GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

VEKTÖR METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Sezin ÇİT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sezin ÇİT

....

VEKTÖR METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Sezin ÇİT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

Bu tez çalışmasında vektör metrik uzayların temel kavramları incelenmiş ve metrik uzaylarda Banach büzülme ilkesinden başlayarak Ćirić'in sözdebüzülme dönüşümlerine kadar sabit nokta teorinin kısa bir tarihçesine yer verilmiştir. Vektör metrik uzaylarda Çevik ve Altun (2009) tarafından verilen Banach sabit nokta teoreminin ispatı temel alınarak E-tam vektör metrik uzaylarda Kannan, Chatterjee, Reich, Hardy-Rogers sabit nokta teoremleri ve ispatları ayrıca Ćirić'in sözdebüzülme dönüşümü için sabit nokta teoremi ve ispatı vektör metrik uzaylarda verilmiştir.

Bilim Kodu	: 20404
Anahtar Kelimeler	: vektör metrik uzay, Riesz uzayı, sabit nokta, sözdebüzülme
Sayfa Adedi	: 89
Danışman	: Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

SOME FIXED POINT THEOREMS ON VECTOR METRIC SPACES
(M. Sc. Thesis)

Sezin ÇİT

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June 2021

ABSTRACT

In this thesis, the basic concepts of vector metric spaces are examined and a brief history of fixed point theory from the Banach contraction principle to Ćirić's quasi-contraction mappings on metric spaces is given. The proof of the Banach fixed point theorem which was proved by Çevik and Altun (2009) on vector metric spaces fundamental knowledge on E-complete vector metric spaces Kannan, Chatterjee, Reich, Hardy-Rogers fixed point theorems and the Ćirić quasi-contraction mapping on vector metric spaces is given.

Science Code	: 20404
Key Words	: vector metric space, Riesz space, fixed point, quasi-contraction
Page Number	: 89
Supervisor	: Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi ve desteği ile beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren ve bu süreçte karşılaştığım her problemde yardımına başvurduğum değerli hocam Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e, maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, daima yanımda olan sevgili aileme ve arkadaşlarıma saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{x \vee y}$	x ve y elemanlarının supremumu
$\boldsymbol{x \wedge y}$	x ve y elemanlarının infimumu
$\boldsymbol{a_n \downarrow a}$	(a_n) azalan dizi ve $\inf a_n = a$
$\boldsymbol{a_n \uparrow a}$	(a_n) artan dizi ve $\sup a_n = a$
$\boldsymbol{(X, d)}$	Metrik uzay
$\boldsymbol{(X, d, E)}$	Vektör metrik uzay
$\boldsymbol{x_n \to x}$	(x_n) dizisi x elemanına yakınsar
$\boldsymbol{x_n \xrightarrow{o} x}$	(x_n) dizisi x elemanına (sıra) o-yakınsar
$\boldsymbol{x_n \xrightarrow{d,E} x}$	(x_n) dizisi x elemanına (vektörel) E-yakınsar

1. GİRİŞ

X boş olmayan bir küme $f : X \to X$ bir fonksiyon olmak üzere f altında değişmeyen noktalara, yani $x = f(x)$ denklemini sağlayan noktalara f fonksiyonunun sabit noktaları denir. Bir fonksiyonun sabit noktasının varlığı o fonksiyonun tanımına bağlı olduğu gibi tanımlandığı kümeye de bağlıdır. $X = [0,1)$ için $f(x) = x/2$ fonksiyonunun sabit noktası $x = 0$ iken $g(x) = x + 1$ fonksiyonunun sabit noktası yoktur. $X = (0,1)$ için $f(x) = x/2$ fonksiyonun ise sabit noktası yoktur. Sabit nokta teori çalışmaları, fonksiyonun sabit noktasının varlığını, varsa tek olup olmadığını ve nasıl bulunacağını inceler.

Sabit nokta teori geniş uygulanabilirliği nedeniyle nonlineer fonksiyonel analizin esas dalını oluşturur. Matematiğin birçok alanında olduğu kadar fizik, kimya, biyoloji ve ekonomi alanlarında görülen nonlineer diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerinin çözümünde kullanılır. Çeşitli uygulamaları nedeniyle bu teori birçok yönde genelleştirilmiştir.

Metrik uzaylardaki sabit nokta teori çalışmaları, 1922 yılında yayımlanan ve Banach büzülme ilkesi olarak bilinen şu teoremle başlamıştır: (X,d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ fonksiyonu büzülme ise, yani her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x,y)$$

olacak biçimde $q \in [0,1)$ sayısı varsa f fonksiyonun X içinde bir tek sabit noktası vardır [1]. Teoremin Banach tarafından verilen ispatı, büzülme dönüşümü için sabit noktanın nasıl bulunacağının bir yöntemini verir. İterasyon dizisinin tanımına bağlı olan bu yöntemde herhangi bir $x_0 \in X$ başlangıç noktası alıp $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f(x_{n-1})$ tanımlanır. İspat, $\lim_{n\to\infty} x_n = z \in X$ limitinin varlığını garantiler ve bu durumda $f(z) = z$ olur. Teoremin bu ispatının yanı sıra çeşitli yöntemlerle yapılan ispatları da daha sonralarda verilmiştir [2–4]. Bu ilke hem sabit noktanın varlığını garantilediği hem de tekliğini gösterdiği için çok kullanışlı bir sonuç olup, çok sayıda bilim insanı tarafından genelleştirilmiştir. Banach büzülme ilkesinin genelleştirmeleri ya çalışılan uzay altında uzaklık fonksiyonlarının özelliklerinin genelleştirilmesi ya da dönüşümlerdeki büzülme şartının değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

1962 yılında Edelstein tarafından büzülme dönüşümdeki q sayısı 1 alınarak tam metrik uzay üstünde her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ biçiminde büzülebilir dönüşüm tanımı verilmiştir [5]. Rakotch aynı yıl monoton azalan ve $[0, 1)$ aralığında değer alan fonksiyonlar yardımıyla sabit noktanın varlığını ve tekliğini ispatlamıştır. Ayrıca bu teoremin, Banach büzülme ilkesinin bir genellemesi olduğunu vermiştir [6]. 1969 yılında Boyd ve Wong tarafından d metriğinin değer kümesinin kapanışında tanımlı ve yarı-sürekli Ψ fonksiyonu ile Ψ-büzülme tanımı verilerek bu büzülmenin Rakotch teoreminin bir genellemesi olduğu gösterilmiştir [7]. Meir ve Keeler 1969 yılında büzülme şartını değiştirip çok daha genel bir sınıfa genelleştirerek MK-büzülme dönüşümünü tanımlamış ve Banach büzülme ilkesi ile Edelstein teoreminin bir genelleştirilmesi olduğunu ifade etmişlerdir [8]. Kannan, 1968 yılında Banach büzülme ilkesinden bağımsız olarak $q \in [0, 1/2)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leq q\,[d(x, f(x)), d(y, f(y))]$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonunun X içinde bir tek sabit noktası olduğunu göstermiştir. Her büzülme dönüşümü tanımından dolayı sürekli iken Kannan sabit nokta teoremindeki dönüşümün sürekli olmak zorunda olmadığı gösterilmiştir [9]. Chatterjee, 1972 yılında Kannan sabit nokta teoremini değiştirerek f fonksiyonunun

$$d(f(x), f(y)) \leq q\,[d(x, f(y)), d(y, f(x))]$$

koşulunu sağladığı teoremini ispatlamıştır [10]. Zamfirescu, aynı yıl Banach, Kannan ve Chatterjee teoremlerini birleştirerek sabit nokta için daha genel bir teorem vermiştir [12]. Ćirić 1971 yılında bilinen büzülme şartını; $\lambda \in [0, 1)$ iken her $x, y \in X$ için negatif olmayan ve

$$\sup_{x,y \in X} \{q(x, y) + r(x, y) + s(x, y) + 2t(x, y)\} = \lambda < 1$$

koşulunu sağlayan $q(x, y), r(x, y), s(x, y), t(x, y)$ sayıları ile genelleyerek genelleştirilmiş büzülme kavramını ve daha genel olan sabit nokta teoremini vermiştir [14]. Ayrıca Reich, 1971 yılında Banach ve Kannan sabit nokta teoremlerinin genellemesi olan teoreminde f fonksiyonu

$$d(f(x), f(y)) \leq a\,d(x, f(x)) + b\,d(y, f(y)) + c\,d(x, y)$$

koşulunu sağlarsa, bu fonksiyonun bir tek sabit noktası olduğunu göstermiştir [15]. Burada a, b, c negatif olmayan sayılar ve $a + b + c < 1$'dir. Bu teoremde $a = b = 0$ alınırsa Banach sabit nokta teoremi, $a = b$ ve $c = 0$ alınırsa Kannan sabit nokta teoremi elde edilir. Hardy ve Rogers 1973 yılında Reich'in sonuçlarından bazılarını kullanarak sabit nokta için daha genel olan teoremlerini ispatlamışlardır [16]. Bu teoremde negatif olmayan a, b, c, e, h sayılarının toplamı 1'den küçüktür ve f fonksiyonu

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq a\,d(x, f(x)) + b\,d(y, f(y)) + c\,d(x, f(y)) \\ &\quad + e\,d(y, f(x)) + h\,d(x, y) \end{aligned}$$

koşulunu sağlar. Burada $c = e = 0$ alınırsa Reich teoremi elde edilir. 1974 yılında Ćirić, genelleştirilmiş büzülmedeki uzaklıkların lineer kombinasyonlarını, maksimumlarıyla değiştirerek sözde büzülme olarak adlandırılan daha genel yeni bir büzülme sınıfı ve sabit nokta teoremi vermiştir [17]. Sabit nokta çalışmaları ile ilgili daha detaylı bilgi için [18]'e bakılabilir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde sonraki bölümlere yardımcı olması açısından 1928 yılında F. Riesz tarafından tanımlanan ve çok sayıda uygulama alanı bulunan, Riesz uzaylarının temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir [19]. Ayrıca tez çalışmasının asıl konusu olan vektör metrik dönüşümü ve vektör metrik uzaylar ile ilgili kavramlar incelenmiştir [20]. Reel değerli klasik metrik dönüşümünün genelleştirilmesi olan vektör metrik dönüşümleri, Riesz uzayında değer alırlar ve reel sayıların alışılmış sıralaması yerine bu Riesz uzayında tanımlanan sıralamayı kullanırlar.

Üçüncü bölüm Banach sabit nokta teoreminin birkaç farklı ispatının verilmesiyle başlayıp Ćirić'in sözde büzülme dönüşümlerine kadar olan metrik uzaylardaki sabit nokta teorinin kısa bir tarihçesini içermektedir [18].

Dördüncü bölümde, Banach sabit nokta teoreminin vektör metrik uzaylardaki [20] ispatından yola çıkarak E-tam vektör metrik uzaylarda Kannan, Chatterjee, Reich, Hardy-Rogers sabit nokta teoremleri ve ispatları ayrıca Ćirić'in sözdebüzülme dönüşümü için verilen sabit nokta teoremi ve ispatı vektör metrik uzaylarda gösterilmiştir. E Arşimedyan Riesz uzayı, (X, d, E) E-tam vektör metrik uzay olmak üzere $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $x \in X$ olduğunda teoremler ve ispatları vektör metrik uzaya uyarlanırken, öncelikle teoremin hipotezinde verilen koşuluna uygun olarak T dönüşümü için $(T^n x)$ dizisinin E-Cauchy olduğu ve daha sonra uzayın E-tamlığı kullanılarak $(T^n x)$ dizisinin E-yakınsadığı bir $z \in X$ elemanının varlığı belirtilip bu E-yakınsanan değerin dönüşümün sabit noktası olduğu ve son olarak da bu sabit noktanın bir tek olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Riesz Uzayları

Bu bölüm Riesz uzayları hakkında bazı temel tanımları ve teoremleri içermektedir. Riesz uzayları hakkında ayrıntılı bilgi için [19]'a bakılabilir.

2.1.1. Tanım

E boş olmayan bir küme olmak üzere E üzerinde tanımlı $\leq$ bağıntısı

i) her $a \in E$ için $a \leq a$
ii) her $a, b \in E$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$
iii) her $a, b, c \in E$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

koşullarını sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına E üzerinde (kısmî) sıralama bağıntısı ve E kümesine de sıralı küme denir. Her $a, b \in E$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ oluyorsa $\leq$ bağıntısına tam sıralama bağıntısı denir.

Örnek

Reel sayılar alışılmış sıralama bağıntısı ile tam sıralı kümedir. $\mathbb{R}^2$ üzerinde, herhangi $a, b \in \mathbb{R}^2$ için $a = (a_1, a_2)$ ve $b = (b_1, b_2)$ olmak üzere

$$a \leq_k b \Leftrightarrow a_1 \leq b_1 \text{ ve } a_2 \leq b_2$$

biçiminde tanımlanan koordinat sıralaması bir kısmî sıralama bağıntısı;

$$a \leq_s b \Leftrightarrow a_1 < b_1 \text{ veya } (a_1 = b_1 \text{ ve } a_2 \leq b_2)$$

biçiminde tanımlanan sözlüksel sıralama bir tam sıralama bağıntısıdır.

2.1.2. Tanım

i) E bir reel vektör uzayı ve $\leq$ bağıntısı E üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. Her $a, b, c \in E$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $a \leq b$ iken $a + c \leq b + c$ ve $\lambda a \leq \lambda b$ oluyorsa E kümesine sıralı vektör uzayı denir.

ii) $(E, \leq)$ sıralı bir küme olmak üzere her $a, b \in E$ için $\sup\{a, b\} = a \vee b \in E$ veya $\inf\{a, b\} = a \wedge b \in E$ ise E kümesine bir latis denir.

iii) Sıralı bir $E = (E, \leq)$ kümesi hem sıralı vektör uzayı hem de latis ise Riesz uzayı veya vektör latis olarak adlandırılır.

Örnek

a) $\mathbb{R}$ alışılmış sıralama ile bir Riesz uzayıdır.

b) $\mathbb{R}^2$ sözlüksel sıralama ve koordinat sıralması ile birer Riesz uzayıdır.

c) X boş olmayan bir küme olmak üzere $F^X = \{f | f : X \to \mathbb{R}\}$ fonksiyonlar kümesi her $f, g \in F^X$ ve her $a \in X$ için

$$f \leq g \Leftrightarrow f(a) \leq g(a)$$

biçiminde tanımlanan sıralama bağıntısı ile Riesz uzayıdır.

2.1.3. Teorem

E Riesz uzayı ve $a, b, c \in E$ olsun. Bu durumda

1) $a \vee b = -[(-a) \wedge (-b)]$ ve $a \wedge b = -[(-a) \vee (-b)]$
2) $a + b = (a \wedge b) + (a \vee b)$
3) $a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c)$ ve $a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c)$
4) Her $\alpha \geq 0$ için $\alpha (a \vee b) = (\alpha a) \vee (\alpha b)$ ve $\alpha (a \wedge b) = (\alpha a) \wedge (\alpha b)$

eşitlikleri sağlanır.

2.1.4. Tanım

E bir Riesz uzayı ve (a_n) E içinde bir dizi olmak üzere $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ ise (a_n) dizisine artan dizi denir ve $a_n \uparrow$ ile gösterilir, (a_n) dizisi artan ve $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = a$ ise $a_n \uparrow a$ ile gösterilir. Benzer biçimde $\cdots \leq a_2 \leq a_1$ ise (a_n) dizisine azalan dizi denir ve $a_n \downarrow$ ile gösterilir, (a_n) dizisi azalan ve $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = a$ ise $a_n \downarrow a$ ile gösterilir.

2.1.5. Tanım

i) E sıralı vektör uzayı ve 0, E'nin sıfır vektörü olmak üzere $a \in E$ için $0 \leq a$ oluyorsa a elemanına pozitif eleman denir ve E kümesinin pozitif kısmı $E^+ = \{a \in E : 0 \leq a\}$ biçiminde gösterilir.

ii) E Riesz uzayı ve $a \in E$ olmak üzere $a \vee 0$ elemanına a'nın pozitif kısmı denir ve a^+ ile; $(-a) \vee 0$ elemanına a'nın negatif kısmı denir ve a^- ile; $a \vee (-a)$ elemanına a'nın modülü denir ve $|a|$ ile gösterilir.

2.1.6. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere her $a \in E^+$ ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{1}{n}a \downarrow 0$ oluyorsa E, Arşimedyan Riesz uzayı olarak adlandırılır.

Örnek

a) $\mathbb{R}^2$ koordinat sıralaması ile Arşimedyan Riesz uzayıdır. Bunu görmek için $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ olmak üzere $(0,0) \leq_k (a_1, a_2) \leq_k (b_1, b_2)$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{R}^2$ seçilsin. Buradan her $n \in \mathbb{N}^+$ için $(0,0) \leq_k (a_1, a_2) \leq_k \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}(b_1, b_2)$ olur. $0 \leq a_1 \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} b_1$ ve $0 \leq a_2 \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} b_2$ eşitsizliklerinden ve $\mathbb{R}$ Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}(b_1, b_2) = (0,0)$ olur ve $a = (0,0)$ bulunur.

b) $\mathbb{R}^2$ sözlüksel sıralama ile Arşimedyan Riesz uzayı değildir. Olsaydı $a = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

olmak üzere her $n \in \mathbb{N}^+$ için $(0,0) \leq_s (0,1) \leq_s \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ olurdu ve $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}x = (0,0)$ olması bu durum ile çelişirdi.

2.1.7. Tanım

E Arşimedyan Riesz uzayı, (b_n) E içinde bir dizi ve $b \in E$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için eğer $|b_n - b| \downarrow a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi varsa (b_n) dizisi b noktasına sıra (order) yakınsak veya o-yakınsak denir ve $b_n \xrightarrow{o} b$ ile gösterilir. Ayrıca her $n, p \in \mathbb{N}$ için eğer $|b_n - b_{n+p}| \leq a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi varsa (b_n) dizisine order Cauchy veya o-Cauchy dizisi denir. Eğer E Riesz uzayında her o-Cauchy dizisi o-yakınsak ise E, o-tam Riesz uzayı olarak adlandırılır.

2.1.8. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı $(a_n) \subset E$ bir dizi ve $a, b \in E$ olmak üzere aşağıdaki önermeler gerçeklenir.

1) $a_n \xrightarrow{o} a$ ve $a_n \xrightarrow{o} b$ ise $a = b$
2) $a_n \downarrow a$ (veya $a_n \uparrow a$) ise $a_n \xrightarrow{o} a$
3) $a_n \uparrow$ (veya $a_n \downarrow$) ve $a_n \xrightarrow{o} a$ ise $a_n \uparrow a$ (veya $a_n \downarrow a$)
4) Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $(a_n) \subset E$ için $a_n \xrightarrow{o} a$ ve $b_n \xrightarrow{o} b$ olmak üzere
i) $\alpha a_n + \beta b_n \xrightarrow{o} \alpha a + \beta b$
ii) $a_n \vee b_n \xrightarrow{o} a \vee b$ ve $a_n \wedge b_n \xrightarrow{o} a \wedge b$
iii) $(a_n)^+ \xrightarrow{o} a^+$, $(a_n)^- \xrightarrow{o} a^-$ ve $|a_n| \xrightarrow{o} |a|$.

2.2. Vektör Metrik Uzaylar

Bu bölümde reel değerli olan klasik metrik dönüşümü yerine Riesz uzayı değerli vektör metrik dönüşümünü inceleyeceğiz. Reel sayılardaki alışılmış sıralama yerine vektör metrik dönüşümünün tanımlı olduğu Riesz uzayının sıralama bağıntısını kullanacağız. Bu bölüm [20] ve [21] çalışmaları esas alınarak oluşturulmuştur.

2.2.1. Tanım

X boş olmayan bir küme, E bir Riesz uzayı ve $d : X \times X \to E$ bir dönüşüm olmak üzere d dönüşümü

vm1) Her $a, b \in X$ için $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$
vm2) Her $a, b, c \in X$ için $d(a,b) \leq d(a,c) + d(b,c)$

koşullarını sağlıyorsa vektör metrik veya E-metrik, (X, d, E) üçlüsü de vektör metrik uzay olarak adlandırılır.

