



T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DOKTORA TEZİ

KOZMOLOJİK FENOMENLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ
BELİRSİZLİK İLKESİ KULLANILARAK İNCELENMESİ

Özgür ÖKCÜ

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ekrem AYDINER

Haziran, 2021

İSTANBUL

Bu çalışma 21.06.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziğı Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Ekrem AYDINER (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Tekin DERELİ
Koç Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Osman Teoman TURGUT
Boğaziçi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Mustafa SARISAMAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

- **Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri**

Ökcü, Ö., Aydın, E., 2020, GUP-Corrected van der Waals Black Holes, *International Journal of Theoretical Physics*, **59**, 2839–2851.
Ökcü, Ö., Corda, C., Aydın, E., 2020, Modified Friedmann equations from DSR-GUP, *Europhysics Letters*, **129**(5), 50002-50007.
Ökcü, Ö., Aydın, E., 2021, Observational tests of the generalized uncertainty principle: Shapiro time delay, gravitational redshift, and geodetic precession, *Nuclear Physics B*, **964**, 115324-115338.

ÖNSÖZ

Tez çalışması süresince benden yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımnda bana çok önemli katkılar sağlayan, çalışma disiplinine hayran olduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. Ekrem AYDINER'e teşekkürü borç bilirim.

Her zaman ve her koşulda beni destekleyen sevgili aileme, ailemizin son üyesi sevgili yeğenim Mert Ali ASLAN'a ve kedilerime teşekkür ederim.

Doktora süresince burs aldığım Elginkan Vakfı'na minnettirim.

Son olarak değerli arkadaşlarıma ve hocalarıma teşekkür ederim.

Haziran, 2021

Özgür ÖKCÜ

İÇİNDEKİLER

| | Sayfa No |
|---|-----------|
| ÖNSÖZ | iv |
| İÇİNDEKİLER | vi |
| ŞEKİL LİSTESİ | viii |
| TABLO LİSTESİ | ix |
| SİMGE VE KISALTIMA LİSTESİ | xi |
| ÖZET | xii |
| SUMMARY | xiii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. GENEL KISIMLAR | 3 |
| 2.1. KGBP’NİN DÜŞÜNCE DENEYİ İLE TÜRETİLMESİ | 5 |
| 2.2. KARA DELİK TERMODİNAMİĞİNE GBP MODİFİKASYONU | 8 |
| 2.2.1. Adler ve Diğ. Modifikasyonu | 8 |
| 2.2.2. Xiang ve Wen Modifikasyonu | 12 |
| 3. MALZEME VE YÖNTEM | 19 |
| 3.1. VAN DER WAALS KARA DELİĞİNİN ÇÖZÜMÜ | 19 |
| 3.2. FRIEDMANN DENKLEMLERİNİN GÖRÜNÜR UFUKTAKİ TERMODİNAMİĞİN BİRİNCİ YASASINDAN TÜRETİLMESİ | 24 |
| 3.2.1. $(n + 1)$ Boyutlu Friedmann Denklemlerinin Türetilmesi | 25 |
| 3.3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BELİRSİZLİK İLKESİ VE KÜTLEÇEKİMSSEL TESTLER | 28 |
| 3.3.1. GBP-Modifiye Schwarzschild Metriği | 28 |
| 3.3.2. Işığın Sapması | 30 |
| 3.3.3. Merkür’ün Perihel Noktasının Kayması | 32 |
| 3.3.4. PRS B 1913+16 Pulsar Çiftinin Periastronu | 36 |
| 4. BULGULAR | 39 |
| 4.1. GBP MODİFİYE VDW KARA DELİK ÇÖZÜMÜ | 39 |
| 4.1.1. GBP Modifiye Kara Delik Sıcaklığı | 39 |

| | |
|--|-----------|
| 4.1.2. GBP Modifiye Kara Deliği | 40 |
| 4.1.3. Termodinamik Özellikler ve Faz Geçişi | 43 |
| 4.2. FRIEDMANN DENKLEMLERİNİN DSR-GUP MODİFİKASYONU | 48 |
| 4.2.1. DSR-GUP Kullanılarak Elde Edilen Entropi-Alan İlişkisi | 49 |
| 4.2.2. Modifiye Friedmann Denklemleri | 50 |
| 4.2.3. Yavaşlama Parametresi | 53 |
| 4.2.4. Termodinamiğin Genelleştirilmiş İkinici Yasası (TGİY) | 55 |
| 4.3. GBP, SHAPIRO ZAMAN GECİKMESİ, KIRMIZIYA KAYMA VE JEODEZİK DEVİNİM | 56 |
| 4.3.1. GBP Modifiye Schwarzschild Metriği Etrafında Parçacık Hareketi | 56 |
| 4.3.2. Shapiro Zaman Kayması | 57 |
| 4.3.3. Kütleçekimsel Kırmızıya Kayma | 60 |
| 4.3.4. Jeodezik Devininim | 62 |
| 4.3.5. Diğer β Sınırlarıyla Karşılaştırma | 66 |
| 5. TARTIşMA VE SONUÇ | 69 |
| KAYNAKLAR | 71 |
| EKLER | 80 |
| EK 1. ρ ve p_i Bileşenlerinin Belirlenmesi | 80 |
| EK 2. Anizotropik Stres Enerji Tensörünün Enerji şartları | 81 |
| ÖZGEÇMİş | 83 |

ŞEKİL LİSTESİ

Page No

- Şekil 2.1:** Momentum belirsizliği Δp 'nin konum belirsizliği Δx 'e göre değişimi. Siyah eğri standart belirsizlik ilkesini gösterirken, kırmızı sürekli ve kesikli eğriler sırasıyla GBP'nin momentum belirsizliğinin üst ve alt sınırlarına karşılık gelmektedir. $\ell_P = \hbar = \beta = 1$ alınmıştır. 5
- Şekil 2.2:** Heisenberg mikroskop deneyi. 7
- Şekil 2.3:** Standart (siyah) ve GBP modifiye (kırmızı) Hawking sıcaklıklarının kütleyle göre değişimi. $\beta = k_B = c = M_P = 1$ alınmıştır. 10
- Şekil 2.4:** Standart (siyah) ve GBP modifiye (kırmızı) entropilerin kütleyle göre değişimi. $\beta = k_B = M_P = 1$ alınmıştır. 11
- Şekil 2.5:** Standart (siyah) ve GBP modifiye (kırmızı) ısı sığalarının kütleyle göre değişimi. $\beta = k_B = M_P = 1$ alınmıştır. 11
- Şekil 3.1:** ρ enerji yoğunluğu (siyah kesikli eğri), $\rho + p_2$ (kırmızı noktalı eğri) ve $\rho - p_2$ (mavi eğri), $r_H = 1,35$ için yeşil eğri ile olay ufku gösterilmektedir. x eksenini radyal koordinat r 'yi göstermektedir. $a = 1/2\pi$, $b = 1$, $P = 0,001$ ve $M = 0,1$ alınmıştır. 24
- Şekil 3.2:** Işığın sapması..... 32
- Şekil 3.3:** Elipsin elemanları. 33
- Şekil 4.1:** ρ enerji yoğunluğu (siyah kesikli eğri), $\rho + p_2$ (kırmızı noktalı eğri) ve $\rho - p_2$ (mavi eğri), $r_H = 3$ için yeşil eğri ile olay ufku gösterilmektedir. x eksenini radyal koordinat r 'yi göstermektedir. $a = 1/2\pi$, $b = 1$, $P = 0,001$ ve $M = 0,16$ alınmıştır. 43
- Şekil 4.2:** Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modifiye (kırmızı kesikli eğri) entropiler. $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = 1$ seçilmiştir. 44
- Şekil 4.3:** Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modifiye (kırmızı kesikli eğri) sıcaklıklar. (a) $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = l = 1$. (b) $b = 0,1$, $\beta = a = l = 1$ 45
- Şekil 4.4:** Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modifiye (kırmızı kesikli eğri) ısı sığaları. (a) $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = l = 1$. (b) $b = 0,1$, $\beta = a = l = 1$ 45
- Şekil 4.5:** Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modifiye (kırmızı kesikli eğri) termodinamik hacimler. $\beta = b = 1$ seçilmiştir. 46
- Şekil 4.6:** Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modifiye (kırmızı kesikli eğri) kütleler. (a) $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = l = 1$. (b) $b = 0,1$, $\beta = a = l = 1$ 47
- Şekil 4.7:** $P - r_H$ faz diyagramları. İzotermal eğrilerin sıcaklıkları yukarıdan aşağıya doğru azalmaktadır ve $1,3T_c$ (mavi noktalı eğri), T_c (kırmızı kesikli eğri) ve $0,7T_c$ (yeşil eğri) değerlerine karşılık gelmektedir. (a) GBP modifiye hal denklemi. (b) Standart hal denklemi. 47

Şekil 4.8: Shapiro zaman gecikmesi 61



TABLO LİSTESİ

| | Page No |
|---|----------------|
| Tablo 3.1: PSR B 1913+16 pulsar çiftinin yörüngesel parametreleri [122]. | 38 |
| Tablo 4.1: Çeşitli deneylerden ve gözlemlerden elde edilen boyutsuz β parametresinin üst sınırları. | 68 |



SİMGE VE KISALTIMA LİSTESİ

| Simgeler | Açıklama |
|---------------|-----------------------------------|
| c | : Işık hızı |
| C | : Isı sığası |
| C_{GBP} | : GBP modifiye ısı sığası |
| G | : Newton'un Evrensel çekim sabiti |
| h | : Planck sabiti |
| k_B | : Boltzmann sabiti |
| \hbar | : İndirgenmiş Planck sabiti |
| ℓ_P | : Planck uzunluğu |
| M_P | : Planck kütlesi |
| r_S | : Schwarzschild yarıçapı |
| \tilde{r}_A | : Görünür ufku yarıçapı |
| R_{\oplus} | : Dünya yarıçapı |
| M_{\oplus} | : Dünya kütlesi |
| R_{\odot} | : Güneş yarıçapı |
| M_{\odot} | : Güneş kütlesi |
| q | : Yavaşlama parametresi |
| Δx | : Konum belirsizliği |
| Δp | : Momentum belirsizliği |
| S | : Entropi |
| S_{GBP} | : GBP modifiye entropi |
| T_H | : Hawking sıcaklığı |
| T_{GBP} | : GBP modifiye Hawking sıcaklığı |
| α | : LKGBP'nin boyutsuz parametresi |
| β | : KGBP'nin boyutsuz parametresi |
| Λ | : Kozmolojik sabit |
| $G_{\mu\nu}$ | : Einstein tensörü |
| $g_{\mu\nu}$ | : Metrik tensör |
| $T_{\mu\nu}$ | : Stres enerji tensörü |
| $R_{\mu\nu}$ | : Ricci tensörü |

| | |
|----------------------------|-----------------------|
| R | : Ricci skaleri |
| $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ | : Christoffel sembolü |
| l | : AdS yarıçapı |
| v | : Spesifik hacim |

Kısaltmalar

Açıklama

| | |
|-----------------------|---|
| <i>DSR-GUP</i> | : Doubly Special Relativity-Generalized Uncertainty Principle |
| <i>GBP</i> | : Genelleştirilmiş Belirsizlik Prensibi |
| <i>KGBP</i> | : Kuadratik Genelleştirilmiş Belirsizlik Prensibi |
| <i>KLGBP</i> | : Kuadratik ve Lineer Genelleştirilmiş Belirsizlik Prensibi |
| <i>KKT</i> | : Kuantum Kütle Çekim Teorisi |
| <i>TBY</i> | : Termodinamiğin Birinci Yasası |
| <i>TGIY</i> | : Termodinamiğin Genelleştirilmiş İkinci Yasası |
| <i>vdW</i> | : van der Waals |
| <i>GPB</i> | : Gravity Probe B |
| <i>mys</i> | : mili yay saniyesi |

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KOZMOLOJİK FENOMENLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ BELİRSİZLİK İLKESİ KULLANILARAK İNCELENMESİ

Özgür ÖKCÜ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem AYDINER

Bu tezde genelleştirilmiş belirsizlik prensibi çalışılmıştır. İlk olarak genelleştirilmiş belirsizlik prensibi modifiye van der Waals kara delik çözümü elde edilmiştir. Modifiye çözümün termodinamik özellikleri ve faz geçişleri incelenmiştir. Ayrıca P-V düzleminde faz geçişi çalışılmıştır. Genelleştirilmiş belirsizlik ilkesi dikkate alındığında fiziksel olarak anlamlı bir faz geçişi olduğu gösterilmiştir. İkinci olarak DSR-GUP'dan modifiye entropi-alan ilişkisi kullanılarak, görünür ufku termodinamiğinin birinci yasasından modifiye Friedmann denklemleri elde edilmiştir. Büyük Patlama tekilliğini ortadan kaldırma potansiyeline sahip bir minimum görünür ufuk bulunmuştur. Ayrıca yavaşlama parametresi evrenin tüm dönemleri için çalışılmıştır. Termodinamiğin genelleştirilmiş ikinci yasası evrenin tüm dönemleri için sağlanmaktadır. Son olarak genelleştirilmiş belirsizlik prensibi modifiye Schwarzschild metriği için Shapiro zaman gecikmesi, kütleçekimsel kırmızıya kayma ve jeodezik devinim incelenmiştir. Gözlemsel ve deneysel sonuçların kullanılmasıyla genelleştirilmiş belirsizlik ilkesinin boyutsuz parametresi için üst sınırlar elde edilmiştir. Bu sınırlar literatürdeki sınırlarla karşılaştırılmıştır.

Haziran 2021, 95 sayfa.

Anahtar kelimeler: Fenomenolojik Kuantum Kütleçekimi, Genelleştirilmiş Belirsizlik Prensibi, Genel Görelilik.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

INVESTIGATION OF COSMOLOGICAL PHENOMENA BY USING GENERALIZED UNCERTAINTY PRINCIPLE

Özgür ÖKCÜ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem AYDINER

In this thesis, generalized uncertainty principle was studied. Firstly, generalized uncertainty principle modified van der Waals black hole solution was obtained. Thermodynamic properties and phase transition of modified solution were investigated. Also, phase transition in P-V plane was studied. Taking into account generalized uncertainty principle, it was shown that there is a physically meaningful phase transition. Secondly, using the modified entropy-area relation from DSR-GUP, modified Friedmann equations were obtained from the first law of thermodynamics at apparent horizon. A minimum apparent horizon, which has the potential to remove the Big Bang singularity, was found. Also, deceleration parameter was studied for the all eras of the Universe. The generalized second law of thermodynamics is satisfied for the all eras of the Universe. Finally, Shapiro time delay, gravitational redshift, and geodetic precession were investigated for generalized uncertainty principle modified Schwarzschild metric. Using observational and experimental results, upper bounds of generalized uncertainty principle dimensionless parameter were obtained. These bounds compared with other bounds in the literature.

June 2021, 95 pages.

Keywords: Phenomenology of Quantum Gravity, Generalized Uncertainty Principle, General Relativity.

1. GİRİŞ

Güçlü deneysel kanıtlarla desteklenen ve kütleçekimsel fenomenleri açıklama konusunda oldukça başarılı olan Albert Einstein'ın genel görelilik kuramı çok küçük uzunluk ölçeklerinde iyi sonuçlar vermemektedir. Örneğin; kara deliklerin tekilliği, evrenin başlangıcındaki tekillik ve buharlaşan kara deliklerin sıcaklığının ıraksaması gibi öngörüler çok mantıklı değildir. Makul olmayan bu durumların üstesinden gelmek için kütleçekiminin kuantum teorisi yani kauntum kütleçekim teorisi (KKT) gereklidir. KKT'yi fiziğin iki başarılı teorisi olan kuantum mekaniği ve genel görelilik teorisinin tatmin edici bir birleşimi olarak tanımlayabiliriz. Günümüze kadar tatmin edici bir birleşme için çok sayıda gerçekleştirilen girişim başarısız olmuştur. Başarılı bir KKT elde etmeye yönelik girişimler modern fiziğin en zorlayıcı konularından birisi haline gelmiştir. Yine de sicim kuramı ve ilmek kuantum kütleçekimi (Loop Quantum Gravity) başarılı bir birleşmeyi gerçekleştirebilecek olan iki güçlü aday olarak görülmektedir.

KKT'nin çeşitli yaklaşımlarında ve sicim kuramında minimum bir mesafenin varlığı karşımıza çıkar. Bu minimum mesafe öngörüsü yukarıda bahsettiğimiz genel göreliliğin olumsuzlukları ile başa çıkmak bakımından oldukça önemlidir. Özellikle evrenin sonlu bir mesafeden genişlemesi, kara deliklerin buharlaşmasının son aşamasında sonlu bir sıcaklık gibi daha makul öngörüler sağlar. Sicim kuramı ve çok sayıda KKT bu minimum mesafenin Planck uzunluğu olarak adlandırılan $\ell_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \simeq 1.6 \times 10^{-35}$ m değeri mertebesinde olduğunu öngörmektedir. Bu mesafede kuantum kütleçekim etkilerinin gözardı edilemeyeceği düşünülmektedir.

Bu tezin konusu fenomenolojik KKT'lerden birisi olan genelleştirilmiş belirsizlik prensibidir (GBP). GBP'yi standart belirsizlik prensibinin modifikasyonu olarak tanımlayabiliriz. Sicim kuramı ve birçok KKT yaklaşımına benzer şekilde minimum mesafe düşüncesi GBP'nin karakteristik öngörüsü olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla GBP standart genel göreliliğin başa çıkamadığı tekilliklerle uğraşmak bakımından önemli hale gelmektedir. Bu tezde de biz kara deliklerin termodinamiğini, evrenin dinamiğini tanımlayan Friedmann denklemlerini ve kütleçekimsel testleri GBP çerçevesinde ele aldık. Özetle tezin organizasyonu aşağıdaki gibidir:

İkinci bölümde GBP'nin ayrıntılı bir tanımlanmasından sonra literatürde yapılan çalışmalardan bahsedilecektir. Literatürde önerilen en basit formdaki GBP'nin türetilmesine yönelik düşünce deneyi verilecektir [1]. Özellikle GBP'nin kara delik termodinamiğinde önemi nedeniyle Hawking sıcaklığının modifikasyonuna yönelik yöntemlerden bahsedilecektir [2, 3]. Üçüncü bölümde ilk olarak son yıllarda anti-de Sitter (AdS) uzayzamanında kozmolojik sabitin kara delik termodinamiğinin birinci yasasında termodinamik basınç olarak düşünüldüğü durum [4] hakkında bilgi verildikten sonra van der Waals (vdW) akışkanlarıyla aynı termodinamik özelliklere sahip vdW kara deliğinin çözümü verilecektir [5]. Bu kara delik çözümünün sağlaması gerektiği enerji şartları tartışılacaktır. Ardından Friedmann denklemlerinin görünür ufuk r_A 'da termodinamiğin birinci yasasından (TBY) elde edilmesine yönelik bilgiler verilecektir [6, 7]. Son olarak bu bölümde Scardigli ve Casadio'nun GBP modifikasyonunu içeren Schwarzschild çözümü [8] için ışığın sapması, Merkür'ün perihel noktasının kayması ve PRS B 1913+16 pulsar çiftinin periastron noktasının kayması incelenecektir. Bulunan teorik sonuçların gözlemlerle karşılaştırılması sonucunda GBP'nin boyutsuz parameteresinin sayısal üst sınırları verilecektir. Dördüncü bölümde üçüncü bölümün başında vermiş olduğumuz vdW kara deliği çözümünü GBP etkilerini içerecek şekilde modifiye edeceğiz. Elde edilen modifiye çözümün enerji şartları kontrol edilip termodinamik özellikleri ve faz geçişi ayrıntılarıyla incelenecektir. Standart çözüm ile karşılaştırma yapılacaktır. Daha sonra literatürde DSR-GUP [9, 10] olarak bilinen GBP kullanılarak görünür ufuk için elde edilen entropi-alan ilişkisi aracılığıyla termodinamiğin birinci yasasından modifiye Friedmann denklemleri elde edilecektir. Elde edilen Friedmann denklemlerinin Büyük Patlama'nın başındaki tekilliği nasıl kaldırdığı ile ilgili bilgi verilecektir. Modifiye Friedmann denklemleri kullanılarak elde edilen yavaşlama parametresi q (deceleration parameter) evrenin erken zaman enflasyon, radyasyon, madde ve geç zaman genişleme dönemleri için ele alınıp yorumlanacaktır. Termodinamiğin genelleştirilmiş ikinci yasasının (TGİY) modifiye Friedmann denklemleri için evrenin tüm dönemlerinde sağlandığını göstereceğiz. Son olarak bu bölümde Scardigli ve Casadio'nun önerdiği GBP modifiye Schwarzschild çözümünü kullanarak Shapiro zaman gecikmesi, kütleçekimsel kırmızıya kayma ve jeodezik devinim gibi testleri inceleyeceğiz. Her üç test için bulduğumuz sonuçları deneyler ve gözlemlerle karşılaştırarak GBP'nin boyutsuz parametersi için üst sınırlar elde edeceğiz. Literatürde yapılan benzer çalışmalar sonucu elde edilen üst sınırlardan bahsedilecektir. Beşinci bölümde ise bulduğumuz sonuçlar özetlenip tartışılacaktır.

2. GENEL KISIMLAR

GBP'yi kısaca kuantum kütleçekimsel etkilerin göz önüne alındığı durumdaki Heisenberg belirsizlik prensibinin modifikasyonu olarak tanımlayabiliriz. Günümüze kadar GBP için literatürde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Standart Heisenberg belirsizlik ilkesinin kütleçekimsel etkilerin göz önüne alındığı durumda modifiye edilmesi düşüncesi 1980'li yıllarda sicim kuramına dayanan çalışmalara kadar gitmektedir [11–16]. En basit formdaki GBP [1] aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar \left(1 + \frac{\beta \ell_P^2}{\hbar^2} \Delta p^2 \right). \quad (2.1)$$

Burada β boyutsuz bir sabit olarak düşünülebilir ve genelde bir civarında varsayılmaktadır. Standart belirsizlik prensibinden farklı olarak eşitsizliğin sağ tarafında momentumun belirsizliğinin karesi bulunmaktadır. Bundan dolayı bu en basit formdaki GBP literatürde kuadratik genelleştirilmiş belirsizlik prensibi (KGBP) olarak adlandırılmaktadır.

Giriş bölümünde de bahsettiğimiz gibi çeşitli KKT'ler ve sicim kuramına benzer şekilde GBP de minimum bir mesafe öngörmektedir. Eğer (2.1)'de tanımlanan eşitsizliği Δp için çözersek

$$\frac{\hbar}{2\beta\ell_P^2} \left(\Delta x - \sqrt{\Delta x^2 - 4\beta\ell_P^2} \right) \leq \Delta p \leq \frac{\hbar}{2\beta\ell_P^2} \left(\Delta x + \sqrt{\Delta x^2 - 4\beta\ell_P^2} \right) \quad (2.2)$$

elde ederiz. Bu çözümler açıkça konumun belirsizliği Δx 'in bir minimum değere sahip olmasını ima etmektedir. Eğer β 'nin değeri bir civarında ise bu minimum değer Planck uzunluğu mertebesinde olur. Yani konum belirsizliğinin sahip olabileceği en küçük değer $\Delta x_{min} = 2\beta\ell_P$ civarında olacaktır. Bu GBP'nin standart belirsizlik prensibinden en önemli farkıdır. Standart belirsizlik prensibinde konumun belirsizliğini keyfi olarak küçültmek mümkün olmasına rağmen, GBP durumunda bu mümkün değildir. Tabi bu durumun β parametresinin pozitif varsayıldığı durum için geçerli olduğunu akılda tutmak gerekir. **Şekil 2.1:**'de standart belirsizlik prensibinin ve GBP'nin momentum belirsizlikleri konum belirsizliklerine göre çizilmiştir. Şekilden görüleceği gibi GBP'de konum belirsizliği bir minimum değere sahiptir. Bundan dolayı tanımlı olduğu belirli bir bölge vardır. Böyle bir

sınırlama standart belirsizlik ilkesi için geçerli değildir.

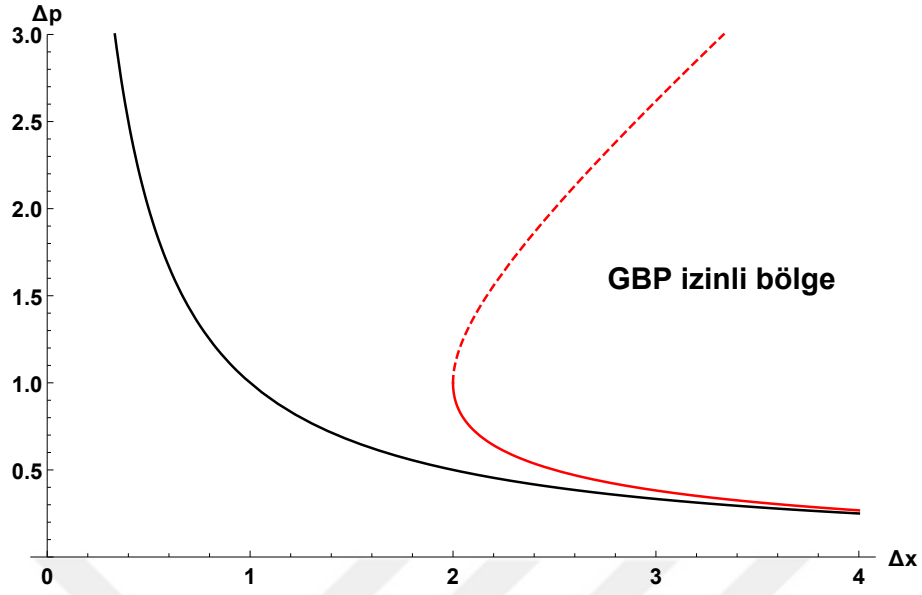
GBP'nin öngördüğü bu minimum mesafe düşüncesi genel göreliliğin yetersiz kaldığı durumlara müdahale etme bakımından oldukça önemlidir. Aslında GBP'yi genel göreliliğin yetersizliklerine karşı yararlı bir araç olarak düşünebiliriz. Bilindiği gibi genel görelilik teorisi kuantum kütle çekim etkilerinin ihmal edilemediği Planck uzunluğu mertebesindeki fiziği tanımlama konusunda çok başarılı bir teori değildir. Bu aşamada GBP genel görelilikten daha makul öngörülerde bulunmaktadır ve genel göreliliğin öngördüğü tekillikler ortadan kaldırabilir.

Günümüze kadar GBP içerikli çok sayıda çalışma yapılmıştır. Maggiore [1], Heisenberg mikroskop argümanına dayanan bir düşünce deneyini kullanarak KGBP'yi türetmiştir. Bir başka düşünce deneyi ise Scardigli'nin [17] Planck ölçeğindeki mikro kara delikleri kullanarak GBP'yi türettiği düşünce deneyidir. GBP kara delik termodinamiğinde önemli bir rol oynamaktadır [2, 3, 10, 18–39]. GBP, Planck ölçeğindeki kuantum kütle çekim etkilerini göz önüne aldığından dolayı kara deliklerin termodinamik niceliklerini modifiye etmek mümkündür. Ayrıca GBP Hawking radyasyon mekanizması sonucu kara deliklerin tamamen ortadan kalkmasını önleyebilir. Işıma sonunda ortaya bir kara delik kalıntısının çıktığını öngörmektedir. Kozmoloji içerisinde de GBP uygulama alanı bulmaktadır [40–42]. Standart kozmolojide evrenin bir teklik noktasından başladığı öngörülmektedir. GBP ise bu tekilliği minimum mesafe özelliği ile ortadan kaldırabilir. Kara delik termodinamiği ve kozmoloji dışında kuantum mekaniği uygulamaları [9, 43–46] ve parçacık hızlandırıcılarda yüksek boyutlu teorilere yönelik çalışmaları da [47–49] GBP kapsamında düşünmek mümkündür.^{1 2}

Bu bölümün geri kalan kısmında (2.1) numaralı ifadede verdiğimiz KGBP'nin Heisenberg mikroskop argümanına dayanan düşünce deneyi aracılığıyla türetimini ve Hawking sıcaklığını modifiye etme yöntemlerini ele alacağız.

¹ Büyük Hadron Çarpıştırıcısı (BHÇ) çalışmaya başlamadan önce yayınlanan [47, 48] çalışmalarında KGBP için $n = 6$ 'dan $n = 10$ boyutuna kadar hızlandırıcıda oluşacak mikro kara deliklerin minimum kütlelerinin $2,1 TeV/c^2$ ile $4,7 TeV/c^2$ değerleri arasında olabileceği hesaplanmıştır. Yani yazarlar BHÇ'de mikro kara deliklerin oluşacağı sonucuna varmışlardır. BHÇ çalıştıktan sonra yayınlanan [49] makalesinde ise model bağımlı GBP'ler kullanılarak $n = 6$ 'dan $n = 10$ boyutuna kadar oluşabilecek kara deliklerin minimum kütleleri $60,7 TeV/c^2$ ile $2,3 \times 10^5 TeV/c^2$ arasında hesaplanmıştır. Bu değerler BHÇ'nin ulaşacağı değerlerin üstündedir.

² GBP kapsamında literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu konu hakkında daha kapsayıcı bilgiler için [50, 51] numaralı referanslara bakınız.



Şekil 2.1: Momentum belirsizliği Δp 'nin konum belirsizliği Δx 'e göre değişimi. Siyah eğri standart belirsizlik ilkesini gösterirken, kırmızı sürekli ve kesikli eğriler sırasıyla GBP'nin momentum belirsizliğinin üst ve alt sınırlarına karşılık gelmektedir. $\ell_p = \hbar = \beta = 1$ alınmıştır.

