



MAKSİMUM ÇARPIM OPERATÖRLERİ İÇİN BAZI SONUÇLAR

Fatma Büşra HATİPOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirim, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Fatma Büşra HATİPOĞLU

21/06/2021

MAKSİMUM ÇARPIM OPERATÖRLERİ İÇİN BAZI SONUÇLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma Büşra HATİPOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde, tezde ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremler tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde maksimum çarpım tip bazı operatörler tanıtılmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörü tanımlanmış ve tanımlanan operatörün yaklaşım derecesi birinci süreklilik modülü kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen yaklaşım derecesinin iyileştirilemez olduğu ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde, maksimum çarpım tip bazı operatörlerin ve tezde tanımlanan lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörünün bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım dereceleri belirlenmiş ve şekil özellikleri incelenmiştir. Son bölümde sonuç kısmına yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Maksimum çarpım operatör, yaklaşım derecesi, lineer olmayan operatör, süreklilik modülü

Sayfa Adedi : 53

Danışman : Doç. Dr. Mediha ÖRKÜ

SOME RESULTS FOR MAX-PRODUCT OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Fatma Büşra HATIPOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2021

ABSTRACT

In the first part of this thesis, the introduction part is given. In the second part, the basic definitions and theorems needed in the thesis are introduced. In the third chapter, some maximum product operators are given, their approximation properties are examined. Nonlinear Chlodowsky type truncated Lupas operator of maximum product is defined and the degree of approximation of the given set of operators is calculated using the first modulus of continuity. It has been proved that the degree of approximation cannot be further improved. In the fourth chapter, for the nonlinear Chlodowsky type truncated Lupas operator of maximum product defined in the thesis, better approximation degrees of some subclasses are defined and the shape properties of this operator are examined. In the last chapter, results are given.

Science Code : 20406

Key Words : Max-product operator, the degree of approximation, nonlinear operator, the modulus of continuity

Page Number : 53

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mediha ÖRKÇÜ

TEŞEKKÜR

Çalıőmamı yürütürken fikir ve önerileri ile yol gösteren Gazi Üniversitesi öğretim üyesi ve değerli danışmanım Doç. Dr. Mediha ÖRKÇÜ'ye, kıymetli önerileriyle çalışmama katkı sağlayan Gazi Üniversitesi öğretim üyesi Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ KANTAR ile Başkent Üniversitesi öğretim üyesi Dr. Öğt. Üy. Özge DALMANOĞLU'na, çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan, hayatımı kolaylaştıran sevgili eşim Ertuğrul HATİPOĞLU'na, varlığıyla motivasyonumu artıran kızım Asya HATİPOĞLU'na ve desteklerini her zaman hissettiğim sevgili aileme saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	3
2.2. Operatör Dizilerinin Yaklaşımı.....	4
2.3. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yaklaşım Hızı.....	4
2.4. Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı	6
2.5. Maksimum Çarpım Operatörleri.....	7
3. MAKSİMUM ÇARPIM TİP BAZI OPERATÖRLER.....	11
3.1. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Favard- Szász -Mirakjan Operatörü	11
3.2. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Bleimann-Butzer-Hahn Operatörü	11
3.3. Maksimum Çarpım Kesilmiş Favard-Szász-Mirakjan Operatörü	12
3.4. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Baskakov Operatörü	12
3.5. Maksimum Çarpım Kesilmiş Baskakov Operatörü	12
3.6. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Genelleştirilmiş Szász Operatörü	13
3.7. Lineer Olmayan Maksimum Çarpım Chlodowsky Tip Kesilmiş Lupaş Operatörü ve Yaklaşım Özellikleri	14
4. OPERATÖRLERİN ŞEKİL KORUMA ÖZELLİKLERİ.....	27

4.1. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Favard-Szász-Mirakjan Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi	27
4.2. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Favard-Szász-Mirakjan Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri.....	28
4.3. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Bleimann-Butzer-Hahn Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi	30
4.4. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Bleimann-Butzer-Hahn Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri.....	32
4.5. Maksimum Çarpım Kesilmiş Favard-Szász-Mirakjan Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi	33
4.6. Maksimum Çarpım Kesilmiş Favard-Szász-Mirakjan Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri.....	34
4.7. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Geneleştirilmiş Szász Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi	35
4.8. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Geneleştirilmiş Szász Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri.....	37
4.9. Lineer Olmayan Maksimum Çarpım Chlodowsky Tip Kesilmiş Lupaş Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi	38
4.10. Lineer Olmayan Maksimum Çarpım Chlodowsky Tip Kesilmiş Lupaş Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri.....	42
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
(f_n)	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere fonksiyon dizisi
$L_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$f_n \Rightarrow f$	(f_n) ; f fonksiyonuna düzgün yakınsar
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyon
$E_n(f)$	En iyi yaklaşım derecesi
$\omega_1(f; \delta)$	f fonksiyonunun birinci süreklilik modülü
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfından fonksiyon
$B_n(f; x)$	Bernstein polinom dizisi
$B_n^*(f; x)$	Bernstein-Chlodowsky polinomu
$B_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım lineer olmayan Bernstein operatörü
$F_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım lineer olmayan Favard-Szasz-Mirakjan operatörü
$H_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım lineer olmayan Bleimann-Butzer-Hahn operatörü
$L_n^{(M)}(f)(x)$	Lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörü
$S_n^{(M)}(f; x)$	Maksimum çarpım lineer olmayan genelleştirilmiş Szasz operatörü
$T_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım kesilmiş Favard-Szasz-Mirakjan operatörü
$U_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım kesilmiş Baskakov operatörü
$V_n^{(M)}(f)(x)$	Maksimum çarpım lineer olmayan Baskakov operatörü

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, temel olarak verilen herhangi bir fonksiyona kendisinden daha basit ve daha kolay sonuçlar elde edilebilen fonksiyonlar ya da polinomlar yardımıyla yaklaşmayı ele alır. Bu konu üzerinde yıllardır bir çok yayın yapılmış olup, günümüzde de çalışılmaya devam edilmektedir. Korovkin tipinde yaklaşımlar teorisi, operatör dizilerinin düzgün yakınsaklığını, pozitifliğini ve lineerliğini dayanak almaktadır. Ancak son yıllarda yaklaşım operatörlerinin tüm bu dayanak noktalarının genişletildiği çalışmalar mevcuttur. Bu bağlamda Bede ve Gal'in çalışmaları incelenmiş, lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörü tanımlanmış ve tanımlanan operatörün yaklaşım derecesi birinci süreklilik modülü fonksiyonu kullanılarak hesaplanmıştır. Daha sonra lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörünün bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım dereceleri belirlenmiş ve şekil özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yüksek lisans tezinde ihtiyaç duyulacak bazı tanım, teorem ve notasyonlara yer verilmiştir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa o taktirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve bu durumda $g(x) = L(f; x)$ gösterimi kullanılır [1].

2.1.2. Tanım

$f(x)$ ve $g(x)$, X uzayında herhangi iki fonksiyon, α, β keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü;

$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$ koşulunu gerçekleştiriyor ise o taktirde L operatörüne lineer operatör denir [1].

2.1.3. Tanım

Eğer $f(x) \geq 0$ iken $L(f; x) \geq 0$ gerçekleşiyorsa L operatörüne pozitif operatör denir [1].

2.1.4. Tanım

Lineerlik ve pozitiflik şartlarını aynı zamanda sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir [1].

2.1.5. Lemma

Lineer pozitif operatörler monotondur. Yani $f(x) \leq g(x) \Rightarrow L(f; x) \leq L(g; x)$ sağlanır.

İspat

Kabul edelim ki $f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda $g(x) - f(x) \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f; x) \geq 0 \tag{2.1}$$

yazılabilir. Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan

$L(g - f; x) = L(g; x) - L(f; x)$ elde edilir. Eş. 2.1 den

$L(g - f; x) = L(g; x) - L(f; x) \geq 0 \Rightarrow L(f; x) \leq L(g; x)$ olmaktadır.

2.2. Operatör Dizilerinin Yaklaşımı

2.2.1. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ 'e bir fonksiyon dizisi denir ve (f_n) ile ifade edilir [1].

2.2.2. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $L_n(f; x)$, L_n operatörünün f 'e uygulandığını ve sonucunun x 'e bağlı olduğunu gösterir. $L_n(f; x)$ 'e bir operatör dizisi denir ve (L_n) ile ifade edilir [1].

2.2.3. Tanım

Bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin $C[a, b]$ de f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a, b]} = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kısaca $f_n \rightrightarrows f$ ile ifade edilebilir [1].

2.3. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yaklaşım Hızı

Yaklaşımlar teorisinin temel problemlerinden biri operatör dizilerinin yakınsaklığının bulunmasına ilaveten bu yaklaşımdaki yaklaşım derecesinin hesaplanmasıdır.

2.3.1. Tanım

$(X, \|\cdot\|)$, normlu uzay $Y \subseteq X$ olsun

Verilen herhangi $f \in X$ için bir $g^* \in Y$ bulunabilir ve öyleki $\forall g \in Y$ için

$\|f - g^*\| \leq \|f - g\|$ oluyorsa, g^* 'a f 'in Y 'deki en iyi yaklaşımı denir.

$E(f) = \inf_{g \in Y} \|f - g\| = \|f - g^*\|$ olarak gösterilir.

2.3.2. Weierstrass Teoremi

$f \in C[a, b]$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\|f - p\| < \varepsilon$ olacak şekilde p polinomu vardır.

P_n en fazla n . dereceden polinomların uzayını gösterilirse, $f \in C[a, b]$ için

$E_n(f) = \inf_{p_n \in P_n} \|f - p_n\| = \|f - p_n^*\|$ ise burada; $E_n(f)$ ile en iyi yaklaşım derecesi elde edilir [3].

Operatör dizilerinin yaklaşım derecesini elde etmek için birinci süreklilik modülü fonksiyonu kullanılabilir. Bu nedenle öncelikle birinci süreklilik modülünün tanımı ve çalışmada kullanılacak bazı özellikleri verilmiştir.

2.3.3. Birinci Süreklilik Modülü

f fonksiyonun birinci süreklilik modülü $\omega_1(f; \delta)$ ile ifade edilir ve $\delta \geq 0$ için

$$\omega_1(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |x - t| < \delta}} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlanır [2].

Aşağıda birinci süreklilik modülünün tezde gereken birkaç özelliği verilmiştir [2].

$$(i) \omega_1(f; \delta) \geq 0$$

$$(ii) \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega_1(f; \delta_1) \leq \omega_1(f; \delta_2)$$

$$(iii) \omega_1(f + g; \delta) \leq \omega_1(f; \delta) + \omega_1(g; \delta)$$

$$(iv) \omega_1(f; m\delta) \leq m \cdot \omega_1(f; \delta) \tag{2.2}$$

$$(v) \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \omega_1(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1) \cdot \omega_1(f; \delta)$$

$$(vi) \omega_1(f; |t - x|) \geq |f(x) - t(x)|$$

$$(vii) |f(x) - t(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \cdot \omega_1(f; \delta)$$

2.3.4. Lipschitz Sınıfı

$\forall x, t \in I$ için

$$|f(t) - f(x)| < M|t - x|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar, M 'ye Lipschitz sabiti denir. $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir [2].

2.4. Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı

Bernstein 1912 yılında, Weierstrass Teoremi'ndeki herhangi bir f fonksiyonunun $[0,1]$ kapalı aralığında $P(x)$ polinomunu aşağıdaki şekilde ifade etmiştir [4].

