ÇARPIMSAL TOPOLOJİK GRAF İNDEKSLERİ

Merve AŞÇIOĞLU

T. C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL TOPOLOJİK GRAF İNDEKSLERİ

Merve AŞÇIOĞLU
0000-0002-1339-7153

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2021

ÖZET

Doktora Tezi

ÇARPIMSAL TOPOLOJİK GRAF İNDEKSLERİ

Merve AŞÇIOĞLU
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu doktora tezinde çok sayıda uygulamaları olan topolojik graf indekslerinin geniş bir alt sınıfı olan çarpımsal topolojik graf indeksleri çalışılmıştır.

Bu tezde 5 bölüm yer almaktadır. Giriş adı verilen ilk bölümde tezin geri kalanında gerekli olan ve graflarla ilgili temel tanım ve kavramlar hatırlatılmıştır. İkinci bölümde kuramsal temellerden, üçüncü bölümde ise materyal ve yöntemden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde bulgulardan bahsedilmiştir. Topolojik graf indekslerinden, tezin ana konusu olan çarpımsal topolojik graf indekslerinden ve temel bazı özelliklerinden, alt bölme, r-alt bölme ve duble grafların Narumi-Katayama indekslerinden, Çarpımsal geometrik aritmetik indeksin özelliklerinden, genel sonuçlarından, alt üst sınırlarından bahsedilmiş ve kenar eklemenin indekse etkileri hesaplanmıştır.

Beşinci ve son bölümde tartışma ve sonuçtan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: çarpımsal geometrik aritmetik indeks, çarpımsal topolojik graf indeksi, graf, Narumi-Katayama indeksi, topolojik graf indeksi

2021, vi + 52 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

MULTIPLICATIVE TOPOLOGICAL GRAPH INDICES

Merve AŞÇIOĞLU
Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL

In this PhD thesis, multiplicative topological graph indices which form a large subclass of topological graph indices having lots of applications.

This thesis has 5 chapters. In the first chapter called Introduction, the fundamental notions and results which will be needed in the rest of the thesis are recalled. Theoretical foundations are mentioned in the second chapter, materials and methods are mentioned in the third chapter.

In the fourth chapter, the findings are mentioned. Topological graph indices, multiplicative topological graph indices, which are the main subject of the thesis, and some basic features are mentioned in this chapter. In adddition, subdivision, r-subdivision, Narumi-Katayama indices of double graphs, basic features and general results of multiplicative geometric arithmetic indices, lower-upper bounds are given and the effects of edge addition on these indices are calculated.

Finally, arguments and conclusion are mentioned in the fifth and last chapter.

Key words: graph, multiplicative geometric-arithmetic index. multiplicative topological graph index, Narumi-Katayama index, topological graph index

2021, vi + 52 pages.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Eğitim hayatım boyunca akademik kimliği ve başarılarıyla örnek aldığım, bu yoldaki en büyük destekçim, emeğini hiçbir zaman esirgemeyen, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e, bu süreçte manevi desteklerini esirgemeyen her koşulda yanımda olan canım aileme, sonsuz teşekkürler…

Merve AŞÇIOĞLU

06/07/2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simge	**Açıklama**
G	graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
n	G grafının köşe sayısı
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
m	G grafının kenar sayısı
$d_u, d_G(u), \deg(u)$	u köşesinin derecesi
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir graf
P_n	n köşeli yol graf
S_n	n köşeli yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç graf
$K_{r,s}$	iki parçalı tam graf
$T_{r,s}$	larva graf
N_n	n köşeli boş graf
$\Delta(G)$	G grafının maksimum derecesi
$\delta(G)$	G grafının minimum derecesi
DS	derece dizisi
a_i	derece dizisinde d_i derecesinin katlılığı
$D(G)$	G grafının duble grafı
$S(G)$	G grafının alt bölme grafı
$S^r(G)$	r-alt bölme grafı
$D(S(G))$	G grafının alt bölme grafının duble grafı
$S(D(G))$	G grafının duble grafının alt bölme grafı
$G+e$	e kenarı eklenmiş G grafı
$NK(G)$	G grafının Narumi-Katayama indeksi
$GA\Pi(G)$	*G grafının $GA\Pi$ indeksi*
$\Pi_1(G)$	Birinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\Pi_2(G)$	İkinci çarpımsal Zagreb indeksi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Birçoklarına göre Graf Teorinin temelleri Euler tarafından 1736 yılında yazılan bir makale ile ortaya çıkmıştır. Makale Königsberg Köprüleri problemi de denilen eğlenceli bir problemi içeriyordu. Königsberg'in içinden akan Pregel nehri ortasında kıyılara ve birbirine 7 adet köprüyle bağlı bir ada ve yarımada bulunmaktadır. Makaledeki problem "Adaların ya da kıyıların birinden başlayarak bütün köprülerden birer kez geçerek başlanan noktaya dönebilir miyiz?" şeklindedir. Bu problemin çözümünün olmadığı, problemdeki köprüler ve adalar, bir grafa çevrilerek gösterilmiştir. Makalede tabi sadece bu problemin değil problemin genel halinin çözümü de verilmekteydi.

Bir graf noktalardan ve bu noktaları birleştiren çizgilerden oluşur. Noktalara grafın köşeleri, çizgilere de kenarları adı verilir. Kenarlar çizgi olabileceği gibi eğri de olabilir. Hatta bu eğri aynı köşede başlayıp bitebilir. Graflar bir düzlemde ya da farklı yüzeylerde yönlendirilebilen veya yönlendirilemeyen olarak çizilebilir. Bu şekildeki çalışmalar Omega İnvaryantı yardımıyla yapılmaya başlanmıştır. Omega invaryantı ile ilgili ayrıntılı bilgi için Ascioglu ve ark. (2020) incelenebilir. Graf teorinin en önemli uygulama alanlarından biri kimyadır. Kimyada atom ve moleküllerin modellenmesi graflar yardımıyla yapılır. Atomlar köşeler, kimyasal bağlar da çizgiler olarak düşünülerek modelleme yapılır. Atom ve moleküllerin sınıflandırılmasında kullanılan sabit sayılar graf modelleri yardımıyla çok daha kolay ve ekonomik olarak hesaplanmaktadır. Bu hesaplamalar yapılırken topolojik graf indekslerinden faydalanılmaktadır. Topolojik indeksler, sayısal yapı-aktivite ilişkisi modellerinde (QSPR/QSAR) kullanılırlar. Yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilen sayılar ile kimyasal özellikleri incelenen atom, molekül sabitleri arasında bağlantı bulunması durumunda verilerin kimyasal özelliklerinin belirlenmesi mümkün hale gelir. Bu bağlantılar ve ekonomik faydalar sayesinde kimyaya bağlı biyoloji, fizik gibi dallarda da graf teoriye olan ilgi artmıştır. Graf teorinin bir başka uygulama alanı da matematik ve bilgisayardır. Örneğin "minimum geren ağaç problemi", "network akış problemi", "en kısa yol problemi" gibi problemler graf teori yardımıyla çözülmüştür.

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan graflarla ilgili tanım ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde kuramsal temellerden, üçüncü bölümde materyal ve yöntemden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde alt başlıklar halinde topolojik graf indeksleri tanımlanmıştır. Bu bölüm tezin ana konusunu içeren çarpımsal topolojik graf indekslerinden oluşmuştur. Ayrıca grafları daha karmaşık hale getirip genel sonuçlara ulaşmaya yardımcı olan alt bölme ve duble graflar yardımı ile Narumi-Katayama indeksleri hesaplanmıştır. Yine bu bölümde çarpımsal geometrik aritmetik indeks ile ilgili hesaplamalar yapılmış, alt üst sınırlar bulunmuştur. Ayrıca kenar eklemenin bu indekse etkisi incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde ise tartışma ve sonuçlardan bahsedilmiştir.

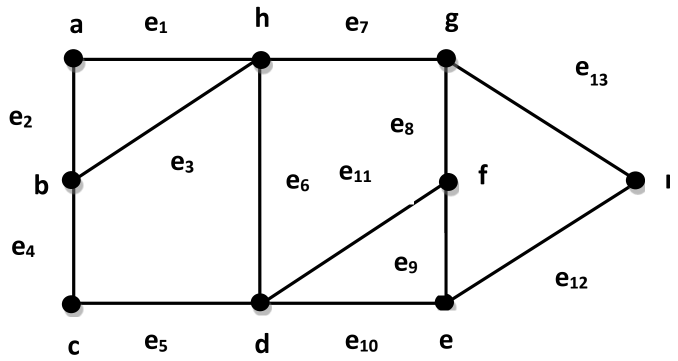
1.1. **Temel Kavramlar**

Bu kısımda tez boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanımlanacak ve grafların bazı özellikleri verilecektir. Ayrıntılı bilgi için Bondy ve Murty (1982), Bondy ve Murty (2008), Chartrand (1985), Chartrand ve Zhang (2012), Clark ve Holton (1995), Deo (1974), Diestel (2010), Foulds (1992), Gross ve Yellen (2006), Hartsfield ve Ringel (2003), Skiena (1990), Thulasiraman (1992), Trudeau (1993), Tutte (1998), Vasudev (2006), West (2001), Wilson (1998), veya diğer temel graf teorisi kitapları incelenebilir.

