

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS-FİŞHER DENKLEMİNİN
LOGARİTMİK SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

ERTAN SÜREK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN

TEMMUZ-2021

KARS



**T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS-FİŞHER DENKLEMİNİN
LOGARİTMİK SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

ERTAN SÜREK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN

TEMMUZ-2021

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Anabilim Dalı
..... öğrencisi’nın Dr.
..... danışmanlığında tezi olarak hazırladığı
“.....” adlı bu çalışma,
yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim
Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ile kabul edilmiştir.

.. / .. / 20..

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	:	
Üye	:	
Üye	:	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’ nun .. / .. / 20.. gün ve ..
.... / sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ertan SÜREK

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

GENELLEŞTİRİLMİŞ BURGERS-FİSHER DENKLEMİNİN LOGARİTMİK SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Ertan SÜREK

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN

Bu tezde genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin nümerik çözümleri Açık Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (A-LSFY), Kapalı Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (K-LSFY) ve Crank-Nicolson Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (CN-LSFY) kullanılarak elde edilmiştir. Yöntemlerin performansını test etmek için ele alınan model problem farklı parametrelerle incelenmiştir. Elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılmaları tablolarla verilmiştir. Sonuçların doğruluğunu göstermek için mutlak hata, L_2 ve L_∞ hata normları kullanılmıştır. Ayrıca sunulan yöntemlerin kararlılığı von Neumann kararlılık analizi yöntemi ile incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Burgers-Huxley denklemi, Açık Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (A-LSFY), Kapalı Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (K-LSFY), Crank Nicolson Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (CN-LSFY), von Neumann Kararlılık Analizi.

2021, 40 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

SOLUTION OF THE GENERALIZED BURGERS – FISHER EQUATION BY LOGARITHMIC FINITE DIFFERENCE METHOD

Ertan SÜREK

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Gonca ÇELİKTEN

In this thesis, the numerical solutions of the Generalized Burgers-Fisher equation have been obtained using Explicit Logarithmic Finite Difference Method (E-LFDM), Implicit Logarithmic Finite Difference Method (I-LFDM) and Crank-Nicolson Logarithmic Finite Difference Method (CN-LFDM). In order to test the performance of the methods, the model problem was examined with different parameters. The comparisons of the obtained numerical solutions with the exact solutions are given in tables. Absolute error, L_2 and L_∞ error norms were used to show the accuracy of the results. In addition, the stability of the presented methods was examined by the von Neumann stability analysis method.

Key Words: Generalized Burgers-Fisher equation, Explicit Logarithmic Finite Difference Method (E-LFDM), Implicit Logarithmic Finite Difference Method (I-LFDM), Crank-Nicolson Logarithmic Finite Difference Method (CN-LFDM), von Neumann Stability Analysis.

2021, 40 Pages

ÖNSÖZ

“Genelleştirilmiş Burgers–Fisher Denkleminin Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi İle Çözümü” adlı bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması aşamasında bana yardımcı olan, değerli katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi ve ilgisini esirgemeyen kıymetli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Gonca ÇELİKTEN’e, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB’a, yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşlarım Sayın Damla BAYSU’ya ve Sayın Servet TURAN’a hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim babama, anneme ve kardeşime teşekkürü bir borç bilirim.

Ertan SÜREK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar DİZİNİ	viii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1 GİRİŞ	1
1.2. KURAMSAL TEMELLER.....	2
1.2.1 Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları	4
1.2.1.1 Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	5
1.2.1.2 İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları	6
1.2.2 Sonlu Fark Yöntemleri	8
1.2.2.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi	8
1.2.2.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi.....	9
1.2.2.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi.....	10
1.2.3 Von Neumann (Fourier Seri) Yöntemiyle Kararlılık Analizi.....	10
2. MATERYAL VE YÖNTEM	13
2.1. Model problem	13
2.2. Sayısal Yöntem.....	15
2.3. Kararlılık Analizi.....	18
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	20
3.1 Model Problemlerin Nümerik Çözümleri.....	20
3.1.1 Model Problemin' in A-LSFY ile çözümü	20
3.1.2 Model Problemin' in K-LSFY ile çözümü	25
3.1.3 Model Problemin' in CN-LSFY ile çözümü	30

4. TARTIşMA VE SONUÇ.....	37
KAYNAKLAR.....	38



TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 3.1	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in A-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...21
Tablo 3.2	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.	...21
Tablo 3.3	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...21
Tablo 3.4	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...22
Tablo 3.5	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...22
Tablo 3.6	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in A-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...22
Tablo 3.7	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...23
Tablo 3.8	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...23
Tablo 3.9	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in A-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...23
Tablo 3.10	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...24
Tablo 3.11	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...24
Tablo 3.12	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in K-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...25
Tablo 3.13	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...25
Tablo 3.14	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı	

	zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...26
Tablo 3.15	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...26
Tablo 3.16	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...26
Tablo 3.17	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in K-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...27
Tablo 3.18	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...27
Tablo 3.19	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...27
Tablo 3.20	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...28
Tablo 3.21	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...28
Tablo 3.22	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in K-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...29
Tablo 3.23	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...29
Tablo 3.24	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...29
Tablo 3.25	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...30
Tablo 3.26	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları	...30
Tablo 3.27	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in CN-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...31
Tablo 3.28	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...31

Tablo 3.29	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_{∞} hata normları	...31
Tablo 3.30	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...32
Tablo 3.31	$\delta = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_{∞} hata normları	...32
Tablo 3.32	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in CN-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...33
Tablo 3.33	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...33
Tablo 3.34	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_{∞} hata normları	...33
Tablo 3.35	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...33
Tablo 3.36	$\delta = 4, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_{∞} hata normları	...34
Tablo 3.37	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in CN-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması	...34
Tablo 3.38	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...35
Tablo 3.39	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_{∞} hata normları	...35
Tablo 3.40	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları	...35
Tablo 3.41	$\delta = 1, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_{∞} hata normları	...36

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A-LSFY	:	Açık Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi
K-LSFY	:	Kapalı Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi
CN-LSFY	:	Crank Nicolson Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi



1. GENEL BİLGİLER

1.1 GİRİŞ

Matematiksel fizik, elastikiyet teorisi, hidrodinamik gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerin matematiksel modeli yapıldığında genellikle kısmi türevli diferansiyel denklemler ya da nadiren adi diferansiyel denklemler karşımıza çıkar. Genellikle adi diferansiyel denklemlerin veya lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek daha kolayken özellikle non-lineer ve karmaşık sınır değerlerine sahip kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek zor veya imkânsızdır. Bu nedenle bu tür problemlerin çözümlerinde nümerik yöntemler daha yaygın olarak kullanılır.

Lineer ve non-lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için sonlu eleman yöntemleri, sonlu fark yöntemleri ve varyasyonel yöntemler gibi çeşitli nümerik yöntemler vardır ancak bunlardan sonlu fark yöntemleri uygulaması kolay olduğundan oldukça sık kullanılmaktadır. En yaygın kullanılan sonlu fark yöntemleri açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir. Bu üç yöntem klasik sonlu fark yöntemleri olarak bilinmektedir.

