

**T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR ELİPSTE ANALİTİK OLAN FONKSİYONLARIN FABER
KATSAYILARININ BAZI LİNEER KOMBİNASYONLARI İÇİN
KESKİN EŞİTSİZLİKLER**

**ERTUĞ TÜRK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GEBZE
2021**

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR ELİPSTE ANALİTİK OLAN
FONKSİYONLARIN FABER KATSAYILARININ
BAZI LİNEER KOMBİNASYONLARI İÇİN
KESKİN EŞİTSİZLİKLER

ERTUĞ TÜRK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. ENGİN HALİLOĞLU

GEBZE

2021

T.R.

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**SHARP INEQUALITIES FOR CERTAIN LINEAR
COMBINATIONS OF THE FABER COEFFICIENTS OF
FUNCTIONS ANALYTIC IN AN ELLIPSE**

ERTUĞ TÜRK

**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATIC**

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. ENGİN HALİLOĞLU

GEBZE

2021



YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 29/01/2021 tarih ve 2021/05 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 11/02/2021 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Ertuğ TÜRK 'ün tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU

ÜYE : Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU

ÜYE : Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../.....tarih ve/..... sayılı kararı.

ÖZET

$\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ birim dairesinde analitik fonksiyonlar için klasik S, C, P ve $S^{(2)}$ sınıfları mevcuttur. Bu çalışmada yukarıdaki sınıfların benzeri olan sınıflar

$$E_r = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2} < 1, r > 1 \right\}$$

eliptik bölgesinde $S(E_r), C(E_r), P(E_r)$ ve $S^{(2)}(E_r)$ sınıfları olarak tanımlanmıştır. Bu sınıflara ait fonksiyonların Faber katsayılarının bazı lineer kombinasyonları için keskin eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yalınkat Fonksiyonlar, Faber Polinomu, Faber Serisi, Faber Katsayıları.

SUMMARY

There are classical classes S , C , P and $S^{(2)}$ of functions analytic in the unit disk $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$. In this study, the classes $S(E_r)$, $C(E_r)$, $P(E_r)$ and $S^{(2)}(E_r)$ that are similar to the classes above are defined in the elliptical domain

$$E_r = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\left(1+\frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^2} < 1, r > 1 \right\}.$$

We have obtained sharp inequalities for certain linear combinations of Faber coefficients of functions belonging to these classes.

Keywords: Univalent Functions, Faber Polynomial, Faber Series, Faber Coefficients.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU'na,
Desteklerini daima yanımda hissettiđim aileme,
Sabır ve motivasyon gerektiren her aşamada destek olan sevgili eşim Ezgi TÜRK'e teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	2
2. FABER POLİNOMLARI VE FABER SERİLERİ	9
2.1. Faber Polinomları	9
2.2. Faber Serileri	17
3. BASİT BAĞLANTILI VE SINIRLI BİR BÖLGE İÇİNDEKİ YALINKAT FONKSİYONLAR	21
3.1. Bir Eliptik Bölge İçindeki Yalınkat Fonksiyonlar	23
4. ANA SONUÇLAR	29
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kisaltmalar

\mathbb{C}	: Karmaşık düzlem
\mathbb{D}	: Birim daire
Δ	: Birim dairenin dışı
S	: Normalize yalınkat fonksiyonlar
$S^{(2)}$: Tek yalınkat fonksiyonlar
S^*	: Yıldızlı fonksiyonlar
C	: Konveks fonksiyonlar
P	: Pozitif reel kısımlı fonksiyonlar
Σ	: Δ 'daki yalınkat fonksiyonlar
Σ'	: Σ 'daki sıfırlanmayan fonksiyonlar
Σ_0	: Σ 'daki $b_0 = 0$ olan fonksiyonlar
$\tilde{\Sigma}$: Tam tasvir
$k(z)$: Koebe fonksiyonu

1. GİRİŞ

Yalınkat fonksiyonlar ilk olarak 20. yüzyılın başlarında Koebe tarafından araştırılmıştır. Bu alanda yaptığı çalışmalarla önemli sonuçlara ulaşmış ve başta dönemin matematikçileri olmak üzere pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. 1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen katsayı eşitsizliği uzun yıllar ispatlanamamış ve bu alanın önemli bir problemi olarak kalmıştır. Bieberbach Tahmini, S sınıfındaki fonksiyonların Taylor seri açılımındaki a_n katsayıları için $|a_n| \leq n$ sağlandığı tahminiydi [1]. Bu önemli problem, 1984 yılında Louis de Branges'ın yaptığı ispatla çözüme kavuşmuştur [3].

