



T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DÜZENLİ DENDRİMER GRAFLARIN
TOPLAM TİP BASKINLIK SABİTLERİ

Ümmü Gülsüm ŞENER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2021
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜZENLİ DENDRİMER GRAFLARIN TOPLAM TİP BASKINLIK SABİTLERİ

Ümmü Gülsüm ŞENER

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Bünyamin ŞAHİN

2021, 47 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Bünyamin ŞAHİN
Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Dendrimerler kimyada, tekstil mühendisliği ve ilgili alanlarda kullanılmaktadır. Bunun için çok iyi bilinen bir malzemedirler. Graflar kimyasal moleküllerin yapısal formüllerini, elektrik devrelerini, ağları ve lojistik kanallarını temsil ederler. Bunun için graflar pek çok alanda kullanılmaktadır. Baskınlık bir graf parametresi olup bahsedilen alanların özelliklerini incelemek için kullanılır. Dendrimerler çok dallara ayrılan bir malzemedir. Bu nedenle nokta sayıları bir geometrik seri oluşturur. Bu tez çalışmasında düzenli dendrimer graflarının toplam tip baskınlık sayıları incelenmiştir. Düzenli dendrimer graflar için toplam baskınlık sayısı, toplam nokta-kenar ve toplam kenar-nokta baskınlık sayıları hesaplanmıştır. Geometrik seri özellikleri kullanılarak düzenli dendrimer graflar için yeni eşitlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Baskınlık sayısı, Dendrimer, Toplam baskınlık sayısı, Toplam kenar-nokta baskınlık sayısı, Toplam nokta-kenar baskınlık sayısı

ABSTRACT

MS THESIS

TOTAL DOMINATION TYPE INVARIANTS OF REGULAR DENDRIMER GRAPHS

Ümmü Gülsüm ŞENER

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATIC

Advisor: Dr. Lecturer Bünyamin ŞAHİN

2021, 47 Pages

Jury

Dr. Lecturer Bünyamin ŞAHİN

Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Dendrimers are used in chemistry, textile engineering and related fields. Then they are well known materials. Graphs represent structural formulas of chemical molecules, electric circuits, networks and logistic channels. Thus, they are used in many areas. Domination is a graph parameter which is used for investigation of properties of mentioned fields. Dendrimers are highly branched materials. Then, the number of their vertices forms a geometric series. In this thesis, total type domination numbers of regular dendrimers were investigated. Total domination number, total vertex-edge domination number and total edge-vertex domination number were calculated for regular dendrimer graphs. By using geometric series properties, new equations were obtained for regular dendrimer graphs.

Keywords: Dendrimer, Domination number, Total domination number, Total edge-vertex domination number, Total vertex-edge domination number

ÖNSÖZ

Düzenli dendrimer grafların toplam tip baskınlık parametrelerinin hesaplandığı bu tez çalışmasında dendrimerlerin genel yapısı, graf teorisinin başlangıcı, graf teorideki temel kavramlar ile graflarda baskınlık kavramları konularına da yer verilmiştir.

Lisans eğitimimden yıllar sonra, iki evladımınla başladığım bu tez çalışmasının başından sonuna kadar her anlamda beni destekleyen, tez danışmanım, değerli Hocam Dr. Öğr. Üyesi Bünyamin ŞAHİN' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca eğitimim boyunca ilminden istifade ettiğim bütün hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Manevi desteklerinden dolayı aileme ve beni cesaretlendiren, teşvik eden sevgili eşim Hamit ŞENER' e teşekkür ederim.

Ümmü Gülsüm ŞENER
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
ÖNSÖZ.....	IX
TABLolar DİZİNİ	XIV
SİMGELER VE KISALTMALAR	XV
1. GİRİŞ	1
1.1.Dendrimerler	1
1.2. Dendrimerlerin Yapısı ve Özellikleri.....	2
1.3. Graflarda Temel Kavramlar	6
1.4. Bazı Graf Çeşitleri	10
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	15
2.1. Graflarda Baskınlık Sayısı.....	16
2.1.1. Yol graflarının baskınlık sayısı.....	17
2.1.2. Tam grafların baskınlık sayısı	17
2.1.3. Çevre grafinin baskınlık sayısı	18
2.1.4. Yıldız grafinin baskınlık sayısı	18
2.2. Graflarda Toplam Baskınlık Sayısı	18
2.3. Graflarda Nokta-Kenar Baskınlık Sayısı	20
2.4. Graflarda Toplam Nokta-Kenar Baskınlık Sayısı.....	21
2.5. Graflarda Kenar-Nokta Baskınlık Sayısı	22
2.6. Graflarda Toplam Kenar-Nokta Baskınlık Sayısı.....	23
3. DÜZENLİ DENDRİMER GRAFLAR.....	25
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	27
4.1. Düzenli Dendrimer Grafların Baskınlık Parametreleri.....	27

4.2.Düzenli Dendrimer Grafların Toplam Baskınlık Parametreleri	31
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	44
5.1. Sonuçlar	44
5.2. Öneriler	44
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	47



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Dendrimerik yapıların örnek gösterimi	1
Şekil 1.2. Travma sonrası Microglia hücresinin aktivasyonu (Tanrıverdi, 2011)	2
Şekil 1.3. Dendrimer Yapısı (Namırtı ve Atav, 2011)	3
Şekil 1.4. Dendrimer jenerasyonları (Bulut ve Akar, 2012)	3
Şekil 1.5. Sıkı paketlenmiş dendrimer örneği (Namırtı ve Atav, 2011)	4
Şekil 1.6. Dendrimerlerin misafir molekülleri iç boşluklarında kapsülleme mekanizması (Namırtı ve Atav, 2011)	5
Şekil 1.7. Königsberg köprüleri	6
Şekil 1.8. Königsberg bölge ve köprülerinin graf modeli	6
Şekil 1.9. Bir G grafi	8
Şekil 1.10. Bir G grafi	9
Şekil 1.11. Bir G grafında yollar ve devirler	9
Şekil 1.12. Bir G grafi ile G nin alt grafi ve geren alt grafi	10
Şekil 1.13. İzomorf graflar, $G_1 \cong G_2$	10
Şekil 1.14. Basit graf	11
Şekil 1.15. Yönlü graf	11
Şekil 1.16. Bağlantılı ve Bağlantısız graf	11
Şekil 1.17. Yedi noktalı yol grafi	12
Şekil 1.18. Üç ve altı noktalı devir grafları	12
Şekil 1.19. S_4 ve S_7 grafları	12
Şekil 1.20. Dört ve yedi noktalı tam graflar	13
Şekil 1.21. İki parçalı graf ve iki parçalı tam graf	13
Şekil 1.22. Ağaç graflar	13
Şekil 1.23. 2-dereceli düzenli graflar	14
Şekil 2.1. On noktalı yol grafi	17
Şekil 2.2. Bitişik iki nokta ile dört noktanın baskılanması	19
Şekil 2.3. Bir nokta ile dört kenarın baskılanması	20
Şekil 2.4. Komşu iki nokta ile beş kenarın baskılanması	22
Şekil 2.5. Bir kenarın dört noktayı baskılaması	23
Şekil 2.6. Komşu iki kenarın beş noktayı baskılaması	24
Şekil 3.1. $T_{2,4}$ ve $T_{3,4}$ grafları	25
Şekil 4.1. Yarıçap dördün katı olduğunda toplam baskınlık kümesi	33
Şekil 4.2. Yarıçap dördün katından bir fazla olduğunda toplam baskınlık kümesi	33
Şekil 4.3. Yarıçap dördün katından iki fazla olduğunda toplam baskınlık kümesi	34
Şekil 4.4. Yarıçap dördün katından üç fazla olduğunda toplam baskınlık kümesi	35
Şekil 4.5. Yarıçap beşin katı olduğunda toplam ve -baskınlık kümesi	37
Şekil 4.6. Yarıçap beşin katından bir fazla olduğunda toplam ve -baskınlık kümesi	37
Şekil 4.7. Yarıçap beşin katından iki fazla olduğunda toplam ve -baskınlık kümesi	38

Şekil 4.8. Yarıçap beşin katından üç fazla olduğunda toplam <i>ve</i> -baskınlık kümesi	38
Şekil 4.9. Yarıçap beşin katından dört fazla olduğunda toplam <i>ve</i> -baskınlık kümesi	39
Şekil 4.10. Yarıçap dördün katı olduğunda toplam <i>ev</i> -baskınlık kümesi	41
Şekil 4.11. Yarıçap dördün katından bir fazla olduğunda toplam <i>ev</i> -baskınlık kümesi	41
Şekil 4.12. Yarıçap dördün katından iki fazla olduğunda toplam <i>ev</i> -baskınlık kümesi	42
Şekil 4.13. Yarıçap dördün katından üç fazla olduğunda toplam <i>ev</i> -baskınlık kümesi	42



TABLÖLAR DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.1. Yarıçapa bağlı olarak toplam baskınlık kümesi	32
Tablo 4.2. Yarıçapa bağlı olarak toplam <i>ve</i> -baskınlık kümesi	36
Tablo 4.3. Yarıçapa bağlı olarak toplam <i>ev</i> -baskınlık kümesi	40



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

G	Dendrimerlerin jenerasyon sayısı
$G = (V, E)$	Herhangi bir graf
$V = \{1, 2, \dots, n\}$	Nokta kümesi
$E = \{uv : u, v \in V\}$	Kenar kümesi
$N(v)$	v noktasının açık komşuluğu
$N[v]$	v noktasının kapalı komşuluğu
d_u	u noktasının derecesi
$\delta(G)$	Minimum dereceli noktanın derecesi
$\Delta(G)$	Maksimum dereceli noktanın derecesi
$d(u, v)$	u ve v noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğu
P_n	n noktalı yol grafi
C_n	n noktalı bir devir grafi
S_n	n noktalı bir yıldız grafi
K_n	n noktalı bir tam graf
T_n	n noktalı bir ağaç graf
$\gamma(G)$	G grafının baskınlık sayısı
$\gamma_t(G)$	G grafının toplam baskınlık sayısı
$\gamma_{ve}(G)$	G grafının nokta-kenar baskınlık sayısı
$\gamma_{ve}^t(G)$	G grafının toplam nokta-kenar baskınlık sayısı
$\gamma_{ev}(G)$	G grafının kenar-nokta baskınlık sayısı
$\gamma_{ev}^t(G)$	G grafının toplam kenar-nokta baskınlık sayısı
$T_{k,d}$	k yarıçaplı ve her bir iç noktasının derecesi d olan düzenli dendrimer graflar

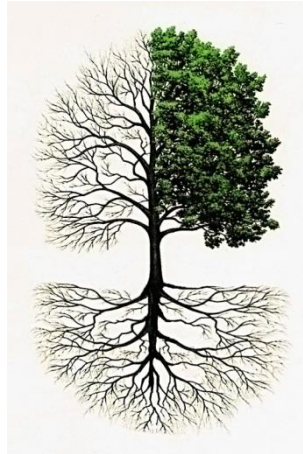
1. GİRİŞ

1.1.Dendrimerler

Tek parça halindeki küçük moleküllerin birbirlerine tekrarlar halinde eklenmesiyle oluşmuş hem doğal hem sentetik olabilen uzun zincirli moleküllere **polimer** denir. Polimer kelimesi Yunanca poli (çok) ve meros (kısım) kelimelerinden gelmektedir.

Bir polimer çeşidi olan **dendrimer**, kelime kökeni olarak Yunanca dendron (ağaç, ağaçsı) ve meros (kısım) kelimelerinden türemiştir. Yani dendrimerler ağaçsı yapılardan oluşan moleküllerdir (Barış ve Atav, 2012).

Dendrimerik yapılar doğada yaygın olarak bulunurlar. Doğal bulunan dendrimerik yapılardan bazıları ağaçların dalları ile kökleri, kar taneleri, vücudumuzdaki damarlar, nöronlar, ırmaklar, şimşek, mercanlardır (Barış ve Atav, 2012). Bunlardan en belirgin olanı ağaçlardır. Ağaçlar dendrimerik yapıları sayesinde fotosentez yapabilmek için yapraklarının güneşe bakan kısımlarını artırmış olurlar. Köklerinde bulunan dendrimerik yapı ise topraktan su alırken daha fazla yüzeye temas etme olanağı sağlar (Tanrıverdi, 2011).

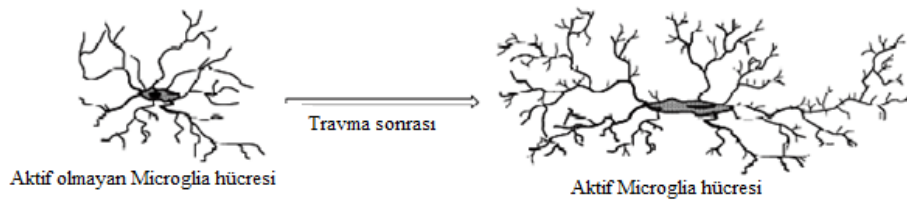


Şekil 1.1. Dendrimerik yapıların örnek gösterimi

Böbrek ve ciğerlerimizde de dendrimerik yapılar mevcuttur. Ciğerlerimize teneffüs ettiğimiz hava, kan dolaşımı sırasında oksijen alışverişi yaparken en üst seviyede yüzey oluşturmak için bronşioollerin ve alveollerin kapsamlı dendrimerik ağını kullanır. Toplardamarlar kanı kalbe ulaştırırken ve atardamarlar kanı

vücudumuzdaki organlara ulaştırırken dendrimerik bir yol takip ederler (Tanrıverdi, 2011).

Beynimizde ve sinir sistemimizde bilgi transferini gerçekleştirmek için dendrimerik yapılaşan hücrelerden büyük miktarlarda mevcuttur. Merkezi sinir sisteminde bulunan, normalde dinlenme halinde olup herhangi bir travma durumunda etkinleşerek hasarlı bölgeye destek veren microglia hücreleri de dendrimerik yapıdadırlar.



Şekil 1.2. Travma sonrası Microglia hücresinin aktivasyonu (Tanrıverdi, 2011)

Farklı boyutlarda olan bu dendrimerik yapılar en ideal şekilde enerji açığa çıkarmak ve dağıtmak için maksimum seviyede ara yüzey meydana getirmektedirler (Namırtı ve Atav 2011).