Bu çalışmada, geliştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılacak olan logaritmik sonlu fark yöntemleri bazı yazarlar tarafından çeşitli denklemleri çözmek için kullanılmışlardır. İsmail ve Al-Basyoni [8] Troesch problemini nümerik olarak çözmek için kapalı logaritmik sonlu fark yöntemini kullanmışlardır. Srivastava ve arkadaşları [20] iki boyutlu Burgers denklem sistemlerini çözmek için kapalı logaritmik sonlu fark yöntemini kullanmışlardır. Bir boyutlu birleştirilmiş Burgers denklemi Srivastava ve arkadaşları [19] tarafından kapalı logaritmik sonlu fark yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Aljaboori [1] birleştirilmiş Burgers denklemini nümerik olarak çözmek için Crank-Nicolson logaritmik sonlu fark yöntemini kullanmışlardır. Macias-Diaz [13] tarafından difüzyon-reaksiyon denklemlerini çözmek için açık logaritmik sonlu fark şeması kullanıldı ve önerilen yöntemin çözümlerin pozitifliğini, sınırlılığını ve monotonluğunu koruyabildiği gösterilmiştir. El-Azab ve arkadaşları [4] açık logaritmik sonlu fark yöntemini kullanarak

Korteweg de Vries Burger (KdVB) denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişler. Bu tezde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1-u^\delta), \quad a \leq x \leq b \quad t \geq 0,$$

İle verilen genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin nümerik çözümleri Açık Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (A-LSFY), Kapalı Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (K-LSFY) ve Crank-Nicolson Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (CN-LSFY) kullanılarak elde edilecektir.

1.2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.2.1 f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

serisine f fonksiyonunun a noktası civarındaki Taylor Serisi açılımı denir. Taylor serisindeki sonlu sayıda terimden oluşan

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Polinomuna n . dereceden Taylor polinomu denir [21]. Benzer şekilde iki bağımsız değişkene bağlı f fonksiyonu, (a,b) noktası civarında sürekli bir fonksiyon ve bu noktada her mertebeden türevlenebilir olsun

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(a, b)$$

$$= f(a, b) + \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \left((x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b) + \dots$$

$$\Rightarrow f(x, y) = f(a, b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right] + \dots$$

seri açılımına f fonksiyonunun (a, b) noktası civarındaki Taylor serisi denir [5].

Tanım 1.2.2 f , $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında $(n+1)$.mertebeye kadar türevlenebilir ve $x_0 \in [a, b]$ olsun. Bu durumda her $x \in [a, b]$ ve $x_0 < \xi(x) < x$ olacak şekilde öyle bir ξ sayısı vardır ki $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ yazılabilir. Burada $P_n(x)$ ve $R_n(x)$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dir. $P_n(x)$, n . mertebeden Taylor polinomu, $R_n(x)$ ise kesme hatasıdır [2].

1.2.1 Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımları

$u(x, t)$, x ve t bağımsız değişkenlerine göre yeterince türevlenebilen bir fonksiyon olsun. h , x yönünde artma miktarı olmak üzere $U(x+h, t)$, $U(x-h, t)$, $U(x+2h, t)$, $U(x-2h, t)$ fonksiyonlarının x civarında Taylor açılımları sırasıyla;

$$U(x+h, t) = U(x, t) + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.1)$$

$$U(x-h, t) = U(x, t) - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.2)$$

$$U(x+2h, t) = U(x, t) + 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.3)$$

$$U(x-2h, t) = U(x, t) - 2h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \dots \quad (1.4)$$

dır. Benzer düşünceyle ; k , t yönündeki artma miktarı olmak üzere $U(x, t+k)$ ve $U(x, t-k)$ fonksiyonlarının t civarındaki Taylor açılımları sırasıyla;

$$U(x, t+k) = U(x, t) + k \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots \quad (1.5)$$

$$U(x, t-k) = U(x, t) - k \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \dots \quad (1.6)$$

şeklindedir.

Şimdi $U(x,t)$ fonksiyonun x ve t ye göre sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımlarını bulalım.

1.2.1.1 Birinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

$U(x,t)$ fonksiyonun x yönündeki birinci mertebeden $\frac{\partial U}{\partial x}$ türevini ele alalım. Sırasıyla (1.1)

ve (1.2) Taylor açılımlarında $\frac{\partial U}{\partial x}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x,t)}{h} + O(h) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x,t) - U(x-h,t)}{h} + O(h) \quad (1.8)$$

elde edilir. (1.2.1) eşitliğinden (1.2.2) eşitliği çıkarılır ve $\frac{\partial U}{\partial x}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+h,t) - U(x-h,t)}{2h} + O(h^2) \quad (1.9)$$

elde edilir. Burada "O" sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini , $O(h)$ terimi ise hatanın $h \rightarrow 0$ olduğunda h ile orantılı olduğunu ifade eder ve buna kesme hatası denir.

Benzer düşünceyle $U(x,t)$ fonksiyonunun t yönünde birinci mertebeden türevleri (1.5) ve (1.6) eşitliklerinden

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x,t+k) - U(x,t)}{k} + O(k) \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t) - U(x, t-k)}{k} + O(k) \quad (1.11)$$

olarak elde edilir. Burada $O(k)$ terimi hatanın k mertebesinde olduğunu ve hatanın k ile orantılı azalacağını göstermektedir.

1.2.1.2 İkinci Mertebeden Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

(1.1) ve (1.3) eşitliklerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok edilir ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x, t) - 2U(x+h, t) + U(x+2h, t)}{h^2} + O(h) \quad (1.12)$$

bulunur. Benzer düşünceyle (1.2.2) ve (1.2.4) denklemlerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok edilir ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x, t) - 2U(x-h, t) + U(x-2h, t)}{h^2} + O(h) \quad (1.13)$$

bulunur. (1.2.1) ve (1.2.2) denklemlerinden $\frac{\partial U}{\partial x}$ yok edilir ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x-h, t) - 2U(x, t) + U(x+h, t)}{h^2} + O(h) \quad (1.14)$$

bulunur.

Kabul edelim ki problemin çözüm bölgesi $0 \leq x \leq l$ (l , sonlu bir sayı) ve $t > 0$ olsun. Sonlu fark yaklaşımı için problemin çözüm bölgesi N eşit alt aralığı bölünür. Öyle ki $U(x, t)$ bağımlı değişkeni yalnız mesh noktalarında mevcuttur. $\Delta t \equiv k$ ve $\Delta x \equiv h \equiv \frac{1}{N}$ olacak şekilde eşit ve (x_i, t_m) mesh noktaları

$$x_i = i\Delta x = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.15)$$

$$t_m = m\Delta t = mk, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

olarak alınır.

Bir $P(ih, mk)$ mesh noktası üzerinde U nun değeri;

$$U_p = U(ih, mk) \cong U_{i,m} \cong U_i^m \quad (1.17)$$

ifadelerinden biri ile sunulur.

“Bunların kullanılması ve hataların ihmal edilmesi ile birinci ve ikinci mertebeden türevlere sonlu fark yaklaşımları formülleri

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^m - U_i^m}{h} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_i^m - U_{i-1}^m}{h} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^m - U_{i-1}^m}{2h} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{k} \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_i^m - U_i^{m-1}}{k} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_i^m - 2U_{i+1}^m + U_{i+2}^m}{h^2} \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-2}^m - 2U_{i-1}^m + U_i^m}{h^2} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-1}^m - 2U_i^m + U_{i+1}^m}{h^2} \quad (1.25)$$

olarak elde edilirler. (1.18), (1.19), (1.20) ile x 'e göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki–nokta İleri (Forward), Geri (Backward) ve Merkezi (Central) fark formülleri denir. Benzer biçimde (1.21), (1.22) ile verilen t ' ye göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki–nokta İleri ve Geri fark formülleri denir. (1.23), (1.24), (1.25) ile verilen x 'e göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla üç–nokta İleri, Geri ve Merkezi fark formülleri denir [18].”