2.1. KGBP'NİN DÜŞÜNCE DENEYİ İLE TÜRETİLMESİ

Bu bölümde genel ve model bağımsız olarak kuantum kütleçekimi çerçevesinde sicim kuramındaki ile uyumlu KGBP elde edilecektir. Sonuçlar Planck uzunluğu ölçeğindeki minimum uzunluğun herhangi bir KKT çerçevesinde doğal olarak ortaya çıkabileceğini göstermektedir.

Aşağıda yer alan **Şekil 2.2:**'de d uzaklığındaki bir kara deliğin Heisenberg mikroskobu ile görüntülenmesi gösterilmektedir. Pozitif x yönünde gelen bir foton kara delik tarafından soğurulur. Kara delik tarafından yayınlanan foton d uzaklığındaki bir mikroskop ile tespit edilebilir. Yani burada Hawking ışması uzaktaki gözlemcinin sinyal almasına izin verir. Böylece en azından düşünce deneyi [1] çerçevesinde kara deliğin olay ufku r_H 'nin alanını ölçmek mümkün olur. θ ise z ekseninden itibaren ölçülür ve mikroskobun açısal açıklığı olarak adlandırılır. Kara deliğin xy düzlemindeki izdüşümü yuvarlaktır ve yarıçapı deney ile ölçülebilir.

λ dalga boyuna sahip bir fotonun kara delik tarafından soğurulduğunu varsayalım. Soğurma işleminden sonra M kütleli kara deliğin kütlesi $M + \Delta M$ olur. $\Delta M = h/\lambda$ ile verilir (Bu alt bölümde $c = 1$ seçtik). Ardından kara deliğin λ dalga boyuna sahip bir fotonu yaydığını

düşünelim. Eğer kara delik çok sayıda parçacık yayarsa düşüncemizi her parçacığa ayrı ayrı uygulamamız gerekir ve sonuçlar değişmez. Hawking ışıması mekanizması sonucu mikroskoba gelen fotonlar ile kara deliğin bir resmi elde edilebilir. d uzaklığı Hawking ışıması ile elde edilir.

Burada akla gelen ilk soru "Kara delik ufku hangi hasasiyet ile ölçülür?" şeklinde olabilir. Heisenberg'in klasik incelemesine benzer şekilde mikroskobun ayırma gücü (r_H için) minimum hatayı

$$\Delta x_1 \sim \frac{\lambda}{\sin \theta} \quad (2.3)$$

şeklinde verir. Kara deliğin momentumundaki hata ise

$$\Delta p \sim \frac{h \sin \theta}{\lambda} \quad (2.4)$$

olarak verilir. Böylece (2.3) ve (2.4) denklemleri aracılığı ile standart belirsizlik ilkesi $\Delta x_1 \sim \hbar/\Delta p$ şeklinde verilir.

İkinci hata ise kara deliğin kütesinin ışıma süresince $M + \Delta M$ 'den ΔM 'ye değişmesiyle ilişkilidir. Ölçüm sırasında foton yani ışık kuantumu yayıldığından ölçülen nicelik süresiz olarak değişir. Bu da ikinci hatanın kaynağını verir. Schwarzschild kara deliği için $\Delta x_2 \sim 2G\Delta M$ ile verilirken, M kütleli ve Q yüklü Reissner-Nordström kara deliğinin olay ufkunun yarıçapı

$$r_H = GM + \sqrt{G^2M^2 - GQ^2} \quad (2.5)$$

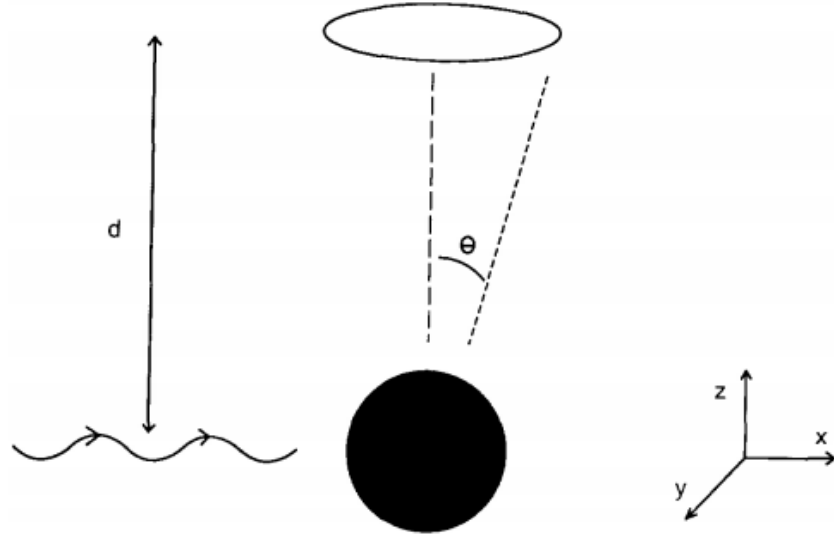
olmak üzere bu hata aşağıdaki gibi verilir:³

$$\Delta x_2 = r_H[M + \Delta M] - r_H[M] \sim G\Delta M + \sqrt{(GM + G\Delta M)^2 - GQ^2} - \sqrt{(GM)^2 - GQ^2} \geq 2G\Delta M. \quad (2.6)$$

Tekrar $\Delta M = h/\lambda$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\Delta x_2 \sim \frac{\hbar G}{\lambda} = \frac{\ell_P^2}{\lambda} \quad (2.7)$$

³ Kara deliğin açılal momentumu J 'yi hesaba katmak mümkündür. Aynı sonuçlara ulaşılır.



Şekil 2.2: Heisenberg mikroskop deneyi.

yazılır. (2.3) ve (2.7) numaralı denklemlerini

$$\frac{\lambda}{\sin \theta} \geq \lambda \quad (2.8)$$

eşitsizliğini göz önüne alarak toplarsak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\Delta x \geq \lambda + \tilde{\beta} \frac{\ell_P^2}{\lambda}. \quad (2.9)$$

Burada $\tilde{\beta}$ bir sabittir. Yukarıdaki ifadeyi daha tanıdık şekilde yazalım. (2.4) ifadesi (2.3) içerisinde kullanılırsa $\Delta x_1 \sim \hbar/\Delta p$ elde edilir. Ayrıca $\Delta x_2 \sim \frac{\ell_P^2 \Delta p}{\hbar \sin \theta}$ yazılabilir. Eğer $\Delta p/\sin \theta \geq \Delta p$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \beta \frac{\ell_P^2}{\hbar} \quad (2.10)$$

yazılabilir. Burada β parametresi modelden bağımsız bir sabittir ve belirli bir model kullanılmadan belirlenemez. Buna rağmen literatürde herhangi bir zorlama olmasa da bir civarında kabul edilmektedir. Bu varsayım daha çok sicim kuramından kaynaklanmaktadır.

Bulduğumuz sonuçlar üzerine birkaç yorum yapmak yararlı olacaktır. Açıkça bulduğumuz son ifade kuantum gravitasyon içerisinde bir minimum mesafe ima etmektedir. Bu nedenle

kuantum gravitasyon içerisinde kuantum dalgalanmalar nedeniyle kara deliğin olay ufku belirsiz bir hal alabilir ve ℓ_P gibi bir uzunluk ölçeği mertebesinden daha küçük mesafelerde tanımlanamaz. Ayrıca bulunan sonuç sicim kuramı çerçevesinde elde edilen sonuçlarla uyum içerisindedir [11, 13, 16].

2.2. KARA DELİK TERMODİNAMİĞİNE GBP MODİFİKASYONU

Bekenstein ve Hawking'in çalışmalarından [52–57] beri kara delik termodinamiği teorik fiziğin en ilginç konularından birisi olmuştur. Genel görelilik, termodinamik ve kuantum mekaniği gibi teoriler arasında temel ve derin bir ilişki kurulmasını sağlar. Bu temel ilişki ise KKT'yi anlamamızı sağlayabilir. Hawking'in kara deliklerin ışığa yapabileceğini keşfetmesiyle, kara delikler termodinamik bir sistem olarak düşünülmektedir.

Standart çerçeve içerisinde yani Hawking'in yaklaşımında kara deliklerin termodinamiği, kuantum kütleçekim etkilerini göz önüne almayan yarıklasik bir süreçtir. GBP ise tıpkı Heisenberg belirsizlik ilkesinin hidrojen atomunun çöküşünü önlemesine benzer şekilde kara deliklerin tümüyle buharlaşmasını önleyebilir. Şimdi kara deliklerin termodinamiğini modifiye etmek için literatürde kullanılan iki tür yaklaşımı inceleyelim.

2.2.1. Adler ve Diğ. Modifikasyonu

Bu bölümde Adler ve diğ. [2] önerdiği yaklaşımı ele alacağız. Küresel simetrik bir kara delik için Hawking sıcaklığı standart belirsizlik ilkesi ve kara deliklerin genel özellikleri kullanılarak sezgisel bir yaklaşımla türetilir [58]. Kuantum boşluğunu sanal parçacıkların dalgalanan bir denizi gibi düşünelim. Sanal parçacıklar normalde enerji korunumunu ihlal etmeden gözlenemezler. Fakat kara deliğin yüzeyinin yakınında etkin potansiyel enerji bir parçacığın durgun enerjisini eksiltebilir ve toplam enerjisini sıfır yapabilir. Ayrıca kara deliğin yüzeyi dışarıdan gözlemcilerin içerisini göremeyeceği parçacıkların yutulduğu tek yönlü bir zar gibi davranır. Negatif etkin enerjili foton çiftlerinden birisi kara delik tarafından yutulurken, pozitif enerjili olan foton ise kara delikten uzağa gidebilir. Bu uzaklaşan fotonun enerjisi standart belirsizlik ilkesinden tahmin edilebilir:

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{2r_S} = \frac{\hbar c^2}{4GM}, \quad \Delta x = 2r_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.11)$$

Dolayısıyla enerji belirsizliği $\Delta p c = \hbar c^3/4GM$ olarak bulunur. Bu yayınlanan fotonun karakteristik enerjisidir ve dolayısıyla karakteristik sıcaklığıdır. Bu değer $1/2\pi$ kalibrasyon çarpanı ile çarpılırsa Hawking sıcaklığını verir:

$$T_H \approx \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM} = \frac{M_P^2 c^2}{8\pi k_B M}, \quad M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \quad (2.12)$$

Yukarıdakine benzer şekilde modifiye kara delik sıcaklığını GBP kullanarak türetebiliriz. (2.2)'den

$$\frac{\Delta p}{\hbar} = \frac{\Delta x}{2\beta \ell_P^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta \ell_P^2}{\Delta x^2}} \right), \quad (2.13)$$

yazılabilir. Tekrar $\Delta x \approx 2r_S$ alırsak, sıcaklık

$$T_{GBP} = \frac{Mc^2}{\alpha \beta k_B} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\beta M_P^2}{4M^2}} \right] \quad (2.14)$$

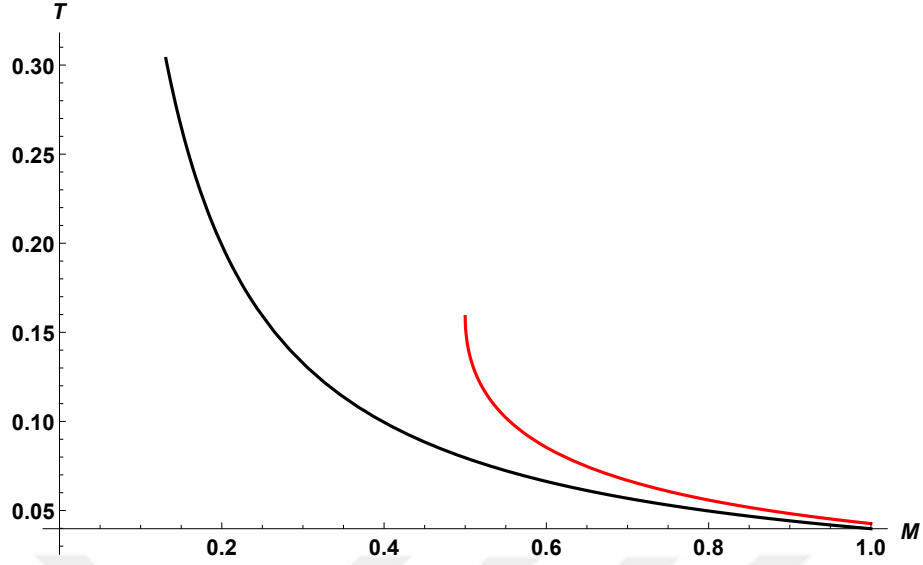
şeklinde bulunur. Burada α kalibrasyon çarpanıdır (calibration factor) ve $\beta \rightarrow 0$ limitinde π bulunur. Karekök önünde negatif işareti olan çözümü seçiyoruz. Çünkü bu çözüm $\beta \rightarrow 0$ limitinde standart Hawking sıcaklığını vermektedir. Diğer taraftan pozitif işaretli çözüm limit durumunda Hawking sıcaklığını vermemektedir. Dikkat edilirse sıcaklık $M \leq \sqrt{\beta} M_P/2$ değerinden daha küçük kütle değerleri için kompleks bir değer alır ve dolayısıyla fiziksel olmaz. GBP sıcaklık üzerine bir sınırlama getirmektedir.

Entropiyi kara delik termodinamiğinin birinci yasasını $dMc^2 = TdS$ 'yi kullanarak elde edebiliriz. Hem standart hem de GBP modifiye entropiler (2.12) ve (2.14) numaralı denklemler kullanılırsa sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$S = c^2 \int \frac{dM}{T} = 4\pi k_B \frac{M^2}{M_P^2}, \quad (2.15)$$

$$S_{GBP} = 2\pi \beta k_B \left\{ \frac{M^2}{M_P^2 \beta} \left(1 + \sqrt{1 - \beta \frac{M_P^2}{4M^2}} \right) - \frac{1}{4} \ln \left[\frac{2M}{M_P} \left(1 + \sqrt{1 - \beta \frac{M_P^2}{4M^2}} \right) \right] \right\}. \quad (2.16)$$

Yukarıda logaritmayı boyutsuz yapmak için integrasyon sabitini $\frac{1}{4} \ln M_P$ seçtik. Isı sığalarını



Şekil 2.3: Standart (siyah) ve GBP modifiye (kırmızı) Hawking sıcaklıklarının kütleye göre değişimi. $\beta = k_B = c = M_P = 1$ alınmıştır.

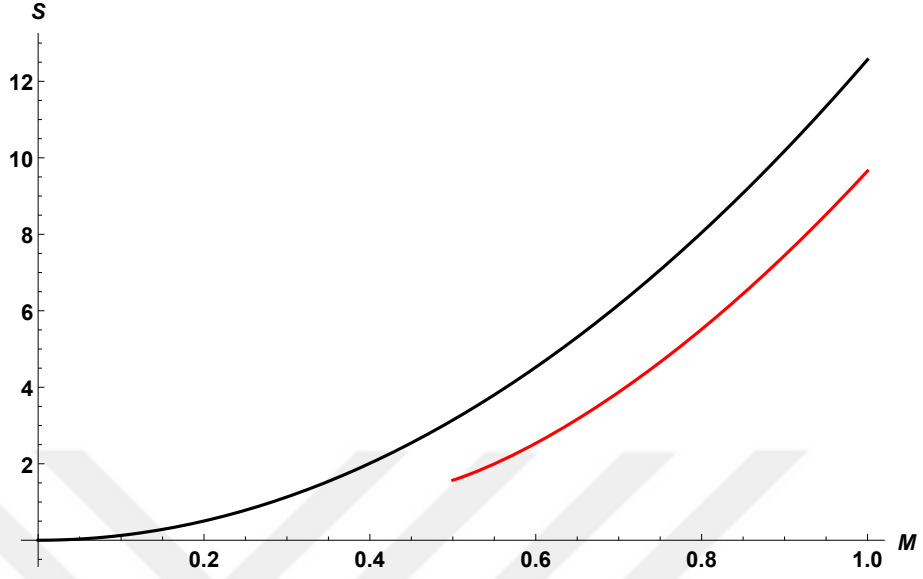
da $C = c^2 dM/dT$ ifadesini kullanarak verebiliriz:

$$C = -\frac{8\pi k_B M^2}{M_P^2}, \quad (2.17)$$

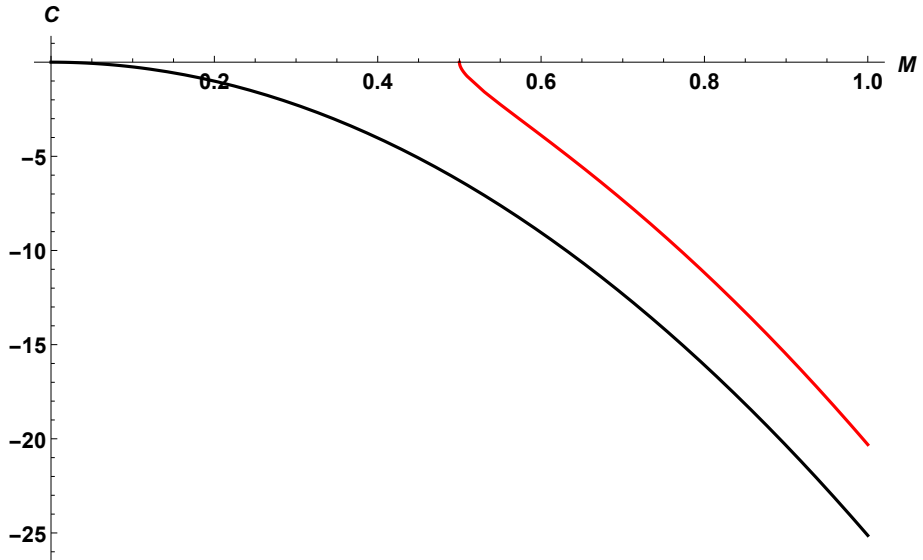
$$C_{GBP} = \pi k_B \beta \sqrt{1 - \frac{\beta M_P^2}{4M^2}} \left(\sqrt{1 - \frac{\beta M_P^2}{4M^2}} - 1 \right)^{-1}. \quad (2.18)$$

Şekil 2.3., **Şekil 2.4.** ve **Şekil 2.5.**'te verilen grafiklerde Schwarzschild kara deliğinin standart ve GBP modifiye termodinamik nicelikleri gösterilmektedir. **Şekil 2.3:**'te standart ve modifiye Hawking sıcaklıkları gösterilmektedir. GBP etkileri göz önüne alındığında sıcaklık standart duruma göre artmaktadır. Bu artış özellikle kara deliğin kütlesi Planck kütlesine yaklaştığında daha açıktır. Ayrıca standart durumdan farklı olarak Hawking ışıması iraksamamaktadır ve süreç maksimum bir sıcaklıkla sonlanmaktadır. Daha büyük kütle değerleri için kuantum kütleçekim etkileri ihmal edilebileceğinden GBP modifiye Hawking sıcaklığı standart durumdakine benzer bir davranış gösterir.

Şekil 2.4:'te standart ve modifiye entropiler görülebilir. GBP modifikasyonu entropide azalmaya neden olmaktadır. Benzer şekilde küçük kütle değerleri durumunda kuantum kütle çekim etkileri baskın hale geldiğinden modifiye entropi standart durumdan farklıdır.



Şekil 2.4: Standart (siyah) ve GBP modifiye (kırmızı) entropilerin kütleyle göre değişimi.
 $\beta = k_B = M_P = 1$ alınmıştır.



Şekil 2.5: Standart (siyah) ve GBP modifiye (kırmızı) ısı sığalarının kütleyle göre değişimi.
 $\beta = k_B = M_P = 1$ alınmıştır.

Şekil 2.5:'te standart ve modifiye ısı sığaları verilmiştir. Isı sığaları büyük kütle değerleri için benzer davranışlar gösterirken, modifiye ısı sığası $M = 0,5$ için sıfırdır. Yani bu kütle değerinde kara delik çevresiyle herhangi bir ısı alışverişi gerçekleştirilmemektedir.

(2.14), (2.16) ve (2.18) numaralı denklemler bir $M_{min} = \sqrt{\beta}M_P/2$ kütesinden daha küçük değerler için tanımlı değildir. Özellikle ısı sığası bu minimum kütle değeri için sıfır olurken, sıcaklık en büyük değerine ulaşmaktadır. Süreç sonunda temel bir parçacık gibi davranan bir kalıntı ortaya çıkmaktadır. Bu türde bir kalıntının karanlık madde adaylarından birisi olduğu düşünülmektedir.

2.2.2. Xiang ve Wen Modifikasyonu

Bu bölümde Xiang ve Wen tarafından önerilen [3] yaklaşımı ele alacağız. Bu yaklaşım küresel simetrik kara deliklerin yanı sıra dönen kara deliklerde de geçerlidir (Bu alt bölüm boyunca $c = G = k_B = 1$ alınmıştır).

Şimdi kara delik TBY'sini düşünelim. Genel formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$dM = TdS + \sum_i Y_i dy_i. \quad (2.19)$$

Burada y_i 'ler kara deliğin elektrik yükü ya da açısal momentum gibi niceliklerine karşı gelirken, Y_i 'ler ise elektrik potansiyeli ya da açısal hız gibi eşlenik niceliklere karşı gelmektedir. Yarıklasik çerçevede bir kara deliğin sıcaklığı yüzey kütleçekimi κ ile orantılı olarak verilebilir:

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}. \quad (2.20)$$

Bu sıcaklığa karşı gelen entropi ise kara deliğin yüzey alanı ile orantılı olarak verilir:

$$S = \frac{A}{4\hbar}. \quad (2.21)$$

(2.19), (2.20) ve (2.21) denklemleri kullanılırsa, sıcaklığı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{y_i} = \frac{dA}{dS} \times \left(\frac{\partial M}{\partial A} \right)_{y_i} = \frac{dA}{dS} \times \frac{\kappa}{8\pi}. \quad (2.22)$$

Bir parçacık kara delik tarafından soğurulduğunda, ufkun dışındaki gözlemci parçacık hakkında bilgi alamaz. Diğer taraftan Kerr-Newmann kara deliğinin alanındaki en küçük artış [53]

$$\Delta A \sim b\mu \quad (2.23)$$

ile verilir. Burada b parçacığın çapıdır ve μ kütesidir. İnfomasyon teorisine göre, bilginin kaybı bir bittir. Yani $(\Delta S)_{min} = \ln 2$. Şimdi ΔA 'nın en küçük değerini belirlemek için b ve μ üzerindeki sınırlamayı düşünmeliyiz. Kuantum mekaniğinde bir parçacık dalga paketleri ile tanımlanır ve belirli bir yörüngesi yoktur. Bir dalga paketinin genişliği konum belirsizliği ile tanımlanabilir. Yani parçacığın çapı ile ilişkilendirebiliriz, $b \sim \Delta x$. Ayrıca parçacığın momentum belirsizliği $\Delta p \leq \mu$ sınırlamasına sahiptir. Diğer durumda görelilik etkiler parçacığın bir çiftinin yaratılmasına neden olur ve ölçüm anlamsız olur. Böylece alanın değişimi

$$\Delta A \sim b\mu \geq \Delta x \Delta p \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilebilir. Açıkça alandaki en küçük artış belirsizlik ilkesi ile sınırlanmaktadır.

Şimdi statik ve küresel simetrik bir kara delik çözümünü düşünelim:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.25)$$

Kara deliğin olay ufku $f(r_H) = 0$ ile belirlenir. GBP'yi göz önünde bulundurursak kara deliğin olay ufkunu konumun belirsizliği

$$2r_H \geq \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \frac{\beta}{\hbar} \Delta p \quad (2.26)$$

ile ilişkili olarak yazabiliriz. (2.2) ifadesi kullanılırsa momentum belirsizliği üzerindeki kısıtlamayı

$$\frac{\hbar}{\beta} \left(r_H - \sqrt{r_H^2 - \beta} \right) \leq \Delta p \leq \frac{\hbar}{\beta} \left(r_H + \sqrt{r_H^2 - \beta} \right) \quad (2.27)$$

olarak yazabiliriz. Böylece Δx ile Δp belirsizliklerinin çarpımını aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{2\hbar}{\beta} \left(r_H^2 - r_H \sqrt{r_H^2 - \beta} \right) = \hbar_{eff}. \quad (2.28)$$

Burada Δp 'nin alt sınırını kullandık. Yukarıdaki eşitsizliği etkin Planck sabiti \hbar_{eff} 'yi tanımlayarak Heisenberg belirsizliği şeklinde yazdık. Dolayısıyla alandaki artışı

$$\Delta A \geq \alpha \hbar_{eff} = \frac{2\alpha\hbar}{\beta} \left(r_H^2 - r_H \sqrt{r_H^2 - \beta} \right) \quad (2.29)$$

olarak yazabiliriz. Burada α standart sonuçlarla karşılaştırma sonucunda elde edilecek olan kalibrasyon çarpanıdır. Parçacık kara delik tarafından yutulursa, bir bitlik bir bilgi kaybolur ve kara deliğin entropisindeki artış $(\Delta S)_{min} = \ln 2$ olur. Ayrıca kara delik ufkunun alanındaki en küçük artış (2.29) ile verilebilir. Dolayısıyla

$$\frac{dA}{dS} \simeq \frac{(\Delta A)_{min}}{(\Delta S)_{min}} = \frac{2\alpha\hbar}{\beta \ln 2} \left(r_H^2 - r_H \sqrt{r_H^2 - \beta} \right) \quad (2.30)$$

elde edilir. (2.22) numaralı denklemden kara deliğin sıcaklığını

$$T_{GBP} \simeq \frac{\kappa}{8\pi} \times \frac{2\alpha\hbar}{\beta \ln 2} \left(r_H^2 - r_H \sqrt{r_H^2 - \beta} \right) \quad (2.31)$$

bulabiliriz. Burada bulduğumuz sonuç standart çerçeveden farklıdır. Standart çerçeve içerisinde kara deliğin sıcaklığı sadece yüzey kütle çekimi ile orantılıdır. GBP modifiye durum için sıcaklık yüzey kütleçekimi dışında kara deliğin büyüklüğüyle de ilişkilidir. $\beta \rightarrow 0$ limitinde $T = \hbar\kappa/2\pi$ sonucunu vermesi gerektiğinden $\alpha = 4 \ln 2$ olmalıdır. Böylece

$$T_{GBP} = \frac{\hbar_{eff}\kappa}{2\pi} \quad (2.32)$$

bulunur.

Bir kara deliğin entropisini

$$S = \int \frac{dS}{dA} dA = \int \frac{(\Delta S)_{min}}{(\Delta A)_{min}} dA \quad (2.33)$$

şeklinde elde edebiliriz. (2.30) denklemini kullanırsak kara deliğin GBP modifiye entropisi

aşağıdaki gibi verilebilir:

$$S_{GBP} = \frac{1}{4} \int \frac{dA}{\hbar_{eff}} = \frac{\pi}{\hbar} \int \left(r_H + \sqrt{r_H^2 - \beta} \right) dr_H = \frac{\pi}{2\hbar} \left[r_H^2 + r_H \sqrt{r_H^2 - \beta} - \beta \ln \left(r_H + \sqrt{r_H^2 - \beta} \right) \right]. \quad (2.34)$$

Bir kara deliğin ısı sığası

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (2.35)$$

ile tanımlıdır. Dolayısıyla modifiye ısı sığasını

$$C_{GBP} = \frac{\hbar_{eff} \kappa}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial T} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \hbar_{eff}}{\partial A} + \hbar_{eff} \kappa^{-1} \frac{\partial \kappa}{\partial A} \right)^{-1} \quad (2.36)$$

şeklinde elde edebiliriz. Burada

$$\frac{\partial \hbar_{eff}}{\partial A} = \frac{1}{8\pi r_H} \frac{\partial \hbar_{eff}}{\partial r_H} = -\frac{\Delta \hbar}{4g} \quad (2.37)$$

olarak hesaplanabilir. $\Delta \hbar_{eff} = \hbar_{eff} - \hbar$, $g = g(r_H) = \pi r_H \sqrt{r_H^2 - \beta}$ olarak tanımlanmıştır.

Böylece ısı sığasını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$C_{GBP} = Cg \left[\frac{\hbar_{eff}}{\hbar} g - C\Delta \hbar \right]^{-1}. \quad (2.38)$$

Burada C standart ısı sığasını göstermektedir ve (2.35) göz önüne alırsa

$$C = (4\hbar)^{-1} \kappa \frac{\partial A}{\partial \kappa} \quad (2.39)$$

şeklinde yazılabilir.

Buraya kadar statik ve küresel simetrik kara deliklerin termodinamik özelliklerinin GBP çerçevesinde modifikasyonunu verdik. Şimdi dönen kara delikleri düşünelim. M kütleli, Q yüklü ve J açışal momentumuna sahip bir Kerr-Newmann kara deliğinin TBY'si aşağıdaki gibi verilir:

$$dM = TdS + \phi dQ + \Omega dJ. \quad (2.40)$$

Burada açıl momentum $J = aM$ şeklinde tanımlanabilir ve a kütle başına açıl momentumdur. Kara delik ufkunun yüzey alanı $A = 4\pi\sqrt{r_H^2 + a^2}$ şeklindedir. Boyer-Lindquist koordinatlarında olay ufku

$$r_H = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \quad (2.41)$$

olarak verilir.

ρ_0 karakteristik bir büyüklük olmak üzere, statik ve küresel simetrik bir kara delik için konumun belirsizliğini $\Delta x \leq 2\rho_0 = 2r_H$ olacak şekilde ilişkilendirdik. Yani ρ_0 'ı r_H ile ilişkilendirdik. Peki dönen kara deliklerde de aynı şekilde düşünebilir miyiz? İlk başta dönen kara delikler için $\rho_0 = r_H$ seçmek doğal gözükebilir. Fakat Boyer-Lindquist koordinatları kutupsal koordinatlardan farklıdır. Dolayısıyla Kerr-Newmann kara deliğinin geometrisi küresel değildir. $\rho_0 = \sqrt{r_H^2 + a^2}$ olarak seçmek daha uygundur.

