	$M=N=240, r=3$
$t \in [0,1]$	0,0016	0,00048532	0,00013256	0,000034975
$t \in [1,2]$	0,0032	0,00091380	0,00024404	0,000062840
$t \in [2,3]$	0,0039	0,0011	0,00031473	0,000082110
	$M=N=30, r=5$	$M=N=60, r=5$	$M=N=120, r=5$	$M=N=240, r=5$
$t \in [0,1]$	0,0022	0,00054408	0,00014851	0,000039064
$t \in [1,2]$	0,0040	0,0011	0,00027773	0,000070778
$t \in [2,3]$	0,0050	0,0014	0,00036059	0,000092756

Burada verilen fark denkleminin çözümü için EK-B ile verilmiş olan MATLAB programı kullanılmıştır. Bu program ile yaklaşık çözümler bulunup hata analizi yapılmıştır. M ve N 'nin değerleri 120 olarak r 'nin değeri ise 2 olarak alındığında $t \in [2,3]$ için elde edilen tam çözümün ve yaklaşık çözümün grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.3. $t \in [2,3]$ için tam çözüm



Şekil 4.4. $t \in [2,3]$ için yaklaşık çözüm

4.3. r -Modifiyeli Crank-Nicolson Fark Şemasıyla Elde Edilen Hataların Çıkarımları

Yukarda yapılan çalışmalarda incelendiği üzere M ve N sayıları iki katına çıkarıldığında hatanın yaklaşık olarak dörtte birine düştüğü görülmektedir. Program M ve N 'den küçük her r sayısı için çalışmakta olup en düşük hatayı M ve N 'nin yüksek olduğu r 'nin en küçük değerinde vermektedir.



BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada Hilbert uzayında zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için başlangıç ve sınır değer problemi incelenmiştir. Lineer zaman gecikmeli Schrödinger denklemleri için kurulan başlangıç ve sınır değer problemlerinin Fourier serileri, Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü yöntemleri kullanılarak analitik çözümleri bulunmuştur.

Bilindiği gibi Laplace dönüşümü yalnız sabit ve polinom katsayılı lineer denklemlerin ve Fourier serileri ve dönüşümü yöntemleri ise sabit katsayılı lineer denklemlerin çözümlerinde kullanılan yöntemler olduğundan değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde daha kullanışlı bir yöntem olan sonlu fark yöntemiyle çalışılmıştır.

H Hilbert uzayı, A self adjoint pozitif tanımlı operatör, $A \geq \delta$, $\delta > 0$, $0 \leq b \leq 1$ ve $\varphi \in D(A)$ olmak üzere;

$$\begin{cases} i \frac{dv}{dt} + Av(t) = bAv([t]), & t > 0, \\ v(0) = \varphi \end{cases}$$

zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için başlangıç değer probleminin abstract hali incelenmiştir. (Agirseven, 2018) tarafından kararlılık kestirimleri üzerine ispatsız olarak verilen Teorem 3.1 'in ispatı verilmiştir. Ancak tam çözümü elde etmek her zaman mümkün olmadığından yaklaşık çözümleri elde etmek için abstract problem üzerinden r-modifiyeli Crank-Nicolson fark şeması oluşturulmuş ve bu şemanın çözümlerinin kararlılık kestirimi üzerine olan Teorem 3.2 kurulup ispatlanmıştır.

Son olarak zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için lokal olmayan ve Neumann tipinde iki farklı başlangıç ve sınır değer problemi örnek olarak ele alınmıştır. Tam çözümleri Fourier serileri yöntemiyle elde edilen bu problemlerin yaklaşık çözümleri için r-modifiyeli Crank-Nicolson fark şemaları kurulmuş ve MATLAB programları yapılarak bu problemlerin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2. ile hata analizi verilerek kurulan fark şemalarının çözümleri için verilen teorik önermeler sayısal sonuçlarla desteklenmiştir.

Bu tezde gerçekleştirilen çalışma göz önüne alınarak, gelecekte zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için uzay değişkenine göre lokal ve lokal olmayan sınır değer probleminin uygulamaları verilebilir. Mevcut tezde verilen 1 boyutlu zaman gecikmeli Schrödinger denklemi için nümerik örnekler çok boyuta taşınabilir.