1.2.2 Sonlu Fark Yöntemleri

Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri genellikle uygulaması kolay olduğundan sonlu fark yöntemleri kullanılarak elde edilir. En çok kullanılan sonlu fark yöntemleri klasik sonlu fark yöntemleri olarak bilinen açık (explicit), kapalı (implicit) ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir.

Klasik sonlu fark yöntemlerini açıklamak için $U = U(x, t)$ sıcaklığı göstermek üzere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.26)$$

ile verilen ısı denklemini göz önüne alalım. Burada x konum değişkeni olup genellikle sonludur, $x \in [a, b]$, t ise zamanı gösterip genellikle yarı sonsuzdur, yani $t \geq 0$ dır [18].

1.2.2.1 Açık Sonlu Fark Yöntemi

“ (1.26) ile verilen bir boyutlu ısı denkleminde $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine (1.21) ileri fark formülü ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine (1.25) merkezi fark formülünün hatalar ihmal edilerek yazılması ile (1.26) denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}$$

olur. Bu yaklaşım basit bir düzenlemeyle

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (1.27)$$

şeklinde elde edilir, burada $r = \frac{k}{h^2}$ olup kararlılık parametresi olarak adlandırılır. $n=1$ ($t_1=k$) için ilk zaman adımında U_m^1 bilinmeyen değerleri $t_0=0$ boyunca bilinen başlangıç ve sınır değerleri kullanılarak hesaplanır. Daha sonra ikinci zaman adımında bilinmeyen U_m^2 değerleri ilk adımda hesaplanan değerler kullanılarak hesaplanır ve böyle devam edilerek t_n zaman adımındaki U_m^n değerleri kullanılarak t_{n+1} zaman adımındaki U_m^{n+1} değerleri (1.27) denkleminde kolayca bulunur [18].”

1.2.2.2 Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

“(1.26) ile verilen bir boyutlu ısı denkleminde $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine (1.21) ileri fark formülü ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine $(n+1)$ -inci zaman adımındaki

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2)$$

merkezi fark formülünün hatalar ihmal edilerek yazılması ile (1.26) denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2}$$

olarak elde edilir. Bu denklemin düzenlenmesi ile

$$U_m^n = -rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1}$$

elde edilir, burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir [18].”

1.2.2.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

“(1.26) ile verilen bir boyutlu ısı denkleminde $\frac{\partial U}{\partial t}$ türevi yerine (1.21) ileri fark formülü ve

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine n -inci ve $(n+1)$ -inci zaman adımlarındaki merkezi fark yaklaşımlarının ortalaması olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right] + O(h^2)$$

fark formülünün hatalar ihmal edilerek yazılması ile (1.26) denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right]$$

şeklinde elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa denklem;

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n$$

olarak yazılır, burada $r = \frac{k}{h^2}$ dir [18].”

1.2.3 Von Neumann (Fourier Seri) Yöntemiyle Kararlılık Analizi

Nümerik şemaların kararlılığını çalışanlar için yaygın olarak kullanılan metod von Neumann metodudur. Bu kısımda T sonlu olmak üzere $\Delta x = h \rightarrow 0$ ve $\Delta t = k$ olduğunda

$(J \rightarrow \infty)$ $0 \leq t \leq T = Jk$ zaman aralığında $u(x,t)$ nin bir lineer fark denkleminin kararlılığı incelenecektir.

Von Neumann (Fourier Seri) yöntemi, $t=0$ boyunca düğüm noktalarındaki başlangıç değerlerini bir sonlu Fourier serisine göre ifade eder ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için yaygın olarak kullanılabilecek benzer olarak "değişkenlere ayırma" yöntemi ile $t=0$ için bu Fourier serine indirgenen bir fonksiyonu göz önüne alır [18].

Fourier serileri sinüs ve kosinüs cinsinden ifade edilebilir ancak kompleks üstel formun kullanılması cebirsel olarak daha uygundur. Yani

$$\sum a_n \cos(n\pi x/l) \text{ veya } \sum b_n \sin(n\pi x/l)$$

ifadeleri yerine bu ifadelere denk olan

$$\sum A_n e^{in\pi x/l}$$

ifadesi kullanılabilir, burada $i = \sqrt{-1}$ ve l , fonksiyonun tanımlı olduğu x aralığının uzunluğudur.

$$u_{p,q} = u(ph, qk)$$

olup

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi ph/Nh} = A_n e^{i\beta_n ph}$$

yazılabilir, burada $\beta_n = n\pi / Nh$ ve $Nh=1$ dir.

$t=0$ boyunca düğüm noktalarındaki başlangıç değerlerini $u_{p,0} = u(ph, 0)$, $p = 0(1)N$ ile gösterelim. Bu durumda

$$u_{p,0} = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\beta_n ph}, \quad p = 0, 1, \dots, N$$

şeklindeki $N+1$ tane denklem $A_0, A_1, \dots, A_N$ bilinmeyenlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Lineer fark denklemlerinin kararlılığı göz önüne alındığından $e^{i\beta ph}$ gibi bir tek başlangıç değerini incelemek yeterlidir çünkü lineer fark denklemlerinin lineer bağımsız çözümleri lineer birleşimli olarak ifade edilebilir. A_n katsayısı bir sabittir ve ihmal edilebilir. t değeri artarken bu terimin dağılımını incelemek için

$$u_{p,h} = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta ph} e^{\alpha qj} = e^{i\beta ph} \varepsilon^q$$

ifadesi ele alınır, burada $\varepsilon = e^{\alpha k}$ ve α , genellikle bir kompleks sabittir. ε ise güçlendirme faktörü (amplification factor) olarak adlandırılır [18].

Lax-Richtmyer tanımına göre $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken $q \leq N$ için ve başlangıç şartlarını sağlayan bütün β değerleri için $|u_{p,q}|$ kalanları sınırlı ise sonlu fark denklemleri kararlıdır [22].

Diferansiyel denklemlerin tam çözümleri zamana bağlı üstel olarak artmıyorsa bu durumda kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\varepsilon| \leq 1$$

yani

$$-1 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (1.28)$$

olmasıdır. Ancak $u_{p,q}$ zamana bağlı olarak artıyorsa bu durumda kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\varepsilon| \leq 1 + Kk = 1 + O(k) \quad (1.29)$$

olmasıdır, burada K, h, k ve β değerlerinden bağımsız pozitif bir sayıdır [18].

Burada belirtelim ki bu yöntem sadece sabit katsayılı lineer denklemlere uygulanabilir. Üç veya daha fazla değişken içeren fark denklemleri için (1.28) ve (1.29) von Neumann şartları her zaman gereklidir fakat yeterli olmayabilirler. Teorik olarak yöntem iyi sonuçlar verir [18].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Model problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1 - u^\delta), \quad a \leq x \leq b \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

ile verilen Genelleştirilmiş Burgers–Fisher denklemi

$$u(x, 0) = f(x),$$

başlangıç şartı ve

$$u(a, t) = g_1(t), \quad t \geq 0$$

$$u(b, t) = g_2(t), \quad t \geq 0$$

sınır şartları ile göz önüne alındı. Burada $f(x)$, $g_1(t)$ ve bilinen $g_2(t)$ fonksiyonlar, α , β , δ ise parametrelerdir.