Bu seçimi yapmak için bir başka iyi neden termodinamik bakış açısından elde edilebilir. r_H 'nin yerine ρ_0 koyarak (2.26)'dan (2.30)'a süreci tekrarlırsak,

$$\frac{(\Delta A)_{min}}{(\Delta S)_{min}} = \frac{2\alpha\hbar}{\beta \ln 2} \left(\rho_0^2 - \rho_0 \sqrt{\rho_0^2 - \beta} \right) \quad (2.42)$$

elde ederiz. Kerr-Newmann kara deliğinin olay ufku kullanılırsa (2.42) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{(\Delta A)_{min}}{(\Delta S)_{min}} = \frac{\alpha\hbar}{2\pi\beta \ln 2} \left[A - 4\pi a^2 - \sqrt{(A - 4\pi a^2 - 2\beta\pi)^2 - 4\beta^2\pi^2} \right]. \quad (2.43)$$

Bu entropinin A ve a niceliklerine bağlı olduğunu ima eder. Bu durum Bekenstein'in entropinin alanın fonksiyonu olması gerektiği varsayımıyla çelişmektedir [53]. Üstelik termodinamik içerisinde çelişki gösterir. $S = S(A, a)$ olduğunu varsayarsak

$$dS = \frac{\partial S}{\partial A} dA + \frac{\partial S}{\partial a} da = \frac{\partial S}{\partial A} dA + M^{-1} \frac{\partial S}{\partial a} (dJ - adM) \quad (2.44)$$

elde edilir. Tersinir bir süreç için kara deliğin alanı değişmez, $dA = 0$. Kerr-Newmann kara deliğinin TBY'si

$$dM = \phi dQ + \Omega dJ \quad (2.45)$$

şekline indirgenir. Böylece yukarıdaki ifadeyi kullanırsak (2.44) şeklinde yazılır:

$$dS = M^{-1} \frac{\partial S}{\partial a} [(1 - a\Omega)dJ - a\phi dQ]. \quad (2.46)$$

Eğer $(\partial S/\partial a)_A \neq 0$ ise $dS \neq 0$ olduğunu ima eder. Yani entropi bu tür bir tersinir süreç için invaryant değildir. Bu da çelişkiye neden olur. Bu çelişki ρ_0 'ın r_H seçilmesinden kaynaklanmaktadır.

Yukarıdaki tartışmadan S ve A niceliklerinin tersinir bir süreçte değişmemesi için ρ_0 'ın da değişmemesi gerektiği sonucunu çıkarabiliriz. (2.42) ifadesini tekrar düşünürsek, kara delik entropisini $S = S(A, \rho_0)$ şeklinde ifade edebiliriz. Böylece

$$dS = \frac{\partial S}{\partial A} dA + \frac{\partial S}{\partial \rho_0} d\rho_0 \quad (2.47)$$

olarak yazabiliriz. $\rho_0 = \sqrt{r_H^2 + a^2}$ olduğunu göz önünde bulundurursak, yukarıdaki ifadeyi

$$dS = \frac{\partial S}{\partial A} dA + \frac{\partial S}{\partial \rho_0} \frac{1}{\rho_0} [r_H dr_H + ada] \quad (2.48)$$

olarak yazabiliriz. Diğer taraftan Kerr-Newmann kara deliğinin entropisini

$$S = \pi(r_H^2 + a^2) \quad (2.49)$$

olarak yazılır. Entropinin tam diferansiyelini ise

$$dS = 2\pi(r_H dr_H + ada) \quad (2.50)$$

şeklinde yazabiliriz. Tersinir bir süreç için $dS = 0$ olduğundan (2.50)'den $r_H dr_H + ada = 0$ sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla tersinir bir süreç için (2.48) numaralı ifade için $dS = 0$ olur. Yani $\rho_0 = \sqrt{r_H^2 + a^2}$ seçilirse, tersinir bir süreç için invaryant kalmaktadır.

Şimdi daha önceden yaptığımızı benzer şekilde Kerr-Newmann kara deliğinin GBP modifiye termodinamik özelliklerini verelim. Sırasıyla modifiye sıcaklık, entropi ve ısı sığası aşağıdaki gibi verilir:

$$T_{GBP} = \frac{\hbar_{eff} \kappa}{2\pi}, \quad (2.51)$$

$$S_{GBP} = \frac{\pi}{2\hbar} \left[\rho_0^2 + \rho_0 \sqrt{\rho_0^2 - \beta} - \beta \ln \left(\rho_0 + \sqrt{\rho_0^2 - \beta} \right) \right], \quad (2.52)$$

$$C_{GBP} = Cg \left[\frac{\hbar_{eff}}{\hbar} g - C\Delta\hbar \right]^{-1}. \quad (2.53)$$

Burada

$$\rho_0 = \sqrt{r_H^2 + a^2}, \quad (2.54)$$

$$\hbar_{eff} = \frac{2\hbar}{\beta} \left(\rho_0^2 - \rho_0 \sqrt{\rho_0^2 - \beta} \right), \quad (2.55)$$

$$g = \pi\rho_0 \sqrt{\rho_0^2 - \beta} \quad (2.56)$$

olarak verilir. C ile Kerr-Newmann kara deliğinin standart ısı sığası gösterilmektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$C = \frac{2\pi\rho_0^2(r_H - M)}{3M + a^2/M - 2r_H}. \quad (2.57)$$

Bu alt bölümde ele aldığımız yaklaşımı tezin ilerleyen bölümlerinde kullanacağız. Özellikle vdW kara deliğinin modifiye çözümünün elde edilmesinde ve Friedmann denklemlerinin modifiye olarak elde edilmesinde burada ele aldığımız yaklaşım kullanılacaktır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. VAN DER WAALS KARA DELİĞİNİN ÇÖZÜMÜ

AdS uzayzamanındaki kara deliklerin termodinamiği literatürde geniş bir şekilde ele alınmaktadır. Hawking ve Page tarafından yayınlanan öncü makalede Schwarzschild AdS kara deliği ile termal AdS uzayı arasında birinci dereceden bir faz geçişi bulunmuştur [59]. Daha sonra AdS uzayzamanındaki yüklü ya da dönen kara delikleri ele alan çalışmalarda vdW akışkanlarına benzer bir faz geçişi gözlenmiştir. [60, 61] numaralı makalelerde yüklü AdS kara deliğinin termodinamik özellikleri çalışılmıştır ve bu kara deliklerin vdW akışkanlarına benzer bir şekilde birinci dereceden küçük-büyük kara delik faz geçişine sahip olabileceği gösterilmiştir. Bu tür bir faz geçişi kozmolojik sabit Λ 'nın termodinamik basınç P olarak düşünüldüğü durumda daha açık hale gelmektedir. Kozmolojik sabitin termodinamik basınç ile ($G = \hbar = c = k_B = 1$ alınmıştır.)

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad (3.1)$$

şeklinde ilişkilendirilmesi durumunda termodinamik hacim

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,Q,J} \quad (3.2)$$

olarak verilir.⁴

Yüklü AdS kara deliğinin termodinamiği ve faz geçişi Kubiznak ve Mann tarafından çalışılmıştır [4]. Yüklü AdS kara deliği için birinci mertebeye küçük-büyük kara delik faz geçişinin vdW akışkanlarıyla aynı karakteristik davranışa sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca yüklü AdS kara deliğinin vdW akışkanlarıyla aynı kritik üstellere sahip olduğu bulunmuştur.⁵

⁴ Kozmolojik sabitin termodinamik bir değişken olarak kara deliklerin TBY'sinde düşünülmesi genişletilmiş faz uzayı olarak adlandırılmaktadır. Kozmolojik sabitin ve eşlenik niceliğinin kara deliklerin TBY'sinde düşünülmesinin daha iyi sonuçlar verdiği anlaşılmıştır. Özellikle Smarr ilişkisinde uyumluluk için değişken kozmolojik sabit fikrine gereksinim vardır. Ayrıca kozmolojik sabitin basınçla ilişkilendirildiği durumda AdS uzayzamanındaki kara deliklerin kütlelerini doğrudan entalpi ile ilişkilendirmek mümkündür [62].

⁵ Literatürde genişletilmiş faz uzayında çok sayıda çalışma yapılmıştır. Değişen kozmolojik sabitin basınçla ilişkilendirilmesi durumunda kara delik ısı çevrimlerini [63], Joule-Thomson genişlemesini [64, 65] ve kara deliklerin

vdW akışkanları ile AdS uzayzamanındaki kara deliklerin arasındaki bu benzerlik dolayısıyla Rajagopal ve diğ. vdW akışkanlarıyla aynı termodinamik özelliklere sahip bir kara delik çözümü elde etmişlerdir [5]. Elde ettikleri kara delik çözümünü vdW kara deliği olarak adlandırmışlardır. Çözümlerine karşı gelen stres-enerji tensörünü de tartışmışlardır. Buldukları stres-enerji tensörü çözümün belirli bir bölgesi için enerji şartlarını sağlamaktadır. Buldukları çözüm genelde ufuk civarında fiziksel olarak anlamlıdır.

[5] numaralı referanstaki yöntemi izleyerek belirli bir hal denkleminin termodinamiğine sahip bazı AdS kara delik çözümleri elde edilmiştir. Delsate ve Mann vdW kara deliğinin yüksek boyutlardaki çözümünü elde etmişlerdir [70]. Upadhyay ve Pourhassan termal dalgalanma etkilerini içerecek şekilde yüksek boyutlu vdW kara deliklerinin modifiye çözümünü elde etmişlerdir [71]. Setare ve Adami Polytropic gazlarla aynı termodinamik özelliklere sahip Polytropic kara delik çözümünü elde etmişlerdir [72]. İlginç çözümlerden birisi de Abchouyeh ve diğ. tarafından düşük basınç limitinde önerilen Anyon vdW akışkanlarıyla aynı termodinamik özelliklere sahip Anyon kara delik çözümüdür [73]. Anyonlar Fermi-Dirac ve Bose-Einstein istatistikleri arasında bulunan parçacıklardır. Anyon kara deliğinin tam çözümü Xu tarafından elde edilmiştir [74]. Son olarak Debnath ise modifiye Chaplygin gazıyla aynı termodinamik özelliklere sahip bir kara delik çözümü elde etmiştir [75].

Bu bölümde vdW kara deliğinin çözümü incelenecektir. Çözümü elde etmeden önce vdW hal denklemini hakkında bilgi verelim. İdeal gaz denkleminin genelleştirilmiş bir versiyonu olan vdW aşağıdaki gibi verilebilir:

$$P = \frac{T}{v - b} - \frac{a}{v^2}. \quad (3.3)$$

Burada $v = V/N$ spesifik hacimdir. $a > 0$ parçacıklar arasındaki etkileşimin bir ölçüsüyken, $b > 0$ parçacıkların hacminin bir ölçüsüdür. (3.3) ile aynı hal denklemine sahip bir kara delik çözümü elde etmek için aşağıda verilen küresel simetrik metriği düşünüyoruz:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.4)$$

sıkıştırılabilirliğini [66] düşünmek mümkündür. Daha fazla ayrıntı için [67, 68] numaralı referanslardaki derlemelere ve [69] numaralı referanstaki teze bakınız.

$$f = \frac{r^2}{l^2} - \frac{2M}{r} - g(r, P). \quad (3.5)$$

Burada l AdS yarıçapıdır ve $g(r, P)$ belirli şartlar altında belirlenecek olan bir fonksiyondur. (3.5)'in belirli bir stres enerji tensörü $T_{\mu\nu}$ için $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ ile verilen Einstein alan denkleminin bir çözümü olması gereklidir. Bunun için düşünülen stres enerji tensörü anizotropik akışkan kaynağıdır ve aşağıdaki gibi verilebilir:

$$T^{\mu\nu} = \rho e_0^\mu e_0^\nu + \sum_i p_i e_i^\mu e_i^\nu. \quad (3.6)$$

Burada e_i^μ , ρ ve p_i sırasıyla vielbein bileşenleri ($i = 1, 2, 3$), enerji yoğunluğu ve basınçtır. Kullandığımız metrik yaklaşımı için anlamlı bir stres enerji tensörüne ihtiyacımız var. Çözümümüze karşılık gelen stres enerji tensörü zayıf, güçlü ve baskın enerji şartlarını sağlaması gerekir. Bu enerji şartlarını metrik çözümünü belirledikten sonra ρ ve p_i için inceleyeceğiz. Einstein alan denklemleri kullanılırsa (Ayrıntı için EK 1'e bakınız.) ρ ve p_i aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\rho = -p_1 = \frac{1 - f - rf'}{8\pi r^2} + P, \quad (3.7)$$

$$p_2 = p_3 = \frac{rf'' + 2f'}{16\pi r} - P. \quad (3.8)$$

Yukarıdaki ifadelerde AdS yarıçap ile termodinamik basınç arasındaki

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2} \quad (3.9)$$

ilişkisi kullanılmıştır.

Ayrıca (3.5) ile verilen metrik yaklaşımıyla kara deliğin kütlesi $f(r_H) = 0$ 'dan aşağıdaki gibi elde edilir:

$$M = \frac{4}{3}\pi r_H^3 P - \frac{g(r_H, P)r_H}{2}. \quad (3.10)$$

Kara deliğin sıcaklığı ise

$$T = \frac{f'(r_H)}{4\pi} = 2r_H P - \frac{g(r_H, P)}{4\pi r_H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial g(r_H, P)}{\partial r_H} \quad (3.11)$$

olarak hesaplanabilir. Öte yandan kara deliğin spesifik hacmini [67]

$$v = \frac{V}{N} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada A kara deliğin yüzey alanı olmak üzere $N = \frac{4(n-1)}{n-2}A$ şeklinde tanımlanır. $n = 4$ boyut için spesifik hacim aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v = \frac{3}{2\pi r_H^2} \left[\frac{4}{3}\pi r_H^3 - \frac{r_H}{2} \frac{\partial g(r_H, P)}{\partial P} \right]. \quad (3.13)$$

Şimdi (3.3) ve (3.11) denklemlerinin karşılaştırılması ile

$$2r_HP - \frac{g}{4\pi r_H} - \frac{g'}{4\pi} - \left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = 0 \quad (3.14)$$

bulunur. Burada (3.13) kullanılmıştır. Bu kısmi türevli diferansiyel denklem bize $g(r, P)$ için gerekli çözümü sağlayacaktır.

Şimdi (3.14) denklemini çözmek için $g(r, P)$ 'yi aşağıdaki gibi seçelim:

$$g(r, P) = B(r) - PD(r). \quad (3.15)$$

Bu seçimle (3.14) ile verdiğimiz kısmi türevli diferansiyel denklem $F_1(r) + F_2(r)P = 0$ şekline indirgenir. Burada $F_1(r)$ ve $F_2(r)$ fonksiyonları $B(r)$ ve $D(r)$ fonksiyonlarına ve bunların türevlerine bağlıdır. Çözüm elde edebilmek için $F_1(r)$ ve $F_2(r)$ ifadelerinin ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir. $F_1(r)$ ve $F_2(r)$ aşağıdaki gibi verilir:

$$F_1(r) = b - \frac{D}{2\pi r_H} + \frac{D'}{4\pi} = 0, \quad (3.16)$$

$$F_2(r) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{B}{r_H} + B' \right) - \frac{4\pi r_H a}{8\pi r_H^2 + 3D} \left(1 - \frac{4\pi r_H b}{(8\pi r_H^2 + 3D)^2} \right) = 0. \quad (3.17)$$

$F_1(r)$ çözümlerse D aşağıdaki gibi elde edilir:

$$D = 4\pi br + C_1 r^2. \quad (3.18)$$

C_1 integrasyon sabitidir ve sıfır seçiyoruz. Şimdi (3.18), $F_2 = 0$ ifadesinde kullanılırsa

$$B = -2\pi a + \frac{3\pi ab^2}{r(3b+2r)} + \frac{4\pi ab}{r} \ln[3b+2r] - \frac{3\pi ab}{r} + \frac{C_2}{r} \quad (3.19)$$

olarak B bulunur. C_2 integrasyon sabitidir ve $C_2 = 4\pi ab \ln r_0 + 3\pi ab$ olarak seçilmiştir. Burada r_0 uzunluk boyutunda integrasyon sabitidir ve kolaylık için $r_0 = 2b$ seçebiliriz. Tekrar (3.18) ve (3.19) çözümlerini yazalım:

$$B = -2\pi a + \frac{3\pi ab^2}{r(3b+2r)} + \frac{4\pi ab}{r} \left(\ln \left[\frac{r}{b} + \frac{3}{2} \right] \right), \quad (3.20)$$

$$D = 4\pi br. \quad (3.21)$$

Böylece (3.20) ve (3.21) ifadeleri (3.5) içerisinde kullanılırsa vdW metrik ifadesi

$$f = 2\pi a - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2} \left(1 + \frac{3b}{2r} \right) - \frac{3\pi ab^2}{r(2r+3b)} - \frac{4\pi ab}{r} \ln \left(\frac{r}{b} + \frac{3}{2} \right) \quad (3.22)$$

şeklinde elde edilir. Dikkat edilirse $a > 0$ olması yani akışkan moleküllerinin birbirini çekmesini ima etmektedir. Bu durum vdW kara deliğinin küresel ufuk topolojisini ima etmektedir. Genelliği kaybetmeden $a = 1/2\pi$ seçilebilir.

Şimdi enerji şartlarını inceleyelim. Öncelikle (3.7) ve (3.8) ifadelerinde (3.22) ifadesini kullanarak ρ ve p_i ifadelerini elde edelim:

$$\rho = -p_1 = \frac{1}{8r^2} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{8r [a(b+r) + bP(3b+2r)^2]}{(3b+2r)^2} \right), \quad (3.23)$$

$$p_2 = p_3 = \frac{b [a(3b+4r) + P(3b+2r)^3]}{2r(3b+2r)^3}. \quad (3.24)$$

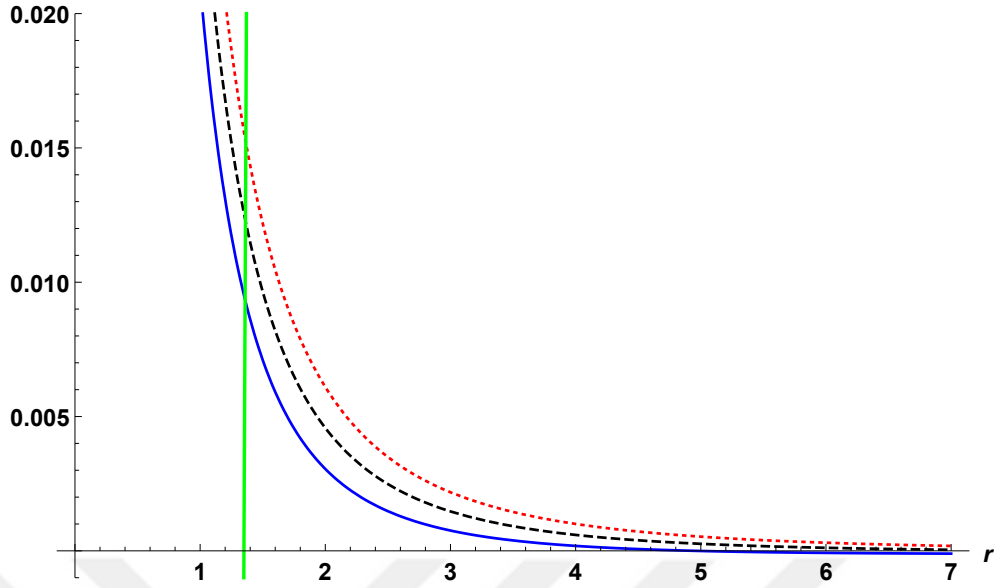
Enerji şartları anizotropik stres enerji tensörü için (EK 2'ye bakınız.)

$$\text{Zayıf :} \quad \rho \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0, \quad (3.25)$$

$$\text{Guclu :} \quad \rho + \sum_i p_i \geq 0 \quad \rho + p_i > 0, \quad (3.26)$$

$$\text{Baskin :} \quad \rho \geq 0, \quad \rho \geq |p_i|. \quad (3.27)$$

olarak verilir [76]. **Şekil 3.1:**'de enerji şartları kontrol edilmektedir. Şekilde sadece küçük basınç durumu için tüm enerji şartlarının olay ufku civarında sağlandığı görülebilir. Daha



Şekil 3.1: ρ enerji yoğunluğu (siyah kesikli eğri), $\rho + p_2$ (kırmızı noktalı eğri) ve $\rho - p_2$ (mavi eğri), $r_H = 1,35$ için yeşil eğri ile olay ufku gösterilmektedir. x eksen radyal koordinat r 'yi göstermektedir. $a = 1/2\pi$, $b = 1$, $P = 0,001$ ve $M = 0,1$ alınmıştır.

büyük r değerleri için enerji şartları ihlal edilir. Dolayısıyla vdW kara delik çözümü olay ufku civarında fiziksel olarak anlamlı bir çözümdür.

3.2. FRIEDMANN DENKLEMLERİNİN GÖRÜNÜR UFUKTAKİ TERMODİNAMİĞİN BİRİNCİ YASASINDAN TÜRETİLMESİ

1970'li yıllardan beri kara deliklerin termodinamik bir sistem olarak ele alınmasıyla kütleçekimi ve termodinamik yasalar arasındaki temel ilişkiler bilinmektedir [52–57]. Bir kara delik yüzey alanı ile orantılı entropiye ve yüzey kütleçekimi ile orantılı sıcaklığa sahiptir. Buna dayanarak Jacobson, Einstein alan denklemini hal denklemi olarak düşünmüştür [77]. Clausius ilişkisi $\delta Q = TdS$ aracılığıyla alan denklemlerini türetmiştir. Burada δQ enerji akısı, S ufkun yüzey alanı ile orantılı entropi ve T ise ufuk içerisinde ivmelenen gözlemcinin ölçtüğü Unruh sıcaklığıdır. Daha sonra literatürde ufuk termodinamiği ile kütleçekimi arasındaki ilişkiyi araştıran çok sayıda çalışma yapılmıştır [6, 7, 40, 41, 78–91]. Cai ve Kim görünür ufkun birinci yasasından ($-dE = T_H dS_H$) $(n + 1)$ boyuttaki Friedmann denklemlerini elde etmişlerdir [6]. Burada $-dE$ sabit ufuk yarıçapı için çok küçük bir zaman aralığında görünür ufkuktaki enerji akısı olarak düşünülebilir. Görünür ufkun sıcaklığı ve entropisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Bu bölümde $G = \hbar = k_B = c = 1$

alınmıştır.):

$$T_H = \frac{1}{2\pi\tilde{r}_A}, \quad S_H = \frac{A}{4}. \quad (3.28)$$

Burada \tilde{r}_A görünür ufkun yarıçapıdır. Ayrıca Gauss-Bonnet ve Lovelock kütleçekim teorileri için karşı gelen entropi-alan formüllerini kullanarak bu teoriler için de Friedmann denklemlerini türetmişlerdir. Akbar ve Cai benzer şekilde skaler tensör ve $f(R)$ kütleçekim teorileri için Friedmann denklemlerini elde etmişlerdir [80].

Friedmann denklemlerini (3.28) ile verilen sıcaklıkla türetmek mümkün olmasına rağmen, sıcaklık ufkun yüzey kütleçekimi κ ile orantılı değildir. Gerçekte (3.28) ile verilen sıcaklık hal denklemleri üzerinde bir sınırlama getirir. Bu durumda hal denklemleri $p \approx -\rho$ olur. Yani boşluk enerjisi ya da de Sitter uzayını ima eder. Görünür ufkun sıcaklığını $T_H = \kappa/2\pi$ ve entropisini $S = A/4$ varsayarak, Akbar ve Cai Friedmann denklemlerinin diferansiyel formunun görünür ufkun TBY'si olarak yazılabileceğini göstermişlerdir [7]. Görünür ufkun TBY'si aşağıdaki gibi yazılır:

$$dE = T_H dS_H + W dV. \quad (3.29)$$

Burada iş yoğunluğu W , enerji yoğunluğu ρ ve basınç p cinsinden verilir. $E = \rho V$ olarak tanımlanır ve görünür ufkun içerisindeki toplam enerjidir. V ise görünür ufkun hacmidir.

3.2.1. $(n+1)$ Boyutlu Friedmann Denklemlerinin Türetilmesi

Bu bölümde Akbar ve Cai tarafından önerilen yöntemi ele alacağız [7]. $(n+1)$ boyuttaki Friedmann-Robertson-Walker (FRW) evreni için metrik aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1-kr^2} + a^2(t) r^2 d\Omega_{n-1}^2. \quad (3.30)$$

Burada $a(t)$ ölçek çarpanı olarak adlandırılır. $d\Omega_{n-1}$ ise $(n-1)$ boyuttaki birim kürenin metriğidir. k sabiti 0, 1, -1 değerlerini alır ve bu durum düz, kapalı ve açık evrene karşılık gelir. (3.30) ile verilen metriği daha kompakt biçimde yazabiliriz:

$$ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b + \tilde{r} d\Omega^2. \quad (3.31)$$

Burada $\tilde{r} = a(t)r$ ve $x^a = (t, r)$ şeklinde verilir. $h_{ab} = \text{diag}(-1, a^2/(1-kr^2))$ iki boyutlu metriktir. Görünür ufku $h^{ab}\partial_a\tilde{r}\partial_b\tilde{r} = 0$ bağıntısından elde edebiliriz. Görünür ufuk

$$\tilde{r}_A = ar = \frac{1}{\sqrt{H^2 + k/a^2}}, \quad (3.32)$$

şeklinde bulunur. Burada $H = \dot{a}/a$ ile verilir ve Hubble parametresi olarak adlandırılır. Şimdi evrendeki maddeyi ideal akışkan olarak düşünersek stres enerji tensörünü

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada u_μ dört hız vektörüdür. Enerji korunum yasası ($T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$) kullanılırsa süreklilik denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$\dot{\rho} + nH(\rho + p) = 0. \quad (3.34)$$

İş yoğunluğu W aşağıdaki gibi tanımlanır [92]:

$$W = -\frac{1}{2}T^{ab}h_{ab} = \frac{1}{2}(\rho - p). \quad (3.35)$$

Burada T_{ab} , $T_{\mu\nu}$ tensörünün normal doğrultudaki izdüşümüdür.

Şimdi görünür ufuk için TBY'yi düşünelim. (3.29) ile verilen TBY'nin terimlerini hesaplayalım. dE terimi dt zaman aralığı için enerjideki değişimi gösterir. E ufuk içerisindeki maddenin toplam enerjisi olduğunu ve $E = \rho V$ şeklinde verildiğini hatırlarsak

$$dE = \rho dV + Vd\rho = 4\pi\rho\tilde{r}_A^2 d\tilde{r}_A - 4\pi(\rho + p)\tilde{r}_A^3 Hdt, \quad (3.36)$$

yazabiliriz. Burada $V = \Omega_n \tilde{r}_A^n$ ve $\Omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n/2)+1)}$ olarak verilir. Süreklilik denklemi kullanılırsa dE

$$dE = n\Omega_n \tilde{r}_A^{n-1} \rho d\tilde{r}_A - n\Omega_n \tilde{r}_A^n (\rho + p)Hdt \quad (3.37)$$

şeklinde elde edilir.

(3.29)'daki WdV terimini (3.35)'i kullanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$WdV = \frac{1}{2}n\Omega_n\tilde{r}_A^{n-1}(\rho - p)d\tilde{r}_A. \quad (3.38)$$

Şimdi $T_H dS_H$ terimini hesaplayalım. Ufkun sıcaklığı T_H

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.39)$$

olarak verilir. Ufkun yüzey kütleçekimi κ FRW metriği için

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-h}}\partial_a(\sqrt{-h}h^{ab}\partial_b\tilde{r}) = -\frac{1}{\tilde{r}_A}\left(1 - \frac{\dot{\tilde{r}}_A}{2H\tilde{r}_A}\right) \quad (3.40)$$

olarak tanımlanır. Burada nokta ile t 'ye göre türev gösterilmektedir. Alan $A = n\Omega_n\tilde{r}_A^{n-1}$ ile verilir. Böylece TdS aşağıdaki gibi bulunur:

$$T_H dS_H = \frac{\kappa}{2\pi}d\left(\frac{n\Omega_n\tilde{r}_A^{n-1}}{4}\right) = -\frac{1}{2\pi\tilde{r}_A}\left[1 - \frac{\dot{\tilde{r}}_A}{2H\tilde{r}_A}\right]\left(\frac{n(n-1)\Omega_n}{4}\tilde{r}_A^{n-2}\right). \quad (3.41)$$

(3.37), (3.38) ve (3.41) denklemlerini (3.29) içinde kullanırsak

$$\frac{d\tilde{r}_A}{\tilde{r}_A^3} = \frac{8\pi}{n-1}(\rho + p)Hdt \quad (3.42)$$

elde ederiz. (3.32) ifadesini

$$d\tilde{r}_A = -H\tilde{r}_A^3\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2}\right)dt \quad (3.43)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Son ifadeyi (3.42) içinde kullanırsak ikinci Friedmann denklemi

$$\dot{H} - \frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi}{n-1}(\rho + p) \quad (3.44)$$

olarak elde edilir. (3.34) ile verilen süreklilik denklemini kullanarak (3.44)'ü integre edersek birinci Friedmann denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{n(n-1)}\rho. \quad (3.45)$$

3.3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BELİRSİZLİK İLKESİ VE KÜTLEÇEKİMSEL TESTLER

GBP'nin boyutsuz parametresi genelde bir civarında kabul edilmektedir. Aslında bir zorlama olmamasına rağmen bu kabul daha çok sicim kuramından kaynaklanmaktadır. Eğer bu varsayım terk edilirse, GBP'nin boyutsuz parametresinin üst sınırını elde etmek için deneysel ve gözlemsel verilerden yararlanmak mümkün hale gelmektedir. GBP'nin boyutsuz parametresi için üst sınır elde etmeye yönelik literatürde çok sayıda çalışma yapılmıştır [8, 93–109]. Bu çalışmaların yapılmasının birkaç iyi nedeni vardır. GBP boyutsuz parametresi için üst sınır aramak Planck uzunluk ölçeği ($10^{-35}m$) ile elektrozayıf uzunluk ölçeği ($10^{-18}m$) arasında bir ara uzunluk ölçeğinin varlığını ima edebilir. Bunun dışında düşük enerjili sistemleri Planck ölçeğindeki fizikle ilişkilendirmek mümkündür. Yani başta atomik fizik gibi düşük enerjili sistemlerle fenomenolojik kuantum kütleçekimi arasındaki ilişkiyi araştırabiliriz. Özellikle GBP etkilerini çeşitli kuantum sistemler için düşünebildiğimizde bu tür bir ilişkiyi araştırmak mümkün hale gelmektedir.