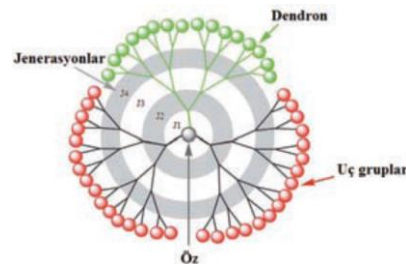
1.2. Dendrimerlerin Yapısı ve Özellikleri

Polimer sınıfının bir türü olan dendrimerler, 1-10 nm boyutunda, etrafında çok sayıda fonksiyonel grup barındıran, çok dallanmış tek dağılımlı makromoleküllerdir (Tanrıverdi, 2011).

Dendrimerler;

- Çok fonksiyonlu bir çekirdek
- Dallanma birimleri
- Dış yüzey gruplar

olmak üzere üç esas gruptan oluşurlar (Kılıçaslan, 2013).



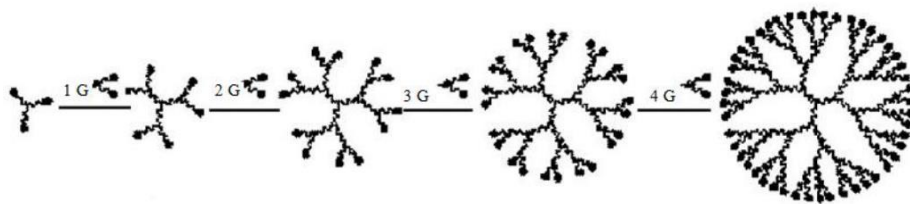
Şekil 1.3. Dendrimer Yapısı (Namırtı ve Atav, 2011)

Dendrimerin çekirdek kısmı aktif fonksiyonel gruplardan oluşan bir başlangıç noktasıdır. Çekirdeğin etrafındaki fonksiyonel gruplar dendrimerin çeşitliliğini belirler (Harmandar, 2016).

Dendronlar, bir çekirdek ile dendrimer meydana getirebilmek için aktif odak noktası barındıran ve üçgensel şekilde büyüyen yapılardır (Harmandar, 2016).

Dendrimerler divergent ve konvergent ismi verilen iki yöntemle sentezlenebilirler. Divergent yöntemde çekirdekten itibaren bir yapı meydana gelirken konvergent yöntemde dendrimerler aktif odakları sayesinde çekirdeğe bağlanır (Harmandar, 2016).

Dendrimerlerin kademeli bir şekilde büyümesi dallanma birimleri ile sağlanır. Her bir jenerasyonda yeni bir dallanma meydana gelir. Jenerasyon sayısı (G) dendrimerin büyüklüğünü belirtir. Jenerasyon sayısı arttıkça dendrimer de büyür. Yani jenerasyon sayısı çekirdekten yüzeye oluşan dallanmaların sayısıdır (Harmandar, 2016).

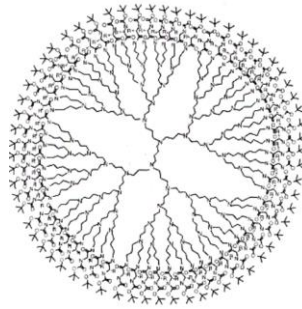


Şekil 1.4. Dendrimer jenerasyonları (Bulut ve Akar, 2012)

Her bir jenerasyonda dendrimerin yüzey grubundaki molekül sayısı geometrik bir şekilde artarken, dendrimerin çapı lineer şekilde artar (Bulut ve Akar, 2012).

Çekirdekten itibaren dallanmalar arttıkça dendrimer küresel bir yapı oluşturmaktadır. Dallanma birimleri arasında ise iç boşluklar oluşur. Dendrimerler genişledikçe yüzeydeki gruplar iyice sıkışır ve sıkıca paketlenmiş bir şekil alırlar.

Belli bir dallanma noktasından sonra alan yetersizliğinden dolayı dendrimerler daha fazla genişleyemezler (Namırtı ve Atav, 2011).



Şekil 1.5. Sıkı paketlenmiş dendrimer örneği (Namırtı ve Atav, 2011)

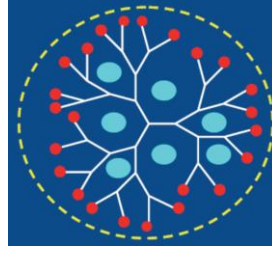
Dendrimerlerin dış yüzeyinde bulunan gruplar kimyasal reaksiyonları gerçekleştirmektedirler. Çok sayıda zincir ucunun olması çözünürlüğü artırır ve reaktif olmasını sağlar. Güneş almaya çalışan yapraklar gibi dendrimerik yapılar açıkta bulunan yüzeylerini maksimum hale getirirler. Böylece büyük hacimli, çoğunluğu yüzeyinde olan, geniş yüzeyli moleküller meydana gelir. Yüzey grubunun fazla sayıda olması çözücü veya diğer moleküller ile etkileşiminin daha kolay olmasını sağlar. Bu nedenle çözünürlükleri ve reaktivlikleri yüksek olur (Bulut ve Akar, 2012).

Dendrimerlerin akışkanlığa karşı gösterdikleri direnç (viskozite) lineer polimerlere kıyasla daha düşüktür (Namırtı ve Atav, 2011).

Dendrimerlerin sentezlenmesi esnasında molekül ağırlıkları ve boyutları kontrol altında tutulabilmektedir. Birinci ve ikinci jenerasyon dendrimerler düşük molekül ağırlıklı, beşinci jenerasyon ve sonrasında oluşan dendrimerler ise yüksek molekül ağırlıklıdır (Namırtı ve Atav, 2011).

Dendrimerlerin, kullanım amacı ve yöntemine göre ihtiyaç duyulan faydayı sağlayacak şekilde işlevselleştirilmesi diğer moleküllere nazaran daha kolaydır. Dendrimer çekirdeğinin değiştirilmesi, iç boşlukların doldurulması, yüzey gruplarının farklılaştırılması en çok kullanılan yöntemlerdir (Sancaktaroğlu, 2008).

Dallanma birimleri arasında bulunan iç boşluklar küçük bazı molekülleri içinde tutarak kapsülleyebilir. Bu şekilde bazı organik moleküller yada inorganik moleküller taşınabilir veya depolanabilir (Kılıçaslan, 2013).



Şekil 1.6. Dendrimerlerin misafir molekülleri iç boşluklarında kapsülleme mekanizması (Namırtı ve Atav, 2011)

En son jenerasyonda, dendrimerin dış yüzeyine, kullanılacak uygulama için en uygun olan yüzey grupları bağlanabilir. Kullanılacak uygulamaya göre dendrimerin dış yüzeyi değiştirilerek, hedef grupla çok değerlikli etkileşim, kolay bir şekilde yüklenme ve çözünme, istenilen hedefe uygun çekim gücü göstererek bağlanma, hücre duvarları arasından geçebilme özelliklerini gösterebilirler (Kılıçaslan, 2013).

Dendrimerlerin bu şekilde kendine özgü çekirdek ve dış yüzey yapısı, protein ve enzim gibi yapılarla benzerlik göstermesi biyoloji ve tıp alanında ilgi görmüş, ilaç maddelerinin kaplanması ve ilaç taşıma sistemlerinde yeni bir alan oluşturmuştur. İlaç molekülleri dendrimerlerin yüzeylerindeki reaktif kısma bağlanabilmekte ve bu sayede hücrelerin ilacı alması kolaylaşmaktadır. İlaç molekülleri dendrimerlerdeki iç boşluklara da yerleştirilebilmektedir (Tanrıverdi, 2011)

İlaçlarda dendrimerlerin kullanılması ilaç seviyesinin tedavi edici miktarlarda korunmasını, belirli hücre tiplerine veya belirli bir bölgeye hedeflenerek daha az zararlı hale gelmesi, ihtiyaç duyulan ilaç oranının azaltılması gibi olumlu sonuçlar vermektedir (Kılıçaslan, 2013).

Hedeflenen dokuyu tanıyabilen dendrimerik biyo-araçlar ile kanser tedavisinde vücuttaki tümörün büyümesini durdurabilecek çalışmalar yapılmaktadır (Dilek, 2009).

Dendrimerler hücre taşınımı, yapay hücre ve kemik üretimi, MRI görüntüleme maddeleri, DNA transferi, antiviral ve antimikrobiyal özellikli kremlerin üretimi, sentetik enzim ve protein elde etme işlemlerinde kullanılmaktadırlar (Sancaktaroğlu, 2008).

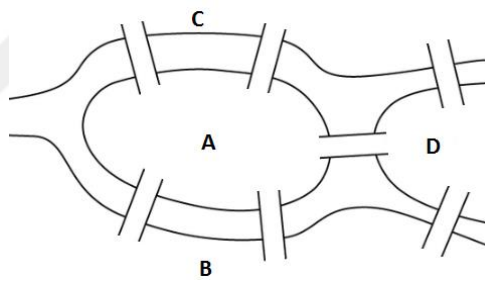
Tekstilde yaygın bir kullanım alanı vardır. Dendrimerler ile boya maddelerinin boyama davranışının farklılaştırılması, suya dayanıklı olan boyaların üretimi, tekstil ürünlerine su ve yağ itici özellikler kazandırılması, antimikrobiyal yüzey elde edilmesi, boyama sırasında oluşan atıksulardan boyanın temizlenmesi, aromaterapik

kumaşların üretimi sağlanmaktadır (Sancaktaroğlu, 2008; Barış ve Atav, 2012; Namırtı ve Atav, 2011).

Yüzey alan genişliğinin verimi artırması sebebiyle dendrimerler nanoteknolojik uygulamalarda sıkça tercih edilmektedirler. Nano ebatlarda batarya üretimi, katalizleme, ışık toplama sistemleri, saflaştırma, sıvı kristaller, biyosensör üretimi, çevre kirliliğinin önlenmesi dendrimerlerin kullanıldığı alanların bazılarıdır (Sancaktaroğlu, 2008).

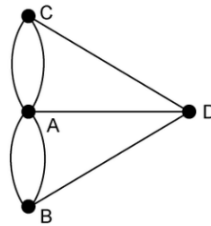
1.3. Graflarda Temel Kavramlar

Leonhard Euler 1736 yılında yazdığı makalede ‘Königsberg’in yedi köprüsü’ probleminde bahsetmektedir. Problem ‘Pregel Nehri ile dört parçaya ayrılan ve yedi tane köprü ile birbirine bağlanan Königsberg şehri, bütün köprüler bir kez kullanılarak gezilip, başlanılan noktaya geri dönülebilir mi?’ şeklindedir.



Şekil 1.7. Königsberg köprüleri

Problemleri bir şema haline getirip basitleştirmek problemlerin çözümünü kolaylaştırır. Euler de böyle yapmıştır. Noktalar şehrin bölümlerini, çizgiler ise köprüleri temsil edecek şekilde modelleme yaparak oluşturduğu graf ile problemi basitleştirmiştir.



Şekil 1.8. Königsberg bölge ve köprülerinin graf modeli

Euler böyle bir gezinin mümkün olmayacağını, mümkün olması için sağlanması gereken şartları belirtmiştir. Euler'in bu makalesi graf teorisinin başlangıç noktası olmuştur.

18. Yüzyıldan itibaren Kirchhoff, Cayley, Jordan gibi ünlü matematikçiler başta olmak üzere birçok matematikçi graflar üzerinde çalışmıştır (Harary,1969).

1852 senesinde Francis Guthrie 'dört renk problemi' olarak bilinen 'tüm haritaların komşu ülkeler aynı olmayacak şekilde dört renk ile boyanabildiğini' ileri sürmüştür. Bazı ispat denemelerinin ardından 1976 senesinde Appel ve Haken bunun mümkün olduğunu bilgisayar yardımıyla ispatlamıştır (Cangül, 2017).

Yakın zamanda ortaya atılan graf problemlerinden biri ise 'Çinli postacı problemi'dir. Problem postacının dağıtacağı mektupları, şehrin bütün sokaklarına uğrayarak dağıtıp postaneye geri dönmesini olabilecek en kısa yol ile sağlaması üzerinedir. Bunun yanı sıra graf teoride tesisat problemi, pazarlamacı problemi, ağ problemleri ve labirent problemleri gibi birçok problem vardır.

Graf teorisinin birbirinden bağımsız birçok alanda ve günlük hayatta rastlanılan birçok probleme uygulanması graf teorisini bir ilgi odağı haline getirmiştir. Molekül yapısı ile ilişkilendirilerek kimyasal graflar oluşturulmuştur. Ayrıca mühendislikte, elektrik devrelerinde, bilgisayar biliminde, iletişim ağlarında, biyolojide, fizikte, ağ sistemlerinde kullanılan graflar modern cebirin önemli bir parçasıdır.

Aşağıda (Büyükköse ve Gök, 2019; Cangül, 2017) kitaplarından temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

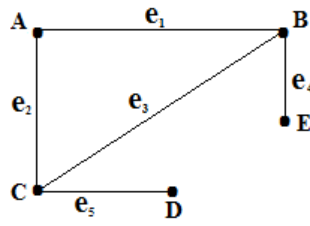
Tanım 1.1. Elemanları **nokta** olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan $V = \{1,2, \dots, n\}$ noktalar kümesi ve elemanları **kenar** olarak adlandırılan sonlu E kenarlar kümesinden oluşan (V, E) ikili yapısına **graf** denir ve $G = (V, E)$ yada kısaca G ile gösterilir. Kenar kümesi

$$E = \{uv: u, v \in V\}$$

şeklinde tanımlıdır (Büyükköse ve Gök, 2019).

Tanım 1.2. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, G 'nin herhangi u ve v noktaları arasında en az bir kenar bulunuyorsa u ve v noktalarına **komşudur** denir ve $u \sim v$ ile gösterilir (Büyükköse ve Gök, 2019).

Bir v noktasının açık komşuluğu $N_G(v)$ veya $N(v)$ ile gösterilir ve $N(v) = \{u \in V(G): uv \in E(G)\}$ ile tanımlanır. Ayrıca v noktasının kapalı komşuluğu $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ olarak tanımlanır (Cangül, 2017).



Şekil 1.9. Bir G grafi

Şekil.1.9. da verilen G grafi için, $A \sim B, A \sim C, B \sim C, C \sim D, B \sim E$ olup

A noktasının komşuluk kümesi $N(A) = \{B, C\}$,

B noktasının komşuluk kümesi $N(B) = \{A, C, E\}$,

C noktasının komşuluk kümesi $N(C) = \{A, D\}$,

D noktasının komşuluk kümesi $N(D) = \{C\}$,

E noktasının komşuluk kümesi $N(E) = \{B\}$ dir.