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler son yıllarda bilimin farklı alanlarında önemli rol oynamaktadır. Genelleştirilmiş Burgers–Fisher denklemi de farklı mekanizmaların işlevlerini tanımlamak için yüksek önem arz etmektedir. Genelleştirilmiş Burgers–Fisher denklemi, gaz dinamiği, sayı teorisi, ısı iletkenlik, elastikiyet vb. gibi alanlarda çeşitli uygulamalarda kullanılmıştır. Genelleştirilmiş Burgers–Fisher denkleminin sayısal çözümlerini hesaplamak için literatürde birçok sayısal yöntem önerilmiş ve uygulanmıştır. İsmail ve arkadaşları [9] denklemi sayısal olarak çözmek için Adomian ayrıştırma (decomposition) metodunu (ADM) kullandılar. Mittal ve Tripathi [15] tarafından denklemin sayısal çözümlerini elde etmek için modifiye edilmiş kübik B-spline collocation yöntemi kullanıldı. Wazwaz [22] tanh yöntemini kullanarak denklemin çözümlerini elde etti. Javidi [11] tarafından denklemin sayısal çözümlerini elde etmek için spektral collocation yöntemi

kullanıldı. Golbabai ve Javidi [6] Chebyshev polinomlarını kullanarak spektral collocation yöntemini denkleme uyguladılar. Mickens ve Gumel [14] Burgers–Fisher denklemi için standart olmayan bir sonlu fark şeması sundular. Kaya ve El_Sayed [12] klasik dönüşümleri kullanmadan denklemin tam çözümlerini ve herhangi bir ayrıştırma tekniği kullanmadan da sayısal çözümlerini elde ettiler. İsmail ve Rabboh [10] denklemi çözmek için bir kısıtlayıcı Pade yaklaşımını kullandılar. Mohammadi [17] denklemin spline çözümünü sundu. Moghimi ve Hejazi [16] tarafından denklemin sayısal çözümü için varyasyonel iterasyon yöntemi kullanıldı. Chen [3] tarafından denklemin sayısal çözümleri sonlu farklar yöntemi ile elde edildi. Zhao ve arkadaşları [25] pseudo-spektral yöntem kullanarak denklemin sayısal çözümlerini elde ettiler. Zhang ve arkadaşları [24] tarafından lokal süreksiz Galerkin yöntemi kullanılarak denklemin sayısal çözümleri elde edildi. Hammad ve El-Azab [7] denklemi çözmek için kollokasyon yöntemi ile kompakt sonlu fark şemasını kullandılar. Wazzan [23] tarafından denklemi çözmek için bir tanh-coth yöntemi kullanıldı.

Bu tezde (2.1) denklemi ile verilen genelleştirilmiş Burgers–Fisher denklemini $0 \leq x \leq 1$ aralığında;

$$u(x, 0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{-\alpha \delta}{2(\delta + 1)} x \right] \right)^{1/\delta}$$

başlangıç şartı ve

$$u(0, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{\alpha \delta}{2(\delta + 1)} \left(\frac{\alpha}{(\delta + 1)} + \frac{\beta(\delta + 1)}{\alpha} \right) t \right] \right)^{1/\delta}, \quad t \geq 0,$$

$$u(1,t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{-\alpha\delta}{2(\delta+1)} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{(\delta+1)} + \frac{\beta(\delta+1)}{\alpha} \right) t \right) \right] \right)^{1/\delta}$$

sınır şartları ile ele alındı. Bu problemin tam çözümü;

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{-\alpha\delta}{2(\delta+1)} \left(x - \left(\frac{\alpha}{(\delta+1)} + \frac{\beta(\delta+1)}{\alpha} \right) t \right) \right] \right)^{1/\delta}$$

şeklindedir.

2.2. Sayısal Yöntem

$u(x,t)$ nin (x_i, t_n) düğüm noktasındaki sonlu fark yaklaşımlarını u_i^n ile gösterelim, burada N bölüntü sayısı olmak üzere $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$), $t_n = t_0 + nk$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $h = \frac{b-a}{N}$ x - yönündeki bölüntü uzunluğu ve k zaman adımıdır.

(2.1) ile verilen genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemini $\frac{\partial F}{\partial u}$ ile çarparak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = F'(u) \left(\beta u (1 - u^\delta) - \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

ve

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F'(u) \left(\beta u (1 - u^\delta) - \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2.3)$$

Burada $F(u)$ herhangi bir sürekli türevlenebilir fonksiyondur. $\frac{\partial F}{\partial t}$ türevi yerine geri fark yaklaşımını kullanırsak (2.3) denkleminin sonlu fark yaklaşımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{F(u_i^{n+1}) - F(u_i^n)}{k} = F'(u_i^n) \left(\beta u_i^n (1 - (u_i^n)^\delta) - \alpha (u_i^n)^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n \right) \quad (2.4)$$

$F(u) = e^u$ olsun, bu durumda (2.4) denklemindeki türevler için sonlu fark yaklaşımları kullanılarak

Açık Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (A-LSFY):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \ln \left\{ 1 + k \left(\beta u_i^n (1 - (u_i^n)^\delta) - \alpha (u_i^n)^\delta \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right) \right\},$$

Kapalı Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (K-LSFY):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \ln \left\{ 1 + k \left(\beta u_i^n (1 - (u_i^n)^\delta) - \alpha (u_i^n)^\delta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) \right\}$$

Crank-Nicolson Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (CN-LSFY):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \ln \left\{ 1 + k \left(\beta u_i^n \left(1 - (u_i^n)^\delta \right) - \frac{\alpha (u_i^n)^\delta}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) \right) \right\}$$

Şeklinde elde edilir. $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere ağırlıklı averaj yaklaşımı ise

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \ln \left\{ 1 + k \left(\beta u_i^n \left(1 - (u_i^n)^\delta \right) - \alpha (u_i^n)^\delta \left((1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) + \left((1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) \right) \right\} \quad (2.5)$$

Şeklinde olur, burada $r = \frac{k}{h^2}$, $1 \leq i \leq N-1$ dir. Burada (2.5) denklemi $\theta = 0$ için (2.1) genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin açık logaritmik sonlu fark yaklaşımını, $\theta = 1$ için kapalı logaritmik sonlu fark yaklaşımını, $\theta = \frac{1}{2}$ için Crank-Nicolson logaritmik sonlu fark yaklaşımını verir.

Kapalı ve Crank-Nicolson logaritmik sonlu fark yaklaşımları lineer olmayan fark denklemlerinin sistemleridir. Bu lineer olmayan denklem sistemlerinin

$$G(A) = 0 \quad (2.6)$$

formunda olduğunu kabul edelim, burada $G = [g_1, g_2, \dots, g_{N-1}]^T$ ve $A = [V_1^{n+1}, V_2^{n+1}, \dots, V_{N-1}^{n+1}]^T$ şeklindedir. (2.6) sistemini Newton Yöntemi ile çözmek için aşağıdaki adımlar izlenir:

- 1) $A^{(0)}$ başlangıç değerlerinin belirlenmesi
- 2) $m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$J(A^{(m)}) \delta^{(m)} = -G(A^{(m)}) \text{ sisteminin çözümü ve}$$

$$A^{(m+1)} = A^{(m)} + \delta^{(m)} \text{ hesaplanması.}$$

Burada $J(A^{(m)})$ analitik olarak hesaplanan Jacobian matrisidir. Her bir zaman adımında

Newton yönteminin durdurma kriteri $\|G(A^{(m)})\| \leq 10^{-5}$ olarak alınmıştır.