[8] numaralı referansta Scardigli ve Casadio GBP modifiye Schwarzschild metriği için ışığın sapmasını, perihel kaymasını ve PRS B 1913+16 pulsar çifti için periastron kaymasını hesaplamışlardır.⁶ Öncelikle Schwarzschild metriği için GBP modifiye Hawking sıcaklığını elde etmişlerdir. Ardından bu modifiye sıcaklığı üretecek şekilde Schwarzschild çözümünü modifiye etmişlerdir. Bu modifiye metrik aracılığıyla GBP modifikasyonunu içerecek şekilde kütleçekimsel testleri incelemek mümkündür. Buldukları modifiye teorik sonuçları gözlemsel verilerle karşılaştırarak GBP boyutsuz parametresi β için üst sınırlar elde etmişlerdir. Biz de bu bölümde Scardigli ve Casadio'nun çalışmasını [8] ayrıntılı olarak ele alacağız.

3.3.1. GBP-Modifiye Schwarzschild Metriği

Öncelikle aşağıdaki verilen GBP'yi düşünelim (Burada $G = \hbar = c = k_B = 1$ alınmıştır.):

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} (1 + 4\beta \Delta p^2). \quad (3.46)$$

⁶ Çeşitli kütleçekim teorileri de Güneş sistemi testleri çerçevesinde düşünülmektedir. Gözlemsel verileri kullanarak çeşitli kütleçekim teori parametreleri için sınırlamalar elde etmek mümkündür [110–117]

Standart dispersiyon ilişkisi $E = p$ ifadesini (3.46) denklemi ile düşünürsek, bir fotonun dalga boyunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\delta x \simeq \frac{1}{2E} + 2\beta E. \quad (3.47)$$

Burada E bir fotonun ortalama enerjisidir. Bir fotonun dalga boyunun belirsizliğini $\delta x \simeq 2\mu r_S = 4\mu M$ olarak alabiliriz. Ayrıca fotonun enerjisini Hawking sıcaklığıyla $E = T$ şeklinde ilişkili düşünebiliriz. Böylece (3.47) ifadesinden

$$4\alpha M \simeq \frac{1}{2T} + 2\beta T \quad (3.48)$$

elde edilir. Burada α kalibrasyon çarpanıdır ve $\beta \rightarrow 0$ limitinde belirlenir. Yarıklasik limit için Hawking sıcaklığının $T_H = \frac{1}{8\pi M}$ şeklinde verildiğini hatırlayalım. Böylece kalibrasyon çarpanı $\alpha = \pi$ bulunur. Dolayısıyla kütle-sıcaklık ilişkisi

$$M = \frac{1}{8\pi T} + \beta \frac{T}{2\pi} \quad (3.49)$$

olarak verilir. Bu ilişkiden ise GBP modifiye Hawking sıcaklığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$T = \frac{\pi}{\beta} \left(M - \sqrt{M^2 - \frac{\beta}{4\pi^2}} \right). \quad (3.50)$$

Şimdi Schwarzschild metriğini GBP etkilerini içerecek şekilde elde edelim. Bu aşamada (3.50) ile verilen modifiye sıcaklığı üretecek şekilde Schwarzschild metriğini düşünmemiz gerekir. Hawking sıcaklığına küçük katkılarla ilgilendiğimizden aşağıda en basit şekildeki Schwarzschild metrik deformasyonunu önerebiliriz:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \varepsilon \frac{M^2}{r^2}. \quad (3.51)$$

Burada ε boyutsuz bir parametredir. Aslında yukarıda verdiğimiz metrik $1/r$ 'nin seriye açılımı olarak düşünülebilir. Yani küresel simetrik bir metriğin Robertson-Eddington açılımından başka bir şey değildir. $f(r_H) = 0$ için deforme metriğin olay ufku

$$r_H = r_S \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \quad (3.52)$$

olarak verilir. (3.52)'in $\varepsilon \leq 1$ şartını sağlaması gerektiği açıktır. Deforme metriğin Hawking sıcaklığı ise

$$T(\varepsilon) = \frac{f'(r_H)}{4\pi} = \frac{1}{2\pi M} \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{(1+\sqrt{1-\varepsilon})^2} \quad (3.53)$$

olarak verilir. Benzer şekilde sıcaklığın da $\varepsilon \leq 1$ şartını sağlaması gerektiği görülebilir. Şimdi ε ile β parametrelerini ilişkilendirmeliyiz. (3.50) ve (3.53) eşitlenirse

$$\beta = -\frac{\pi^2 G_N M^2}{\hbar c} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} \quad (3.54)$$

bulunur (Burada doğal sabitleri yazdık). $\varepsilon \leq 1$ şartı açıkça β parametresinin negatif olması gerektiğini ima etmektedir. Genelde GBP parametresi literatürde pozitif tanımlanır. Fakat istisnalar olabilir. Özellikle kristal örgü üzerinde formüle edilen GBP için benzer durum mümkündür [24].

3.3.2. Işığın Sapması

Kütleli bir cismin etrafında bağlı olmayan bir yörüngeyi düşünerek başlayalım. Bu bölümde [133] numaralı referansta tanımlanan yöntemi kullanarak ışığın sapmasını inceleyeceğiz.

Şekil 3.2:'de ışığın Güneş tarafından saptırılması gösterilmiştir. R_\odot ile Güneş'in yarıçapı gösterilmektedir. r_0 ise foton ve Güneş arasındaki minimum uzunluktur. Fotonun yörüngesini aşağıdaki gibi veririz:

$$\phi(r) - \phi(\infty) = \int_{\infty}^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 f(r_0) - f(r) \right]^{-1/2} . \quad (3.55)$$

Yörüngenin düz bir yoldan sapma açısı ise

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_0) - \phi(\infty)| - \pi \quad (3.56)$$

olarak verilir. Şimdi (3.51) ile verilen deforme metriği dikkate alarak (3.55) ifadesindeki integrali hesaplayalım. Bu integrali r_S/r için seriye açabiliriz. Önce integrali alınacak ifadeyi

aşağıdaki gibi düzenleyelim:

$$\frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 f(r_0) - f(r) \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \left[f(r_0) + \frac{f(r_0) - f(r)}{(r/r_0)^2 - 1} \right]^{-1/2}. \quad (3.57)$$

(3.57) ifadesinin sağ tarafında ikinci köşeli parantez içerisindeki terimi seriye açalım:

$$\begin{aligned} \left[f(r_0) + \frac{f(r_0) - f(r)}{(r/r_0)^2 - 1} \right] &= \left[1 - \frac{2M}{r_0} + \varepsilon \frac{M^2}{r_0^2} - \frac{2Mr_0}{r(r+r_0)} + \varepsilon \frac{M^2}{r^2} \right]^{-1/2} \\ &\simeq 1 + \frac{M}{r_0} + (3 - \varepsilon) \frac{M^2}{2r_0^2} + \frac{Mr_0}{r(r+r_0)} \left(1 + \frac{3M}{r_0} \right) - \varepsilon \frac{M^2}{2r^2} + \frac{3M^2 r_0^2}{2r^2(r+r_0)^2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Böylece (3.55) ile verilen integrali hesaplayabiliriz. Şimdi (3.55)'i

$$\phi(r) - \phi(\infty) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \quad (3.59)$$

şeklinde yazalım. Burada terimler

$$A_1 = \int_{\infty}^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \left[1 + \frac{M}{r_0} + (3 - \varepsilon) \frac{M^2}{2r_0^2} \right] dr, \quad (3.60)$$

$$A_2 = \int_{\infty}^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \frac{Mr_0}{r(r+r_0)} \left(1 + \frac{3M}{r_0} \right) dr, \quad (3.61)$$

$$A_3 = - \int_{\infty}^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \frac{\varepsilon M^2}{2r^2} dr, \quad (3.62)$$

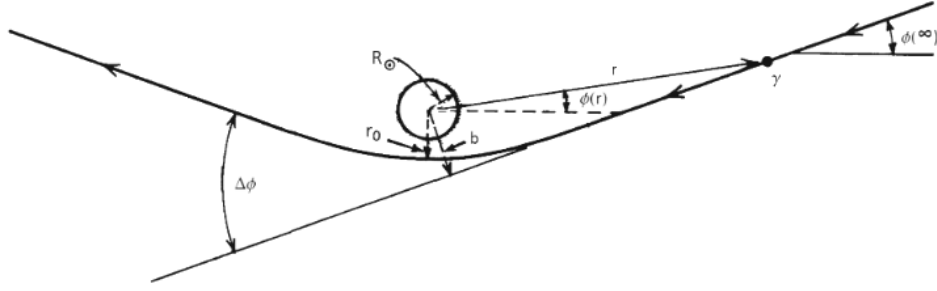
$$A_4 = \int_{\infty}^r \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \frac{3M^2 r_0^2}{2r^2(r+r_0)^2} dr \quad (3.63)$$

şeklinde verilir. Böylece (3.55) ifadesini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\phi(r) - \phi(\infty) = \frac{2M}{r_0} + \frac{\pi}{2} + \frac{2M}{8r_0^2} [15\pi - 16 - 3\pi\varepsilon]. \quad (3.64)$$

Dolayısıyla sapma açısı

$$\Delta\phi = \frac{2r_H}{r_0} + \frac{r_H^2}{16r_0^2} (15\pi - 16 - 3\pi\varepsilon) \quad (3.65)$$



Şekil 3.2: Işığın sapması.

olarak elde edilir.

Bulduğumuz sonucu PPN (Parameterized Post Newtonian) formalizminde verilen sapma açısıyla karşılaştırabiliriz. PPN formalizminde sapma açısı [118]

$$\Delta\phi = \frac{1}{2}(1 + \gamma) \frac{2r_H}{r_0} \quad (3.66)$$

ile verilir. Burada $r_0 = R_\odot$ ile verilir. γ 'nın değeri $\gamma - 1 \simeq (-1,6 \pm 1,5) \times 10^{-4}$ olarak verilebilir [119]. (3.65) ile (3.66) ifadeleri karşılaştırılırsa

$$\gamma - 1 = \frac{M}{8r_0} (15\pi - 16 - 3\pi\varepsilon) \quad (3.67)$$

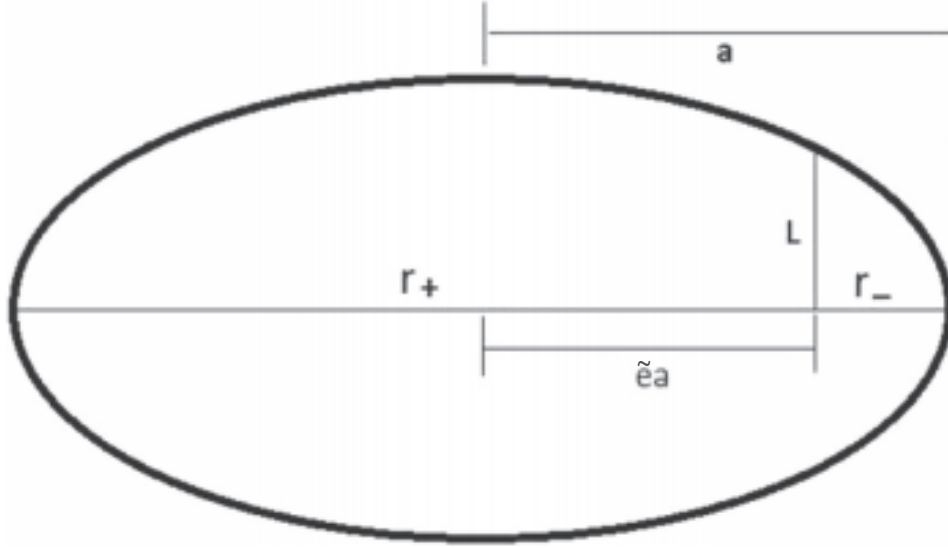
elde edilir. Son ifadeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$|\gamma - 1| = \frac{M}{8r_0} |15\pi - 16 - 3\pi\varepsilon| \lesssim 1,6 \times 10^{-4}. \quad (3.68)$$

Güneş yarıçapı R_\odot ve kütlesi M_\odot için $-60,7 < \varepsilon < 67,3$ bulunur. Fakat $\varepsilon < 1$ şartına sahip olduğundan $-60,7 < \varepsilon < 1$ elde edilir. Alt sınırı $\varepsilon \simeq -60$ alırsak, (3.54) ifadesinden $|\beta| \lesssim 4,9 \times 10^{78}$ bulunur.

3.3.3. Merkür'ün Perihel Noktasının Kayması

Bu bölümde kütleli bir cismin etrafında kapalı bir yörüngede hareket eden bir parçacığı düşünelim. Burada [133] numaralı referanstaki yöntemi kullanacağız. Şekil 3.3:'te kutupsal koordinatlarda eliptik bir yörüngenin elemanları verilmiştir. r radyal koordinatı en uzak noktada r_+ değerini alırken, en yakın noktada r_- değerini alır. \tilde{e} basıklığı, a yarı büyük eksen



Şekil 3.3: Elipsin elemanları.

uzunluğu, L semilatus rectumu göstermektedir. Geometrik ilişkiler aşağıdaki gibi verilebilir:

$$r_{\pm} = (1 \pm \tilde{e})a, \quad (3.69)$$

$$L = (1 - \tilde{e}^2)a, \quad (3.70)$$

$$\frac{2}{L} = \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}. \quad (3.71)$$

Sistemin kütle başına enerjisi e ve kütle başına açısal momentumu ℓ sabitleri $f(r_-)$ ve $f(r_+)$ fonksiyonları olarak ifade edilebilirler. r_- mesafesinden r_+ mesafesine konum vektörünün hareketi boyunca açıdaki değişim

$$\phi(r_+) - \phi(r_-) = \int_{r_-}^{r_+} \left[\frac{r_-^2 \left(\frac{1}{f(r)} - \frac{1}{f(r_-)} \right) - r_+^2 \left(\frac{1}{f(r)} - \frac{1}{f(r_+)} \right)}{r_-^2 r_+^2 \left(\frac{1}{f(r_+)} - \frac{1}{f(r_-)} \right)} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(r)}} \quad (3.72)$$

ile verilir. Bir tam tur sonucu yörüngesel presesyon aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_+) - \phi(r_-)| - 2\pi. \quad (3.73)$$

Şimdi (3.72) ile verilen integrali hesaplayalım. Öncelikle r_S/r seriyeye açılımı için

$$\frac{1}{f(r)} \simeq 1 + \frac{2M}{r} + (4 - \varepsilon) \frac{M^2}{r^2} \quad (3.74)$$

yazabiliriz. (3.72) ifadesinde köşeli parantez içerisindeki terim, $r = r_{\pm}$ değerleri için sıfır olmaktadır. Bu nedenle

$$\frac{r_-^2 \left(\frac{1}{f(r)} - \frac{1}{f(r_-)} \right) - r_+^2 \left(\frac{1}{f(r)} - \frac{1}{f(r_+)} \right)}{r_-^2 r_+^2 \left(\frac{1}{f(r_+)} - \frac{1}{f(r_-)} \right)} - \frac{1}{r^2} = C \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \quad (3.75)$$

yazabiliriz. Böylece (3.72) ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\phi(r) - \phi(r_-) = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{r_-}^{r_+} \left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(r)}} \quad (3.76)$$

Burada C sabitini $r \rightarrow \infty$ limitinde $f(r)^{-1} \rightarrow 1$ olmasıyla belirleyebiliriz. C sabiti

$$C = \frac{r_+^2 f(r_-) [f(r_+) - 1] - r_-^2 f(r_+) [f(r_-) - 1]}{r_- r_+ [f(r_-) - f(r_+)]} \quad (3.77)$$

olarak bulunur. (3.71) denklemini ve modifiye metriği kullanarak $f(r_{\pm})$ ifadeleri yukarıdaki denkleminde yazılırsa C sabiti

$$C = \left(1 - \frac{2r_S}{L} + \varepsilon \frac{r_S^2}{L^2} - \varepsilon^2 \frac{r_S^3}{8aL^2} \right) \left(1 - \varepsilon \frac{r_S}{2L} \right)^{-1} \quad (3.78)$$

olarak elde edilir. Bunu r_S/L için seriyeye açarsak

$$C^{-1/2} \simeq 1 + \left(\frac{4 - \varepsilon}{2} \right) \frac{M}{L} + \left(6 - 3\varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 \right) \frac{M^2}{L^2} \quad (3.79)$$

buluruz. Yörüngenin kutupsal denklemi

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{L} - \frac{\tilde{e}}{L} \sin \psi \quad (3.80)$$

ile verilir. Bunu (3.76) ile verilen integral için değişken dönüşümü olarak kullanacağız. (3.71) ve (3.80) denklemleri aracılığıyla

$$\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} = \frac{\tilde{e}}{L} (1 + \sin \psi), \quad (3.81)$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} = \frac{\tilde{e}}{L}(1 - \sin \psi) \quad (3.82)$$

bulunur. (3.81) ve (3.82) ifadelerinden de

$$\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right) = \frac{\tilde{e}^2}{L^2} \cos^2 \psi \quad (3.83)$$

elde edilir. Şimdi (3.80)-(3.83) ifadeleri (3.76) ile verilen integralde kullanılarak r_S/r için seriye açılırsa

$$\begin{aligned} \phi(r_+) - \phi(r_-) &\simeq \left[1 + \left(\frac{4-\varepsilon}{2}\right) \frac{M}{L} + \left(6 - 3\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right) \frac{M^2}{L^2} \right] \\ &\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[1 + \frac{M}{L}(1 - \tilde{e} \sin \psi) + (3 - \varepsilon) \frac{M^2}{2L^2}(1 - \tilde{e} \sin \psi)^2 \right] d\psi \end{aligned} \quad (3.84)$$

bulunur. Burada integralin sınırları $r = r_-$ için $\psi = -\pi/2$ ve $r = r_+$ için $\psi = \pi/2$ şeklindedir.

Bu integral hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \phi(r_+) - \phi(r_-) &\simeq \left[1 + \left(\frac{4-\varepsilon}{2}\right) \frac{M}{L} + \left(6 - 3\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right) \frac{M^2}{L^2} \right] \\ &\times \pi \left[1 + \frac{M}{L} + (3 - \varepsilon) \frac{M^2}{2L^2} \left(1 + \frac{\tilde{e}}{2}\right) \right] \simeq \left[1 + \left(\frac{6-\varepsilon}{2}\right) \frac{M}{L} + \frac{M^2}{L^2} N(\varepsilon, \tilde{e}) \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

sonucu bulunur. Burada

$$N(\varepsilon, \tilde{e}) = \frac{1}{2} \left[19 - 8\varepsilon + (3 - \varepsilon) \frac{\tilde{e}^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \right] \quad (3.86)$$

olarak verilir. Son olarak perihel kayması

$$\Delta\phi \simeq 2\pi \left(\frac{6-\varepsilon}{2}\right) \frac{M}{L} + 2\pi \frac{GM^2}{c^2 L^2} N(\varepsilon, \tilde{e}) \quad (3.87)$$

olarak elde edilir. Yüksek mertebeden terimleri ihmal edersek (doğal sabitlerle)

$$\Delta\phi \simeq \frac{6\pi GM}{Lc^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right) \quad (3.88)$$

yazılabilir.

Merkür'ün perihel kayması PPN formalizminde aşağıdaki gibi verilir [118]:

$$\Delta\phi = \left(1 + \frac{2\gamma - \tilde{\beta} - 1}{3}\right) 42,98''/\text{yuzyl}. \quad (3.89)$$

Burada γ , $\tilde{\beta}$ boyutsuz PPN parametreleridir. Messenger uzay aracının [120] $|2\gamma - \tilde{\beta} - 1| \lesssim 7,8 \times 10^{-5}$ bulduğu sınır kullanılırsa

$$|\varepsilon| = 2|2\gamma - \tilde{\beta} - 1| \lesssim 1,56 \times 10^{-4} \quad (3.90)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|\beta| \lesssim 2 \times 10^{69} \quad (3.91)$$

olacak şekilde Merkür gezegeninin yörüngesindeki perihel noktasının kayması için GB parametresi üst sınırı elde edilir.

3.3.4. PRS B 1913+16 Pulsar Çiftinin Periastronu

Önceki iki bölümde ele aldığımız ışığın sapması, Merkür gezegeninin perihel noktasının kayması ve 4. bölümünde ele alacağımız Shapiro zaman gecikmesi, kütleçekimsel kırmızıya kayma ve jeodezik devinim testleri Güneş sistemi içerisinde incelenmektedir. Yani zayıf kütleçekimsel alanlar içerisinde ele alınmaktadır. Genel görelilik teorisi zayıf kütleçekimsel alanlar içerisinde oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Diğer taraftan güçlü kütleçekim alanlarında da genel göreliliğin test edilmesi gereklidir. Özellikle bu bakımdan pulsar çiftleri iyi bir aday olarak karşımıza çıkmaktadır. PRS B 1913+16 pulsar çifti genel göreliliği test etmek için iyi bir ortam sağlamaktadır. 1974 yılında Hulse ve Taylor tarafından keşfedilmiştir [121].

Burada [122] numaralı referansta kullanılan yöntem izlenecektir. **Tablo 3.1:**'de yörüngesel parametreler ve değerleri verilmiştir. \tilde{e} ve P_b parametreleri Keplerian parametreler olarak adlandırılır. Bu parametreler Newton mekaniği içerisinde tanımlanırlar. $\dot{\omega}$, $\tilde{\gamma}$ ve \dot{P}_b ise Damour-Deruelle post-Keplerian parametreleri olarak adlandırılırlar ve genel görelilik içinde tanımlanırlar [123]. Post-Keplerian parametrelerle Keplerian parametreler arasındaki ilişki

aşağıdaki gibi verilebilir [124]:

$$\langle \dot{\omega} \rangle = 3G^{2/3}c^{-2}(P_b/2\pi)^{-5/3}(1-\tilde{e}^2)^{-1}(m_1+m_2)^{2/3} = 2,113323(2) \left[\frac{(m_1+m_2)}{M_\odot} \right]^{2/3}, \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= G^{2/3}c^{-2}\tilde{e}(P_b/2\pi)^{1/3}m_2 \times (m_1+2m_2)(m_1+m_2)^{-4/3} \\ &= 0,002936678(2) \left[\frac{m_2(m_1+2m_2)(m_1+m_2)^{-4/3}}{M_\odot^{2/3}} \right], \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_b &= -\frac{192\pi G^{5/3}}{5c^5} \left(\frac{P_b}{2\pi} \right)^{-5/3} \left(1 + \frac{73}{24}\tilde{e}^2 + \frac{37}{96}\tilde{e}^4 \right) (1-\tilde{e}^2)^{-7/2}m_1m_2(m_1+m_2)^{-1/3} \\ &= -1,699451(8) \times 10^{-12} \left[\frac{m_1m_2(m_1+m_2)^{-1/3}}{M_\odot^{5/3}} \right]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

$\dot{\omega}$, $\tilde{\gamma}$ ve \dot{P}_b parametrelerinin birimleri sırasıyla derece/yıl, saniye ve gün şeklindedir. Burada m_1 ve m_2 çift bileşenlerinin kütlelerini göstermektedir. Bu denklemlerdeki katsayılar **Tablo 3.1:**'deki P_b ve \tilde{e} değerleri yardımıyla elde edilmiştir. Ayrıca $GM_\odot/c^3 = 4,925490947 \times 10^{-6}$ s ve $1Julian/sene = 86400 \times 365,25$ s değerleri kullanılmıştır.

Şimdi genel görelilik için periastron kaymasını ($\langle \dot{\omega} \rangle^{GR}$) hesaplayalım. Bunun için **Tablo 3.1:**'deki gözlemsel değerleri (3.93) ve (3.94) denklemlerinde yerine yazıp, bu denklemleri m_1 ve m_2 için çözelim. Bulunan m_1 ve m_2 değerleri (3.92) numaralı denklemde kullanılırsa $\langle \dot{\omega} \rangle^{GR}$ elde edilir. Bağlı sapmayı

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\langle \dot{\omega} \rangle - \langle \dot{\omega} \rangle^{GR}}{\langle \dot{\omega} \rangle^{GR}} \quad (3.95)$$

olarak verebiliriz. Burada $\langle \dot{\omega} \rangle$ gözlem sonucu elde edilen değeri göstermektedir. Bunu $\langle \dot{\omega} \rangle^{GR}(1+\tilde{\varepsilon}) = \langle \dot{\omega} \rangle$ şeklinde yazabiliriz. Bunu (3.88) ile karşılaştırsak $|\varepsilon| = 6|\tilde{\varepsilon}|$ bulunur.

Dikkat edilmesi gereken bir noktaya değinelim. **Tablo 3.1:**'de verilen \dot{P}_b değerinin düzeltilmesi gereklidir. Bu düzeltme pulsar referans sistemiyle Güneş sisteminin kütle merkezi arasındaki bağlı ivmeden kaynaklanmaktadır. Bu tür bir ivmelenmeye ise pulsar çiftinin ve Güneş sisteminin galaksinin farklı kollarında yer alması neden olmaktadır.

| Parametre | Değer |
|---|-----------------------------|
| $\tilde{\epsilon}$ (basıklık) | 0,6171334(5) |
| P_b (yörünge periyodu) | 0,322997448911(4) |
| $\langle \dot{\omega} \rangle$ (periastron kayması) | 4,116598(5) |
| $\tilde{\gamma}$ (zaman genişlemesi, kütleçekimsel kırmızıya kayma) | $4,29992(8) \times 10^{-3}$ |
| \dot{P}_b (yörüngesel periyot bozulması) | $-2,423(1) \times 10^{-12}$ |

Tablo 3.1: PSR B 1913+16 pulsar çiftinin yörüngesel parametreleri [122].

Gözlenen \dot{P}_b için düzeltmeyi [125]

$$\Delta P_{b,gal} = (-0,027 \pm 0,005) \times 10^{-12} \quad (3.96)$$

şeklinde verebiliriz. Şimdi (3.93) ve (3.94) denklemlerinden m_1 ve m_2 elde edilir. \dot{P}_b için alt sınır **Tablo 3.1:**'den ve üst sınır (3.96)'dan gelir. Böylece

$$\tilde{\epsilon} = 8,9 \times 10^{-5} \quad (3.97)$$

elde edilir. $|\epsilon| = 6|\tilde{\epsilon}|$ olduğunu hatırlarsak $|\epsilon| \simeq 5,3 \times 10^{-4}$ olarak elde edilir. $M = m_1 + m_2 = 2,828M_{\odot}$ olduğundan (3.54) denkleminde

$$|\beta| \lesssim 2 \times 10^{71} \quad (3.98)$$

olarak bulunur.

4. BULGULAR

4.1. GBP MODİFİYE VDW KARA DELİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde vdW kara deliğini GBP etkilerini içerecek şekilde modifiye edeceğiz. Daha sonra bu modifiye çözüme karşılık gelen stres enerji tensörü için enerji şartları kontrol edilecektir. Son olarak standart ve modifiye durumlar için termodinamik özellikler ve faz geçişleri incelenecektir.⁷

4.1.1. GBP Modifiye Kara Delik Sıcaklığı

Bu bölümde Xiang ve Wen tarafından önerilen yöntemi [3] tekrar gözden geçireceğiz.⁸ (2.2) ifadesini seriye açarsak Δp 'nin alt sınırını aşağıdaki gibi yazabiliriz ($G = c = k_B = 1$ alınmıştır):

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} + \frac{\hbar\beta}{\Delta x^3} + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (4.1)$$

Yukarıdaki ifadeyi kullanarak $\Delta x \Delta p$ 'yi

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \left(1 + \frac{\beta}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\beta^2) \right) = \hbar_{eff} \quad (4.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Bir parçacık yutan kara deliğin alanındaki minimum artışın

$$\Delta A \geq \Delta x \Delta p \quad (4.3)$$

şeklinde verildiğini biliyoruz. Şimdi (4.2) ve (4.3) ifadelerinden $\Delta x = 2r_H$ alınması durumunda alandaki artışı

$$\Delta A \geq \gamma \hbar_{eff} = \alpha \hbar \left(1 + \frac{\beta}{4r_H^2} + \mathcal{O}(\beta^2) \right) \quad (4.4)$$

⁷ GBP modifiye vdW kara delik çözümü için yayınlanan makalemize [38] referansından ulaşılabilir.