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

Chlodowsky (1937) sınırsız bir aralık üzerinde Bernstein polinomlarını genelleştirmiş ve bu polinomların bazı yaklaşım özelliklerini araştırmıştır [5].

2.4.1. Tanım

(b_n) dizisi

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $0 \leq x \leq b_n$ için

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{b_n k}{n}\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlı polinomlara Bernstein- Chlodowsky polinomlar denir [5].

1952'de Bohman [6] ve 1953 yılında Korovkin [7] lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımı ile ilgili önemli teoremler elde etmişlerdir. Korovkin'in adını alan teorem lineer pozitif operatörlere yaklaşım alanının temelini oluşturmuştur.

2.4.2. Korovkin Teoremi

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $x \in [a, b]$ için

$$i) L_n(1; x) \Rightarrow 1,$$

$$ii) L_n(t; x) \Rightarrow x,$$

$$iii) L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

koşulları gerçekleşir ise $[a, b]$ aralığında

$$L_n(f; x) \Rightarrow f(x) \text{ sağlanır [7].}$$

Korovkin tipinde yaklaşımlar teoremi esas olarak operatör dizilerinin düzgün yakınsaklığını, pozitifliğini ve lineerliğini dayanak noktası olarak alır. Ancak literatür incelendiğinde bu üç temel nokta için de farklı genişlemeler ve ilerlemeler görülmektedir [7].

Son yıllarda yaklaşım operatörünün lineerliğini Bede ve Gal pseudo-lineerlik kavramını kullanarak geliştirmişlerdir. Böylece yaklaşımlar teoreminde ele alınan operatör dizilerinin lineerliği maksimum çarpım operatörleri kullanılarak zayıflatılmıştır [8].

2.5. Maksimum Çarpım Operatörleri

2.5.1. Tanım

$I \subset \mathbb{R}$, $CB_+(I) = \{f | f: I \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ sürekli ve sınırlı fonksiyon}\}$ olsun.

$L_n: CB_+(I) \rightarrow CB_+(I)$ maksimum çarpım operatörü

$n \in \mathbb{N}$, $f \in CB_+(I)$ ve $x_i \in I$ $K_n(\cdot, x_i) \in CB_+(I)$ olmak üzere

$$L_n(f)(x) = \prod_{i=0}^n K_n(x, x_i) f(x_i)$$

veya

$$L_n(f)(x) = \prod_{i=0}^{\infty} K_n(x, x_i) f(x_i)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Maksimum çarpım operatörleri aşağıda verilen pseudo-lineerlik koşulunu sağlamaktadır.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, f, g: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ için

$$L_n(\alpha \cdot f \vee \beta \cdot g)(x) = \alpha \cdot L_n(f)(x) \vee \beta \cdot L_n(g)(x)$$

eşitliği sağlanır [8].

Bu eşitlik de göstermektedir ki maksimum çarpım operatörleri klasik anlamda lineer operatörler sayılamazlar.

2.5.2. q - Bernstein Polinomları

$n \in \mathbb{N}$, $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $q \in (0,1]$ olsun.

Bernstein polinomu ve onun q -genelleřtirmesi

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_n(f; x; q) = \sum_{k=0}^n [n]_q \binom{[n]_q}{[k]_q} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)$$

olarak tanımlanmıştır [9,10].

Burada

$$[n]_q := 1 + q + \dots + q^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$[0]_q := 0,$$

$$[n]_q = \begin{cases} \frac{1 - q^n}{1 - q}, & q \neq 1 \\ [n]_q = n, & q = 1 \end{cases}$$

ve

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q \dots [2]_q [1]_q, & n = 1, 2, \dots \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

$$\binom{[n]_q}{[k]_q} := \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}$$

olarak ifade edilmiştir [9,10].

Tanımı verilen klasik Bernstein polinomları ve q -Bernstein polinomları pozitif lineer operatörlerdir. Bu sebeple yaklaşım özellikleri incelenirken klasik Korovkin teoremi kullanılabilir [7]. Klasik Bernstein polinomlarının lineer olmayan yapıdaki değişimi Bede ve Gal tarafından yapılmıştır [11].

Lineer olmayan yapıdaki operatörler için Korovkin teoremi kullanılmaz fakat Bede ve Gal tarafından, oluşturdukları lineer olmayan yapıdaki yeni operatörlerin klasik Bernstein polinomları ile benzer yaklaşım özelliklerine sahip olduğu gösterilmiştir [11].

$C_+[0,1] := \{f: [0,1] \rightarrow [0, \infty): f, [0,1] \text{ üzerinde sürekli}\}$ olarak tanımlansın.

Binom açılımından

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1$$

olduğu bilinmektedir. Böylece klasik Bernstein polinomu

$$B_n(f; x) = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilebilir.

Bede ve Gal [11] tarafından Eş. 2.3 ile ifade edilen toplam operatörü maksimum operatörle değiştirilerek aşağıdaki lineer olmayan yaklaşım operatörü elde edilmiştir:

$$B_n^{(M)}(f; x) = \frac{\bigvee_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}{\bigvee_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}, f \in C_+[0,1]$$

Burada 'M' maksimumun kısaltması olarak kullanılmaktadır.

Bu lineer olmayan yaklaşım operatörünün yaklaşım hızı birinci süreklilik modülünden faydalanılarak aşağıdaki gibi hesaplanmıştır [12]:

$$\left| B_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 12\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$$

Burada birinci süreklilik modülü

$$\omega_1(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta\} \text{ dır.}$$

$B_n(f; x)$ derecesi en fazla n olan bir polinomu ifade etmektedir.

$B_n(f; 0) = f(0)$ ve $B_n(f; 1) = f(1)$ eşitliklerinin sağlandığı açıktır. Bernstein teoremi, $B_n(f)$ dizisinin f fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsadığını ifade etmektedir. Bu durumda $q = 1$ seçildiğinde genelleştirilmiş Bernstein polinomu klasik Bernstein polinomuna dönüşür [13].

Duman tarafından q - Bernstein polinomlarının lineer olmayan yapıdaki modifikasyonu aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [13]:

$n \in \mathbb{N}, f \in C_+[0,1], x \in [0,1]$ ve $q \in (0,1)$ olmak üzere

$$B_n^{(M)}(f; x; q) = \frac{\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=1}^{n-k} (1 - q^s x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)}{\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=1}^{n-k} (1 - q^s x)}$$



3. MAKSİMUM ÇARPIM TİP BAZI OPERATÖRLER

Bu bölümde, lineer olmayan ve kesilmiş yapıdaki bazı operatörlerin birinci süreklilik modülü yardımıyla hesaplanan yaklaşım dereceleri ifade edilecektir. Sonrasında lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörü tanımlanacak ve yaklaşım derecesi birinci süreklilik modülü fonksiyonu yardımıyla bulunacaktır. Bede, Coroianu ve Gal tarafından hesaplanan maksimum çarpım tip bazı operatörlerin tanımları ve yaklaşım dereceleri aşağıda verilmiştir.

3.1. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Favard-Szasz-Mirakjan Operatörü

Maksimum çarpım lineer olmayan Favard-Szasz-Mirakjan operatörü

$$F_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!}}, n \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

olarak ifade edilmiştir [14].

Operatörün yaklaşım derecesi aşağıda verilmiştir.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sınırlı ve sürekli fonksiyonu olmak üzere her $n \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty)$ için

$$\left| F_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 8\omega_1\left(f, \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.2)$$

elde edilmiştir.

Burada birinci süreklilik modülü

$\omega_1(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta\}$ dır.

3.2. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Bleimann-Butzer-Hahn Operatörü

Maksimum çarpım lineer olmayan Bleimann-Butzer-Hahn operatörü

$$H_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+1-k}\right)}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k}, n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

olarak tanımlanmıştır [15]. Operatörün yaklaşım derecesi aşağıda verilmiştir.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli fonksiyon olsun. Her $n + 1 \geq \max\{1 + 2x, 16x(1 + x)\}$ için

$$\left| H_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 5\omega_1\left(f, \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}{\sqrt{n+1}}\right), x \in [0, \infty) \quad (3.4)$$

elde edilmiştir. Burada birinci süreklilik modülü

$\omega_1(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta\}$ dır.

3.3. Maksimum Çarpım Kesilmiş Favard- Szász -Mirakjan Operatörü

Maksimum çarpım kesilmiş Favard- Szász -Mirakjan operatörü

$$T_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)}{\sum_{k=0}^n \frac{(nx)^k}{k!}}, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanmış ve hesaplanan yakınsaklık değeri aşağıda ifade edilmiştir [16].

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli fonksiyonu olsun. Her $n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$ için

$$\left| T_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 6\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.6)$$

olarak hesaplanmıştır.

3.4. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Baskakov Operatörü

Maksimum çarpım lineer olmayan Baskakov operatörü

$$b_{n,k}(x) = \frac{\binom{n+k-1}{k} x^k}{(1+x)^{n+k}}, n \geq 1, x \in [0, 1]$$

$$b_{n,0}(x) = \frac{1}{(1+x)^n}, 0 < x \leq 1 \text{ ve } b_{n,0}(0) = 1$$

olmak üzere

$$V_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)}{\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)} \quad (3.7)$$

olarak ifade edilmiş ve hesaplanan yakınsaklık değeri aşağıda verilmiştir [17].

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sınırlı ve sürekli fonksiyon olsun.

$$\left| V_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 12\omega_1\left(f, \sqrt{\frac{x(x+1)}{n-1}}\right), n \geq 4, n \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty) \quad (3.8)$$

olarak hesaplanmıştır. Burada birinci süreklilik modülü

$\omega_1(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta\}$ dır.

3.5. Maksimum Çarpım Kesilmiş Baskakov Operatörü

Maksimum çarpım kesilmiş Baskakov operatörü

$$b_{n,k}(x) = \frac{\binom{n+k-1}{k} x^k}{(1+x)^{n+k}}, n \geq 1, x \in [0, 1] \text{ olmak üzere}$$

$$U_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)}{\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x)}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \quad (3.9)$$

olarak ifade edilmiş ve hesaplanan yakınsaklık derecesi aşağıda verilmiştir [18].

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli fonksiyon olsun. Her $n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1]$ ve $n \geq 2$

$$\left| U_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 24\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \quad (3.10)$$

olarak hesaplanmıştır. Burada birinci süreklilik modülü

$\omega_1(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta\}$ dır.

3.6. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Genelleştirilmiş Szász Operatörü

İspir ve Güngör tarafından maksimum çarpım lineer olmayan genelleştirilmiş Szász operatörü

$$c_{n,k}(x) = \frac{(a_n x)^k}{b_n^k k!}, \quad x \in [0, \infty)$$

olmak üzere

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\sum_{k=0}^n c_{n,k}(x) f\left(\frac{b_n k}{a_n}\right)}{\sum_{k=0}^n c_{n,k}(x)} \quad (3.11)$$

olarak ifade etmiştir [19].

Burada $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sınırlı ve sürekli bir fonksiyon ve her $n \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty)$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} = 0$ olmak üzere (a_n) ve (b_n) pozitif reel sayıların artan ve sınırlı olmayan bir

dizisidir. Operatörün yaklaşım derecesi

$$\left| S_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 8\omega_1\left(f, \sqrt{\frac{b_n x}{a_n}}\right) \quad (3.12)$$

olarak elde edilmiştir. Burada birinci süreklilik modülü

$\omega_1(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta\}$ dır.