KAYNAKLAR

Agirseven, D. (2018). On the stability of the Schrödinger equation with time delay. *Filomat*, 32(3), 759-766.

Agirseven, D. (2012). Approximate solutions of delay parabolic equations with the Dirichlet condition. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, Article ID 682752, 1-31.

Ardito, A., & Ricciardi, P. (1980). Existence and regularity for linear delay partial differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 4(2), 411-414.

Arnold, A. (1998). Numerically absorbing boundary conditions for quantum evolution equations. *VLSI DESIGN*, 6(1-4), 313-319.

Ashyralyev, A., & Agirseven, D. (2020). On the Stable Difference Schemes for the Schrödinger equation with time delay. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 20(1), 27-38.

Ashyralyev, A., & Agirseven, D. (2014). Well-posedness of delay parabolic difference equations. *Advances in Difference Equations*, 2014(18), 1-20.

Ashyralyev, A., & Agirseven, D. (2013). On convergence of difference schemes for delay parabolic equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(7), 1232-1244.

Ashyralyev, A., & Ürün, M. (2013). Determination of a control parameter for the difference Schrödinger equation. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, Article ID 548201, 1-8.

Ashyralyev, A., & Sirma, A. (2009a). A note on the numerical solution of the semilinear Schrödinger equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12), 2507-2516.

Ashyralyev, A., & Sirma, A. (2009b). Modified Crank-Nicolson difference schemes for nonlocal boundary value problem for the Schrödinger equation. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2009, Article ID 584718, 1-15.

Ashyralyev, A. & Sobolevskii, P. E. (2004). *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*. Operator Theory Advances and Applications, Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag.

Biondini, G., Lottes, J., & Mantzavinos, D. (2020). Inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrodinger equation with counterpropagating flows. *Studies in Applied Mathematics*, 146 (2), 371-439.

Blasio, G. D. (2003). Delay differential equations with unbounded operators acting on delay terms. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 52(1), 1-18.

Burnham, C. J., Futera, Z., Bacic, Z., & English, N. J. (2020). Hydrogen intramolecular stretch redshift in the electrostatic environment of type II clathrate hydrates from Schrödinger equation treatment. *Applied Sciences-Basel*, 10(23), Article ID 8504, 1-13.

Chen, T., Zhou, S., & Zhao, C. (2010). Attractors for discrete nonlinear Schrödinger equation with delay. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 26(4), 633-642.

De Cross, M., Ellinor, A., Zheng, S., Williams, C., & Khim, J. Schrödinger equation. 31 Aralık 2020 tarihinde <https://brilliant.org/wiki/schrodinger-equation/> adresinden erişildi.

Gao, Z., & Xie, S. (2011). Fourth-order alternating direction implicit compact finite difference schemes for two-dimensional Schrödinger equations. *Applied Numerical Mathematics*, 61(4), 593-614.

Gordeziani, D. G., & Avalishvili, G. A., (2005a). Time-nonlocal problems for Schrödinger type equations: II. Results for specific problems. *Differential Equations*, 41(6), 852-859.

Gordeziani, D. G., Avalishvili, G. A., (2005b). Time-nonlocal problems for Schrödinger type equations: I. Problems in abstract spaces. *Differential Equations*, 41(5), 703–711.

Guo, B. Z., & Yang, K. Y. (2010). Output feedback stabilization of a one-dimensional Schrödinger equation by boundary observation with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(5), 1226-1232.

Guo, B. Z., & Shao, Z. C. (2005). Regularity of a Schrödinger equation with Dirichlet control and colocated observation. *Systems & Control Letters*, 54(11), 1135-1142.

Hicdurmaz, B., & Ashyralyev, A. (2016). A stable numerical method for multidimensional time fractional Schrödinger equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 72(6), 1703-1713.

Hong, J., Ji, L., Kong, L., & Wang, T. (2017). Optimal error estimate of a compact scheme for nonlinear Schrödinger equation. *Applied Numerical Mathematics*, 120, 68-81.