Biz burada dairesel olmayan bölgelerde analitik olan fonksiyonların katsayı problemlerini inceleyeceğiz. Basit bağlantılı bölgelerde analitik olan fonksiyonların seriye açılması mümkündür. Faber Serisi denilen bu seri, 1903 yılında Faber tarafından geliştirilmiştir [8]. Basit bağlantılı bir E bölgesinde analitik olan bir f fonksiyonunun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n F_n(z) \quad (1.1)$$

şeklindeki Faber serisi E 'nin kompakt alt kümelerinde düzgün olarak $f(z)$ fonksiyonuna yakınsar. Burada $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ sırasıyla E bölgesinin Faber polinomları ve Faber katsayıları olarak adlandırılır. E bölgesinin Faber polinomları E 'nin dış bölgesinin birim dairenin dış bölgesine tasvir fonksiyonu cinsinden tanımlanır. Ayrıca birim dairedeki S sınıfına ait fonksiyonlarla çalışmak için ise E 'nin iç bölgesinin birim dairenin iç bölgesine tasvir fonksiyonu gerekecektir. Hem dış ve hem de iç tasvir fonksiyonu ile aynı anda çalışmak oldukça zor olacağından

$$E_r = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2} < 1, r > 1 \right\} \quad (1.2)$$

eliptik bölgesini ele alacağız. Bu tezdeki amacımız E_r bölgesindeki bazı fonksiyon sınıfları için Faber katsayılarının çeşitli lineer kombinasyonlarına ait keskin eşitsizlikler elde etmektir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Şimdi bazı temel tanım ve teoremleri verelim [2]:

Tanım 1.1: $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tek değerli f fonksiyonu birebir ise, yani aynı değeri iki kez almıyorsa f , D 'de yalınkat fonksiyondur, denir.

Tanım 1.2: f fonksiyonu $z_0 \in D$ 'nin en az bir komşuluğunda yalınkat ise f , z_0 noktasında yerel olarak yalınkattır denir.

Tanım 1.3: z_0 noktasında analitik bir f fonksiyonunun bu noktada yerel olarak yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır. Bu takdirde f fonksiyonuna z_0 noktasında konformdur denir. D bölgesinin her noktasında konform olan tasvire de D bölgesinde konformdur denir.

f , D bölgesinde yalınkat ise D bölgesinin her noktasında yerel olarak yalınkattır. Tersini doğru değildir. Örneğin, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $z \in D$ için $f(z) = z^2$ olsun. f , D 'de analitik ve her $z_0 \in D$ için $f'(z_0) = 2z_0 \neq 0$. f , D 'nin her noktasında yerel olarak yalınkattır ancak f , D 'de yalınkat değildir. Çünkü her $z \in D$ için $f(z) = f(-z)$ sağlanır.

Teorem 1.4 (Riemann Tasvir Teoremi): $\Omega \subset \mathbb{C}$ ($\Omega \neq \mathbb{C}$) basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in \Omega$ olsun. Bu bölgeyi \mathbb{D} birim dairesi üzerine birebir ve konform olarak tasvir eden ve $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan tek bir f fonksiyonu vardır.

Riemann Tasvir Teoremi sayesinde yalınkatlıkla alakalı problemler üzerinde çalışırken herhangi bir basit bağlantılı bölge yerine \mathbb{D} birim dairesini kullanmak mümkün olmuştur.

Tanım 1.5: $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ birim dairesinde analitik ve yalınkat olan ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalizasyon koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfı S ile gösterilir.

S sınıfındaki fonksiyonlar normalizasyon koşullarını sağladığından

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_nz^n, \quad z \in \mathbb{D} \quad (1.3)$$

Taylor açılımına sahiptir.