2.3. Kararlılık Analizi

Sunulan sonlu fark şemaları logaritmik olduğundan, inceleme şemalarındaki logaritmik terimler Taylor serisine açılarak açıklanacaktır. (2.5) ile verilen sonlu fark şemalarında logaritmik terim Taylor serisine açılır ve ikinci mertebeden türevden itibaren kesilirse (2.5) ağırlıklı averaj yaklaşımı

$$u_i^{n+1} = u_i^n + k\beta u_i^n \left(1 - (u_i^n)^\delta\right) - \alpha k (u_i^n)^\delta \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) + k \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right) \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. (2.11) yaklaşımının kararlılık analizi için von-Neumann yöntemi kullanılacaktır. Von-Neumann yöntemi sadece lineer fark denklemlerine uygulandığından (2.11) yaklaşımının kararlılığını incelemek için yaklaşımdaki $(U_i^n)^\delta$ değişkeni sabitmiş gibi kabul edilerek lineer olmayan terimler lineerleştirilir.

$(U_i^n)^\delta = \hat{U} = \text{sabit}$ olarak ele alınırsa, bu durumda (2.11) yaklaşımının lineer formu

$$u_i^{n+1} = u_i^n + k\beta u_i^n (1 - \tilde{U}) - \alpha k \tilde{U} \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) + k \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right) \quad (2.12)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşıma von-Neumann kararlılık yöntemini uygulayalım. (2.12) yaklaşımında u_i^n yerine

$$u_i^n = \varepsilon^n e^{I\phi i h}, \quad I = \sqrt{-1}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa güçlendirme faktörü

$$\varepsilon = \frac{1 + k\beta(1 - \tilde{U}) - (1 - \theta) \frac{\alpha k \tilde{U}}{h} i \sin(\phi h) - (1 - \theta) \frac{2k}{h^2} \sin^2 \frac{\phi h}{2}}{1 + \theta \frac{\alpha k \tilde{U}}{h} i \sin(\phi h) + \theta \frac{2k}{h^2} \sin^2 \frac{\phi h}{2}}$$

olarak elde edilir.

- $\theta = 0$ ise (2.5) yaklaşımı açık logaritmik sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. O halde açık logaritmik sonlu fark yaklaşımının kararlı olması için $\left[1 + k\beta(1 - \tilde{U}) - \frac{2k}{h^2} \sin^2 \frac{\phi h}{2}\right]^2 + \left[\frac{\alpha k \tilde{U}}{h} \sin(\phi h)\right]^2 \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir.
- $\theta = 1$ ise (2.5) yaklaşımı kapalı logaritmik sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından yaklaşım şartsız kararlıdır.
- $\theta = \frac{1}{2}$ ise (2.5) yaklaşımı Crank-Nicolson logaritmik sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Yöntemin kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. Bu şart her $r > 0$ için sağlanacağından yaklaşım şartsız kararlıdır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Model Problemlerin Nümerik Çözümleri

Bu bölümde A-LSFY, K-LSFY ve CN-LSFY kullanılarak ele alınan model problemin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için

$$L_2 = \|U - u_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j - (u_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U - u_N\|_\infty = \max_j |U_j - (u_N)_j|$$

şeklinde tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları ve mutlak hata kullanılmıştır, burada U ve u_N sırasıyla tam çözümleri ve hesaplanan nümerik çözümleri göstermektedir.

3.1.1 Model Problemin' in A-LSFY ile çözümü

Model problemin farklı parametreler için A-LSFY kullanılarak elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması Tablo 3.1-Tablo 3.9 ile sunulmuştur.

Tablo 3.1 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde edilen numeric çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.2 ve Tablo 3.3 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu. Tablo 3.4 ve Tablo 3.5 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.1: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in A-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

χ	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
0.1	0.1	0.501312496932275	0.501312497178398	0.246123010860799 E-9
	1	0.524355709028359	0.524355708368953	0.659405419156656 E-9
	10	0.734972602412623	0.734972597577230	0.483539308593350 E-8
0.5	0.1	0.496312569445419	0.496312567691637	1.753781064817162 E-9
	1	0.519365311131300	0.519365307524377	3.606922538423873 E-9
	10	0.731058583683817	0.731058576878263	0.680555389820370 E-8
0.9	0.1	0.491313381030501	0.491313374237898	6.792602591509933 E-9
	1	0.514371047918153	0.514371040142668	7.775485255656633 E-9
	10	0.727108224871255	0.727108214296157	1.057509813051638 E-8

Tablo 3.2: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
N	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
20	0.8288950 E-9	0.7503647 E-9	4.3634900 E-9
40	2.1729580 E-9	2.6022410 E-9	5.9142450 E-9
80	3.6981640 E-9	4.6665930 E-9	0.7522749 E-8
100	3.6983430 E-9	4.6183490 E-9	0.7461500 E-8

Tablo 3.3: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
N	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
20	1.8565577964 E-9	1.3614123162 E-9	5.0319126643 E-9
40	5.3162246272 E-9	5.8587105167 E-9	9.2983215572 E-9
80	8.2952800184 E-9	8.8368901086 E-9	1.1669060718 E-8
100	8.2952800184 E-9	8.8368901086 E-9	1.1669060718 E-8

Tablo 3.4: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

k	L_2		
	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
0.001	2.6271610 E-5	2.6237920 E-5	2.0618660 E-5
0.0001	1.7891770 E-9	2.5863290 E-9	2.6520750 E-9
0.00001	0.8288950 E-9	0.7503647 E-9	4.3634900 E-9

Tablo 3.5: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

k	L_∞		
	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
0.001	2.5649545116 E-5	2.5623841745 E-5	2.0373987263 E-5
0.0001	2.5362119072 E-9	3.6206341258 E-9	5.0319126643 E-9
0.00001	1.8565577964 E-9	1.3614123162 E-9	5.0319126643 E-9

Tablo 3.6 ile $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.7 ve Tablo 3.8 ile $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.6: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in A-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

x	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
0.1	0.1	0.8575923963	0.8575924140	1.7680166442 E-8
	0.5	0.9234210342	0.9234210636	2.9340024410 E-8
	1	0.9687661738	0.9687661943	2.0441659698 E-8
0.5	0.1	0.8413165570	0.8413165920	3.5016427535 E-8
	0.5	0.9128025372	0.9128026177	8.0402654978 E-8

	1	0.9638206944	0.9638207559	6.1475511015 E-8
0.9	0.1	0.8240315223	0.8240315131	0.9172277271 E-8
	0.5	0.9010818744	0.9010818889	1.4515929014 E-8
	1	0.9581744827	0.9581744985	1.5745842408 E-8

Tablo 3.7: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
N	$t = 0.1$	$t = 0.5$	$t = 1$
20	3.2495750 E-8	7.8477140 E-8	6.2355900 E-8
40	2.9741050 E-8	6.4740030 E-8	4.9194050 E-8
80	2.7020630 E-8	5.7813320 E-8	4.4161650 E-8
100	2.7245630 E-8	5.7733120 E-8	4.3924680 E-8