Vektör metrik uzay için negatif olmama ve simetri özelliği vm1) ve vm2) yardımıyla görülebilir.

2.2.2. Teorem

E vektör metrik uzay olmak üzere her $a, b, c, d \in E$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $0 \leq d(a,b)$;
2) $d(a,b) = d(b,a)$;
3) $|d(a,c) - d(b,c)| \leq d(a,b)$;
4) $|d(a,c) - d(b,d)| \leq d(a,b) + d(c,d)$.

Örnek

a) E bir Riesz uzayı olmak üzere $d(a,b) = |a-b|$ biçiminde tanımlanan $d : E \times E \to E$

dönüşümü bir vektör metriktir.

b) $\mathbb{R}^2$, sözlüksel sıralama $\leq_s$ ve koordinat sıralaması $\leq_k$ ile Riesz uzayı olmak üzere her $a, b \in \mathbb{R}^2$ ve herhangi α, β pozitif reel sayıları için

$$d\left(\left(a_1, a_2\right), \left(b_1, b_2\right)\right) = \left(\alpha \left|a_1 - b_1\right|, \beta \left|a_2 - b_2\right|\right)$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü vektör metriktir.

c) Herhangi $0 \leq \alpha, \beta$ sayıları için $\alpha + \beta > 0$ iken

$$d\left(a, b\right) = \left(\alpha \left|a - b\right|, \beta \left|a - b\right|\right)$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü vektör metriktir.

2.2.3. Tanım

(X, d, E) bir vektör metrik uzay olmak üzere (x_n) X içinde bir dizi ve $x \in X$ olsun.

i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $d\left(x_n, x\right) \leq a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi varsa (x_n) dizisi x elemanına vektörel yakınsak veya E-yakınsak denir ve $x_n \stackrel{d,E}{\to} x$ biçiminde gösterilir.

ii) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d\left(x_n, x_{n+p}\right) \leq a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi varsa (x_n) dizisine E-Cauchy denir.

iii) X vektör metrik uzayındaki her E-Cauchy dizisi X içinde E-yakınsak ise (X, d, E) üçlüsüne E-tam vektör metrik uzay denir.

2.2.4. Teorem

(X, d, E) vektör metrik uzay, (x_n) X içinde bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere $x_n \stackrel{d,E}{\to} x$ ise aşağıdaki önermeler sağlanır.

1) Dizinin yakınsadığı x elemanı tektir.

2) (x_n) dizisinin her alt dizisi de x elemanına yakınsar.

3) (y_n) X içinde bir dizi ve $y_n \overset{d,E}{\to} y$ ise $d(x_n, y_n) \overset{o}{\to} d(x, y)$

İspat

$x_n \overset{d,E}{\to} x$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \leq a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır.

1) Limitin tek olduğunu göstermek için dizinin yakınsadığı başka bir değer olduğunu kabul edelim. $y \in X$ ve $x \neq y$ olmak üzere $x_n \overset{d,E}{\to} y$ olsun. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, y) \leq b_n$ ve $b_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (b_n) dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için vm2) özelliğinden $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y, x_n) \leq (a_n + b_n)$ ve $(a_n + b_n) \downarrow 0$ olup vm1) özelliğinden $x = y$ olarak bulunur.

2) Her $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisinin herhangi bir alt dizisi olan (x_{n_k}) dizisi için $d(x_{n_k}, x) \leq a_{n_k}$ ve $a_{n_k} \downarrow 0$ sağlanır. Bu ise $x_{n_k} \overset{d,E}{\to} x$ olmasıdır.

3) $y_n \overset{d,E}{\to} y$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $d(y_n, y) \leq b_n$ ve $b_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (b_n) dizisi vardır. Burada $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \leq (a_n + b_n)$ yazılır ve $(a_n + b_n) \downarrow 0$ olduğundan $d(x_n, y_n) \overset{o}{\to} d(x, y)$ elde edilir.

2.2.5. Tanım

(X, d, E) vektör metrik uzay olmak üzere A, X'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq a$ olacak biçimde $a \in E$ elemanı varsa A kümesine E-sınırlı denir.

2.2.6. Teorem

(X, d, E) vektör metrik uzay olsun. Bu durumda

1) Her E-yakınsak dizi E-Cauchy dizisidir.

2) Her E-Cauchy dizisi E-sınırlıdır.

3) Herhangi bir $x \in X$ olmak üzere (x_n) X içinde bir E-Cauchy dizisi, (x_{n_k}) de bu dizinin bir alt dizisi olsun. $x_{n_k} \overset{d,E}{\to} x$ ise $x_n \overset{d,E}{\to} x$ olur.

4) (x_n) ve (y_n) E-Cauchy dizileri ise $(d(x_n, y_n))$ bir o-Cauchy dizisidir.

İspat

1) Herhangi bir $x \in X$ için (x_n) X içinde x elemanına E-yakınsak bir dizi olsun. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \leq a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır. Her $n, p \in \mathbb{N}$ için vm2) özelliğinden $d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x) + d(x_{n+p}, x) \leq 2a_n \downarrow 0$ yazılır ve bu ise (x_n) dizisinin E-Cauchy dizisi olmasıdır.

2) X içinde (x_n) bir E-Cauchy dizisi ise her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$ ve $(a_n) \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için (a_n) dizisi azalan bir dizi olduğundan $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_1$ olacak biçimde $a_1 \in E^+$ vardır ve (x_n) dizisi E-sınırlı bulunur.

3) X içinde bir (x_n) E-Cauchy dizisinin $x_{n_k} \overset{d,E}{\to} x$ olacak biçimde bir alt dizisi (x_{n_k}) olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için ve $n \leq n_k$ iken $n_k = n + p$ olsun. Buradan her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$ ve $(a_n) \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır. Bu durumda $d(x_{n_k}, x) = d(x_{n+p}, x) \leq b_n$ ve $b_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (b_n) dizisi vardır. Dolayısıyla $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x) \leq (a_n + b_n)$ ve $(a_n + b_n) \downarrow 0$ olduğundan $x_n \overset{d,E}{\to} x$ bulunur.

4) (x_n) bir E-Cauchy dizisi olduğundan her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$ ve $(a_n) \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır. Benzer biçimde (y_n) bir E-Cauchy dizisi olduğundan her $n, p \in \mathbb{N}$ için $d(y_n, y_{n+p}) \leq b_n$ ve $(b_n) \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (b_n)

dizisi vardır. Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$|d(x_n, y_n) - d(x_{n+p}, y_{n+p})| \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(y_n, y_{n+p}) \leq (a_n + b_n)$$

ve $(a_n + b_n) \downarrow 0$ bulunur. Bu ise $(d(x_n, y_n))$ dizisinin o-Cauchy dizisi olmasıdır.

Açıkça görülebileceği gibi vektör metrik dönüşümün tanımlı olduğu E Riesz uzayı yerine $\mathbb{R}$ alınırsa vektör metrik ve metrik dönüşümleri aynı olur. Dolayısıyla E-yakınsama ile yakınsaklık kavramı; E-Cauchy dizisi ve Cauchy dizisi kavramı aynı olur. Benzer biçimde X, Riesz uzayı olarak ve vektör metrik dönüşümü de X üzerinde mutlak değer vektör metrik alınırsa E-yakınsaklık ve o-yakınsaklık aynı olur.

2.2.7. Tanım

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve $x \in X$ olsun. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere

i) Herhangi bir $y \in X$ ve her $b \in F^+$ için $d(x, y) < a$ iken $\rho(f(x), f(y)) < b$ olacak biçimde $a \in E$ varsa f fonksiyonuna x noktasında topolojik sürekli denir. Her $x \in X$ noktasında f fonksiyonu topolojik sürekli ise X üzerinde topolojik süreklidir denir.

ii) X içindeki bir (x_n) dizisi için $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken $f(x_n) \overset{\rho,F}{\to} f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna x noktasında vektörel sürekli veya (E, F)-sürekli denir. Her $x \in X$ noktasında f fonksiyonu vektörel sürekli ise X üzerinde vektörel süreklidir denir.

2.2.8. Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) iki vektör metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere F Arşimedyan Riesz uzayı olduğunda f topolojik sürekli ise vektörel süreklidir.

İspat

Herhangi bir $x \in X$ elemanına X içinde E-yakınsak bir (x_n) dizisi var olsun. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \leq a_n$ ve $(a_n) \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır. Herhangi bir $b \in F^+$ için f fonksiyonunun x noktasında topolojik süreklilik tanımından $y \in X$ ve $d(x, y) < a$ iken $\rho(f(x), f(y)) < b$ olacak biçimde $a \in E$ vardır. Burada her $n \in \mathbb{N}$ ve $\frac{1}{n}b \in F^+$ için $b_n = b_n((1/n)b; x_n)$ biçiminde seçilirse $d(x_n, x) < b_n$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) < \frac{1}{n}b$ olacak biçimde E içinde (b_n) dizisi vardır. E Riesz uzayında her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n = a_n \vee b_n$ olacak biçimde E içinde (c_n) dizisi vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \leq a_n < c_n$ olduğundan $\rho(f(x_n), f(x)) < \frac{1}{n}b$ sağlanır. F Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $\left(\frac{1}{n}b\right) \downarrow 0$ bulunur ve f fonksiyonu x noktasında vektörel sürekli olur. Bu nokta keyfi olarak seçildiğinden f fonksiyonu X üzerinde vektörel süreklidir.

3. SABİT NOKTA TEORİ

Bu bölüm, Banach büzülme ilkesi ve birkaç farklı ispatının verilmesiyle başlayıp Ćirić'in sözdebüzülme dönüşümlerine kadar olan sabit nokta teorinin kısa bir tarihçesini sunarak bu teorinin önemli sonuçlarından bazılarını içermektedir.

3.1. Banach Büzülme İlkesi

Burada genellikle Banach büzülme ilkesi olarak bilinen, ünlü Banach sabit nokta teoremi incelenmiştir.

3.1.1. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq q\, d\left(x, y\right)$$

olacak biçimde $q \in [0, 1)$ sayısı varsa f fonksiyonu büzülme dönüşümü veya q-büzülme olarak adlandırılır.

Büzülme koşulunu sağlayan her fonksiyon süreklidir. Ancak sürekli olan her fonksiyonun sabit noktası olmayabilir.

Örnek

$X = (0, \infty)$ ve $f : X \to X$ olmak üzere her $x \in X$ için $f\left(x\right) = \dfrac{x}{2}$ biçiminde tanımlanan sürekli fonksiyonun sabit noktası yoktur.

Stefan Banach tarafından 1922 yılında yayımlanan makale, metrik uzaylarda sabit nokta teorisinin başlangıcıdır. Bu makalede verilen Banach büzülme ilkesi, tam metrik uzay üstündeki herhangi bir büzülme dönüşümünün sabit noktasının varlığını ve tek olduğunu ispatlar [1].

3.1.2. Teorem

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun X içinde bir tek z sabit noktası vardır.

İspat

Herhangi bir $x_0 \in X$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f(x_{n-1})$ biçimde (x_n) dizisini tanımlayalım. İlk önce (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq q\, d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq q^2\, d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\leq \cdots \\ &\leq q^n\, d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

yazılır ve $n, m \in \mathbb{N}$ için $n < m$ iken

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} q^n\, d(x_0, x_1) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \tag{3.1}$$

sağlanır. $0 \leq q < 1$ olduğundan $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ olur ve böylece (x_n) bir Cauchy dizisi bulunur. X tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Şimdi $f(z) = z$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq d(x_n, f(z)) = d(f(x_{n-1}), f(z)) \leq q\, d(x_{n-1}, z)$$

olduğundan ve metrik dönüşümünün sürekliliğinden $\lim_{n\to\infty} d(x_n, f(z)) = 0$ olur. Metrik uzaylarda yakınsak dizinin bir tek limiti olduğundan $f(z) = z$ olur. Son olarak sabit noktanın bir tek olduğunu gösterelim. $f(y) = y$ ve $y \neq z$ olsun. Bu durumda $d(z, y) = d(f(z), f(y)) \leq q\, d(z, y)$ olup $(1-q)\, d(z, y) \leq 0$ ve $0 \leq q < 1$ olduğundan $d(z, y) = 0$ burada $z = y$ bulunur.

3.1.3. Sonuç

(X,d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ fonksiyonu bir büzülme dönüşümü ve sabit noktası $z \in X$ olsun.

1) Her $x \in X$ için $(f^n(x))$ dizisi yakınsaktır ve z noktasına yakınsar;

2) $d(x,z) \leq \dfrac{1}{1-q} d(x, f(x))$;

3) $d(f^n(x), z) \leq \dfrac{q^n}{1-q} d(x, f(x))$;

4) $d(f^{n+1}(x), z) \leq q\, d(x, f(x))$;

5) $d(f^{n+1}(x), z) \leq \dfrac{q}{1-q} d(f^n(x), f^{n+1}(x))$.

İspat

Sadece (2) ve (3) ispatını vereceğiz, diğerleri basit olarak yapılabilir.
2)

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \lim_{n\to\infty} d(x, f^n(x)) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} d\left(f^k(x), f^{k+1}(x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d\left(f^k(x), f^{k+1}(x)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k\, d(x, f(x)) \\ &= \frac{1}{1-q} d(x, f(x)) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

3) $f(z) = z$ olduğundan $f^n(z) = z$ olur ve ispatın ilk kısmı kullanılarak

$$d(f^n(x), z) = d(f^n(x), f^n(z)) \leq q^n\, d(x,z) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, f(x))$$

bulunur.

3.1.4. Sonuç

Banach sabit nokta teoreminin ispatı için çeşitli yaklaşımlar vardır. Bu teoremin yukarıdaki ispatı büzülme dönüşümü için sabit noktanın nasıl bulunacağının bir yöntemini verir. Bu yöntem, Picard iterasyon yöntemi veya sabit nokta iterasyonu olarak da bilinir. İterasyon dizisinin tanımına bağlı olan bu yöntemde herhangi bir $x_0 \in X$ alıp $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f(x_{n-1})$ tanımlanır. İspat, $\lim_{n\to\infty} x_n = z \in X$ limitinin varlığını garantiler ve bu durumda $f(z) = z$ olur. Ayrıca (3.1) eşitsizliğinde $m \to \infty$ iken

$$d(x_n, z) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$$

olur ve bu n. iterasyon (x_n) tarafından z çözümüne yaklaşırken yapılan hata için bir tahmindir.

Teorem 3.1.2 için birkaç farklı ispat yöntemi verelim.

İspat (Joseph ve Kwack [2])

$c = \inf\{d(x, f(x)) : x \in X\}$ olsun. $c > 0$ iken $\frac{c}{q} > c$ olur ve $x \in X$ için büzülme dönüşümü tanımında y yerine $f(x)$ yazılırsa

$$d(f(x), f(f(x))) \leq q\, d(x, f(x)) < c$$

bulunur. Burada f bir büzülme olduğundan $c = 0$ olmalıdır. $n \to \infty$ iken $d(x_n, f(x_n)) \to 0$ olacak biçimde X içinde (x_n) dizisi ve üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_m)) + d(f(x_m), x_m)$$

yazılır ve f fonksiyonunun büzülme tanımından

$$(1-q)\, d(x_n, x_m) \leq d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_m), x_m)$$

elde edilir. Böylece (x_n) bir Cauchy dizisidir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = 0$ yani $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z$ olur. Yine büzülme tanımından $d(f(x_n), f(z)) \leq qd(x_n, z)$ olup metrik dönüşümünün sürekliliğinden $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(z)$ bulunur. f fonksiyonunun büzülme koşulundan sabit noktanın tekliği gösterilir.

İspat (Palais [3])

Herhangi $x_1, x_2 \in X$ için üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), x_2)$$

yazılır. Büzülme dönüşümü tanımından

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_2), x_2) + q\, d(x_1, x_2)$$

bulunur ve düzenlenirse

$$(1-q)\ d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_2), x_2)$$

elde edilir. Yani her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1-q}\left[d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_2), x_2)\right] \tag{3.2}$$

sağlanır. Burada x_1, x_2 noktaları f fonksiyonunun sabit noktaları ise (3.2) eşitsizliğinden $x_1 = x_2$ bulunur yani, büzülme dönüşümünün en fazla bir sabit noktası vardır. Herhangi $x \in X$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ için (3.2) eşitsizliğinde sırasıyla x_1 yerine $f^n(x)$ ve x_2 yerine $f^m(x)$ yazarsak

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq \frac{1}{1-q}\left[d(f^n(x), f(f^n(x))) + d(f^m(x), f(f^m(x)))\right] \\ &\leq \frac{q^n + q^m}{1-q}\, d(x, f(x)) \end{aligned}$$

elde edilir ve $0 \leq q < 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olur. Buradan $m, n \to \infty$ iken $d(f^n(x), f^m(x)) = 0$ bulunur yani $(f^n(x))$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır ve f fonksiyonunun sürekliliğinden $f(z) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = z$ elde edilir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte $m \to \infty$ iken

$$d(f^n(x), z) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, f(x))$$

sağlanır.

İspat (Boyd ve Wong [7])

Herhangi bir $x \in X$ için $\varphi(x) = d(x, f(x))$ olarak tanımlansın. f büzülme dönüşümü olduğundan $\varphi : X \to X$ süreklidir ve $n \to \infty$ iken $\varphi(f^n(x)) \to 0$ olur. Her $x \in X$ için

$$C_m = \left\{ x \in X : \varphi(x) \leq \frac{1}{m} \right\}$$

alınırsa yukarıdaki koşullardan her $m = 1, 2, \cdots$ için C_m kümesinin, X'in boş olmayan ve kapalı alt kümesi olduğu çıkar. C_m kümesinin çapını belirlemek için, her $x, y \in C_m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \\ &\leq \frac{2}{m} + q\, d(x,y) \end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$d(C_m) \leq \frac{2}{m\,(1-q)}$$

bulunur. Her C_m kümesi X kümesinin boş olmayan , kapalı bir alt kümesi olduğundan $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ ve $m \to \infty$ iken $d(C_m) \to 0$ olur. Cantor kesişim teoreminden $\bigcap_m C_m = \{\xi\}$ elde edilir. Her bir m için $f(C_m) \subset C_m$ olduğundan $f(\{\xi\}) = f(\bigcap_m C_m) \subset \bigcap_m f(C_m) \subset \bigcap_m C_m = \{\xi\}$ sağlanır ve f fonksiyonunun sabit noktası ξ olur. Sabit noktanın tek olduğu açıktır. Her $x, y \in X$ ve $n \to \infty$ iken

$$d\left(f^n(x), \xi\right) = d\left(f^n(x), f^n(\xi)\right) \leq q^n\, d(x, \xi) \to 0$$

olduğundan

$$d(x, \xi) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(\xi)) \leq d(x, f(x)) + q\, d(x, \xi)$$

olup buradan

$$d(x, \xi) \leq \frac{1}{1-q}\, d(x, f(x))$$

elde edilir. Kümenin çapı için bulunanlar birleştirilirse

$$d\left(f^n(x), \xi\right) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x, f(x))$$

bulunur.

3.1.5. Sonuç

(X, d) bir tam metrik uzay, $S \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $f : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Herhangi $x_0 \in S$ noktası için $n \in \mathbb{N}$ iken $x_n = f(x_{n-1})$ biçiminde tanımlanan iterasyon dizisi, f fonksiyonunun sabit noktasına yakınsar.

Aşağıdaki örnek S kapalı olmazsa Sonuç 3.1.5'in gerçeklenmediğini gösterir.

Örnek

$\mathbb{R}$ üstündeki alışılmış metrik d olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ ve $S = B_0(1) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ açık yuvar olmak üzere, $f : S \to S$ olsun. Her $x \in S$ için $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$ fonksiyonu bir büzülme dönüşümüdür ancak f fonksiyonunun S yuvarında sabit noktası yoktur.

Banach sabit nokta teoreminin çeşitli uygulama alanları vardır.

Örnek

X Banach uzayı, $A, B \in \mathcal{B}(X)$ olmak üzere A tersinir bir operatör ve $\|B-A\| \, \|A^{-1}\|^{-1} < 1$ ise Banach sabit nokta teoreminden B operatörü tersinirdir.