1.1.1. Tanım. Elemanlarına *köşeler (vertex)* adı verilen sonlu bir V kümesi ile, V kümesindeki sıralanmamış ikilileri *kenar (edge)* kabul eden sonlu bir E kümesinden oluşan yapıya *graf (graph)* denilir.

$$\mathrm{G} = (\mathrm{V}(\mathrm{G}), \mathrm{E}(\mathrm{G}))$$

ile gösterilir. Bir G grafında köşe kümesinin ve kenar kümesinin eleman sayıları sırasıyla n *ve* m ile gösterilir. Yani köşe kümesi eleman sayısı $|V(G)| = n$ ve kenar kümesi eleman sayısı $|E(G)| = m$'dir.



Şekil 1.1. Bir $\boldsymbol{G}$ grafı

Şekil ’de verilen G grafının köşe kümesi $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, ı\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$’dir.

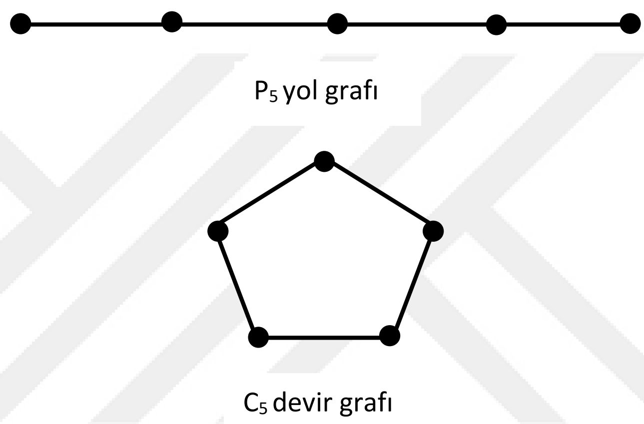
1.1.2. Tanım. Bir G grafının kenar sayısına grafın *boyutu (size)*; köşe sayısına ise grafın *mertebesi (order)* denilir.

1.1.3. Tanım. Bir G grafında iki köşe u ve v olsun. Eğer bu köşeler arasında bir kenar mevcut ise u ve v köşelerine *komşu (adjacent) köşeler* denilir.

Komşuluk kavramı grafların çalışılmasında ve uygulamalarında oldukça önemlidir. Bu kavram yardımıyla oluşturulan ve adına grafın komşuluk matrisi denilen bir matris yardımıyla bu matrisin özdeğerlerini kök kabul eden karakteristik polinom elde edilebilir ve bu özdeğerlerin mutlak değerlerinin toplamı bize grafın enerjisi denilen bir kavramı vermektedir. Bu da graf teorinin, adına spektral graf teori denilen önemli bir alt dalını vermektedir. Spektral graf teori, özellikle moleküllerin fiziksel ve kimyasal özelliklerinin çalışılmasında yardımcı olmaktadır.

1.1.4. Tanım. $i = 1,2,\cdots,n$ için bir G grafındaki v_i köşelerinin $v_i v_{i+1} \epsilon E$ dizisine grafta bir *yol (walk)* denilir. Eğer yolun tüm köşeleri birbirinden farklı ise bu yola *patika (path)* denilir. n köşeli bir patika P_n ile gösterilir. Eğer G grafı kapalı bir patika ise G'ye *devir (cycle) graf* denilir ve n köşeli bir devir graf C_n ile gösterilir.

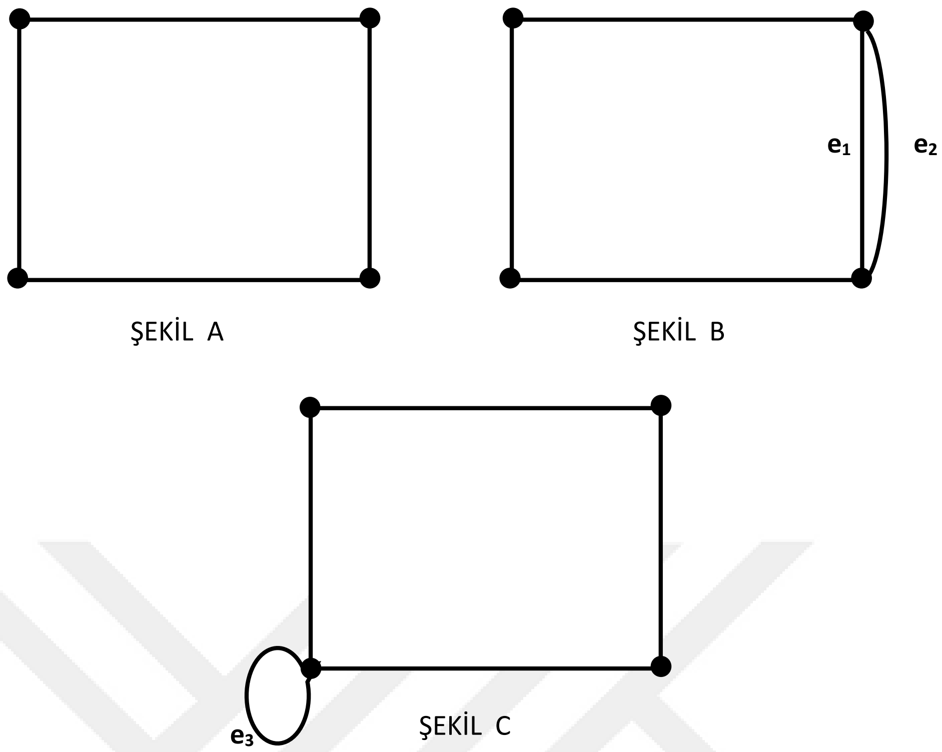
Grafların çalışılmasında en sık karşılaşılan ve kullanılan graf türleri patika ve devir graflarıdır. Bu iki graf, graf türleri arasında yer almakla birlikte aynı zamanda daha büyük graflar içinde bir graf parçası olarak da karşımıza çıkmaktadırlar.



Şekil 1.2. P_5 yol grafı ve C_5 devir grafı

1.1.5. Tanım. Bir grafta herhangi iki köşe arasında en az bir yol varsa bu grafa *bağlantılı (connected) graf*, aksi durumda *bağlantısız (disconnected) graf* denilir.

1.1.6. Tanım. Bir grafta iki köşe birden fazla kenarla birleşiyorsa bu kenarlara *katlı (çoklu) kenar (multiple edges)* denilir. Bir köşe bir kenarla kendisine birleştiriliyorsa bu kenara da *döngü (loop)* denilir. Katlı kenar ve döngü içermeyen graflara *basit graf (simple graph)* denilir.



Şekil 1.3. Basit ve basit olmayan graflar

Şekil 1.3.A'daki graf, döngü ya da katlı kenar bulundurmadığı için basit bir graftır. Fakat Şekil 1.3.B'deki e_1 ve e_2 kenarları katlı kenarlar; Şekil 1.3.C'deki e_3 kenarı ise bir döngü olduğundan bu iki graf, basit graf değildir.

1.1.6. Tanım. Bir G grafında $e = uv \in E(G)$ olsun. Bu e kenarına u ve v köşelerine *bitişiktir (incident)* denilir.

Bitişiklik de komşuluk gibi önemli bir kavramdır. Komşuluk matrisinden sonra en çok çalışılan ve uygulamalara sahip olan graf matrisi bitişiklik matrisidir.

1.1.7. Tanım. G bir graf, $u \in V(G)$ olsun. Bu köşeyi uç kabul eden kenarların sayısına u köşesinin *derecesi (degree)* denilir ve *deg(u)*, d_u ya da $d_G(u)$ ile gösterilir.

1.1.8. Tanım. G grafının *maksimum derecesi*

$$\Delta(G) = max\{d_G(v)|v \in G\}$$

olarak; *minimum derecesi ise*

$$\delta(G) = min\{d_G(v)|v \in G\}$$

olarak tanımlanır.

Graflarla ilgili özellikle kombinatorik çalışmalarda maksimum ve minimum dereceler önemli rol oynamaktadır. Birçok eşitsizlik bu iki özel köşe derecesi yardımıyla ifade edilmektedir.