3.7. Lineer Olmayan Maksimum Çarpım Chlodowsky Tip Kesilmiş Lupaş Operatörü ve Yaklaşım Özellikleri

Lineer pozitif bir operatör olan Lupaş operatörü 1995 yılında

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ iken $x \geq 0$ olmak üzere

$$L_n(f)(x) = (1-a)^{nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{k!} a^k f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{(1-a)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} a^k, \quad |a| < 1 \text{ olarak tanımlanmıştır [20].}$$

Agratini tarafından Eş. 3.13 de bulunan $a = \frac{1}{2}$ seçilerek operatör $x \geq 0$ için

$$L_n(f)(x) = 2^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{2^k k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.14)$$

olarak tanımlanmıştır [21]. Burada Pochemmer sembolü

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1), \quad k \geq 1 \text{ ve } (\alpha)_0 = 1 \text{ olarak ifade edilmiştir.}$$

Bu çalışmada lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörü

$$l_{n,k}(x) = \frac{\left(\frac{n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}, \quad (n)_0 = 1$$

$$\left(\frac{n}{b_n}x\right)_k = \frac{n}{b_n}x \left(\frac{n}{b_n}x + 1\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right) \text{ olmak üzere } x \in [0, b_n], n \in \mathbb{N} \text{ için}$$

$$L_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^n l_{n,k}(x) f\left(\frac{b_n k}{n}\right)}{\bigvee_{k=0}^n l_{n,k}(x)} \quad (3.15)$$

olarak ifade edilmiştir.

Burada (b_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}} = 0$ özelliklerini sağlayan pozitif terimli bir dizidir.

3.7.1. Lemma

$I \subseteq \mathbb{R}$ ve $CB_+(I) = \{f | f: I \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ sürekli ve sınırlı fonksiyon}\}$

$L_n: CB_+(I) \rightarrow CB_+(I)$ maksimum çarpım operatör dizisi olsun.

i) Herhangi $f, g \in CB_+(I)$ için $f \leq g$ iken $L_n(f)(x) \leq L_n(g)(x)$,

ii) Her $f, g \in CB_+(I)$ için $L_n(f + g)(x) \leq L_n(f)(x) + L_n(g)(x)$

özellikleri sağlanır.

Yani her $f, g \in CB_+(I), x \in I, n \in \mathbb{N}$ için

$$|L_n(f)(x) - L_n(g)(x)| \leq L_n(|f - g|)(x) \text{ olur.}$$

Ayrıca L_n operatörü pozitif homojendir. Yani $\lambda \geq 0$ için

$$L_n(\lambda f) = \lambda L_n(f) \text{ olur [11].}$$

3.7.2 Sonuç

$L_n: CB_+(I) \rightarrow CB_+(I), n \in \mathbb{N}$ Lemma 3.7.1 deki *i* ve *ii* koşullarını sağlayan ve pozitif homojen bir operatör dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}, x \in I, f \in CB_+(I)$ için $\delta > 0$ iken $t \in I$ için $e_0(t) = 1, \varphi_x(t) = |t - x|$ olduğunda

$$|f(x) - L_n(f)(x)| \leq \left[\frac{1}{\delta} L_n(\varphi_x, x) + L_n(e_0)(x) \right] \omega_1(f, \delta) + f(x) \cdot |L_n(e_0)(x) - 1|$$

olur. Burada $\omega_1(f, \delta) = \max\{|f(x) - f(y)|; x, y \in I, |x - y| \leq \delta\}$ dir [11].

3.7.3.Sonuç

Sonuç 3.7.2 ye ilaveten her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(e_0) = e_0$ olduğunda

her $n \in \mathbb{N}, x \in I, f \in CB_+(I)$ için

$$|f(x) - L_n(f)(x)| \leq \left[1 + \frac{1}{\delta} L_n(\varphi_x)(x) + \right] \omega_1(f, \delta)$$

gerçeklenir [11].

Eş. 3.15 de tanımlanan $L_n^{(M)}$ operatörünün bu lemma ve sonuçları sağladığı aşağıda gösterilmiştir.

$f \in C_+[0, b_n]$ pozitif reel değerli tüm uzaylarda tanımlı ve sürekli fonksiyon ve

$L_n^{(M)} \in C_+[0, b_n]$ olsun. $L_n^{(M)}: CB_+(I) \rightarrow CB_+(I)$ pozitif operatördür.

Herhangi $f \in C_+[0, b_n]$ ve $\lambda \geq 0$ için $L_n^{(M)}(\lambda f) = \lambda L_n^{(M)}(f)$ dir. Yani tanımlanan $L_n^{(M)}$ maksimum çarpım operatörü pozitif homojendir.

$L_n^{(M)}$ operatörü için $L_n^{(M)}(e_0) = e_0, e_0(x) = 1$ olur.

Operatör tanımından $f(x) \leq g(x)$ ise $L_n^{(M)}(f)(x) \leq L_n^{(M)}(g)(x)$ olur.

Yani $L_n^{(M)}(x)$ operatörü monotondur.

$f, g \in C_+[0, b_n]$ için

$$L_n^{(M)}(f + g)(x) \leq L_n^{(M)}(f)(x) + L_n^{(M)}(g)(x) \text{ dır.}$$

Yani sublineerlik $L_n^{(M)}(f)(x)$ tarafından sağlanır ve tanımlanan $L_n^{(M)}(f)(x)$ operatörü lineer değildir.

3.7.4. Sonuç

Her $f \in C_+[0, b_n]$ için $\varphi_x(t) = |t - x|$, $t, x \in [0, b_n]$ ve

$$\omega_1(f, \delta) = \max_{\substack{t, x \in [0, b_n] \\ |t-x| \leq \delta}} \{|f(t) - f(x)|\} \text{ iken}$$

$$\left| L_n^{(M)}(f, x) - f(x) \right| \leq \left[1 + \frac{1}{\delta} L_n^{(M)}(\varphi_x, x) \right] \omega_1(f, \delta)$$

sağlanır.

İspat:

$$L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) = \left[L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \cdot L_n^{(M)}(e_0)(x) \right] + f(x) \left[L_n^{(M)}(e_0)(x) - 1 \right]$$

Sonuç 3.7.3 den

$$\begin{aligned} \left| f(x) - L_n^{(M)}(f)(x) \right| &\leq \left| L_n^{(M)}(f(x))(x) - L_n^{(M)}(f(t))(x) \right| + |f(x)| \left| L_n^{(M)}(e_0)(x) - 1 \right| \\ &\leq L_n^{(M)}|f(t) - f(x)|(x) + |f(x)| \left| L_n^{(M)}(e_0)(x) - 1 \right| \end{aligned} \quad (3.16)$$

$t, x \in [0, b_n]$ olduğundan

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega_1(f; |t - x|) \leq \left[\frac{1}{\delta} |t - x| + 1 \right] \omega_1(f; \delta)$$

eşitsizliği Eş.3.16 da kullanılırsa ispat tamamlanır.

Aşağıda yaklaşım derecesini ifade eden teoremin ispatında kullanılacak bazı lemma ve sonuçlar verilmiştir.

3.7.5. Lemma

$x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ ve $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ olsun.

$\bigvee_{k=0}^n l_{n,k}(x) = l_{n,j}(x)$ dir. Ayrıca $x \in \left[0, \frac{2b_n}{n} \right]$ için

$\bigvee_{k=0}^n l_{n,k}(x) = 1$ dir.

İspat

$n \in \mathbb{N}, k \geq 0$ için $0 \leq l_{n,k+1}(x) \leq l_{n,k}(x)$

$$0 \leq \frac{n}{b_n}x + k \leq 2(k+1)$$

Eşitsizlikleri ile $0 \leq x \leq \frac{b_n(k+2)}{n}$ elde edilmektedir. $k = 0, 1, \dots, n-2$ yazıldığında

$$0 \leq l_{n,1}(x) \leq l_{n,0}(x) \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{2b_n}{n} \right]$$

$$0 \leq l_{n,2}(x) \leq l_{n,1}(x) \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{3b_n}{n} \right]$$

...

$$0 \leq l_{n,k+1}(x) \leq l_{n,k}(x) \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{b_n(k+2)}{n} \right]$$

...

$$0 \leq l_{n,n-1}(x) \leq l_{n,n-2}(x) \Leftrightarrow x \in [0, b_n] \text{ olmaktadır.}$$

Tüm bu eşitsizlikler sonucunda

$$x \in \left[0, \frac{2b_n}{n} \right] \Rightarrow l_{n,k}(x) \leq l_{n,0}(x) = 1, \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ için}$$

$$x \in \left[\frac{2b_n}{n}, \frac{3b_n}{n} \right] \Rightarrow l_{n,k}(x) \leq l_{n,1}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ için}$$

$$x \in \left[\frac{3b_n}{n}, \frac{4b_n}{n} \right] \Rightarrow l_{n,k}(x) \leq l_{n,2}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ için}$$

sonuç olarak, $j = 1, 2, \dots, n-2$ ve $k = 0, 1, \dots, n$ için

$$x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right] \Rightarrow l_{n,k}(x) \leq l_{n,j}(x)$$

olmaktadır böylece ispat tamamlanmıştır.

Daha sonraki ispatlarda ihtiyaç duyulacak notasyonlar aşağıda ifade edilmiştir.

Her $k \in \{0,1, \dots, n\}$ ve $j \in \{0,1, \dots, n-2\}$ için

$$M_{k,n,j}(x) = \frac{l_{n,k}(x) \left| \frac{b_n k}{n} - x \right|}{l_{n,j}(x)}, \quad m_{k,n,j}(x) = \frac{l_{n,k}(x)}{l_{n,j}(x)} \text{ dir.}$$

Burada

$$k \geq j - 2 \text{ ise } M_{k,n,j}(x) = \frac{l_{n,k}(x) \left(\frac{b_n k}{n} - x \right)}{l_{n,j}(x)},$$

$$k \leq j \text{ ise } M_{k,n,j}(x) = \frac{l_{n,k}(x) \left(x - \frac{b_n k}{n} \right)}{l_{n,j}(x)} \text{ olacağı açıktır.}$$

3.7.6. Lemma

Her $k \in \{0,1, \dots, n\}$, $j \in \{0,1, \dots, n-2\}$ ve $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ için

$$m_{k,n,j}(x) \leq 1.$$

İspat

i) $k \geq j$ ise $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ için $h(x) = \frac{1}{\frac{n}{b_n}x + k}$ artmayan fonksiyon olduğundan

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k+1,n,j}(x)} = \frac{2(k+1)}{\frac{n}{b_n}x + k} \geq \frac{2(k+1)}{k+j+2} \geq 1$$

Böylece $m_{j,n,j}(x) \geq m_{j+1,n,j}(x) \geq \dots \geq m_{n,n,j}(x)$ olur.

ii) $k \leq j$ ise $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ için $g(x) = \frac{n}{b_n}x + k$ azalmayan fonksiyon olduğundan

$$\frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k-1,n,j}(x)} = \frac{\frac{n}{b_n}x + k - 1}{2k} \geq \frac{j+k}{2k} \geq 1$$

Böylece $m_{j,n,j}(x) \geq m_{j-1,n,j}(x) \geq \dots \geq m_{0,n,j}(x)$ olur.

Her $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ için $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ için $m_{k,n,j}(x) \leq m_{j,n,j}(x) = 1$ olmaktadır.