Bir G grafında ortak noktası olan kenarlara ise **komşu kenarlar** denir (Büyükköse ve Gök, 2019).

Şekil.1.9. da verilen G grafında

$$e_1 \sim e_2, e_1 \sim e_4, e_2 \sim e_3, e_1 \sim e_3, e_2 \sim e_5, e_3 \sim e_5, e_3 \sim e_4$$

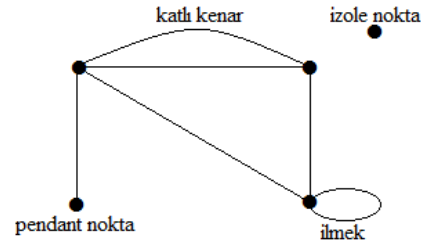
şeklindedir.

Tanım 1.3. $G = (V, E)$ grafindaki noktaların sayısına **grafın mertebesi** denir ve $|V(G)|$ ile gösterilir. G grafindaki kenarların sayısına ise **grafın boyutu** denir ve $|E(G)|$ ile gösterilir (Cangül, 2017).

Tanım 1.4. $G = (V, E)$ grafının herhangi bir u noktasına bağlı kenar sayısına u 'nun derecesi denir ve d_u ile gösterilir. Graftaki en az komşuya sahip olan noktaya **minimum dereceli nokta** denir ve bu noktanın derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok komşuya sahip olan noktasına ise **maksimum dereceli nokta** denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir (Büyükköse ve Gök, 2019).

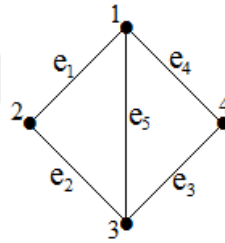
Ayrıca derecesi sıfır (0) olan noktaya **izole nokta**, derecesi bir (1) olan noktaya ise **pendant nokta** denir (Büyükköse ve Gök, 2019).

Tanım 1.5. Grafın herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara **kathı kenar (paralel kenar)** denir. Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenarlara ise **ilmek** denir (Büyükköse ve Gök, 2019).



Şekil 1.10. Bir G grafi

Tanım 1.6. Bir grafın sonlu sayıda, birbirleriyle bağlantılı noktalarından ve kenarlarından oluşan dizisine **yürüme** denir ve W ile gösterilir. Yürüme $W = 1e_12e_2 \dots ke_k(k+1)$ şeklinde bir dizi olup bu dizideki kenar sayısı yürümenin uzunluğudur. Her bir kenarın ve noktanın en fazla bir kez kullanıldığı yürümeye **yol** denir ve P ile gösterilir. Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola **devir** denir. n noktalı bir devir C_n ile gösterilir. Devirdeki her bir noktanın derecesi ikidir (Büyükköse ve Gök, 2019).



Şekil 1.11. Bir G grafında yollar ve devirler

Şekil.1.11. te verilen G grafi için

$1e_12e_23e_34e_41e_53e_22$ bir yürüme

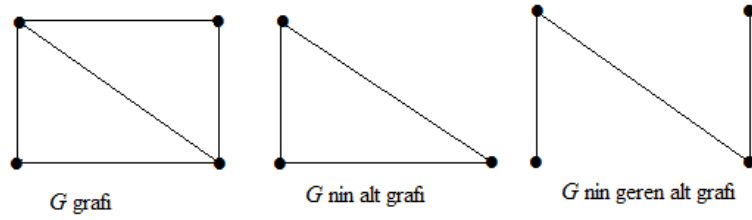
$1e_12e_23e_34$ bir yol

$1e_12e_23e_51$ bir devirdir.

Tanım 1.7. $G = (V, E)$ grafının içerdiği bazı noktalar ve kenarlardan oluşan grafa G grafının **alt grafi** denir.

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olmak üzere $V_2 \subseteq V_1, E_2 \subseteq E_1$ oluyorsa G_2 grafi G_1 grafının alt grafidir.

G grafinin tüm noktalarından ve bazı kenarlarından oluşan alt grafa G nin geren alt grafi denir (Büyükköse ve Gök, 2019).



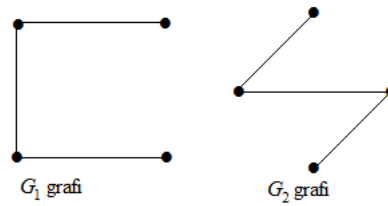
Şekil 1.12. Bir G grafi ile G nin alt grafi ve geren alt grafi

Tanım 1.8. Bir G grafinin u ve v noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğuna u ve v noktaları arasındaki **uzaklık** denir ve $d(u, v)$ ile gösterilir (Büyükköse ve Gök, 2019).

Tanım 1.9. Bir G grafinin her bir nokta çifti arasındaki uzaklıkların maksimum değerine G nin **çapı** denir (Büyükköse ve Gök, 2019).

G grafinin her bir nokta çifti arasındaki uzaklıkların minimum değerine ise **yarıçap** denir (Cangül, 2017).

Tanım 1.10. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olmak üzere; $\{a, b\} \in E_1$ olacak şekildeki $\forall a, b \in V_1$ için $\{f(a), f(b)\} \in E_2$ şeklinde 1-1 ve örten bir $f: V_1 \rightarrow V_2$ dönüşümü varsa G_1 ve G_2 graflarına **izomorfik graflar** denir ve $G_1 \cong G_2$ ile gösterilir (Büyükköse ve Gök, 2019).



Şekil 1.13. İzomorf graflar, $G_1 \cong G_2$

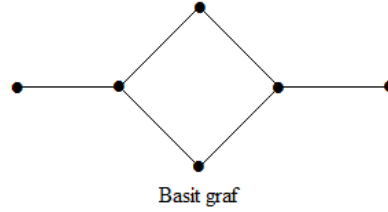
Şekil.1.13. te verilen G_1 ve G_2 grafları izomorflardır.

1.4. Bazı Graf Çeşitleri

Tanım 1.11. Herhangi iki noktası arasında en fazla bir kenar bulunan ve ilmek içermeyen grafa **basit graf** denir (Büyükköse ve Gök, 2019).

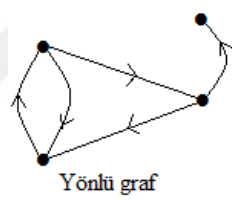
Tanım 1.12. Herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunan yani katlı kenar içeren grafa **çoklu graf** denir (Büyükköse ve Gök, 2019).

Tanım 1.13. Katlı kenar ve ilmek içeren grafa ise **pseudo graf** denir (Büyükköse ve Gök, 2019).



Şekil 1.14. Basit graf

Tanım 1.14. $G = (V, E)$ grafında E kümesi V 'deki farklı noktaların sıralı ikililerinden oluşuyorsa E kümesinin elemanları yönlü kenarlardır. Kenarları yönlü kenarlar olan graflara **yönlü graf** denir (Cangül, 2017).



Şekil 1.15. Yönlü graf

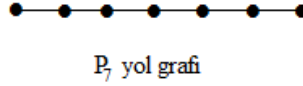
Tanım 1.15. Herhangi iki noktası arasında bir yol bulunan grafa **bağlantılı graf** denir. Bağlantılı olmayan bir grafa **bağlantısız graf** denir (Cangül, 2017).



Şekil 1.16. Bağlantılı ve Bağlantısız graf

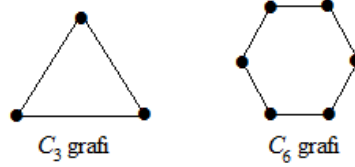
Tanım 1.16. Yalnızca izole nokta içeren grafa **boş graf** denir ve n noktalı bir boş graf N_n ile gösterilir. Boş grafın kenarlar kümesi boştur (Büyükköse ve Gök, 2019).

Tanım 1.17. v_1, v_2, \dots, v_n birbirinden farklı noktalar olsun. Ardışık $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n$ kenarlarına sahip olan grafa **yol(patika) grafi** denir. n noktalı yol grafi P_n ile gösterilir (Cangül, 2017).



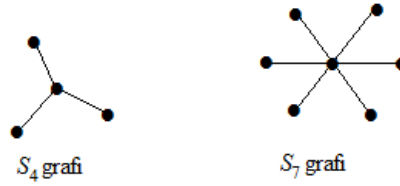
Şekil 1.17. Yedi noktalı yol grafi

Tanım 1.18. Bir yol grafinin iki uç noktasının bir kenar ile birleştirilmesiyle elde edilen grafa **devir (çevre) grafi** denir. n noktalı bir devir grafi C_n ile gösterilir. Burada $n \geq 3$ olmalıdır (Cangül, 2017).



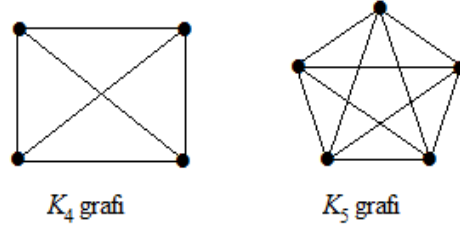
Şekil 1.18. Üç ve altı noktalı devir grafları

Tanım 1.19. Bir merkezi nokta ile her biri sadece bu noktayla komşu olan noktalardan oluşan graflara **yıldız graf** denir. Nokta sayısı n olan bir yıldız grafi S_n ile gösterilir, kenar sayısı $n - 1$ dir (Cangül, 2017).



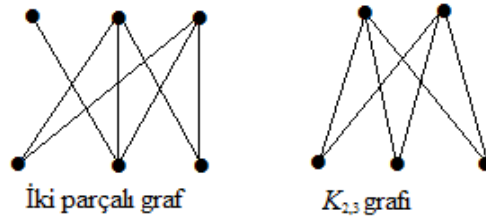
Şekil 1.19. S_4 ve S_7 grafları

Tanım 1.20. Basit bir grafin herhangi iki noktası arasında bir kenar bulunuyorsa yani her bir nokta çifti komşu ise bu grafa **tam graf** denir ve n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir (Büyükköse ve Gök, 2019).



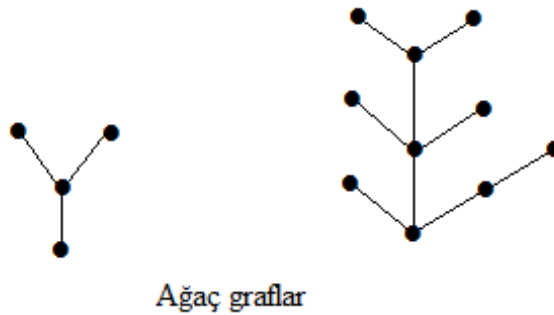
Şekil 1.20. Dört ve yedi noktalı tam graflar

Tanım 1.21. Nokta kümesi iki ayrık alt kümeye ayrılan ve her bir kenarı bu iki alt kümenin birer elemanını birleştiren graflara **iki parçalı graf** denir. A ve B iki nokta kümesi olmak üzere A nın her bir noktasının B nin her bir noktası ile birleştirilmesiyle elde edilen grafa **iki parçalı tam graf** denir. $|A| = r$ ve $|B| = s$ ise bu graf $K_{r,s}$ ile gösterilir (Cangül, 2017).



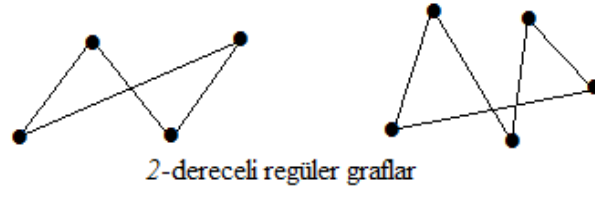
Şekil 1.21. İki parçalı graf ve iki parçalı tam graf

Tanım 1.22. İçinde devir bulundurmeyen bağlantılı grafa **ağaç graf** denir. n noktalı bir ağaç graf T_n ile gösterilir (Büyükköse ve Gök, 2019).



Şekil 1.22. Ağaç graflar

Tanım 1.23. Her bir noktası aynı dereceye sahip olan grafa **düzenli graf** denir. Özel olarak her bir noktası r dereceye sahip olan grafa **r -dereceli düzenli graf** denir (Büyükköse ve Gök, 2019).



Şekil 1.23. 2-dereceli düzenli graflar



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Çevremizde havayolu, karayolu, demiryolu, internet, elektrik şebekeleri, ticari ilişkiler, sosyal ilişkiler, kimyasal sistemler, metabolik yapılar, sinir ağları gibi karmaşık halde bulunan birçok iletişim ve dağıtım ağları vardır. Bu ağların graf ile modellenmesi ağ yapısının daha kolay incelenmesini ve ağlar ile ilgili problemlerin çözülmesini kolaylaştırmaktadır. Ağların iletişim merkezleri grafın noktaları, merkezler arasındaki hatlar ise grafın kenarları ile temsil edilir.

Olası bir zedelenme durumunda ağdaki iletişimin kesintiye uğrama riski vardır. Ağdaki bazı işlemcilerde veya hatlarda oluşan arızalar iletişimin aksamasına neden olabilir. Meydana gelebilecek herhangi bir bozulmaya karşı ağın mukavemetine zedelenebilirlik denir. Zedelenebilirlik değeri yüksek olan ağlar daha sağlam yapıya sahiptir. Ağlar graf ile modellendikten sonra graf teorideki bazı parametrelerle zedelenebilirlik değerleri ölçülebilir.

Graf teoride bağlantılılık (connectivity), bütünlük (integrity), dayanıklılık (toughness), baskınlık (domination), toplam baskınlık (total domination) ve birçok zedelenebilirlik ölçümü tanımlanmıştır. Bu ölçümlerin birçoğu graftaki iletişimi bir bütün olarak incelerken baskınlık ve toplam baskınlık bölgesel olarak incelemeye daha uygundur.

Baskınlık parametresi graf teoride birçok araştırmanın yapıldığı bir konudur. Graftaki baskınlık kavramı çalışmalarının aslı satranç problemlerine dayanmaktadır. Satranç tahtasında bir vezirin, en az nokta seçerek en fazla noktaya ulaşması hedeflenmiştir.

Bir grafın baskınlık sayısını ilk defa Claude Berge 1958 yılında tanımlamıştır (Berge, 1962). Haynes ve arkadaşları bu alandaki yayınları bir araya getirerek bir kitap haline getirmişlerdir (Haynes ve ark., 1998a).