1.1.8. Tanım. Eğer bir köşenin derecesi 1 ise bu köşeye *sallanan (pendant) köşe* denilir.

1.1.9. Tanım. Bir G grafında köşe derecelerinden oluşan kümeye bu grafın *derece dizisi (degree sequence)* adı verilir.

Bir G grafının derece dizisi en genel haliyle $0 \leq i \leq \triangle$ için $a_i \geq 0$ olmak üzere

$$DS = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \triangle^{(a_\triangle)}\}$$

ile gösterilir. Eğer grafta derecesi 0 olan bir köşe yok ise derece dizisi

$$DS = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \triangle^{(a_\triangle)}\}$$

şekline dönüşür.

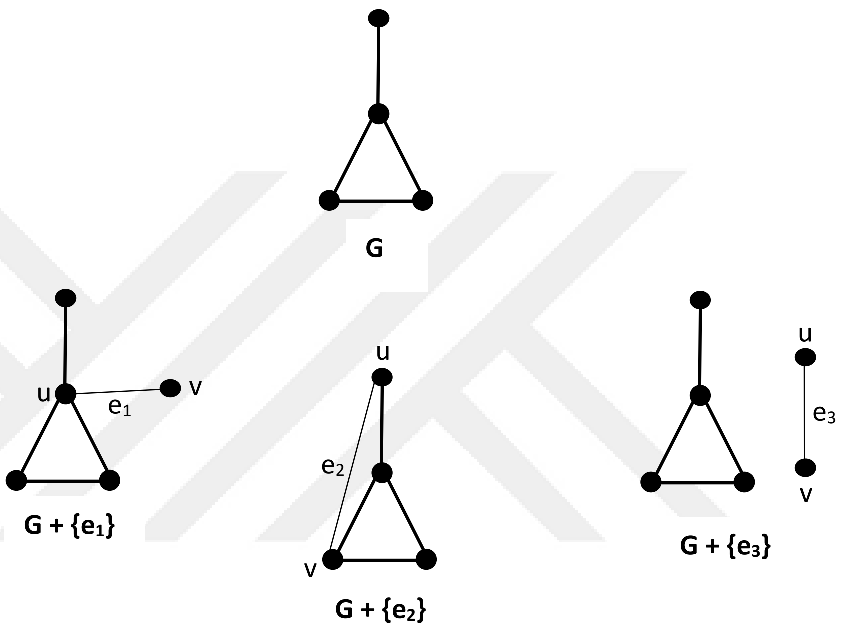
1.1.10. Tanım. D kümesi negatif olmayan tamsayılardan oluşan bir küme olsun. Bu küme bir G grafının derece dizisine eşit ise D'ye *çizilebilir (realizable) derece kümesi* denilir.

Derece dizileri yazılırken kullanıldıkları yere göre ya büyükten küçüğe ya da tam tersi sıralama ile yazılmaktadır. Örneğin bir derece dizisinin çizilebilir olup olmadığını anlamak için kullanılan en temel ve eski sonuçlardan birisi olan Havel-Hakimi yönteminde derece dizisinin büyükten küçüğe dizilmesi gereklidir. Bunun dışındaki durumlarda genellikle derece dizileri küçükten büyüğe dizilmektedir.

1.1.11. Tanım. Eğer bir G grafında köşelerin dereceleri birbirine eşit ise bu grafa *regüler (regular) graf* denilir. Özel olarak tüm köşelerinin derecesi *r* olan bir grafa *r-regüler graf* denilir.

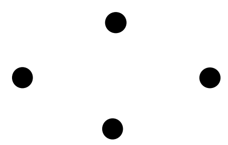
1.1.12. Tanım (Kenar ekleme). Bir G grafına $E(G)$'de olmayan bir e kenarının eklenmesiyle oluşturulan yeni grafa *e kenarı eklenmiş G grafı* denilir ve $G + \{e\}$ ya da $G + e$ ile gösterilir.

Bir grafa kenar ekleme üç şekilde yapılabilir: (1) G grafının bir u köşesine, G grafına ait olmayan bir v köşesini yeni bir $e = uv$ kenarıyla birleştirebiliriz. (2) G grafının komşu olmayan iki u ve v köşesini, yeni bir $e = uv$ kenarıyla birleştirebiliriz. (3) G grafına ait olmayan iki u ve v köşesini, yeni bir $e = uv$ kenarıyla birleştirebiliriz. Bu son durumda grafın bileşen sayısı 1 artarken ilk iki durumda değişmeyecektir.



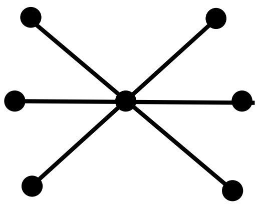
Şekil 1.4. Bir G grafına kenar eklemenin üç yolu

1.1.13. Tanım. Hiç kenarı olmayan graflara *boş (null) graf* adı verilir. n köşeli bir boş graf N_n ile gösterilir.



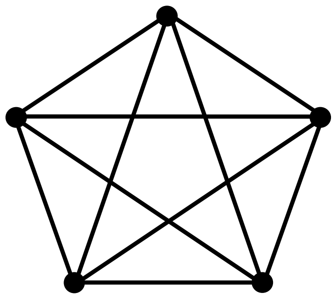
Şekil 1.5. N_4 boş grafı

1.1.14. Tanım. Adına merkez köşe diyeceğimiz bir köşenin her biri yalnızca bu köşeye komşu olan $n-1$ tane köşeyle birlikte oluşturduğu bir grafa *yıldız (star) graf* denilir. n köşeli yıldız graf S_n ile gösterilir.



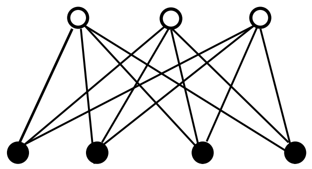
Şekil 1.6. S_7 yıldız grafı

1.1.15. Tanım. Bir grafta n köşenin her biri kendisinden başka bütün köşeler ile birer kenar oluşturuyorsa bu grafa *tam (complete) graf* denir ve n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir.



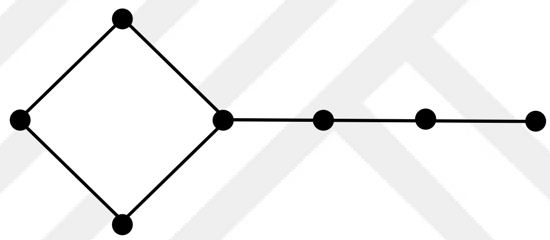
Şekil 1.7. $\boldsymbol{K_5}$ tam grafı

1.1.16. Tanım. Bir grafta köşeler iki gruba ayrılarak bir grupta bulunan köşelerin bazıları diğer gruptaki köşelerle, kenarlar aracılığıyla birleşiyorsa bu grafa *iki parçalı (bipartite) graf* denilir. Eğer iki parçalı grafta birinci grupta bulunan her köşe ikinci gruptaki her bir köşeyle kenarlar yardımıyla birleşiyorsa bu grafa *iki parçalı tam (complete bipartite) graf* denilir. Eğer gruplarda r ve s tane köşe varsa bu graf $K_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 1.8. $K_{3,4}$ iki parçalı tam grafı

1.1.16. Tanım. P_{s+1} yol grafındaki iki uç köşeden birisini C_r devir grafındaki bir köşeyle özdeşleştirerek oluşturulan grafa *larva (tadpole) graf* denilir. Bu graf $T_{r,s}$ ile gösterilir.



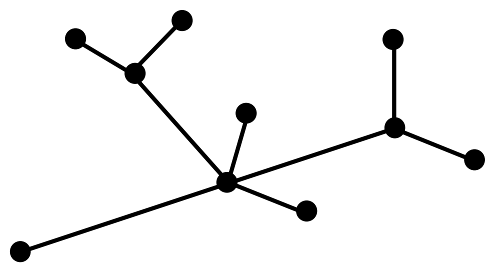
Şekil 1.9. $T_{4,3}$ larva grafı

1.1.17. Tanım. Eğer bağlantılı bir grafta hiç devir bulunmuyorsa bu grafa *ağaç (tree) graf* veya kısaca *ağaç* denilir. n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir. Bağlantılılık şartı olmadığı durumlarda bu grafa *orman (forest)* adı verilir.

T_n ağacının derece dizisi

$$T_n = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \triangle^{(a_\triangle)}\}$$

şeklindedir.



Şekil 1.10. 10 köşeli bir ağaç

Şekil 1.10’daki graf bir ağaçtır. Dikkat edilirse patika ve yıldız grafların tümü de aynı zamanda birer ağaçtır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bir graf yukarıda belirtildiği gibi noktalardan ve bu noktaları birleştiren çizgilerden oluşmaktadır. Bu noktalara grafın köşeleri, çizgilere ise grafın kenarları adı verilir. Bu kadar basit bir yapının günümüzde sahip olduğu uygulamalar gerçekten şaşırtıcıdır.