3.7.7. Lemma

$x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ olsun,

i) $k \in \{j+2, \dots, n-2\}$ için $k - \sqrt{3k+2} \geq j$ iken

$$M_{k,n,j}(x) \geq M_{k+1,n,j}(x)$$

ii) $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ için $k + \sqrt{3k} \leq j$ iken

$$M_{k,n,j}(x) \geq M_{k-1,n,j}(x) \text{ olmaktadır.}$$

İspat

i) $g(x) = \frac{1}{\frac{n}{b_n}x+k} \frac{\frac{b_n k}{n} - x}{\frac{b_n(k+1)}{n} - x}$ artmayan fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k+1,n,j}(x)} &= \frac{2(k+1) \frac{b_n k}{n} - x}{\frac{n}{b_n}x+k} \frac{\frac{b_n(k+1)}{n} - x}{\frac{b_n(k+1)}{n} - x} \\ &\geq \frac{2(k+1)k-j-2}{k+j+2} \frac{k-j-2}{k-j-1} \end{aligned}$$

olup, $k - \sqrt{3k+2} \geq j$ koşulu uygulandığında

$(k+j)^2 \geq 3k-j+2$ ve buradan da

$2(k+1)(k-j-2) \geq (k+j+2)(k-j-1)$ olduğundan

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k+1,n,j}(x)} \geq 1$$

elde edilmektedir.

ii) $h(x) = \left(\frac{n}{b_n}x+k-1\right) \frac{x-\frac{b_n k}{n}}{x-\frac{b_n}{n}(k-1)}$ azalmayan fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k-1,n,j}(x)} &= \frac{\left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right)}{2k} \frac{x - \frac{b_n}{n}k}{x - \frac{b_n}{n}(k-1)} \\ &\geq \frac{j+k}{2k} \frac{j-k+1}{j-k+2} \end{aligned}$$

olup $k + \sqrt{3k} \leq j$ koşulu uygulandığında $(j-k)^2 \geq 3k-j$ ve

buradan da $(j+k)(j-k+1) \geq (2k)(j-k+2)$ olduğundan

$$\frac{M_{k,n,j}(x)}{M_{k-1,n,j}(x)} \geq 1$$

elde edilmektedir.

Tanımlanan $L_n^{(M)}(f)(x)$ maksimum çarpım operatör dizisinin yaklaşım derecesi birinci süreklilik modülü kullanılarak aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

3.7.8. Teorem

$L_n^{(M)}(f)(x)$ Eş. 3.15 ile tanımlanan operatör olmak üzere

$t, x \in [0, b_n]$ için

$$\omega_1(f, \delta) = \max_{\substack{t, x \in [0, b_n] \\ |t-x| \leq \delta}} \{|f(t) - f(x)|\} \text{ ve}$$

$$\varphi_x(t) = |t - x| \quad \text{iken}$$

her $f \in C_+[0, b_n]$ için

$$\left| L_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 8\omega_1\left(f, \frac{b_n}{\sqrt{n}}\right), x \in [0, b_n], n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

İspat

Sonuç 3.7.4 den

$$L_n^{(M)}(\varphi)(x) = \frac{\sum_{k=0}^n l_{n,k}(x) \left| \frac{b_n k}{n} - x \right|}{\sum_{k=0}^n l_{n,k}(x)}, x \in [0, b_n], n \in \mathbb{N}$$

ve Lemma 3.7.5 den $x \in \left[0, \frac{2b_n}{n}\right]$ için

$$L_n^{(M)}(\varphi)(x) = \bigvee_{k=0}^n l_{n,k}(x) \left| \frac{b_n k}{n} - x \right| = \max_{k=0,1,\dots,n} \{M_{k,n,0}(x)\} \text{ yazılabilir.}$$

Eğer $k = 0$ ise $M_{0,n,0}(x) = x \leq \frac{2b_n}{n}, x \in \left[0, \frac{2b_n}{n}\right]$ dir.

$k \geq 1$ ise

$x \in \left[0, \frac{b_n}{n}\right]$ için $(1)_k = k!$ ve $k \leq 2^k$ olduğundan

$$M_{k,n,0}(x) \leq \frac{\binom{n}{b_n x}_k b_n k}{2^k k!} \leq \frac{b_n k}{kn} = \frac{b_n}{n}$$

$x \in \left[\frac{b_n}{n}, \frac{2b_n}{n}\right]$ ve $k = 1$ için

$$M_{1,n,0}(x) = \frac{\binom{n}{b_n x}_1}{2^1 1!} (x - \frac{b_n}{n}) \leq \frac{b_n}{n}$$

$x \in \left[\frac{b_n}{n}, \frac{2b_n}{n}\right]$ ve $k = 2, 3, \dots, n$ için

$$M_{k,n,0}(x) \leq \frac{\binom{n}{b_n x}_k}{2^k k!} \left(\frac{b_n k}{n} - x \right) \leq \frac{(k+1)(k-1)b_n}{2^k n} \leq \frac{k^2 b_n}{2^k n}$$

$g(x) = \frac{x^2}{2^x}$ olarak alındığında, $g(x) \leq g\left(\frac{2}{\ln 2}\right) < 2, x \in [0, \infty)$ olduğundan

$$M_{k,n,0}(x) \leq \frac{k^2 b_n}{2^k n} \leq \frac{2b_n}{n} \text{ elde edilmektedir.}$$

Sonuç olarak $x \in \left[0, \frac{2b_n}{n}\right]$ için

$$L_n^{(M)}(\varphi_x)(x) = \max_{k=0,1,\dots,n} \{M_{k,n,0}(x)\} \leq \frac{2b_n}{n} \text{ olmaktadır.}$$

Lemma 3.7.5 dan $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right], j \in \{1, \dots, n-2\}$ için

$$L_n^{(M)}(\varphi_x)(x) = \max_{k=0,1,\dots,n} \{M_{k,n,j}(x)\}, x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right], j \in \{1, \dots, n-2\}$$

elde edilmektedir.

Aşağıda $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ ve $j \in \{1, \dots, n-2\}$ için $M_{k,n,j}(x)$ nin en büyük değeri tahmin edilmiştir:

i) $k = j + 1$ ise;

$$M_{j+1,n,j}(x) = \frac{\left(\frac{n}{b_n}x + j\right)}{2j+2} \left(x - \frac{b_n(j+1)}{n}\right) \leq \frac{b_n}{n}$$

ii) $k \geq j + 2$ ise;

a) $k - \sqrt{3k+2} < j$ olduğu kabul edilsin. Lemma 3.7.6 den $m_{k,n,j} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} M_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \left(\frac{b_n k}{n} - x\right) \leq \frac{b_n k}{n} - x \\ &\leq \frac{b_n k}{n} - \frac{b_n(j+1)}{n} \\ &\leq \frac{b_n(\sqrt{3k+2} - 1)}{n} \\ &\leq \frac{b_n\sqrt{3n+2}}{n} \leq 3 \frac{b_n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

b) $k - \sqrt{3k+2} \geq j$ kabul edilsin.

$g(x) = x - \sqrt{3x+2}$ fonksiyonu $\left[\frac{1}{12}, \infty\right)$ aralığında azalmayan fonksiyon ve

$k \geq j + 2$ olduğundan $3 \leq k \leq n$ alınabilir.

Ayrıca $g(x)$ azalmayan olduğundan

$\bar{k} - \sqrt{3\bar{k}+2} < j$ ve $\bar{k} + 1 - \sqrt{3\bar{k}+5} \geq j$ olacak şekilde bir $\bar{k} \in \{3, \dots, n\}$ vardır.

$$\begin{aligned} M_{\bar{k}+1,n,j}(x) &= m_{\bar{k}+1,n,j}(x) \left(\frac{b_n(\bar{k}+1)}{n} - x\right) \leq \frac{b_n(\bar{k}+1)}{n} - x \leq \frac{b_n(\bar{k}+1)}{n} - \frac{b_n(j+1)}{n} \\ &< \frac{b_n\sqrt{3\bar{k}+2}}{n} \leq \frac{b_n\sqrt{3n+2}}{n} \leq 3 \frac{b_n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Lemma 3.7.5 den $k \in \{\bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \dots, n\}$ olduğu için

$M_{\bar{k}+1,n,j}(x) \geq M_{\bar{k}+2,n,j}(x) \geq \dots M_{n,n,j}(x)$ elde edilmektedir.

Sonuç olarak $k \in \{\bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \dots, n\}$ için

$M_{k,n,j}(x) \leq 3 \frac{b_n}{\sqrt{n}}$ olmaktadır.

iii) $k \leq j$ ise;

a) $k + \sqrt{3k} > j$ olsun. Lemma 3.7.5 den

$$\begin{aligned} M_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) \left(x - \frac{b_n k}{n} \right) \leq \frac{b_n(j+2)}{n} - \frac{b_n k}{n} \\ &\leq \frac{b_n(\sqrt{3k} + 2)}{n} \leq \frac{b_n(\sqrt{3n} + 2)}{n} \leq 4 \frac{b_n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

b) $k + \sqrt{3k} \leq j$ olsun. $h(x) = x + \sqrt{3x}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artan olduğundan

$\tilde{k} + \sqrt{3\tilde{k}} > j$ ve $\tilde{k} - 1 + \sqrt{3\tilde{k} - 3} \leq j$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M_{\tilde{k}-1,n,j}(x) &= m_{\tilde{k}-1,n,j}(x) \left(x - \frac{b_n(\tilde{k}-1)}{n} \right) \leq x - \frac{b_n(\tilde{k}-1)}{n} \\ &\leq \frac{b_n(j+2)}{n} - \frac{b_n(\tilde{k}-1)}{n} < \frac{b_n(\tilde{k} + \sqrt{3\tilde{k}} + 2)}{n} - \frac{b_n(\tilde{k}-1)}{n} \\ &= \frac{b_n(\sqrt{3\tilde{k}} + 3)}{n} \leq \frac{b_n(\sqrt{3n} + 2)}{n} \leq 4 \frac{b_n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $\tilde{k} \in \{1, \dots, n\}$ minimum sayısı vardır. $j \geq 1$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $j + \sqrt{3j} > 1$ ve $\tilde{k} + \sqrt{3\tilde{k}} > j$ sağlayacak şekilde bir minimum $\tilde{k} \in \{1, \dots, n\}$ mevcut olduğundan $\tilde{k} - 1 \leq j$ elde edilmektedir.

Yani Lemma 3.7.5 den $k \in \{1, 2, \dots, \tilde{k} - 1\}$ için

$M_{\tilde{k}-1,n,j}(x) \geq M_{\tilde{k}-2,n,j}(x) \geq \dots M_{0,n,j}(x)$ elde edilmektedir.

Sonuç olarak $k \in \{1, 2, \dots, \tilde{k} - 1\}$ için $M_{k,n,j}(x) \leq 4 \frac{b_n}{\sqrt{n}}$ olmaktadır.

Süreklilik modülünün Eş. 2.2 ile ifade edilen özelliğinden $n \in \mathbb{N}$ için tüm durumlarda

$\delta = 4 \frac{b_n}{\sqrt{n}}$ seçilirse ispat tamamlanmış olur.

Yaklaşım derecesinin $\frac{b_n}{\sqrt{n}}$ olduğu gösterilmiştir. Aşağıda bu yaklaşım derecesinin iyileştirilemeyeceği gösterilmiştir.