Baskınlık kavramı tanımlandıktan sonra bu parametrenin değişik biçimleri ortaya çıkmıştır. Klasik baskınlık tanımında nokta noktayı baskılarken daha sonra kenar-kenar, nokta-kenar ve kenar-nokta baskınlık parametreleri ortaya çıkmıştır. Kenar-nokta ve nokta-kenar tipi baskınlık parametreleri ilk olarak Peters tarafından 1986 yılında (Peters, 1986) ortaya konulmuş ve Lewis tarafından geliştirilmiştir (Lewis, 2007). Bazı grafların kenar-nokta ve nokta kenar baskınlık sayılarına ait alt ve üst sınırlar ele alınmıştır (Lewis ve ark., 2010).

Toplam nokta-kenar baskınlık parametresi Boutrig ve Chellali tarafından tanımlanmış ve bu parametre için üst sınırlar elde edilmiştir (Boutrig ve Chellali, 2018). Toplam kenar-nokta parametresi 2020 yılında tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir (Şahin ve Şahin, 2020).

Bu tez çalışması kapsamında ele aldığımız dendrimerler ile ilgili temel bilgiler ve uygulama alanları 2002 yılında bir araya getirilmiştir (Newkome ve ark, 2002). Ayrıca düzenli dendrimer grafların bağlantılılık sayısı Nagar ve Sriam tarafından hesaplanmıştır (Nagar ve Sriam, 2016).

Grafların çeşitli baskınlık sayılarının hesaplanması günümüzde sıkça başvurulan bir metottur. Özellikle kimyasal moleküllerin yapısal formüllerini temsil eden grafların baskınlık sayılarının incelenmesi son yıllarda çok ilgi çeken bir çalışma alanıdır. Doğrusal altıgen zincirlerin baskınlık sayıları (Vukicevic ve Klobucar, 2007), altıgenlerin oluşturduğu ağların baskınlık sayıları (Majstorovic ve ark, 2012) ve bilgisayar yazılımları aracılığıyla benzenoidlerin baskınlık sayısı (Hutchinson ve ark., 2018) bu alanda yapılan bazı çalışmalardandır. Bunlara ilaveten bazı kimyasal moleküllerin baskınlık sayıları (Quadras ve ark., 2015) ve toplam baskınlık sayıları (Gao ve ark., 2018) incelenmiştir.

Düzenli dendrimer grafların baskınlık sayıları ilk olarak 2018 yılında ele alınmıştır (Şahin ve Şahin, 2018). İlerleyen yıllarda bu grafların toplam baskınlık sayıları (Şener ve Şahin, 2019), toplam kenar-nokta ve toplam nokta-kenar baskınlık sayıları (Şahin ve Şener, 2020) bu tez çalışması kapsamında ele alınmış ve elde edilen bulgular iki makale olarak yayımlanmıştır.

Graflarda baskınlık sayısının iletişim elektrik şebekeleri, tesis planlama problemleri ve daha birçok alanda uygulaması vardır (Haynes ve ark.,1998b).

2.1. Graflarda Baskınlık Sayısı

Bir $D \subseteq V$ kümesi bir G grafinin nokta kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere G grafinin her noktası D kümesinin bir elemanı ya da D kümesinin bir elemanı ile komşu oluyorsa D kümesine G grafinin **baskınlık kümesi** denir. Bir G grafinin **baskınlık sayısı** $\gamma(G)$ sembolü ile gösterilir ve G nin baskınlık kümelerinin içinde en az elemana sahip olanın mertebesine eşittir (Haynes ve ark., 1998a).

2.1.1. Yol graflarının baskınlık sayısı

Yol grafında uç noktalar haricindeki tüm noktaların iki komşusu vardır. Yani her nokta iki noktayı baskılayabilir. Bu durumda graf üçerli noktalara ayrılırsa en az nokta ile baskınlık sağlanmış olur. Nokta sayısı (n) üçün katı ise (Haynes ve ark., 1998a)

$$\gamma(P_n) = \frac{n}{3}$$

olur. Nokta sayısı üçün katı değilse kalan noktaların baskılanması için bir nokta daha gerekeceği için

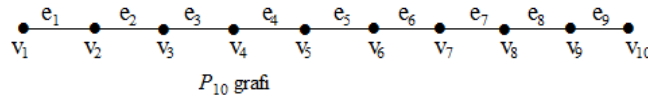
$$\gamma(P_n) = \frac{n}{3} + 1$$

olur. Genel olarak;

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek olarak;



Şekil 2.1. On noktalı yol grafi

$D = \{v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$ olup,

$$\gamma(P_{10}) = 4$$

olur.

2.1.2. Tam grafların baskınlık sayısı

K_n tam grafında her bir nokta diğer noktaların hepsine komşu olduğundan bütün noktaların baskılanması için tek bir nokta yeterli olacaktır. Bu nedenle; (Haynes ve ark., 1998a)

$$\gamma(K_n) = 1$$

dir.

2.1.3. Çevre grafının baskınlık sayısı

C_n çevre grafının bütün noktalarının iki komşusu vardır. Yani her nokta iki noktayı baskılayabilir. Bu durumda yol grafında olduğu gibi üçerli gruplara ayrılarak en az nokta ile baskınlık sağlanır. Yol grafta olduğu gibi (Haynes ve ark., 1998a)

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

olur.

2.1.4. Yıldız grafının baskınlık sayısı

S_n yıldız grafında merkez nokta tüm noktalara komşu olduğundan merkez nokta ile bütün noktalar baskılanabilir. Bu nedenle

$$\gamma(S_n) = 1$$

olur.

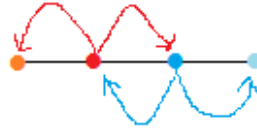
2.2. Graflarda Toplam Baskınlık Sayısı

Bir G grafının bir $D \subseteq V(G)$ bir alt kümesi için, G nin her elemanının yine D içinde bir komşusu varsa D kümesine G grafının **toplam baskınlık kümesi** denir. G grafının **toplam baskınlık sayısı** $\gamma_t(G)$ ile gösterilir ve G nin toplam baskınlık kümeleri içinde en az elemana sahip olanın mertebesine eşittir (Haynes ve ark., 1998a).

Teorem.2.2.1. P_n yol grafının toplam baskınlık sayısı $n \geq 2$ olmak üzere (Haynes ve ark., 1998a)

$$\gamma_t(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{n+2}{2}, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

İspat: n noktalı yol grafında bitişik iki nokta kendilerinin dışındaki komşularını baskılayacağından iki nokta ile dört nokta baskılanmış olacaktır.



Şekil 2.2. Bitişik iki nokta ile dört noktanın baskılanması

Bu nedenle nokta sayısı dördün katı olan yol graflarında artarda gelen dört nokta ortada kalan iki nokta ile baskılanacağından toplam baskınlık kümesinin eleman sayısı nokta sayısının yarısı kadar yani $n/2$ kadardır.

Noktalar dörtlü gruplara ayrıldığında en uçta bir nokta açıkta kaldığında bu noktanın komşu noktası da toplam baskınlık kümesine dâhil edilerek baskınlık sağlanacağından toplam baskınlık kümesinin eleman sayısı

$$\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

olur.

Nokta sayısı dördün katının iki fazlası olduğunda, fazla olan bu komşu noktalar birbirlerini baskılayacağından bu iki nokta da toplam baskınlık kümesine dahil edilir.

Bu durumda toplam baskınlık kümesinin eleman sayısı

$$\frac{n-2}{2} + 2 = \frac{n+2}{2}$$

bulunur.

Noktaları dörderli grupladığımızda sonda üç nokta kalıyorsa bu üç noktadan komşu olan ikisi de toplam baskınlık kümesine dâhil edilir. Toplam baskınlık kümesinin eleman sayısı

$$\frac{n-3}{2} + 2 = \frac{n+1}{2}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.2.2. C_n çevre grafının toplam baskınlık sayısı $n \geq 3$ iken olmak üzere (Haynes ve ark., 1998a)

$$\gamma_t(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{n+2}{2}, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

İspat: Çevre graf, yol grafın uç noktalarının bir kenar ile birleştirilmesiyle elde edildiğinden, n noktalı yol grafında olduğu gibi bitişik iki nokta ile dört nokta baskılanabileceği için çevre grafında da nokta kümesi dörderli gruplara ayrılarak toplam baskınlık kümesi aynı şekilde bulunur.

Örnek 2.2.3. K_n tam grafında her bir nokta diğer noktaların hepsine komşu olduğundan bütün noktaların toplam baskınlığı için iki nokta yeterli olacaktır. Bunun için,

$$\gamma_t(K_n) = 2$$

olur.

Örnek 2.2.4. S_n yıldız grafında merkez nokta tüm noktalara komşu olduğundan merkez nokta ile diğer noktalardan biri alınarak bütün noktaların toplam baskınlığı sağlanabilir. Bu nedenle,

$$\gamma_t(S_n) = 2$$

dir.

2.3. Graflarda Nokta-Kenar Baskınlık Sayısı

Bir G grafında bir v noktası e kenarı üzerinde ise yada e kenarı v nin üzerinde olduğu kenara komşu ise v noktası e kenarını baskılar. G grafının bütün kenarları $D \subseteq V(G)$ kümesinin en az bir noktası tarafından baskılanıyor ise D kümesi G grafının **nokta-kenar baskınlık kümesidir**. Bir G grafının **nokta-kenar baskınlık sayısı** $\gamma_{ve}(G)$ sembolüyle gösterilir ve G nin nokta-kenar baskınlık kümeleri içinde en az elemana sahip olanın mertebesine eşittir (Boutrig ve Chellali, 2018).

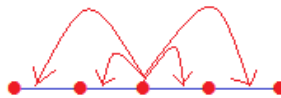
Teorem 2.3.1 n noktalı P_n yol grafı ve C_n çevre grafı için; (Lewis, 2007)

$$i) \gamma_{ve}(P_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$$

$$ii) \gamma_{ve}(C_n) = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor$$

dir.

İspat: *i)* Yol grafında bir nokta ile en fazla dört kenar baskılanabilir.



Şekil 2.3. Bir nokta ile dört kenarın baskılanması

Bu nedenle grafin kenarları dörderli gruplara ayrılıp oluşan her grup için bir nokta ayrıca dörderli gruplandırıldığında artan kenarların baskılanması içinde bir nokta seçilerek en az sayıda nokta ile bütün kenarlar baskılanır. P_n grafında $n - 1$ kenar olduğundan

$$\gamma_{ve}(P_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$$

olur.

ii) C_n çevre grafında P_n grafında olduğu gibi bir nokta ile en fazla dört kenar baskılanabildiğinden C_n çevre grafının nokta kümesi de dörderli gruplara ayrılacaktır. C_n grafında n kenar bulunduğundan

$$\gamma_{ve}(C_n) = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor$$

olur.

2.4. Graflarda Toplam Nokta-Kenar Baskınlık Sayısı

Bir G grafının bir $D \subseteq V$ nokta-kenar baskınlık kümesinin her elemanının yine D içinde bir komşusu varsa D kümesine G grafının **toplam nokta-kenar baskınlık kümesi** denir. G grafının **toplam nokta-kenar baskınlık sayısı** $\gamma_{ve}^t(G)$ ile gösterilir ve G nin toplam nokta-kenar baskınlık kümeleri içinde en az elemana sahip olanın mertebesine eşittir (Boutrig ve Chellali, 2018).

Teorem 2.4.1. n noktalı P_n yol grafi için $n \geq 3$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikle elde edilir.

$$\gamma_{ve}^t(P_n) = \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 1, & n \equiv 1 \pmod{6} \\ 2 \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

İspat: Bir P_n yol grafında komşu iki nokta ile en fazla beş kenar baskılanabilmektedir. Bu durum Şekil 2.4 de gösterilmiştir. Bu durum iki kenar ile altı komşu noktanın baskılanabilmesi demektir. Demek ki toplam nokta-kenar baskınlık sayısı mod6 ya göre hesaplanmalıdır.



Şekil 2.4. Komşu iki nokta ile beş kenarın baskılanması

Eğer nokta sayısı 6'nın bir katı ise,

$$\gamma_{ev}^t(P_n) = \frac{2n}{6} = \frac{n}{3}, n \equiv 0 \pmod{6}$$

olarak elde edilir. Eğer nokta sayısı $n \equiv 1 \pmod{6}$ ise her komşu beş kenar, bu kenarların merkezinde yer alan iki komşu nokta tarafından baskılanır. Böylece baskılanmayan tek bir kenar kalmış olur ki bu kenarı baskılayabilmek için ilave bir nokta daha gerekir. Sonuç olarak,

$$\gamma_{ev}^t(P_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 1, n \equiv 1 \pmod{6}$$

Benzer şekilde diğer durumlarda incelenerek istenen sonuç aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\gamma_{ev}^t(P_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor, n \equiv 2,3,4,5 \pmod{6}$$

2.5. Graflarda Kenar-Nokta Baskınlık Sayısı

Bir G grafında bir v noktası e kenarı üzerinde ise ya da v noktası e kenarı üzerindeki noktalara komşu ise e kenarı v noktasını baskılar. G grafının bütün noktaları $D \subseteq E(G)$ kümesinin en az bir kenarı tarafından baskılanıyor ise D kümesi G grafının **kenar-nokta baskınlık kümesidir**. Bir G grafının **kenar-nokta baskınlık sayısı** $\gamma_{ev}(G)$ sembolüyle gösterilir ve G nin kenar-nokta baskınlık kümeleri içinde en az elemana sahip olanın mertebesine eşittir (Şahin ve Şahin, 2020).

Teorem 2.5.1. n noktalı P_n yol grafi ve C_n çevre grafi için; (Lewis, 2007)

$$i) \gamma_{ev}(P_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$$

$$ii) \gamma_{ev}(C_n) = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor$$

dir.

İspat: $i)$ P_n yol grafında bir kenar en fazla dört noktayı baskılayabilir.



Şekil 2.5. Bir kenarın dört noktayı baskılaması

Bu nedenle nokta kümesi dörderli gruplara ayrılıp oluşan her grup için bir kenar, ayrıca dörderli gruplandığında artan noktaların baskılanması içinde bir kenar seçilerek en az sayıda kenar ile bütün noktalar baskılanır,

$$\gamma_{ev}(P_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$$

olur.

ii) C_n çevre grafında yol grafta olduğu gibi nokta kümesi dörderli gruplara ayrılarak her grup için bir baskın kenar bulunacağından

$$\gamma_{ev}(C_n) = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor$$

olur.