Graf teorinin en önemli uygulama alanlarından biri kimya ve kimyaya bağlı ilaç sanayi, kozmetik sanayi gibi dallardır. Atomları ve molekülleri graflar yardımıyla çalışabiliriz. Matematiğin diğer dallarında da yapılabilen bu işleme matematiksel modelleme adı verilir.

Atomlar köşeler, kimyasal bağlar da çizgiler olarak düşünülerek modelleme yapılır. Atom ve moleküllerin sınıflandırılmasında kullanılan sabit sayılar graf modelleri yardımıyla çok daha kolay ve ekonomik olarak hesaplanmaktadır. Bu hesaplamalar yapılırken topolojik graf indekslerinden faydalanılmaktadır. Topolojik indeksler, sayısal yapı-aktivite ilişkisi modellerinde (QSPR/QSAR) kullanırlar. Yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilen sayılar ile kimyasal özellikleri incelenen atom, molekül sabitleri arasında bağlantı bulunması durumunda verilerin kimyasal özelliklerinin belirlenmesi mümkün hale gelir. Bu bağlantılar ve ekonomik faydalar sayesinde kimyaya bağlı biyoloji, fizik gibi dallarda da graf teoriye olan ilgi artmıştır. Graf teorinin bir başka uygulama alanı da matematik ve bilgisayardır. Örneğin "minimum geren ağaç problemi", "network akış problemi", "en kısa yol problemi" gibi problemler graf teori yardımıyla çözülmüştür.

Graf teoride köşe derecelerine bağlı toplamlar olarak ifade edilen toplamsal graf indekslerine sıkça rastlanmaktadır. Çarpımsal topolojik graf indeksleri ise çalışılması daha zor indekslerdir ve bunlardan başlıcaları bu tezde ele alınmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Graf teorinin topolojik graf indeksleri ile çalışılması son yüzyılda kullanılmış ve gitgide geliştirilmiş bir dalını oluşturmuştur. Topolojik graf indeksleri çeşitli sınıflara ayrılabilir. Köşe derecelerine bağlı olarak tanımlananlar, matrisler yardımıyla tanımlananlar ve uzaklıklar yardımıyla tanımlananlar bunlar arasında en önemlileridir. Doğal olarak bu sınıfların her birisine özgü çalışma yöntemleri mevcuttur. Genelde tüm bu indeks türlerinde hesaplamaya dayalı yönler öne çıkmaktadır. Küçük hesaplamalar elle yapılabilirken büyük hesaplamalar için bilgisayar programlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tezde genel teori ele alındığından büyük çaplı ve farklı özellik gösteren graf türlerine ilişkin hesaplara gerek kalmamıştır. Bu yüzden sadece çevrimiçi hesaplamalar yapabildiğimiz MAPLE ve MATHEMATICA programlarından faydalanılmıştır.

Köşelerin ve kenarların türlerine göre sayılarını veren tablolardan sıklıkla faydalanılmıştır. Bu tablolar oluşturulduğunda kolayca hesaplanmak istenen indekse ulaşmak mümkün olmaktadır.

Bunlar dışında klasik lineer cebir, kombinatorik ve graf teorik ymöntemlere de yeri geldikçe ihtiyaç duyulmuştur.

4. BULGULAR

4.1. Topolojik Graf İndeksleri

Bu bölümde genelde derece ağırlıklı, uzaklık ve bunların karma veya başka kavramlarla yer aldığı diğer indeksleri vereceğiz. Bu indekslerden bazıları benzer özelliklere sahiptir. Bunlar da gruplar şeklinde verilecektir:

4.1.1. Derece bazlı topolojik graf indeksleri

4.1.1.1. Birinci Zagreb indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$M_1(G) = \sum_{uv\in E(G)}(d_u + d_v)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.2. İkinci Zagreb indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$M_2(G) = \sum_{uv\in E(G)}(d_u \cdot d_v)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.3. Birinci çarpımsal Zagreb indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$PM_1(G) = \prod_{uv \in E(G)} (d_u + d_v)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.4. İkinci çarpımsal Zagreb indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$PM_2(G) = \prod_{uv \in E(G)} (d_u \cdot d_v)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.5. Unutulmuş (Forgotten) indeks. *G* bir graf olmak üzere

$$F(G) = \sum_{uv \in E(G)} {d_u}^3$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.6. Randic indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u d_v}}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.7. Toplam-bağlantılılık (sum-connectivity) indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$SCI(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u + d_v}}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.8. Harmonik indeks. *G* bir graf olmak üzere

$$H(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{d_u + d_v}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.9. Atom-bağ-bağlantılılık (atom-bond-connectivity) indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$ABC(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\frac{d_u + d_v - 2}{d_u d_v}}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.10. Geometrik-Aritmetik indeks. *G* bir graf olmak üzere

$$GA(G) = \sum_{uv\in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u+d_v}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.11. Arttırılmış (Augmented) Zagreb indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$AZ(G) = \sum_{uv\in E(G)} \left(\frac{d_u d_v}{d_u+d_v-2}\right)^3$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.12. Albertson düzensizlik (irregularity) indeksi (3. Zagreb indeksi). *G* bir graf olmak üzere

$$Alb(G) = \sum_{uv\in E(G)} |d_u - d_v|$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.13. Çift taraflı (reciprocal) Randic indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$RR(G) = \sum_{uv\in E(G)} \sqrt{d_u d_v}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.14. Narumi-Katayama indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$NK(G) = \prod_{u\in V(G)} d_u$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.15. Çarpımsal toplamsal (multiplicative sum) Zagreb indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$\pi_1 *(G) = \prod_{uv\in E(G)} (d_u + d_v)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.16. Total çarpımsal (total multiplicative) Zagreb indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$\pi^T(G) = \prod_{u,v\in V(G)} (d_u + d_v)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.1.17. Çarpımsal geometrik-aritmetik (multiplicative geometric-arithmetic) indeks. *G* bir graf olmak üzere

$$GA\Pi(G) = \prod_{uv\in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u+d_v}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.2. Uzaklık bazlı topolojik graf indeksleri

4.1.2.1. Wiener indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$W(G) = \sum_{u,v\in V(G)} d(u,v)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.2.2. Genelleştirilmiş (generalized) Wiener indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$W_\lambda(G) = \sum_{u,v\in V(G)} d(u,v)^\lambda$$

$\lambda \epsilon R$, şeklinde tanımlıdır.

4.1.2.3. Hiper (hyper) Wiener indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$WW(G) = \sum_{u,v \in V(G)} [d(u,v) + d^2(u,v)]$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.2.4. Harary indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.3. Diğer topolojik graf indeksleri

4.1.3.1. Eksantrik bağlantı (eccentric connectivity) indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$\zeta^C(G) = \sum_{u \in V(G)} \left(d_u \cdot e_G(u)\right)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $e_G(u) = max\{d(u,v) \mid v \in V\}$' dir.

4.1.3.2. Köşe-pi (vertex-pi) indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$PI_v\ (G) = \sum_{uv\in E(G)} \big(n_u(e) + n_v(e)\big)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $e = uw$ olmak üzere $n_u(e) = \#\{v \in V \mid d(u,v) < d(v,w)\}$' dır.

4.1.3.3. Szeged indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$S_z\ (G) = \sum_{uv\in E(G)} \big(n_u(e) \cdot n_v(e)\big)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.3.4. Co-pi indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$Co\text{-}pi\ (G) = \sum_{e=uv\in E(G)} |\, n_u(e) - n_v(e)|$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.3.5. Schultz moleküler topolojik indeksi. *G* bir graf olmak üzere

$$MTI\ (G) = \sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \big(d_i + d_j\big) d(i,j)$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.4. Grup oluşturan indeksler

4.1.4.1. Düzensizlik indeksleri. Albertson indeksi, sigma indeksi, Bell indeksi bunlara örnektir. Sigma indeksi ayrıntılı bilgisi için Ascioglu ve Cangul (2018b) incelenebilir:

Sigma indeksi,

$$\sigma(G) = \sum_{uv\epsilon E(G)} (d_u - d_v)^2$$

Bell indeksi,

$$\sum_{v\epsilon V(G)} (d_v - \frac{2m}{n})^2$$

ve Albertson indeksi de

$$\mathrm{Alb}(G) = \sum_{uv\epsilon E(G)} |d_u - d_v|$$

şeklinde tanımlıdır.