Hatırlatma

$$j_n = \left\lfloor \frac{n}{2b_n} \right\rfloor, k_n = j_n + \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{b_n} \right\rfloor, x_n = \frac{b_n j_n}{n}$$

şeklinde ifade edilmiş olup, tam değer fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned} M_{k_n, n, j_n}(x) &= \frac{\left(\frac{n}{b_n} x_n + j_n\right) \dots \left(\frac{n}{b_n} x_n + k_n - 1\right)}{2^{k_n - j_n} (j_n + 1) \dots k_n} \left| \frac{b_n k_n}{n} - x_n \right| \\ &\geq \frac{\left(\frac{n}{b_n} x_n + j_n\right)^{k_n - j_n}}{2^{k_n - j_n} k_n^{k_n - j_n}} \left| \frac{b_n k_n}{n} - x_n \right| \\ &= \frac{(2j_n)^{k_n - j_n}}{2^{k_n - j_n} k_n^{k_n - j_n}} \left| \frac{b_n k_n}{n} - x_n \right| \\ &= \frac{(j_n)^{k_n - j_n} b_n (k_n - j_n)}{k_n^{k_n - j_n} n} \\ &= \left(\frac{\left\lfloor \frac{n}{2b_n} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{2b_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{b_n} \right\rfloor} \right)^{\left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{b_n} \right\rfloor} \frac{\left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{b_n} \right\rfloor}{\frac{n}{b_n}} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılmaktadır.

Tam değer fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\left(\frac{\frac{n}{2b_n} - 1}{\frac{n}{2b_n} + \frac{\sqrt{n}}{b_n}} \right)^{\frac{\sqrt{n}}{b_n}} \leq \left(\frac{\left\lfloor \frac{n}{2b_n} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{2b_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{b_n} \right\rfloor} \right)^{\left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{b_n} \right\rfloor} \leq \left(\frac{\frac{n}{2b_n}}{\frac{n}{2b_n} + \frac{\sqrt{n}}{b_n} - 2} \right)^{\frac{\sqrt{n}}{b_n} - 1}$$

elde edilmektedir.

Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left[\frac{n}{2b_n} \right]}{\left[\frac{n}{2b_n} \right] + \left[\frac{\sqrt{n}}{b_n} \right]} \right)^{\left[\frac{\sqrt{n}}{b_n} \right]} = e^{-2}$$

olmaktadır ve

$$M_{k_n, n, j_n}(x) \geq \frac{\left[\frac{\sqrt{n}}{b_n} \right]}{e^{3 \frac{\sqrt{n}}{b_n}}}, n \geq n_0 \text{ olacak şekilde } n_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.}$$

Ayrıca $\frac{n}{b_n^2} \geq 4$ için

$$\frac{\left[\frac{\sqrt{n}}{b_n} \right]}{\frac{\sqrt{n}}{b_n}} \geq \frac{\frac{\sqrt{n}}{b_n} - 1}{\frac{\sqrt{n}}{b_n}} \geq \frac{1}{2}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Böylece $n \geq n_0$ için

$$M_{k_n, n, j_n}(x) \geq \frac{1}{2e^{3 \frac{\sqrt{n}}{b_n}}}$$

olmaktadır.



4. OPERATÖRLERİN ŞEKİL KORUMA ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde öncelikle 3. bölümde ifade edilen operatörlerin bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım dereceleri belirlenecek ve bazı şekil özellikleri verilecektir. Sonrasında Eş. 3.15 de tanımı verilen lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörünün bazı alt sınıfları için, daha iyi yaklaşım dereceleri belirlenecek, bazı şekil koruma özelliklerinden bahsedilecektir.

4.1. Maksimum Çarpım Tip Lineer Olmayan Favard-Szasz-Mirakjan Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi

Aşağıda Eş.3.1 de ifade edilen, maksimum çarpım tip lineer olmayan Favard-Szasz-Mirakjan operatörünün bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım derecesi belirlenmiştir [14].

Öncelikle f fonksiyonunun bazı alt sınıfları için Eş.3.2 de ifade edilen $\omega_1\left(f, \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\right)$ yaklaşımının esasen $\omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)$ yaklaşımına iyileştirilebileceği gösterilmiştir.

Bu amaçla

$k, j \in \{0, 1, \dots\}$ için $f_{k,n,j}: \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{s_{n,k}(x)}{s_{n,j}(x)} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{j!}{k!} \cdot (nk)^{k-j} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlandığında her $j \in \{0, 1, \dots\}$ ve $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için

$$F_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^{\infty} f_{k,n,j}(x)$$

yazılabileceği açıktır [14].

İleride ihtiyaç duyulacak bazı yardımcı lemmalar aşağıda ifade edilmiştir.

4.1.1. Lemma

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı ve her $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için

$$F_n^{(M)}(f)(x) = \max\{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}$$

olacak şekilde bir fonksiyon olsun.

Öyleyse $\omega_1(f, \delta) = \max\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta\} < \infty$ iken

her $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için

$$\left| F_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right) \text{ olmaktadır [14].}$$

4.1.2. Lemma

Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu konkav ise,

$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır [14].

4.1.3. Sonuç

Eğer $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ artmayan bir fonksiyon olmak üzere

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu sınırlı, azalmayan bir fonksiyon ise,

her $x \in [0, \infty)$ için

$$\left| F_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1\left(f; \frac{1}{n}\right) \text{ olmaktadır [14].}$$

4.1.4. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı, azalmayan konkav bir fonksiyon olsun.

Öyleyse her $x \in [0, \infty)$ için

$$\left| F_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1\left(f; \frac{1}{n}\right) \text{ olmaktadır [14].}$$

4.2. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Favard- Szász -Mirakjan Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri

Aşağıda Eş.3.1 de ifade edilen maksimum çarpım lineer olmayan Favard-Szasz-Mirakjan operatörünün şekil koruma özellikleri verilmiştir [14].

4.2.1. Lemma

Herhangi bir sınırlı $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için maksimum çarpım $F_n^{(M)}(f)(x)$ operatörü $[0, \infty)$ aralığında pozitif, sınırlı ve süreklidir ve $F_n^{(M)}(f)(0) = f(0)$ sağlanır.

4.2.2. Lemma

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon ise

her $k, j \in \{0, 1, \dots\}$, $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için

$k \leq j$ olduğunda

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$$

elde edilmektedir [14].

4.2.3. Sonuç

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon ise

her $k, j \in \{0, 1, \dots\}$, $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için $k \geq j$ olduğunda

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x) \text{ elde edilmektedir [14].}$$

4.2.4. Teorem

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, \infty)$ da azalmayan ve sınırlı bir fonksiyon ise $F_n^{(M)}(f)(x)$ azalmayan (ve sınırlı) bir operatördür [14].

4.2.5. Sonuç

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu artmayan ise $F_n^{(M)}(f)(x)$ artmayandır [14].

4.2.6. Tanım

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli olsun.

Eğer her $x, y \in [0, \infty)$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ eşitsizliği sağlanır ise $[0, \infty)$ aralığında f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında quasi-konvektir denir [14,22].

4.2.7. Sonuç

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli, sınırlı ve quasi-konveks bir fonksiyon ise her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n^{(M)}(f)(x)$ operatörü $[0, \infty)$ da quasi-konvektir [14].

4.2.8. Lemma

Her $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $F_n^{(M)}(e_0)(x) = 1$ ve $F_n^{(M)}(e_1)(x) = x$ elde edilmektedir [14].

4.2.9. Teorem

Her $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ için $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, $j = 0, 1, \dots$ formundaki her aralıkta $F_n^{(M)}(f)(x)$ konvektir [14].

4.3. Maksimum Çarpım Tip Lineer Olmayan Bleimann-Butzer-Hahn Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi

Aşağıda Eş.3.3 de ifade edilen maksimum çarpım tip lineer olmayan Bleimann-Butzer-Hahn operatörünün bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım derecesi belirlenmiştir [15].

Öncelikle f fonksiyonunun bazı alt sınıfları için Eş. 3.4 de ifade edilen $\omega_1\left(f; \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}{\sqrt{n+1}}\right)$

yaklaşımının esasen $\omega_1\left(f; \frac{(1+x)^2}{n}\right)$ yaklaşımına iyileştirilebileceği gösterilmiştir.

Bu amaçla

$j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ için

$$f_{k,n,j}: \left[\frac{j}{n-j+1}, \frac{j+1}{n-j}\right] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve}$$

$$f_{k,n,n}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyonu}$$

$$f_{k,n,j}(x) = m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{k}{n+1-k}\right)$$

$$= \frac{s_{n,k}(x)}{s_{n,j}(x)} f\left(\frac{k}{n+1-k}\right)$$

$$= \frac{j!(n-j)!}{k!(n-k)!} \cdot x^{k-j} f\left(\frac{k}{n+1-k}\right)$$

olarak tanımlandığında

her $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ve $x \in \left[\frac{j}{n-j+1}, \frac{j+1}{n-j}\right]$ ya da $j = n$ ve $x \in [n, \infty)$ için

$$H_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^n f_{k,n,j}(x)$$

yazılabileceği açıktır [15].

İleride ihtiyaç duyulacak bazı yardımcı lemmalar aşağıda ifade edilmiştir.

4.3.1. Lemma

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ her $x \in \left[\frac{j}{n-j+1}, \frac{j+1}{n-j}\right]$ için

$H_n^{(M)}(f)(x) = \max\{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun.

Öyleyse $\omega_1(f; \delta) = \max\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta\} < \infty$

ve $n \geq 2x$ iken her $x \in \left[\frac{j}{n-j+1}, \frac{j+1}{n-j}\right]$ için

$\left| H_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 2\omega_1\left(f; \frac{(1+x)^2}{n}\right)$ olmaktadır [15].

4.3.2. Lemma

Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu konkav ise,

$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır [15].

4.3.3. Sonuç

Eğer $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ artmayan bir fonksiyon olmak üzere

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu sınırlı, azalmayan bir fonksiyon ise,

her $x \in [0, \infty)$, $n \geq 2x$ için

$\left| H_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 2\omega_1\left(f; \frac{(1+x)^2}{n}\right)$ olmaktadır [15].

4.3.4. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı, azalmayan konkav bir fonksiyon olsun.

Öyleyse her $x \in [0, \infty)$, $n \geq 2x$ için

$$\left| H_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq 2\omega_1\left(f; \frac{(1+x)^2}{n}\right) \text{ olmaktadır [15].}$$

4.4. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Bleimann-Butzer-Hahn Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri

Aşağıda Eş.3.3 de ifade edilen maksimum çarpım lineer olmayan Bleimann-Butzer-Hahn operatörünün şekil koruma özellikleri ifade edilmiştir [15].

4.4.1. Lemma

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan bir fonksiyon ise $k \leq j$ ve $x \in \left[\frac{j}{n-j+1}, \frac{j+1}{n-j}\right]$ ya da

$j = n$ için $x \in [0, \infty)$ iken her $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ve $k \in \{1, \dots, n\}$ için

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x) \text{ olmaktadır [15].}$$

4.4.2. Sonuç

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ artmayan bir fonksiyon ise

$k \geq j$ ve $x \in \left[\frac{j}{n-j+1}, \frac{j+1}{n-j}\right]$ ya da $j = n$ için $x \in [0, \infty)$ iken

her $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ve $k \in \{1, \dots, n-1\}$ için

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x) \text{ olmaktadır [15].}$$

4.4.3. Teorem

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, \infty)$ da azalmayan ve sınırlı bir fonksiyon ise $H_n^{(M)}(f)(x)$ azalmayan (ve sınırlı) bir operatördür [15].

4.4.4. Sonuç

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu artmayan ise $H_n^{(M)}(f)(x)$ artmayandır [15].