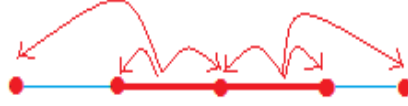
2.6. Graflarda Toplam Kenar-Nokta Baskınlık Sayısı

Bir G grafının bir $D \subseteq E$ kenar-nokta baskınlık kümesinin her elemanının yine D içinde bir komşusu varsa D kümesine G grafının **toplam kenar-nokta baskınlık kümesi** denir. G grafının **toplam kenar-nokta baskınlık sayısı** $\gamma_{ev}^t(G)$ ile gösterilir ve G nin toplam kenar-nokta baskınlık kümeleri içinde en az elemana sahip olanın mertebesine eşittir (Şahin ve Şahin, 2020).

Teorem 2.6.1. n noktalı P_n yol grafi ve C_n devir grafi için $n \geq 3$ olmak üzere toplam kenar-nokta baskınlık sayısı aşağıdaki eşitlikle hesaplanır (Şahin ve Şahin, 2020),

$$\gamma_{ev}^t(P_n) = \gamma_{ev}^t(C_n) = \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1, & n \equiv 1 \pmod{5} \\ 2 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

İspat: n noktalı bir yol veya devir grafında komşu iki kenar ile en fazla beş nokta baskılanabilir. Bu durum Şekil 2.6'da belirtilmiştir. Bunun için toplam kenar-nokta baskınlık sayısı mod 5'e göre değerlendirilmelidir.



Şekil 2.6. Komşu iki kenarın beş noktayı baskılaması

Eğer nokta sayısı 5 in bir katı ise,

$$\gamma_{ev}^t(P_n) = \gamma_{ev}^t(C_n) = \frac{2n}{5}, n \equiv 0 \pmod{5}$$

olarak elde edilir. Eğer nokta sayısı $n \equiv 1 \pmod{5}$ ise her komşu beş nokta bu noktaların merkezinde yer alan iki komşu kenar tarafından baskılanır. Böylece baskılanmayan tek bir nokta kalmış olur ki bu noktayı baskılayabilmek için iki komşu kenar daha gereklidir. Sonuç olarak,

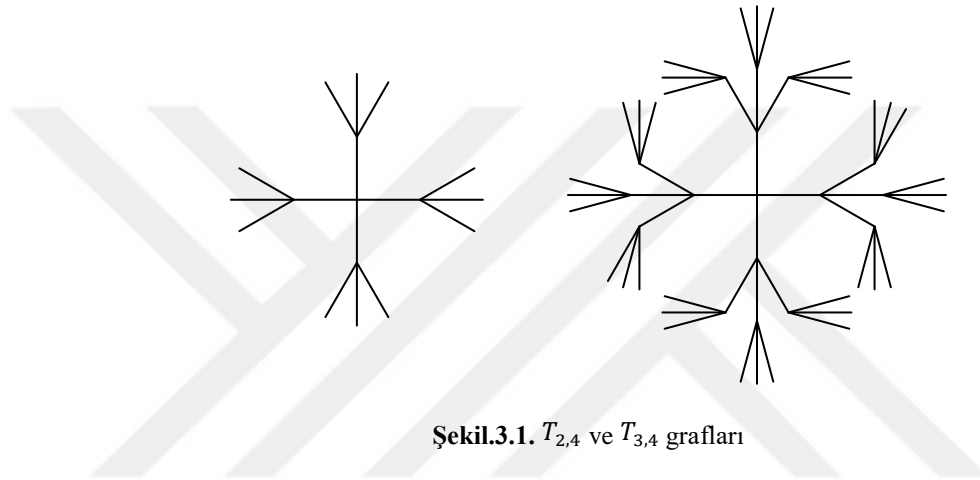
$$\gamma_{ev}^t(P_n) = \gamma_{ev}^t(C_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1, n \equiv 1 \pmod{5}$$

Benzer şekilde diğer durumlarda incelenerek istenen sonuç aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\gamma_{ev}^t(P_n) = \gamma_{ev}^t(C_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor, n \equiv 2,3,4 \pmod{5}$$

3. DÜZENLİ DENDRİMER GRAFLAR

Bu bölümde düzenli dendrimer grafların matematiksel özellikleri verilecektir. Dendrimerler çok dallı ağaçlardır. Düzenli dendrimerler ise bir v merkez noktasından oluşan ve pendant olmayan her bir noktasının derecesi (d) iki veya daha fazla olan ağaçlardır. Düzenli dendrimerlerde merkez noktadan her bir pendant noktaya kadar olan mesafeye yarıçap denir ve k ile gösterilir. Düzenli dendrimer graflar $T_{k,d}$ ile gösterilir (Nagar ve Sriam, 2016).



Şekil.3.1. $T_{2,4}$ ve $T_{3,4}$ grafları

Lemma 3.1. $T_{k,d}$ merkezi v noktası olan bir dendrimer graf olmak üzere (Nagar ve Sriam, 2016);

i) $T_{k,d}$ grafının bütün noktalarının sayısı

$$1 + \frac{d[(d-1)^k - 1]}{d-2},$$

ii) $T_{k,d}$ grafının kol sayısı d ,

iii) $T_{k,d}$ grafının her bir kolundaki nokta sayısı

$$\frac{(d-1)^k - 1}{d-2},$$

iv) $T_{k,d}$ grafının her bir kolundaki pendant noktaların sayısı $(d-1)^{k-1}$,

v) $T_{k,d}$ grafının her bir kolundaki pendant olmayan noktaların sayısı

$$\frac{(d-1)^{k-1} - 1}{d-2},$$

vi) k yarıçapı üzerinde bulunan noktaların sayısı $d(d-1)^{k-1}$

dir.

Lemma 3.2. $T_{k,d}$ düzenli bir dendrimer graf olmak üzere baskınlık sayısı, nokta-kenar ve kenar-nokta baskınlık sayısı aşağıdaki eşitliklerle gösterilmiştir (Şahin ve Şahin, 2018)

$$i) \gamma(T_{k,d}) = \begin{cases} 1 + \frac{(d-1)^k - d + 1}{d-2}, & k \text{ tek} \\ \frac{(d-1)^k - 1}{d-2}, & k \text{ çift} \end{cases} .$$

$$ii) \gamma_{ve}(T_{k,d}) = \gamma_{ev}(T_{k,d}) = \begin{cases} 1 + \frac{(d-1)^{k-1} - d + 1}{d-2}, & k \text{ çift} \\ \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{d-2}, & k \text{ tek} \end{cases} .$$



4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. Düzenli Dendrimer Grafların Baskınlık Parametreleri

Bu bölümde düzenli dendrimer graflar için Lemma 3.2.'de gösterilen baskınlık, kenar-nokta baskınlık ve nokta-kenar baskınlık sayıları daha da geliştirilecek ve devamında dendrimerlerin toplam tip baskınlık sayıları elde edilecektir.

Teorem 4.1.1. $T_{k,d}$ bir düzenli dendrimer olmak üzere, $T_{k,d}$ grafinin baskınlık sayısı

$$\gamma(T_{k,d}) = \begin{cases} 1 + d(d-1) \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^3 - 1}, & k \equiv 0(\text{mod}3) \\ 1 + d(d-1)^2 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^3 - 1}, & k \equiv 1(\text{mod}3) \\ d \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^3 - 1}, & k \equiv 2(\text{mod}3) \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. k için katı olsun. Bu durumda $T_{k,d}$ grafinin baskınlık kümesi merkez nokta v ile yarıçap $k = 2, 5, 8, \dots, k-1$ üzerindeki noktalardan oluşur. Tüm noktaların toplamı Lemma 3.1. den

$$\begin{aligned} \gamma(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1) + d(d-1)^4 + d(d-1)^7 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= 1 + d(d-1)(1 + (d-1)^3 + (d-1)^6 + \dots + (d-1)^{k-3}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu denklemin ikinci kısmı bir geometrik seri olup geometrik dizinin ortak çarpanı $r = (d-1)^3$ olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \gamma(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1) \frac{r^{\frac{k-3}{3}+1} - 1}{r - 1} \\ &= 1 + d(d-1) \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^3 - 1} \end{aligned}$$

Eğer $k \equiv 1(\text{mod}3)$ ise $T_{k,d}$ grafinin baskınlık kümesi merkez nokta v ile yarıçap $k = 3, 6, 9, \dots, k-1$ üzerindeki noktalardan oluşur.

$$\begin{aligned} \gamma(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^2 + d(d-1)^5 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= 1 + d(d-1)^2(1 + (d-1)^3 + (d-1)^6 + \dots + (d-1)^{k-4}) \end{aligned}$$

burada $r = (d-1)^3$ olup bu toplam aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}\gamma(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^2 \frac{r^{\frac{k-4}{3}+1} - 1}{r-1} \\ &= 1 + d(d-1)^2 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^3 - 1}\end{aligned}$$

$k = 2(\text{mod}3)$ olsun. Bu durumda $T_{k,d}$ grafinin baskınlık kümesi $k = 1, 4, 7, \dots, k-1$ üzerindeki noktalardan oluşur.

$$\begin{aligned}\gamma(T_{k,d}) &= d + d(d-1)^3 + d(d-1)^6 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= d(1 + (d-1)^3 + (d-1)^6 + \dots + (d-1)^{k-2})\end{aligned}$$

olup, $r = (d-1)^3$ olduğundan

$$\begin{aligned}\gamma(T_{k,d}) &= d \frac{r^{\frac{k-2}{3}+1} - 1}{r-1} \\ &= d \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^3 - 1}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem.4.1.2. $T_{k,d}$ bir düzenli dendrimer olmak üzere, $T_{k,d}$ grafinin nokta-kenar baskınlık sayısı

$$\gamma_{ve}(T_{k,d}) = \begin{cases} d(d-1) \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}, k \equiv 0(\text{mod}4) \\ 1 + d(d-1)^2 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^4 - 1}, k \equiv 1(\text{mod}4) \\ 1 + d(d-1)^3 \frac{(d-1)^{k-2} - 1}{(d-1)^4 - 1}, k \equiv 2(\text{mod}4) \\ d \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^4 - 1}, k \equiv 3(\text{mod}4) \end{cases}$$

İspat. k dördün katı olsun. Bu durumda $T_{k,d}$ grafinin nokta-kenar baskınlık kümesi

$k = 2, 6, 10, \dots, k-2$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur.

$$\begin{aligned}\gamma_{ve}(T_{k,d}) &= d(d-1) + d(d-1)^5 + d(d-1)^9 + \dots + d(d-1)^{k-3} \\ &= d(d-1)(1 + (d-1)^4 + (d-1)^8 + \dots + (d-1)^{k-4})\end{aligned}$$

burada ikinci kısımda oluşan geometrik seride ortak çarpan $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\gamma_{ve}(T_{k,d}) = d(d-1) \frac{r^{\frac{k-4}{4}+1} - 1}{r-1}$$

$$= d(d-1) \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}$$

Eğer $k \equiv 1 \pmod{4}$ ise $T_{k,d}$ grafının nokta-kenar baskınlık kümesi merkez nokta v ile $k = 3, 7, 11, \dots, k-2$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur. Öyle ise,

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^2 + d(d-1)^6 + \dots + d(d-1)^{k-3} \\ &= 1 + d(d-1)^2(1 + (d-1)^4 + (d-1)^8 + \dots + (d-1)^{k-5}) \end{aligned}$$

burada $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^2 \frac{r^{\frac{k-5}{4}+1} - 1}{r-1} \\ &= 1 + d(d-1)^2 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^4 - 1} \end{aligned}$$

Eğer $k \equiv 2 \pmod{4}$ ise $T_{k,d}$ grafının nokta-kenar baskınlık kümesi merkez nokta v ile $k = 4, 8, 12, \dots, k-2$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^3 + d(d-1)^7 + d(d-1)^{11} + \dots + d(d-1)^{k-3} \\ &= 1 + d(d-1)^3(1 + (d-1)^4 + (d-1)^8 + \dots + (d-1)^{k-6}) \end{aligned}$$

burada $r = (d-1)^4$ olup,

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^3 \frac{r^{\frac{k-6}{4}+1} - 1}{r-1} \\ &= 1 + d(d-1)^3 \frac{(d-1)^{k-2} - 1}{(d-1)^4 - 1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Eğer $k \equiv 3 \pmod{4}$ ise $T_{k,d}$ grafının nokta-kenar baskınlık kümesi $k = 1, 5, 9, \dots, k-2$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur. Öyle ise,

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(T_{k,d}) &= d + d(d-1)^4 + d(d-1)^8 + \dots + d(d-1)^{k-3} \\ &= d(1 + (d-1)^4 + (d-1)^8 + \dots + (d-1)^{k-3}) \end{aligned}$$

burada $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(T_{k,d}) &= d \frac{r^{\frac{k-3}{4}+1} - 1}{r-1} \\ &= d \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^4 - 1} \end{aligned}$$

Teorem.4.1.3. $T_{k,d}$ bir düzenli dendrimer olmak üzere, $T_{k,d}$ grafının kenar-nokta baskınlık sayısı

$$\gamma_{ev}(T_{k,d}) = \begin{cases} 1 + d(d-1)^2 \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}, k \equiv 0(mod4) \\ 1 + d(d-1)^3 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^4 - 1}, k \equiv 1(mod4) \\ d \frac{(d-1)^{k+2} - 1}{(d-1)^4 - 1}, k \equiv 2(mod4) \\ d(d-1) \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^4 - 1}, k \equiv 3(mod4) \end{cases}$$

İspat. Eğer k dördün katı ise $T_{k,d}$ grafının kenar-nokta baskınlık kümesinin elemanları merkez v noktasından çıkan bir kenar ile $k = 2$ ve $k = 3, k = 6$ ve $k = 7, k = k - 2$ ve $k = k - 1$ yarıçapları arasında kalan kenarlardır. Bu kenarların toplam sayısı,

$$\begin{aligned} \gamma_{ev}(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^2 + d(d-1)^6 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= 1 + d(d-1)^2(1 + (d-1)^4 + (d-1)^8 + \dots + (d-1)^{k-4}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada ikinci kısımda oluşan geometrik seride ortak çarpan $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\begin{aligned} \gamma_{ev}(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^2 \frac{r^{\frac{k-4}{4}+1} - 1}{r - 1} \\ &= 1 + d(d-1)^2 \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1} \end{aligned}$$

Eğer $k \equiv 1(mod4)$ ise $T_{k,d}$ grafının kenar-nokta baskınlık kümesinin elemanları merkez v noktasından çıkan bir kenar ile $k = 3$ ve $k = 4, k = 7$ ve $k = 8, k = k - 2$ ve $k = k - 1$ yarıçapları arasında kalan kenarlardır. Öyle ise bu kenarların toplamı,

$$\begin{aligned} \gamma_{ev}(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^3 + d(d-1)^7 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= 1 + d(d-1)^3(1 + (d-1)^4 + (d-1)^8 + \dots + \\ &\quad (d-1)^{k-5}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki netice bulunur.