⁸ Bu bölümde kara deliklerin sıcaklığı için GUP modifikasyonu seriye açılım şeklinde düşünülmüştür. Yani sonuçlar yaklaşıktır. Tam sonuçlar için 2.2.2. bölümüne bakınız.

olarak elde ederiz. Burada α kalibrasyon çarpanıdır ve $\beta \rightarrow 0$ limitinde elde edilir. Parçacık yutulduğunda entropideki minimum artışın $(\Delta S)_{min} = \ln 2$ olduğunu hatırlarsak dA/dS ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{dA}{dS} \simeq \frac{(\Delta A)_{min}}{(\Delta S)_{min}} = \frac{\hbar\alpha}{\ln 2} \left(1 + \frac{\beta}{4r_H^2} + \mathcal{O}(\beta^2) \right). \quad (4.5)$$

Tekrar sıcaklığın $T = \frac{dA}{dS} \times \frac{\kappa}{8\pi}$ olduğunu hatırlarsak GUP modifiye Hawking sıcaklığını

$$T = \frac{\hbar\alpha}{\ln 2} \left(1 + \frac{\beta}{4r_H^2} + \mathcal{O}(\beta^2) \right) \times \frac{\kappa}{8\pi} \quad (4.6)$$

şeklinde elde ederiz.⁹ Burada $\kappa = f'(r_H)/2$ şeklinde verilir ve yüzey kütle çekimidir. $\beta \rightarrow 0$ limitinde kalibrasyon çarpanı $\alpha = 4 \ln 2$ bulunur. Böylece statik ve küresel simetrik bir kara delik için GBP modifiye sıcaklığımız aşağıdaki gibi verilir:

$$T = \frac{\hbar_{eff}\kappa}{2\pi} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} \left(1 + \frac{\beta}{4r_H^2} \right). \quad (4.7)$$

GBP modifiye vdW kara delik için hesaplamalarda $\hbar = 1$ alacağız.

4.1.2. GBP Modifiye Kara Deliği

GBP modifiye kara delik çözümünü elde etmek için tekrar aşağıda verdiğimiz metriği düşünelim:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.8)$$

$$f = \frac{r^2}{l^2} - \frac{2M}{r} - g(r, P). \quad (4.9)$$

Elde edeceğimiz metriğe karşılık gelen stres enerji tensörü daha önceden (3.6) ile verdiğimiz

$$T^{\mu\nu} = \rho e_0^\mu e_0^\nu + \sum_i p_i e_i^\mu e_i^\nu \quad (4.10)$$

şeklindeki anizotropik stress enerji tensörüdür. Einstein alan denklemi kullanılırsa $T_{\mu\nu}$ tensörünün bileşenleri (3.7) ve (3.8) ile verilir.

⁹ Bu bölümde sadece modifiye termodinamik niceklıklar verildiğinden GBP alt indisini kullanmadık.

(4.9) ile verilen metrik ifadesinden kütle aşağıdaki gibi verilir:

$$M = \frac{4}{3}\pi r_H^3 P - \frac{g(r_H, P)r_H}{2}. \quad (4.11)$$

GBP modifiye termodinamik nicelikler ise aşağıdaki gibi verilir:

$$T = \frac{\hbar_{eff}\mathcal{K}}{2\pi} = \left(1 + \frac{\beta}{4r_H^2}\right) \left(2Pr_H - \frac{g(r_H, P)}{4\pi r_H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial g(r_H, P)}{\partial r_H}\right), \quad (4.12)$$

$$S = \int \frac{dM}{T} = \pi r_H^2 - \frac{\beta\pi}{4} \ln\left(\frac{4r_H^2 + \beta}{\beta}\right), \quad (4.13)$$

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right) = \frac{4}{3}\pi r_H^3 - \frac{r_H}{2} \frac{\partial g(r_H, P)}{\partial P}, \quad (4.14)$$

$$C_P = \frac{\partial M / \partial r_H}{\partial T / \partial r_H} = \frac{8\pi r_H^4 \left(-g + r_H \left(\frac{3r_H}{l^2} - \frac{\partial g}{\partial r_H}\right)\right)}{(4r_H^2 + 3\beta)g + r_H \left((4r_H^2 - \beta) \left(\frac{3r_H}{l^2} - \frac{\partial g}{\partial r_H}\right) - r_H(4r_H^2 + \beta) \frac{\partial^2 g}{\partial r_H^2}\right)}. \quad (4.15)$$

(4.13) ifadesindeki logaritmik terimi boyutsuz yapabilmek için intergrasyon sabiti $\frac{\beta\pi}{4} \ln \beta$ seçilmiştir. Spesifik hacmi (3.13) ifadesindeki gibi verebiliriz. Burada tekrar $g(r, P) = B(r) - PD(r)$ yaklaşımını kullanıyoruz. Bu durumda spesifik hacim aşağıdaki gibi verilir:

$$v = 2r_H + \frac{3D}{4\pi r_H}. \quad (4.16)$$

(3.3) ifadesinden

$$T = \left(P + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) \quad (4.17)$$

yazabiliriz. (4.12) ve (3.3) ifadelerinin eşitliğinden

$$\left(1 + \frac{\beta}{4r_H^2}\right) \left(2Pr_H - \frac{g}{4\pi r_H} - \frac{g'}{4\pi}\right) = \left(P + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) \quad (4.18)$$

yazılır. Yukarıdaki ifade $F_1(r) + F_2(r)P = 0$ şeklinde düzenlenebilir. $F_1(r)$ ve $F_2(r)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$F_1(r) = -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{\beta}{4r^2}\right) \left(B' + \frac{B}{r}\right) - \frac{16\pi^2 ar^2}{(8\pi r^2 + 3D)^2} \left(2r + \frac{3D}{4\pi r} - b\right) = 0, \quad (4.19)$$

$$F_2(r) = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{\beta}{4r^2}\right) \left(D' + \frac{D}{r}\right) - \frac{3D}{4\pi r} + \frac{\beta}{2r} + b = 0. \quad (4.20)$$

D' 'yi (4.20) ifadesinden elde edebiliriz:

$$D(r) = 4\pi br - \frac{8\pi r^2}{3} + 8\epsilon r^2 + \left(\frac{2\pi b}{3r} + 3\epsilon\right) \beta + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (4.21)$$

Burada ϵ integrasyon sabitidir ve $\epsilon = \pi/3$ seçilmiştir. (4.21) ifadesini (4.19) ifadesine atadıktan sonra $F_1(r)$ seriyeye açılırsa

$$F_1(r) = -\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{\beta}{4r^2}\right) \left(B' + \frac{B}{r}\right) - \frac{2a(b+r)}{(3b+2r)^2} + \frac{a(b+2r)(2b+3r)}{4r^2(3b+2r)^3} \beta = 0 \quad (4.22)$$

buluruz. $F_1(r)$ çözümlerse $B(r)$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} B(r) = & -2\pi a + \frac{\pi ab^2(243b^4(3b+2r) - 9b^2(18b+17r)\beta - (57b+43r)\beta^2)}{r(3b+2r)^2(9b^2+\beta)^2} \\ & + \frac{a\pi\beta^{3/2}(-27b^4 + 2\beta b^2 + 5\beta^2) \arctan(2r/\sqrt{\beta})}{2r(9b^2+\beta)^3} + \frac{2\pi ab(1458b^6 + 378\beta b^4 + 9\beta^2 b^2 - 5\beta^3)}{r(9b^2+\beta)^3} \ln\left(\frac{3b+2r}{2b}\right) \\ & + \frac{\pi\beta ab(108b^4 + 45\beta b^2 + 7\beta^2)}{r(9b^2+\beta)^3} \ln\left(\frac{4r^2+\beta}{4b^2}\right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Burada logaritmik terimi boyutsuz yapabilmek için uygun bir integrasyon sabiti seçilmiştir. (4.21) ve (4.23) çözümleri aracılığıyla $g(r, P)$ fonksiyonu belirlenebilir ve böylece GBP modifiye vdW kara delik çözümü elde edilir. (4.21) ve (4.23) ifadeleri $\beta \rightarrow 0$ limitinde [5] çalışmasındaki sonucu verir.

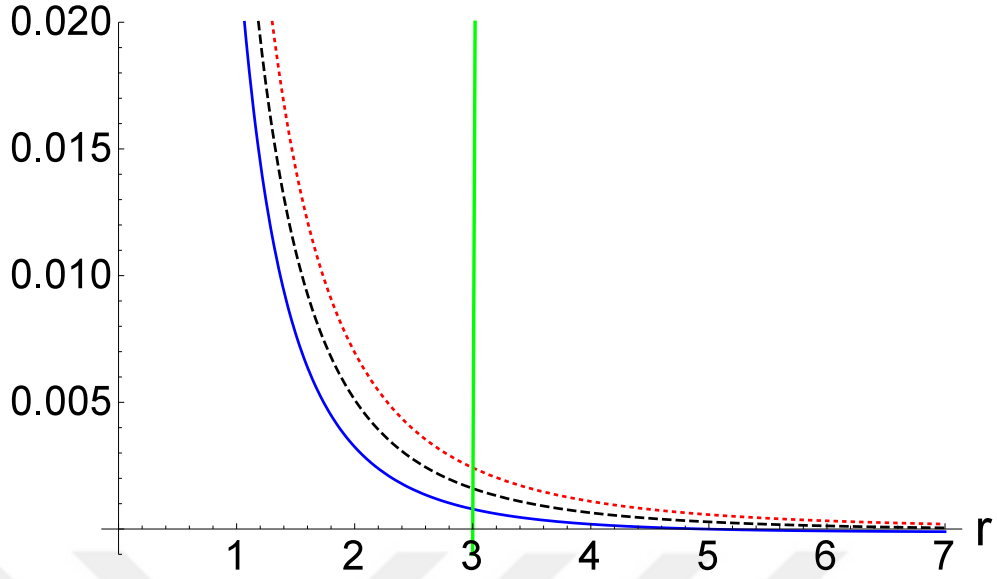
Fiziksel olarak geçerli bir çözüm için stres enerji tensörünün sağlaması gereken belirli enerji şartları vardır. Bu enerji şartlarını tekrar hatırlayalım:

$$\text{Zayıf :} \quad \rho \geq 0, \quad \rho + p_i > 0, \quad (4.24)$$

$$\text{Guclu :} \quad \rho + \sum_i p_i \geq 0 \quad \rho + p_i > 0, \quad (4.25)$$

$$\text{Baskin :} \quad \rho \geq 0, \quad \rho \geq |p_i|. \quad (4.26)$$

Şekil 4.1:'den enerji şartları kontrol edilebilir. Yeterince küçük basınç değerleri için tüm enerji şartlarını kara deliğin olay ufku civarında sağlamak mümkündür. Yeterince büyük r değerleri için p_2 pozitif olduğundan grafikte gösterilmemektedir. Standart çözüme benzer şekilde GBP modifiye çözümü de ufuk civarında enerji şartlarını sağlamaktadır.



Şekil 4.1: ρ enerji yoğunluğu (siyah kesikli eğri), $\rho + p_2$ (kırmızı noktalı eğri) ve $\rho - p_2$ (mavi eğri), $r_H = 3$ için yeşil eğri ile olay ufku gösterilmektedir. x eksenini radyal koordinat r 'yi göstermektedir. $a = 1/2\pi$, $b = 1$, $P = 0,001$ ve $M = 0,16$ alınmıştır.

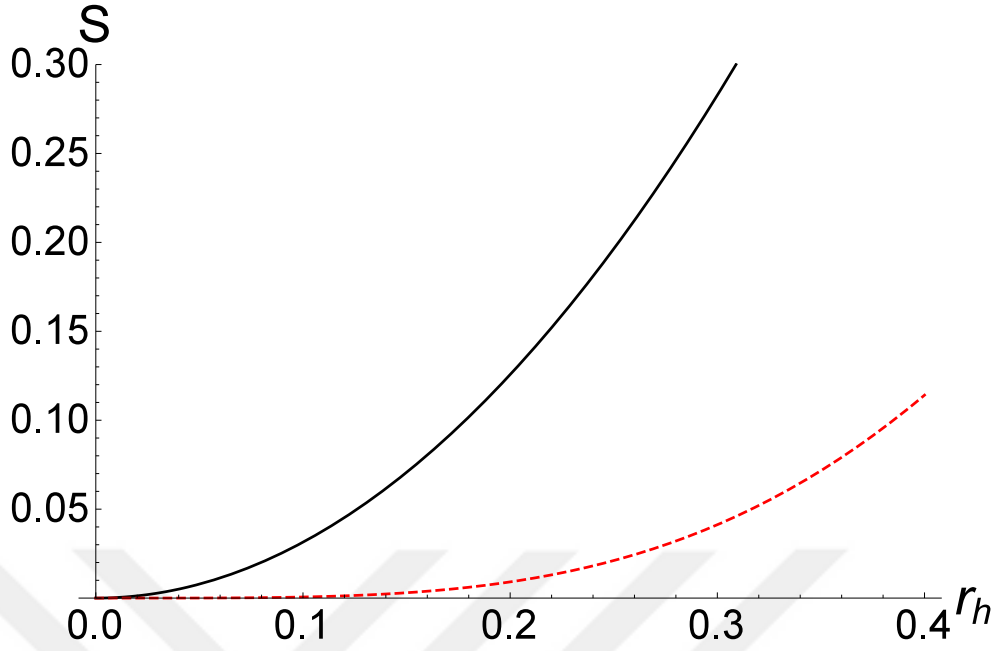
4.1.3. Termodinamik Özellikler ve Faz Geçişi

Şekil 4.2:'de standart ve GBP modifiye entropilerin olay ufkuna göre değişimi gösterilmiştir. Açıkça görülebileceği gibi GBP modifiye entropi standart entropiden daima küçüktür. Ayrıca $0 < r_H < \infty$ için

$$\frac{dS}{dr_h} = \frac{8\pi r_h^3}{\beta + 4r_h^2}. \quad (4.27)$$

olduğundan GBP modifiye entropi monoton artan bir fonksiyondur. Yani negatif logaritmik terim ilk terime baskın gelmemektedir.

Modifiye sıcaklık ise standart sıcaklıktan büyük ya da küçük olabilir. **Şekil 4.3:**'te yarıklasik ve modifiye sıcaklıklar çizilmiştir. İlk şekilde GBP modifiye sıcaklık küçük kara delikler için kararsız bir kola sahiptir. Büyük kara delikler durumunda kuantum kütleçekim etkileri ihmal edilebileceğinden standart sıcaklıkla benzer bir davranış gösterir. Kararsız kol negatif ısı sığasına karşılık gelmektedir. GBP etkileri düşünüldüğünde vdW kara delikleri olay ufkunun küçük değerleri durumunda termodinamik olarak kararsızdırlar. Ayrıca GBP modifikasyonu durumunda sıcaklık standart duruma göre daha büyüktür. **Şekil 4.3:**'te ikinci



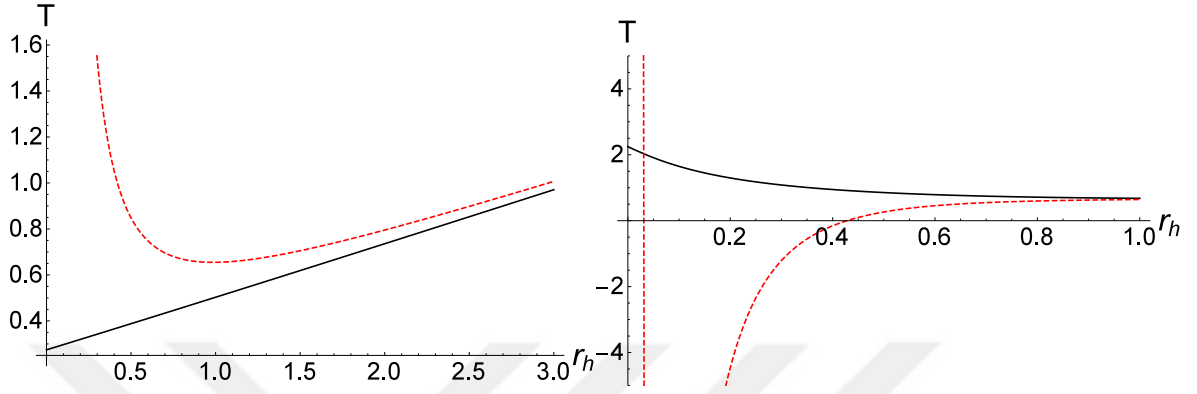
Şekil 4.2: Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modifiye (kırmızı kesikli eğri) entropiler. $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = 1$ seçilmiştir.

şekilde modifiye sıcaklık küçük kara delikler için kararsız bir kol göstermektedir ve bazı olay ufku değerleri için iyi tanımlı olmayan negatif değerler almaktadır. Daha büyük kara delikler için kuantum kütleçekim etkileri ihmal edilebileceğinden benzer şekilde standart duruma aynı davranışı gösterir. GBP modifiye ve standart sıcaklıklar arasındaki farkı aşağıdaki gibi verebiliriz:

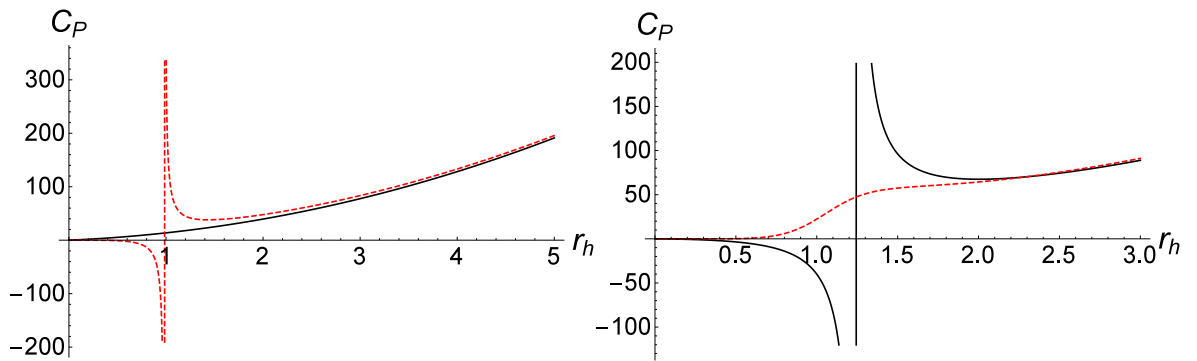
$$\Delta T = \frac{\beta(12r_H^2 + 8br_H + \beta)}{16r_H^3} - \frac{\beta ar_H(b + 2r_H)(2b + 3r_H)}{4r_H^3(3b + 2r_H)^3}. \quad (4.28)$$

ΔT pozitif (negatif) olduğunda, modifiye sıcaklık orijinal sıcaklıktan daha büyük (küçük) olur. (4.28)'in işareti birinci ve ikinci terimlerin arasındaki rekabetin sonucunda belirlenir. Yeterince büyük olay ufku değerleri için ilk terim daha fazla katkı verebilir. Bu yüzden modifiye sıcaklık standart sıcaklıktan daha büyük olabilir.

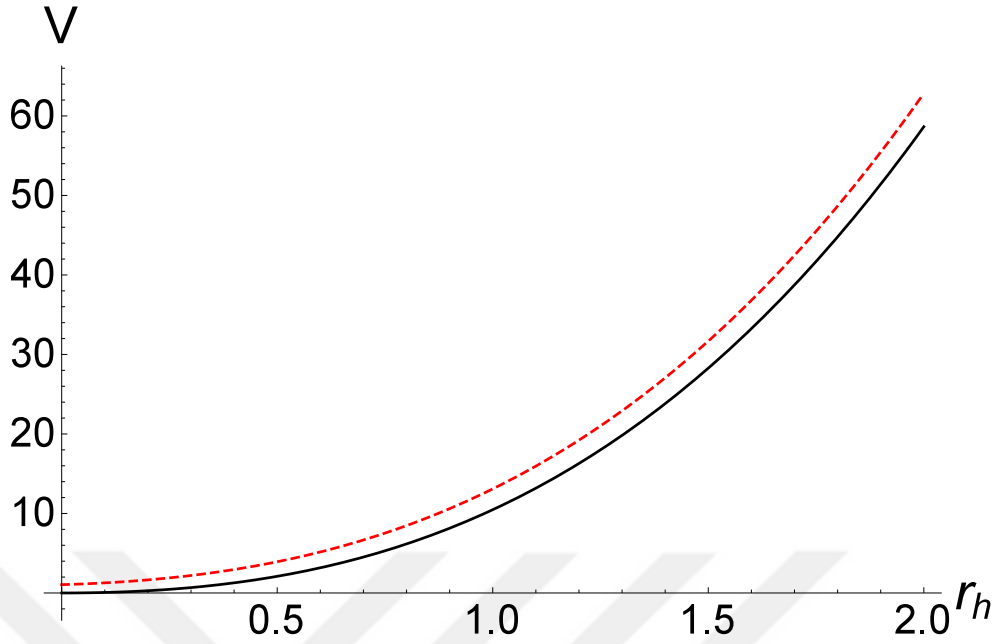
Şimdi termodinamik kararlılık ve olası faz geçişleri için ısı sığasını inceleyelim. **Şekil 4.4:**'te ısı sığaları gösterilmektedir. Hem standart hem de modifiye ısı sığaları kararlı-kararsız faz geçişi gösterebilirler. **Şekil 4.4:**'ün ilk grafiğinde $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = l = 1$ değerleri için modifiye ısı sığası ıraksamaktadır. Yani GBP modifikasyonu durumunda kararlı-kararsız kara delik faz geçişi göstermektedir. Pradhan da benzer bir faz geçişini aynı değerlerde standart vdW kara deliği için bildirmiştir [126]. Fakat faz geçişi negatif olay ufku değerlerinde



Şekil 4.3: Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modiye (kırmızı kesikli eğri) sıcaklıklar. (a) $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = l = 1$. (b) $b = 0, 1$, $\beta = a = l = 1$.



Şekil 4.4: Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modiye (kırmızı kesikli eğri) ısı sığaları. (a) $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = l = 1$. (b) $b = 0, 1$, $\beta = a = l = 1$.



Şekil 4.5: Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modifiye (kırmızı kesikli eğri) termodinamik hacimler. $\beta = b = 1$ seçilmiştir.

meydana gelmektedir ve dolayısıyla fiziksel olarak anlamlı değildir. **Şekil 4.4:**'ün ikinci grafiğinde ısı sığaları $\beta = a = l = 1, b = 0, 1$ değerleri için rollerini değiştirirler. Bu durumda yarıklasik ısı sığası kararlı-kararsız kara delik faz geçişi gösterirken, modifiye ısı sığası faz geçişi göstermez.

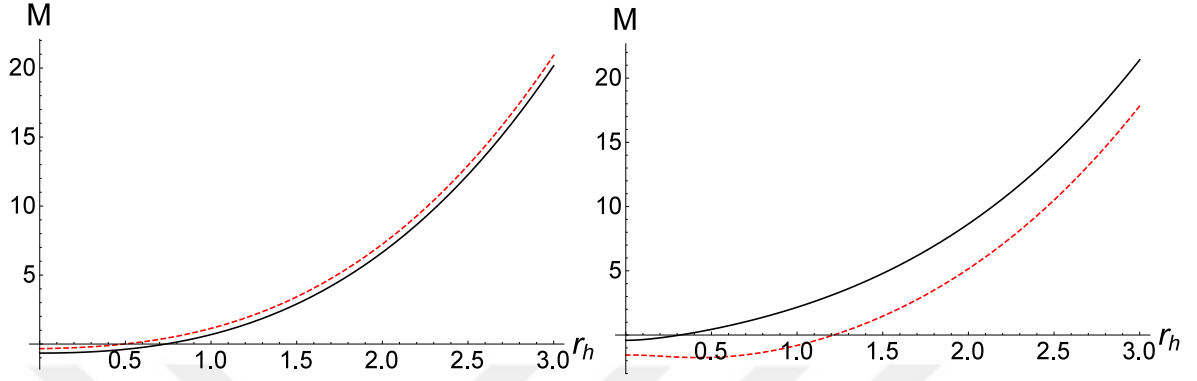
Termodinamik hacim ve kütle için grafikler sırasıyla **Şekil 4.5:** ve **Şekil 4.6:** şekillerinde gösterilmektedir. (4.14) ifadesinden termodinamik hacim

$$V = \frac{4}{3}\pi r_H^3 + 2\pi b r_H^2 + \frac{\pi b \beta}{3} + \frac{\pi \beta r_H}{2} \quad (4.29)$$

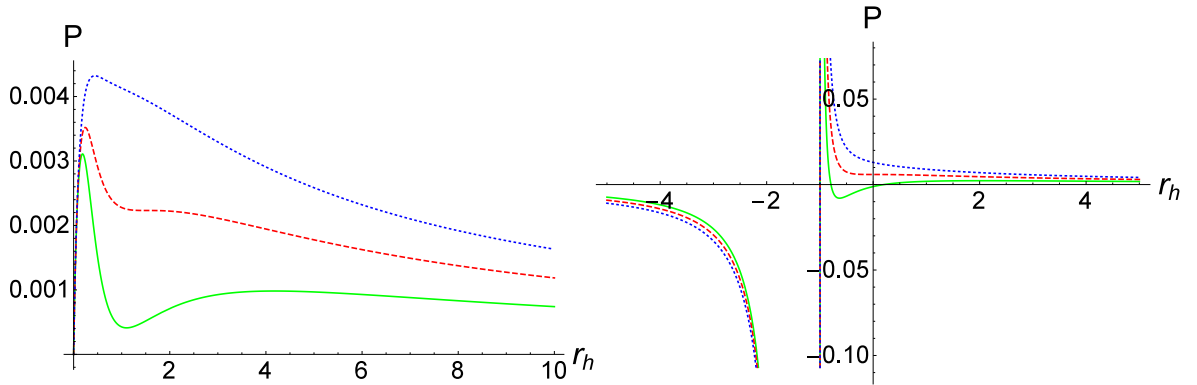
şeklinde verilir. Dikkat edilirse GBP'den gelen katkılar daima pozitifdir. Dolayısıyla modifiye hacim standart durumdaki hacimden daima büyüktür. **Şekil 4.6:**'dan görülebileceği gibi uygun değerler için modifiye kütle standart durumdan küçük ya da büyük olabilir.

Son olarak faz geçişinde bahsedelim. (4.12) ve modifiye $g(r, P)$ fonksiyonu aracılığıyla

$$P = \frac{16r_H^3(2r_H + 3b)((2r_H + 3b)^2 T - 2a(r_H + b)) + 4ar_H(2r_H + b)(3r_H + 2b)\beta}{(2r_H + 3b)^3(4r_h^2 + \beta)(8r_H(r_H + b) + \beta)} \quad (4.30)$$



Şekil 4.6: Yarıklasik (siyah eğri) ve GBP modifiye (kırmızı kesikli eğri) kütleler. (a) $a = \frac{1}{2\pi}$, $\beta = b = l = 1$. (b) $b = 0, 1$, $\beta = a = l = 1$.



Şekil 4.7: $P - r_H$ faz diyagramları. İzotermal eğrilerin sıcaklıkları yukarıdan aşağıya doğru azalmaktadır ve $1,3T_c$ (mavi noktalı eğri), T_c (kırmızı kesikli eğri) ve $0,7T_c$ (yeşil eğri) değerlerine karşılık gelmektedir. (a) GBP modifiye hal denklemi. (b) Standart hal denklemi.

elde edilir. Kritik noktaları bulmak için aşağıda verilen iki denklemi çözmemiz gerekir:

$$\frac{\partial P}{\partial r_h} = 0 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r_h^2} = 0. \quad (4.31)$$

(4.30) ile verilen hal denklemi oldukça karmaşıktır. Bu nedenle sayısal bir çözüm arayacağız. Eğer $\beta = b = 1$ ve $a = 1/(2\pi)$ alırsak, $T_c = 0,03279$, $r_c = 1,52439$ ve $P_c = 0,00223$ bulunur. **Şekil 4.7:**'de faz diyagramları gösterilmiştir. İlk grafikte modifiye hal denklemi için küçük-büyük kara delik faz geçişi görülebilir. Kararlı olmayan sol kol dışında, faz diyagramı sıvı-gaz sistemindekine benzer bir davranış göstermektedir. Benzer davranış yüklü AdS kara deliğinin modifiye faz geçişi için Sun ve Ma tarafından da bildirilmiştir [34]. Standart durumda da kritik noktaların elde edilmesi mümkündür. Zaten vdW hal denklemiyle aynı termodinamiğe sahip olduğundan bu durum sürpriz değildir. Fakat bu durumdaki faz geçiş fiziksel olarak makul değildir. (4.31) kullanılırsa standart durum için kritik noktalar aşağıdaki gibi verilir:

$$T_c = \frac{8a}{27b}, \quad r_c = 0 \quad P_c = \frac{a}{27b^2}. \quad (4.32)$$

Pozitif kritik spesifik hacim tanımlamak mümkün olmasına rağmen, küçük kara delikler için faz geçiş kolu negatif olay ufku değerlerine karşılık gelmektedir. Bu nedenle standart durum için kritik noktalar fiziksel bir faz geçişine karşılık gelmemektedir.¹⁰

4.2. FRIEDMANN DENKLEMLERİNİN DSR-GUP MODİFİKASYONU

Bu bölümde DSR-GUP'dan elde edilen entropi-alan ilişkisi kullanılarak görünür ufkun TBY'sinden Friedmann denklemleri elde edilecektir. Modifiye Friedmann denklemlerinin Planck mertebesindeki ölçeklerde maksimum bir enerji yoğunluğuna sahip olduğu gösterilecektir. GBP'nin minimum mesafe özelliği nedeniyle görünür ufuk için minimum bir değer tanımlamak mümkündür. Ayrıca $p = w\rho$ hal denklemi ve $k = 0$ durumu için yavaşlama parametresi q incelenecektir. Son olarak TGİY'nin evrenin tüm dönemleri için geçerli olduğu gösterilecektir.¹¹

¹⁰ Bu bölümde önerdiğimiz yöntemi baz alan bir tezde Polytropic ve Chaplygin kara delikleri için GBP modifiye çözümler elde edilmiştir [127].

¹¹ Bu bölümde anlatılan çalışma ile ilgili makaleye [42] numaralı referanstan ulaşılabilir.