Eğer elimizde \mathbb{D} birim dairesinde analitik ve yalınkat olan fakat yukarıdaki normalizasyon koşullarını sağlamayan bir g fonksiyonu varsa $f(z) = \frac{g(z)-g(0)}{g'(0)}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon için $f \in S$ diyebiliriz. Böylece yapılan bu normalizasyon işlemi sınıfın genelliğini sınırlamaz.

S 'i koruyan bazı temel dönüşümler şunlardır [2]:

i) $f \in S$ ve $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ise $g \in S$ 'tir .

ii) $f \in S$ ve $g(z) = \frac{f(e^{i\theta}z)}{e^{i\theta}}$ ise $g \in S$ 'tir. Bu dönüşüme dönme dönüşümü

adı verilir.

iii) $f \in S$ ve $g(z) = \frac{f(rz)}{r}$, $0 < r < 1$ ise $g \in S$ 'tir.

iv) $f \in S$ ve $g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)-f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2).f'(\alpha)}$, $(|\alpha| < 1)$ ise

$g \in S$ 'tir. Bu dönüşüme daire otomorfizmi adı verilir.

v) $f \in S$ ve ψ , f 'in değer kümesinde analitik ve yalınkat olsun.

$(\psi : f(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ analitik ve yalınkat) $\psi(0) = 0$ ve $\psi'(0) = 1$ koşulları sağlansın. O halde $g = \psi \circ f \in S$ 'tir.

vi) $f \in S$ ve $f(z) \neq \omega$ ($\omega \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$) olsun. Bu durumda $g(z) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)}$

ise $g \in S$ 'tir.

vii) $f \in S$ ve $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ ise $g \in S$ 'tir. Bu dönüşüme f fonksiyonunun karekök dönüşümü denir.

Tanım 1.6:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{D} \quad (1.4)$$

fonksiyonu Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır.

S sınıfından olan bir fonksiyon için $|a_n| \leq n$, $n = 2, 3, \dots$, eşitsizliğinin sağlandığını söylemiştik. Eşitlik durumu ise $k(z)$ ile belirtilen Koebe fonksiyonu ve onun tüm θ açılı dönmeleri olan

$$k_{\theta}(z) = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} z) = \frac{z}{(1-ze^{i\theta})^2} \quad (1.5)$$

fonksiyonlar için sağlanır.

Tanım 1.7: S sınıfındaki tek fonksiyonları içeren S 'in alt sınıfıdır.

Bu sınıftan olan her fonksiyon, S deki bir fonksiyona karekök dönüşümü uygulanarak elde edilir. Yani, $h \in S^{(2)}$ ise $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$ olacak şekilde bir $f \in S$ bulunur. Bu sınıftan olan fonksiyonlar,

$$f(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 \dots = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{D} \quad (1.6)$$

Taylor açılımına sahiptir.

Koebe fonksiyonuna karekök dönüşümü uygulanarak elde edilen tek fonksiyon $o(z)$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} o(z) &= \sqrt{k(z^2)} = \sqrt{\frac{z^2}{(1-z^2)^2}} = \frac{z}{1-z^2} \\ &= z + z^3 + z^5 \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Tanım 1.8: Kompleks düzlemde bir bölge içinde alınan sabit bir nokta ile bu bölge içindeki herhangi bir nokta doğrusal olarak birleştirildiğinde oluşan doğru parçası bu bölge içinde kalıyorsa bu bölgeye, alınan sabit noktaya göre yıldızlıdır denir. Birim daireyi yıldızlı bir bölge üzerine konform olarak tasvir eden fonksiyona yıldızlı fonksiyon denir. Yıldızlı fonksiyonları içeren S 'in alt sınıfı S^ ile gösterilir.*

Tanım 1.9: Her noktasına göre yıldızlı olan bölgeye konveks bölge denir. Bir konveks fonksiyon, birim daireyi konveks bir bölge üzerine konform olarak tasvir eder fonksiyon olarak tanımlanır. Konveks fonksiyonları içeren S 'in alt sınıfı C ile gösterilir.

$C \subset S^* \subset S$ olduğu açıktır. Koebe fonksiyonu yıldızlı fonksiyondur fakat konveks fonksiyon değildir. Çünkü Koebe fonksiyonu, birim daireyi negatif reel eksenin $-\frac{1}{4}$ 'ten sonsuza kadar olan kısmı dışında tüm düzleme tasvir eder. Gerçekten de, bunu

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4} \quad (1.8)$$

şeklinde yazarak görebiliriz.