İspat

Bu örneği ispatlarken herhangi bir $y \in X$ için $Bx = y$ denkleminin tek bir $x \in X$ çözümü olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $y \in X$ verilsin ve $x_0 \in X$ için $Bx_0 = y$ ise

$$y = Bx_0 = (B-A)\,x_0 + Ax_0 \text{ ve } A^{-1}y = A^{-1}(B-A)\,x_0 + x_0$$

bulunur. Burada $z = A^{-1}y$ ve $C = A^{-1}(B-A)$ alınırsa $x_0 = z - Cx_0$ olur. Gösterilmesi gereken her $x \in X$ için $f(x) = z - Cx$ biçiminde tanımlanan $f : X \to X$ dönüşümünün bir büzülme ve sabit noktasının da x_o olduğudur. Aşağıdaki eşitsizlik her $x \in X$ için sağlanır.

$$\|f(x) - f(y)\| = \|C(x-y)\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \, \|B-A\| \, \|x-y\| .$$

$\|A^{-1}\| \, \|B-A\| < 1$ olduğundan f bir büzülmedir ve f fonksiyonunun tek sabit noktası x_0 olur. $(f^n(x))$ iterasyon dizisinin birkaç farklı elemanına dayanarak

$$z - Cx,\; z - C(z - Cx) = z - Cx + C^2x,\; z - Cx + C^2x + C^3x, \cdots$$

yazılabir. $\|C\| < 1$ olduğundan dolayı bu dizinin $z - Cx + C^2x + C^3x + \cdots$ elemanına yakınsak olduğu gösterilebilir. Ayrıca $A = I$ ve $\|C\| < 1$ ise $I - C + C^2 - C^3 + \cdots$ elemanının $I + C$'nin tersi olduğu elde edilir.

Aşağıdaki sonuç f^n fonksiyonunu bir büzülme dönüşümü olduğunda f fonksiyonu ile ilişkisini gösterir.

3.1.6. Sonuç (Bryant [22])

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Herhangi $n \geq 1$ için f^n fonksiyonu bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun X içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Banach sabit nokta teoreminden $f^n(z) = z$ olacak biçimde bir tek $z \in X$ vardır ve $f^n(f(z)) = f(f^n(z)) = f(z)$ olduğundan $f(z) = z$ olur buradan f fonksiyonunun her sabit noktası aynı zamanda f^n dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Dolayısıyla f fonksiyonunun bir tek sabit noktası z olur.

Sonuç 3.1.6'de verilen fonksiyonun sürekli olması gerekmez.

Örnek (Bryant [22])

$f : [0, 2] \to [0, 2]$ olmak üzere f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0, 1) \\ 2 & , \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Herhangi $x \in [0, 2]$ için $f^2(x) = 2$ ve $f^2 : [0, 2] \to [0, 2]$ bir büzülme dönüşümüdür ancak f fonksiyonu sürekli değildir.

Banach büzülme ilkesi, herhangi bir $x \in X$ noktası için bir iterasyon dizisine bağlı olduğundan aşağıdaki teorem sadece açık yuvar üstünde ilgili fonksiyonu tanımlamamıza olanak sağlar.

3.1.7. Teorem

(X, d) tam metrik uzay ve $x_0 \in X$ ve $r > 0$ için $B_r(x_0)$ X kümesinde açık yuvar ve

$f : X \to X$ bir büzülme olsun. Yani $q \in [0, 1)$ ve her $x, y \in B_r(x_0)$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y) \tag{3.3}$$

ve

$$d(f(x_0), x_0) < (1 - q)\, r \tag{3.4}$$

oluyorsa f fonksiyonunun $B_r(x_0)$ içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

(3.4) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $r_0 \in [0, r)$ seçilsin. $B_{r_0}(x_0)$ kümesinin kapanışı $\bar{B}_{r_0}(x_0)$ olmak üzere $f : \bar{B}_{r_0}(x_0) \to \bar{B}_{r_0}(x_0)$ olduğunu göstermek için her $x \in \bar{B}_{r_0}(x_0)$ iken

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq q\, d(x, x_0) + (1 - q)\, r_0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece f fonksiyonunun bir $z \in \bar{B}_{r_0}(x_0)$ sabit noktası vardır. (3.3) eşitsizliğinden f fonksiyonunun $B_r(x_0)$ kümesindeki tek sabit noktasının z olduğu gösterilebilir.

3.2. Edelstein Sonuçları

1962 yılında Edelstein, büzülme dönüşümü koşulundaki q sabitini 1 alarak tanımladığı büzülebilir dönüşümlerin sabit noktalarını incelediği bir makale yayımladı [5]. Bu çalışmasından bazı teoremler aşağıda verilmiştir.

Tam metrik uzay üstündeki $f : X \to X$ fonksiyonu, $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(f(x), f(y)) < \lambda\, d(x, y)$$

koşulunu sağladığında Banach büzülme ilkesi, f fonksiyonunun sabit noktasının varlığını ve tekliğini garantiler.

Özel olarak $\lambda = 1$ alınırsa, bu koşul büzülebilir dönüşümü verir; yani her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) < d\left(x, y\right) \tag{3.5}$$

oluyor ise f fonksiyonuna büzülebilir dönüşüm denir.

3.2.1. Teorem (Edelstein [5])

X metrik uzay ve $f : X \to X$ fonksiyonu büzülebilir bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $f^n(x)$ iterasyon dizisinin yakınsak bir $f^{n_k}(x)$ alt dizisi varsa, $u = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}\left(x\right) \in X$ elemanı f fonksiyonunun bir tek sabit noktasıdır. Ayrıca $u = \lim_{n\to\infty} f^{n}\left(x\right)$ sağlanır.

3.2.2. Teorem (Edelstein [5])

(X, d) kompakt metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ iken

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) < d\left(x, y\right)$$

sağlanırsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

3.3. Rakotch Sonuçları

1962 yılında H. Hanani ve Rakotch büzülebilir dönüşümler için tanımladıkları fonksiyonlar ailesi yardımıyla, sabit nokta teori çalışmalarının ve bazı sonuçlarının yer aldığı bir makale yayımlamışlardır [6].

3.3.1. Tanım

(X, d) metrik uzay olsun. Aşağıdaki

i) $\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y))$, yani α sadece x ve y arasındaki uzaklığa bağlı;
ii) $x \neq y$ iken $0 \leq \alpha(d(x, y)) < 1$;
iii) $\alpha(d)$, d dönüşümünün monoton azalan bir fonksiyonu

şartlarını sağlayan tüm $\alpha(x, y)$ fonksiyonlarının ailesini $\mathcal{F}_1$ ile gösterelim.

3.3.2. Teorem

(X, d) metrik uzay $f : X \to X$ fonksiyonu büzülebilir dönüşüm olmak üzere $M \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X \backslash M$ için

$$d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) \geq 2d(x_0, f(x_0))$$

sağlanır ve $f(M)$ görüntü kümesi X kümesinin kompakt bir alt kümesi olursa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

3.3.3. Teorem

(X, d) tam metrik uzay $f : X \to X$ büzülebilir bir dönüşüm olmak üzere $M \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X \backslash M$ için

$$d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) \geq 2d(x_0, f(x_0))$$

ve her $x \in X$ için ve $\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y)) \in \mathcal{F}_1$ iken

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y)\, d(x, y)$$

oluyorsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Özel olarak $M = X$ ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.4. Sonuç

(X, d) tam metrik uzay, her $x, y \in X$ için ve $\alpha(x, y) \in \mathcal{F}_1$ iken

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y)\ d(x, y)$$

oluyorsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

3.3.5. Sonuç

Teorem 3.3.3 ve Sonuç 3.3.4, Banach sabit nokta teoreminin genelleştirilmesidir.

3.4. Boyd ve Wong'un Nonlineer Büzülmesi

Boyd ve Wong 1969 yılında aşağıda tanımlanan tipteki dönüşümlerin sabit noktalarını inceledikleri bir makale yayımladılar [7]. Burada bu çalışmalarındaki bazı teorem ve örneklere yer verilmiştir.

3.4.1. Tanım

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \Psi(d(x, y)) \tag{3.6}$$

(Ψ, d dönüşümünün görüntü kümesinin kapanışında tanımlı bir fonksiyon.) koşulunu sağlayan f fonksiyonununa Ψ-büzülme dönüşümü denir.

d dönüşümünün görüntü kümesini P ile, P kümesinin kapanışını da $\bar{P}$ ile gösterelim. Buradan $P = \{d(x, y) : x, y \in X\}$ yazılır.

Rakotch, [6]'de α azalan bir fonksiyon ve her $t > 0$ için $\alpha(t) < 1$ iken $\Psi(t) = \alpha(t)\ t$

ise, (3.6) eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonunun bir tek u sabit noktasının olduğunu ispatlamıştır. α artan bir fonksiyon ve her $t \geq 0$ için $\alpha(t) < 1$ iken $\Psi(t) = \alpha(t)\, t$ ise Banach teoreminin sonucunun sağlandığı görülebilir. Boyd ve Wong, Ψ fonksiyonun yarı-sürekli ve her $t \geq 0$ için $\Psi(t) < t$ olduğunu göstermenin yeterli olduğunu ispatlayıp ayrıca metrik uzay konveks ise son koşul çıkarılabileceğini göstermiştir.

(Üst yarı-süreklilik: $E \subset \mathbb{R}$ ve $\varphi : X \to E$ bir fonksiyon olmak üzere $t_0 \in X$, $t_n \to t_0^+$ iken $\limsup_{n\to\infty} \varphi(t_n) \leq \varphi(t_n)$ ise φ fonksiyonu t_0 noktasında sağdan üst yarı süreklidir denir.)

3.4.2. Teorem

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ fonksiyonu Ψ-büzülme olsun. $\Psi : \bar{P} \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\bar{P}$ üzerinde sağdan üst yarı süreklidir ve her $t \in \bar{P} \setminus \{0\}$ için $\Psi(t) < t$ ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası x_0 vardır ve her $x \in X$ için $n \to \infty$ iken $f^n(x) \to x_0$ olur.

Teorem 3.4.2'de Ψ fonksiyonu sürekli olmazsa teorem genelde sağlanmaz.

Örnek

$X = \left\{x_n = n\sqrt{2} + 2^n;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$ ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ verilsin. $X \subset \mathbb{R}$ kapalı alt kümesi tamdır. Herhangi bir $p \in P$ ve $p \neq 0$ iken $p = d(x_n, x_m)$ olacak biçimde tek türlü belirli (x_n, x_m) ikilisi vardır. Öyle j, k, m, n tam sayıları için $j > k$ ve $m > n$ iken

$$d(x_j, x_k) = d(x_m, x_n)$$

olsun. Buradan

$$-(m - n - j + k)\sqrt{2} = 2^j - 2^k - 2^m + 2^n \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) eşitsizliğinde sağ taraf rasyonel veya sıfır, sol taraf da irrasyonel veya sıfır olduğundan eşitliğin sağlanması için iki tarafın da sıfır olması gerekir. Burada $m - n = j - k = s$ için

$$2^{n+s} - 2^n = 2^{k+s} - 2^k$$

bulunur ve bu durum sadece $n = k$ olması ile mümkündür. Burada $f(x_n) = x_{n-1}$ olacak biçimde f fonksiyonunu ve P üstünde Ψ fonksiyonunu $p = |x_n - x_m|$ ise $\Psi(p) = |x_{n-1} - x_{m-1}|$ biçiminde tanımlayalım. Herhangi bir $p \in \bar{P} \backslash P$ için $\Psi(p) = 0$ alalım. Her $t \in \bar{P} \backslash \{0\}$ için $\Psi(t) < t$ ve

$$d(f(x), f(y)) = \Psi(d(x, y))$$

elde ederiz. Ancak f fonksiyonunun sabit noktası yoktur.

Teorem 3.4.2'da Ψ fonksiyonu $\bar{P}$ kümesi yerine P üstünde tanımlansaydı $\bar{P}$ kümesine genişletilemezdi. Yukarıdaki örnekte $\sqrt{2} \in \bar{P} \backslash P$ elemanı için bu durum görülebilir.

Teorem 3.4.2'daki her $t \in \bar{P} \backslash \{0\}$ için $\Psi(t) < t$ yerine bir $t_0 \in X$ için $\Psi(t_0) = t_0$ getirilirse teorem sağlanmaz.

Örnek

$X = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ olsun. Ayrıca

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & , \quad x \geq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & , \quad x \leq -1 \end{cases} \quad \text{ve } f_2(x) = -f_1(x)$$

fonksiyonlarını alalım. Ψ fonksiyonunu

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & , \quad t < 2 \\ \frac{1}{2}t + 1 & , \quad t \geq 2 \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Burada f_1 ve f_2 fonksiyonları (3.6) eşitsizliğini sağlar. Tanımlanan Ψ fonksiyonu Teorem 3.4.2'i sağlamasına rağmen $\Psi(2) = 2$ olur. Burada f_1 fonksiyonun -1 ve 1 olmak üzere iki sabit noktası vardır ve f_2 fonksiyonunun ise sabit noktası yoktur.

Teorem 3.4.2 Rakotch Teoreminin genelleştirilmesidir.

Örnek

$X = [0,1] \cup \{2,3,4,\cdots\}$ kümesi

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & , \quad x,y \in [0,1] \text{ ise} \\ x+y & , \quad \text{en az biri } x,y \notin [0,1] \text{ ise} \end{cases}$$

metriği ile tam metrik uzay olmak üzere. $f : X \to X$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}x^2 & , \quad x \in [0,1] \\ x-1 & , \quad x = 2,3,\cdots \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlansın. Burada $x - y = t > 0$ için $x,y \in [0,1]$ ise

$$d(f(x), f(y)) = f(x) + f(y) < x - 1 + y = d(x,y) - 1$$

elde edilir ve ayrıca Ψ fonksiyonunu

$$\Psi(t) = \begin{cases} t - \dfrac{1}{2}t^2 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & , \quad 1 < t < \infty \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Bu Ψ fonksiyonu $[0,\infty)$ kümesinde sağdan üst yarı süreklidir. Her $t > 0$ için $\Psi(t) < t$ olur ve (3.6) eşitsizliğini sağlar.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(f(n),0)}{d(n,0)} = 1$$

olduğundan her $t > 0$ için $\alpha(t) < 1$ olup azalan olacak biçimde Sonuç 3.3.4'ı sağlayan bir α fonksiyonu yoktur. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(f(x), 0)}{d(x, 0)} = 1$$

olduğundan her $t > 0$ için $\alpha(t) < 1$ olup artan olacak biçimde Sonuç 3.3.4'ı sağlayan bir α fonksiyonu yoktur.

3.5. Meir-Keeler Teoremi

Meir ve Keeler 1969 yılında ispatladıkları teoremle, Banach sabit nokta teoremindeki büzülme şartını daha genel bir sınıfa taşımışlardır [8]. Burada bu çalışmadan bazı sonuçlara yer verilmiştir.

3.5.1. Tanım

(X, d) metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \text{ iken, } d(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{3.8}$$

olacak biçimde en az bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna zayıf düzgün kesin büzülme veya Meir-Keeler büzülme (MK büzülme) denir.

3.5.2. Teorem (Meir-Keeler [8])

(X, d) tam metrik uzay olmak üzere $f : X \to X$ fonksiyonu MK büzülme ise f fonksiyonunun bir tek z sabit noktası vardır. Ayrıca her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z$ olur.

İspat

Bir f fonksiyonu MK-büzülme tanımından dolayı $x \neq y$ iken

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağladığından büzülebilir bir dönüşümdür. Buradan f fonksiyonunun sürekli olduğu görülür. Her bir $x \in X$ için $(f^n(x))$ dizisi Cauchy dizisi olursa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır ve X kümesinin tam metrik uzay olması, her Cauchy dizisinin limitinin varlığını garantilediğinden $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = z$ olacak biçimde $z \in X$ var olur. Ayrıca f fonksiyonunun sürekliliğinden

$$f(z) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = z$$

olup z noktası f fonksiyonunun bir tek sabit noktası olur. Teoremin ispatı, her bir $x \in X$ için $(f^n(x)) = (x_n)$ iterasyon dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilirse tamamlanır. Herhangi bir $x \in X$ ve $n = 1, 2, \cdots$ için $c_n = d(x_n, x_{n+1})$ olsun. (3.9) eşitsizliğinden (c_n) azalan bir dizidir. Burada $\lim_{n\to\infty} c_n = \varepsilon > 0$ olsaydı $c_m < \varepsilon + \delta$ seçildiğinde c_{m+1} için (3.8) eşitsizliği sağlanmazdı. Bu yüzden $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ olmalıdır. Cauchy dizisi olmayan bir (x_n) dizisi var olsun. Buradan $2\varepsilon > 0$ olmak üzere her bir $m_0 \in \mathbb{N}$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ için $n, m > m_0$ iken $d(x_n, x_m) > 2\varepsilon$ yazılır. (3.8) eşitsizliğinden $\delta > 0$ vardır ve

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \text{ iken } d(f(x), f(y)) < \varepsilon \tag{3.10}$$

bulunur. Burada $\delta' = \min\{\delta, \varepsilon\}$ seçilip δ ile yer değiştirirse eşitsizlik sağlanır. Keyfi $m_0 \in \mathbb{N}$ için $c_{m_0} < \frac{\delta'}{3}$ ve $m, n > m_0$ olsun. $m < n$ ve $d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$ olmak üzere $j \in \{m, m+1, \cdots, n\}$ vardır ve

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_j) < \varepsilon + \delta' \tag{3.11}$$

yazılır. (3.11) eşitsiliğini göstermek için $d(x_{n-1}, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ eşitsizliğini kullanarak

$d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$ ve $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)$ olduğundan

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_{n-1}) \tag{3.12}$$

bulunur. k, $\{m, m+1, \cdots, n\}$ kümesindeki en küçük doğal sayı olmak üzere $m < k \leq n-1$ yazılır ve $\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_k)$ sağlanır. $d(x_m, x_k) < \varepsilon + \delta'$ olduğunu göstermek için tersinin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\varepsilon + \delta' \leq d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_k) < d(x_m, x_{k-1}) + \frac{2\delta'}{3}$$

olsun. Buradan

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_{k-1})$$

bulunur. Bu çelişki k sayısının minimal seçilme koşulundan kaynaklanmaktadır. Bu yüzden (3.11) eşitsizliği sağlanmak zorundadır. Şimdi,

$$d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_k)$$

eşitsizliği, (3.10) ve (3.11) eşitsizlikleri;

$$d(x_m, x_j) \leq c_m + \varepsilon + c_k < \frac{\delta'}{3} + \varepsilon + \frac{\delta'}{3}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu ise (3.11) eşitsizliği ile çelişir. Bu çelişki (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olmaması kabulünden kaynaklandığı için (x_n) Cauchy dizisidir.

Teorem 3.5.2 (Meir-Keeler), Teorem 3.1.2 (Banach büzülme ilkesi) ve Teorem 3.2.2'in (Edelstein) genelleştirilmesidir.

Teorem 3.1.2 ispatı için,

Keyfi $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\delta = \left(\frac{1}{q-1}\right)\varepsilon$ olsun. $d(x,y) < \varepsilon + \delta$ ve $x \neq y$ iken

$$d(f(x), f(y)) < q\, d(x,y) < q\,\varepsilon + q\,\delta = \varepsilon$$

olur. Bu yüzden f fonksiyonu (3.8) eşitsizliğini sağlar ve teoremin ispatı, Teorem 3.5.2'in ispatında olduğu gibi devam eder.