$$\begin{aligned}\gamma_{ev}(T_{k,d}) &= 1 + d(d-1)^3 \frac{r^{\frac{k-5}{4}+1} - 1}{r-1} \\ &= 1 + d(d-1)^3 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^4 - 1}\end{aligned}$$

Eğer $k \equiv 2 \pmod{4}$ ise $T_{k,d}$ grafının kenar-nokta baskınlık kümesinin elemanları merkez v noktasından çıkan kenarlar ile $k = 4$ ve $k = 5$, $k = 8$ ve $k = 9$, $k = k - 2$ ve $k = k - 1$ yarıçapları arasında kalan kenarlardır. Bu durumda toplamları,

$$\begin{aligned}\gamma_{ev}(T_{k,d}) &= d + d(d-1)^4 + d(d-1)^8 + d(d-1)^{12} + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= d(1 + (d-1)^4 + (d-1)^8 + \dots + (d-1)^{k-2})\end{aligned}$$

burada $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\begin{aligned}\gamma_{ev}(T_{k,d}) &= d \frac{r^{\frac{k-2}{4}+1} - 1}{r-1} \\ &= d \frac{(d-1)^{k+2} - 1}{(d-1)^4 - 1}\end{aligned}$$

Eğer $k \equiv 3 \pmod{4}$ ise $T_{k,d}$ grafının kenar-nokta baskınlık kümesinin elemanları $k = 1$ ve $k = 2$, $k = 5$ ve $k = 6, \dots, k = k - 2$ ve $k = k - 1$ yarıçapları arasında kalan kenarlardır. Öyle ise toplam,

$$\begin{aligned}\gamma_{ev}(T_{k,d}) &= d(d-1) + d(d-1)^5 + d(d-1)^9 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= d(d-1)(1 + (d-1)^4 + (d-1)^8 + \dots + (d-1)^{k-3})\end{aligned}$$

şeklinde olup, $r = (d-1)^4$ olduğundan

$$\begin{aligned}\gamma_{ev}(T_{k,d}) &= d(d-1) \frac{r^{\frac{k-3}{4}+1} - 1}{r-1} \\ &= d(d-1) \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^4 - 1}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

4.2.Düzenli Dendrimer Grafların Toplam Baskınlık Parametreleri

Teorem.4.2.1. $T_{k,d}$ bir regüler dendrimer olmak üzere, $T_{k,d}$ grafının toplam baskınlık sayısı

$$\gamma_t(T_{k,d}) = \begin{cases} 2 + d^2(d-1) \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}, & k \equiv 0 \pmod{4} \\ 2 + d^2(d-1)^2 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^4 - 1}, & k \equiv 1 \pmod{4} \\ 1 + d + d^2(d-1)^3 \frac{(d-1)^{k-2} - 1}{(d-1)^4 - 1}, & k \equiv 2 \pmod{4} \\ d^2 \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^4 - 1}, & k \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

İspat. Bir indirgeme bağıntısı elde edebilmek için şu yöntem uygulanabilir. Düzenli dendrimerlerin en az elemana sahip toplam baskınlık kümesi için, $T_{k,d}$ dendrimeri üzerinde merkezi v noktasına m birim uzaklıktaki noktaların kümesinin R_m ile gösterildiğini kabul edelim. Dendrimerin toplam baskınlık kümesi ise S ile gösterilsin. Eğer S içindeki bir nokta merkeze k birim uzaklıkta ise (yani R_k kümesi tarafından kapsanıyorsa), bu nokta $k-1$ birim uzaklıktaki nokta ile yer değiştirebilir. Ayrıca S kümesinin bir toplam küme olabilmesi için merkeze $k-2$ birim uzaklıktaki noktaların da (R_{k-2}) S kümesi tarafından kapsanması gerekmektedir. Böylece devam edilerek S içindeki bir nokta merkeze $k-3$ birim uzaklıkta ise (R_{k-3}), bu nokta $k-4$ birim uzaklıktaki nokta ile yer değiştirebilir. Bu durumda,

$$\gamma_t(T_{k,d}) = \gamma_t(T_{k-4,d}) + d(d-1)^{k-3} + d(d-1)^{k-2}$$

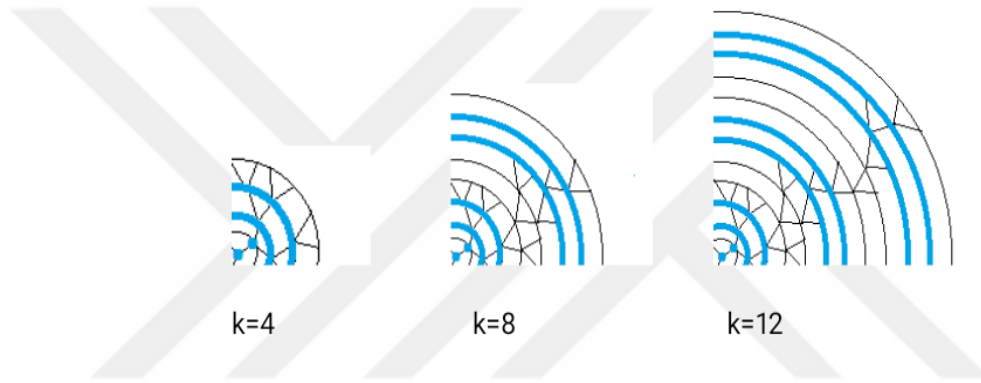
genel bağıntısı elde edilir ve $k = 1,2,3,4$ başlangıç şartları olmak üzere aşağıdaki sonuçlara uygulanabilir.

Düzenli dendrimerlerde nokta sayısı yarıçapa bağlı olarak geometrik olarak arttığından baskınlık kümesinin en az elemana sahip olması için k yarıçaplı dendrimerde $k-1$ yarıçapından başlanarak dıştan içe doğru baskınlık elemanları bulunur.

Tablo.4.1. Yarıçapa bağlı olarak toplam baskınlık kümesi

k	Baskınlık kümesi	k	Baskınlık kümesi
1	v, u	2	$v, (k = 1)$
5	$v, u, (k = 3, 4)$	6	$v, (k = 1, 4, 5)$
9	$v, u, (k = 3, 4, 7, 8)$	10	$v, (k = 1, 4, 5, 8, 9)$
13	$v, u, (k = 3, 4, 7, 8, 11, 12)$	14	$v, (k = 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13)$
k	Baskınlık kümesi	k	Baskınlık kümesi
3	$k = 1, 2$	4	$v, u, (k = 2, 3)$
7	$k = 1, 2, 5, 6$	8	$v, u, (k = 2, 3, 6, 7)$
11	$k = 1, 2, 5, 6, 9, 10$	12	$v, u, (k = 2, 3, 6, 7, 10, 11)$
15	$k = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14$	16	$v, u, (k = 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15)$

*(v merkez nokta, u birinci yarıçap üzerinden bir nokta)

**Şekil 4.1.** Yarıçap dördün katı olduğunda toplam baskınlık kümesi

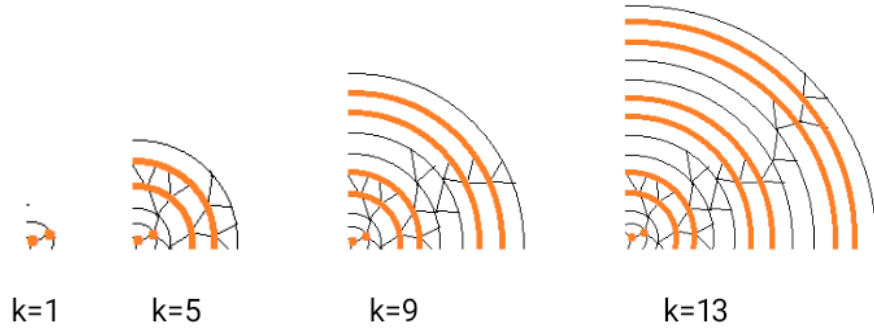
k dördün katı olsun. Bu durumda $T_{k,d}$ grafının toplam baskınlık kümesi merkez nokta v birinci yarıçap üzerinden bir nokta ve yarıçap $k = 2, 3, 6, 7, \dots, k - 2, k - 1$ üzerindeki noktalardan oluşur. Tüm noktaların toplamı Lemma 3.1. den

$$\begin{aligned}
\gamma_t(T_{k,d}) &= 1 + 1 + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^5 + d(d-1)^6 \\
&+ \dots + d(d-1)^{k-3} + d(d-1)^{k-2} \\
&= 2 + d(d-1) + d(d-1)^5 + \dots + d(d-1)^{k-3} \\
&+ d(d-1)^2 + d(d-1)^6 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\
&= 2 + d(d-1)[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-4}] \\
&+ d(d-1)^2[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-4}] \\
&= 2 + (d(d-1) + d(d-1)^2)[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-4}]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu denklemin ikinci kısmı bir geometrik seri oluşturur. Burada geometrik dizinin ortak çarpanı $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\gamma_t(T_{k,d}) = 2 + d^2(d-1) \frac{r^{\frac{k-4}{4}+1} - 1}{r - 1}$$

$$= 2 + d^2(d-1) \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}$$



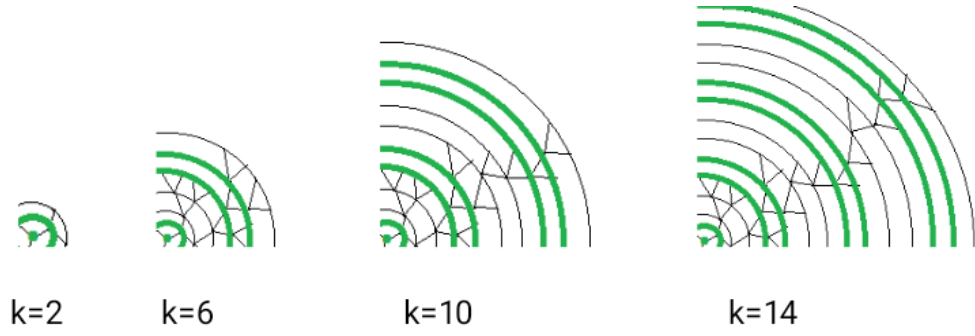
Şekil 4.2. Yarıçap dördün katından bir fazla olduğunda toplam baskınlık kümesi

Şimdi ise $k \equiv 1 \pmod{4}$ olsun. Bu durumda $T_{k,d}$ grafının toplam baskınlık kümesi merkez nokta v , birinci yarıçap üzerinden bir nokta ve $k = 3, 4, 7, 8, \dots, k - 2, k - 1$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur. Tüm noktaların toplamı,

$$\begin{aligned} \gamma_t(T_{k,d}) &= 1 + 1 + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + d(d-1)^6 + d(d-1)^7 \\ &+ \dots + d(d-1)^{k-3} + d(d-1)^{k-2} \\ &= 2 + d(d-1)^2 + d(d-1)^6 + \dots + d(d-1)^{k-3} \\ &+ d(d-1)^3 + d(d-1)^7 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= 2 + d(d-1)^2[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-5}] \\ &+ d(d-1)^3[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-5}] \\ &= 2 + (d(d-1)^2 + d(d-1)^3)[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-5}] \end{aligned}$$

şeklinindedir. Bu denklemin ikinci kısmı bir geometrik seri oluşturur. Burada geometrik dizinin ortak çarpanı $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned} \gamma_t(T_{k,d}) &= 2 + d^2(d-1)^2 \frac{r^{\frac{k-5}{4}+1} - 1}{r-1} \\ &= 2 + d^2(d-1)^2 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^4 - 1} \end{aligned}$$



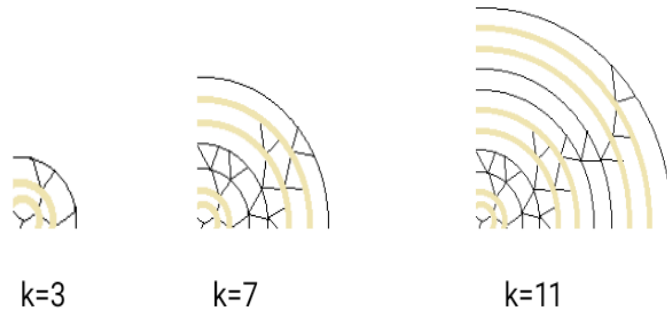
Şekil.4.3. Yarıçap dördün katından iki fazla olduğunda toplam baskınlık kümesi

Eğer $k \equiv 2 \pmod{4}$ ise bu durumda $T_{k,d}$ grafının toplam baskınlık kümesi merkez nokta v ile $k = 1, 4, 5, 8, 9, \dots, k-2, k-1$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur. Bu noktaların toplamı,

$$\begin{aligned}
 \gamma_t(T_{k,d}) &= 1 + d + d(d-1)^3 + d(d-1)^4 + d(d-1)^7 + d(d-1)^8 \\
 &+ \dots + d(d-1)^{k-3} + d(d-1)^{k-2} \\
 &= 1 + d + d(d-1)^3 + d(d-1)^7 + \dots + d(d-1)^{k-3} \\
 &+ d(d-1)^4 + d(d-1)^8 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\
 &= 1 + d + d(d-1)^3 [1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-6}] \\
 &+ d(d-1)^4 [1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-6}] \\
 &= 1 + d + (d(d-1)^3 + d(d-1)^4) [1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-6}]
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu denklemin ikinci kısmı bir geometrik seri oluşturur. Burada geometrik dizinin ortak çarpanı $r = (d-1)^4$ olup aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \gamma_t(T_{k,d}) &= 1 + d + d^2(d-1)^3 \frac{r^{\frac{k-6}{4}+1} - 1}{r-1} \\
 &= 1 + d + d^2(d-1)^3 \frac{(d-1)^{k-2} - 1}{(d-1)^4 - 1}
 \end{aligned}$$