4.2.1. DSR-GUP Kullanılarak Elde Edilen Entropi-Alan İlişkisi

Standart belirsizlik ilkesinin modifikasyonunu DSR (Doubly Special Relativity) teorisi çerçevesinde düşünebiliriz. Özel görelilik teorisinden farklı olarak DSR ışık hızı dışında enerji üzerinde de bir sınırlama ima eder [128]. Enerji üzerindeki üst limit Planck enerjisidir. Yakın zamanda DSR teorisi çerçevesinde elde edilen GBP'yi aşağıdaki gibi verebiliriz [9, 10] ($G = \hbar = k_B = c = 1$ alınmıştır.):

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \left(1 - 2\gamma + \frac{\Delta p^2}{E_P^2} \right). \quad (4.33)$$

Burada E_P Planck enerjisidir ve γ 'nın değeri $0 < \gamma < 1/2$ arasındadır. [9, 10] numaralı çalışmalarda adlandırmaya sadık kalarak biz de (4.33) numaralı ifadeyi DSR-GUP olarak adlandıracağız. Entropi-alan arasındaki modifiye ilişkiyi elde etmek için 2.2.2. bölümünde ayrıntılı olarak değindiğimiz Xiang ve Wen modifikasyonunu [3] kullanacağız.

(4.33) ifadesinden momentum belirsizliği için alt sınır aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Delta p \geq \Delta x E_P^2 - E_P \sqrt{\Delta x^2 E_P^2 + 2\gamma - 1}. \quad (4.34)$$

$\gamma \rightarrow 0$ ve $E_P \rightarrow \infty$ limitleri için standart belirsizlik ilkesi elde edilir. $\Delta x \approx 2r_H$ ve (4.34) ifadesi için

$$\Delta x \Delta p \geq 4r_H^2 E_P^2 - 2r_H E_P \sqrt{4r_H^2 E_P^2 + 2\gamma - 1} \quad (4.35)$$

yazılabilir. Alandaki en küçük artışın

$$\Delta A \geq \Delta x \Delta p \quad (4.36)$$

şeklinde verildiğini hatırlarsak

$$\Delta x \Delta p \geq 4r_H^2 E_P^2 \alpha - 2r_H \epsilon_P \alpha \sqrt{4r_H^2 E_P^2 + 2\gamma - 1} \quad (4.37)$$

yazılır. Burada α kalibrasyon çarpanıdır ve limit durumunda belirlenir. İnfomasyon

teorisinde bilgedeki minimum artış $(\Delta S)_{min} = \ln 2$ olduğundan modifiye entropi-alan ilişkisi

$$\frac{dS}{dA} \approx \frac{(\Delta S)_{min}}{(\Delta A)_{min}} = \frac{1}{32E_P^2 r_H^2 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma-1}{4E_P^2 \alpha r_H^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma-1}{4E_P^2 r_H^2}} \right)}} \right]} \quad (4.38)$$

olarak verilir. $\gamma \rightarrow 0$ ve $E_P \rightarrow \infty$ limitleri için kalibrasyon çarpanı $\alpha = 8 \ln 2$ olarak elde edilir.

4.2.2. Modifiye Friedmann Denklemleri

Bu bölümde $(3 + 1)$ boyuttaki DSR-GUP modifiye Friedmann denklemleri elde edilecektir. $(3 + 1)$ boyuttaki FRW metriğini kompakt biçimde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b + \tilde{r} d\Omega_2^2. \quad (4.39)$$

Burada $d\Omega_2$ iki boyuttaki birim kürenin metriğidir. Diğer tüm parameterler 3.2.1. bölümünde tanımlandığı gibi verilir. Görünür ufuk ve ufkun sıcaklığı sırasıyla (3.32) ve (3.39) ifadeleriyle verilir.

Entropi alanın bir fonksiyonu olduğundan entropiyi aşağıdaki gibi genel bir şekilde yazabiliriz:

$$S_H = \frac{f(A)}{4}. \quad (4.40)$$

Entropinin diferansiyelini ise

$$\frac{dS_H}{dA} = \frac{f'(A)}{4} \quad (4.41)$$

şeklinde verebiliriz. Burada A görünür ufkun yüzey alanıdır ve $A = 4\pi \tilde{r}_A^2$ ile verilir. (3.33) ifadesinde olduğu gibi enerji momentum tensörünü $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$ şeklinde düşünüyoruz ve buna karşılık gelen süreklilik denklemi ise

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (4.42)$$

olarak verilir. İş yoğunluğunun

$$W = -\frac{1}{2}T^{ab}h_{ab} = \frac{1}{2}(\rho - p) \quad (4.43)$$

şeklinde verildiğini hatırlayalım. İş yoğunluğu W , evrenin hacminin değişmesine karşılık gelen iş olarak düşünülebilir. Hacim $V = \frac{4}{3}\pi\tilde{r}_A^3$ ve enerji $E = \rho V$ olarak verileceğinden, süreklilik denklemi (4.42) kullanılırsa enerjinin diferansiyeli aşağıdaki gibi verilir:

$$dE = \rho dV + V d\rho = 4\pi\rho\tilde{r}_A^2 d\tilde{r}_A - 4\pi(\rho + p)\tilde{r}_A^3 H dt. \quad (4.44)$$

WdV terimi ise

$$WdV = 2\pi(\rho - p)\tilde{r}_A^2 d\tilde{r}_A \quad (4.45)$$

olarak elde edilir. Son olarak $T_H dS_H$ terimini (3.39) ve (4.41) ifadelerini kullanırsak aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$T_H dS_H = -\left(1 - \frac{\dot{\tilde{r}}_A}{2H\tilde{r}_A}\right) f'(A) d\tilde{r}_A. \quad (4.46)$$

(3.43), (4.44), (4.45) ve (4.46) ifadelerini (3.29) ile verilen TBY içerisinde kullanırsak

$$\frac{f'(A)}{\tilde{r}_A^3} d\tilde{r}_A = 4\pi(\rho + p)H dt. \quad (4.47)$$

elde ederiz. Son bulduğumuz denklem içerisinde (4.42) ile verilen süreklilik denklemi kullanılırsa

$$\frac{f'(A)}{\tilde{r}_A^3} d\tilde{r}_A = -\frac{4\pi}{3} d\rho \quad (4.48)$$

elde edilir. Ayrıca (3.43) ve (4.47) denklemlerinden

$$f'(A) \left(\dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) = -4\pi(\rho + p). \quad (4.49)$$

yazmak mümkündür. Şimdi tek belirlenmesi gereken $f'(A)$ ifadesidir. Bunu (4.38) ve (4.41) ifadelerinden elde edebiliriz. Böylece modifiye Friedmann denklemleri (4.48) ve (4.49)

ifadelerinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$-\frac{4\pi}{3}\rho = -\frac{1}{4\tilde{r}_A^2(1-2\gamma)} + \frac{(4\tilde{r}_A^2 E_P^2 + 2\gamma - 1)^{3/2}}{12\tilde{r}_A^3 E_P(1-2\gamma)^2} + C, \quad (4.50)$$

$$\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2}\right) \frac{1}{8E_P^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma-1}{4E_P^2 \tilde{r}_A^2}}\right) \tilde{r}_A^2} = 4\pi(\rho + p). \quad (4.51)$$

Burada C integrasyon sabitidir ve başlangıç koşullarından belirlenebilir. $\tilde{r}_A \rightarrow \infty$ limitinde enerji yoğunluğu vakum enerjisidir. Yani $\rho_{vak} = \Lambda$ olur. Böylece integrasyon sabiti $C = -\frac{4\pi\Lambda}{3} - \frac{2E_P^2}{3(1-2\gamma)^2}$ olarak bulunur ve (4.50)

$$\frac{8\pi}{3}(\rho - \Lambda)(1-2\gamma)^2 = \frac{1}{6} \left[\frac{3(1-2\gamma)}{\tilde{r}_A} + 8E_P^2 \left(1 - \left(1 + \frac{2\gamma-1}{4\tilde{r}_A^2 E_P^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (4.52)$$

şeklinde verilir. Burada elde ettiğimiz modifiye Friedmann denklemleri $\gamma \rightarrow 0$ ve $E_P \rightarrow \infty$ limitlerinde standart Friedmann denklemlerine indirgenir.

Şimdi (4.52) denklemini inceleyelim. Enerji yoğunluğu ρ 'nun reel ve pozitif olması için görünür ufku yarıçapının minimum değeri

$$\tilde{r}_A^{min} = \frac{\sqrt{1-2\gamma}}{2E_P}, \quad (4.53)$$

olmalıdır. Bu değer açıkça başlangıçtaki tekilliği kaldırmaktadır. Burada tekilliğin ortadan kalkması (4.33) ile verilen DSR-GUP'un kuantum doğasından kaynaklanmaktadır.¹² Bildiğimiz üzere GBP konum belirsizliği üzerinde sıfırdan farklı bir minimum değer öngörmektedir. Klasik teoride bunun bir karşılığı yoktur. Çünkü genel görelilik çerçevesinde evrenin başlangıcı $\tilde{r}_A = 0$ noktasıdır. Bu klasik başlangıç tekilliğidir.¹³ Minimum görünür ufuk için maksimum enerji yoğunluğunu $\rho_{max} = \frac{5E_P^2}{4\pi(1-2\gamma)^2} + \Lambda$ olarak enflasyon ölçeğinde buluruz. Λ çok küçük olduğundan ihmal edebiliriz ve enerji yoğunluğunun Planck enerjisi mertebesinde olduğu görülebilir. Standart Friedmann denklemlerinden farklı olarak, sıfırdan

¹² KGBP'yi kullanarak Friedmann denklemleri [40] numaralı referansta modifiye edilmiştir. Minimum bir mesafe için Friedmann denklemleri maksimum bir enerji yoğunluğu öngörmektedir. [41] numaralı referansta ise farklı bir GBP için Friedmann denklemleri modifiye edilmiştir. Benzer şekilde enerji yoğunluğu için bir üst sınır elde edilmiştir. Ayrıca kullanılan modifiye GBP için dögüsel (cyclic) bir evren modeli tanımlamanın mümkün olduğunu göstermişlerdir.

¹³ Bu tezde kozmolojinin standart modelindeki tekillik problemi KKT yaklaşımı içerisinde ele alınmaktadır. Bu tezin kapsamı dışında olan madde, karanlık madde ve karanlık enerjinin etkileşim içerisinde olduğu varsayımı için kozmolojinin standart modelindeki problemler literatürde ele alınmaktadır. 2018 yılında Aydın'ın yaptığı çalışmada bu tür bir etkileşmenin evrenin evriminde baskın rol oynadığı gösterilmiştir [129]. Önerilen modelin Büyük Patlama tekilliği dışında Büyük Yırtılma (Big Rip), galaksilerin ortaya çıkması, madde dağılımı gibi problemleri de çözüme potansiyeli vardır.

farklı minimum bir görünür ufuk yarıçapı ile sonlu ve maksimum bir enerji yoğunluğu elde ettik. $\gamma \rightarrow 0$ ve $E_P \rightarrow \infty$ limitlerinde \tilde{r}_A^{min} sifira giderken, ρ_{max} ıraksar.

(3.32) ifadesini kullanarak modifiye Friedmann denklemlerini Hubble parametresi H cinsinden aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\frac{8\pi}{3}(\rho - \Lambda)(1 - 2\gamma)^2 = \frac{1}{6} \left[3(1 - 2\gamma) \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) + 8E_P^2 \left(1 - \left(1 + \frac{(2\gamma - 1)}{4E_P^2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \right)^{3/2} \right) \right], \quad (4.54)$$

$$\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2} \right) \frac{1}{8E_P^2} \frac{\left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)}{1 - \sqrt{1 + \frac{(2\gamma - 1)}{4E_P^2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)}} = -4\pi(\rho + p). \quad (4.55)$$

4.2.3. Yavaşlama Parametresi

Şimdi modifiye Friedmann denklemlerimiz için aşağıdaki gibi tanımlanan yavaşlama parametresi q 'yu hesaplayalım:

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (4.56)$$

Pozitif q yavaşlamayı ima ederken, negatif q ise hızlanmayı ima eder. Hal denklemini $p = \omega\rho$ olarak seçersek ve (4.54) ile (4.55) denklemlerini yukarıda verdiğimiz yavaşlama parametresinde kullanırsak

$$q = -1 + \frac{2(\omega+1)E_P^2}{(1-2\gamma)^2 H^2} \times \left[3(1-2\gamma) + \frac{8E_P^2}{H^2} \left(1 - \left(1 + \frac{(2\gamma-1)}{4E_P^2} H^2 \right)^{3/2} \right) + \frac{16\pi(1-2\gamma)^2 \Lambda}{H^2} \right] \times \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma-1}{4E_P^2} H^2} \right] \quad (4.57)$$

$k = 0$ durumu için elde ederiz. $k = 0$ durumu kozmolojik gözlemlerle uyum içindedir [130]. Vakum baskın evren ($p = -\rho$) dışında, çoğunlukla kozmolojik sabit Λ 'yı ihmal edebiliriz. Enflasyon aşamasında yavaşlama parametresini hesaplayalım. Minimum mesafede maksimum H aşağıdaki gibi verilir:

$$H_{max} = \frac{2E_P}{\sqrt{1-2\gamma}}. \quad (4.58)$$

Böylece yavaşlama parametresi

$$q = \frac{3}{2} + \frac{5\omega}{2} \quad (4.59)$$

olarak bulunur. Buradan enflasyon aşamasının başında hızlanarak genişlemenin gerçekleşmesi için $\omega < -3/5$ şartının sağlanması gerektiği sonucunu çıkarabiliriz. Şimdi GBP etkilerini radyasyon ve madde baskın dönemler için inceleyelim. Kuantum kütleçekim etkileri bu iki dönem için çok küçük olacağından (4.57) ile verilen yavaşlama parametresini aşağıdaki gibi seriye açabiliriz:

$$q = \frac{1}{2}(1 + 3\omega) + \frac{3H^2(1 + \omega)(1 - 2\gamma)}{64E_p^2} + \dots \quad (4.60)$$

Yukarıdaki ifadeden radyasyon ($\omega = 1/3$) ve madde ($\omega = 0$) baskın dönemler için yavaşlama parametresini

$$q_{rad} = 1 + \frac{(1 - 2\gamma)H^2}{16E_p^2}, \quad (4.61)$$

$$q_m = \frac{1}{2} + \frac{3H^2(1 - 2\gamma)}{64E_p^2} \quad (4.62)$$

olarak buluruz. $0 < \gamma < 1/2$ olduğunu hatırlarsak yeni terimlerin iki durumda da pozitif katkı verdiği görülebilir. Sonuç olarak DSR-GUP etkileri göz önüne alınırsa evrenin radyasyon ve madde baskın dönemleri için genişlemesi daha yavaştır.

Son olarak "DSR-GUP etkileri karanlık maddeye bir alternatif olabilir mi?" sorusu akla gelebilir. (4.60) ifadesinde ikinci terimden gelen katkı geç dönem hızlanarak genişleme durumunda çok küçük olacağından ilk terimi baskın düşünebiliriz. Yani (4.60) $\omega < -1/3$ olması gerektiğini ima etmektedir. Sonuç olarak bu modelde evrenin son dönemde hızlanarak genişlemesi için hala karanlık enerjiye ihtiyaç vardır.¹⁴

¹⁴ Bulduğumuz bu sonucun tersine olarak karanlık enerjiye gerek duymadan son aşamada hızlanarak genişleyen evren modelleri tanımlamak mümkündür. Friedmann denklemlerine Tsallis [90] ve Rainbow Gravity [131] modifikasyonunu düşünen çalışmalarda bu durum görülebilir.

4.2.4. Termodinamiğin Genelleştirilmiş İkinci Yasası (TGİY)

DSR-GUP durumunda TGİY'nin sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim. TGİY'ye göre madde alanlarının ve görünür ufku toplam entropileri zamanla azalmaz. (4.47) ifadesinden

$$\dot{r}_A = 32\pi(\rho + p)\tilde{r}_A^5 H E_P^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma - 1}{4\tilde{r}_A^2 E_P^2}} \right) \quad (4.63)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin işareti $\rho + p$ 'ye bağlıdır. (4.46) ve (4.63) denklemlerinden aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz:

$$T_H \dot{S}_H = 4\pi(\rho + p)\tilde{r}_A^3 H \left[1 - 16\pi(\rho + p)E_P^2 \tilde{r}_A^4 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma - 1}{4\tilde{r}_A^2 E_P^2}} \right) \right]. \quad (4.64)$$

Bulduğumuz ifade hızlanarak genişleyen evren için ikinci yasayı ihlal edebilir. Bu nedenle TGİY'yi kontrol edelim. Şimdi aşağıdaki gibi tanımlanan Gibbs denklemini düşünelim [132]:

$$T_m dS_m = d(\rho V) + p dV = V d\rho + (\rho + p) dV. \quad (4.65)$$

Burada T_m ve S_m ufuk içerisindeki madde alanlarının sıcaklığını ve entropisini göstermektedir. Denge durumunda $T_m = T_H$, (4.65) denkleminde

$$T_H \dot{S}_m = -4\pi(\rho + p)\tilde{r}_A^3 H \left[1 - 32\pi(\rho + p)E_P^2 \tilde{r}_A^4 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma - 1}{4\tilde{r}_A^2 E_P^2}} \right) \right] \quad (4.66)$$

elde edilir. Böylece (4.64) ve (4.66) denklemlerinden

$$T_H (\dot{S}_H + \dot{S}_m) = 64\pi^2 (\rho + p)^2 H E_P^2 \tilde{r}_A^7 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma - 1}{4\tilde{r}_A^2 E_P^2}} \right) \quad (4.67)$$

elde edilir. (4.67) ifadesinin sağ tarafı evrenin tüm dönemleri için azalmaz. Bu nedenle TGİY evrenin tüm dönemleri için geçerlidir.

4.3. GBP, SHAPIRO ZAMAN GECİKMESİ, KIRMIZIYA KAYMA VE JEODEZİK DEVİNİM

Bu bölümde Scardigli ve Casadio tarafından önerilen GBP modifiye Schwarzschild çözümü [8] kullanılarak Shapiro zaman gecikmesi, kütleçekimsel kırmızıya kayma ve jeodezik devinim (Geodetic precession) incelenecektir. Elde edilen teorik sonuçların deneysel ve gözlemsel verilerle karşılaştırılması sonucu GBP parametresi β için yeni üst sınırlar elde edilecektir. Son olarak bulduğumuz sınırlar literatürde elde edilen sınırlarla karşılaştırılacaktır.

4.3.1. GBP Modifiye Schwarzschild Metriği Etrafında Parçacık Hareketi

Modifiye metrik etrafındaki parçacığı ekvatorial düzlemde ($\theta = \pi/2$) düşünelim. Parçacığın Lagranjiyeni \mathcal{L} aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \left[-f(r) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2 \dot{\phi}^2 \right]. \quad (4.68)$$

Burada nokta λ afin parametresine göre türevi göstermektedir. Lagranjiyen t ve ϕ koordinatlarından bağımsız olduğundan, hareketin sabitleri parçacığın genelleştirilmiş momentumu p_μ 'den elde edilebilir. p_μ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}. \quad (4.69)$$

Yukarıdaki ilişkiden

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -f(r) \dot{t} = -e \quad \Longrightarrow \quad \dot{t} = \frac{e}{f(r)}, \quad (4.70)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \dot{\phi} = \ell \quad \Longrightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2} \quad (4.71)$$

elde edilebilir. Burada e ve ℓ sırasıyla parçacığın kütlesi başına enerjisine ve açısal momentumuna karşılık gelmektedir. Ayrıca

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -K \quad (4.72)$$

ifadesini yazabiliriz. Burada $K = 1$ kütleli parçacıklara, $K = 0$ kütsüz parçacıklara karşılık gelmektedir. (4.70), (4.71) ve (4.72) ifadelerinden

$$-\frac{e^2}{f(r)} + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + \frac{\ell^2}{r^2} = -K \quad (4.73)$$

yazabiliriz. Eğer (4.73) ifadesini $f(r)/2$ ile çarparsak ve (3.51) ile verilen deforme metriği kullanırsak

$$\frac{e^2 - K}{2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff} \quad (4.74)$$

elde edebiliriz. Burada V_{eff} parçacığın etkin potansiyeldir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$V_{eff} = -k\frac{M}{r} + \frac{\ell^2 + k\epsilon M^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3} + \epsilon\frac{M^2\ell^2}{2r^4}. \quad (4.75)$$

Özellikle burada bulduğumuz etkin potansiyel jeodezik devinim için kararlı dairesel bir yörünge arayışımızda oldukça yararlı olacaktır.

4.3.2. Shapiro Zaman Kayması

Bu bölümde GBP deforme Schwarzschild metriği için elektromanyetik sinyalin zaman gecikmesi hesaplanacaktır. 1964 yılında Irwin Shapiro kütleçekimsel alan nedeniyle fotonun seyahat süresindeki gecikmeyi ölçen bir test önermiştir [134]. Burada [135] numaralı referansta tanımlanan yöntem ile zaman gecikmesi incelenecektir.

Şekil 4.8: ile Shapiro zaman gecikmesini tanımlayabiliriz. Güneş'in O noktasında bulunduğunu varsayalım. Şimdi elektromanyetik sinyalin $(r_A, \pi/2, \phi_A)$ koordinatlarına sahip A noktasından $(r_B, \pi/2, \phi_B)$ koordinatlarına sahip B noktasına hareket ettiğini düşünelim. C ise elektromanyetik sinyalin Güneş'e en yakın geçtiği nokta olsun. Burada amacımız A'dan B'ye gidip geri dönen elektromanyetik sinyalin seyahat süresini hesaplamaktır. Kütsüz parçacıklar ($K = 0$) için (4.73) denklemini

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{dr}{dt} \frac{e}{f} \quad (4.76)$$

ifadesinin yardımıyla aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{e^2}{f(r)^3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{e^2}{f(r)} = 0. \quad (4.77)$$

En yakın nokta $r = r_C$ için $dr/dt = 0$ olacağından

$$\ell^2 = \frac{e^2 r_C^2}{f(r_C)} \quad (4.78)$$

bulunur. (4.78) ifadesini (4.77) ifadesinde kullanırsak

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = f(r)^2 \left(1 - \frac{f(r)r_C^2}{f(r_C)r^2} \right) \quad (4.79)$$

elde ederiz. Son ifadeyi aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz:

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{f(r)r_C^2}{f(r_C)r^2} \right) f(r)^2}}. \quad (4.80)$$

(4.80) ifadesini r_S/r ve r_S/r_C için seriye açarsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{f(r)r_C^2}{f(r_C)r^2} \right) f(r)^2}} &\approx \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_C^2}} + \frac{r^2 r_S}{(r^2 - r_C^2)^{3/2}} + \frac{r r_C r_S}{2(r^2 - r_C^2)^{3/2}} - \frac{3r_C^2 r_S}{2(r^2 - r_C^2)^{3/2}} \\ &- \frac{3r_C^3 r_S^2}{4(r^2 - r_C^2)^{5/2}} - \frac{3r^3 r_S^2 (\varepsilon - 4)}{8(r^2 - r_C^2)^{5/2}} + \frac{3r_C^2 r_S^2 r (2\varepsilon - 7)}{8(r^2 - r_C^2)^{5/2}} + \frac{3r_C^4 r_S^2 (5 - \varepsilon)}{8r(r^2 - r_C^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

bulunur. Seriyeye açılan terimlerin integralleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_C^2}} = \sqrt{r^2 - r_C^2}, \quad (4.82)$$

$$\int \frac{r^2 r_S dr}{(r^2 - r_C^2)^{3/2}} = r_S \ln \left(r + \sqrt{r^2 - r_C^2} \right) - \frac{r r_S}{\sqrt{r^2 - r_C^2}}, \quad (4.83)$$

$$\int \frac{r r_C r_S dr}{2(r^2 - r_C^2)^{3/2}} = \frac{-r_C r_S}{2\sqrt{r^2 - r_C^2}}, \quad (4.84)$$

$$- \int \frac{3r_C^2 r_S dr}{2(r^2 - r_C^2)^{3/2}} = \frac{3r r_S}{2\sqrt{r^2 - r_C^2}}, \quad (4.85)$$

$$-\int \frac{3r_C^3 r_S^2 dr}{4(r^2 - r_C^2)^{5/2}} = \frac{r(3r_C^2 - 2r^2)r_S^2}{4r_O(r^2 - r_C^2)^{3/2}}, \quad (4.86)$$

$$-\int \frac{3r^3 r_S^2 (\varepsilon - 4) dr}{8(r^2 - r_C^2)^{5/2}} = \frac{r_S^2 (3r^2 - 2r_C^2) (\varepsilon - 4)}{8(r^2 - r_C^2)^{3/2}}, \quad (4.87)$$

$$\int \frac{3r_C^2 r_S^2 r (2\varepsilon - 7) dr}{8(r^2 - r_C^2)^{5/2}} = \frac{r_C^2 r_S^2 (7 - 2\varepsilon)}{8(r^2 - r_C^2)^{3/2}}, \quad (4.88)$$

$$\int \frac{3r_C^4 r_S^2 (5 - \varepsilon) dr}{8r(r^2 - r_C^2)^{5/2}} = \frac{r_S^2 (5 - \varepsilon)}{8r_C} \left[\frac{(3r^2 - 4r_C^2) r_C}{(r^2 - r_C^2)^{3/2}} - 3 \arctan \left(\frac{r_C}{\sqrt{r^2 - r_C^2}} \right) \right]. \quad (4.89)$$

(4.82)-(4.89) integrallerini kullanırsak, A noktasından C noktasına elektromanyetik sinyalin seyahat süresi

$$t_{AC} = \sqrt{r_A^2 - r_C^2} + r_S \ln \left(\frac{r_A + \sqrt{r_A^2 - r_C^2}}{r_C} \right) + \frac{r_S}{2} \sqrt{\frac{r_A - r_C}{r_A + r_C}} \left(1 - \frac{r_S(4r_A + 5r_C)}{4r_C(r_A + r_C)} \right) + \frac{3(\varepsilon - 5)r_S^2}{8r_C} \left[\arctan \left(\frac{r_C}{\sqrt{r_A^2 - r_C^2}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (4.90)$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde C'den B'ye seyahat süresi

$$t_{BC} = \sqrt{r_B^2 - r_C^2} + r_S \ln \left(\frac{r_B + \sqrt{r_B^2 - r_C^2}}{r_C} \right) + \frac{r_S}{2} \sqrt{\frac{r_B - r_C}{r_B + r_C}} \left(1 - \frac{r_S(4r_B + 5r_C)}{4r_C(r_B + r_C)} \right) + \frac{3(\varepsilon - 5)r_S^2}{8r_C} \left[\arctan \left(\frac{r_C}{\sqrt{r_B^2 - r_C^2}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (4.91)$$

ile verilir. Elektromanyetik sinyalin toplam seyahat süresi $t_{top} = 2t_{AC} + 2t_{BC}$ ile verilir. Düz uzayzamanda toplam seyahat süresi

$$\tilde{t}_{tot} = 2 \left(\sqrt{r_A^2 - r_C^2} + \sqrt{r_B^2 - r_C^2} \right) \quad (4.92)$$

şeklindedir. Eğer $r_C \ll r_A, r_B$ ise, zaman gecikmesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\delta t = t_{tot} - \tilde{t}_{tot} = 4M \left(1 + \ln \left(\frac{4r_A r_B}{r_C^2} \right) - \frac{2M}{r_C} \left(1 + \frac{3(\varepsilon - 5)\pi}{8} \right) \right). \quad (4.93)$$

PPN formalizminde zaman gecikmesini [118]

$$\delta t = 4M \left(1 + \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right) \ln \left(\frac{4r_A r_B}{r_C^2} \right) \right) \quad (4.94)$$

olarak verebiliriz. Burada γ boyutsuz PPN parametresidir ve $\gamma = 1$ durumunda genel göreliliğin standart sonucunu verir. (4.93) ve (4.94) ifadeleri karşılaştırılırsa

$$|\gamma - 1| = \frac{GM|15\pi - 8 - 3\pi\varepsilon|}{2c^2 r_C \ln\left(\frac{4r_A r_B}{r_C^2}\right)} \quad (4.95)$$

elde edilir. Cassini uzay aracının ölçümlerine göre γ üzerindeki sınırlama $|\gamma - 1| < 2,3 \times 10^{-5}$ şeklindedir [136]. Ölçüm sırasında uzay aracı Güneş'ten $r_B = 8,46AB$ uzaklığında bulunmaktaydı. Dünya'nın Güneş'e olan uzaklığı $r_A = 1AB$ 'dir. Elektromanyetik sinyallerin Güneş'e en yakın mesafesi ise $r_C = 1,6R_\odot$ olarak saptanmıştır. Bu değerler kullanılırsa ε parametresinin değer aralığı

$$-44,9 < \varepsilon < 53,2 \quad (4.96)$$

olarak bulunur. $\varepsilon \leq 1$ şartını hatırlarsak

$$-44,9 < \varepsilon \leq 1 \quad (4.97)$$

yazılır. Böylece (3.54) ifadesinden β için üst sınır

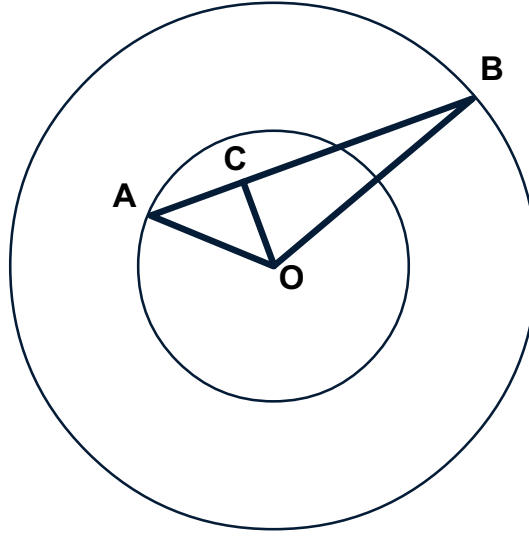
$$|\beta| < 3,6 \times 10^{78} \quad (4.98)$$

şeklinde elde edilir. Bu üst sınır ışığın bükülmesinde elde edilen sınırla aynı mertebededir. **Tablo 4.1:**'den görülebileceği gibi bu üst sınır kuantumlu sistemler için elde edilen üst sınırlardan daha büyüktür.