Teorem 3.2.2 ispatı için,

Verilen f fonksiyonun (3.8) eşitsizliğini sağlamadığını kabul edelim. Herhangi $\varepsilon > 0$ ve X içindeki (x_n) ve (y_n) dizileri için

$$d(x_n, y_n) < \varepsilon + \frac{1}{n} \text{ ve } d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

olur. X kompakt metrik uzay olduğundan (x_n) ve (y_n) dizilerinin sırasıyla $x_0 \in X$ ve $y_0 \in X$ noktalarına yakınsayan (x_{n_k}) ve (y_{n_k}) alt dizileri vardır. f fonksiyonunun sürekliliğinden ve kabulden

$$d(x_0, y_0) \leq \varepsilon \leq d(f(x_0), f(y_0)) < d(x_0, y_0)$$

yazılır. Bu çelişki f fonksiyonu (3.8) eşitsizliğini sağlamasın kabulünden kaynaklandığından f fonksiyonu (3.8) eşitsizliğini sağlar. İspatın devamı, Teorem 3.5.2'in ispatında olduğu gibi devam eder.

Ancak Teorem 3.5.2 (Meir-Keeler), Rakotch ve Boyd-Wong teoremlerinin genelleştirmesi değildir. Rakotch ve Boyd-Wong diğer şartlar arasından aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanmasını kabul eder. $d(f(x), f(y)) \leq \Psi(d(x,y))$ ve her $t \neq 0$ için $\Psi(t) < t$

Aşağıdaki örnek, Meir-Keeler teoremi sağlansa bile yukarıdaki eşitsizliğin sağlanmayabileceğini gösterir.

Örnek

$X = [0,1] \cup \{3,4,6,7,\cdots,3n,3n+1,\cdots\}$ kümesi Öklid metriği ile verilsin.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x = 3n \\ 1 - \dfrac{1}{n+2} & , \quad x = 3n+1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu MK büzülmedir. Ancak her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \Psi(d(x,y))$$

iken $\Psi(1) = 1$ olup sağlanması gereken eşitsizlik ile çelişir.

3.6. Kannan, Chatterjee ve Zamfirescu Teoremleri

Kannan'ın 1968 yılında Banach sabit nokta teoreminden bağımsız olarak verdiği sabit nokta teoremi ve bazı sonuçları aşağıda incelenmiştir [9].

3.6.1. Teorem (Kannan [9])

(X,d) tam metrik uzay, $f : X \to X$ bir fonksiyon ve $0 \leq q < \dfrac{1}{2}$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq q\,[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \tag{3.13}$$

sağlanıyorsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır yani $f(z) = z$ olacak biçimde bir tek $z \in X$ vardır.

İspat (Joseph ve Kwack [2])

$c = \inf\{d(x, f(x)) : x \in X\}$ olsun. Buradan $c \geq 0$ olacağı görülür. Ancak $c > 0$ olsa

$\frac{c\,(1-q)}{q} > c$ olur ve

$$d\left(x, f\left(x\right)\right) < \frac{c\ (1-q)}{q}$$

olacak biçimde $x \in X$ var olur. Hipotezde y yerine $f\left(x\right)$ alınıp yukarıda bulunan eşitsizlik ile birleştirilirse

$$\begin{aligned} d\left(f\left(x\right), f^2\left(x\right)\right) &\leq q\ \left[d\left(x, f\left(x\right)\right) + d\left(f\left(x\right), f^2\left(x\right)\right)\right] \\ &\leq \frac{q}{1-q}\, d\left(x, f\left(x\right)\right) \\ &\leq \frac{q}{1-q}\, \frac{c\,(1-q)}{q} \\ &= c \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise c'nin tanımı ile çelişir. Dolayısıyla $c = 0$ bulunur ve $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, f\left(x_n\right)\right) = 0$ olacak biçimde X içinde bir $\left(x_n\right)$ dizisi vardır. Üçgen eşitsizliği ve f fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} d\left(x_m, x_n\right) &\leq d\left(x_m, f\left(x_m\right)\right) + d\left(f\left(x_m\right), f\left(x_n\right)\right) + d\left(x_n, f\left(x_n\right)\right) \\ &\leq d\left(x_m, f\left(x_m\right)\right) + q\ \left[d\left(x_m, f\left(x_m\right)\right) + d\left(x_n, f\left(x_n\right)\right)\right] + d\left(x_n, f\left(x_n\right)\right) \\ &= (1+q)\ \left[d\left(x_m, f\left(x_m\right)\right) + d\left(x_n, f\left(x_n\right)\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir ve $n, m \to \infty$ iken $\left(x_n\right)$ bir Cauchy dizisi bulunur. X tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = z$ olur. $f(z) = z$ olduğunu gösterirken

$$\begin{aligned} d\left(z, f\left(z\right)\right) &\leq d\left(z, f\left(x_n\right)\right) + d\left(f\left(x_n\right), f\left(z\right)\right) \\ &\leq d\left(z, f\left(x_n\right)\right) + q\ \left[d\left(x_n, f\left(x_n\right)\right) + d\left(z, f\left(z\right)\right)\right] \end{aligned}$$

yazılır ve $n \to \infty$ iken

$$d\left(z, f\left(z\right)\right) \leq q\, d\left(z, f\left(z\right)\right)$$

bulunur ve $q<1$ olduğundan $d(z,f(z))=0$ yani $z=f(z)$ elde edilir. Sabit noktanın tek olduğunu göstermek için, f fonksiyonunun başka bir sabit noktası $y\in X$ olsun.

$$d(z,y)=d(f(z),f(y))\leq q\,[d(z,f(z))+d(y,f(y))]=0$$

olup $z=y$ bulunur.

3.6.2. Sonuç

Banach büzülme ilkesi ve Kannan sabit nokta teoremi birbirinden bağımsızdır. Banach büzülme ilkesinde f fonksiyonunun sürekli olması gerekirken Kannan sabit nokta teoreminde sürekli olmayabilir.

Örnek

$X=[0,1]$ ve $f:X\to X$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4} & , \quad x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{x}{5} & , \quad x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Burada f fonksiyonu $x=\dfrac{1}{2}$ noktasında sürekli olmadığından büzülme dönüşümü değildir. Ancak $q=\dfrac{3}{4}$ için Kannan sabit nokta teoremi koşulunu sağlar.

Örnek

$X=[0,1]$ ve $x\in X$ için $f(x)=\dfrac{x}{3}$ fonksiyonu büzülme dönüşümüdür. Ancak $x=\dfrac{1}{3}$ ve $y=0$ alındığında Kannan sabit nokta teoremi şartını sağlamaz.

Sonuç olarak Kannan sabit nokta teoremi, Banach sabit nokta teoreminin genellemesi değildir.

Chatterjee 1972 yılında Kannan sabit nokta teoreminin başka bir biçimini ispatlamıştır [10].

3.6.3. Teorem

(X, d) tam metrik uzay, $f : X \to X$ bir ve $0 \leq q < \dfrac{1}{2}$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq q\,\left[d\left(x, f\left(y\right)\right) + d\left(y, f\left(x\right)\right)\right] \tag{3.14}$$

oluyorsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat (Fisher [11])

Herhangi bir $x \in X$ alınsın. Hipotezde verilen (3.14) eşitsizliğinde sırasıyla x yerine $f^{n-1}\left(x\right)$ ve y yerine $f^{n}\left(x\right)$ yazıldığında

$$\begin{aligned} d\left(f^{n}\left(x\right), f^{n+1}\left(x\right)\right) &\leq q\,\left[d\left(f^{n-1}\left(x\right), f^{n+1}\left(x\right)\right) + d\left(f^{n}\left(x\right), f^{n}\left(x\right)\right)\right] \\ &= q\,d\left(f^{n-1}\left(x\right), f^{n+1}\left(x\right)\right) \\ &\leq q\,\left[d\left(f^{n-1}\left(x\right), f^{n}\left(x\right)\right) + d\left(f^{n}\left(x\right), f^{n+1}\left(x\right)\right)\right] \end{aligned}$$

olur ve

$$d\left(f^{n}\left(x\right), f^{n+1}\left(x\right)\right) \leq \frac{q}{1-q}\,d\left(f^{n-1}\left(x\right), f^{n}\left(x\right)\right) \leq \cdots \leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^{n} d\left(x, f\left(x\right)\right)$$

elde edilir. Herhangi $r \in \mathbb{N}$ için üçgen eşitsizliği ve yukarıda bulunan eşitsizlikten

$$\begin{aligned} d\left(f^{n}\left(x\right), f^{n+r}\left(x\right)\right) &\leq d\left(f^{n}\left(x\right), f^{n+1}\left(x\right)\right) + d\left(f^{n+1}\left(x\right), f^{n+2}\left(x\right)\right) + \\ &\quad \cdots + d\left(f^{n+r-1}\left(x\right), f^{n+r}\left(x\right)\right) \\ &\leq \begin{bmatrix} \left(\frac{q}{1-q}\right)^{n} + \left(\frac{q}{1-q}\right)^{n+1} + \\ \cdots + \left(\frac{q}{1-q}\right)^{n+r-1} \end{bmatrix} d\left(x, f\left(x\right)\right) \\ &\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^{n} \frac{1}{1-q}\,d\left(x, f\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

olup burada $\frac{q}{1-q} < 1$ olduğundan $(f^n(x))$ dizisi bir Cauchy dizisi bulunur. X tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Ayrıca $f(z) = z$ olduğunu gösterirken

$$\begin{aligned} d(z, f(z)) &\leq d(z, f^n(x)) + d(f^n(x), f(z)) \\ &\leq d(z, f^n(x)) + q\left[d\left(f^{n-1}(x), f(z)\right) + d(f^n(x), z)\right] \end{aligned}$$

yazılır ve $n \to \infty$ iken $d(z, f(z)) \leq q\, d(z, f(z))$ elde edilir. Burada $q < 1/2$ olduğundan $f(z) = z$ olur. Başka bir sabit nokta $y \in X$ olsun.

$$d(z, y) = d(f(z), f(y)) \leq q\,[d(z, f(y)) + d(y, f(z))] = 2q\, d(z, y)$$

yazılır ve $[1-2q]\; d(z, y) \leq 0$ olup $z = y$ olarak bulunur.

Zamfirescu 1972 yılında Banach, Kannan ve Chatterjee'nin sonuçlarını birleştirerek sabit nokta için bir teorem vermiştir [12].

3.6.4. Teorem (Zamfirescu [12])

(X, d) tam metrik uzay, $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. $0 \leq \alpha < 1$, ve $0 \leq \beta < \dfrac{1}{2}$ ve $\gamma < \dfrac{1}{2}$ olacak biçimde α, β, γ reel sayıları ve her $x, y \in X$ için

(z_1) $d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$

(z_2) $d(f(x), f(y)) \leq \beta\,[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$

(z_3) $d(f(x), f(y)) \leq \gamma\,[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$

koşullardan en az birini sağlayan f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Herhangi $x, y \in X$ için (z_2) koşulu sağlanırsa

$$\begin{aligned} d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) &\leq \beta\left[d\left(x, f\left(x\right)\right) + d\left(y, f\left(y\right)\right)\right] \\ &\leq \beta\left[d\left(x, f\left(x\right)\right) + d\left(y, x\right) + d\left(x, f\left(x\right)\right) + d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right)\right] \end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$(1-\beta)\; d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq 2\beta\, d\left(x, f\left(x\right)\right) + \beta\, d\left(x, y\right)$$

olup

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq \frac{2\beta}{1-\beta}\, d\left(x, f\left(x\right)\right) + \frac{\beta}{1-\beta}\, d\left(x, y\right)$$

elde edilir. Benzer biçimde (z_3) sağlanırsa

$$\begin{aligned} d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) &\leq \gamma\left[d\left(x, f\left(y\right)\right) + d\left(y, f\left(x\right)\right)\right] \\ &\leq \gamma\left[d\left(x, f\left(x\right)\right) + d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) + d\left(y, x\right) + d\left(x, f\left(x\right)\right)\right] \end{aligned}$$

yazılır ve buradan

$$(1-\gamma)\; d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq 2\gamma\, d\left(x, f\left(x\right)\right) + \gamma\, d\left(y, x\right)$$

olup

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq \frac{2\gamma}{1-\gamma}\, d\left(x, f\left(x\right)\right) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\, d\left(y, x\right)$$

elde edilir. Burada $\lambda = maks\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\gamma}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$ seçilirse $0 \leq \lambda < 1$ olur ve her $x, y \in X$ için (z_2) veya (z_3) sağlanır. Dolayısıyla

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq 2\lambda\, d\left(x, f\left(x\right)\right) + \lambda\, d\left(x, y\right) \tag{3.15}$$

bulunur. Benzer adımlarla (z_2) veya (z_3) sağlandığında

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq 2\lambda\, d\left(x,f\left(y\right)\right)+\lambda\, d\left(x,y\right) \tag{3.16}$$

olduğu gösterilebilir. (3.15) ve (3.16) eşitsizliklerinden (z_1) elde edilebilir. (3.15) eşitsizliğinde f fonksiyonunun en azından bir sabit noktası vardır. Bu sabit noktanın varlığını göstermek için, keyfi $x_0 \in X$ ve $n=1,2,\cdots$ için $x_n = f^n\left(x_0\right)$ olacak biçimde iterasyon dizisini alalım. (3.15) eşitsizliğinde x yerine x_n ve y yerine x_{n-1} yazılırsa

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+1},x_n\right) &= d\left(f\left(x_n\right),f\left(x_{n-1}\right)\right) \\ &\leq 2\lambda\, d\left(x_n,f\left(x_{n-1}\right)\right)+\lambda\, d\left(x_n,x_{n-1}\right) \\ &= 2\lambda\, d\left(x_n,x_n\right)+\lambda\, d\left(x_n,x_{n-1}\right) \end{aligned}$$

olup

$$d\left(x_{n+1},x_n\right)\leq \lambda\, d\left(x_n,x_{n-1}\right)$$

elde edilir. Bu yüzden (x_n) dizisi Cauchy dizisi olur ve sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde $z\in X$ vardır ve $\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n+1},x_n\right)=0$ olur. (3.15) eşitsizliğinde üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} d\left(z,f\left(z\right)\right) &\leq d\left(z,x_{n+1}\right)+d\left(x_{n+1},f\left(z\right)\right) \\ &= d\left(z,x_{n+1}\right)+d\left(f\left(x_n\right),f\left(z\right)\right) \\ &\leq d\left(z,x_{n+1}\right)+\lambda\, d\left(z,x_n\right)+2\lambda\, d\left(x_n,f\left(x_n\right)\right) \end{aligned}$$

bulunur ve $n\to\infty$ iken $d\left(z,f\left(z\right)\right)=0$ olur. Dolayısıyla $f\left(z\right)=z$ elde edilir.

3.6.5. Sonuç (Rohades [13])

Bir f fonksiyonu (3.14) eşitsizliğini sağlıyorsa $f\in(\mathcal{Z})$; ayrıca f fonksiyonu $i=1,2,3$ için (z_i) koşullarından birini sağlıyorsa $f\in(\mathcal{Z};z_i)$ yazılır. Ek olarak $(\mathcal{Z}')$ ve $(\mathcal{Z}'')$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$(\mathcal{Z}')$: Negatif olmayan a, b, c fonksiyonları

$$\sup_{x,y\in X} \left(a\left(x,y\right)+2b\left(x,y\right)+2c\left(x,y\right)\right)\leq\lambda<1$$

şartını sağlasın ve her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right) &\leq a\left(x,y\right)\,d\left(x,y\right)+b\left(x,y\right)\,\left[d\left(x,f\left(x\right)\right)+d\left(y,f\left(y\right)\right)\right]+ \\ &\quad c\left(x,y\right)\,\left[d\left(x,f\left(y\right)\right)+d\left(y,f\left(x\right)\right)\right] \end{aligned}$$

olsun.

$(\mathcal{Z}'')$: $0 \leq h < 1$ olacak biçimde bir h sabiti ve her $x, y \in X$ için,

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq h\,maks\left\{\begin{array}{c} d\left(x,y\right), \dfrac{d\left(x,f\left(x\right)\right)+d\left(y,f\left(y\right)\right)}{2}, \\ \dfrac{d\left(x,f\left(y\right)\right)+d\left(y,f\left(x\right)\right)}{2} \end{array}\right\}$$

olsun.

O halde $(\mathcal{Z})$,$(\mathcal{Z}')$,$(\mathcal{Z}'')$ deki koşullar birbirine denktir.

İspat

$(\mathcal{Z}) \Rightarrow (\mathcal{Z}')$: f fonksiyonu $x, y \in X$ için $f \in (\mathcal{Z}; z_1)$ ise $a(x,y) = \alpha$ tanımlanır, $b = c = 0$ alınır ve f fonksiyonu $(\mathcal{Z}')$ koşulunu sağlar; $f \in (\mathcal{Z}; z_2)$ ise $b(x,y) = \beta$ tanımlanır, $a = c = 0$ alınır ve f fonksiyonu $(\mathcal{Z}')$ koşulunu sağlar; $f \in (\mathcal{Z}; z_3)$ ise $c(x,y) = \gamma$ tanımlanır, $a = b = 0$ alınır ve f fonksiyonu $(\mathcal{Z}')$ koşulunu sağlar.

$(\mathcal{Z}') \Rightarrow (\mathcal{Z}'')$: f fonksiyonunu $(\mathcal{Z}')$ koşulunu sağlasın ve

$$M\left(x,y\right)=maks\left\{\ d\left(x,y\right), \tfrac{d(x,f(x))+d(y,f(y))}{2}, \tfrac{d(x,f(y))+d(y,f(x))}{2}\ \right\}$$

seçilsin. Buradan

$$d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq\left[a\left(x,y\right)+2b\left(x,y\right)+2c\left(x,y\right)\right]\,M\left(x,y\right)\leq\lambda\,M\left(x,y\right)$$

olup f fonksiyonunu $(\mathcal{Z}'')$ koşulunu sağlar.

$(\mathcal{Z}'')\Rightarrow(\mathcal{Z})$: Her $x,y\in X$ için $M\left(x,y\right)=d\left(x,y\right)$ ise $\alpha=h$ olmak üzere $f\in(\mathcal{Z};z_1)$ olur. $M\left(x,y\right)=1/2\left[d\left(x,f\left(x\right)\right)+d\left(y,f\left(y\right)\right)\right]$ ise $\beta=h/2$ olmak üzere $f\in(\mathcal{Z};z_2)$ olur. $M\left(x,y\right)=1/2\left[d\left(x,f\left(y\right)\right)+d\left(y,f\left(x\right)\right)\right]$ ise $\gamma=h/2$ olmak üzere $f\in(\mathcal{Z};z_3)$ olur.

3.7. Ćirić Genelleştirilmiş Büzülme Dönüşümü

1971 yılında Ćirić, bilinen büzülme şartını genelleyerek aşağıda verildiği gibi genelleştirilmiş büzülme kavramını tanımlayarak bu tanımla sabit nokta teoremini vermiştir [14].

3.7.1. Tanım (Ćirić [14])

(X,d) metrik uzay, $f:X\rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in X$ için negatif olmayan $q\left(x,y\right),r\left(x,y\right),s\left(x,y\right),t\left(x,y\right)$ sayıları

$$\sup_{x,y\in X}\left(q\left(x,y\right)+r\left(x,y\right)+s\left(x,y\right)+2t\left(x,y\right)\right)=\lambda<1$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda her $x,y\in X$ için,

$$\begin{aligned}d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)&\leq q\left(x,y\right)\,d\left(x,y\right)+r\left(x,y\right)\,d\left(x,f\left(x\right)\right)+s\left(x,y\right)\,d\left(y,f\left(y\right)\right)\\&\quad+t\left(x,y\right)\,\left[d\left(x,f\left(y\right)\right)+d\left(y,f\left(x\right)\right)\right]\end{aligned}$$

oluyorsa f fonksiyonununa λ-genelleştirilmiş büzülme denir.

Bu koşul $0 \leq h < 1$ olacak biçimde bir h sabiti ve her $x, y \in X$ için

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq h\, maks\left\{d\left(x, y\right), d\left(x, f\left(x\right)\right) + d\left(y, f\left(y\right)\right), \frac{d\left(x, f\left(y\right)\right) + d\left(y, f\left(x\right)\right)}{2}\right\}$$

eşitsizliğine denktir.

Aşağıdaki örnek λ-genelleştirilmiş büzülme dönüşümü ile büzülme dönüşümü arasındaki ilişkiyi gösterir.