Şekil.4.4. Yarıçap dördün katından üç fazla olduğunda toplam baskınlık kümesi

Son olarak $k \equiv 3 \pmod{4}$ olduğunda, $T_{k,d}$ grafinin toplam baskınlık kümesi $k = 1, 2, 5, 6, 9, 10, \dots, k-2, k-1$ üzerindeki noktalardan oluşur. Bu noktaların toplamı

$$\begin{aligned}
\gamma_t(T_{k,d}) &= d + d(d-1) + d(d-1)^4 + d(d-1)^5 + d(d-1)^8 + d(d-1)^9 \\
&\quad + \dots + d(d-1)^{k-3} + d(d-1)^{k-2} \\
&= d + d(d-1)^4 + d(d-1)^8 + \dots + d(d-1)^{k-3} \\
&\quad + d(d-1) + d(d-1)^5 + d(d-1)^9 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\
&= d[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-3}] \\
&\quad + d(d-1)[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-3}] \\
&= (d(d-1) + d)[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-3}]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burda da $r = (d-1)^4$ olduğundan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\gamma_t(T_{k,d}) &= d^2 \frac{r^{\frac{k-3}{4}+1} - 1}{r - 1} \\
&= d^2 \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^4 - 1}
\end{aligned}$$

Teorem.4.2.2. $T_{k,d}$ bir regüler dendrimer olmak üzere, $T_{k,d}$ grafinin toplam nokta-kenar baskınlık sayısı,

$$\gamma_{ve}^t(T_{k,d}) = \begin{cases} d^2(d-1) \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^5 - 1}, & k \equiv 0 \pmod{5} \\ 2 + d^2(d-1)^2 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^5 - 1}, & k \equiv 1 \pmod{5} \\ 2 + d^2(d-1)^3 \frac{(d-1)^{k-2} - 1}{(d-1)^5 - 1}, & k \equiv 2 \pmod{5} \\ 1 + d + d^2(d-1)^4 \frac{(d-1)^{k-3} - 1}{(d-1)^5 - 1}, & k \equiv 3 \pmod{5} \\ d^2 \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^5 - 1}, & k \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

İspat. Düzenli dendrimerlerin en az elemana sahip toplam nokta-kenar baskınlık kümesini elde edebilme açısından genel bir yaklaşım elde edebiliriz. $T_{k,d}$ dendrimeri üzerinde merkezi v noktasına m birim uzaklıktaki noktaların kümesinin R_m ile gösterildiğini kabul edelim. Dendrimerin toplam nokta-kenar baskınlık kümesi ise S ile gösterilsin. Eğer S içindeki bir nokta merkeze k veya $k-1$ birim uzaklıkta ise (yani R_k veya R_{k-1} kümeleri tarafından kapsanıyorsa) bu nokta $k-2$ birim uzaklıktaki nokta ile yer değiştirebilir. Ayrıca S kümesinin bir toplam küme olabilmesi

için merkeze $k - 3$ birim uzaklıktaki noktaların da S kümesi tarafından kapsanması gerekmektedir.

Böylece devam edilerek S içindeki bir nokta merkeze $k - 4$ veya $k - 5$ birim uzaklıkta ise (yani R_{k-4} veya R_{k-5} kümeleri tarafından kapsanıyor) bu nokta $k - 6$ birim uzaklıktaki nokta ile yer değiştirebilir. Bu durumda,

$$\gamma_{ve}^t(T_{k,d}) = \gamma_{ve}^t(T_{k-5,d}) + d(d-1)^{k-4} + d(d-1)^{k-3}$$

genel bağıntısı elde edilir ve $k = 1,2,3,4,5$ başlangıç şartları olmak üzere aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Tablo.4.2. Yarıçapa bağlı olarak toplam ve -baskınlık kümesi

k	1	6	11
Baskınlık kümesi	v, u	$v, u, (k = 3,4)$	$v, u, (k = 3,4,8,9)$
k	2	7	12
Baskınlık kümesi	v, u	$v, u, (k = 4,5)$	$v, u, (k = 4,5,9,10)$
k	3	8	13
Baskınlık kümesi	$v, (k = 1)$	$v, (k = 1,5,6)$	$v, (k = 1,5,6,10,11)$
k	4	9	14
Baskınlık kümesi	$k = 1,2$	$k = 1,2,6,7$	$k = 1,2,6,7,11,12$
k	5	10	15
Baskınlık kümesi	$k = 2,3$	$k = 2,3,7,8$	$k = 2,3,7,8,12,13$

*(v merkez nokta, u birinci yarıçap üzerinden bir nokta)



$k=5$



$k=10$

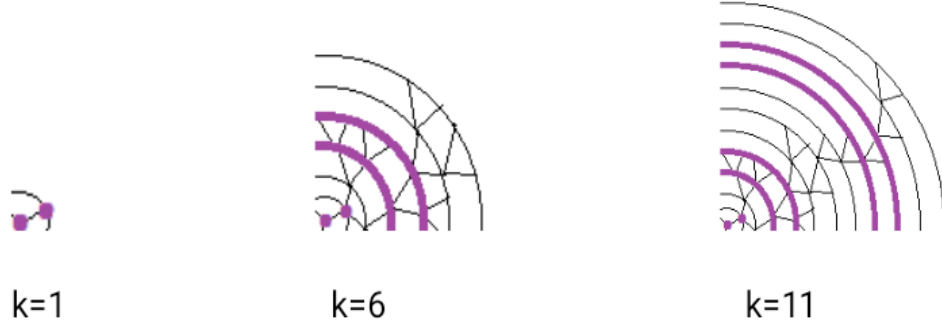
Şekil 4.5. Yarıçap beşin katı olduğunda toplam ve -baskınlık kümesi

k beşin katı olsun. Bu durumda $T_{k,d}$ grafinin toplam nokta-kenar baskınlık kümesi, $k = 2, 3, 7, 8, 12, 13, \dots, k - 3, k - 2$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur. Bu noktaların toplamı,

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}^t(T_{k,d}) &= d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^6 + d(d-1)^7 \\ &+ \dots + d(d-1)^{k-4} + d(d-1)^{k-3} \\ &= d(d-1)[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-5}] \\ &+ d(d-1)^2[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-5}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (d(d-1) + d(d-1)^2)[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-5}] \\
&= d^2(d-1) \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^5 - 1}
\end{aligned}$$

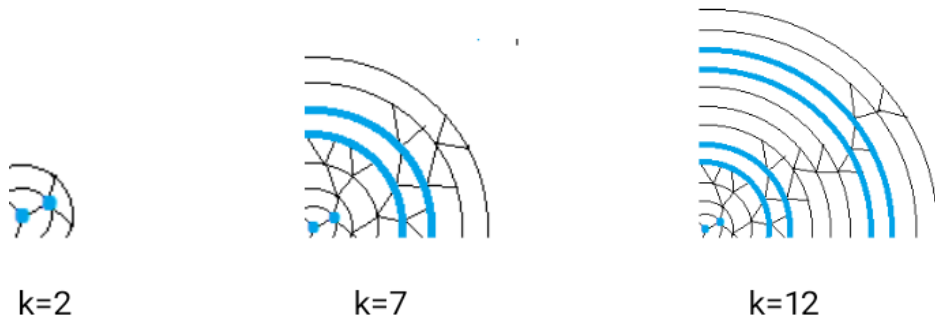
olarak hesaplanır.



Şekil 4.6. Yarıçap beşin katından bir fazla olduğunda toplam *ve*-baskınlık kümesi

$k \equiv 1 \pmod{5}$ olduğunda $T_{k,d}$ grafının toplam *ve*-baskınlık kümesi merkez nokta v , birinci yarıçap üzerinden bir nokta ile $k = 3, 4, 8, 9, \dots, k-3, k-2$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur. Böylece aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\begin{aligned}
\gamma_{ve}^t(T_{k,d}) &= 1 + 1 + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + d(d-1)^7 + d(d-1)^8 \\
&+ \dots + d(d-1)^{k-4} + d(d-1)^{k-3} \\
&= 2 + d(d-1)^2[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-6}] \\
&+ d(d-1)^3[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-6}] \\
&= 2 + (d(d-1)^2 + d(d-1)^3)[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-6}] \\
&= 2 + d^2(d-1)^2 \frac{(d-1)^{k-1} - 1}{(d-1)^5 - 1}
\end{aligned}$$

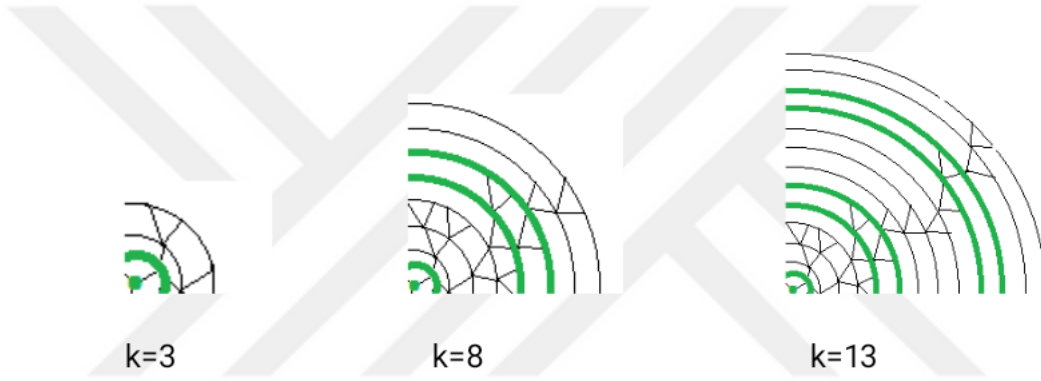


Şekil 4.7. Yarıçap beşin katından iki fazla olduğunda toplam *ve*-baskınlık kümesi

$k \equiv 2 \pmod{5}$ olduğu durumda $T_{k,d}$ grafının toplam nokta-kenar baskınlık kümesi merkez nokta v , birinci yarıçap üzerinden bir nokta ile $k = 4, 5, 9, 10, \dots, k - 3, k - 2$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşur. Bu noktaların toplamı,

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}^t(T_{k,d}) &= 1 + 1 + d(d-1)^3 + d(d-1)^4 + d(d-1)^8 + d(d-1)^9 \\ &+ \dots + d(d-1)^{k-4} + d(d-1)^{k-3} \\ &= 2 + d(d-1)^3[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-7}] \\ &+ d(d-1)^4[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-7}] \\ &= 2 + (d(d-1)^3 + d(d-1)^4)[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-7}] \\ &= 2 + d^2(d-1)^3 \frac{(d-1)^{k-2} - 1}{(d-1)^5 - 1} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

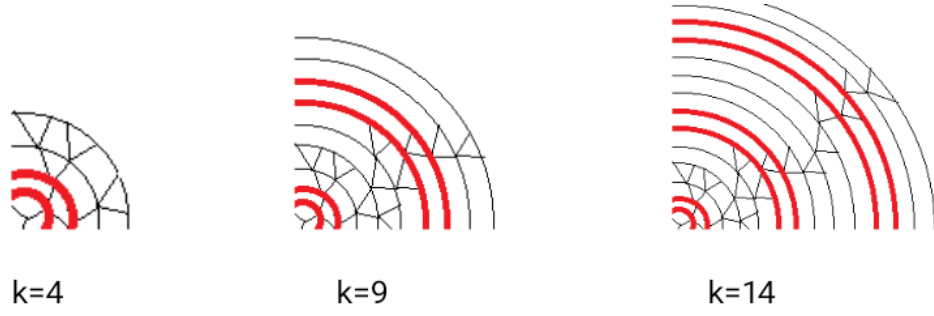


Şekil 4.8. Yarıçap beşin katından üç fazla olduğunda toplam ve -baskınlık kümesi

Eğer $k \equiv 3 \pmod{5}$ ise $T_{k,d}$ grafının toplam nokta-kenar baskınlık kümesi merkez nokta v ile $k = 1, 5, 6, 10, 11, \dots, k - 3, k - 2$ yarıçapları üzerindeki noktalardan oluşmaktadır. Dolayısıyla toplam baskınlık sayısı,

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}^t(T_{k,d}) &= 1 + d + d(d-1)^4 + d(d-1)^5 + d(d-1)^9 + d(d-1)^{10} \\ &+ \dots + d(d-1)^{k-4} + d(d-1)^{k-3} \\ &= 1 + d + d(d-1)^4[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-8}] \\ &+ d(d-1)^5[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-8}] \\ &= 1 + d + (d(d-1)^4 + d(d-1)^5)[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-8}] \\ &= 1 + d + d^2(d-1)^4 \frac{(d-1)^{k-3} - 1}{(d-1)^5 - 1} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 4.9. Yarıçap beşin katından dört fazla olduğunda toplam ve -baskınlık kümesi

Son olarak $k \equiv 4 \pmod{5}$ olması durumunda $T_{k,d}$ grafının toplam nokta-kenar baskınlık kümesinin elemanları $k = 1, 2, 6, 7, 11, 12, \dots, k-3, k-2$ yarıçapları üzerindeki noktalardır. Böylece bu noktaların toplamı,

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ve}^t(T_{k,d}) &= d + d(d-1) + d(d-1)^5 + d(d-1)^6 + d(d-1)^{10} + d(d-1)^{11} \\
 &+ \dots + d(d-1)^{k-4} + d(d-1)^{k-3} \\
 &= d[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-4}] \\
 &+ d(d-1)[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-4}] \\
 &= (d + d(d-1))[1 + (d-1)^5 + \dots + (d-1)^{k-4}] \\
 &= d^2 \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^5 - 1}
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Teorem.4.2.3. $T_{k,d}$ bir regüler dendrimer olmak üzere, $T_{k,d}$ grafının toplam kenar-nokta baskınlık sayısı,

$$\gamma_{ev}^t(T_{k,d}) = \begin{cases} 2 + d(d-1)^2 \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}, & k \equiv 0 \pmod{4} \\ 2 + d(d-1)^3 \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}, & k \equiv 1 \pmod{4} \\ d \frac{(d-1)^{k+2} - 1}{(d-1)^4 - 1}, & k \equiv 2 \pmod{4} \\ d(d-1) \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^4 - 1}, & k \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

İspat. Düzenli dendrimerlerin en az elemana sahip toplam kenar-nokta baskınlık kümesini elde etmek için şöyle bir yol takip edilebilir. $T_{k,d}$ dendrimeri üzerinde merkezi v noktasına göre m birim ve $m-1$ birim uzaklıkları arasında yer alan kenarların kümesinin R_m ile gösterildiğini kabul edelim. Dendrimerin toplam kenar-

nokta baskınlık kümesi ise S ile gösterilsin. Eğer S içindeki bir kenar aynı zamanda R_k kümesi tarafından da kapsanıyorsa bu kenar, R_{k-1} ile kapsanan bir kenar ile yer değiştirebilir. R_{k-1} kümesindeki kenarlar birbirleriyle komşu oldukları için toplamlık da sağlanmış olur.