C sınıfındaki tüm fonksiyonlar için $|a_n| \leq 1$ olduğunu Loewner ispatlamıştır [9]. Ayrıca Loewner bu eşitsizlikteki eşitliğin ancak ve ancak

$$c(z) = \frac{z}{1-z} \quad (1.9)$$

ve bu fonksiyonun tüm dönmeleri için sağlandığını göstermiştir.

Tanım 1.10: \mathbb{D} bölgesinde analitik $f(0) = 1$ ve $\text{Re}\{f(z)\} > 0$ koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfıdır.

Bu sınıftan olan fonksiyonlar

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad (1.10)$$

seri açılımına sahiptir. Katsayılar için $|b_n| \leq 2$ olduğu Caratheodory tarafından ispatlanmış ve Caratheodory Lemması adını almıştır [4]. Ayrıca Caratheodory bu eşitsizlikte eşitliğin ancak ve ancak

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad (1.11)$$

fonksiyonu ve bu fonksiyonun tüm dönmeleri için sağlandığını göstermiştir.

Tanım 1.11: S sınıfı ile yakından alakalı bu sınıfın fonksiyonları

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} \dots = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (1.12)$$

açılımına sahiptir ve $\Delta = \{z: |z| > 1\}$ bölgesinde sonsuzda 1 rezidü ile basit kutbu olması dışında yalınkat ve analitiktir.

$g \in \Sigma$ olan her bir fonksiyon Δ 'yı bir E kompakt bağlantılı kümesinin tümleyenine tasvir eder. $0 \in E$ olduğunda Δ bölgesinde her z için $g(z) \neq 0$ sağlayan $g \in \Sigma$ fonksiyonların sınıfı Σ' ile gösterilir. Sabit terim b_0 sayısı uygun bir şekilde ayarlanarak $g \in \Sigma$ olan her fonksiyon Σ' sınıfına ait olacaktır.

$f \in S$ için $g(z) = \left\{ f\left(\frac{1}{z}\right) \right\}^{-1} = z - a_2 + (a_2^2 - a_3) \frac{1}{z} + \dots$ fonksiyonu Σ' sınıfına aittir. Bu dönüşüm ters dönüşümü olarak adlandırılır ve S ile Σ' sınıfları arasında birebir bir ilişki kurar.

Σ' sınıfı karekök dönüşümü altında korunur. Gerçekten, $g \in \Sigma'$ için $G(z) = \sqrt{g(z^2)} = z(1 + b_0 z^{-2} + b_1 z^{-4} + \dots)^{\frac{1}{2}}$ olduğundan $G \in \Sigma'$ sağlanır. Bu işlemin her $g \in \Sigma$ olan fonksiyona uygulanamayacağını, yalnızca $g \in \Sigma'$ olan fonksiyona

uygulanabileceğini gözlemlemek önemlidir. Çünkü karekökün $g(z^2) = 0$ olduğu yerde dallanma noktası olacaktır.

$b_0 = 0$ olan tüm $g \in \Sigma$ fonksiyonlardan oluşan sınıf Σ_0 ile gösterilir. Bu uygun öteleme ile sağlanabilir. Ancak verilen $g \in \Sigma$ fonksiyonunu aynı anda hem Σ_0 hem de Σ' sınıfına ait bir fonksiyona dönüştürmek her zaman mümkün olmaz.

Eğer Σ sınıfındaki fonksiyonlar Δ 'yı iki boyutlu Lebesgue ölçümü sıfır olan bir E kümesinin tümleyenine tasvir ediyorsa bu fonksiyonların sınıfını $\tilde{\Sigma}$ olarak ayırmak faydalı olacaktır. $g \in \tilde{\Sigma}$ olan fonksiyonlar tam tasvirler olarak adlandırılır.

$$g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad |z| > 1 \quad (1.13)$$

fonksiyonunun yalınkatlığı, b_n Laurent katsayılarının büyüklüğü üzerine güçlü bir kısıtlama koyar. Bunu aşağıdaki Alan Teoremi ile görmek mümkündür.