Tablo 3.8: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
N	$t = 0.1$	$t = 0.5$	$t = 1$
20	4.2618551022 E-8	1.0673235951 E-7	8.5408609740 E-8
40	4.4245704989 E-8	9.1815798964 E-8	6.9049616136 E-8
80	3.8299328375 E-8	8.0951208181 E-8	6.1838519527 E-8
100	3.9283726494 E-8	8.1014424169 E-8	6.1385394989 E-8

Tablo 3.9 ile $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.10 ve Tablo 3.11 ile $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.9: $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in A-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

χ	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
0.1	0.1	0.5187412152	0.5187411964	0.1886378220 E-7
	0.5	0.6399160957	0.6399160817	1.3972292878 E-8
	1	0.7685247827	0.7685247929	1.0183941357 E-8
0.5	0.1	0.4687906531	0.4687905710	0.8207831320 E-7
	0.5	0.5926666251	0.5926665487	7.6418609773 E-8
	1	0.7310585991	0.7310586096	1.0494418667 E-8
0.9	0.1	0.4194577639	0.4194576690	0.9481965146 E-7
	0.5	0.5436387567	0.5436386617	9.5057455907 E-8
	1	0.6899745411	0.6899744870	5.4087900048 E-8

Tablo 3.10: $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
N	$t = 0.1$	$t = 0.5$	$t = 1$
20	2.2910600 E-7	2.4749720 E-7	1.3891780 E-8
40	9.3330980 E-8	8.9654070 E-8	2.6192520 E-8
80	7.4158060 E-8	7.1196110 E-8	3.0271520 E-8
100	6.9838510 E-8	6.5952290 E-8	3.0491770 E-8

Tablo 3.11: $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
N	$t = 0.1$	$t = 0.5$	$t = 1$
20	3.1038402470 E-7	3.4418821937 E-7	2.3207676447 E-8
40	1.2122383436 E-7	1.1995653759 E-7	5.2337049472 E-8
80	1.0003645839 E-7	9.7975326074 E-8	7.8312154317 E-8
100	9.6164308350 E-8	9.3229539644 E-8	7.8312154317 E-8

3.1.2 Model Problemin' in K-LSFY ile çözümü

Model problemin farklı parametreler için K-LSFY kullanılarak elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması Tablo 3.12-Tablo 3.26 ile sunulmuştur.

Tablo 3.12 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.13 ve Tablo 3.14 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu. Tablo 3.15 ve Tablo 3.16 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.12: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in K-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

x	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
0.1	0.1	0.501312497	0.501312497	2.132171106 E-10
	1	0.524355708	0.524355709	0.786389620 E-9
	10	0.734972598	0.734972602	4.941597131 E-9
0.5	0.1	0.496312566	0.496312567	3.907938417 E-10
	1	0.519365307	0.519365309	1.046180476 E-9
	10	0.731058577	0.731058582	4.808446530 E-9
0.9	0.1	0.491313374	0.491313374	2.179671443 E-10
	1	0.514371040	0.514371041	0.793320742 E-9
	10	0.727108214	0.727108219	5.036031814 E-9

Tablo 3.13: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
N	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
20	3.296570000 E-10	0.956617900 E-9	5.032441000 E-9

40	3.156147000 E-10	0.931080600 E-9	4.968639000 E-9
80	3.119810000 E-10	0.923228100 E-9	4.936170000 E-9
100	3.115262000 E-10	0.922042500 E-9	4.929632000 E-9

Tablo 3.14: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

N	L_∞		
	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
20	4.141153531 E-10	1.082890999 E-9	5.149528026 E-9
40	3.954677696 E-10	1.053538701 E-9	5.149528026 E-9
80	3.908390278 E-10	1.046202680 E-9	5.149528026 E-9
100	3.902952406 E-10	1.045335263 E-9	5.149528026 E-9

Tablo 3.15: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

k	L_2		
	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
0.001	2.627363000 E-5	2.624141000 E-5	2.062275000 E-5
0.0001	2.243964000 E-9	3.528544000 E-9	3.510823000 E-9
0.00001	3.296570000 E-10	0.956617900 E-9	5.032441000 E-9

Tablo 3.16: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

k	L_∞		
	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
0.001	2.565192119 E-5	2.562878756 E-5	2.037517263 E-5
0.0001	2.986923320 E-9	4.656615982 E-9	5.149528026 E-9
0.00001	4.141153531 E-10	1.082890999 E-9	5.149528026 E-9

Tablo 3.17 ile $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde

edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.18 ve Tablo 3.19 ile $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu. Tablo 3.20 ve Tablo 3.21 ile $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.17: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in K-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

x	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
0.1	0.01	0.838828674	0.838828671	3.044660413 E-9
	0.1	0.857592409	0.857592397	1.227654089 E-8
	1	0.968766193	0.968766174	1.874317590 E-8
0.5	0.01	0.821401341	0.821401338	3.313246566 E-9
	0.1	0.841316577	0.841316548	2.913325736 E-8
	1	0.963820751	0.963820692	5.924486868 E-8
0.9	0.01	0.803061796	0.803061794	1.670484862 E-9
	0.1	0.824031507	0.824031497	0.996052485 E-8
	1	0.958174496	0.958174474	2.218406669 E-8

Tablo 3.18: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

N	L_2		
	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
20	2.970753000 E-9	2.306763000 E-8	5.787535000 E-8
40	2.960667000 E-9	2.196600000 E-8	4.605473000 E-8
80	2.959242000 E-9	2.169099000 E-8	4.309900000 E-8
100	2.959111000 E-9	2.165803000 E-8	4.274426000 E-8

Tablo 3.19: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
N	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
20	4.055695890 E-9	3.121735237 E-8	7.944184566 E-8
40	3.902703938 E-9	2.967449042 E-8	6.345705639 E-8
80	3.864526255 E-9	2.929758558 E-8	5.941517611 E-8
100	3.859609743 E-9	2.925280451 E-8	5.892782273 E-8

Tablo 3.20: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
k	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
0.001	2.335004000 E-4	2.174477000 E-4	6.584637000 E-5
0.0001	2.956303000 E-8	2.242226000 E-7	4.508992000 E-7
0.00001	2.970753000 E-9	2.306763000 E-8	5.787535000 E-8

Tablo 3.21: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
k	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
0.001	2.418233998 E-4	2.294765042 E-4	7.932558486 E-5
0.0001	3.859468822 E-8	3.009119446 E-7	6.164389688 E-7
0.00001	4.055695890 E-9	3.121735237 E-8	7.944184566 E-8

Tablo 3.22 ile $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.23 ve Tablo 3.24 ile $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu. Tablo 3.25 ve Tablo

3.26 ile $\delta=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $N=20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.22: $\delta=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $k=10^{-5}$ için Model Problem' in K-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

x	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
0.1	0.01	0.490626090	0.490626098	0.800692251 E-8
	0.1	0.518741183	0.518741216	3.330477150 E-8
	1	0.768524772	0.768524783	1.100200475 E-8
0.5	0.01	0.440902516	0.440902528	1.209210082 E-8
	0.1	0.468790535	0.468790627	9.211933938 E-8
	1	0.731058546	0.731058579	3.233179480 E-8
0.9	0.01	0.392336821	0.392336830	0.906223180 E-8
	0.1	0.419457656	0.419457696	3.962088352 E-8
	1	0.689974462	0.689974481	1.961160501 E-8

Tablo 3.23: $\delta=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $k=10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