Hu, Y., Li, H., & Jiang, Z. (2020). Efficient semi-implicit compact finite difference scheme for nonlinear Schrödinger equations on unbounded domain. *Applied Numerical Mathematics*, 153, 319-343.

Ita, B. I., Louis, H., Ubana, E. I., Ekuri, P. E., Leonard, C. U. & Nzeata, N. I. (2020). Evaluation of the bound state energies of some diatomic molecules from the approximate solutions of the Schrodinger equation with Eckart plus inversely quadratic Yukawa potential. *Journal of Molecular Modeling*, 26(12), Article ID 349, 1-7.

Kopylov, Y.V., Popov, A.V., & Vinogradov A.V. (1995). Application of the parabolic wave equation to x-ray diffraction optics. *Optics Communications*, 118(5-6), 619-636.

Levy, M. (2000). *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation*. London: Electromagnetic Waves Series 45, The Institution of Electrical Engineers.

Liao, H., Sun, Z., Shi, H., & Wang, T. (2011). Convergence of compact ADI method for solving linear Schrödinger equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 28(5), 1598-1619.

Liao, H., Sun, Z., & Shi, H. (2010). Error estimate of fourth-order compact scheme for linear Schrödinger equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(6), 4381-4401.

Mayfield, M. E. (1989). *Non-reflective boundary conditions for Schrödinger's equation*. PhD Thesis. University of Rhode Island, Kingston, USA.

Sinestrari, E. (1984). On a class of retarded partial differential equations. *Mathematische Zeitschrift*, 186(2), 223-246.

Tappert, F.D. (1977). The Parabolic Approximation Method. Keller, J. B., & Papadakis, J.S. (Eds.) *Wave Propagation and Underwater Acoustics* (s.224-287) (1. Baskı). Berlin, Heidelberg: Lecture Notes in Physics, Springer.

Wu, J., (1996). *Theory and Applications of Partial Functional-Differential Equations*. New York: Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag.

Xie, S., Li, G., & Yi, S. (2009). Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 198(9-12), 1052-1060.

Zhao, Z., & Ge, W. (2011). Traveling wave solutions for Schrödinger equation with distributed delay. *Applied Mathematical Modelling*, 35(2), 675-687.

EKLER

Ek-A r-Modifiyeli Crank-Nicolson Fark Şemasının Çözümü İçin Hazırlanılmış MATLAB Programı

```
function rmod_barsp(N,M,r)

h=pi/M; tau=1/N;

a=-1/(2*(h^2)); b=(i/(tau))+(1/(h^2));

c=(-i/(tau))+(1/(h^2));

A=zeros(M+1,M+1);

A(1,1)=-3; A(1,2)=4; A(1,3)=-1;

A(M+1,M-1)=1; A(M+1,M)=-4; A(M+1,M+1)=3;

for j=2:M;

A(j,j-1)=a; A(j,j)=b; A(j,j+1)=a;

end;

A;

AR=zeros(M+1,M+1);

AR(1,1)=-3; AR(1,2)=4; AR(1,3)=-1;

AR(M+1,M-1)=1; AR(M+1,M)=-4; AR(M+1,M+1)=3;

for j=2:M;

AR(j,j-1)=2*a; AR(j,j)=((i/tau)+(2/h^2)); AR(j,j+1)=2*a;

end;

AR;

B=zeros(M+1,M+1);

for j=2:M;
```

```

B(j,j-1)=a; B(j,j)=c; B(j,j+1)=a;

end;

B;

BR=zeros(M+1,M+1);

for j=2:M;

BR(j,j)=-i/tau;

end;

BR;

G=inv(A);
GR=inv(AR);
fii=zeros(M+1,1);
for n=2:M;
fii(n,1)=-0.05*((cos((n)*h)-2*cos((n-1)*h)+cos((n-2)*h))/(h^2)+...
(cos((n)*h)-2*cos((n-1)*h)+cos((n-2)*h))/(h^2));
end;
fii;
for n=1:M+1;
U(n,1)=cos((n-1)*h);
end;
for k=2:r;
U(:,k)=GR*(fii(:,1)-BR*U(:,k-1));
end
U;