4.1.4.2. Denk indeksler. 1., 2. ve 3. Zagreb denk indeksi ve unutulmuş denk indeksi buna örnektir.

$$\overline{M_1}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (d_u + d_v)$$

$$\overline{M_2}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} (d_u \cdot d_v)$$

$$\overline{M_3}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} |d_u - d_v|$$

$$\bar{F}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} {d_u}^3.$$

4.1.4.3. İndirgenmiş indeksler. İndirgenmiş 2. Zagreb indeksi buna örnektir.

$$RM_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u - 1)(d_v - 1).$$

4.1.4.4. Çarpmaya göre ters indeksler. Verilen indeksin ifadesinin çarpmaya göre tersinin alınmasıyla oluşturulan indekstir.

4.1.4.5. Tam (entire) indeksler. Kimyasal moleküllerde ne sadece atomlar arası kuvvetleri, ne de sadece bağlar arası kuvvetleri çalışmak yeterli olmamaktadır. Gerçek uygulamalarda hem bu iki tür kuvvet hem de bunlara ek olarak atomlar ile bağlar arasındaki kuvvetler göz önüne alınmaktadır. Bu sebeple son yıllarda bazı matematikçi ve kimyacılar tüm bunları hesaplamamızı sağlayan tam indeksleri tanımladılar ve çalışmaya başladılar. Birinci ve ikinci tam Zagreb indeksleri buna örnektir:

$$M_1{}^{\varepsilon}(G) = \sum_{x \in E(G) \cup V(G)} {d_x}^2$$

ve

$$M_2{}^{\varepsilon}(G) = \sum_{x \text{ ile } y \text{ komşu veya bitişik}} d_x d_y.$$

4.2. Çarpımsal Topolojik Graf İndeksleri

4.2.1. Narumi-Katayama indeksi

G basit bir graf olsun. G grafının tüm köşelerinin dereceleri çarpılarak oluşturulan sayıya *G grafının Narumi-Katayama indeksi* denir ve *NK(G)* ile gösterilir. Yani

$$\mathrm{NK(G)} = \prod_{u \in V(G)} d(u)$$

şeklindedir (Narumi ve Katayama 1984).

Bazı özel grafların Narumi-Katayama indeksleri aşağıda verilmiştir:

$$NK(G) = \begin{cases} 2^{n-2} & G = P_n \\ 2^n & G = C_n \\ n-1 & G = s_n \\ (n-1)^n & G = K_n \\ r^s s^r & G = K_{r,s} \\ 3.\,2^{r+s-2} & G = T_{r,s} \end{cases}$$

Bu konuya ait ayrıntılı çalışmalar için Aşçıoğlu (2016) tezi incelenebilir.

4.2.2. GAΠ indeksi

G bir basit graf olsun. G grafında kenar oluşturan köşelerin geometrik ortalamasının aritmetik ortalamasına oranlarının çarpımına *G grafının GAΠ indeksi* denir ve *GAΠ(G)* ile gösterilir. Yani

$$GA\Pi(G) = \prod_{uv\in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v}$$

şeklindedir.

4.2.3. Çarpımsal Zagreb indeksleri

Todeschini ve ark., Todeschini ve Consonni (2010), Zagreb indekslerinin aşağıdaki gibi tanımlanan çarpımsal şekillerini önermişlerdir:

$$\Pi_1 = \Pi_1(G) = \prod_{u\in V(G)} d(u)^2$$

$$\Pi_2 = \Pi_2(G) = \prod_{uv\in E(G)} d(u)\cdot d(v)$$

Bu graf değişmezleri Gutman (2011) tarafından birinci çarpımsal Zagreb indeksi ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksi olarak adlandırılmıştır.

Bazı özel grafların birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri aşağıda verilmiştir. Ayrıntılı bilgi için Yurttaş (2014) incelenebilir.

$$\Pi_1(G) = \begin{cases} 2^{2n-4} & G = P_n \\ 2^{2n} & G = C_n \\ (n-1)^2 & G = s_n \\ (n-1)^{2n} & G = K_n \\ r^{2s}s^{2r} & G = K_{r,s} \end{cases}$$

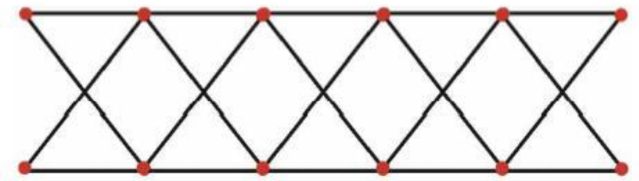
$$\Pi_2(G) = \begin{cases} 2^{2n-4} & G = P_n \\ 2^{2n} & G = C_n \\ (n-1)^{n-1} & G = s_n \\ (n-1)^{n(n-1)} & G = K_n \\ (rs)^{rs} & G = K_{r,s} \end{cases}$$

4.3. Alt Bölme ve Duble Grafların Narumi-Katayama İndeksleri

Bu bölümde çarpımsal topolojik graf indekslerinden olan Narumi-Katayama indeksine ait sonuçlar elde edilmiştir. Bölüm yazılırken Ascioglu ve Cangul (2018a) kaynak olarak kullanılmıştır.

4.3.1. Duble grafların Narumi-Katayama indeksleri

Bir G grafının köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun ve bu grafın aynı köşe kümesi üzerinden bir kopyasını alalım. Köşe kümesindeki her bir v_i*'nin* komşu olduğu köşeler ile tekrar kenar oluşturmasıyla elde edilen grafa *G grafının duble (double) grafı* denilir. Bir G grafının duble grafı $D(G)$ ile gösterilir.



Şekil 4.1. P_6 yol grafının duble grafı

4.3.1.1. Lemma. Bir G grafının derece dizisi $DS(G)=\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ olsun. Bu grafın duble grafının derece dizisi

$$DS\big(D(G)\big) = \big\{(2d_1)^{(2)}, (2d_2)^{(2)}, \dots, (2d_n)^{(2)}\big\}$$

şeklindedir.

4.3.1.2. Teorem. *G* basit bir graf olmak üzere

$$NK(D(G)) = [2^n \cdot NK(G)]^2$$

dir.

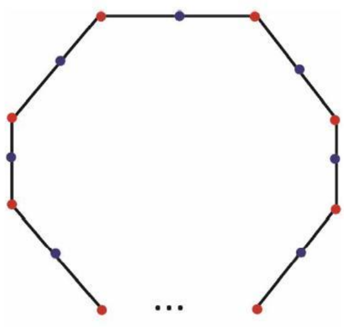
İspat. *G* grafının derece dizisi *DS(G)*=$\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ olsun. Lemma 4.3.1.1. gereğince

$$NK(D(G)) = (2d_1)^2 \cdot (2d_2)^2 \cdot \ \dots \cdot (2d_n)^2$$
$$= [2^n \cdot NK(G)]^2$$

olur.

4.3.2. Alt bölme graflarının Narumi-Katayama indeksleri

Bir *G* grafının alt bölme grafı *G* grafındaki her bir kenara bir köşe eklenmesi ile elde edilir. Bir *G* grafının alt bölme grafı *S(G)* ile gösterilir.



Şekil 4.2. C_n devir grafının alt bölme grafı

4.3.2.1. Teorem. *G* basit bir graf olmak üzere

$$NK\big(S(G)\big) = 2^m \cdot NK(G)$$

dir.

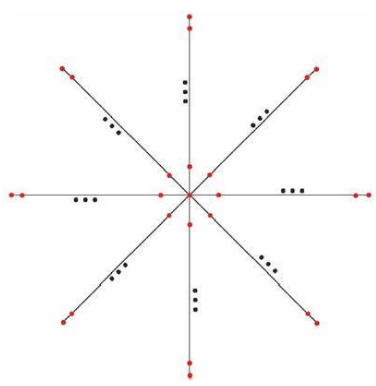
İspat. Bir *G* grafının kenar sayısı *m* olmak üzere grafın alt bölme grafı oluşturulurken her bir kenara bir köşe eklenmesi derecesi 2 olan köşeler eklemek demektir. Böylece Narumi-Katayama indeksi tanımı gereğince

$$NK\big(S(G)\big) = 2^m \cdot NK(G)$$

olur.

4.3.3. r-alt bölme graflarının Narumi-Katayama indeksleri

Bir *G* grafının r-alt bölme grafı *G* grafındaki her bir kenara r tane 2 dereceli köşenin eklenmesi ile elde edilir. Bir *G* grafının r-alt bölme grafı $S^r(G)$ ile gösterilir.



Şekil 4.3. S_n yıldız grafının r-alt bölme grafı

4.3.3.1. Teorem. *G* bir basit graf olmak üzere

$$NK\big(S^r(G)\big) = 2^{r.|E(G)|} \cdot NK(G)$$

$$= 2^{rm} \cdot NK(G)$$

dir.