4.4.5. Sonuç

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli, sınırlı ve quasi-konveks bir fonksiyon ise her $n \in \mathbb{N}$ için $H_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, \infty)$ da quasi-konvekstir [15].

4.5. Maksimum Çarpım Kesilmiş Favard- Szász -Mirakjan Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi

Aşağıda Eş.3.5 de ifade edilen maksimum çarpım kesilmiş Favard- Szász -Mirakjan operatörünün bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım derecesi belirlenmiştir [16].

Öncelikle f fonksiyonunun bazı alt sınıfları için Eş.3.6 de ifade edilen $\omega_1\left(f; \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ yaklaşımının esasen $\omega_1\left(f; \frac{1}{n}\right)$ yaklaşımına iyileştirilebileceği gösterilmiştir. Bu amaçla

$k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ve $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için $f_{k,n,j}: \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{s_{n,k}(x)}{s_{n,j}(x)} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{j!}{k!} \cdot (nx)^{k-j} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlandığında

her $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ve $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$

$$T_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^n f_{k,n,j}(x)$$

yazılabileceği açıktır [16].

4.5.1. Lemma

$f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, her $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için

$T_n^{(M)}(f)(x) = \max\{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x)\}$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun.

Öyleyse her $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ için

$$\left| T_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right) \text{ olmaktadır [16].}$$

4.5.2. Lemma

$f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ konkav bir fonksiyon olsun. Öyleyse

$g : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır [16].

4.5.3. Sonuç

Eğer $g : (0,1] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ artmayan bir fonksiyon olmak üzere

$f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu sınırlı, azalmayan bir fonksiyon ise, her $x \in [0, 1]$ için

$$\left| T_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1 \left(f, \frac{1}{n} \right) \text{ olmaktadır [16].}$$

4.5.4. Sonuç

$f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan konkav bir fonksiyon olsun.

Öyleyse her $x \in [0, 1]$ için

$$\left| T_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1 \left(f, \frac{1}{n} \right) \text{ olmaktadır [16].}$$

4.6. Maksimum Çarpım Kesilmiş Favard- Szász -Mirakjan Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri

Aşağıda Eş.3.5 de ifade edilen maksimum çarpım kesilmiş Favard-Szász-Mirakjan operatörünün şekil koruma özellikleri verilmiştir [16].

4.6.1. Lemma

Eğer $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon ise

her $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ve

$x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right]$ için $k \leq j$ olduğunda

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x) \text{ elde edilmektedir [16].}$$

4.6.2. Sonuç

Eğer $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon ise

her $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

ve $x \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right]$ için $k \geq j$ olduğunda

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x) \text{ olmaktadır [16].}$$

4.6.3. Teorem

Eğer $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan ise $T_n^{(M)}(f)(x)$ azalmayandır [16].

4.6.4. Sonuç

Eğer $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ artmayan ise $T_n^{(M)}(f)(x)$ artmayandır [16].

4.6.5. Sonuç

Eğer $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli ve quasi-konveks bir fonksiyon ise her $n \in \mathbb{N}$ için $[0, 1]$ da $T_n^{(M)}(f)(x)$ quasi-konvekstir [16].

4.6.6. Lemma

Her $x \in [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $T_n^{(M)}(e_0)(x) = 1$ ve $T_n^{(M)}(e_1)(x) = x$ elde edilmektedir [16].

4.6.7. Teorem

Her $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için, $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ formundaki her aralıkta $T_n^{(M)}(f)(x)$ konvekstir [16].

4.7. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Genelleştirilmiş Szász Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi

Aşağıda Eş.3.11 de ifade edilen maksimum çarpım lineer olmayan genelleştirilmiş Szász operatörünün bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım derecesi belirlenmiştir [19]. Aşağıda f fonksiyonunun sınırlı, azalmayan konkav fonksiyon gibi bazı alt sınıfları için Eş.3.12 de ifade edilen $\omega_1\left(f, \sqrt{\frac{b_n x}{a_n}}\right)$ yaklaşım derecesinin iyileştirilebileceği gösterilmiştir.

Bu amaçla $k, j \in \{0, 1, \dots\}$ için $f_{k,n,j} : \left[\frac{b_n j}{a_n}, \frac{b_n(j+1)}{a_n}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{b_n k}{a_n}\right) = \frac{c_{n,k}(x)}{c_{n,j}(x)} f\left(\frac{b_n k}{a_n}\right) \\ &= \frac{j!}{k!} \cdot \left(\frac{b_n x}{a_n}\right)^{k-j} f\left(\frac{b_n k}{a_n}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlandığında her $j \in \{0,1, \dots\}$ ve $x \in \left[\frac{b_n j}{a_n}, \frac{b_n(j+1)}{a_n}\right]$ için

$$S_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^{\infty} f_{k,n,j}(x)$$

yazılabileceği açıktır.

4.7.1 Lemma

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı ve her $x \in \left[\frac{b_n j}{a_n}, \frac{b_n(j+1)}{a_n}\right]$ için

$S_n^{(M)}(f)(x) = \text{maks}\{f_{j,n,j}, f_{j+1,n,j}\}$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun.

Öyleyse $\omega_1(f, \delta) = \text{maks}\{|f(x) - f(y)|; x, y \in [0, \infty), |x - y| \leq \delta\}$

iken her $x \in \left[\frac{b_n j}{a_n}, \frac{b_n(j+1)}{a_n}\right]$ için

$$\left| S_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{a_n}\right) \text{ olmaktadır [19].}$$

4.7.2. Sonuç

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı, azalmayan bir fonksiyon ve

$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), g(x) = \frac{f(x)}{x}$ artmayan bir fonksiyon olsun. Öyleyse

her $x \in [0, \infty)$ için

$$\left| S_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{a_n}\right) \text{ olmaktadır [19].}$$

4.7.3. Lemma

Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu konkav ise, $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır [19].

4.7.4. Sonuç

Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sınırlı, azalmayan ve konkav bir fonksiyon ise, her $x \in [0, \infty)$ için

$$\left| S_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{a_n}\right) \text{ olmaktadır [19].}$$

4.8. Maksimum Çarpım Lineer Olmayan Genelleştirilmiş Szász Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri

Aşağıda Eş.3.11 de ifade edilen maksimum çarpım lineer olmayan genelleştirilmiş Szász operatörünün şekil koruma özellikleri ifade edilmiştir [19].

4.8.1. Lemma

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olsun. Öyleyse

her $k, j \in \{0, 1, \dots\}$, $x \in \left[\frac{b_n j}{a_n}, \frac{b_n(j+1)}{a_n}\right]$ için $k \leq j$ olduğunda

$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x)$ elde edilmektedir [19].

4.8.2. Sonuç

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon olsun.

Öyleyse her $k, j \in \{0, 1, \dots\}$, $x \in \left[\frac{b_n j}{a_n}, \frac{b_n(j+1)}{a_n}\right]$ için $k \geq j$ olduğunda

$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x)$ olmaktadır [19].

4.8.3. Teorem

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu azalmayan ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Öyleyse $S_n^{(M)}(f)(x)$ $[0, \infty)$ aralığında azalmayan ve sınırlıdır [19].

4.8.4. Sonuç

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu artmayan ise $S_n^{(M)}(f)(x)$ artmayandır [19].

4.8.5. Sonuç

Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli, sınırlı ve quasi-konveks bir fonksiyon ise her $n \in \mathbb{N}$ için $[0, \infty)$ da $S_n^{(M)}(f)(x)$ quasi-konvektir [19].

4.8.6. Teorem

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ herhangi bir fonksiyon olsun.

Öyleyse her $j \in \{0, 1, \dots\}$ için $\left[\frac{b_n j}{a_n}, \frac{b_n(j+1)}{a_n}\right] \subset [0, \infty)$ formundaki her aralıkta $S_n^{(M)}(f)(x)$ konvektir [19].

4.9. Lineer Olmayan Maksimum Çarpım Chlodowsky Tip Kesilmiş Lupaş Operatörünün Alt Sınıfları İçin Daha İyi Yaklaşım Derecesi

Aşağıda Eş.3.15 de ifade edilen, lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörünün bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım derecesi belirlenmiştir.

Öncelikle f fonksiyonunun bazı alt sınıfları için Teorem 3.7.9 da ifade edilen $\omega_1\left(f, \frac{b_n}{\sqrt{n}}\right)$ yaklaşımının esasen $\omega_1\left(f, \frac{b_n}{n}\right)$ yaklaşımına iyileştirilebileceği gösterilmiştir. Bu amaçla

$k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ve $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ için

$f_{k,n,j}: \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{k,n,j}(x) &= m_{k,n,j}(x) f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \\ &= \frac{l_{n,k}(x)}{l_{n,j}(x)} f\left(\frac{b_n k}{n}\right) = \frac{\left(\frac{n}{b_n}x+j\right)\left(\frac{n}{b_n}x+j+1\right)\dots\left(\frac{n}{b_n}x+k-1\right)j!}{2^{k-j}k!} f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlandığında her $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ve $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ için

$$L_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^n f_{k,n,j}(x)$$

olarak ifade edilebilir.

4.9.1. Lemma

$f: [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon ve

her $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ ve $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ için

$$L_n^{(M)}(f)(x) = \max\{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x), f_{j+2,n,j}(x)\} \quad (4.1)$$

olmak üzere

her $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ için

$$\left|L_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x)\right| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{n}\right) \text{ olmaktadır.}$$

İspat

1. durum:

Her $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ için $L_n^{(M)}(f)(x) = f_{j,n,j}(x) = f\left(\frac{b_n j}{n}\right)$ olsun.

$\frac{b_n}{n} \leq x - \frac{b_n j}{n} \leq \frac{2b_n}{n}$ olduğundan $\left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{2b_n}{n}\right)$ elde edilir.

2. durum:

Her $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ için

$L_n^{(M)}(f)(x) = f_{j+1,n,j}(x)$ olsun.

a) $L_n^{(M)}(f)(x) \leq f(x)$ ise

$$\begin{aligned} \left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| &= f(x) - f_{j+1,n,j}(x) \\ &\leq f(x) - f_{j,n,j}(x) \leq \omega_1\left(f, \frac{2b_n}{n}\right) \end{aligned}$$

b) $L_n^{(M)}(f)(x) > f(x)$ ise

$$\begin{aligned} \left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| &= f_{j+1,n,j}(x) - f(x) \\ &\leq m_{j+1,n,j}(x) f\left(\frac{b_n(j+1)}{n}\right) - f(x) \\ &\leq f\left(\frac{b_n(j+1)}{n}\right) - f(x) \end{aligned}$$

$0 \leq x - \frac{b_n(j+1)}{n} \leq \frac{b_n}{n}$ olduğundan

$\left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{n}\right)$ elde edilmektedir.

3. durum:

Her $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ için $L_n^{(M)}(f)(x) = f_{j+2,n,j}(x)$ olsun.

a) $L_n^{(M)}(f)(x) \leq f(x)$ ise

$$\left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| = f(x) - f_{j+2,n,j}(x) \leq f(x) - f_{j,n,j}(x) \leq \omega_1 \left(f, \frac{2b_n}{n} \right)$$

b) $L_n^{(M)}(f)(x) > f(x)$ ise

$$\begin{aligned} \left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| &= f_{j+2,n,j}(x) - f(x) \\ &\leq m_{j+2,n,j}(x) f \left(\frac{b_n(j+2)}{n} \right) - f(x) \\ &\leq f \left(\frac{b_n(j+2)}{n} \right) - f(x) \end{aligned}$$

$0 \leq \frac{b_n(j+2)}{n} - x \leq \frac{b_n}{n}$ olduğundan

$\left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| \leq \omega_1 \left(f, \frac{b_n}{n} \right)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.9.2. Lemma

$f: [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ konkav ise, $g: (0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayandır.