```

```

for k=r+1:N+1;
U(:,k)=G*(fii(:,1)-B*U(:,k-1));
end;
U;
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(j,k)=(0.9*exp(i*t)+0.1)*cos(x);
end;
end;
es;
for n=1:N+1;
for k=1:M+1;
f(n,k)=abs(es(n,k)-U(n,k));
end;
end;
f;
absdiff=max(max(max(f)))
figure; surf(real(U));title('approximation solution 0<t<1');
xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;
figure; surf(real(es));title('exact solution 0<t<1'); xlabel('t akseni');
ylabel('x akseni'); rotate3d;

```

```

fii1=zeros(M+1,1);

for n=2:M;

fii1(n,1)=-0.05*((U(n+1,N+1)-2*U(n,N+1)+U(n-1,N+1))/(h^2)...
                +((U(n+1,N+1)-2*U(n,N+1)+U(n-1,N+1))/(h^2)));

end;

fii1;

for n=1:M+1;

U1(n,1)=U(n,N+1);

end;

U1(:,1);

for k=2:r;

U1(:,k)=GR*fii1(:,1)-GR*BR*U1(:,k-1);

end

U1;

for k=r+1:N+1;

U1(:,k)=G*(fii1(:,1)-B*U1(:,k-1));

end;

U1;

for j=1:M+1;

for k=1:N+1;

t=(k+N-1)*tau; x=(j-1)*h;

es1(j,k)=((0.81+(0.09*exp(-i)))*exp(i*t)+0.09*exp(i)+0.01)*cos(x);

end;

```

```

end;

absdiff1=max(max(abs(es1-U1)))

figure; surf(real(U1)); title('approximation solution 1<t<2');

xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;

figure; surf(real(es1)); title('exact solution 1<t<2');

xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;

fii2=zeros(M+1,1);

for n=2:M;
fii2(n,1)=-0.05*((U1(n+1,N+1)-2*U1(n,N+1)+U1(n-1,N+1))/(h^2)...
                +((U1(n+1,N+1)-2*U1(n,N+1)+U1(n-1,N+1))/(h^2)));
end;

fii2;

for n=1:M+1;

U2(n,1)=U1(n,N+1);

end;

U2(:,1);

for k=2:r;

U2(:,k)=GR*fii2(:,1)-GR*BR*U2(:,k-1);

end

U2;

for k=r+1:N+1;

U2(:,k)=G*(fii2(:,1)-B*U2(:,k-1));

end;

```

```

U2;

for j=1:M+1;

for k=1:N+1;

t=(k+(2*N)-1)*tau; x=(j-1)*h;

es2(j,k)=((0.729+(0.162*exp(-i))+(0.009*exp(-2*i)))*exp(i*t)...

+0.081*exp(2*i)+0.018*exp(i)+0.001)*cos(x);

end;

end;

absdiff2=max(max(abs(es2-U2)))

figure; surf(real(U2)); title('approximation solution 2<t<3');

xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;

figure; surf(real(es2)); title('exact solution 2<t<3');

xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;