Örnek

$X = [0, 2] \subset \mathbb{R}$ ve

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{x}{9} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{10} & , \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu $x = \dfrac{999}{1000}$ ve $y = \dfrac{1001}{1000}$ için,

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) = \frac{981}{90000} > 5\,\frac{180}{90000} = 5\,d\left(x, y\right)$$

olduğundan büzülme dönüşümü değildir. Ancak her $x, y \in X$ için $q\left(x, y\right) = \dfrac{1}{10}$, $r\left(x, y\right) = s\left(x, y\right) = \dfrac{1}{4}$ ve $t\left(x, y\right) = \dfrac{1}{6}$ iken f fonksiyonu λ-genelleştirilmiş büzülme dönüşümü olur.

3.7.2. Tanım

(X, d) tam metrik uzay, $f : X \to X$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Bir x elemanının f-orbit kümesi $O\left(x, f\right)$

$$O\left(x, f\right) = \left\{f^n\left(x\right) : n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

biçiminde ve f fonksiyonu verilirse alışılmış gösterim $O\left(x\right)$ biçimindedir. Ayrıca her

$n \in \mathbb{N}$ için $O(x,n)$ kümesi

$$O(x,n) = \left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x)\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Herhangi bir $x \in X$ için $O(x,f)$ kümesindeki her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise X kümesine f-orbitally tam metrik uzay denir.

Her tam metrik uzay f-orbitally tamdır ancak tersi her zaman doğru değildir. Banach sabit nokta teoreminin ispatında (X,d) ikilsinin tam metrik uzay olması yerine f-orbitally tam olması yeterlidir.

3.7.3. Teorem (Ćirić [14])

(X,d) f-orbitally tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir λ-genelleştirilmiş büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun X kümesinde bir tek z sabit noktası vardır ve keyfi $x \in X$ için $(f^n(x))$ iterasyon dizisi z sabit noktasına yakınsar ayrıca

$$d(f^n(x), z) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, f(x))$$

sağlanır.

İspat

Herhangi bir $x \in X$ için $x_0 = x$ ve $x_n = f(x_{n-1})$ olacak biçimde (x_n) dizisini tanımlansın. f fonksiyonu λ- büzülme olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q(x_{n-1}, x_n)\, d(x_{n-1}, x_n) \\
&\quad + r(x_{n-1}, x_n)\, d(x_{n-1}, f(x_{n-1})) + s(x_{n-1}, x_n)\, d(x_n, f(x_n)) \\
&\quad + t(x_{n-1}, x_n)\, [d(x_{n-1}, f(x_n)) + d(x_n, f(x_{n-1}))] \\
&= q(x_{n-1}, x_n)\, d(x_{n-1}, x_n) + r(x_{n-1}, x_n)\, d(x_{n-1}, x_n) \\
&\quad + s(x_{n-1}, x_n)\, d(x_n, x_{n+1}) + t(x_{n-1}, x_n)\, d(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

bulunur ve ayrıca

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_{n+1}\right) &\leq \left[q\left(x_{n-1}, x_n\right) + r\left(x_{n-1}, x_n\right)\right] d\left(x_{n-1}, x_n\right) \\ &\quad + s\left(x_{n-1}, x_n\right) d\left(x_n, x_{n+1}\right) \\ &\quad + t\left(x_{n-1}, x_n\right) \left[d\left(x_{n-1}, x_{n+1}\right) + d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right] \end{aligned}$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \frac{q\left(x_{n-1}, x_n\right) + r\left(x_{n-1}, x_n\right) + t\left(x_{n-1}, x_n\right)}{1 - s\left(x_{n-1}, x_n\right) - t\left(x_{n-1}, x_n\right)} d\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{3.17}$$

elde edilir. Burada

$$q(x, y) + r(x, y) + t(x, y) + \lambda s(x, y) + \lambda t(x, y) \leq \lambda$$

olduğundan her $x, y \in X$ için

$$\frac{q(x, y) + r(x, y) + t(x, y)}{1 - s(x, y) - t(x, y)} \leq \lambda$$

olur ve (3.17) ile birleştirilirse

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \lambda d\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.18) eşitsizliği özel varsayımlar altında f fonksiyonunun bir büzülme dönüşümü olarak ele alınabileceğini gösterir ve

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \lambda\, d\left(x_{n-1}, x_n\right) \leq \cdots \leq \lambda^n\, d(x, f(x))$$

sağlanır. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $m \geq n$ iken

$$d\left(x_n, x_m\right) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d\left(x_k, x_{k+1}\right) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k\, d(x, f(x))$$

olduğu açıktır. Böylece

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, f(x)) \tag{3.19}$$

sağlanır; yani, (x_n) dizisi $O(x)$ kümesinde bir Cauchy dizisidir. Bu dizinin limiti $z \in X$ olsun. $f(z) = z$ olduğunu göstermek için $d(f(z), f(x_n))$ kullanılarak

$$\begin{aligned} d(f(z), f(x_n)) &\leq q(z, x_n)\ d(z, x_n) + r(z, x_n)\,[d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f(z))] \\ &\quad + s(z, x_n)\ d(x_n, x_{n+1}) + t(z, x_n)\ [d(z, x_{n+1}) + d(f(z), x_n)] \\ &\leq \lambda\, d(z, x_n) + [r(z, x_n) + t(z, x_n)]\ d(z, x_{n+1}) \\ &\quad + r(z, x_n)\ d(f(x_n), f(z)) + s(z, x_n)\ d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + t(z, x_n)\ [d(f(z), f(x_n)) + d(f(x_n), x_n)] \\ &\leq d(z, x_n) + \lambda\, d(z, x_{n+1}) \\ &\quad + [r(z, x_n) + t(z, x_n)]\ d(f(z), f(x_n)) + \lambda\, d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \lambda\ [d(z, x_n) + d(z, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})] + \lambda\, d(f(z), f(x_n)) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$d(f(z), f(x_n)) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\ [d(z, x_n) + d(z, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})]$$

bulunur; yani, f fonksiyonunun sabit noktası z olur. Diğer yandan, f fonksiyonun λ-genelleştirilmiş büzülme tanımından z noktasının tekliği sağlanır ve (3.19) sayesinde istenilen eşitsizlik kolayca gösterilebilir.

3.8. Reich ve Hardy-Rogers Teoremleri

Reich, 1971 yılında Banach ve Kannan sabit nokta teoremlerinin genellemesi olan aşağıdaki teoremini ispatlamıştır [15].

3.8.1. Teorem (Reich [15])

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Negatif olmayan ve $a+b+c < 1$ olacak biçimde a, b, c sayıları ve her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq a\,d(x, f(x)) + b\,d(y, f(y)) + c\,d(x, y) \tag{3.20}$$

sağlanıyorsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Bu teoremde $a = b = 0$ alınırsa Banach sabit nokta teoremi, $a = b$ ve $c = 0$ alınırsa Kannan sabit nokta teoremi elde edilir.

Örnek

$X = [0, 1]$ alışılmış metrik ile tam metrik uzay olmak üzere, $0 \leq x < 1$ için $f(x) = \dfrac{x}{3}$ ve $f(1) = \dfrac{1}{6}$ biçiminde tanımlanan $f : X \to X$ fonksiyonu sürekli olmadığından büzülme dönüşümü değildir. Ayrıca $x = 0$ ve $y = 1/3$ için

$$d(f(0), f(1/3)) = \frac{1}{2}\left[d(0, f(0)) + d(1/3, f(1/3))\right]$$

olduğundan Kannan sabit nokta teoremi için gerekli koşulu da sağlayamaz. Ancak bu fonksiyon $a = \dfrac{1}{6}$, $b = \dfrac{1}{9}$ ve $c = \dfrac{1}{3}$ için Reich teoremini sağlar.

3.8.2. Sonuç (Reich [15])

(X, d) tam metrik uzay olmak üzere, $n = 1, 2, \cdots$ için (f_n), Teorem 3.8.1'deki şartı sağlayan $f_n : X \to X$ fonksiyonlarının bir dizisi ve her bir n için $z_n \in X$ bu fonksiyonların sabit noktaları olsun.Her $x \in X$ için $f(x) = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ biçiminde tanımlanan $f : X \to X$ dönüşümünün bir tek $z \in X$ sabit noktası vardır ve $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ sağlanır.

Hardy ve Rogers, Reich'in sonuçlarını kullanarak daha genel olan aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamışlardır [16].

3.8.3. Teorem (Hardy-Rogers [16])

(X,d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için ve $a, b, c, e, h \geq 0$ sayıları için

$$d(f(x), f(y)) \leq a\,d(x, f(x)) + b\,d(y, f(y)) + c\,d(x, f(y)) \quad (3.21)$$
$$+e\,d(y, f(x)) + h\,d(x, y) \quad (3.22)$$

sağlansın ve $\alpha = a + b + c + e + h$ olsun.

1) (X,d) tam metrik uzay ve $\alpha < 1$ ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.
2) (X,d) kompakt metrik uzay, f sürekli ise hipotezdeki eşitsizlik tüm $x \neq y$ ve $\alpha = 1$ için

$$d(f(x), f(y)) < a\,d(x, f(x)) + b\,d(y, f(y)) + c\,d(x, f(y))$$
$$+e\,d(y, f(x)) + h\,d(x, y)$$

biçiminde değişir ve f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Teoremin ispatını vermeden önce kolaylık olması açısından ispatta gerekli olan aşağıdaki Lemmayı verelim.

3.8.4. Lemma

(3.21) eşitsizliği sağlansın ve $\alpha < 1$ olsun. Buradan

$$d\left(f(x), f^2(x)\right) \leq \beta\,d(x, f(x)) \quad (3.23)$$

olacak biçimde $\beta < 1$ vardır. Ayrıca $\alpha = 1$ ve (**??**) eşitsiliği sağlanırsa $x \neq f(x)$ iken

$$d\left(f(x), f^2(x)\right) \leq \beta\,d(x, f(x)) \quad (3.24)$$

elde edilir.

İspat

Öncelikle $\alpha < 1$ ve herhangi bir $x \in X$ için (3.21) eşitsizliğinde y yerine $f(x)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} d(f(x), f^2(x)) &\leq a\, d(x, f(x)) + b\, d(f(x), f^2(x)) + c\, d(x, f^2(x)) \\ &\quad + e\, d(f(x), f(x)) + h\, d(x, f(x)) \end{aligned}$$

olur. Eşitsizliğin sağ yanı düzenlendiğinde

$$d(f(x), f^2(x)) \leq \frac{a+h}{1-b} d(x, f(x)) + \frac{c}{1-b} d(x, f^2(x)) \tag{3.25}$$

bulunur. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden,

$$d(f^2(x), x) - d(f(x), x) \leq d(f^2(x), f(x))$$

olduğundan bu eşitsizlik (3.25) ile birleştirilirse

$$d(f^2(x), x) - d(f(x), x) \leq \frac{a+h}{1-b} d(x, f(x)) + \frac{c}{1-b} d(x, f^2(x))$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$d(f^2(x), x) \leq \frac{1+a+h-b}{1-b-c} d(x, f(x)) \tag{3.26}$$

olur. Bu eşitsizlik (3.25)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d(f^2(x), x) &\leq \frac{a+h}{1-b} d(x, f(x)) + \frac{c}{1-b} \frac{1+a+h-b}{1-b-c} d(x, f(x)) \\ &= \frac{a+c+h}{1-b-c} d(x, f(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. d metriğinin simetri özelliğini kullanıp, a ve c sırasıyla b ve e ile yer değiştirilirse (yani ispatın başında x yerine $f(x)$ ve y yerine x yazılırsa)

$$d(f^2(x), x) \leq \frac{b+e+h}{1-a-e} d(x, f(x))$$

elde edilir. Burada

$$\beta = \min\{\frac{a+c+h}{1-b-c}, \frac{b+e+h}{1-a-e}\}$$

seçilirse (3.23) sağlanır. (3.24) eşitsizliği de benzer adımlarla gösterilebilir.

İspat (Hardy ve Rogers Teoremi İspatı)

1) ispatı için öncelikle ispatlanan (3.23) eşitsizliğinden her $m, n \in \mathbb{N}$ için $m > n$ iken

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(x)) &\leq d(f^m(x), f^{m-1}(x)) + d(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x)) + \\ &\quad \cdots + d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \\ &\leq \beta^n (1 + \beta + \cdots + \beta^{m-n}) d(x, f(x)) \\ &\leq \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x, f(x)) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $0 \leq \beta < 1$ olduğundan $(f^n(x))$ dizisi Cauchy dizisi bulunur. X tam metrik uzay olduğundan $f^n(x) \to z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Buradan $\lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = f(z)$ yazılır. Şimdi bu z elemanının f fonksiyonunun sabit noktası olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliği ve (3.21)'den

$$\begin{aligned} d(z, f(z)) &\leq d(z, f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f(z)) \\ &\leq a\, d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + b\, d(z, f(z)) + c\, d(f^n(x), f(z)) \\ &\quad +(e+1)\, d(f^{n+1}(x), z) + h\, d(f^n(x), z) \end{aligned}$$

bulunur ve buradan $n \to \infty$ iken

$$d(z, f(z)) \leq (b+c)\, d(z, f(z))$$

elde edilir. Ayrıca $b + c < 1$ olduğundan $f(z) = z$ bulunur. Sabit noktanın tekliği (3.21)'den kolayca görülebilir.

2) ispatı için verilen koşullar altında (3.24) eşitsizliğinde $y = f(y)$ olduğu görülebildiğinden

$$\inf\{d(x, f(x)) : x \in X\} = d(y, f(y))$$

olacak biçimde $y \in X$ vardır. Sabit noktanın tekliği ise benzer biçimde (3.21)'den kolayca görülebilir.

3.9. Ćirić Sözdebüzülme Dönüşümü

1974 yılında Ćirić, λ-genelleştirilmiş büzülmedeki uzaklıkların lineer kombinasyonlarını, maksimumlarıyla değiştirerek sözdebüzülme olarak adlandırdığı yeni bir büzülme sınıfı tanımlamıştır [17].

3.9.1. Tanım (Ćirić [17])

(X, d) metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, maks \left\{ \begin{array}{c} d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), \\ d(x, f(y)), d(y, f(x)) \end{array} \right\}$$

olacak biçimde $0 \leq \lambda < 1$ sayısı varsa f fonksiyonuna sözdebüzülme denir.

Aşağıdaki örnek sözdebüzülme dönüşümü ile λ-genelleştirilmiş büzülme dönüşümü arasındaki ilişkiyi gösterir.

Örnek (Rhoades [13])

$X = [0, 1]$ ve $f : X \to X$ fonksiyonu her $0 \leq x < 1$ için $f(x) = 0$ ve $f(1) = \dfrac{1}{2}$

biçiminde tanımlandığında f sözdebüzülmedir, ancak

$$\begin{aligned} d\left(f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right) &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[d\left(\frac{1}{2}, f(1)\right) + d\left(1, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] \\ d\left(\frac{1}{2}, 1\right) &= d\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = d(1, f(1)) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca her $x, y \in X$ için $x \neq y$ ve $x, y \neq 1$ iken $d(f(x), f(y)) = 0$, $x \neq 1$ iken $d(f(x), f(1)) = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} d(1, f(x)) = \frac{3}{4}$ olduğundan genelleştirilmiş büzülme değildir.

3.9.2. Teorem (Ćirić [17])

(X, d) f-orbitally tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir sözdebüzülme ise f fonksiyonunun X içinde bir tek z sabit noktası vardır ve herhangi $x \in X$ için $(f^n(x))$ iterasyon dizisi z sabit noktasına yakınsar. Ayrıca

$$d(f^n(x), z) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, f(x))$$

sağlanır.

İspat

$\alpha(x, n) = d(O(x, n))$ ve $\alpha(x) = d(O(x))$ alalım. Buradan

$$\alpha(f(x), n-1) = d\left(\left\{f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x)\right\}\right) \leq \lambda\, \alpha(x, n) \tag{3.27}$$

elde edilir. Burada $1 \leq j < k \leq n$ için $\alpha(f(x), n-1) = d\left(f^j(x), f^k(x)\right)$ ise sözdebüzülme şartından

$$\begin{aligned} \alpha(f(x), n-1) &= d\left(f\left(f^{j-1}(x)\right), f\left(f^{k-1}(x)\right)\right) \\ &\leq \lambda\, maks \left\{ \begin{array}{c} d\left(f^{j-1}(x), f^{k-1}(x)\right), d\left(f^{j-1}(x), f^j(x)\right), \\ d\left(f^{k-1}(x), f^k(x)\right), d\left(f^{j-1}(x), f^k(x)\right), \\ d\left(f^{k-1}(x), f^j(x)\right) \end{array} \right\} \\ &\leq \lambda\, d(\{x, f(x), \cdots, f^n(x)\}) = \lambda\, \alpha(x, n) \end{aligned}$$

bulunur yani, (3.27) eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (3.27) eşitsizliğinden $k \leq n$ iken

$$\alpha(x,n) = d\left(x, f^k(x)\right) \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.27), (3.28) ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \alpha(x,n) &= d\left(x, f^k(x)\right) \leq d(x, f(x)) + d\left(f(x), f^k(x)\right) \\ &\leq d(x, f(x)) + \alpha(f(x), n-1) \leq d(x, f(x)) + \lambda\alpha(x,n) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\alpha(x,n) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x, f(x)) \tag{3.29}$$

bulunur. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} \alpha(x,n) = \alpha(x)$ olduğundan (3.29) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\alpha(x) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x, f(x)) \tag{3.30}$$

sağlanır. Dolayısıyla, x noktasının f-orbitinin çapı sınırlıdır. Her n için $\alpha(f^n(x))$ kümesinin çapını $\beta_n(x)$ ile gösterelim. $(\beta_n(x))$ artmayan ve sınırlı dizidir, bu sebeple $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n(x) = \beta(x)$ limiti vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta(x) \leq \beta_n(x)$ sağlanır. (3.27) eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken

$$\alpha(f(x)) \leq \lambda\,\alpha(x) \tag{3.31}$$

elde edilir. Buradan $n \in \mathbb{N}$ iken

$$\beta_{n+1}(x) = \alpha(f(f^n(x))) \leq \lambda\,\alpha(f^n(x)) = \lambda\,\beta_n(x)$$

ve

$$\beta(x) \leq \lambda\,\beta(x)$$

olduğundan $\beta(x) = 0$, yani $(f^n(x))$ bir Cauchy dizisi olur. Böylece $z = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Ayrıca, f fonksiyonu sözdebüzülme olduğundan her n için

$$d(f(z), f(f^n(x))) \leq \lambda\, maks \left\{ \begin{array}{c} d(z, f^n(x)), d(z, f(z)), d(f^{n+1}(x), f^n(x)), \\ d(z, f^{n+1}(x)), d(f^n(x), f(z)) \end{array} \right\}$$

ve buradan

$$d(z, f(z)) \leq \lambda\, d(z, f(z))$$

elde edilir $\lambda < 1$ olduğundan $f(z) = z$ bulunuλr. Diğer yandan, z noktasının tek olduğu f fonksiyonunun sözdebüzülme tanımından gösterilebilir. (3.31)'dan $\alpha(f^n(x)) \leq \lambda^n \alpha(x)$ ve (3.30) eşitsizliğinden

$$\alpha(f^n(x)) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, f(x))$$

bulunur. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $m \geq n$ iken

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \alpha(f^n(x)) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, f(x))$$

ve $m \to \infty$ iken

$$d(f^n(x), z) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, f(x))$$

sağlanır.

Ćirić'in sözdebüzülme dönüşümlerini tanımladığı makaleden, sözde büzülmelerin genel olarak sürekli olmasının gerekmediği ancak her zaman sabit noktada sürekli olduğu bilinmektedir.

4. VEKTÖR METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde metrik uzaylarda bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin vektör metrik uzaylardaki ispatları verilmiştir.

4.1. Banach Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda metrik uzaylardaki Banach sabit nokta teoreminin, vektör metrik uzaylarda Çevik ve Altun [20] tarafından verilen ispatı incelenmiştir.