4.3.3. Kütleçekimsel Kırmızıya Kayma

Elektromanyetik sinyalin kütleçekimsel bir alan içerisinde A noktasından B noktasına seyahat ettiğini varsayalım. Deforme Schwarzschild metriği için sinyalin frekansındaki değişimi hesaplayalım. Kütleçekimsel kırmızıya kayma [135]

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \sqrt{\frac{f(r_A)}{f(r_B)}} \quad (4.99)$$



Şekil 4.8: Shapiro zaman gecikmesi.

ifadesiyle verilir. Burada r_A ve r_B elektromanyetik sinyalin radyal koordinatlarıdır. Burada sinyalin Dünya yüzeyinden ($r_A = R_{\oplus}$) h yüksekliğine hareket ettiğini düşünelim. Yani $r_B = R_{\oplus} + h$ olur. Böylece (4.99) ifadesinden

$$\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_A} + \varepsilon \frac{M^2}{r_A^2}}{1 - \frac{2M}{r_B} + \varepsilon \frac{M^2}{r_B^2}}} \quad (4.100)$$

yazılır. Yukarıdaki ifadenin seriye açılması durumunda frekanstaki değişim aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\Delta v}{v_A} = \frac{M(r_A - r_B)}{r_A r_B} \left[1 + \frac{M((3 - \varepsilon)r_A + (1 - \varepsilon)r_B)}{2r_A r_B} \right]. \quad (4.101)$$

Burada $\Delta v = v_B - v_A$ olarak tanımlıdır. Eğer (4.101)'de parantez içerisinde ikinci terimi ihmal edersek genel göreliliğin standart sonucuna ulaşırız.

Pound-Snider deneyini [137] dikkate alırsak, bağıl sapma

$$\frac{\frac{\Delta v}{v_A} - \left(\frac{\Delta v}{v_A}\right)^{GR}}{\left(\frac{\Delta v}{v_A}\right)^{GR}} < 0.01 \quad (4.102)$$

şeklinde verilir. (4.101) ifadesi (4.102) ifadesinde kullanılırsa

$$\frac{M((3 - \varepsilon)r_A + (1 - \varepsilon)r_B)}{2r_A r_B c^2} < 0.01 \quad (4.103)$$

elde edilir. Dünya'nın kütlesi ve yarıçapı $M_{\oplus} = 5,972 \times 10^{24}$ kg, $R_{\oplus} = 6378$ km olarak verilir. Deneyin yapıldığı kulenin yükseliği $h = 22,86$ metredir. Böylece

$$-1,4 \times 10^7 < \varepsilon \quad (4.104)$$

elde ederiz. β boyutsuz parametresinin üst sınırı ise

$$|\beta| < 1.1 \times 10^{73} \quad (4.105)$$

olarak hesaplanabilir. Burada elde ettiğimiz üst sınır Shapiro zaman gecikmesinden elde edilen üst sınırdan daha küçüktür. Fakat kuantum sistemlerinden elde edilen üst sınırlardan büyüktür.

4.3.4. Jeodezik Devinim

Son olarak GBP modifiye metriğimiz için jeodezik devinimi (geodetic precession) inceleyeceğiz. Bu bölümde [138] ile tanımlanan yöntem izlenecektir. Şimdi s spin dördü vektörüne sahip bir jiroskobu M kütleli küresel bir cismin etrafında düşünelim. \mathbf{u} hız dördü vektörüne sahip bir jiroskop aşağıda verilen geodezik denklemini sağlar:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0. \quad (4.106)$$

Burada $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ Christoffel sembolüdür. Ayrıca jiroskobun hareketi

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha s^\mu u^\nu = 0 \quad (4.107)$$

denkleminde tanımlanabilir. (4.107) ile verilen ifadeye jiroskop denklemi denir. Spin ve dört hız vektörleri

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{u} = g_{\mu\nu} s^\mu u^\nu = 0 \quad (4.108)$$

ile verilen şartı sağlarlar. Spinin büyüklüğü s_* olmak üzere

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = g_{\mu\nu} s^\mu s^\nu = s_*^2 \quad (4.109)$$

yazılabilir. s_* hareket sabitidir. Basitlik için ekvatorial düzlemde dairesel bir yörünge düşünelim. Yani $\theta = \pi/2$, $\dot{r} = 0 = \dot{\theta}$ seçelim. Böylece \mathbf{u} hız dörtlü vektörünün uzaysal tek bileşeni

$$u^\phi = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \Omega u^t \quad (4.110)$$

olarak verilir. Burada Ω açısal hızı göstermektedir. \mathbf{u} 'nun bileşenleri

$$\mathbf{u} = u^t (1, 0, 0, \Omega) \quad (4.111)$$

olarak verilir. Kararlı dairesel bir yörünge için (4.74)'ü

$$\frac{e^2 - 1}{2} = V_{eff} \quad (4.112)$$

olarak yazabiliriz. Dairesel yörünge yarıçapı \mathcal{R}

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \quad (4.113)$$

ifadesinden elde edilebilir. (4.75) ile verilen etkin potansiyelin son terimini ihmal edersek ve (4.113)'ü kullanırsak

$$\mathcal{R} = \frac{\epsilon M^2 + \ell^2}{2M} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2 \ell^2}{(\epsilon M^2 + \ell^2)^2}} \right) \quad (4.114)$$

buluruz. (4.113) ve (4.114) ifadelerinden e^2 ve ℓ^2 ifadeleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$e^2 = \left(1 - \frac{2M}{\mathcal{R}} + \frac{\epsilon M^2}{\mathcal{R}^2} \right) \left(1 + \frac{\ell^2}{\mathcal{R}^2} \right), \quad (4.115)$$

$$\ell^2 = M \mathcal{R} \left(1 - \frac{\epsilon M}{\mathcal{R}} \right) \left(1 - \frac{3M}{\mathcal{R}} \right)^{-1}. \quad (4.116)$$

(4.70) ve (4.71) ifadelerinden açısal yörünge hızı

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{f(r) \ell}{r^2 e} \quad (4.117)$$

olarak bulunur. (4.115) ve (4.116) yukarıdaki ifadede kullanılırsa

$$\Omega^2 = \frac{M}{\mathcal{R}^3} \left(1 - \frac{\varepsilon M}{\mathcal{R}}\right) \left(1 - \frac{2M}{\mathcal{R}} + \frac{\varepsilon M^2}{\mathcal{R}^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{\mathcal{R}} - \frac{\varepsilon M^2}{\mathcal{R}^2}\right)^{-1} \quad (4.118)$$

elde edilir. (4.118) ifadesini

$$\Omega^2 = \frac{M}{\mathcal{R}^3} \left(1 - \frac{\varepsilon M}{\mathcal{R}}\right) \left(1 - \frac{4M}{\mathcal{R}^2} + \frac{2\varepsilon M^2}{\mathcal{R}^2} + \frac{\varepsilon^2 M^4}{\mathcal{R}^4}\right) \quad (4.119)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Yukarıdaki ifade için $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ ($\alpha \ll 1$) yaklaşımını kullandık. Daha yüksek mertebeden terimleri ihmal edersek (4.119) ifadesini

$$\Omega = \sqrt{\frac{M}{\mathcal{R}^3} \left(1 - \frac{\varepsilon M}{\mathcal{R}}\right)} \quad (4.120)$$

olarak yazabiliriz.

Şimdi (4.107) ile verilen jiroskop denklemini çözelim. Başlangıçta spin vektörünün radyal doğrultuda olduğunu varsayalım. Yani $s^t(0) = s^\theta(0) = s^\phi(0) = 0$ olur. (4.108) ile verilen şartını kullanırsak s^t ve s^ϕ arasındaki şartı

$$s^t = \Omega \mathcal{R}^2 \left(1 - \frac{2M}{\mathcal{R}} + \frac{\varepsilon M^2}{\mathcal{R}^2}\right)^{-1} s^\phi \quad (4.121)$$

şeklinde elde ederiz. (4.111) ve (4.121) ifadelerinin de yardımıyla jiroskop denkleminin radyal bileşenini

$$\frac{ds^r}{d\tau} + \left(3M - \mathcal{R} - \frac{2\varepsilon M^2}{\mathcal{R}}\right) \Omega s^\phi u^t = 0 \quad (4.122)$$

olarak buluruz. Jiroskop denkleminin θ ve ϕ bileşenleri ise aşağıdaki gibi verilir:

$$\frac{ds^\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta s^\phi u^\phi = 0, \quad (4.123)$$

$$\frac{ds^\phi}{d\tau} + \frac{\Omega}{\mathcal{R}} s^r u^t = 0. \quad (4.124)$$

Yörünge ekvatorial düzlemde olduğu için (4.123) denklemi $\frac{ds^\theta}{d\tau} = 0$ şekline indirgenir. $s^\theta(0) = 0$ başlangıç şartını göz önüne alırsak, s^θ yörünge boyunca sıfır kalır. $u^t = dt/d\tau$ ifadesi (4.122) ve (4.124) denklemlerinde kullanılırsa

$$\frac{ds^r}{dt} + \left(3M - \mathcal{R} - \frac{2\epsilon M^2}{\mathcal{R}}\right) \Omega s^\phi = 0, \quad (4.125)$$

$$\frac{ds^\phi}{dt} + \frac{\Omega}{\mathcal{R}} s^r = 0 \quad (4.126)$$

bulunur. (4.126), (4.125) içerisinde kullanılırsa

$$\frac{d^2 s^\phi}{dt^2} + \tilde{\Omega}^2 s^\phi = 0 \quad (4.127)$$

elde edilir. Burada

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{1 - \frac{3M}{\mathcal{R}} + \frac{2\epsilon M^2}{\mathcal{R}^2}} \Omega \quad (4.128)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylece (4.122) ve (4.123) denklemlerinin çözümü

$$s^r(t) = s_* \sqrt{1 - \frac{2M}{\mathcal{R}} + \frac{\epsilon M^2}{\mathcal{R}^2}} \cos(\tilde{\Omega}t), \quad (4.129)$$

$$s^\phi(t) = -s_* \frac{\Omega}{\tilde{\Omega} \mathcal{R}} \sqrt{1 - \frac{2M}{\mathcal{R}} + \frac{\epsilon M^2}{\mathcal{R}^2}} \sin(\tilde{\Omega}t) \quad (4.130)$$

olarak bulunur. Bu çözümlerin elde edilmesi için $s \cdot s = s_*^2$ ve $s^t(0) = s^\phi(0) = 0$ şartlarını kullandık.

Spin başlangıçta $\mathbf{e}_{\hat{r}} = (0, \sqrt{f(r)}, 0, 0)$ birim radyal vektörü boyunca yönelmiştir. Dairesel yörünge boyunca tam bir dönüş $P = 2\pi/\Omega$ olursa, spinin doğrultasındaki değişim

$$\left[\frac{\mathbf{s}}{s_*} \cdot \mathbf{e}_{\hat{r}} \right]_{t=P} = \cos\left(\frac{2\pi\tilde{\Omega}}{\Omega}\right). \quad (4.131)$$

olarak verilir. Sonunda

$$\Delta\Phi_{geodetic} = 2\pi - 2\pi \sqrt{1 - \frac{3M}{\mathcal{R}} + \frac{2\epsilon M^2}{\mathcal{R}^2}} \quad (4.132)$$

bulunur. Böylece Güneş sistemi için jeodezik devinim yaklaşık olarak (doğal sabitlerle)

$$\Delta\Phi_{geodetic} = \Delta\Phi_{GR} \left(1 - \frac{2\varepsilon GM}{3\mathcal{R}c^2} \right) \quad (4.133)$$

şeklinde verilir. Burada genel göreliliğin standart sonucu $\Delta\Phi_{GR}$ ile gösterilmektedir ve $\Delta\Phi_{GR} = \frac{3\pi GM}{\mathcal{R}c^2}$ ile verilir. Gravity Probe B (GPB) ölçümlerine [139] göre jeodezik devinimin değeri

$$\Delta\Phi_{geodetic} = (6601,8 \pm 18,3) \text{ mys/sene} \quad (4.134)$$

şeklindedir. GPB'nin Dünya'dan yükseliği 642km ve yörünge periyodunu 97,65dk alırsak, genel göreliliğin öngördüğü değer $\Delta\Phi_{GR} = 6606,1 \text{ mys/yıl}$ olarak bulunur. Sonunda ε için değer aralığı

$$-5 \times 10^6 < \varepsilon < 8,1 \times 10^6 \quad (4.135)$$

olarak bulunur. Tekrar $\varepsilon \leq 1$ şartını hatırlarsak

$$-5 \times 10^6 < \varepsilon \leq 1 \quad (4.136)$$

elde ederiz. Boyutsuz β parametresi ise

$$|\beta| < 3.7 \times 10^{72} \quad (4.137)$$

olarak elde edilir. Bu sınır Shapiro zaman genişlemesi ve kütleçekimsel kırmızıya kaymaya göre daha küçük bir sınırdır. Fakat kuantum deneylerinden elde edilen sınırlardan daha büyüktür.

4.3.5. Diğer β Sınırlarıyla Karşılaştırma

Tablo 4.1:'de çeşitli deneysel ve gözlemsel verilerden elde edilen β üst sınırları verilmiştir. Tablodan görülebileceği gibi kuantum sistemler için bulunan üst sınırlar kütle çekimsel sistemler için bulunan sınırlardan daha küçüktür. Kuantum sistemlerinin aksine, kütleçekimsel sistemler genelde daha büyük üst sınırlar vermektedir. [106] numaralı referansta kara delik gölgesi için $\beta < 10^{90}$ elde edilmiştir. Bildiğimiz kadarıyla literatürdeki

en büyük değere sahip üst sınırdır. Ayrıca [104, 107] numaralı referanslarda β için üst limit GBP modifiye Friedmann denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Dispersiyon ilişkisinin GBP modifikasyonunda dayanan [103] numaralı çalışmada kütleçekimsel dalga olayı GW150914 için $\beta < 10^{60}$ üst sınırı elde edilmiştir [140, 141].

Tablodan görüleceği gibi Scardigli ve Casadio [8] deforme GBP metriğini kullanarak ışığın sapması için $|\beta| < 10^{78}$, perihel kayması için $|\beta| < 10^{69}$ ve pulsar periastron kayması için $|\beta| < 10^{71}$ üst sınırlarını elde etmişlerdir. Bu sınırlara ek olarak biz de GBP modifiye metriğini kullanarak Shapiro zaman gecikmesi için $|\beta| < 10^{78}$, kütleçekimsel kırmızıya kayma için $|\beta| < 10^{73}$ ve jeodezik devinim için $|\beta| < 10^{72}$ üst sınırlarını elde ettik. Jeodezik devinimden gelen sınır bizim elde ettiklerimiz içerisinde en küçük değere sahiptir. Fakat GBP modifiye Schwarzschild metriği için en küçük değer Merkür'ün perihel kayması için elde edilmiştir [8].

Hem bu tezde hem de [8] referansından farklı olarak Gosh kütleçekimsel kırmızıya kayma için $|\beta| < 10^{26}$, etki-tepki yasası için $|\beta| < 10^{21}$ ve serbest düşme için $|\beta| < 10^{21}$ şeklinde daha küçük değerli üst sınırlar elde etmiştir [98]. Bu sınırlar kütleçekimsel sistemler için elde edilen sınırlardan çok küçüktür. Referans [98]'de kullanılan yöntem Poisson parantezlerinin modifikasyonuna dayanmaktadır. Bu da eşdeğerlik ilkesinin ihlaline neden olmaktadır. [142] numaralı referansta yayınlanan makalede Poisson parantezlerinin GBP modifikasyonunun makroskobik seviyede eşdeğerlik ilkesinin ihlali, kötü tanımlanmış klasik limit gibi kusurları olduğu gösterilmiştir. Örneğin; bir test parçacığının yörüngesi [142]

$$\ddot{r} \simeq -\frac{M}{r^2} \left(1 + 4\beta \frac{m^2}{M_p^2} \dot{r}^2 \right) \quad (4.138)$$

ile tanımlanabilir. Burada ivme açıkça parçacığın kütlesi m 'ye ve hızı \dot{r} 'ye bağlıdır. Bu açıkça eşdeğerlik ilkesinin ihalidir. Ayrıca GBP terimi test parçacığının kütlesinin karesiyle orantılı bir şekilde artar. Bu genel görelilikten büyük bir sapmaya neden olabilir. ¹⁵ Diğer problem ise kötü tanımlanan klasik limit yüzünden ırsaksamalardır. ¹⁶ Diğer yandan (3.51) ile verilen deforme metrik eşdeğerlik ilkesini ihlal etmemektedir. Deforme metrik sadece GBP modifiye sıcaklığıyla ilişkilidir. Poisson parantezleri modifiye edilmediğinden, yukarıdaki kusurlar söz konusu değildir.

¹⁵ Daha fazla ayrıntı için [143] numaralı çalışmaya, [8] numaralı çalışmadaki son eklere ve [142] numaralı çalışmadaki (10), (14) ve (15) numaralı denklemlere bakınız.

¹⁶ [142] numaralı çalışmadaki (19) ve (21) numaralı denklemlere bakınız.

Son olarak yakın zamanda yayınlanan bir çalışmadan bahsedelim. [144] numaralı çalışmada yazarlar GW150914 [140, 141] ve GW190521 [145] olayları için KGBP'nin yanı sıra aşağıdaki gibi verilen

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} + 4\alpha^2 \right) \Delta p^2 + 4\alpha^2 \langle p \rangle^2 - 2\alpha \sqrt{\langle p^2 \rangle} \right] \quad (4.139)$$

KLGBP'yi kullanmışlardır. [103] numaralı referanstan farklı olarak uzayzamanın eğriliğini göz önüne alıp ışığın hızının GBP ile modifiye edildiğini varsaymışlardır. (4.139) ifadesindeki boyutsuz α parametresi için $\alpha < 10^8$ gibi çok küçük bir üst sınır elde etmişlerdir. Bu sınır kütleçekimsel sistemler içerisinde açık ara en iyi üst sınır değeridir.

Tablo 4.1:'den görüleceği gibi kuantum sistemlerden gelen üst sınırların hemen hemen hepsinden küçüktür.

| Deney | β | Referans |
|--------------------------------------|--------------------|----------|
| Lamb kayması | 10^{36} | [93] |
| Landau seviyeleri | 10^{50} | [93] |
| Taramalı tünelleme mikroskobu | 10^{21} | [93] |
| Harmonik salıncılar | 10^6 | [105] |
| Kütleçekimsel dalgalar | 10^{60} | [103] |
| Işığın sapması | 10^{78} | [8] |
| Perihel kayması | 10^{69} | [8] |
| Pulsar periastron kayması | 10^{71} | [8] |
| Kara delik gölgesi | 10^{90} | [106] |
| Kozmolojik veriler | 10^{81} | [104] |
| Kozmolojik veriler | $10^{59}, 10^{81}$ | [107] |
| Shapiro zaman gecikmesi | 10^{78} | bu tezde |
| Kütleçekimsel kırmızıya kayma | 10^{73} | bu tezde |
| Jeodezik devinim | 10^{72} | bu tezde |

Tablo 4.1: Çeşitli deneylerden ve gözlemlerden elde edilen boyutsuz β parametresinin üst sınırları.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında Heisenberg belirsizlik ilkesinin kuantum kütleçekim etkileri modifikasyonu olan GBP ele alınmıştır. GBP modifiye vdW kara delik çözümü elde edilip termodinamik özellikleri incelenmiştir. Friedmann denklemleri GBP etkilerini içerecek şekilde modifiye edilip evrenin tüm dönemleri için etkileri incelenmiştir. Son olarak GBP Shapiro zaman gecikmesi, kütleçekimsel kırmızıya kayma ve jeodezik devinim için incelenmiştir.

İlk olarak [5] numaralı çalışmada önerilen vdW kara delik çözümü KGBP etkilerini içerecek şekilde modifiye edilmiştir. Bulunan çözüme karşı gelen bir anizotropik stres enerji tensörü belirlenip enerji şartları kontrol edilmiştir. Bulunan çözüm standart vdW kara deliğine benzer şekilde olay ufku civarında tüm enerji şartların sağlamaktadır. Daha büyük radyal koordinat değerleri için enerji şartları ihlal edilebilir. Modifiye çözümün termodinamik özellikleri ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Özellikle GBP etkilerinin göz önüne alınması durumunda sıvı-gaz faz geçişine benzer şekilde küçük-büyük kara delik faz geçişi tanımlamak mümkün hale gelmektedir. Standart vdW kara deliğinin de benzer bir faz geçişine sahip olduğu gösterilmiştir. Fakat faz geçişi fiziksel olarak kabul edilebilir bir faz geçişi değildir. Çünkü faz geçiş kolu negatif olay ufku değerine karşılık gelmektedir. Ayrıca standart ve modifiye durumlar için entropi, sıcaklık, ısı sığası, hacim ve kütle incelenmiştir.

İkinci olarak Friedmann denklemleri DSR-GUP [9] kullanılarak modifiye edilmiştir. Friedmann denklemlerini modifiye etmek için Akbar ve Cai tarafından önerilen yöntem kullanılmıştır [7]. Yani görünür ufuk \tilde{r}_A için tanımlanan TBY kullanılarak Friedmann denklemleri elde edilmiştir. Öncelikle DSR-GUP ile entropi-alan ilişkisi modifiye edilmiştir. Ardından TBY aracılığıyla modifiye entropi-alan ilişkisinden modifiye Friedmann denklemleri elde edilmiştir. Bulunan modifiye denklemler açıkça evrenin başlangıç aşamasındaki tekilliği ortadan kaldırmaktadır. Evrenin sonlu minimum bir noktadan genişlemeye başladığını öngörmektedir. Bu durum kozmolojinin standart modeliyle karşılaştırıldığında en önemli fark olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca evrenin her dönemi için yavaşlama parametresi $p = \omega\rho$ hal denklemi için incelenmiştir. Enflasyon aşamasında hızlanarak genişleme için $\omega < -3/5$ olması gerektiği bulunmuştur. Radyasyon ve madde

dönemleri için DSR-GUP etkileri göz önüne alındığında genişlemenin daha yavaş olduğu sonucuna ulaşılmıştır. DSR-GUP etkilerinin geç dönem genişleme için karanlık enerjiye bir seçenek olup olmayacağı incelenmiştir. Sonuçlar DSR-GUP'un evrenin geç dönemindeki genişlemeyi açıklamaya yeterli olmadığını göstermektedir ve karanlık maddeye genişlemeyi açıklamak için ihtiyaç olduğu şeklindedir. Son olarak modifiye Friedmann denklemlerinin evrenin tüm dönemleri için TGIY'yi sağladığı gösterilmiştir. Yani evrenin tüm dönemleri için entropi zamanla azalmamaktadır.

Bu tezde son olarak Scardigli ve Casadio tarafından önerilen GBP modifiye metrik [8] için Shapiro zaman genişlemesi, kütleçekimsel kırmızıya kayma ve jeodezik devinim incelenmiştir. Elde edilen teorik sonuçların gözlemsel verilerle karşılaştırılması durumunda KGBP boyutsuz parametresi β için üst sınırlar elde edilmiştir. Bu üst sınırlar Shapiro zaman gecikmesi için $|\beta| < 10^{78}$, kütleçekimsel kırmızıya kayma için $|\beta| < 10^{73}$ ve jeodezik devinim için $|\beta| < 10^{72}$ olarak elde edilmiştir. Elde ettiğimiz sınırların literatürde elde edilen sınırlarla ayrıntılı bir karşılaştırması yapılmıştır. Özellikle kuantum sistemlerden gelen üst sınırların kütleçekimsel sistemlere göre daha küçük olduğu görülmektedir. Kütleçekimsel sistemlerden genelde çok büyük üst sınırlar elde edilmektedir. Scardigli ve Casadio tarafından ışığın sapması için $|\beta| < 10^{78}$, Merkür'ün perihel noktasının kayması için $|\beta| < 10^{69}$ ve pulsar periastron kayması için $|\beta| < 10^{71}$ elde edilmiştir. Bizim bulduğumuz üst sınırlar içinde en küçüğü jeodezik devinimden gelen üst sınırdır. Fakat sonuçlarımız Scardigli ve Casadio tarafından bulunan sonuçlarla karşılaştırıldığında en küçük üst sınır Merkür'ün perihel noktasının kaymasından gelmektedir.

Özetlemek gerekirse bu tezde kuantum kütleçekim etkilerini göz önüne alarak kara deliklerin termodinamiği, kozmolojiyi ve bazı kütle çekimsel testleri ele aldık. Burada incelediğimiz GBP, standart genel göreliliğin açıklamada yetersiz kaldığı yerleri aydınlatma bakımından oldukça önemlidir. Özellikle 2. bölümde ayrıntılı olarak ele aldığımız minimum mesafe düşüncesi standart genel göreliliğin başa çıkamadığı tekillikleri ortadan kaldırma potansiyeline sahiptir. Başta kara deliklerin termodinamiği, Friedmann denklemleri ve kuantumlu sistemleri GBP kullanarak modifiye etmek mümkündür. Yani genel görelilik dışında kuantumlu sistemleri de KKT ile ilişkilendirmek mümkündür. Bu tezde sunulan çalışmalar literatürdeki çalışmalarını desteklemektedir ve literatüre katkı vermektedir.

KAYNAKLAR

- [1]. Maggiore, M., 1993, A generalized uncertainty principle in quantum gravity, *Physics Letters B*, **304**(1-2), 65-69.
- [2]. Adler, R. J., Chen, P., Santiago, D. I., 2001, The Generalized Uncertainty Principle and Black Hole Remnants, *General Relativity and Gravitation*, **33**, 2101–2108.
- [3]. Xiang, L., Wen, X. Q., 2009, A heuristic analysis of black hole thermodynamics with generalized uncertainty principle, *Journal of High Energy Physics*, **2009**(046), 0-18.
- [4]. Kubiznak, D., Mann, R. B., 2012, P–V criticality of charged AdS black holes, *Journal of High Energy Physics*, **2012**(033), 0-24.
- [5]. Rajagopal, A., Kubiznak, D., Mann, R. B., 2014, Van der Waals black hole, *Physics Letters B*, **737**, 277-279.
- [6]. Cai, R. G., Kim, S. P., 2005, First law of thermodynamics and Friedmann equations of Friedmann-Robertson-Walker universe, *Journal of High Energy Physics*, **2005**(050), 0-12.
- [7]. Akbar, M., Cai, R. G., 2007, Thermodynamic behavior of the Friedmann equation at the apparent horizon of the FRW universe, *Physical Review D*, **75**(8), 084003-084011.
- [8]. Scardigli, F., Casadio, R., 2015, Gravitational tests of the generalized uncertainty principle, *The European Physical Journal C*, **75**(425), 1-12.
- [9]. Chung, W. S., Hassanabadi, H., 2018, New generalized uncertainty principle from the doubly special relativity, *Physics Letters B*, **785**, 127-131.
- [10]. Maghsoodi, E., Hassanabadi, H., Chung, W., S., 2019, Black hole thermodynamics under the generalized uncertainty principle and doubly special relativity, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, **2019**(8), 1-10.
- [11]. Veneziano, G., 1986, A Stringy Nature Needs Just Two Constants, *Europhysics Letters*, **2**(3), 199-204.
- [12]. Amati, D., Ciafaloni, M., Veneziano, G., 1987, Superstring collisions at planckian energies, *Physics Letters B*, **197**(1-2), 81-88.
- [13]. Amati, D., Ciafaloni, M., Veneziano, G., 1989, Can spacetime be probed below the string size?, *Physics Letters B*, **216**(1-2), 41-47.
- [14]. Gross, D. J., Mende, P. F., 1987, The high-energy behavior of string scattering amplitudes, *Physics Letters B*, **197**(1-2), 129-134.
- [15]. Gross, D. J., Mende, P. F., 1988, String theory beyond the Planck scale, *Nuclear Physics B*, **303**(3), 407-454.

- [16]. Konishi, K., Paffuti, G., Provero, P., 1990, Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory, *Physics Letters B*, **234**(3), 276-284.
- [17]. Scardigli, F., 1999, Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment, *Physics Letters B*, **452**(1-2), 39-44.
- [18]. Medved, A. J. M., Vagenas, E. C., 2004, When conceptual worlds collide: The generalized uncertainty principle and the Bekenstein-Hawking entropy, *Physical Review D*, **70**(12), 124021-124025.
- [19]. Nozari, K., Mehdipour, S. H., 2005, GRAVITATIONAL UNCERTAINTY AND BLACK HOLE REMNANTS, *Modern Physics Letters A*, **20**(38), 2937-2948.
- [20]. Nouicer, K., 2007, Quantum-corrected black hole thermodynamics to all orders in the Planck length, *Physics Letters B*, **646**(2-3), 63-71.
- [21]. Nozari, K., Mehdipour, S. H., 2008, Quantum gravity and recovery of information in black hole evaporation, *Europhysics Letters*, **84**(2), 20008-20011.
- [22]. Nowakowski, M., Arraut, I., 2009, THE MINIMUM AND MAXIMUM TEMPERATURE OF BLACK BODY RADIATION, *Modern Physics Letters A*, **24**(26), 2133-2137.
- [23]. Arraut, I., Nowakowski, M., 2009, Classical and Quantum Gravity Comparing two approaches to Hawking radiation of Schwarzschild–de Sitter black holes, *Classical and Quantum Gravity*, **26**(12), 125006-125027.
- [24]. Jizba, P., Kleinert, H., Scardigli, F., 2010, Uncertainty relation on a world crystal and its applications to micro black holes, *Physical Review D*, **81**(8), 084030-084042.
- [25]. Banerjee, R., Ghosh, S., 2010, Generalised uncertainty principle, remnant mass and singularity problem in black hole thermodynamics, *Physics Letters B*, **688**(2-3), 224-229.
- [26]. Majumder, B., 2011, Black hole entropy and the modified uncertainty principle: A heuristic analysis, *Physics Letters B*, **703**(4), 402-405.
- [27]. Scardigli, F., Gruber, C., Chen, P., 2011, Black hole remnants in the early universe, *Physical Review D*, **83**(6), 063507-063536.
- [28]. Nozari, K., Saghafi, S., 2012, Natural cutoffs and quantum tunneling from black hole horizon, *Journal of High Energy Physics*, **2012**(5), 0-17.
- [29]. Gangopadhyay, S., Dutta, A., Saha, A., 2014, Generalized uncertainty principle and black hole thermodynamics, *General Relativity and Gravitation*, **46**(1661), 1-10.
- [30]. Feng, Z. W., Li, H. L., Yang, S. Z., 2016, Quantum corrections to the thermodynamics of Schwarzschild–Tangherlini black hole and the generalized uncertainty principle, *The European Physical Journal C*, **76**(212), 1-9.
- [31]. Sakallı, İ., Övgün, A., Jusufi, K., 2016, GUP assisted Hawking radiation of rotating acoustic black holes, *Astrophysics and Space Science*, **361**(330), 1-7.