Teorem 1.12 (Alan Teoremi): Eğer $g \in \Sigma$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1 \quad (1.14)$$

dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $g \in \tilde{\Sigma}$ olduğunda sağlanır.

Sonuç 1.13: Eğer $g \in \Sigma$ ise $|b_1| \leq 1$ 'dir. Eşitlik durumu ancak ve ancak g 'nin

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z}, \quad |b_1| = 1 \quad (1.15)$$

formuna sahip olmasıyla mümkündür. Bu dönüşüm Δ 'nın uzunluğu 4 olan bir doğru parçasının tümleyeni üzerine bir konform tasviridir.

Aşağıda vereceğimiz teoremler Alan Teoremi gibi Yalınkat Fonksiyonlar Teorisinde önemli yeri olan teoremlerdir.

Teorem 1.14 (Koebe Çeyrek Teoremi): S sınıfına ait her fonksiyonun değer kümesi $\{\omega: |\omega| < \frac{1}{4}\}$ dairesini içerir.

Teorem 1.15: Her bir $f \in S$ için

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}, \quad |z| = r < 1 \quad (1.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.16 (Distorsiyon Teoremi): Her bir $f \in S$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1 \quad (1.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.17 (Büyüme Teoremi): Her bir $f \in S$ için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r < 1 \quad (1.18)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi bazı durumlarda daha kullanışlı olacak olan Distorsiyon ve Büyüme Teoremlerinin birleşimiyle oluşan aşağıdaki teoremi verelim. Hem bu teoremde hem de Distorsiyon ve Büyüme Teoreminde eşitlik durumu Koebe fonksiyonu ve onun uygun bir dönmesinde sağlanır.

Teorem 1.18: Her bir $f \in S$ için

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r < 1 \quad (1.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

2. FABER POLİNOMLARI VE FABER SERİLERİ

2.1. Faber Polinomları

Σ sınıfını $\Sigma = \{g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} : g \text{ fonksiyonu } |z| > 1 \text{ bölgesinde analitik ve yalınkat}\}$ olarak tanımlamıştık. $g \in \Sigma$ için $\frac{g(z)-t}{z}$ fonksiyonu $z = \infty$ 'un civarında analitik ve $z = \infty$ 'daki değeri 1'dir. O halde $\frac{g(z)-t}{z}$ fonksiyonu $z = \infty$ 'un civarında sıfırdan farklıdır ve böylece $\log\left(\frac{g(z)-t}{z}\right)$ fonksiyonunun ∞ civarında analitik bir dalı tanımlanabilir. Bu dalı $\log\left(\frac{g(z)-t}{z}\right)$ fonksiyonunun $z = \infty$ 'da 0 değerini alan dalı olarak seçelim. Bu fonksiyon $z = \infty$ 'da analitik olduğundan ∞ civarında

$$\log\left(\frac{g(z)-t}{z}\right) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F_m(t) z^{-m} \quad (2.1)$$

şeklinde Laurent serisine açılabilir. Burada $-\frac{1}{m}$ katsayısı sonraki adımlarda uygunluk için alınmıştır.

Bu eşitliğin her iki tarafının z 'ye göre türevini alırsak

$$\frac{g'(z)z - (g(z) - t)}{z(g(z) - t)} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(t) z^{-m-1} \quad (2.2)$$

veya

$$\frac{zg'(z)}{z(g(z) - t)} - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(t) z^{-m-1} \quad (2.3)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{zg'(z)}{g(z) - t} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(t) z^{-m} \quad (2.4)$$

elde edilir, burada $F_0(t) = 1$.

Elde ettiğimiz $\frac{zg'(z)}{g(z)-t}$ fonksiyonuna üretici fonksiyon denir. Bu eşitlikten

$$zg'(z) = [g(z) - t] \left[\sum_{m=0}^{\infty} F_m(t) z^{-m} \right] \quad (2.5)$$

yazılabilir.