4.1.1. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı ve (X, d, E) E-tam vektör metrik uzay olsun. $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için $q \in [0, 1)$ iken

$$d\,(Tx, Ty) \leq q\, d\,(x, y) \tag{4.1}$$

büzülme şartı sağlanıyorsa T dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Herhangi bir $x_0 \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1}$ olacak biçimde (x_n) dizisini tanımlayalım. T dönüşümünün hipotezdeki büzülme şartından ve (x_n) dizisi tanımından

$$\begin{aligned}
d\,(x_n, x_{n+1}) &= d\,(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
&\leq q\, d\,(x_{n-1}, x_n) \\
&= q\, d\,(Tx_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\leq q^2\, d\,(x_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\leq \cdots \\
&\leq q^n\, d\,(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

yazılır. Şimdi (x_n) dizisinin E-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Herhangi bir $p \in \mathbb{N}$ için üçgen eşitsizliği ve yukarıda bulunan eşitsizlikten

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leq d\left(x_n, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \cdots + d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right) \\ &\leq \left[q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+p-1}\right] d\left(x, x_0\right) \\ &\leq \frac{q^{n+p-1}}{1-q} d\left(x, x_0\right) \end{aligned}$$

yazılır. $q \in [0,1)$ ve E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan (x_n) dizisi E-Cauchy dizisi bulunur. X vektör metrik uzayı E-tam olduğundan $Tx_n \overset{d,E}{\to} z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Dolayısıyla $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E Riesz uzayında (a_n) dizisi vardır ve $d(Tx_n, z) \leq a_n$ sağlanır. Bu z elemanının sabit nokta olduğunu göstermek için $d(z, Tz)$ vektörel uzaklığının sıfır olduğunu göstermeliyiz. Üçgen eşitsizliği ve T dönüşümünün büzülme şartından

$$\begin{aligned} d\left(z, Tz\right) &\leq d\left(z, Tx_n\right) + d\left(Tx_n, Tz\right) \\ &\leq d\left(z, x_{n+1}\right) + q\, d\left(x_n, z\right) \\ &\leq a_{n+1} + q\, a_n \\ &\leq (1+q)\ a_n \end{aligned}$$

bulunur. E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $d\left(z, Tz\right) = 0$ yani, $Tz = z$ elde edilir. Sabit noktanın tekliğini göstermek için T dönüşümünün başka bir sabit noktası $z' \in X$ olsun.

$$d\left(z, z'\right) = d\left(Tz, Tz'\right) \leq q\, d\left(z, z'\right) \Rightarrow [1-q]\ d\left(z, z'\right) \leq 0$$

olup $q \in [0,1)$ olduğundan $z = z'$ olarak bulunur.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ üzerinde koordinat sıralmasını $\leq_k$ alalım ve $E = \mathbb{R}^2$ olsun.

$$X = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\right\} \cup \left\{(0,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}$$

ve $d : X \times X \to E$ vektör metriği

$$\begin{aligned} d\left((x,0),(y,0)\right) &= \left(\frac{4}{3}\left|x-y\right|,\left|x-y\right|\right) \\ d\left((0,x),(0,y)\right) &= \left(\left|x-y\right|,\frac{2}{3}\left|x-y\right|\right) \\ d\left((x,0),(0,y)\right) &= \left(\frac{4}{3}x+y,x+\frac{2}{3}y\right) \end{aligned}$$

biçiminde ve $T : X \to X$ dönüşümü ise $T\left((x,0)\right) = T\left(x,0\right) = \left(0,x\right)$ ve $T\left(0,x\right) = \left(\frac{x}{2},0\right)$ biçiminde tanımlansın. $\mathbb{R}^2$ koordinat sıralaması ile Arşimedyan Riesz uzayı ve (X,d,E) E-tam vektör metrik uzaydır. T dönüşümü $q = \frac{3}{4}$ için (4.1) eşitsizliğini sağlar ve Teorem 4.1.1'den X içinde bir tek sabit noktası vardır. Ancak T dönüşümü X üzerinde reel değerli metrikte büzülme dönüşümü olmadığından bu örneği Teorem 3.1.2 (Banach sabit nokta teoremi) için uygulayamayız.

(4.1) eşitsizliğini sağlayan T dönüşümü, tanımından dolayı topolojik süreklidir ve E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan dolayısıyla vektörel süreklidir.

4.2. Kannan Sabit Nokta Teoremi

Metrik uzaylarda Kannan tarafından verilen sabit nokta teoreminin, vektör metrik uzaylardaki ispatı ve örnekleri verilmiştir.

4.2.1. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı (X,d,E) E-tam vektör metrik uzay ve olsun. $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$d\left(Tx,Ty\right) \leq q\ \left[d\left(x,Tx\right) + d\left(y,Ty\right)\right] \tag{4.2}$$

olacak biçimde $q \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa T dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Herhangi bir $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq q < \frac{1}{2}$ olmak üzere $(T^n x)$ dizisini ele alalım. T dönüşümünün hipotezdeki büzülme şartı kullanılarak

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leq q\left[d(T^{n-1} x, T^n x) + d(T^n x, T^{n+1} x)\right] \leq \frac{q}{1-q}\, d(T^{n-1} x, T^n x)$$

yazılır. Benzer biçimde

$$d(T^{n-1} x, T^n x) \leq \frac{q}{1-q}\, d(T^{n-2} x, T^{n-1} x)$$

olur ve eşitsizlikler birleştirilerek devam edilirse

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^n d(x, Tx)$$

bulunur. Şimdi $(T^n x)$ dizisinin E-Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Her $n, r \in \mathbb{N}$ için üçgen eşitsizliği ve yukarıda bulunan eşitsizlikten

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n+r} x) &\leq d(T^n x, T^{n+1} x) + d(T^{n+1} x, T^{n+2} x) + \cdots + d(T^{n+r-1} x, T^{n+r} x) \\ &\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^n \frac{1}{1-q}\, d(x, Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $0 \leq q < \frac{1}{2}$ olduğundan $\frac{q}{1-q} < 1$ olur ve E Arşimedyan olduğundan $(T^n x)$ dizisi E-Cauchy bulunur. X vektör metrik uzayı E-tam olduğundan $T^n x \overset{d,E}{\to} z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Dolayısıyla $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E Riesz uzayında (a_n) dizisi vardır ve $d(T^n x, z) \leq a_n$ sağlanır. Bu z elemanının sabit nokta olduğunu göstermek için üçgen eşitsizliği ve T dönüşümünün hiptezdeki özelliğinden

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, T^{n+1} x) + d(T^{n+1} x, Tz) \\ &\leq d(z, T^{n+1} x) + q\left[d(T^n x, T^{n+1} x) + d(z, Tz)\right] \\ &\leq d(z, T^{n+1} x) + q\left[d(T^n x, z) + d(z, T^{n+1} x) + d(z, Tz)\right] \\ &\leq \frac{1+q}{1-q}\, d(z, T^{n+1} x) + \frac{q}{1-q}\, d(T^n x, z) \\ &\leq \frac{1+q}{1-q}\, a_{n+1} + \frac{q}{1-q}\, a_n \\ &\leq \frac{1+2q}{1-q}\, a_n \end{aligned}$$

olur ve E Riesz uzayının Arşimedyanlığından $d(Tz,z)=0$ yani $Tz=z$ bulunur. Sabit noktanın tekliğini göstermek için T dönüşümün başka bir sabit noktası $z'\in X$ olsun. Bu durumda

$$d(z,z')=d(Tz,Tz')\leq q\left[d(z,Tz)+d(z',Tz')\right]=0$$

olduğundan $z=z'$ bulunur.

Örnek

Örnek 4.1'de $q=\frac{9}{20}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ alındığında T dönüşümü (4.2) eşitsizliğini sağlar.

a) Her $(x_1,0)\,,\ (x_2,0)\in\mathbb{R}^2$ ve $0\leq x_1,x_2\leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
d\left(T\left(x_1,0\right),T\left(x_2,0\right)\right) &= d\left(\left(0,x_1\right),\left(0,x_2\right)\right)\\
&= \left(\left|x_1-x_2\right|,\frac{2}{3}\left|x_1-x_2\right|\right)\\
d\left(\left(x_1,0\right),T\left(x_1,0\right)\right) &= d\left(\left(x_1,0\right),\left(0,x_1\right)\right)\\
&= \left(\frac{4}{3}x_1+x_1,x_1+\frac{2}{3}x_1\right)=\left(\frac{7}{3}x_1,\frac{5}{3}x_1\right)\\
d\left(\left(x_2,0\right),T\left(x_2,0\right)\right) &= d\left(\left(x_2,0\right),\left(0,x_2\right)\right)\\
&= \left(\frac{4}{3}x_2+x_2,x_2+\frac{2}{3}x_2\right)=\left(\frac{7}{3}x_2,\frac{5}{3}x_2\right)
\end{aligned}$$

olur ve bulunan değerler (4.2) eşitsizliğinin sağ yanında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{9}{20}\left[\begin{array}{c} d\left(\left(x_1,0\right),T\left(x_1,0\right)\right)\\ +d\left(\left(x_2,0\right),T\left(x_2,0\right)\right)\end{array}\right] &= \frac{9}{20}\left(\frac{7}{3}\left(x_1+x_2\right),\frac{5}{3}\left(x_1+x_2\right)\right)\\
&= \left(\frac{21}{20}\left(x_1+x_2\right),\frac{3}{4}\left(x_1+x_2\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\leq_k$ tanımından ve ayrıca üçgen eşitsizliği uygulanırsa $0\leq x_1,x_2\leq 1$ olduğundan

$$\left|x_1-x_2\right|\leq x_1+x_2\leq\frac{21}{20}\left(x_1+x_2\right)$$

ve

$$\frac{2}{3}\left|x_1-x_2\right| \leq \frac{2}{3}\left(x_1+x_2\right) \leq \frac{3}{4}\left(x_1+x_2\right)$$

olup islenilen sağlanır.

b) Her $(0,x_1)\,,\ (0,x_2)\in\mathbb{R}^2$ ve $0\leq x_1,x_2\leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
d\left(T\left(0,x_1\right),T\left(0,x_2\right)\right) &= d\left(\left(\frac{x_1}{2},0\right),\left(\frac{x_2}{2},0\right)\right)\\
&= \left(\frac{4}{3}\left|\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right|,\left|\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right|\right)\\
d\left(\left(0,x_1\right),T\left(0,x_1\right)\right) &= d\left(\left(\frac{x_1}{2},0\right),\left(0,x_1\right)\right)\\
&= \left(\frac{4}{3}\frac{x_1}{2}+x_1,\frac{x_1}{2}+\frac{2}{3}x_1\right)=\left(\frac{5}{3}x_1,\frac{7}{3}x_1\right)\\
d\left(\left(0,x_2\right),T\left(0,x_2\right)\right) &= \left(\frac{5}{3}x_2,\frac{7}{3}x_2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bulunan değerler (4.2) eşitsizliğinin sağ yanında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{9}{20}\left[\begin{array}{c} d\left(\left(0,x_1\right),T\left(0,x_1\right)\right)\\ +d\left(\left(0,x_2\right),T\left(0,x_2\right)\right)\end{array}\right] &= \frac{9}{20}\left(\frac{5}{3}\left(x_1+x_2\right),\frac{7}{3}\left(x_1+x_2\right)\right)\\
&= \left(\frac{3}{4}\left(x_1+x_2\right),\frac{21}{20}\left(x_1+x_2\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. $\leq_k$ tanımından ve ayrıca üçgen eşitsizliği uygulanırsa $0\leq x_1,x_2\leq 1$ olduğundan

$$\frac{2}{3}\left|x_1-x_2\right| \leq \frac{2}{3}\left(x_1+x_2\right) \leq \frac{3}{4}\left(x_1+x_2\right)$$

ve

$$\frac{1}{2}\left|x_1-x_2\right| \leq \frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right) \leq \frac{21}{20}\left(x_1+x_2\right)$$

olup istenilen sağlanır.

c) Her $(x_1, 0)$, $(0, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned} d\left(T\left(x_1,0\right),T\left(0,x_2\right)\right) &= d\left(\left(0,x_1\right),\left(\frac{x_2}{2},0\right)\right) \\ &= \left(x_1+\frac{2}{3}x_2,\frac{2}{3}x_1+\frac{x_2}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d\left(\left(x_1,0\right),T\left(x_1,0\right)\right) &= \left(\frac{7}{3}x_1,\frac{5}{3}x_1\right) \\ d\left(\left(0,x_2\right),T\left(0,x_2\right)\right) &= \left(\frac{5}{3}x_2,\frac{7}{3}x_2\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan değerler (4.2) eşitsizliğinin sağ yanında yerine yazılırsa

$$\frac{9}{20}\left[\begin{array}{c} d\left(\left(x_1,0\right),T\left(x_1,0\right)\right) \\ +d\left(\left(0,x_2\right),T\left(0,x_2\right)\right) \end{array}\right]=\left(\frac{21}{20}x_1+\frac{3}{4}x_2,\frac{3}{4}x_1+\frac{21}{20}x_2\right)$$

bulunur. $\leq_k$ tanımından

$$x_1+\frac{2}{3}x_2 \leq \frac{21}{20}x_1+\frac{3}{4}x_2$$

ve

$$\frac{2}{3}x_1+\frac{x_2}{2} \leq \frac{3}{4}x_1+\frac{21}{20}x_2$$

istenilen sağlanır. $\mathbb{R}^2$ koordinat sıralaması ile Arşimedyan Riesz uzayı ve (X, d, E) E-tam vektör metrik uzay olduğundan T dönüşümünün Teorem 4.2.1'den X içinde bir tek sabit noktası vardır. Ancak T dönüşümü X üzerindeki reel değerli metrikte tanımlanmadığından Kannan sabit nokta teoremi, Teorem 3.6.1 için uygulanamaz.

Örnek

Koordinat sıralaması ile $\mathbb{R}^2$ alınsın. $E = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vektör metrik dönüşümü her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) = \left(\frac{2}{3}|x-y|, \frac{3}{4}|x-y|\right)$$

biçiminde ve $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü de her $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{x}{4}$ biçiminde tanımlansın. Burada $q = \frac{1}{3}$ olmak üzere T dönüşümü her $x, y \in X$ için (4.2) eşitsizliğini sağlar.

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= d\left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}\left|\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right|, \frac{3}{4}\left|\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right|\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}|x-y|, \frac{3}{16}|x-y|\right) \\ d(x,Tx) &= d\left(x, \frac{x}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}\left|x-\frac{x}{4}\right|, \frac{3}{4}\left|x-\frac{x}{4}\right|\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}|x|, \frac{9}{16}|x|\right) \\ d(y,Ty) &= d\left(y, \frac{y}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}\left|y-\frac{y}{4}\right|, \frac{3}{4}\left|y-\frac{y}{4}\right|\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}|y|, \frac{9}{16}|y|\right) \end{aligned}$$

olur ve ayrıca

$$\frac{1}{3}\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right] = \left(\frac{1}{6}(|x|+|y|), \frac{3}{16}(|x|+|y|)\right)$$

bulunur. Koordinat sıralaması tanımından

$$\frac{1}{6}|x-y| \leq \frac{1}{6}(|x|+|y|)$$

ve

$$\frac{3}{16}|x-y| \leq \frac{3}{16}(|x|+|y|)$$

sağlanır. $(\mathbb{R}, d, \mathbb{R}^2)$ E-tam vektör metrik uzay olduğundan Teorem 4.2.1'den T dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır.

Vektör metrik uzaylarda Teorem 4.1.1, Teorem 4.2.1'nun genellemesi değildir.

Örnek

Örnek 4.2'de $X = [0,1]$ olmak üzere d vektör metriği $d : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ve $T : [0,1] \to [0,1]$ dönüşümü de aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & , \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{x}{5} & , \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$(X, d, \mathbb{R}^2)$ E-tam vektör metrik uzaydır. T dönüşümü $x = \frac{1}{2}$ noktasında sürekli değildir. Bu yüzden Teorem 4.1.1'deki büzülme şartı sağlanamaz. Ancak T dönüşümü $q = \frac{4}{9}$ için (4.2) eşitsizliği sağlar.

$$d(Tx, Ty) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}|x-y|, \frac{3}{16}|x-y|\right) & , \quad x, y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{30}|5x-4y|, \frac{3}{80}|5x-4y|\right) & , \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), y \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \\ \left(\frac{1}{30}|4x-5y|, \frac{3}{80}|4x-5y|\right) & , \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{2}{15}|x-y|, \frac{3}{20}|x-y|\right) & , \quad x, y \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$d(x, Tx) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}x, \frac{9}{16}x\right) & , \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{8}{15}x, \frac{3}{5}x\right) & , \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

ve

$$d(y, Ty) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}y, \frac{9}{16}y\right) & , \quad y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{8}{15}y, \frac{3}{5}y\right) & , \quad y \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$d(x,Tx)+d(y,Ty)=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}(x+y),\frac{9}{8}(x+y)\right) & , \quad x,y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{15x+16y}{30},\frac{45x+48y}{80}\right) & , \quad x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),y\in\left[\dfrac{1}{2},1\right] \\ \left(\frac{16x+15y}{30},\frac{48x+45y}{80}\right) & , \quad x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right],y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{16}{15}(x+y),\frac{6}{5}(x+y)\right) & , \quad x,y\in\left[\dfrac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

elde edilir. Bulunan değerler (4.2) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa ve $\leq_k$ tanımından

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{6}|x-y|\leq\frac{4}{9}\frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{3}{16}|x-y|\leq\frac{4}{9}\frac{9}{8}(x+y) \end{array}\right. , \quad x,y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{30}|5x-4y|\leq\frac{4}{9}\frac{15x+16y}{30} \\ \frac{3}{80}|5x-4y|\leq\frac{4}{9}\frac{45x+48y}{80} \end{array}\right. , \quad x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),y\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$$

ve

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{30}|4x-5y|\leq\frac{4}{9}\frac{16x+15y}{30} \\ \frac{3}{80}|4x-5y|\leq\frac{4}{9}\frac{48x+45y}{80} \end{array}\right. , \quad x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right],y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{15}|x-y|\leq\frac{4}{9}\frac{16}{15}(x+y) \\ \frac{3}{20}|x-y|\leq\frac{4}{9}\frac{6}{5}(x+y) \end{array}\right. , \quad x,y\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$$

Bu örnekte olduğu gibi (4.2) eşitsizliğini sağlayan dönüşümün sürekli olması gerekmez.

4.3. Chatterjee Sabit Nokta Teoremi

Metrik uzaylarda Kannan sabit nokta teoreminden yola çıkarak Chatterjee tarafından verilen sabit nokta teoreminin vektör metrik uzaylardaki ispatı ve örnekleri aşağıda verilmiştir.