İspat

$x, y \in (0, b_n]$ için $x \leq y$ olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} f(x) &= f \left(\frac{x}{y}y + \frac{y-x}{y}0 \right) \\ &\geq \frac{x}{y} f(y) + \frac{y-x}{y} f(0) \geq \frac{x}{y} f(y) \end{aligned}$$

Yani $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y}$ olmaktadır.

4.9.3. Sonuç

$f: [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan bir fonksiyon ve $g: (0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$,

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon olmak üzere

her $x \in [0, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ için $\left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| \leq \omega_1 \left(f, \frac{b_n}{n} \right)$ olmaktadır.

İspat

f monoton bir fonksiyon olduğundan $k \leq j$ için

$$\begin{aligned}
 f_{k-1,n,j}(x) &\leq \frac{2^{j-k+1}j!}{(k-1)! \left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + j - 1\right)} f\left(\frac{b_n(k-1)}{n}\right) \\
 &\leq \frac{2^{j-k}j!}{(k)! \left(\frac{n}{b_n}x + k\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + j - 1\right)} \frac{2k}{\left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right)} f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \\
 &\leq \frac{2^{j-k}j!}{(k)! \left(\frac{n}{b_n}x + k\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + j - 1\right)} \frac{2k}{(j+k)} f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \\
 &\leq f_{k,n,j}(x)
 \end{aligned}$$

olmaktadır. Böylece

$$\bigvee_{k=1}^j f_{k,n,j}(x) = f_{j,n,j}(x)$$

$$L_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=j}^n f_{k,n,j}(x) \tag{4.2}$$

elde edilmektedir.

Her $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ olacak şekilde $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ve $k \geq j$ olsun. g fonksiyonu artmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
 f_{k+1,n,j}(x) &= \frac{j! \left(\frac{n}{b_n}x + j\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + k\right)}{2^{k+1-j}(k+1)!} f\left(\frac{b_n(k+1)}{n}\right) \\
 &\leq \frac{j! \left(\frac{n}{b_n}x + j\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + k\right)}{2^{k+1-j}(k+1)!} \frac{k+1}{k} f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \\
 &= \frac{j! \left(\frac{n}{b_n}x + j\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right)}{2^{k-j}k!} \frac{(nx+k)}{2k} f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \\
 &\leq f_{k,n,j}(x) \frac{k+j+2}{2k} \text{ olmaktadır.}
 \end{aligned}$$

Böylece $k \geq j+2$ için $f_{k+1,n,j}(x) \leq f_{k,n,j}(x)$ olduğundan

$$\bigvee_{k=j+2}^n f_{k,n,j}(x) = f_{j+2,n,j}(x), j \in \{0,1, \dots, n-2\} \quad (4.3)$$

elde edilmektedir. Eş.4.2 ve Eş.4.3 ile Eş. 4.1 elde edilmektedir;

$$L_n^{(M)}(f)(x) = \text{maks}\{f_{j,n,j}(x), f_{j+1,n,j}(x), f_{j+2,n,j}(x)\}, j \in \{0,1, \dots, n-2\}$$

Lemma 4.9.1 den

$$\left| L_n^{(M)}(f)(x) - (f)(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{n}\right) \text{ elde edilmektedir. Böylece ispat tamamlanmıştır.}$$

4.9.4. Sonuç

$f: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan konkav bir fonksiyon ise

$$x \in [0, b_n] \text{ için } \left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{n}\right) \text{ olmaktadır.}$$

İspat

$f: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ konkav bir fonksiyon olduğundan. Lemma 4.9.2 den

$$g: (0, b_n] \rightarrow [0, \infty), g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ fonksiyonu artmayandır.}$$

$f: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan ve Sonuç 4.9.3 den her $x \in [0, b_n]$ için

$$\left| L_n^{(M)}(f)(x) - f(x) \right| \leq \omega_1\left(f, \frac{b_n}{n}\right) \text{ elde edilmektedir.}$$

4.10. Linear Olmayan Maksimum Çarpım Chlodowsky Tip Kesilmiş Lupaş Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri

Aşağıda Eş. 3.15 de ifade edilen lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörünün şekil koruma özellikleri verilmiştir.

4.10.1. Lemma

$n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $f: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan bir fonksiyon ise, her $j \in \{0,1, \dots, n-2\}$ ve

$k \in \{0,1, \dots, n\}$ için $k \leq j$ ve $x \in [0, b_n]$ olmak üzere

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k-1,n,j}(x) \text{ elde edilmektedir.}$$

İspat

$k \leq j$ olduğundan

Lemma 3.7.6'nın ispatında ifade edilen 2. durumdan

$$\begin{aligned} \frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k-1,n,j}(x)} &= \frac{\frac{n}{b_n}x + k - 1}{2k} \\ &\geq \frac{j+k}{2k} \geq 1 \text{ elde edilmiştir.} \end{aligned}$$

Yani $m_{k,n,j}(x) \geq m_{k-1,n,j}(x)$ olmaktadır. f azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$m_{k,n,j}(x)f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \geq m_{k-1,n,j}(x)f\left(\frac{b_n(k-1)}{n}\right) \text{ elde edilmektedir.}$$

4.10.2. Sonuç

$f: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ artmayan bir fonksiyon olsun. Öyleyse her $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ve

$k \in \{0, 1, \dots, n\}$ için $k \geq j$ ve $x \in [0, b_n]$ olmak üzere

$$f_{k,n,j}(x) \geq f_{k+1,n,j}(x) \text{ elde edilmektedir.}$$

İspat

$k \geq j$ olsun.

Lemma 3.7.6'nın ispatında ifade edilen 1. durumdan

$$\begin{aligned} \frac{m_{k,n,j}(x)}{m_{k+1,n,j}(x)} &= \frac{2(k+1)}{\frac{n}{b_n}x + k} \\ &\geq \frac{2(k+1)}{k+j+2} \geq 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Böylece $m_{k,n,j}(x) \geq m_{k+1,n,j}(x)$ elde edilmektedir. f artmayan bir fonksiyon olduğundan

$$m_{k,n,j}(x)f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \geq m_{k+1,n,j}(x)f\left(\frac{b_n(k+1)}{n}\right) \text{ elde edilmektedir.}$$

4.10.3. Teorem

Eğer $f: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ azalmayan bir fonksiyon ise $L_n^{(M)}(f)(x)$ azalmayandır.

İspat

$L_n^{(M)}(f)(x)$ $[0, b_n]$ aralığında sürekli olduğu için her $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ için $\left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ formundaki her alt aralığında $L_n^{(M)}(f)(x)$ ın azalan olduğunu göstermek yeterlidir.

Öyleyse $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ve $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ olsun.

f azalmayan bir fonksiyon olduğundan 4.10.1 Lemma dan

$f_{j,n,j}(x) \geq f_{j-1,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{0,n,j}(x)$ olmaktadır.

Yani her $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ için

$$L_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k \geq j}^n f_{k,n,j}(x)$$

elde edilmektedir.

$k \geq j$ için $f_{k,n,j}(x)$ fonksiyonunun azalmayan olduğu açıktır.

$L_n^{(M)}(f)(x)$ azalmayan fonksiyonların maksimumu olarak tanımlandığından $L_n^{(M)}(f)(x)$ azalmayandır.

4.10.4. Sonuç

Eğer $f: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ artmayan bir fonksiyon ise $L_n^{(M)}(f)(x)$ artmayandır.

İspat

$L_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, b_n]$ da sürekli olduğundan $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ olmak üzere $\left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ formundaki her bir alt aralığında $L_n^{(M)}(f)(x)$ ın artmayan olduğunu göstermek yeterlidir.

Bu yüzden $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ve $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ olsun.

f artmayan bir fonksiyon olduğu için Sonuç 4.10.2 den

$f_{j,n,j}(x) \geq f_{j+1,n,j}(x) \geq \dots \geq f_{n,n,j}(x)$ elde edilmektedir.

Böylece her $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n} \right]$ için

$L_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k \geq 0}^j f_{k,n,j}(x)$ olmaktadır. $k \leq j$ için $f_{k,n,j}(x)$ fonksiyonunun artmayan olduğu açıktır. $L_n^{(M)}(f)(x)$, artmayan fonksiyonların maksimumu olarak tanımlandığından, $L_n^{(M)}(f)(x)$ artmayandır.

Hatırlatma

f sürekli fonksiyonunun $[0, b_n]$ de quasi-konveks olması, f fonksiyonu $[0, c]$ de artmayan ve $[c, b_n]$ de azalmayan olacak şekilde bir $c \in [0, b_n]$ noktasının mevcut olması anlamına gelmektedir [23]. Bu quasi-konveks fonksiyonların sınıfı, hem artmayan hem de azalmayan fonksiyonların sınıfını içermektedir. Ayrıca $[0, b_n]$ deki sürekli konveks fonksiyonların sınıfını içermektedir.

4.10.5. Sonuç

Eğer $f: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, b_n]$ da sürekli ve quasi-konveks ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, b_n]$ aralığında quasi-konvektir.

İspat

$L_n^{(M)}(f)(x)$ in $[0, b_n]$ aralığında quasi-konveks olması, f fonksiyonunun $[0, c]$ de artmayan ve $[c, b_n]$ de azalmayan olacak şekilde $c \in [0, b_n]$ noktasının mevcut olması demektir. .
 $F, G: [0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonları her $x \in [0, c]$ için $F(x) = f(x)$, her $x \in [c, b_n]$ için $F(x) = f(c)$ ve her $x \in [0, c]$ için $G(x) = f(c)$, her $x \in [c, b_n]$ için $G(x) = f(x)$ olarak tanımlansın. $[0, b_n]$ aralığında F fonksiyonu sürekli ve artmayan, G fonksiyonu sürekli ve azalmayandır. Her $x \in [0, b_n]$ için $f(x) = \max\{F(x), G(x)\}$ dir.

Pseudo-lineerlik özelliği sağlandığından her $x \in [0, b_n]$ için

$$L_n^{(M)}(f)(x) = \max\{L_n^{(M)}(F)(x), L_n^{(M)}(G)(x)\} \text{ olmaktadır.}$$

1. Durum $L_n^{(M)}(F)(x)$ ve $L_n^{(M)}(G)(x)$ birbiriyle kesişmez ise

her $x \in [0, b_n]$ için $L_n^{(M)}(f)(x) = L_n^{(M)}(F)(x)$ ya da

her $x \in [0, b_n]$ için $L_n^{(M)}(f)(x) = L_n^{(M)}(G)(x)$ olmaktadır. Her $x \in [0, b_n]$ için $L_n^{(M)}(f)(x)$ artmayan ya da azalmayan fonksiyondur. Yani her $x \in [0, b_n]$ için $L_n^{(M)}(f)(x)$ quasi-konvektir.

2. Durum $L_n^{(M)}(F)(x)$ ve $L_n^{(M)}(G)(x)$ birbiriyle kesişiyor ise $L_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, c']$ de artmayan ve $[c', 1]$ de azalmayan olacak şekilde bir $c' \in [0, b_n]$ noktası mevcuttur. Sonuç olarak $L_n^{(M)}(f)(x)$, $[0, b_n]$ aralığında quasi-konvektir.