- [32]. Vagenas, E. C., Alsaleh, S. M., ALi, A. F., 2018, GUP parameter and black-hole temperature, *Europhysics Letters*, **120**(4), 40001-40005.
- [33]. Gecim, G., Sucu, Y., 2017, The GUP effect on Hawking radiation of the 2+1 dimensional black hole, *Physics Letters B*, **773**, 391-394.
- [34]. Sun, Z., Ma, M. S., 2018, The critical behaviors of the black holes with the generalized uncertainty principle, *Europhysics Letters*, **122** (6), 60002-60007.
- [35]. Gecim, G., Sucu, Y., 2018, Quantum gravity effect on the Hawking radiation of charged rotating BTZ black hole, *General Relativity and Gravitation*, **50**(152), 1-15.
- [36]. Gecim, G., Sucu, Y., 2019, Quantum gravity effect on the Hawking radiation of spinning dilaton black hole, *The European Physical Journal C*, **79**(882), 1-9.
- [37]. Kanzi, S., Sakallı, İ., 2019, GUP modified Hawking radiation in bumblebee gravity, *Nuclear Physics B*, **946**(114703), 1-21.
- [38]. Ökcü, Ö., Aydın, E., 2020, GUP-Corrected van der Waals Black Holes, *International Journal of Theoretical Physics*, **59**, 2839–2851.
- [39]. Gecim, G., 2020, GUP effect on thermodynamical properties of the noncommutative rotating BTZ black hole, *Modern Physics Letters A*, **35**(25), 2050208-2050230.
- [40]. Awad, A., Ali, A. F., 2014, Minimal length, Friedmann equations and maximum density, *Journal of High Energy Physics*, **2014**(93), 0-14.
- [41]. Salah, M., Hammad, F., Faizal, M., Ali, A. F., 2017, Minimal length, Non-singular and cyclic universe from the modified GUP, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2017**(035), 0-20.
- [42]. Ökcü, Ö., Corda, C., Aydın, E., 2020, Modified Friedmann equations from DSR–GUP, *Europhysics Letters*, **129**(5), 50002-50007.
- [43]. Kempf, A., Mangano, G., Mann, R. B., 1995, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation, *Physical Review D*, **52**(2), 1108-1118.
- [44]. Kempf, A., 1994, Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry, *Journal of Mathematical Physics*, **35**(9), 4483-4496.
- [45]. Kempf, A., 1997, On quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta, *Journal of Mathematical Physics*, **38**(3), 1347-1372.
- [46]. Nozari, K., Etemadi, A., 2012, Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics, *Physical Review D*, **85**(10), 104029-104040.
- [47]. Cavaglia, M., Das, S., Maartens, R., 2003, Will we observe black holes at the LHC?, *Classical and Quantum Gravity*, **20**(15), L205-L212.
- [48]. Cavaglia, M., Das, S., 2004, How classical are TeV-scale black holes?, *Classical and Quantum Gravity*, **21**(19), 4511–4522.

- [49]. Ali, A. F., 2012, No existence of black holes at LHC due to minimal length in quantum gravity, *Journal of High Energy Physics*, **2012**(67), 0-13.
- [50]. Hossenfelder, S., 2013, Minimal Length Scale Scenarios for Quantum Gravity, *Living Reviews in Relativity*, **16**(2), 1-90.
- [51]. Tawfik, A., Diab, A., 2014, Generalized uncertainty principle: Approaches and applications, *International Journal of Modern Physics D*, **23**(12), 1430025-1430144.
- [52]. Bekenstein, J. D., 1972, Black holes and the second law, *Lettere al Nuovo Cimento*, **4**, 737-740.
- [53]. Bekenstein, J. D., 1973, Black Holes and Entropy, *Physical Review D*, **7**(8), 2333-2346.
- [54]. Bardeen, J. M., Carter, B., Hawking, S. W., 1973, The four laws of black hole mechanics, *Communications in Mathematical Physics*, **31**, 161-170.
- [55]. Hawking, S. W., 1974, Black hole explosions?, *Nature*, **248**, 30-31.
- [56]. Bekenstein, J. D., 1974, Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics, *Physical Review D*, **9**(12), 3292-3300.
- [57]. Hawking, S. W., 1975, Particle creation by black holes, *Communications in Mathematical Physics*, **43**, 199-220.
- [58]. Ohanian, H., Ruffini, R., 1994, *Gravitation and Spacetime*, 2nd ed., W. W. Norton.
- [59]. Hawking, S. W., Page, D. N., 1983, Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space, *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 577-588.
- [60]. Chamblin, A., Emparan, R., Johnson, C. V., Myers, R. C., 1999, Charged AdS black holes and catastrophic holography, *Physical Review D*, **60**(6), 064018-064034.
- [61]. Chamblin, A., Emparan, R., Johnson, C. V., Myers, R. C., 1999, Holography, thermodynamics, and fluctuations of charged AdS black hole, *Physical Review D*, **60**(10), 104026-104045.
- [62]. Kastor, D., Ray, S., Traschen, J., 2009, Enthalpy and the mechanics of AdS black holes, *Classical and Quantum Gravity*, **26**(19), 195011-195026.
- [63]. Johnson, C. V., 2014, Holographic heat engines, *Classical and Quantum Gravity*, **31**, 205002-205014.
- [64]. Ökcü, Ö., Aydiner, A., 2017, Joule-Thomson expansion of the charged AdS black holes, *The European Physical Journal C*, **77**(24), 1-7.
- [65]. Ökcü, Ö., Aydiner, A., 2018, Joule-Thomson expansion of Kerr-AdS black holes, *The European Physical Journal C*, **78**(123), 1-6.
- [66]. Dolan, B. P., 2011, Compressibility of rotating black holes, *Physical Review D*, **84**(12), 127503-127505.

- [67]. Altamirano, N., Kubiznak, D., Mann, R. B., Sherkatghanad, Z., 2014, Thermodynamics of Rotating Black Holes and Black Rings: Phase Transitions and Thermodynamic Volume, *Galaxies*, **2**(1), 89-159.
- [68]. Kubiznak, D., Mann, R. B., Teo, M., 2017, Black hole chemistry: thermodynamics with Lambda, *Classical and Quantum Gravity*, **34**, 063001-063066.
- [69]. Ökcü, Ö., 2016, *Reissner-Nordström-AdS Karadeliklerinin Genişletilmiş Faz Uzayındaki Termodinamik Özellikleri*, Yüksek Lisans, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [70]. Delsate, T., Mann, R. B., 2015, Van Der Waals black holes in d dimensions, *Journal of High Energy Physics*, **2015**(70), 0-16.
- [71]. Upadhyay, S., Pourhassan, B., 2019, Logarithmic-corrected van der Waals black holes in higher-dimensional AdS space, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, **2019**(1), 1-15.
- [72]. Setare, M. R., Adami, H., 2015, Polytopic black hole, *Physical Review D*, **91**(8), 084014-084016.
- [73]. Abchouyeh, M. A., Mirza, B., Takrami, M. K., 2018, Anyon black holes, *Physics Letters B*, **780**, 240-245.
- [74]. Xu, W., 2018, Exact anyon black hole solutions, *The European Physical Journal C*, **78**(871), 1-7.
- [75]. Debnath, U., 2019, Thermodynamic Black Hole with Modified Chaplygin Gas as a Heat Engine, *arxiv:1903.04379*, 1-6.
- [76]. Poisson, E., 2004, *A. Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black Hole Mechanics*, 1st edn., Cambridge University Press, Cambridge.
- [77]. Jacobson, T., 1995, Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State, *Physical Review Letters*, **75**(7), 1260-1263.
- [78]. Padmanabhan, T., 2002, Classical and quantum thermodynamics of horizons in spherically symmetric spacetimes, *Classical and Quantum Gravity*, **19**(21), 5387-5408.
- [79]. Eling, C., Guedens, R., Jacobson, T., 2006, Nonequilibrium Thermodynamics of Spacetime, *Physical Review Letters*, **96**(12), 121301-121304.
- [80]. Akbar, M., Cai, R., G., 2006, Friedmann equations of FRW universe in scalar-tensor gravity, $f(R)$ gravity and first law of thermodynamics, *Physics Letters B*, **635**(1), 7-10.
- [81]. Cai, R., G., Cao, L., M., 2007, Unified first law and the thermodynamics of the apparent horizon in the FRW universe, *Physical Review D*, **75**(6), 064008-064018.
- [82]. Cai, R., G., Cao, L., M., 2007, Thermodynamics of apparent horizon in brane world scenario, *Nuclear Physics B*, **785**(1-2), 135-148.

- [83]. Cai, R., G., Cao, L., M., Hu, Y., P., 2008, Corrected entropy-area relation and modified Friedmann equations, *Journal of High Energy Physics*, **2008**(90), 0-11.
- [84]. Sheykhi, A., 2010, Thermodynamics of apparent horizon and modified Friedmann equations, *The European Physical Journal C*, **69**, 265-269.
- [85]. Nojiri, S. Odintsov, S. D., 2006, Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom–non-phantom transition model and generalized holographic dark energy, *General Relativity and Gravitation*, **38**, 1285–1304.
- [86]. Sheykhi, A., 2010, Thermodynamics of interacting holographic dark energy with the apparent horizon as an IR cutoff, *Classical and Quantum Gravity*, **27**, 025007-025014.
- [87]. Sheykhi, A., Wang, B., Cai, R., G, 2007, Thermodynamical properties of apparent horizon in warped DGP braneworld, *Nuclear Physics B*, **779**(1-2), 1-12.
- [88]. Sheykhi, A., Wang, B., Cai, R., G, 2007, Deep connection between thermodynamics and gravity in Gauss-Bonnet braneworlds, *Physical Review D*, **76**(2), 023515-023519.
- [89]. Sheykhi, A., Wang, B., 2008, Generalized second law of thermodynamics in Gauss–Bonnet braneworld, *Physics Letters B*, **678**(5), 434-437.
- [90]. Sheykhi, A., 2018, Modified Friedmann equations from Tsallis entropy, *Physics Letters B*, **785**, 118-126.
- [91]. Karami, K, Sheykhi, A., Sahraei, N., Ghaffari, S., 2011, Generalized second law of thermodynamics in modified FRW cosmology with corrected entropy-area relation, *Europhysics Letters*, **93**(2), 29002-29006.
- [92]. Hayward, S., A., 1998, Unified first law of black hole dynamics and relativistic thermodynamics, *Classical and Quantum Gravity*, **15**(10), 3147–3162.
- [93]. Das, S., Vagenas, E., C., 2008, Universality of Quantum Gravity Corrections, *Physical Review Letters*, **101**(2), 221301-221304.
- [94]. Ali, A., F., Das, S., Vagenas, E., C., 2011, Proposal for testing quantum gravity in the lab, *Physical Review D*, **84**(4), 044013-044022.
- [95]. Das, S., Mann, R., B., 2011, Planck scale effects on some low energy quantum phenomena, *Physics Letters B*, **704**(5), 596-599.
- [96]. Pedram, P., Nozari, K., Taheri, S., H., 2011, The effects of minimal length and maximal momentum on the transition rate of ultra cold neutrons in gravitational field, *Journal of High Energy Physics*, **2011**(93), 0-10.
- [97]. Marin, F., Marino, F., Bonaldi, M., Cerdonio, M., Conti, L., Falferi, P., Mezzena, R., Ortolan, A., Prodi, G., A., Taffarello, L., Vedovato, G., Vinante, A., Zendri, J., P., 2013, Gravitational bar detectors set limits to Planck-scale physics on macroscopic variables, *Nature Physics*, **9**, 71-73.
- [98]. Gosh, S., 2014, Quantum gravity effects in geodesic motion and predictions of equivalence principle violation, *Classical and Quantum Gravity*, **31**(2), 025025-025031.

- [99]. Bawaj, M., Biancofiore, C., Bonaldi, M., Bonfigli, F., Borrielli, A., Giuseppe, G., D., Marconi, L., Marino, F., Natali, R., Pontin, A., Prodi, G., A., Serra, E., Vitali, A., Marin, F., 2015, Probing deformed commutators with macroscopic harmonic oscillators, *Nature Communications*, **6**(7503), 1-7.
- [100]. Khodadi, M., 2015, Space tests of the generalized uncertainty principle, *Astrophysics and Space Science*, **358**(45), 1-8.
- [101]. Gao, D., Zhan, M., 2016, Constraining the generalized uncertainty principle with cold atoms, *Physical Review A*, **94**(1), 013607-013612.
- [102]. Gao, D., Wang, J., Zhan, M., 2017, Constraining the generalized uncertainty principle with the atomic weak-equivalence-principle test, *Physical Review A*, **95**(4), 042106-042112.
- [103]. Feng, Z., W., Yang, S., Z., Li, H., L., Zu, X., T., 2017, Constraining the generalized uncertainty principle with the gravitational wave event GW150914, *Physics Letters B*, **768**, 81-85.
- [104]. Kouwn, S., 2018, Implications of minimum and maximum length scales in cosmology, *Physics Letters B*, **768**, 81-85.
- [105]. Bushev, P. A., Bourhill, J., Goryachev, M., Kukharchyk, N., Ivanov, E., Galliou, S., Tobar, M., E., Danilishin, S., 2019, Testing the generalized uncertainty principle with macroscopic mechanical oscillators and pendulums, *Physical Review D*, **100**(6), 066020-066026.
- [106]. Neves, J., C., S., 2020, Upper bound on the GUP parameter using the black hole shadow, *The European Physical Journal C*, **80**(343), 1-10.
- [107]. Giardino, S., Salzano, V., 2021, Cosmological constraints on GUP from modified Friedmann equations, *The European Physical Journal C*, **81**(110), 1-13.
- [108]. Ökcü, Ö., Aydın, E., 2021, Observational tests of generalized uncertainty principle: Shapiro time delay, gravitational redshift, and geodetic precession, *Nuclear Physics B*, **964**, 115324-115338.
- [109]. Das, A., Das, S., Mansour, N., R., Vagenas, E., C., 2021, Bounds on GUP parameters from GW150914 and GW190521, *arXiv:2101.03746*, 1-14.
- [110]. Chakraborty, S., SenGupta, S., 2014, Solar system constraints on alternative gravity theories, *Physical Review D*, **89**(2), 026003-026013.
- [111]. Ali, A., F., Khalil, M., M., 2015, A proposal for testing gravity's rainbow, *Europhysics Letters*, **110**(2), 20009-20014.
- [112]. Lin, R., H., Zhai, X., H., Li, X., Z., 2017, Solar system tests for realistic $f(T)$ models with non-minimal torsion-matter coupling, *The European Physical Journal C*, **77**(504), 1-8.
- [113]. Bhattacharya, S., Chakraborty, S., 2017, Constraining some Horndeski gravity theories, *Physical Review D*, **95**(4), 044037-044045.

- [114]. González, P., A., Olivares, M., Papantonopoulos, E., Vásquez, Y., 2020, Constraints on scalar–tensor theory of gravity by solar system tests, *The European Physical Journal C*, **80**(981), 1-12.
- [115]. Bahamonde, S., Said, J., L., Zubair, M., 2020, Solar system tests in modified teleparallel gravity, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2020**(024), 0-31.
- [116]. Zhu, T., Wang, A., 2020, Observational tests of the self-dual spacetime in loop quantum gravity, *Physical Review D*, **102**(12), 124042-124051.
- [117]. Khodadi, M., Nozari, K., Hajizadeh, A., 2017, Some astrophysical aspects of a Schwarzschild geometry equipped with a minimal measurable length, *Physics Letters B*, **770**, 556-563.
- [118]. Will, C., M., 2014, The Confrontation between General Relativity and Experiment, *Living Reviews in Relativity*, **17**(4), 1-117.
- [119]. Lambert, S., B., Poncin-Lafitte, C., L., 2009, Determining the relativistic parameter γ using very long baseline interferometry, *Astronomy and Astrophysics*, **499**(1), 331–335.
- [120]. Verma, A., K., Fienga, A., Laskar, J., Manche, H., Gastineau, M., 2014, Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity, *Astronomy and Astrophysics*, **561**(A115), 1-13.
- [121]. Hulse, R., A., Taylor, J., H., 1975, Discovery of a pulsar in a binary system, *The Astrophysical Journal*, **195**, L51-L53.
- [122]. Weisberg, J., M., Nice, D., J., Taylor, J., H., 2010, Timing Measurement of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16, *The Astrophysical Journal*, **722**(2), 1030-1034.
- [123]. Damour, T., Deruelle, N., 1986, General relativistic celestial mechanics of binary systems II. The post-Newtonian timing formula, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **44**(3), 263-292.
- [124]. Taylor, J., H., Weisberg, J., M., 1989, Further Experimental Tests of Relativistic Gravity Using the Binary Pulsar PSR 1913+16, *The Astrophysical Journal*, **345**(21), 434-450.
- [125]. Damour, T., Taylor, J., H., 1991, On the Orbital Period Change of the Binary Pulsar PSR 1913+16, *The Astrophysical Journal*, **366**(1), 501-511.
- [126]. Pradhan, P., 2016, Enthalpy, geometric volume and logarithmic correction to entropy for van der Waals black hole, *Europhysics Letters*, **116**(1), 10001-10007.
- [127]. Emilio, L. V. E., 2020, *GUP corrections to black hole thermodynamics*, Yüksek Lisans, Universidad Yachay Tech.
- [128]. Camelia, E., A., 2010, Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues, *Symmetry*, **2**(1), 230-271.

- [129]. Aydiner, E., 2018, Chaotic universe model, *Scientific Reports*, **8**(721), 1-12.
- [130]. Nojiri, S., Odintsov, S., D., 2011, Unified cosmic history in modified gravity: From $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models, *Physics Reports*, **505**(2-4), 59-144.
- [131]. Sefiedgar, A., S., 2017, From the entropic force to the Friedmann equation in rainbow gravity, *Europhysics Letters*, **117**(6), 69001-69006.
- [132]. Izquierdo, G., Pavon, D., 2006, Dark energy and the generalized second law, *Physics Letters B*, **633**(4-5), 420-426.
- [133]. Weinberg, S., 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, 1st edn., Wiley, New York.
- [134]. Shapiro, I., 1964, Fourth Test of General Relativity, *Physical Review Letters*, **13**(26), 789-791.
- [135]. Bambi, C., 2018, *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics*, 1st edn., Springer, Singapore.
- [136]. Bertotti, B., Iess, L., Tortora, P., 2003, A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft, *Nature*, **425**, 374-376.
- [137]. Pound, R., Snider, J., 1965, Effect of Gravity on Gamma Radiation, *Physical Review*, **140**(3B), B788-B803.
- [138]. Hartle, J., B., 2014, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, 1st edn., Pearson Education, San Francisco.
- [139]. Everitt, C., W., F., DeBra, D., B., Parkinson, B., W., et al., 2011, Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity, *Physical Review Letters*, **106**(22), 221101-221105.
- [140]. Abbott, B., P., et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), 2016, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Physical Review Letters*, **116**(6), 061102-061117.
- [141]. Abbott, B., P., et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), 2016, Tests of General Relativity with GW150914, *Physical Review Letters*, **116**(22), 221101-221118.
- [142]. Casadio, R., Scardigli, F., Generalized Uncertainty Principle, Classical Mechanics, and General Relativity, 2020, *Physics Letters B*, **807**, 135558-135562.
- [143]. Scardigli, F., The deformation parameter of the generalized uncertainty principle, 2019, *IOP Conference Series: Journal of Physics*, **1275**, 012004-012015.
- [144]. Das, A., Das, S., Mansour, N., R., Vagenas, E., C., 2021, Bounds on GUP parameters from GW150914 and GW190521, *arxiv:2101.03746*, 1-14.
- [145]. Abbott, R., et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), 2016, GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of $150 M_{\odot}$, *Physical Review Letters*, **125**(10), 101102-101118.

EKLER

EK 1. ρ ve p_i Bileşenlerinin Belirlenmesi

Burada (3.7) ve (3.8) numaralı denklemlerde verilen ρ ve p_i bileşenlerinin türetilmesi verilecektir [38]. Alan denklemleri belirlendikten sonra bu denklemlere karşı gelen stres enerji tensörü bileşenleri belirlenebilir. $R_{\mu\nu}$ tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibi verilir ($G = c = 1$ aldık.):

$$R_{00} = f \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} \right), \quad R_{11} = -\frac{1}{f} \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} \right), \quad (1.1)$$

$$R_{22} = 1 - f'r - f, \quad R_{33} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (1.2)$$

Ricci skaleri R ise

$$R = -f'' - \frac{4f'}{r} - \frac{2f}{r^2} + \frac{2}{r^2}. \quad (1.3)$$

şeklinde verilir. Böylece $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi T_{\mu\nu}$ şeklinde verilen Einstein alan denklemleri aracılığıyla stres enerji tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibi verilir:

$$T_{00} = \frac{f - f^2 - ff'r}{8\pi r^2} + Pf, \quad T_{11} = \frac{f + f'r - 1}{8\pi fr^2} - \frac{P}{f}, \quad (1.4)$$

$$T_{22} = \frac{2f'r + f''r^2}{16\pi} - Pr^2, \quad T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta, \quad (1.5)$$

Burada $\Lambda = -8\pi P$ ifadesini kullandık. Son olarak (3.6) ile verilen anizotropik stres enerji tensörü ve yukarıda elde ettiğimiz $T^{\mu\nu}$ bileşenleri sayesinde (3.7) ve (3.8) ifadeleri bulunur.

EK 2. Anizotropik Stres Enerji Tensörünün Enerji Şartları

Burada anizotropik akışkan için

$$T^{\mu\nu} = \rho e_0^\mu e_0^\nu + \sum_i p_i e_i^\mu e_i^\nu \quad (2.1)$$

şeklinde verilen stres enerji tensörü için enerji şartlarına değineceğiz [76]. e_α^μ bazları ortonormaldir ve aşağıdaki bağıntıyı sağlarlar:

$$g_{\alpha\beta} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ olarak verilen Minkowski metriğidir. Ters metrik $g^{\mu\nu}$

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \quad (2.3)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ile verilir ve $\eta_{\mu\nu}$ metriğinin tersidir.

Enerji şartlarını formüle etmek için uzayzamandaki bir gözlemcinin birim zamansal dört hız vektörü v^α 'yı düşünelim. Hız vektörünü

$$v^\alpha = \gamma(e_0^\alpha + e_1^\alpha + e_2^\alpha + e_3^\alpha), \quad \gamma = (1 - a^2 - b^2 - d^2)^{-1/2} \quad (2.4)$$

şeklinde düşünelim. Burada a , b ve d koordinatların keyfi fonksiyonlarıdır ve $a^2 + b^2 + d^2 < 1$ şartını sağlamalıdır.

Zayıf enerji şartı için $T_{\alpha\beta} \geq 0$ olması gerektiğinden

$$\rho + a^2 p_1 + b^2 p_2 + d^2 p_3 \geq 0 \quad (2.5)$$

yazılabilir. a , b ve d keyfi olduğundan $a = b = d = 0$ seçilebilir ve bu durumda $\rho \geq 0$ bulunur. Bunun dışında $b = d = 0$ seçmek mümkündür. Bu durumda $\rho + a^2 p_1 \geq 0$ elde edilir ve a 'nın birden küçük olduğunu hatırlarsak $0 \leq \rho + a^2 p_1 < \rho + p_1$ yazılabilir. Benzer düşünceyi p_2 ve p_3 bileşenlerine de uygulayabiliriz. Böylece zayıf enerji şartı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_i > 0. \quad (2.6)$$

Güçlü enerji şartı için

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right)v^\alpha v^\beta \geq 0 \quad (2.7)$$

olmalıdır. Bu ifadeyi $T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq -\frac{1}{2}T$ şeklinde de yazabiliriz. (2.1) ve (2.4) göz önüne alınır (2.7) kullanılarak

$$\gamma^2(\rho + a^2 p_1 + b^2 p_2 + d^2 p_3) \geq \frac{1}{2}(\rho - p_1 - p_2 - p_3) \quad (2.8)$$

yazılabilir. $a = b = d = 0$ seçilirse $\gamma = 1$ olacağından $\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0$ olur. Bunun dışında $b = d = 0$ seçilmesi $\gamma^2 = 1/(1-a^2)$ olmasına neden olur. Böylece $\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq a^2(p_2 + p_3 - \rho - p_1)$ bulunur. $a^2 < 1$ için $\rho + p_1 \geq 0$ elde edilir. Benzer adımlar p_2 ve p_3 bileşenlerine de uygulanırsa benzer bağıntılar elde edilir. Dolayısıyla güçlü enerji şartı

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0, \quad \rho + p_i > 0 \quad (2.9)$$

olarak bulunur.

Son olarak baskın enerji şartını inceleyelim. v^α dört hızına sahip bir gözlemcinin ölçeceği madde yoğunluğunu $-T_\beta^\alpha v^\beta$ ile verebiliriz. (2.1) ve (2.4) göz önüne alınır

$$\rho^2 - a^2 p_1^2 - b^2 p_2^2 - d^2 p_3^2 \geq 0 \quad (2.10)$$

elde edilir. $a = b = d = 0$ seçilirse $\rho^2 \geq 0 \Rightarrow \rho \geq 0$ bulunur. $b = d = 0$ seçilmesi durumunda $\rho^2 \geq a^2 p_1^2$ bulunur. $a^2 < 1$ olduğunu hatırlarsak $\rho \geq |p_1|$ elde ederiz. Benzer şekilde p_2 ve p_3 bileşenleri de bulunur. Nihayet baskın enerji şartı aşağıdaki gibi yazılır:

$$\rho \geq 0, \quad \rho \geq |p_i|. \quad (2.11)$$

ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler | |
|------------------|--|
| Adı Soyadı | Özgür ÖKCÜ |
| Doğum Yeri | |
| Doğum Tarihi | |
| Uyruğu | <input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer: |
| Telefon | |
| E-Posta Adresi | |
| Web Adresi | https:// |



| Eğitim Bilgileri | |
|------------------|-----------------------------|
| Lisans | |
| Üniversite | İstanbul Üniversitesi |
| Fakülte | Fen Fakültesi |
| Bölümü | Astronomi ve Uzay Bilimleri |
| Mezuniyet Yılı | 2011 |

| Yüksek Lisans | |
|------------------|---|
| Üniversite | İstanbul Üniversitesi |
| Enstitü Adı | Fen Bilimleri |
| Anabilim Dalı | Fizik Anabilim Dalı |
| Programı | Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı |
| Mezuniyet Tarihi | 2016 |

| Doktora | |
|------------------|---|
| Üniversite | İstanbul Üniversitesi |
| Enstitü Adı | Fen Bilimleri |
| Anabilim Dalı | Fizik Anabilim Dalı |
| Programı | Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı |
| Mezuniyet Tarihi | 2021 |

| Makale ve Bildiriler |
|---|
| <p>Makaleler</p> <p>Ökcü, Ö., Aydın, E., 2021, Observational tests of the generalized uncertainty principle: Shapiro time delay, gravitational redshift, and geodetic precession, <i>Nuclear Physics B</i>, 964, 115324-115338.</p> <p>Ökcü, Ö., Aydın, E., 2020, GUP-Corrected van der Waals Black Holes, <i>International Journal of Theoretical Physics</i>, 59, 2839–2851.</p> <p>Ökcü, Ö., Corda, C., Aydın, E., 2020, Modified Friedmann equations from DSR-GUP,</p> |

Europhysics Letters, **129**(5), 50002-50007.

Yekta, D., M., Hadikhani, A., Ökcü, Ö., 2019, Joule-Thomson expansion of charged AdS black holes in rainbow gravity, *Physics Letters B*, **795**, 521-527.

Ökcü, Ö., Aydın, E., 2018, Joule-Thomson expansion of Kerr-AdS black holes, *The European Physical Journal C*, **78**(123), 1-6.

Ökcü, Ö., Aydın, E., 2017, Thermal fluctuations effects on Reissner-Nordström-AdS black hole, *arXiv:1703.09606*, 1-15.

Ökcü, Ö., Aydın, E., 2017, Joule-Thomson expansion of the charged AdS black holes, *The European Physical Journal C*, **77**(24), 1-7.

Bildiriler

Ökcü, Ö., Aydın, E., 2021, Genelleştirilmiş Belirsizlik İlkesi ve Kütleçekimsel Testler, *Yüksek Enerji Fiziği, Astrofizik ve Kozmoloji Çalıştayı*, İstanbul Üniversitesi.

Ökcü, Ö., Corda, C., Aydın, E., 2020, Modified Friedmann Equations from DSR-GUP, *Yüksek Enerji Fiziği, Astrofizik ve Kozmoloji Çalıştayı*, İstanbul Üniversitesi.

Ökcü, Ö., Aydın, E., 2019, Ads Kara Delikleri için Joule-Thomson Etkisi, *Yüksek Enerji Fiziği, Astrofizik ve Kozmoloji Çalıştayı*, İstanbul Üniversitesi.