4.3.1. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, (X, d, E) E-tam vektör metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d\,(Tx, Ty) \leq q\,\left[d\,(x, Ty) + d\,(y, Tx)\right] \tag{4.3}$$

olacak biçimde $q \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa T dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Herhangi bir $x \in X$ için $(T^n x)$ dizisini ele alalım. (4.3) eşitsizliğinde x yerine $T^{n-1}x$ ve y yerine $T^n x$ yazılıp $0 \leq q < \frac{1}{2}$ iken ayrıca üçgen eşitsizliği ve T dönüşümünün hipotezdeki tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
d(T^n x, T^{n+1}x) &\leq q\,[d(T^{n-1}x, T^{n+1}x) + d(T^n x, T^n x)] \\
&= q\,d(T^{n-1}x, T^{n+1}x) \\
&\leq q\,[d(T^{n-1}x, T^n x) + d(T^n x, T^{n+1}x)] \\
&\leq \frac{q}{1-q}\,d(T^{n-1}x, T^n x) \\
&\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 d(T^{n-2}x, T^{n-1}x) \\
&\leq \cdots \\
&\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^n d(x, Tx)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $(T^n x)$ dizisinin E-Cauchy dizisi olduğunu gösterirken her $n, r \in \mathbb{N}$ için üçgen eşitsizliği ile birlikte yukarıda bulduğumuz eşitsizliği kullanırsak

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n+r} x) &\leq d(T^n x, T^{n+1} x) + d(T^{n+1} x, T^{n+2} x) + \cdots + d(T^{n+r-1} x, T^{n+r} x) \\ &\leq \left[\left(\frac{q}{1-q} \right)^n + \left(\frac{q}{1-q} \right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{q}{1-q} \right)^{n+r-1} \right] d(x, Tx) \\ &\leq \left(\frac{q}{1-q} \right)^n \frac{q}{1-q} d(x, Tx) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $0 \leq q < \frac{1}{2}$ olduğundan $0 \leq \dfrac{q}{1-q} < 1$ olması ve E Riesz uzayının Arşimedyan olmasından $(T^n x)$ dizisi E-Cauchy olur. X vektör metrik uzayı E-tam olduğundan $T^n x \overset{d,E}{\to} z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Dolayısıyla $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E Riezs uzayında (a_n) dizisi vardır ve $d(T^n x, z) \leq a_n$ sağlanır. Bu z elemanının sabit nokta olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliği ve T dönüşümünün hipotezdeki şartından

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, T^{n+1} x) + d(T^{n+1} x, Tz) \\ &\leq d(z, T^{n+1} x) + q\left[d(T^n x, Tz) + d(z, T^{n+1} x)\right] \\ &\leq d(z, T^{n+1} x) + q\left[d(T^n x, z)\right. \\ &\quad \left. + d(Tz, z) + d(z, T^{n+1} x)\right] \\ &\leq \left(\frac{1+q}{1-q} \right) d(z, T^{n+1} x) + \left(\frac{q}{1-q} \right) d(T^n x, z) \\ &\leq \left(\frac{1+q}{1-q} \right) a_{n+1} + \left(\frac{q}{1-q} \right) a_n \\ &\leq \left(\frac{1+2q}{1-q} \right) a_n \end{aligned}$$

olur ve buradan $d(Tz, z) = 0$ yani $Tz = z$ bulunur. Sabit noktanın tekliğini göstermek için T dönüşümün başka bir sabit noktası $z' \in X$ olsun. Bu durumda

$$d(z, z') = d(Tz, Tz') \leq q\left[d(z, Tz') + d(z', Tz)\right] = 2q\, d(z, z')$$

olur $0 \leq q < \dfrac{1}{2}$ olduğundan $z = z'$ bulunur.

Örnek

Örnek 4.2'de $q = \frac{1}{3}$ alındığında T dönüşümü her $x, y \in X$ için (4.3) eşitsizliğini sağlar.

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= d\left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}\right) = \left(\frac{1}{6}|x-y|, \frac{3}{16}|x-y|\right) \\ d(x, Ty) &= d\left(x, \frac{y}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}\left|x-\frac{y}{4}\right|, \frac{3}{4}\left|x-\frac{y}{4}\right|\right) \\ d(y, Ty) &= d\left(y, \frac{x}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}\left|y-\frac{x}{4}\right|, \frac{3}{4}\left|y-\frac{x}{4}\right|\right) \end{aligned}$$

olur ve ayrıca

$$\frac{1}{3}\left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right] = \left(\frac{2}{9}\left(\left|x-\frac{y}{4}\right| + \left|y-\frac{x}{4}\right|\right), \frac{1}{4}\left(\left|x-\frac{y}{4}\right| + \left|y-\frac{x}{4}\right|\right)\right)$$

bulunur. Ters üçgen eşitsizliğinden

$$\left|x-\frac{y}{4}+y-\frac{x}{4}\right| \leq \left|x-\frac{y}{4}\right| + \left|y-\frac{x}{4}\right| \Rightarrow \frac{3}{4}|x+y| \leq \left|x-\frac{y}{4}\right| + \left|y-\frac{x}{4}\right|$$

yazılır. Bu değerler (4.3) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa ve $\leq_k$ tanımından $\frac{1}{6}|x-y| \leq \frac{2}{9}\frac{3}{4}|x+y| = \frac{1}{6}|x+y|$ ve $\frac{3}{16}|x-y| \leq \frac{1}{4}\frac{3}{4}|x+y|$ olup istenilen sağlanır $(\mathbb{R}, d, \mathbb{R}^2)$ E-tam vektör metrik uzay olduğundan Teorem 4.3.1'den T dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır.

4.4. Reich Sabit Nokta Teoremi

Bu kısımda metrik uzaylarda Reich tarafından verilen sabit nokta teoreminin vektör metrik uzaylardaki ispatı yapılmış ve bu teoremin Teorem 4.1.1 ile Teorem 4.2.1 ilişkisi incelenmiştir.

4.4.1. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, (X, d, E) E tam vektör metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere $a + b + c < 1$ olacak biçimde negatif olmayan a, b, c sayıları ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a\, d(x, Tx) + b\, d(y, Ty) + c\, d(x, y) \tag{4.4}$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır.

(Burada $a = b = 0$ için Teorem 4.1.1; $a = b$ ve $c = 0$ için Teorem 4.2.1 elde edilir.)

İspat

Herhangi bir $x \in X$ için $1 < n$ iken hipotezde verilen T dönüşümü şartında x yerine $T^n x$ ve y yerine $T^{n-1}x$ yazılırsa

$$\begin{aligned} d(TT^n x, TT^{n-1}x) &\leq a\, d(T^n x, TT^n x) + b\, d(T^{n-1}x, TT^{n-1}x) \\ &\quad + c\, d(T^n x, T^{n-1}x) \end{aligned}$$

olur. Burada $0 \leq b + c < 1 - a$ olduğundan $0 \leq \dfrac{b+c}{1-a} = p < 1$ olur ve eşitsizliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq p\, d(T^n x, T^{n-1}x)$$

bulunur. Benzer biçimde devam edildiğinde

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq p^n\, d(x, Tx)$$

olur. Her $n, r \in \mathbb{N}$ için üçgen eşitsizliği ve yukarıda bulunan eşitsizlikten

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n+r}x) &\leq d(T^n x, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, T^{n+2}x) + \cdots + d(T^{n+r-1}x, T^{n+r}x) \\ &= p^n \left[1 + p + \cdots + p^{r-1}\right] d(x, Tx) \\ &\leq \frac{p^n}{1-p}\, d(x, Tx) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $0 \leq p < 1$ ve E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $(T^n x)$ dizisi E-Cauchy bulunur. X E-tam vektör metrik uzay olduğundan $T^n x \overset{d,E}{\rightarrow} z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Dolayısıyla $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır ve $d(T^n x, z) \leq a_n$ sağlanır. Bu z elemanının sabit nokta olduğunu göstermek için üçgen eşitsizliği ve T

dönüşümünün hipotezdeki şartından

$$\begin{aligned}
d(z,Tz) &\leq d(z,T^{n+1}x)+d(T^{n+1}x,Tz) \\
&\leq d(z,T^{n+1}x)+a\,d(T^{n}x,T^{n+1}x)+b\,d(z,Tz)+c\,d(T^{n}x,z) \\
&\leq d(z,T^{n+1}x)+a\,\left[d(T^{n}x,z)+d(z,T^{n+1}x)\right]+b\,d(z,Tz)+c\,d(T^{n}x,z) \\
&\leq (a+c)\,d(T^{n}x,z)+(a+1)\,d(z,T^{n+1}x)+b\,d(z,Tz) \\
&\leq \frac{a+c}{1-b}\,d(T^{n}x,z)+\frac{a+1}{1-b}\,d(z,T^{n+1}x) \\
&\leq \frac{a+c}{1-b}\,a_n+\frac{a+1}{1-b}\,a_{n+1} \\
&\leq (\frac{2a+c+1}{1-b})\,a_n
\end{aligned}$$

olur ve böylece $d(Tz,z)=0$, yani $Tz=z$ bulunur. T dönüşümün başka bir sabit noktasını $z'\in X$ alarak sabit noktanın tekliğini gösterelim.

$$d(z,z')=d(Tz,Tz')\leq ad(z,Tz)+bd(z',Tz')+cd(z,z')=cd(z,z')$$

yazdığımızda $0\leq c<1$ olduğundan $z=z'$ bulunur.

Örnek

Örnek 4.1'de $a=b=\frac{9}{20}$ ve $c=\frac{1}{20}$ alındığında $(a+b+c<1)$ T dönüşümü (4.4.1) eşitsizliğini sağlar.

a) Her $(x_1,0)\,,\ (x_2,0)\in\mathbb{R}^2$ ve $0\leq x_1,x_2\leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
d\left(T\left(x_1,0\right),T\left(x_2,0\right)\right) &= d\left(\left(0,x_1\right),\left(0,x_2\right)\right)=\left(\left|x_1-x_2\right|,\frac{2}{3}\left|x_1-x_2\right|\right) \\
d\left(\left(x_1,0\right),\left(x_2,0\right)\right) &= \left(\frac{4}{3}\left|x_1-x_2\right|,\left|x_1-x_2\right|\right) \\
d\left(\left(x_1,0\right),T\left(x_1,0\right)\right) &= d\left(\left(x_1,0\right),\left(0,x_1\right)\right)=\left(\frac{7}{3}x_1,\frac{5}{3}x_1\right) \\
d\left(\left(x_2,0\right),T\left(x_2,0\right)\right) &= d\left(\left(x_2,0\right),\left(0,x_2\right)\right)=\left(\frac{7}{3}x_2,\frac{5}{3}x_2\right)
\end{aligned}$$

olur ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{1}{20} d\left(\left(x_1,0\right),\left(x_2,0\right)\right) &= \left(\frac{4}{60}\left|x_1-x_2\right|, \frac{1}{20}\left|x_1-x_2\right|\right) \\
\frac{9}{20}\left[\begin{array}{c} d\left(\left(x_1,0\right),T\left(x_1,0\right)\right) \\ +d\left(\left(x_2,0\right),T\left(x_2,0\right)\right) \end{array}\right] &= \frac{9}{20}\left(\frac{7}{3}\left(x_1+x_2\right), \frac{5}{3}\left(x_1+x_2\right)\right) \\
&= \left(\frac{21}{20}\left(x_1+x_2\right), \frac{3}{4}\left(x_1+x_2\right)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler (4.4.1) eşitsizliğinde yerine yazılıp $\preceq_k$ tanımından ve ayrıca üçgen eşitsizliği uygulanırsa $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ olduğundan

$$\left|x_1-x_2\right| \leq x_1+x_2 \leq \frac{21}{20}\left(x_1+x_2\right)+\frac{4}{60}\left|x_1-x_2\right|$$

ve

$$\frac{2}{3}\left|x_1-x_2\right| \leq \frac{2}{3}\left(x_1+x_2\right) \leq \frac{3}{4}\left(x_1+x_2\right)+\frac{1}{20}\left|x_1-x_2\right|$$

olup istenilen sağlanır.

b) Her $(0,x_1)$, $(0,x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $0 \leq x_1, x_2 < 0$ olsun.

$$\begin{aligned}
d\left(T\left(0,x_1\right),T\left(0,x_2\right)\right) &= d\left(\left(\frac{x_1}{2},0\right),\left(\frac{x_2}{2},0\right)\right) \\
&= \left(\frac{4}{3}\left|\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right|, \left|\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right|\right) \\
d\left(\left(0,x_1\right),\left(0,x_2\right)\right) &= \left(\left|x_1-x_2\right|, \frac{2}{3}\left|x_1-x_2\right|\right) \\
d\left(\left(0,x_1\right),T\left(0,x_1\right)\right) &= d\left(\left(0,x_1\right),\left(\frac{x_1}{2},0\right)\right) = d\left(\left(\frac{x_1}{2},0\right),\left(0,x_1\right)\right) \\
&= \left(\frac{4}{3}\frac{x_1}{2}+x_1, \frac{x_1}{2}+\frac{2}{3}x_1\right) = \left(\frac{5}{3}x_1, \frac{7}{3}x_1\right) \\
d\left(\left(0,x_2\right),T\left(0,x_2\right)\right) &= d\left(\left(0,x_2\right),\left(\frac{x_2}{2},0\right)\right) = \left(\frac{5}{3}x_2, \frac{7}{3}x_2\right)
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{1}{20}d\left(\left(0,x_1\right),\left(0,x_2\right)\right) &= \left(\frac{1}{20}\left|x_1-x_2\right|,\frac{1}{30}\left|x_1-x_2\right|\right)\\
\frac{9}{20}\left[\begin{array}{c} d\left(\left(0,x_1\right),T\left(0,x_1\right)\right)\\ +d\left(\left(0,x_2\right),T\left(0,x_2\right)\right)\end{array}\right] &= \frac{9}{20}\left(\frac{5}{3}\left(x_1+x_2\right),\frac{7}{3}\left(x_1+x_2\right)\right)\\
&= \left(\frac{3}{4}\left(x_1+x_2\right),\frac{21}{20}\left(x_1+x_2\right)\right)
\end{aligned}$$

bulunur $\leq_k$ tanımından ve ayrıca üçgen eşitsizliği uygulanırsa $0 \leq x_1,x_2 \leq 1$ olduğundan $\frac{2}{3}\left|x_1-x_2\right| \leq \frac{2}{3}\left(x_1+x_2\right) \leq \frac{3}{4}\left(x_1+x_2\right)+\frac{1}{20}\left|x_1-x_2\right|$ ve $\frac{1}{2}\left|x_1-x_2\right| \leq \frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right) \leq \frac{21}{20}\left(x_1+x_2\right)+\frac{1}{30}\left|x_1-x_2\right|$ olup istenilen sağlanır.

c) Her $(x_1,0)$, $(0,x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $0 \leq x_1,x_2 \leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
d\left(T\left(x_1,0\right),T\left(0,x_2\right)\right) &= d\left(\left(0,x_1\right),\left(\frac{x_2}{2},0\right)\right) = d\left(\left(\frac{x_2}{2},0\right),\left(0,x_1\right)\right)\\
&= \left(x_1+\frac{2}{3}x_2,\frac{2}{3}x_1+\frac{x_2}{2}\right)\\
d\left(\left(x_1,0\right),\left(0,x_2\right)\right) &= \left(\frac{4}{3}x_1+x_2,x_1+\frac{2}{3}x_2\right)\\
d\left(\left(x_1,0\right),T\left(x_1,0\right)\right) &= \left(\frac{7}{3}x_1,\frac{5}{3}x_1\right)\\
d\left(\left(0,x_2\right),T\left(0,x_2\right)\right) &= \left(\frac{5}{3}x_2,\frac{7}{3}x_2\right)
\end{aligned}$$

olur ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{1}{20}d\left(\left(x_1,0\right),\left(0,x_2\right)\right) &= \left(\frac{1}{15}x_1+\frac{1}{20}x_2,\frac{1}{20}x_1+\frac{1}{30}x_2\right)\\
\frac{9}{20}\left[\begin{array}{c} d\left(\left(x_1,0\right),T\left(x_1,0\right)\right)\\ +d\left(\left(0,x_2\right),T\left(0,x_2\right)\right)\end{array}\right] &= \frac{9}{20}\left(\frac{7}{3}x_1+\frac{5}{3}x_2,\frac{5}{3}x_1+\frac{7}{3}x_2\right)\\
&= \left(\frac{21}{20}x_1+\frac{3}{4}x_2,\frac{3}{4}x_1+\frac{21}{20}x_2\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler (4.4.1) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa $\leq_k$ tanımından $x_1+\frac{2}{3}x_2 \leq \frac{21}{20}x_1+\frac{3}{4}x_2+\frac{1}{15}x_1+\frac{1}{20}x_2 = \frac{67}{60}x_1+\frac{16}{20}x_2$ ve $\frac{2}{3}x_1+\frac{x_2}{2} \leq \frac{3}{4}x_1+\frac{21}{20}x_2+\frac{1}{20}x_1+\frac{1}{30}x_2 = \frac{16}{20}x_1+\frac{65}{60}x_2$

olup istenilen sağlanır. $\mathbb{R}^2$ koordinat sıralaması ile Arşimedyan Riesz uzayı ve (X, d, E) E-tam vektör metrik uzay olduğundan T dönüşümünün Teorem 4.4.1'den X içinde bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 4.4.1; Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1'in genellemesidir.

Örnek

Koordinat sıralaması ile $\mathbb{R}^2$ alınsın. $X = [0, 1]$ ve $(X, d, \mathbb{R}^2)$ vektör metrik uzay olmak üzere $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü her $x, y \in X$ için $d(x, y) = \left(\frac{2}{3}|x-y|, \frac{1}{3}|x-y|\right)$ biçiminde ve $T : X \to X$ dönüşümü de $0 \leq x < 1$ için $Tx = \frac{1}{3}$ ve $T(1) = \frac{1}{6}$ biçiminde tanımlansın. T dönüşümü X üzerinde sürekli olmadığından Teorem 4.1.1 şartını sağlayamaz. Ayrıca $x = 0$ ve $y = \frac{1}{3}$ için

$$d\left(T(0), T\left(\frac{1}{3}\right)\right) = d\left(0, \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{2}{27}, \frac{1}{27}\right)$$

ve

$$d(0, T(0)) + d\left(\frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3}\right)\right) = d(0, T(0)) + d\left(\frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{27}, \frac{2}{27}\right)$$

olup

$$d\left(T(0), T\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[d(0, T(0)) + d\left(\frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right]$$

bulunduğundan Teorem 4.2.1 şartını sağlayamaz. Ancak $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{9}$ ve $c = \frac{1}{3}$ için

a) Her $x, y \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) = d\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) = \left(\frac{2}{9}|x-y|, \frac{1}{9}|x-y|\right)$$

ve denklemde gerekli olan diğer eşitlikler bulunursa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}d\left(x,Tx\right) &= \frac{1}{6}d\left(x,\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{4}{9}x,\frac{2}{9}x\right)=\left(\frac{2}{27}x,\frac{1}{27}x\right)\\
\frac{1}{9}d\left(y,Ty\right) &= \frac{1}{9}d\left(y,\frac{y}{3}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{4}{9}y,\frac{2}{9}y\right)=\left(\frac{4}{81}y,\frac{2}{81}y\right)\\
\frac{1}{3}d\left(x,y\right) &= \left(\frac{2}{9}\left|x-y\right|,\frac{1}{9}\left|x-y\right|\right)
\end{aligned}$$

olup

$$d\left(Tx,Ty\right)\leq_k \frac{1}{6}d\left(x,Tx\right)+\frac{1}{9}d\left(y,Ty\right)+\frac{1}{3}d\left(x,y\right)$$

yazılır ve dolayısıyla (4.4) eşitsizliği sağlanır.

b) $x=y=1$ olduğunda $d\left(T\left(1\right),T\left(1\right)\right)=d\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=(0,0)$ olduğundan (4.4) eşitsizliği sağlanır.

c) $x=1$ ve $0\leq y<1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
d\left(T\left(1\right),Ty\right) &= d\left(\frac{1}{6},\frac{y}{3}\right)=\left(\frac{2}{18}\left|1-y\right|,\frac{1}{18}\left|1-y\right|\right)\\
\frac{1}{6}d\left(1,T\left(1\right)\right) &= \frac{1}{6}d\left(1,\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{10}{108},\frac{5}{108}\right)\\
\frac{1}{9}d\left(y,Ty\right) &= \left(\frac{4}{81}y,\frac{2}{81}y\right)\\
\frac{1}{3}d\left(1,y\right) &= \left(\frac{2}{9}\left|1-y\right|,\frac{1}{9}\left|1-y\right|\right)
\end{aligned}$$

olup (4.4) eşitsizliği sağlanır.

4.5. Ćirić Sözdebüzülme Dönüşümü

Metrik uzaylarda Ćirić tarafından tanımlanan sözdebüzülme dönüşümü ve bu dönüşüme bağlı sabit nokta teoremi vektör metrik uzaylarda incelenmiştir.

4.5.1. Tanım

E Riesz uzayı, (X, d, E) vektör metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$u\,(x, y) \in \{d(x, y), d(Tx, x), d(Tx, y), d(Ty, y), d(Ty, x)\}$$

olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\, u(x, y)$$

olacak biçimde $\lambda \in (0, 1)$ sayısı varsa T dönüşümüne sözdebüzülme dönüşümü denir.

Aşağıdaki teoremin ispatı, [23] çalışmasındaki ispat yöntemi temel alınarak yapılmıştır.

4.5.2. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, (X, d, E) E-tam vektör metrik uzay ve $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ iken $T : X \to X$ sözdebüzülme dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır ve herhangi bir $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya E-yakınsar.