Böylece devam edilerek S içindeki bir kenar R_{k-3} kümesi tarafından da kapsanıyorsa bu kenar, R_{k-4} ile kapsanan bir kenar ile yer değiştirebilir. Bu durumda,

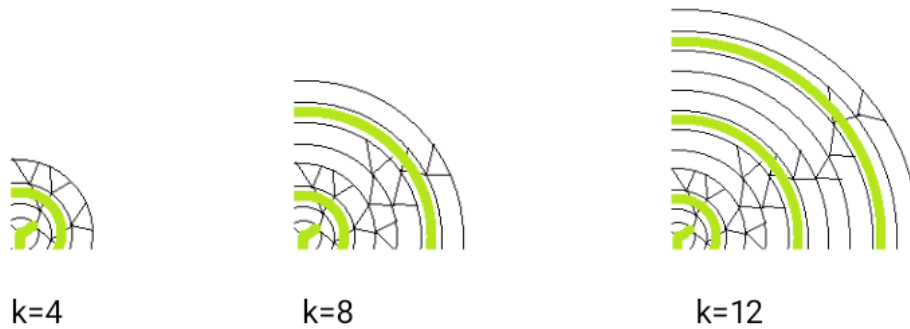
$$\gamma_{ev}^t(T_{k,d}) = \gamma_{ev}^t(T_{k-4,d}) + d(d-1)^{k-2}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir ve $k = 1,2,3,4$ başlangıç şartları olmak üzere aşağıdaki sonuçlara uygulanabilir.

Tablo4.3. Yarıçapa bağlı olarak toplam ev -baskınlık kümesi

k	Baskınlık kümesi	k	Baskınlık kümesi
1	e, f	2	$k = 0 - 1$
5	$e, f, (k = 3 - 4)$	6	$k = 0 - 1, 4 - 5$
9	$e, f, (k = 3 - 4, 7 - 8)$	10	$k = 0 - 1, 4 - 5, 8 - 9$
13	$e, f, (k = 3 - 4, 7 - 8, 11 - 12)$	14	$k = 0 - 1, 4 - 5, 8 - 9, 12 - 13$
k	Baskınlık kümesi	k	Baskınlık kümesi
3	$k = 1 - 2$	4	$e, f, (k = 2 - 3)$
7	$k = 1 - 2, 5 - 6$	8	$e, f, (k = 2 - 3, 6 - 7)$
11	$k = 1 - 2, 5 - 6, 9 - 10$	12	$e, f, (k = 2 - 3, 6 - 7, 10 - 11)$
15	$k = 1 - 2, 5 - 6, 9 - 10, 13 - 14$	16	$e, f, (k = 2 - 3, 6 - 7, 10 - 11, 14 - 15)$

*(e, f , merkez nokta v den çıkan iki kenar)



Şekil 4.10. Yarıçap dördün katı olduğunda toplam ev -baskınlık kümesi

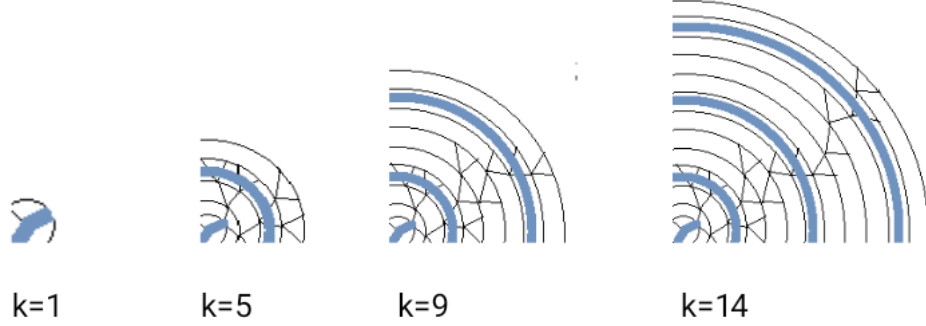
Eğer k dördün katı ise $T_{k,d}$ grafinin toplam kenar-nokta baskınlık kümesinin elemanları merkez v noktasından çıkan iki kenar ile $k = 2$ ve $k = 3$, $k = 6$ ve $k = 7, \dots, k = k - 2$ ve

$k = k - 1$ yarıçapları arasında kalan kenarlardır. Bu kenarların toplam sayısı,

$$\gamma_{ev}^t(T_{k,d}) = 2 + d(d-1)^2 + d(d-1)^6 + \dots + d(d-1)^{k-2}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + d(d-1)^2[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-4}] \\
&= 2 + d(d-1)^2 \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

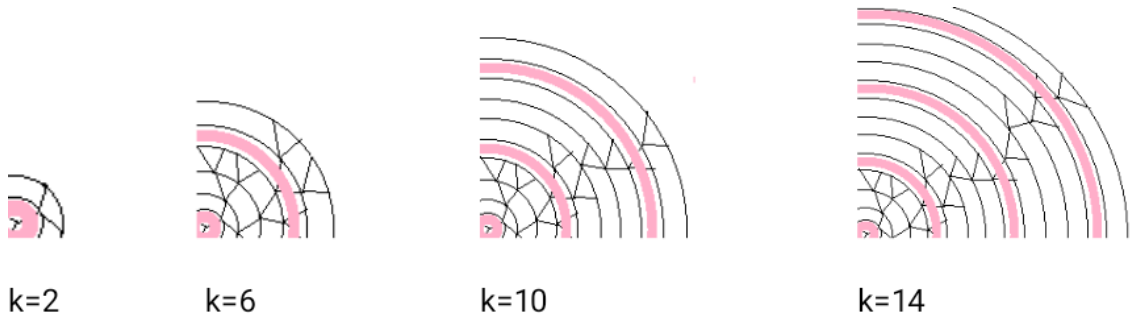


Şekil 4.11. Yarıçap dördün katından bir fazla olduğunda toplam ev -baskınlık kümesi

$k \equiv 1 \pmod{4}$ olduğunda $T_{k,d}$ grafinin toplam kenar-nokta baskınlık kümesinin elemanları merkez v noktasından çıkan iki kenar ile $k = 3$ ve $k = 4$, $k = 7$ ve $k = 8$, ..., $k = k - 2$ ve $k = k - 1$ yarıçapları arasında kalan kenarlardır. Dolayısı ile bu kenarların toplamı,

$$\begin{aligned}
\gamma_{ev}^t(T_{k,d}) &= 2 + d(d-1)^3 + d(d-1)^7 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\
&= 2 + d(d-1)^3[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-4}] \\
&= 2 + d(d-1)^3 \frac{(d-1)^k - 1}{(d-1)^4 - 1}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.



Şekil.4.12. Yarıçap dördün katından iki fazla olduğunda toplam ev -baskınlık kümesi

Eğer $k \equiv 2 \pmod{4}$ ise $T_{k,d}$ grafinin toplam kenar-nokta baskınlık kümesinin elemanları merkez v noktasından çıkan kenarlar ile $k = 4$ ve $k = 5$, $k = 8$ ve $k =$

$9, \dots, k = k - 2$ ve $k = k - 1$ yarıçapları arasında kalan kenarlardır. Böylece toplamları,

$$\begin{aligned}\gamma_{ev}^t(T_{k,d}) &= d + d(d-1)^4 + d(d-1)^8 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= d[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-2}] \\ &= d \frac{(d-1)^{k+2} - 1}{(d-1)^4 - 1}\end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.13. Yarıçap dördün katından üç fazla olduğunda toplam *ev*-baskınlık kümesi

En son $k \equiv 3 \pmod{4}$ iken $T_{k,d}$ grafının toplam kenar-nokta baskınlık kümesinin elemanları $k = 1$ ve $k = 2$, $k = 5$ ve $k = 6, \dots, k = k - 2$ ve $k = k - 1$ yarıçapları arasında kalan kenarlardır. Böylece bu kenarların toplamı,

$$\begin{aligned}\gamma_{ev}^t(T_{k,d}) &= d(d-1) + d(d-1)^5 + d(d-1)^9 + \dots + d(d-1)^{k-2} \\ &= d(d-1)[1 + (d-1)^4 + \dots + (d-1)^{k-3}] \\ &= d(d-1) \frac{(d-1)^{k+1} - 1}{(d-1)^4 - 1}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışması kapsamında önce dendrimerler ve kullanım alanları ile ilgili bilgiler verildikten sonra dendrimerlerin matematiksel özellikleri ele alınmıştır. Dendrimerler çok dallı bir molekül olmakla birlikte her adımda belli sayıda yeni uç verdiği için nokta sayısı geometrik bir seri oluşturmaktadır. Bu özellikten yararlanarak düzenli dendrimer graflarının toplam baskınlık sayısı, toplam kenar-nokta ve toplam nokta-kenar baskınlık sayıları hesaplanmıştır.

5.2. Öneriler

Kimyasal analizlerin masraflı ve uzun süren çalışmalar olması sebebiyle son yıllarda bazı kimyasal malzemelerin çeşitli özellikleri incelenirken matematiksel yöntemlere başvurulmaktadır. Bu tez çalışması kapsamında ele alınan dendrimer graflarının toplam tip baskınlık sayıları ile dendrimerlerin çeşitli fiziksel ve kimyasal özellikleri arasında uyumluluk sağlanıp sağlanmadığına bakılabilir. Buna ilaveten bu tezde yapıldığı gibi dendrimerlerin farklı graf parametreleri de hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

- Barış, B. ve Atav, R., 2012, Dendrimer Teknolojisi Kullanılarak Aromaterapi Özelliğine Sahip Pamuklu Fonksiyonel Kumaş Eldesi . *Ejovoc (Electronic Journal of Vocational Colleges)*, 2 (2) , 171-175. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/tr/pub/ejovoc/issue/5393/>
- Berge, C., 1962. The Theory of Graphs and Its Applications, *Methunen, Londra*.
- Boutrig R., and Chellali M., 2018. Total vertex-edge domination, *International Journal of Computer Mathematics*, 95 (9), 1820-1828.
- Bulut, M. ve Akar, E., 2012, Dendrimerlerin Önemi ve Kullanım Alanları . *Teknik Bil. Dergisi*, 2 (1), 5-11. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/en/pub/tbed/issue/20929/225025>
- Büyükköse, Ş. ve Kaya Gök, G., 2019, Graf Teoriye Giriş, *Ankara-Türkiye, Nobel Yayınları*
- Cangül, I. N., 2017, Graf Teori-I Temel Konular, *Bursa-Türkiye, Dora Yayınları*
- Dilek, Ö., 2009, Cyclam çekirdekli, kromofor uç grup taşıyan poli(arileter) dendrimerlerin sentezi, Yüksek Lisans Tezi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Afyon, ss:75.
- Gao, Y., Zhu, E., Shao, Z., Gutman, I., Klobucar, A., 2018. Total domination and open packing in some chemical graphs, *Journal of Mathematical Chemistry* 56, 1481-1492.
- Harary, F., 1969, Graph Theory Reading, Mass, Addison-Wesley. Pub. Co.
- Harmandar, K., 2016, Pamam türü dendrimerlere katalitik özellik kazandırılması, Yüksek Lisans Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, ss:60.
- Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T., and Slater, P.J. 1998a. Fundamentals of Domination in Graphs, *Marcel Dekker*, New York.
- Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T., and Slater, P.J. (eds), 1998b. Domination in Graphs: Advanced Topics, *Marcel Dekker*, New York.
- Hutchinson, L., Kamat, V., Larson, C.E., Mehta, S. Muncy, D. Van Cleemput, N., 2018. Automated Conjecturing VI: Domination Number of Benzenoids, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 80, 821-834.
- Kılıçaslan, H., 2013, Değişik uçlu schiff bazlarının sentezi ve metal komplekslerinin incelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, ss:72.

- Lewis, J.R., 2007., Vertex-edge and edge-vertex domination in graphs, Phd Thesis, *Clemson University*.
- Lewis, J.R., Hedetniemi, S.T., Haynes, T.W., and Fricke, G.H., 2010. Vertex-edge domination, *Util. Math.* 81, 193–213.
- Majstorovic, S., Doslic, T., Klobucar, A., 2012. K-domination on Hexagonal Cactus Chains, *Kragujevac Journal of Mathematics* 2, 335-347.
- Nagar, A.K., Sriam, S., 2016. On Eccentric Connectivity Index of Eccentric Graph of Regular Dendrimer, *Mathematics in Computer Science* 10, 229-237.
- Namırtı, O. ve Atav, R., 2011, Tekstilde Yeni Bir Konsept Olan Dendrimerlerin Tarihçesi, Sınıflandırılması, Molekül Yapısı ve Özellikleri . *Pamukkale Üniv. Müh. Bilimleri Dergisi*, 17 (2), 109-115. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/tr/pub/pajes/issue/20505/218293>.
- Newkome, G.R., Moorefield C.N., and Vogtle, F., 2002. Dendrimers and Dendrons: Concepts, Syntheses, Applications, *Wiley-VCH*, verlag GmbH and Co.KGAA.
- Peters, J.W., 1986. Theoretical and algorithmic results on domination and connectivity, Ph.D. thesis, *Clemson University*.
- Quadras, J., Mahizl, A.S.M., Rajasingh, I., Rajan, R.S., 2015. Domination in certain chemical graphs. *J. Mathematical Chemistry* 53, 207–219.
- Sancaktaroğlu, E., 2008, Bitim işlemlerinde pamuk, pamuk/poliester karışımı kumaşlarda dendrimerlerin renk üzerine etkisi, Yüksek Lisans Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Bursa, ss:100.
- Şahin, A., Şahin, B., 2020, Total edge-vertex domination, *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications* 54 1.
- Şahin, B., Şahin, A., 2018. On domination type invariants of regular dendrimer, *Journal of Mathematical Nanoscience* 8 (1), 27-31.
- Şahin, B., Şener, Ü.G., 2020, Total Domination Type Invariants of Regular Dendrimer, *Celal Bayar University Journal of Science* 16 (2), 225-228.
- Şener, Ü.G., Şahin, B., 2019, Total Domination Number of Regular Dendrimer Graph, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science* 11, 81-84.
- Tanrıverdi, E.E., 2011, Pamam dendrimerlerle kaplanmış monometalik nanoparçacıkların sentezi ve karakterizasyonu, Yüksek Lisans Tezi, *Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, ss:85.
- Vukicevic, D., Klobucar, A., 2007. K-dominating Sets on Linear Benzenoids and on the Infinite Hexagonal Grid, *Croatica Chemica Acta* 80 (2), 187-191.