İspat. *m* kenarlı bir *G* grafına 2 dereceli r tane yeni köşe eklenerek Narumi-Katayama indeksi tanımı gereğince

$$NK\big(S^r(G)\big) = \ 2^{rm} \cdot NK(G)$$

elde edilir.

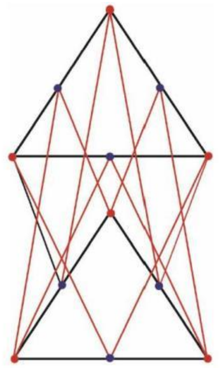
4.3.3.2. Sonuç. *G* bir basit graf olmak üzere

$$NK\big(S^r(G)\big) = \ 2^{m(r-1)} \cdot NK(S(G))$$

dir.

4.3.4. Alt bölme grafların duble graflarının Narumi-Katayama indeksleri

Bir G grafına alt bölme ve duble graf işlemlerinin sırasıyla uygulanmasıyla elde edilir. Bir G grafının alt bölme grafının duble grafı $D(S(G))$ ile gösterilir.



Şekil 4.4. C_3 devir grafının alt bölme grafının duble grafı

4.3.4.1. Lemma. Bir G grafı için $|V(G)| = n$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere

$$|V(S(G))| = n+m$$

$$|E(S(G))| = 2m$$

$$|V(D(S(G)))| = 2\,|V(S(G))| = 2n+2m$$

$$|E(D(S(G)))| = 8m$$

dir.

4.3.4.2. Lemma. Bir G grafının derece dizisi $DS(G) = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ olsun. G grafının alt bölme grafının derece dizisi

$$DS(S(G)) = \{d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}, 2^{(m)}\},$$

alt bölme grafının duble grafının derece dizisi ise

$$DS(D(S(G))) = \{(2d_1)^{(2)}, (2d_2)^{(2)}, \dots, (2d_n)^{(2)}, 4^{(2m)}\}$$

dir.

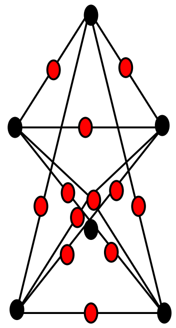
4.3.4.3. Teorem. Bir *G* grafı için

$$NK\left(D\big(S(G)\big)\right) = 2^{4m+2n} \cdot [NK(G)]^2$$

dir.

4.3.5. Duble grafların alt bölme graflarının Narumi-Katayama indeksleri

Bir *G* grafına duble graf ve alt bölme işlemlerinin sırasıyla uygulanmasıyla elde edilir. Bir *G* grafının duble grafının alt bölme grafı *S(D(G))* ile gösterilir.



Şekil 4.5. *C₃* devir grafının duble grafının alt bölme grafı

4.3.5.1. Lemma. *m* kenarlı bir *G* grafı için

$$\left|V\left(S\big(D(G)\big)\right)\right| = \left|V\big(D(G)\big)\right| + \left|E\big(D(G)\big)\right|$$

$$\left|E\left(S\big(D(G)\big)\right)\right| = 8m$$

dir.

4.3.5.2. Lemma. Bir *G* grafının derece dizisi *DS(G)* $=\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ olsun. *G* grafının duble grafının derece dizisi

$$\mathrm{DS(D(G))} = \left\{(2d_1)^{(2)}, (2d_2)^{(2)}, \dots, (2d_n)^{(2)}\right\}$$

$$\mathrm{DS(S(D(G)))} = \left\{(2d_1)^{(2)}, (2d_2)^{(2)}, \dots, (2d_n)^{(2)}, 2^{(|E(D(G))|)}\right\}$$

dir.

4.3.5.3. Teorem. G bir graf olmak üzere

$$NK\left(S\big(D(G)\big)\right) = 2^{|E(D(G))|} \cdot [2^n \cdot NK(G)]^2$$

dir.

İspat. Lemma 4.3.5.2. *DS(S(D(G)))* gereğince Narumi-Katayama indeksi tanımından ispat açıktır.

4.3.5.4. Sonuç. *G* grafı tam, larva ve iki parçalı tam graftan biri olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$NK\left(D\big(S(G)\big)\right) = NK\left(S\big(D(G)\big)\right)$$

4.4. Çarpımsal Geometrik Aritmetik İndeksin Özellikleri

4.4.1. Genel sonuçlar

Bu bölümde tezin ana konusunu oluşturan çarpımsal topolojik graf indekslerinden olan Çarpımsal Geometrik Aritmetik İndekse ait bazı sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlar için Gutman ve ark. (2018) kaynak olarak kullanılmıştır.

4.4.1.1. Teorem. *G* bağlantılı bir graf olsun.

$$GA\pi(G) = 1 \;\Leftrightarrow G\ regüler\ graftır.$$

İspat. GAπ indeksi ve regülerlik tanımı gereğince ispat açıktır.

4.4.1.2. Lemma. *G* bir graf $e=uv$ ve $d_u=d_v$ olsun.

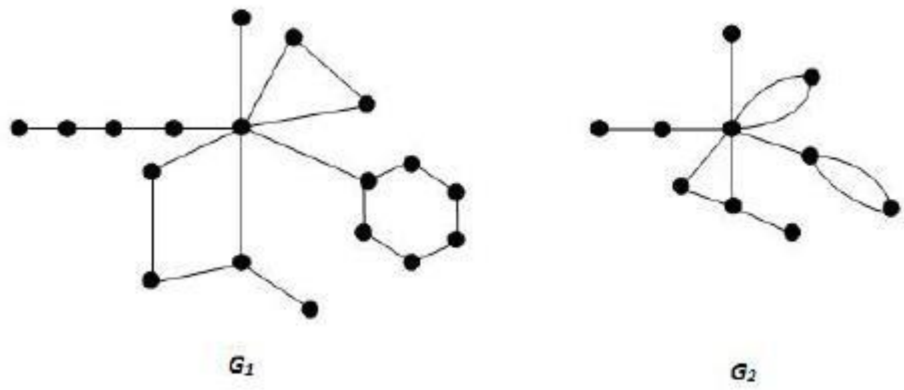
$$GA\pi(G) = \prod_{e\,\epsilon E(G)} GA\pi(G,e)$$

olmak üzere

$$GA\pi(G,e) = 1$$

dir.

Lemma 4.4.1.2. gereğince *G* grafının aynı dereceye sahip bitişik köşeleri *GAΠ* indeksini değiştirmeyeceğinden graf hesaplama yapılırken daraltılabilir. Aşağıda aynı *GAΠ* indeksine sahip graf örnekleri verilmiştir:



Şekil 4.6. Aynı *GAΠ* indeksine sahip graflar

4.4.2. Bazı grafların *GAΠ* indeksleri

4.4.2.1. Lemma.

$$\mathrm{GA\Pi}(K_n) = \mathrm{GA\Pi}(C_n) = 1$$

dir.

4.4.2.2. Lemma. $n \geq 3$ olmak üzere

$$\mathrm{GA\Pi(P_n)} = \frac{8}{9}$$

ve

$$\mathrm{GA\Pi(P_2)} = 1$$

dir.

4.4.2.3. Lemma.

$$GA\Pi(S_n) = \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n}\right)^{n-1}.$$

$GA\Pi(S_n)$ azalandır. Yani p > q için $GA\Pi(S_p) < GA\Pi(S_q)$ 'dur.

4.4.2.4. Lemma.

$$GA\pi(T_{r,s}) = \begin{cases} \dfrac{6\sqrt{2}}{25} & s = 1 \\ \dfrac{64\sqrt{3}}{125} & s > 1 \end{cases}$$

4.4.2.5. Lemma.

$$GA\pi(K_{r,s}) = \left(\frac{2\sqrt{rs}}{r+s}\right)^{rs}$$

r sabit iken $GA\pi(K_{r,s})$ azalandır.

4.4.3. *GAΠ* için alt ve üst sınırlar

4.4.3.1. Teorem. *G* basit bağlantılı bir graf ve Δ ve δ *G* grafının en büyük ve en küçük dereceleri olsun. O zaman

$$\frac{\sqrt{\pi_2(G)}}{\Delta^m} \leq GA\pi(G) \leq \frac{\sqrt{\pi_2(G)}}{\delta^m}$$

dir. *G*'nin regüler graf olması durumunda eşitlik sağlanır.