N	L_2		
	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
20	3.8753870000 E-8	2.5199340000 E-7	4.3785880000 E-8
40	1.6245460000 E-8	1.0543530000 E-7	2.8665070000 E-8
80	1.0606460000 E-8	6.8758270000 E-8	2.5055060000 E-8
100	0.9929546000 E-8	6.4356040000 E-8	2.4628800000 E-8

Tablo 3.24: $\delta=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $k=10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

N	L_∞		
	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
20	4.449732377 E-8	3.386615244 E-7	6.565297561 E-8

40	1.870624583 E-8	1.418639534 E-7	4.011723520 E-8
80	1.228812940 E-8	9.242633064 E-8	3.394364223 E-8
100	1.151985635 E-8	8.650411454 E-8	3.321560227 E-8

Tablo 3.25: $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
k	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
0.001	3.148058000 E-4	3.222642000 E-4	2.535949000 E-4
0.0001	1.169404000 E-7	7.496797000 E-7	2.061445000 E-7
0.00001	3.875387000 E-8	2.519934000 E-7	4.378588000 E-8

Tablo 3.26: $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
k	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
0.001	3.129882080 E-4	3.192319748 E-4	2.724167941 E-4
0.0001	1.354573470 E-7	1.009307810 E-6	2.945578597 E-7
0.00001	4.449732377 E-8	3.386615244 E-7	6.565297561 E-8

3.1.3 Model Problemin' in CN-LSFY ile çözümü

Model problemin farklı parametreler için CN-LSFY kullanılarak elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin karşılaştırılması Tablo 3.27-Tablo 3.41 ile sunulmuştur.

Tablo 3.27 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.28 ve Tablo 3.29 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü

sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu. Tablo 3.30 ve Tablo 3.31 ile $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.27: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in CN-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

x	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
0.1	0.1	0.501312497	0.501312497	0.300650072 E-10
	1	0.524355708	0.524355709	1.108860487 E-10
	10	0.734972598	0.734972602	6.967975488 E-10
0.5	0.1	0.496312566	0.496312567	0.551044878 E-10
	1	0.519365307	0.519365309	1.475181647 E-10
	10	0.731058577	0.731058582	6.780223648 E-10
0.9	0.1	0.491313374	0.491313374	0.307347930 E-10
	1	0.514371040	0.514371041	1.118633197 E-10
	10	0.727108214	0.727108219	7.101134098 E-10

Tablo 3.28: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
N	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
20	3.296570 E-10	9.566179 E-10	5.032441 E-9
40	3.156147 E-10	9.310806 E-10	4.968639 E-9
80	3.119810 E-10	9.232277 E-10	4.936169 E-9
100	3.115262 E-10	9.220425 E-10	4.929632 E-9

Tablo 3.29: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
N	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$

20	0.583929734 E-10	1.526947138 E-10	7.261171337 E-10
40	0.557635422 E-10	1.485558478 E-10	7.261171337 E-10
80	0.551108593 E-10	1.475213113 E-10	7.261171337 E-10
100	0.550341818 E-10	1.473991094 E-10	7.261171337 E-10

Tablo 3.30: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
k	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
0.001	2.627363 E-5	2.624141 E-5	2.062275 E-5
0.0001	2.243964 E-9	3.528544 E-9	3.510823 E-9
0.00001	3.296570 E-10	9.566179 E-10	5.0324410 E-9

Tablo 3.31: $\delta = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
k	$t = 0.1$	$t = 1$	$t = 10$
0.001	2.565192119 E-5	2.562878756 E-5	2.037517263 E-5
0.0001	4.211757250 E-10	6.566133114 E-10	7.261171337 E-10
0.00001	0.583929734 E-10	1.526947138 E-10	7.261171337 E-10

Tablo 3.32 ile $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.33 ve Tablo 3.34 ile $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu. Tablo 3.35 ve Tablo 3.36 ile $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.32: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in CN-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

x	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
0.1	0.01	0.838828674	0.838828671	3.044660413 E-9
	0.1	0.857592409	0.857592397	1.227654101 E-8
	1	0.968766193	0.968766174	1.874317568 E-8
0.5	0.01	0.821401341	0.821401338	3.313246566 E-9
	0.1	0.841316577	0.841316548	2.913325781 E-8
	1	0.963820751	0.963820692	5.924486879 E-8
0.9	0.01	0.803061796	0.803061794	1.670484862 E-9
	0.1	0.824031507	0.824031497	0.996052485 E-8
	1	0.958174496	0.958174474	2.218406647 E-8

Tablo 3.33: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
N	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
20	2.970753000 E-9	2.306763000 E-8	5.787535000 E-8
40	2.960667000 E-9	2.196600000 E-8	4.605473000 E-8
80	2.959242000 E-9	2.169099000 E-8	4.309900000 E-8
100	2.959111000 E-9	2.165803000 E-8	4.274426000 E-8

Tablo 3.34: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
N	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
20	4.055695890 E-9	3.121735237 E-8	7.944184566 E-8
40	3.902703938 E-9	2.967449042 E-8	6.345705628 E-8
80	3.864526255 E-9	2.929758602 E-8	5.941517656 E-8
100	3.859609743 E-9	2.925280462 E-8	5.892782284 E-8

Tablo 3.35: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
k	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
0.001	2.335004000 E-4	2.174477000 E-4	6.584637000 E-5
0.0001	2.956303000 E-8	2.242226000 E-7	4.508992000 E-7
0.00001	2.970753000 E-9	2.306763000 E-8	5.787535000 E-8

Tablo 3.36: $\delta = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
k	$t = 0.01$	$t = 0.1$	$t = 1$
0.001	2.418233998 E-4	2.294765042 E-4	7.932558486 E-5
0.0001	3.859468822 E-8	3.009119446 E-7	6.164389688 E-7
0.00001	4.055695890 E-9	3.121735237 E-8	7.944184566 E-8

Tablo 3.37 ile $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 10^{-5}$ ve $N = 80$ için farklı zamanlarda elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılması verildi. Tablodan elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.38 ve Tablo 3.39 ile $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu. Tablo 3.40 ve Tablo 3.41 ile $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $N = 20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları sunuldu.

Tablo 3.37: $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $k = 10^{-5}$ için Model Problem' in CN-LSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümlerin karşılaştırılması

x	t	$N = 80$	Tam Çözüm	Mutlak hata
	0.01	0.490626090	0.490626098	0.800692251 E-8

0.1	0.1	0.518741183	0.518741216	3.330477150 E-8
	1	0.768524772	0.768524783	1.100200508 E-8
0.5	0.01	0.440902516	0.440902528	1.209210082 E-8
	0.1	0.468790535	0.468790627	9.211933938 E-8
	1	0.731058546	0.731058579	3.233179535 E-8
0.9	0.01	0.392336821	0.392336830	0.906223180 E-8
	0.1	0.419457656	0.419457696	3.962088352 E-8
	1	0.689974462	0.689974481	1.961160512 E-8

Tablo 3.38: $\delta=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $k=10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
N	$t=0.01$	$t=0.1$	$t=1$
20	3.875387000 E-8	2.519934000 E-7	4.378588000 E-8
40	1.624546000 E-8	1.054353000 E-7	2.866507000 E-8
80	1.060646000 E-8	6.875827000 E-8	2.505506000 E-8
100	0.992954700 E-8	6.435604000 E-8	2.462880000 E-8

Tablo 3.39: $\delta=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $k=10^{-5}$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
N	$t=0.01$	$t=0.1$	$t=1$
20	4.449732377 E-8	3.386615244 E-7	6.565297561 E-8
40	1.870624583 E-8	1.418639532 E-7	4.011723564 E-8
80	1.228812940 E-8	9.242633064 E-8	3.394364290 E-8
100	1.151985635 E-8	8.650411493 E-8	3.321560238 E-8

Tablo 3.40: $\delta=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $N=20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_2 hata normları.