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (2.6)$$

ifadesini yerine yazarsak

$$z - \sum_{n=0}^{\infty} n b_n z^{-n} = \left[z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} - t \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} F_m(t) z^{-m} \right] \quad (2.7)$$

elde edilir. Bu eşitlikte z 'in kuvvetlerinin katsayılarının eşit olmasından $F_m(t)$ fonksiyonları

$$F_0(t) = 1,$$

$$F_1(t) = t - b_0, \quad (2.8)$$

$$F_2(t) = t^2 - 2b_0 t + (b_0^2 - 2b_1),$$

$$F_3(t) = t^3 - 3b_0 t^2 + (3b_0^2 - 3b_1)t + (b_0^3 + 3b_1 b_0 - 3b_2), \dots$$

şeklinde formüle edebiliriz [2]. Her $m = 0, 1, 2, \dots$ için $F_m(t)$ fonksiyonu, m . dereceden bir monik polinom olduğu görülür.

Tanım 2.1: $\{F_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ polinomlarına $g(z)$ fonksiyonunun Faber polinomu denir [7].

Not: $\Omega \subset \mathbb{C}$ orijini içeren, basit bağlantılı, sınırlı ve kapasitesi 1 olan bir bölge olsun. Riemann Tasvir Teoremine göre $\Delta = \{z: |z| > 1\}$ bölgesini $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ bölgesine tasvir eden bir ve yalnız bir $g \in \Sigma$ fonksiyonu vardır. Bu yüzden $g(z)$ fonksiyonunun Faber polinomlarına aynı zamanda Ω 'nın Faber polinomları da denir.

Örnek 1: $g(z) = z + a$, $|z| = 1$ çemberinin dışını merkezi a ve yarıçapı 1 olan çemberin dışına tasvir eder.

$$\frac{zg'(z)}{g(z) - t} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)z^{-n} \quad (2.9)$$

olduğundan üretici fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{z}{z + a - t} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{t-a}{z}\right)} = 1 + \left(\frac{t-a}{z}\right) + \left(\frac{t-a}{z}\right)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t-a}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (t-a)^n z^{-n} \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{z: |z - a| < 1\}$ dairesinin (veya $g(z) = z + a$ fonksiyonunun) Faber polinomları

$$F_n(t) = (t - a)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

olarak elde edilir.

Örnek 2: $g(z) = z + \frac{1}{4z}$ fonksiyonu Δ bölgesini $\left\{z = x + iy : \frac{x^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1\right\}$ elipsinin dışına tasvir eder.

Gerçekten, $g(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{4}e^{-i\theta} = \frac{5}{4}\cos\theta + i\frac{3}{4}\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$ olur. $x = \frac{5}{4}\cos\theta$, $y = \frac{3}{4}\sin\theta$ ve $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ olduğundan birim çemberin

görüntüsü yukarıdaki elips olur. $g(\infty) = \infty$ olduğundan $g(z)$ birim çemberin dışını elipsin dışına tasvir eder.

$$\frac{zg'(z)}{g(z) - t} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)z^{-n} \quad (2.12)$$

olduğundan üretici fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{zg'(z)}{g(z) - t} &= \frac{z\left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)}{z - t + \frac{1}{4z}} = \frac{4z^2 - 1}{4z^2 - 4tz + 1} = 1 + \frac{4tz - 2}{4z^2 - 4tz + 1} \\ &= 1 + \frac{tz - \frac{1}{2}}{z^2 - tz + \frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Burada paydayı çarpanlarına ayırmak için $z^2 - tz + \frac{1}{4} = 0$ denkleminin köklerine z_1 ve z_2 dersek $z_1 = \frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{2}$ ve $z_2 = \frac{t - \sqrt{t^2 - 1}}{2}$ olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla son ifadeden

$$\begin{aligned} 1 + \frac{tz - \frac{1}{2}}{(z - z_1)(z - z_2)} &= 1 + \frac{tz_2 - \frac{1}{2}}{(z_2 - z_1)(z - z_2)} + \frac{tz_1 - \frac{1}{2}}{(z_1 - z_2)(z - z_1)} \\ &= 1 + \frac{\frac{t^2 - t\sqrt{t^2 - 1} - 1}{2}}{-\sqrt{t^2 - 1}(z - z_2)} + \frac{\frac{t^2 + t\sqrt{t^2 - 1} - 1}{2}}{\sqrt{t^2 - 1}(z - z_1)} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{t^2 - 1} + t}{2(z - z_1)} - \frac{\sqrt{t^2 - 1} - t}{2(z - z_2)} \\ &= 1 + \frac{z_1}{z - z_1} + \frac{z_2}{z - z_2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$= 1 + \frac{z_1}{z \left(1 - \frac{z_1}{z}\right)} + \frac{z_2}{z \left(1 - \frac{z_2}{z}\right)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_1}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_2}{z}\right)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_1^n + z_2^n}{z^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) z^{-n}$$