4.10.6. Lemma

$f: [0, b_n] \rightarrow [0, \infty)$ herhangi bir fonksiyon olsun. Öyleyse $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ için

$\left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ formundaki her aralıkta $L_n^{(M)}(f)(x)$ konveksdir.

İspat:

Her $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ve $x \in \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ için $L_n^{(M)}(f)(x) = \bigvee_{k=0}^n f_{k,n,j}(x)$ olarak yazılabildiğinden, $\left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ de seçilen her bir j noktası için $f_{k,n,j}(x)$ nin konveks olmaktadır. $L_n^{(M)}(f)(x)$, $\left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ deki konveks fonksiyonların maksimumu olduğundan seçilen her $f_{k,n,j}(x)$ in konveksliğini göstermek yeterlidir.

$f(x) \geq 0$, (b_n) pozitif reel sayıların bir dizisi ve

$$f_{k,n,j}(x) = \frac{\binom{\frac{n}{b_n}x}{k} j!}{2^{k-j} \binom{\frac{n}{b_n}x}{j} k!} f\left(\frac{b_n k}{n}\right) \text{ olduğundan}$$

$$g_{k,n,j}(x) = \frac{\binom{\frac{n}{b_n}x}{k}}{\binom{\frac{n}{b_n}x}{j}} \text{ fonksiyonunun } \left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right] \text{ deki konveksliğini göstermek yeterlidir.}$$

$k = j$ için $g_{j,n,j}(x) = 1$ sabit fonksiyon olduğundan konvektir.

$k = j + 1$ için $g_{j+1,n,j}(x) = \frac{n}{b_n}x + j$ elde edilmektedir, yani konvektir.

$k = j - 1$ için $g_{j-1,n,j}(x) = \frac{1}{\frac{n}{b_n}x + j - 1}$ olur.

$$g''_{j-1,n,j}(x) = \frac{2\left(\frac{n}{b_n}\right)^2}{\left(\frac{n}{b_n}x+j-1\right)^2} > 0 \text{ olduğundan konvektir.}$$

Eğer $k \geq j + 2$ ise

$$g_{k,n,j}(x) = \left(\frac{n}{b_n} + j\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right) \text{ ve}$$

$$\ln(g_{k,n,j}(x)) = \ln\left(\frac{n}{b_n}x + j\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right)$$

$$g'_{k,n,j}(x) = \frac{n}{b_n} g_{k,n,j}(x) \left[\frac{1}{\frac{n}{b_n}x + j} + \dots + \frac{1}{\frac{n}{b_n}x + k - 1} \right]$$

$$g''_{k,n,j}(x) = \frac{n}{b_n} g'_{k,n,j}(x) \left[\frac{1}{\frac{n}{b_n}x + j} + \dots + \frac{1}{\frac{n}{b_n}x + k - 1} \right] - \left(\frac{n}{b_n}\right)^2 g_{k,n,j}(x) \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{b_n}x + j\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right)^2} \right]$$

olmaktadır.

$$g''_{k,n,j}(x) = \left(\frac{n}{b_n}\right)^2 g_{k,n,j}(x) \left\{ \left[\frac{1}{\frac{n}{b_n}x + j} + \dots + \frac{1}{\frac{n}{b_n}x + k - 1} \right]^2 - \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{b_n}x + j\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n}{b_n}x + k - 1\right)^2} \right] \right\} > 0$$

elde edilmektedir.

Eğer $k \leq j - 2$ ise

$$g_{k,n,j}(x) = \frac{1}{\left(\frac{n}{b_n} + k\right) \dots \left(\frac{n}{b_n}x + j - 1\right)}$$

$$g'_{k,n,j}(x) = -\frac{n}{b_n} g_{k,n,j}(x) \left[\frac{1}{\frac{n}{b_n}x+k} + \dots + \frac{1}{\frac{n}{b_n}x+j-1} \right] \text{ olmaktadır.}$$

$$g''_{k,n,j}(x) = -\left(\frac{n}{b_n}\right)^2 g_{k,n,j}(x) \left\{ \left[\frac{1}{\frac{n}{b_n}x + k} + \dots + \frac{1}{\frac{n}{b_n}x + j - 1} \right]^2 - \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{b_n}x + k\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n}{b_n}x + j - 1\right)^2} \right] \right\} > 0$$

elde edilmektedir.

Böylece $\left[\frac{b_n(j+1)}{n}, \frac{b_n(j+2)}{n}\right]$ aralığındaki her $g_{k,n,j}(x)$ fonksiyonunun konveks olduğu gösterilmiştir. $L_n^{(M)}(f)(x)$ bu fonksiyonların maksimumu olarak tanımlandığından $L_n^{(M)}(f)(x)$ konvektir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Bede ve Gal tarafından inşa edilen maksimum çarpım tip bazı operatörler ile Güngör'ün genelleştirilmiş Szász operatörünü tanımladıkları ve yaklaşım özelliklerini belirledikleri çalışmalar incelenmiştir. Bu çalışmada lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörü tanımlanmış, birinci süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım derecesi hesaplanmıştır. Belirlenen yaklaşım derecesinin iyileştirilemeyeceği ispatlanmıştır. Sonrasında, tanımlanan operatörün bazı alt sınıfları için daha iyi yaklaşım derecesi belirlenmiştir. Son olarak operatörün bazı şekil koruma özellikleri verilmiştir.

Maksimum çarpım tip operatörlerle ilgili birçok çalışmalar mevcuttur. Bunlardan birkaçını ifade etmek gerekirse Duman maksimum çarpım tip q -Bernstein operatörünü [13] ve maksimum çarpım operatörlerinin istatistiksel yakınsaklığını [24] incelemiştir. Karakuş ve Demirci maksimum çarpım operatörlerinin σ -istatistiksel yakınsaklığını ele almışlardır [25]. Bu çalışmalar ışığında tanımlanan lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş operatörü yle ilgili farklı genelleştirmelerin yapılıp yapılamayacağı ve/veya tanımlanan operatörün istatistiksel yakınsaklığı araştırılabilir.

Holhoş ağırlıklı uzaylarda maksimum çarpım Favard-Szász-Mirakyan operatörünün yaklaşımını [26] ve maksimum çarpım Meyer-König ve Zeller operatörlerinin ağırlıklı yaklaşımını ele almıştır [27]. Holhoş bu çalışmalarında yeni ağırlıklı süreklilik modülünü $\delta \geq 0$, $f \in C_{\varphi, \alpha}$ için her $x, t \in I$ için $\varphi(t) \in (\varphi(x) - \delta, \varphi(x) + \delta) \cap \varphi(I)$ olmak üzere

$$\omega_{\varphi, \alpha}(f, \delta) = \sup_{\substack{t, x \in I \\ |\varphi(t) - \varphi(x)| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(x)|}{\max(e^{\alpha\varphi(t)}, e^{\alpha\varphi(x)})}$$

olarak tanımlamış, maksimum çarpım tip Favard-Szász-Mirakjan operatörünün $\varphi(x) = \sqrt{x}$ olmak üzere $\omega(x) = e^{\alpha\varphi(x)}$ ağırlığı ile düzgün yakınsaması için kullanılabileceğini göstermiştir [26].

$[0, \infty)$ sınırlı olmayan aralığında tanımlı maksimum çarpım Chlodowsky tip Lupaş operatörü inşa edilebilir. Bu yeni operatörün ağırlıklı yaklaşım özelliklerinin incelenmesi için ağırlıklı süreklilik modülü tanımlanabilir. Böylece operatörün ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiş olur.

Coroianu ve Gal'ın Kantorovich tip maksimum çarpım operatörlerinin yaklaşımını ele aldığı çalışması mevcuttur [28]. Lineer olmayan maksimum çarpım Chlodowsky tip kesilmiş Lupaş-Kantorovich operatörünün tanımlanıp tanımlanamayacağı araştırılabilir. Üstelik bu operatörün çok değişkenli modifikasyonu inşa edilebilir.



KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H. ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 1-20.
2. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, Berlin: Walter de Gruyter Publishing, 218-373.
3. Weierstrass, K. (1885). Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willkürlicher functionen einer reellen veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 2, 633-639.
4. Bernstein, S. N. (1912). Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur la calcul des probabilities. *Communications of the Charkov Mathematical Society*, 2 (13), 1-2.
5. Chlodovsky, I. (1937). Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de MS Bernstein. *Compositio Mathematica*, 4, 380-393.
6. Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and analytic functions. *Arkiv för Matematik*, 2, 43-56.
7. Korovkin, P. P. (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*. Delhi: Hindustan Publishing Company, 1-20.
8. Bede, B., Nobuhara, H., Daňková, M. and Nola, A. (2008). Approximation by pseudo-linear operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(7), 804-820.
9. Lorentz, G. G. (1953). *Bernstein Polynomials*. Toronto: University of Toronto Press, 10-20.
10. Phillips, G. M. (2000). A generalization of the Bernstein polynomials based on the q-integers. *The Anziam Journal*, 42(1), 79-86.
11. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2009). Approximation and shape preserving properties of the Bernstein operator of max-product kind. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1-26.
12. Bede, B. and Gal, S. G. (2010). Approximation by nonlinear Bernstein and Favard-Szász-Mirakjan operators of max-product kind. *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*, 8(1), 193-207.
13. Duman, O. (2016). Nonlinear Approximation q-Bernstein Operators of Max-Product Kind. *Intelligent Mathematics II: Applied Mathematics and Approximation Theory*. Cham: Springer, 33-56.
14. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S.G. (2010). Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Favard-Szász-Mirakjan operator of max-product kind. *Filomat*, 24(3), 55-72.

15. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2010). Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Bleimann-Butzer-Hahn operators of max-product kind. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 51(3), 397-415.
16. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2011). Approximation by truncated Favard–Szász–Mirakjan operator of max-product kind. *Demonstratio Mathematica*, 44(1), 105-122.
17. B Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2010). Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Baskakov operator of max-product kind. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 55(4), 193–218.
18. Bede, B., Coroianu, L. and Gal, S. G. (2011). Approximation and shape preserving properties of the truncated Baskakov operator of max-product kind. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 52(1), 89-107.
19. Güngör, Ş. Y., and İspir, N. (2016). Quantitative Estimates for Generalized Szász Operators of Max-Product Kind. *Results in Mathematics*, 70(3-4), 447-456.
20. Lupas, A. (1995). The approximation by some positive linear operators. *In Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory*. Berlin: Akademie Verlag, 201–229.
21. Agratini, O. (1999). On a sequence of linear and positive operators. *Facta Universitatis Series:Mathematics and Informatics*, 14, 41-48.
22. Gal, S. G. (2010). *Shape-Preserving Approximation By Real And Complex Polynomials*. Berlin: Springer Science and Business Media,4.
23. Popoviciu, T. (1938). Deux remarques sur les fonctions convexes, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 220, 45-49.
24. Duman, O. (2010). Statistical convergence of max-product approximating operators. *Turkish Journal of Mathematics*, 34(4), 501-514.
25. Karakuş, S. and Demirci, K. (2011). Statistical σ approximation to max-product operators. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(4), 1024-1031.
26. Holhoş, A. (2018). Approximation of functions by Favard-Szász-Mirakyan operators of max-product type in weighted spaces. *Filomat*, 32(7), 2567-2576.
27. Holhoş, A. (2018). Weighted approximation of functions by Meyer–König and Zeller Operators of Max-Product type. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 39(6), 689-703.
28. Coroianu, L., and Gal, S. G. (2019). Approximation by max-product operators of Kantorovich type. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica*, 64(2), 207-223.



GAZİ GELECEKTİR..