İspat. *m* G grafının kenar sayısı olmak üzere

$$GA\pi(G) = 2^m \frac{\sqrt{\pi_2(G)}}{\pi_1{}^*(G)}$$

eşitliği gereğince

$$GA\pi(G) = \frac{2^m\sqrt{\pi_2(G)}}{\prod_{uv\epsilon E(G)}(d_u + d_v)} = \frac{\sqrt{\pi_2(G)}}{\prod_{uv\epsilon E(G)}\frac{1}{2}(d_u + d_v)}$$

dir. $\delta \leq \frac{1}{2}(d_u + d_v) \leq \Delta$ olduğundan teorem ispatlanmış olur.

4.4.3.2. Teorem. *G* basit bağlantılı *n* köşeli *m* kenarlı bir graf olsun. O zaman

$$\left(\frac{\delta}{n-1}\right)^m \leq GA\pi(G) \leq \left(\frac{n-1}{\delta}\right)^m$$

dir. Eğer *G* grafı tam graf ise eşitlik sağlanır.

İspat. $\delta \leq d_i \leq n-1$ eşitsizliği ve *GAπ* indeksi tanımı gereğince

$$\prod_{uv \in E(G)} 2\frac{\sqrt{\delta^2}}{2(n-1)} \leq GA\pi(G) \leq \prod_{uv \in E(G)} 2\frac{\sqrt{(n-1)^2}}{2\delta}$$

olur. Bu da sonucu göstermiş olur.

4.4.3.3. Teorem. *G* basit bağlantılı bir graf, *p* sallanan köşeler ve Δ en büyük köşe derecesi olsun. O zaman

$$GA\pi(G) \geq \frac{2^n}{(\Delta+1)^p \Delta^{m-p}}$$

dir.

İspat. Eğer *p* tane sallanan köşe varsa, p tane sallanan kenar vardır geriye kalan *m-p* tane kenar sallanan kenar değildir. Böylece

$$GA\pi(G) = 2^m \cdot \prod_{\substack{v_i,v_j \epsilon E(G) \\ d_j=1}} \frac{\sqrt{d_i}}{d_i+1} \cdot \prod_{\substack{v_i,v_j \epsilon E(G) \\ d_i,d_j>1}} \frac{\sqrt{d_i d_j}}{d_i+d_j}$$

$$\geq 2^m \cdot \prod_{\substack{v_i,v_j \epsilon E(G) \\ d_j=1}} \frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta+1} \cdot \prod_{\substack{v_i,v_j \epsilon E(G) \\ d_i,d_j>1}} \frac{\sqrt{d_i d_j}}{2\Delta}$$

$$= 2^m \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta+1}\right)^p \cdot \frac{1}{(2\Delta)^{m-p}} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{v_i,v_j \epsilon E(G) \\ d_i,d_j>1}} d_i d_j}$$

$$\geq \frac{2^p \Delta^{\frac{3p}{2}-m}}{(\Delta+1)^p} \cdot \sqrt{\frac{\prod_{v_i \epsilon V(G)} {d_i}^{d_i a_i}}{\Delta^p}}$$

$$= \frac{2^p}{(\Delta+1)^p \Delta^{m-p}} \cdot \sqrt{\prod_{v_i \epsilon V(G)} {d_i}^{d_i a_i}}$$

$$\geq \frac{2^p}{(\Delta+1)^p \Delta^{m-p}} \cdot \sqrt{\prod_{v_i \epsilon V(G)} 2^{2a_i}}$$

$$= \frac{2^n}{(\Delta+1)^p \Delta^{m-p}}$$

Burada a_i' ler derecesi i olan köşelerin numaralarıdır. $a_2 + a_3 + \cdots + a_\Delta = n - p$' dir.

4.4.3.4. Teorem. *G* basit bağlantılı bir graf olsun. O zaman

$$GA\pi(G) \geq \frac{1}{\sqrt{2^p}} \cdot \left(\frac{16m}{n(n+1)^2}\right)^{\frac{m}{2}}$$

dir.

İspat. $GA\pi(G) = 2^m \cdot \prod_{\substack{v_i,v_j\epsilon E(G)\\ d_j=1}} \frac{\sqrt{d_i.1}}{d_i+1} \cdot \prod_{\substack{v_i,v_j\epsilon E(G)\\ d_i,d_j>1}} \frac{\sqrt{d_i d_j}}{d_i+d_j}$

$$\geq 2^m \cdot \prod_{\substack{v_i,v_j\epsilon E(G)\\ d_j=1}} \frac{\sqrt{n-1}}{n} \cdot \prod_{\substack{v_i,v_j\epsilon E(G)\\ d_i,d_j>1}} \frac{\sqrt{2(n-1)}}{n+1}$$

$$= \frac{2^{\frac{3m-p}{2}}(n-1)^m}{n^p(n+1)^{m-p}} \geq 2^{\frac{3m-p}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)^m$$

$$\geq 2^{2m-\frac{p}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{n(n+1)^2}}\right)^m = \frac{1}{\sqrt{2^p}} \cdot \left(\sqrt{\frac{16m}{n(n+1)^2}}\right)^m$$

dir.

4.4.4. Kenar eklemenin *GAΠ*'ye etkisi

4.4.4.1. Teorem. *G* basit bağlantılı bir graf, *x G* grafının bir köşesi olmak üzere $d_x = k > 0$ olsun. *x*'e bitişik köşeler $u_1, u_2, \ldots, u_k$,$y \notin V(G)$ olsun. *G*' ye yeni bir *e=xy* asılı kenarı eklenerek oluşturlan graf *G+e* grafı olsun. O zaman

$$\mathrm{GA\Pi}(G+e) = \frac{2k+2}{(k+2)\sqrt{k}} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{k+d_{u_i}}{k+1+d_{u_i}} \cdot \mathrm{GA\Pi}(G)$$

dir.

İspat. Verilen yapıdaki G grafının çarpımsal geometrik-aritmetik indeksi yazılırsa

$$GA\pi(G) = \prod_{i=1}^{k} \frac{2\sqrt{k.d_{u_i}}}{k + d_{u_i}} \cdot GA\pi(G,*) \qquad (1)$$

olur. Burada

$$GA\pi(G,*) = \prod_{\substack{f\in E(G) \\ f\notin\{xu_1,xu_2,\ldots,xu_k\}}} GA\pi(G,f)$$

dir. *G+e* grafında *x*'in derecesi *k+1*'dir. O zaman

$$GA\pi(G+e) = \prod_{i=1}^{k} \frac{2\sqrt{(k+1).d_{u_i}}}{k+1+d_{u_i}} \cdot GA\pi(G+e,xy) \cdot GA\pi(G,*) \qquad (2)$$

olur. Burada $d_y = 1$ için

$$GA\pi(G+e,xy) = \frac{2\sqrt{(k+1)\cdot 1}}{k+1+1} = \frac{2\sqrt{(k+1)}}{k+2}$$

olur. (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\frac{GA\pi(G+e)}{GA\pi(G)} = \frac{\prod_{i=1}^{k} \frac{2\sqrt{(k+1).d_{u_i}}}{k+1+d_{u_i}} \cdot \frac{2\sqrt{(k+1)}}{k+2}}{\prod_{i=1}^{k} \frac{2\sqrt{k.d_{u_i}}}{k+d_{u_i}}}$$

elde edilir.

4.4.4.2. Sonuç. *G* ve *G+e* grafı Teorem 4.4.4.1'de verilen özelliklere sahip olsun. O zaman

$$GA\pi(G+e) = GA\pi(G) \Leftrightarrow d_x = k = 1$$

dir.

İspat. $GA\pi(G+e) = GA\pi(G)$ olsun.

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{k + d_{u_i}}{k + 1 + d_{u_i}} = \frac{(k+2)\sqrt{k}}{2k+2}$$

sol tarafta verilen kısımda her terim 1'den küçüktür. Böylece sağ kısım da 1'den küçüktür. Dahası sol taraftaki rasyonel sayı $\sqrt{k} \in Z^{+}$ olduğunu gösterir. Bu da k'nın tam kare olmasını gerektirir. $k=t^2$ ve $t \epsilon Z^{+}$ olsun. O zaman

$$\frac{(t^2+2)t}{2t^2+2} < 1$$

buna eşdeğer olarak

$$f(t) = t^3 - 2t^2 + 2t - 2 < 0.$$

$$t \leq 0 \; için \; f(t) < 0, t \geq 2 \; için \; f(t) > 0, f(1) = -1 \; ve$$

$$f(2) = 2\,, f(t) fonksiyonunun\;\; tek\; gerçek\; kökü\; t = 1\; ve\; t = 2'dir.$$

Böylece $t \epsilon \mathrm{Z}^+$ için *t=1* ise $f(t) < 0$ olur. Bu durumda *k=1* olur.

Sonuç 4.4.4.2'de $d_{u_1} = 2$ olmalıdır. Yani verilen koşullar altında $GA\pi(G+e) = GA\pi(G)$' de *u1* (x tepe noktasının ilk köşesi) köşesinin derecesi 2 olmalıdır. Bu da Lemma 4.4.1.2'den elde edilen sonuca uygundur.