	L_2		
k	$t=0.01$	$t=0.1$	$t=1$

0.001	3.148058000 E-4	3.222642000 E-4	2.535949000 E-4
0.0001	1.169404000 E-7	7.496797000 E-7	2.061445000 E-7
0.00001	3.875387000 E-8	2.519934000 E-7	4.378588000 E-8

Tablo 3.41: $\delta=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ ve $N=20$ için farklı k zaman adımları ve farklı zamanlarda elde edilen L_∞ hata normları.

	L_∞		
k	$t=0.01$	$t=0.1$	$t=1$
0.001	3.129882080 E-4	3.192319748 E-4	2.724167941 E-4
0.0001	1.354573470 E-7	10.093078104 E-7	2.945578597 E-7
0.00001	4.449732377 E-8	3.386615244 E-7	6.565297561 E-8

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin nümerik çözümleri Açık Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (A-LSFY), Kapalı Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (K-LSFY) ve Crank-Nicolson Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi (CN-LSFY) kullanılarak elde edildi. Yöntemlerin performansını test etmek için ele alınan model problem farklı parametrelerle incelendi. Elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümlerle karşılaştırılmaları tablolarla verildi. Sonuçların doğruluğunu göstermek için mutlak hata, L_2 ve L_∞ hata normları kullanıldı. Ayrıca sunulan yöntemlerin kararlılığı von Neumann kararlılık analizi yöntemi ile incelendi. Tablolardan N ' nin değeri arttıkça yani h konum adımının değeri azaldıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının değerlerinin azaldığı, k zaman adımının değeri küçüldükçe hata normlarının değerlerinin azaldığı görülmektedir. $\delta=1$, $\beta=0.1$ ve $\alpha=0.1$ için farklı bölüntü sayıları ve farklı zamanlarda sırasıyla A-LSFY, K-LSFY ve CN-LSFY ile elde edilen L_2 hata normları sırasıyla Tablo 3.2, Tablo 3.13 ve Tablo 3.28 ile sunulmuştur. Tablolardan K-LSFY ve CN-LSFY ile elde edilen sonuçların A-LSFY ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak genelleştirilmiş Burgers-Fisher denklemine uygulanan bu yöntemler farklı alanlarda karşılaşılan lineer olmayan başka problemlerde uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Aljaboori, M. A. H. (2018). Exponenetial And Logarithmic Crank-Nicolson Methods For Solving Coupled Burger's Equations. Misan Journal for Academic Studies, 33, 50-61.
- [2] Burden, R. L., Faires, J.D. (2005). Numerical Analysis, Thomson Brooks/Cole, USA.
- [3] Chen, X.Y., (2007). Numerical Methods for the Burgers–Fisher Equation. Master Thesis, University of Aeronautics and Astronautics, China.
- [4] El-Azab, M. S., El-Kalla, I. L. and El-Morsy, S. A. (2014). Composite Finite Difference Scheme Applied to a Couple of Nonlinear Evolution Equations. Electronic Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 2(2), 254-263.
- [5] Fulks, W. (1962). Advanced Calculus: An Introduction to Analysis, USA.
- [6] Golbabai, A. ve Javidi, M., (2009). A Spectral Domain Decomposition Approach for the Generalized Burgers–Fisher Equation. Chaos Solitons and Fractals, 39, 385–392.
- [7] Hammad, D.A. ve El-Azab, M.S., (2015). 2N Order Compact Finite Difference Scheme with Collocation Method for Solving the Generalized Burger's–Huxley and Burger's–Fisher Equations. Applied Mathematics and Computation, 258, 296–311.
- [8] Ismail, M.S. and Al-Basyoni, K.S. (2018). A Logarithmic Finite Difference Method for Troesch's Problem. Applied Mathematics, 9, 550-559.
- [9] Ismail, H.N.A., Raslan, K. ve Rabboh, A.A.A., (2004). Adomian Decomposition Method for Burgers– Huxley and Burgers–Fisher Equations. Applied Mathematics and Computation, 159, 291–301.
- [10] Ismail, H.N.A. ve Rabboh, A.A.A., (2004). A Restrictive Pade Approximation for the Solution of the Generalized Fisher and Burgers–Fisher Equation. Applied Mathematics and Computation, 154, 203–210.
- [11] Javidi, M., (2006). Spectral Collocation Method for the Solution of the Generalized Burger–Fisher Equation. Applied Mathematics and Computation, 174, 45–352.

- [12] Kaya, D. ve El_Sayed, S.M., (2004). A Numerical Simulation and Explicit Solutions of the Generalized Burger–Fisher Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 152, 403–413.
- [13] Macias-Diaz, J. E. (2019). On the Numerical and Structural Properties of a Logarithmic Scheme for Diffusion–Reaction Equations. *Applied Numerical Mathematics*, 140, 104–114.
- [14] Mickens, R.E. ve Gumel, A.B., (2002). Construction and Analysis of a Non-Standard Finite Difference Scheme for the Burgers–Fisher Equation. *Journal of Sound and Vibration*, 257 (4), 791– 797.
- [15] Mittal, R.C. ve Tripathi, A., (2015). Numerical Solutions of Generalized Burgers–Fisher and Generalized Burgers–Huxley Equations Using Collocation of Cubic B-splines. *International Journal of Computation Mathematics*, 92, 1053–1077.
- [16] Moghimi, M. ve Hejazi, F.S.A., (2007). Variational Iteration Method for Solving Generalized Burger–Fisher and Burger Equations. *Chaos Solitons and Fractals*, 33, 1756–1761.
- [17] Mohammadi, R., (2012). Spline Solution of the Generalized Burgers’-Fisher Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 91, 2189–2215.
- [18] Smith, G.D. (1987). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Third Edition, Clarendon Press, Oxford.
- [19] Srivastava, V. K., Singh, S. and Awasthi M. K. (2013). Numerical solutions of coupled Burgers' equations by an implicit finite-difference scheme. *AIP ADVANCES*, 3, 082131.
- [20] Srivastava, V. K., Awasthi, M. K. And Singh, S. (2013). An implicit logarithm finite difference technique for two dimensional coupled viscous Burgers' equation. *AIP Advances*, 3, 122105.
- [21] Stewart., J. (2007). *Kalkülüs: Diferansiyel ve İntegral Hesap*, TÜBA yayınları, Ankara.
- [22] Wazwaz, A.M., (2005). The Tanh Method for Generalized Forms of Nonlinear Heat Conduction and Burgers–Fisher Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 169, 321–338.

- [23] Wazzan, L., (2009). A Modified Tanh–Coth Method for Solving the General Burgers–Fisher and the Kuramoto–Sivashinsky Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 2642–2652.
- [24] Zhang, R., Yu, X. ve Zhao, G., (2012). The Local Discontinuous Galerkin Method for Burger’s–Huxley and Burger’s–Fisher Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 8773–8778.
- [25] Zhao, T., Li, C., Zang, Z. ve Wu Y., (2012). Chebyshev–Legendre Pseudo-Spectral Method for the Generalised Burgers–Fisher Equation. *Applied Mathematical Modelling*, 36, 1046–1056.