```

Ek-B r-Modifiyeli Crank-Nicolson Fark Şemasının Çözümü İçin Hazırlanmış MATLAB Programı

```
function rmod_barsp2(N,M,r)
h=pi/M; tau=1/N;
c=-1/(8*(h^2)); d=(i/(tau))+1/(4*(h^2));
e=(-i/(tau))+1/(4*(h^2));
C=zeros(M+1,M+1);
C(1,1)=-1; C(1,M+1)=1;
C(M+1,M+1)=3; C(M+1,M)=-4; C(M+1,M-1)=1;
C(M+1,1)=3; C(M+1,2)=-4; C(M+1,3)=1;
for j=2:M;
C(j,j-1)=c;
C(j,j)=d;
C(j,j+1)=c;
end;
C;
CR=zeros(M+1,M+1);
CR(1,1)=-1; CR(1,M+1)=1;
CR(M+1,M+1)=3; CR(M+1,M)=-4; CR(M+1,M-1)=1;
CR(M+1,1)=3; CR(M+1,2)=-4; CR(M+1,3)=1;
for j=2:M;
CR(j,j-1)=2*c;
CR(j,j)=(i/tau)+1/(2*h^2);
CR(j,j+1)=2*c;
end;
CR;
D=zeros(M+1,M+1);
for j=2:M;
D(j,j-1)=c;
D(j,j)=e;
D(j,j+1)=c;
end;
```

```

D;
DR=zeros(M+1,M+1);
for j=2:M;
DR(j,j)=-i/tau;
end;
DR;
G=inv(C);
GR=inv(CR);
fii=zeros(M+1,1);
for n=2:M;
fii(n,1)=-0.05*((cos(2*(n)*h)-2*cos(2*(n-1)*h)+cos(2*(n-2)*h))/(h^2)+...
(cos(2*(n)*h)-2*cos(2*(n-1)*h)+cos(2*(n-2)*h))/(h^2));
end;
fii;
for n=1:M+1;
U(n,1)=cos(2*(n-1)*h);
end;
for k=2:r;
U(:,k)=GR*(fii(:,1)-DR*U(:,k-1));
end
U;
for k=r+1:N+1;
U(:,k)=G*(fii(:,1)-D*U(:,k-1));
end;
U;
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(j,k)=(0.6*exp(i*t)+0.4)*cos(2*x);
end;
end;
end;

```

```

es;
for n=1:N+1;
for k=1:M+1;
f(n,k)=abs(es(n,k)-U(n,k));
end;
end;
f;
absdiff=max(max(max(f)))
figure; surf(real(U));title('approximation solution 0<t<1');
xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
figure; surf(real(es));title('exact solution 0<t<1'); xlabel('t ekseni');
ylabel('x ekseni'); rotate3d;
fii1=zeros(M+1,1);
for n=2:M;
fii1(n,1)=-0.05*((U(n+1,N+1)-2*U(n,N+1)+U(n-1,N+1))/(h^2)...
+(U(n+1,N+1)-2*U(n,N+1)+U(n-1,N+1))/(h^2)));
end;
fii1;
for n=1:M+1;
U1(n,1)=U(n,N+1);
end;
U1(:,1);
for k=2:r;
U1(:,k)=GR*fii1(:,1)-GR*DR*U1(:,k-1);
end
U1;
for k=r+1:N+1;
U1(:,k)=G*(fii1(:,1)-D*U1(:,k-1));
end;
U1;
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;

```

```

t=(k+N-1)*tau; x=(j-1)*h;
es1(j,k)=((0.36+(0.24*exp(-i)))*exp(i*t)+0.24*exp(i)+0.16)*cos(2*x);
end;
end;
absdiff1=max(max(abs(es1-U1)))
figure; surf(real(U1)); title('approximation solution 1<t<2');
xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;
figure; surf(real(es1)); title('exact solution 1<t<2');
xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;
fii2=zeros(M+1,1);
for n=2:M;
fii2(n,1)=-0.05*((U1(n+1,N+1)-2*U1(n,N+1)+U1(n-1,N+1))/(h^2)...
+((U1(n+1,N+1)-2*U1(n,N+1)+U1(n-1,N+1))/(h^2)));
end;
fii2;
for n=1:M+1;
U2(n,1)=U1(n,N+1);
end;
U2(:,1);
for k=2:r;
U2(:,k)=GR*fii2(:,1)-GR*DR*U2(:,k-1);
end
U2;
for k=r+1:N+1;
U2(:,k)=G*(fii2(:,1)-D*U2(:,k-1));
end;
U2;
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k+(2*N)-1)*tau; x=(j-1)*h;
es2(j,k)=(((0.096*exp(-2i))+0.288*exp(-i)+0.216)*exp(i*t)...
+0.144*exp(2*i)+0.192*exp(i)+0.064)*cos(2*x);

```

```
end;  
end;  
absdiff2=max(max(abs(es2-U2)))  
figure; surf(real(U2)); title('approximation solution 2<t<3');  
xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;  
figure; surf(real(es2)); title('exact solution 2<t<3');  
xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;
```



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Barış ERKÖSE

EĞİTİM DURUMU

Lise : İbrahim Turhan Anadolu Lisesi, 2009-2013

Lisans : Trakya Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik, 2013-2018

Yabancı Dil : İngilizce