Şimdi $GA\pi(G+e) > GA\pi(G)$ koşullarını belirleyelim. Açıkça,

$$GA\pi(G+e) > GA\pi(G) \Leftrightarrow \frac{2k+2}{(k+2)\sqrt{k}} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{k + d_{u_i}}{k + 1 + d_{u_i}} > 1.$$

Eğer k=1 ise, o zaman

$$\frac{1 + d_{u_1}}{2 + d_{u_1}} > \frac{3}{4}$$

$d_{u_1} > 2$'yi verir. Eğer k=2 ise, o zaman gerekli koşul

$$\frac{(1+d_{u_1})(1+d_{u_2})}{(2+d_{u_1})(2+d_{u_2})} > \frac{2\sqrt{2}}{3}. \qquad (*)$$

Ancak k≥ 3 ise, o zaman

$$\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \frac{1+\mathrm{d}_{\mathrm{u_i}}}{2+\mathrm{d}_{\mathrm{u_i}}} > \frac{5\sqrt{3}}{8} = 1{,}08 \ldots$$

yani $GA\pi(G+e) > GA\pi(G)$ olamaz.

Özetle $GA\pi(G+e) > GA\pi(G)$ yalnızca $k=1$ ve $d_{u_1} \geq 3$ iken ya da $k=2$ iken (*) ifadesi sağlanır.

4.4.4.3. Teorem. *G* basit bağlantılı bir graf ve *x* ile *y* bitişik olmayan iki köşe, $d_x=k$ ve $d_y=l$ olsun. *x*' e bitişik olan köşeler $u_1,u_2,\ldots,u_k$ ve *y*' ye bitişik olan köşeler $v_1,v_2,\ldots,v_k$ olsun. *G+e* grafı *x* ve *y* köşelerinin katılarak elde edildiği graf olsun. O zaman

$$GA\pi(G+e) = \frac{2(k+1).(l+1)}{(k+l+2)\sqrt{kl}} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{k+1+d_{u_i}}{k+d_{u_i}} \cdot \prod_{j=1}^{l} \frac{l+1+d_{v_j}}{l+d_{v_j}} \cdot GA\pi(G).$$

Doğal olarak *GA* indeksinin değişmez durumlarını incelemek istersek:

$$GA\pi(G+e) = GA\pi(G)$$

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{k} \frac{k+1+d_{u_i}}{k+d_{u_i}} \cdot \prod_{j=1}^{l} \frac{l+1+d_{v_j}}{l+d_{v_j}} = \frac{(k+l+2)\sqrt{kl}}{2(k+1).(l+1)}. \qquad (**)$$

4.4.4.4. Sonuç. Eğer *kl* tam kare değilse, $GA\pi(G+e) \neq GA\pi(G)$.

Eğer (**)' daki eşitliğin sağ tarafı 1'den küçük ise şunu elde ederiz:

4.4.4.5. Sonuç. Eğer

$$\frac{(k+l+2)\sqrt{kl}}{2(k+1).(l+1)} \leq 1$$

ise o zaman $GA\pi(G+e) \neq GA\pi(G)$ olur. Özellikle $k=l$ ise $GA\pi(G+e) \neq GA\pi(G)$'dir.

4.4.4.6. Sonuç. Eğer

$$\frac{2(k+1)(l+1)}{(k+l+2)\sqrt{kl}} \geq 1$$

ise o zaman $GA\pi(G+e) > GA\pi(G)$'dir.

Şimdi $GA\pi(G+e) > GA\pi(G)$ olduğu bazı *k* ve *l* değerlerini belirleyelim. $k=1$ olsun. O zaman $GA\pi(G+e) > GA\pi(G)$'yi elde etmek için

$$\frac{4(l+1)}{(l+3)\sqrt{l}} \geq 1$$

olmak zorundadır. Bu da şuna eşdeğerdir:

$$f(l) \coloneqq l^3 - 10l^2 - 23l - 16 \leq 0.$$

Bu kübik denklemin tek gerçek kökü 12,024….Böylece sonuç olarak k=*1* ve $1 \leq l \leq 12$ ise $GA\pi(G+e) > GA\pi(G)$ olur. Benzer şekilde k=*2* ve $1 \leq l \leq 11$; k=*3* ve $1 \leq l \leq 12$; k=*4* ve $1 \leq l \leq 14$; k=*5* ve $1 \leq l \leq 15$; k=*6* ve $1 \leq l \leq 16$ ise $GA\pi(G+e) > GA\pi(G)$'dir. Böylece *k* ve l'yi değiştirerek benzer sonuçlar elde edebiliriz.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde çarpımsal topolojik grafların en çok bilinenlerinden olan Narumi-Katayama indeksi ve çarpımsal geometrik-aritmetik indeksle ilgili genel sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak en çok bilenen graf çeşitleri incelenmiş, kendi içlerinde genel sonuçları verilmiştir. Bilinen graflarda bulunan sonuçlar en genel haldeki graflara ulaşmak için kullanılmıştır. Bunun için ilk olarak alt bölme ve duble graflar kullanılmıştır. Alt bölme ve duble graflar yardımı ile karmaşık yapılar oluşturularak başlangıçtaki grafla aralarındaki ilişkiler incelenerek teoremler oluşturulmuştur.

Topolojik indekslerle ilgili alt ve üst sınırlar hesaplanmıştır. Regüler grafların indekslerinin değişimi incelenmiştir. Kenar eklemenin indekslere olan etkileri bulunmuş ve teorem haline getirilmiştir.

KAYNAKLAR

Aşçıoğlu, M. 2016. Toplam operatörü ve Narumi-Katayama indeksi. *Yüksek Lisans Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Ascioglu, M., Cangul, I.N. 2018. Narumi–Katayama Index of the Subdivision Graphs. *Journal of Taibah University for Science*, 12(4): 401-408.

Ascioglu, M., Cangul, I. N. 2018. Sigma Index and Forgotten Index of the Subdivision and r-Subdivision Graphs. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 21 (3): 375-383.

Ascioglu, M., Demirci, M., Cangul, I. N. 2020. Omega Invariant of Union, Join and Corona Product of Two Graphs. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 30 (3): 297-306.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 1982. Graph Theory with Applications. North Holland, NY.

Bondy, J. A. Murty, U. S. R. 2008. Graph Theory. Springer NY.

Chartrand, G. 1985. Introductory Graph Theory. New York, Dover.

Chartrand, G., Zhang, P. 2012. A First Course in Graph Theory. New York, Dover.

Clark, J., Holton, D. A. 1995. A First Look at Graph Theory. World Scientific, Singapour.

Deo, N. 1974. Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice-Hall, NJ.

Diestel, R. 2010. Graph Theory. Springer GTM.

Foulds, L. R. 1992. Graph Theory Applications. Springer, New York.

Gross, J. L., Yellen J. 2006. Graph Theory and Its Applications (Second Edition). CRC Press, USA.

Gutman, I. 2011. Multiplicative Zagreb indices of trees. *Bull. Soc. Math. Banja Luka*, 18: 17-23.

Gutman, I., Ascioglu, M., Cangul, I.N. 2018. Multiplicative Geometric-Arithmetic Index. *International Journal of Applied Graph Theory*, 2(2): 16-28.

Hartsfield, N., Ringel, G. 2003. Pearls in Graph Theory, A Comprehensive Introduction. Dover NY.

Skiena, S. 1990. Implementing Discrete Mathematics, Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA, Addison-Wesley, 210.

Thulasiraman, K., Swamy, M. N. S. 1992. Graphs: Theory and Algorithms. John Wiley and Sons, NY.

Todeschini, R., Ballabio, D., Consonni, V. 2010. Novel moleculer descriptors based on functions of new vertex degrees. In: Ed.: Gutman, I., Furtula, B., Novel Molecular Structure Descriptors – Theory and Applications I, Univ. Kragujevac, Kragujevac, pp: 73-100.

Todeschini, R., Consonni, V. 2010. New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 64: 359-372.

Trudeau, R. J. 1993. Introduction to Graph Theory. Dover, NY.

Tutte, W. T. 1998. Graph Theory as I have Known It. Oxford Science Publications, Oxford.

Vasudev, C. 2006. Graph Theory with Applications. New Age International Publishers, India.

West, D. B. 2001. Introduction to Graph Theory. Pearson, India.

Wilson, R. J. 1998. Introduction to Graph Theory. Addison Wesley, Malaysia.
Yurttaş, A. 2014. Graf operasyonlarının Zagreb ve çarpımsal Zagreb indeksleri. *Doktora Tezi,* UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.