İspat

Herhangi bir $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisinin E-Cauchy dizisi olduğunu göstermek için ilk olarak $2 \leq n$ iken

$$d(T^n x, T^{n-1} x) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda}\; d(T^{n-1} x, T^{n-2} x) \tag{4.5}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Burada T dönüşümünün sözdebüzülme tanımından

$$d(T^n x, T^{n-1} x) = d(TT^{n-1} x, TT^{n-2} x) \leq \lambda\, u_n(x)$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} u_n(x) &\in \left\{ \begin{array}{c} d(T^{n-1}x, T^{n-2}x), d(T^n x, T^{n-1}x), d(T^n x, T^{n-2}x), \\ d(T^{n-1}x, T^{n-2}x), d(T^{n-1}x, T^{n-1}x) \end{array} \right\} \\ &= \left\{0, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x), d(T^n x, T^{n-1}x), d(T^n x, T^{n-2}x)\right\} \end{aligned}$$

olmak üzere $u_n(x)$'in alabileceği değerler için

1) $d(T^n x, T^{n-1}x) \leq \lambda\, 0 = 0$ olur.

2) $d(T^n x, T^{n-1}x) \leq \lambda\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x)$ olur.

3) $d(T^n x, T^{n-1}x) \leq \lambda\, d(T^n x, T^{n-1}x)$ buradan $(1-\lambda)\, d(T^n x, T^{n-1}x) \leq 0$ ve $0 < \lambda < 1/2$ olduğundan $d(T^n x, T^{n-1}x) = 0$ bulunur.

4) $d(T^n x, T^{n-1}x) \leq \lambda\, d(T^n x, T^{n-2}x) \leq \lambda\, d(T^n x, T^{n-1}x) + \lambda\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x)$ olduğundan $d(T^n x, T^{n-1}x) \leq \dfrac{\lambda}{1-\lambda}\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x)$ bulunur. Burada $0 < \lambda < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < -\lambda < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < 1-\lambda < 1 \Rightarrow 1 < \dfrac{1}{1-\lambda} < 2 \Rightarrow 0 < 1 - \dfrac{1}{1-\lambda} = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} < 1$ olup $\dfrac{\lambda}{1-\lambda} \in (0,1)$ bulunur.

Olası tüm durumlar incelendiğinde (4.5) eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\lambda < \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n-1}x) &\leq maks \left\{\lambda, \frac{\lambda}{1-\lambda}\right\} d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) \\ &= \frac{1}{1-\lambda}\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) \end{aligned}$$

olur ve $\beta = \frac{1}{1-\lambda}$ alınıp benzer biçimde devam edilirse

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n-1}x) &\leq \beta\, d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) \\ &\leq \beta^2\, d(T^{n-2}x, T^{n-3}x) \\ &\quad \ldots \\ &\leq \beta^{n-1}\, d(Tx, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $n, r \in \mathbb{N}$ için üçgen eşitsizliği ve yukarıda bulunan eşitsizlikten

$$\begin{aligned} d(T^{n+r}x, T^n x) &\leq d(T^{n+r}x, T^{n+r-1}x) + d(T^{n+r-1}x, T^{n+r-2}x) + \cdots + d(T^{n+1}x, T^n x) \\ &\leq (\beta^{n+r-1} + \beta^{n+r-2} + \cdots + \beta^n)\, d(Tx, x) \\ &= \beta^n(\beta^{r-1} + \beta^{r-2} + \cdots + 1)\, d(Tx, x) \leq \frac{\beta^n}{1-\beta}\, d(Tx, x) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $0 \leq \beta < 1$ ve E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $(T^n x)$ dizisi E-Cauchy dizisi olur. X vektör metrik uzayı E-tam olduğundan $T^n x \overset{d,E}{\to} z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Dolayısıyla $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisi vardır ve $d(T^n x, z) \leq a_n$ sağlanır. Şimdi z noktasının T dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliğinden ve T dönüşümünün hipotezdeki koşulundan

$$d(z, Tz) \leq d(z, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, Tz) \leq d(z, T^{n+1}x) + \beta\, u_n(x, z)$$

olur. Buradaki $u_n(x, z)$ için

$$u_n(x, z) \in \left\{ d(T^n x, z), d(T^n x, T^{n+1}x), d(z, Tz), d(T^n x, Tz), d(z, T^{n+1}x) \right\}$$

yazabiliriz. Bir önceki gösterime benzer biçimde $u_n(x, z)$'nin alabileceği durumlar sırasıyla incelenirse

$$\begin{aligned} 1.\ d(z, Tz) &\leq d(z, T^{n+1}x) + \beta\, d(T^n x, z) \\ &\leq a_{n+1} + \beta\, a_n \leq (1+\beta)\, a_n \\ 2.\ d(z, Tz) &\leq d(z, T^{n+1}x) + \beta\, d(T^n x, T^{n+1}x) \\ &\leq d(z, T^{n+1}x) + \beta\, d(T^n x, z) + \beta\, d(T^{n+1}x, z) \\ &\leq a_{n+1} + \beta\, a_n + \beta\, a_{n+1} \leq (1+2\beta)\, a_n \\ 3.\ d(z, Tz) &\leq d(z, T^{n+1}x) + \beta\, d(z, Tz) \\ &\Rightarrow (1-\beta)\, d(z, Tz) \leq d(z, T^{n+1}x) \\ &\Rightarrow d(z, Tz) \leq \frac{1}{1-\beta}\, d(z, T^{n+1}x) \leq \frac{1}{1-\beta} a_{n+1} \leq \frac{1}{1-\beta} a_n \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
4.\ d(z,Tz) &\leq d(z,T^{n+1}x) + \beta\, d(T^n x, Tz) \\
&\leq d(z,T^{n+1}x) + \beta\, d(T^n x, z) + \beta\, d(z,Tz) \\
&\leq \frac{1}{1-\beta}\, d(z,T^{n+1}x) + \frac{\beta}{1-\beta}\, d(T^n x, z) \\
&\leq \frac{1}{1-\beta}\, a_{n+1} + \frac{\beta}{1-\beta}\, a_n \leq \frac{1+\beta}{1-\beta}\, a_n \\
5.\ d(z,Tz) &\leq d(z,T^{n+1}x) + \beta\, d(z,T^{n+1}x) = (1+\beta)\, d(z,T^{n+1}x) \\
&\leq (1+\beta)\, a_{n+1} \leq (1+\beta)\, a_n
\end{aligned}
$$

bulunur. Olası tüm durumlar incelendiğinde E Riesz uzayının Arşimedyanlığından $d(z,Tz) = 0$, yani $Tz = z$ bulunur. Sabit noktanın tekliğini göstermek için T dönüşümün başka bir sabit noktası $z' \in X$ olsun.

$$d(z,z') = d(Tz,Tz') \leq \beta\, u(z,z')$$

olur. Burada $u(z,z')$ için

$$
\begin{aligned}
u(z,z') &\in \{d(z,z'), d(Tz,z), d(Tz,z'), d(Tz',z'), d(Tz',z)\} \\
&= \{0, d(z,z')\}
\end{aligned}
$$

yazabiliriz ve $u(z,z')$'nin olası durumları incelendiğinde

1. $d(z,z') \leq \beta\, 0 = 0$ yani $z = z'$ bulunur.
2. $d(z,z') \leq \beta\, d(z,z')$ olup $1-\beta < 1$ olduğundan $z = z'$ bulunur.

Vektör metrik uzaylarda tanımlanan sözdebüzülme dönüşümlerinin vektörel sürekli olması gerekmez ancak dönüşümün sabit noktasında vektörel süreklidirler.

4.5.3. Teorem

E-tam vektör metrik uzay üstündeki her sözdebüzülme dönüşümü sabit noktasında vektörel süreklidir.

İspat

E Arşimedyan Riesz uzayı, (X, d, E) E-tam vektör metrik uzay ve $T : X \to X$ sözdebüzülme olmak üzere $z \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktası olsun. Teorem (4.5.2)'den herhangi bir $x \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi z noktasına E-yakınsaktır. Bu da $d(T^n x, z) \leq a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde (a_n) dizisinin var olmasıdır. Burada T dönüşümünün x noktasında vektörel sürekli olduğunu; yani $T^n x \overset{d,E}{\to} z$ iken $TT^n x \overset{d,E}{\to} Tz = z$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} u_n(x,z) &\in \{d(T^n x, z), d(T^n x, TT^n x), d(T^n x, Tz), d(TT^n x, z), d(Tz, z)\} \\ &= \{0, d(T^n x, z), d(T^n x, TT^n x), d(TT^n x, z)\} \end{aligned}$$

olmak üzere T dönüşümünün sözdebüzülme tanımından $\lambda \in (0, 1)$ iken

$$d(TT^n x, Tz) \leq \lambda\, u_n(x, z)$$

bulunur. $u_n(x, z)$ alabileceği değerlere göre

1) $d(TT^n x, Tz) \leq \lambda 0 = 0$ olup $TT^n x = Tz = z$ olur.
2) $d(TT^n x, Tz) \leq \lambda d(T^n x, z) \leq \lambda a_n \downarrow 0$ olur.
3) $d(TT^n x, Tz) \leq \lambda d(T^n x, TT^n x) \leq \lambda \left[d(T^n x, z) + d(z, TT^n x)\right] \leq \lambda \left[a_n + a_{n+1}\right] \leq 2\lambda a_n \downarrow 0$ bulunur.
4) $d(TT^n x, Tz) \leq \lambda d(TT^n x, z) = \lambda d(TT^n x, Tz)$ olup buradan $(1 - \lambda) d(TT^n x, Tz) \leq 0$ ve $1 - \lambda > 0$ olduğundan $TT^n x = Tz = z$ bulunur.

Olası tüm durumlar incelendiğinde $TT^n x \overset{d,E}{\to} z$ elde edilir.

4.6. Hardy-Rogers Sabit Nokta Teoremi

Metrik uzaylarda Hardy-Rogers tarafından verilen sabit nokta teoremi, vektör metrik uzaylarda Çevik ve Altun tarafından ispatsız olarak verilmiştir [20]. Bu teoremin vektör metirk uzaylarda ispatı aşağıda verilmiştir.

4.6.1. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, (X, d, E) E-tam vektör metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere $a + b + c + e + f < 1$ olacak biçimde negatif olmayan a, b, c, e, h sayıları ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a\, d(x, Tx) + b\, d(y, Ty) + c\, d(x, Ty) + e\, d(y, Tx) + h\, d(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa bu T dönüşümünün X içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Herhangi bir $x \in X$ için T dönüşümünün hipotezde verilen şartında y yerine Tx yazılırsa

$$\begin{aligned} d(Tx, T^2x) &\leq a\, d(x, Tx) + b\, d(Tx, T^2x) + c\, d(x, T^2x) \\ &\quad + e\, d(Tx, Tx) + h\, d(x, Tx) \end{aligned}$$

olur. Eşitsizliğin sağ yanı düzenlendiğinde

$$d(Tx, T^2x) \leq \frac{a+h}{1-b}\, d(x, Tx) + \frac{c}{1-b}\, d(x, T^2x) \tag{4.6}$$

bulunur. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden,

$$d(T^2x, x) \leq d(T^2x, Tx) + d(Tx, x)$$

yazılır ve böylece

$$d(T^2x,x) - d(Tx,x) \leq d(T^2x,Tx)$$

olur. Bu son eşitsizlik (4.6) eşitsizliği ile birleştirilirse

$$d(T^2x,x) - d(Tx,x) \leq \frac{a+h}{1-b}\, d(x,Tx) + \frac{c}{1-b}\, d(x,T^2x)$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\left(1 - \frac{c}{1-b}\right) d(T^2x,x) \leq \left(\frac{a+h}{1-b} + 1\right) d(x,Tx)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$d(T^2x,x) \leq \frac{1+a+h-b}{1-b-c}\, d(x,Tx)$$

olur. Bu eşitsizlik (4.6)'de yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} d(T^2x,x) &\leq \frac{a+h}{1-b}\, d(x,Tx) + \frac{c}{1-b}\,\frac{1+a+h-b}{1-b-c}\, d(x,Tx) \\ &= \frac{a+c+h}{1-b-c}\, d(x,Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. d vektör metriğinin simetri özelliğini kullanıp, a ve c sırasıyla b ve e ile yer değiştirilirse (yani ispatın başında x yerine Tx ve y yerine x alınırsa)

$$\begin{aligned} d(T^2x,x) &\leq ad(Tx,T^2x) + bd(x,Tx) + cd(Tx,Tx) \\ &\quad + ed(x,T^2x) + hd(x,Tx) \\ &\leq \frac{b+h}{1-a}\, d(x,Tx) + \frac{e}{1-a}\, d(x,T^2x) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde devam edilirse

$$d(T^2x,x) \leq \frac{b+e+h}{1-a-e}\, d(x,Tx)$$

elde edilir. Burada

$$\beta = \min\{\frac{a+c+h}{1-b-c}, \frac{b+e+h}{1-a-e}\}$$

seçilirse

$$d(T^2x, x) \leq \beta\, d(x, Tx)$$

sağlanır. $(T^n x)$ dizisi için $n, r \in \mathbb{N}$ iken üçgen eşitsizliği ile son bulduğumuz eşitsizliği kullanırsak

$$\begin{aligned}
d(T^{n+r}x, T^n x) &\leq d(T^{n+r}x, T^{n+r-1}x) + d(T^{n+r-1}x, T^{n+r-2}x) + \\
&\quad \cdots + d(T^{n+1}x, T^n x) \\
&\leq \beta^{n+r-1}\, d(x, Tx) + \beta^{n+r-2}\, d(x, Tx) + \cdots + \beta^n\, d(x, Tx) \\
&\leq \beta^n\, (\beta^{r-1} + \beta^{r-2} + \cdots + 1)\, d(x, Tx) \\
&\leq \frac{\beta^n}{1-\beta}\, d(x, Tx)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $0 \leq \beta < 1$ ve E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $(T^n x)$ dizisi E-Cauchy dizisi bulunur. X vektör metrik uzayı E-tam olduğundan $T^n x \overset{d,E}{\rightarrow} z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Dolayısıyla $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E Riesz uzayında (a_n) dizisi vardır ve $d(T^n x, z) \leq a_n$ sağlanır. Şimdi bu z elemanının T dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliği ve T dönüşümünün hipotezdeki şartından

$$\begin{aligned}
d(z, Tz) &\leq d(z, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, Tz) \\
&\leq d(z, T^{n+1}x) + ad(T^n x, T^{n+1}x) + bd(z, Tz) \\
&\quad + cd(T^n x, Tz) + ed(T^{n+1}x, z) + hd(T^n x, z) \\
&\leq ad(T^n x, z) + ad(T^{n+1}x, z) + bd(z, Tz) + cd(T^n x, z) \\
&\quad + cd(z, Tz) + (e+1)d(T^{n+1}x, z) + hd(T^n x, z)
\end{aligned}$$

ve düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
d(z,Tz) &\leq (a+c)d(T^n x,z)+(a+1+e)d(T^{n+1}x,z)+(b+c)d(z,Tz) \\
&\leq \frac{a+c+h}{1-b-c}d(T^n x,z)+\frac{a+e+1}{1-b-c}d(T^{n+1}x,z) \\
&\leq \frac{a+h+c}{1-b-c}a_n+\frac{a+e+1}{1-b-c}a_{n+1} \\
&\leq \frac{2a+e+c+h+1}{1-b-c}a_n
\end{aligned}
$$

bulunur ve buradan $d(z,Tz)=0$, yani $Tz=z$ bulunur. Sabit noktanın tekliğini göstermek için T dönüşümünün başka bir sabit noktası $z'\in X$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
d(z,z') &= d(Tz,Tz')\leq ad(z,Tz)+bd(z',Tz') \\
&\quad +cd(z,Tz')+ed(z',Tz)+hd(z,z') \\
&= (c+e+h)d(z,z')
\end{aligned}
$$

olur ve $c+e+h<1$ olduğundan $z=z'$ bulunur.

Bu teorem vektör metrik uzaylarda verilen diğer teoremlerin bir genellemesidir. $a=b=c=e=0$ alındığında Teorem 4.1.1'i; $a=b$ ve $c=e=h=0$ alındığında Teorem 4.2.1'i; $c=e$ ve $a=b=h=0$ alındığında Teorem 4.3.1'i ve Teorem 4.5.2'de $u\,(x,y)$'nin alabileceği değerler incelenip diğerleri 0 olarak alındığında Teorem 4.5.2'i sağlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde sabit nokta teorisinin metrik uzaylarda yapılan çalışmalarına yer verilerek tarihsel gelişiminin bir kısmı sunulmuştur. Çalışmanın asıl konusu olan; Riesz uzayında değer alan vektör metrik dönüşümü yardımıyla kurulan vektör metrik uzaylar tanıtılmış, sabit nokta teorisinde verilen reel değerli klasik metrikteki temel tanım ve teoremler bu uzaylarda ifade edilmiştir. Başka bir deyişle, metrik uzaylardaki Banach, Kannan, Chatterjee, Reich ve Hardy-Rogers sabit nokta teoremlerinin; Ćirić'in sözdebüzülme dönüşümü tanımının ve sabit nokta teoreminin ispatları genelleştirilerek vektör metrik uzaylarda elde edilmiştir. Metrik uzaylarda bilinen diğer sabit nokta teoremlerinin vektör metrik uzaylardaki ispatları ve hangi koşullar altında sağlanıp sağlanmadıkları benzer biçimde incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Banach,S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae,* 3, 133–181.

2. Joseph, J.E. and Kwack, M.H. (1999). Alternative approaches to proofs of contraction mapping fixed point theorems. *Missouri Journal of Mathematical Sciences,* 11, 167-175.

3. Palais, R.S. (2007). A simple proof of the Banach contraction principle. *Journal of Fixed Point Theory and Applications,* 2, 221-223.

4. Boyd, D.W. and Wong, J.S.W. (1968). Another proof of contraction mapping theorem. *Canadian Mathematical Bulletin,* 11, 605-606.

5. Edelstein, M. (1962). On fixed and periodic points under contractive mappings. *Journal of the London Mathematical Society,* 37, 74-79.

6. Rakotch, E. (1962). A note on contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 13, 459-465.

7. Boyd, D.W. and Wong, J.S.W. (1969). On nonlinear contractions. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 20, 458-464.

8. Meir, A. and Keeler, E. (1969) A theorem on contraction mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 28, 326-329.

9. Kannan, R. (1969) Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society,* 60, 71-76.

10. Chatterjee, S.K. (1972). Fixed point theorems. *Comptes Rendus de l 'Academie Bulgare des Sciences,* 15, 727-730.

11. Fisher, B. (1975) A fixed point theorem. *Mathematics Magazine,* 48, 223-225.

12. Zamfirescu, T. (1972). Fixed point theorems in metric spaces. *Archiv der Mathematik,* 23, 292-298.

13. Rhoades, B.E. (1977). A comparison of various definitions of contractive mappings. *Transactions of the American Mathematical Society,* 26, 257-290.

14. Ćirić, Lj.B. (1971). Generalized contractions and fixed point theorems. *Publications de l'Institut Mathématique,*12(26), 19-26.

15. Reich, S. (1971). Some remarks concerning contraction mappings. *Canadian Mathematical Bulletin,*14, 121-124.

16. Hardy, G.E. and Rogers, T.D. (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin,* 16, 201-206.

17. Ćirić, Lj.B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 45, 267-273.

18. Malkowsky E. and Rakočević V. (2019). *Advanced Functional Analysis, Newyork: CRC Press, 377-423*

19. Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. (1985). *Positive Operators, Dorthrecth: Springer, 1-8.*

20. Çevik, C. and Altun İ. (2009). Vector Metric Spaces and Some Properties. *Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Schauder Center*, 34, 375-382.

21. Çevik, C. (2014). On continutiy functions between vector metric spaces. *Journal of Function Spaces,* Volume 2014, 6.

22. Bryant, V. W. (1968). A remark on a fixed point theorem for iterated mappings. *American Mathematical Monthly,* 75, 399-400.

23. Altun, İ. and Çevik, C. (2011) Some common fixed point theorems in vector metric spaces, *Filomat,* 25:1, 105-113.

GAZİ GELECEKTİR...