elde edilir. Dolayısıyla $g(z) = z + \frac{1}{4z}$ fonksiyonunun

(veya $E = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} < 1 \right\}$ eliptik bölgesinin) Faber polinomu

$$F_0(t) = 1$$

(2.15)

$$F_n(t) = z_1^n + z_2^n = 2^{-n} \left[\left(t + \sqrt{t^2 - 1} \right)^n + \left(t - \sqrt{t^2 - 1} \right)^n \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak bulunur ve bu polinomların n . dereceden monik Chebyshev polinomu olduğu görülür.

Örnek 3: $r > 1$ için $h(z) = z + \frac{1}{r^2 z}$ fonksiyonu $\Delta = \{z: |z| > 1\}$ bölgesini

$$E_r = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2} < 1, r > 1 \right\} \quad (2.16)$$

eliptik bölgesinin dışına tasvir eder.

Gerçekten, $g(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{r^2}e^{-i\theta} = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta + i\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$ olur. $x = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta$, $y = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\sin\theta$ ve $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ olduğundan birim çemberin görüntüsü E_r elipsi olur. $g(\infty) = \infty$ olduğundan $g(z)$ birim çemberin dışını E_r elipsinin dışına tasvir eder. Aslında bu fonksiyon Örnek 2 'de $r = 2$ özel halini verdiğimiz fonksiyonun genel halidir. $g(z) = z + \frac{1}{4z}$ olmak üzere $h(z) = z + \frac{1}{r^2z} = \frac{2}{r}g\left(\frac{rz}{2}\right)$ yazılabilir. Dolayısıyla $h(z)$ fonksiyonunun Faber polinomları $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ise

$$\begin{aligned} \frac{zh'(z)}{h(z) - t} &= \frac{z \frac{2r}{r} \frac{2}{r} g'\left(\frac{rz}{2}\right)}{\frac{2}{r} g\left(\frac{rz}{2}\right) - t} \\ &= \frac{\frac{rz}{2} g'\left(\frac{rz}{2}\right)}{g\left(\frac{rz}{2}\right) - \frac{rt}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(\frac{rt}{2}\right) \left(\frac{rz}{2}\right)^{-n} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Yani E_r bölgesinin Faber polinomları $P_n(t) = 2^n r^{-n} F_n\left(\frac{rt}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, burada $F_n(t)$ Örnek 2'deki $g(z) = z + \frac{1}{4z}$ fonksiyonunun Faber polinomlarıdır.

Tanım 2.2: $g \in \Sigma$ fonksiyonunun $\{Y_{mn}\}$, $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$ Grunsky katsayıları $\log \frac{g(z) - g(t)}{z - t} = \sum_{m,n=1}^{\infty} Y_{mn} z^{-m} t^{-n}$; $|z|, |t| > 1$, şeklinde tanımlanır [7]. Tanımdan $Y_{mn} = Y_{nm}$ olduğu açıktır.

Teorem 2.3: $g \in \Sigma$ fonksiyonunun Faber polinomları $\{F_m\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ olsun.

i)

$$F_m(t) = t^m + \sum_{n=0}^{m-1} \beta_n^{(m)} t^n \quad (2.18)$$

burada ∞ civarında

$$[g^{-1}(t)]^m = t^m + \sum_{n=-\infty}^{m-1} \beta_n^{(m)} t^n \quad (2.19)$$

dir. Ve

$$F_m(t) = t^m + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{m}{n} b_m^{(n)} t^n + F_m(0) \quad (2.20)$$

burada ise

$$[g(z)]^{-n} = z^{-n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} b_m^{(n)} z^{-m} \quad (2.21)$$

dir.

ii)

$$F_m(g(\zeta)) = \zeta^m - m \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \zeta^{-n}, \quad |\zeta| > 1 \quad (2.22)$$

Yani ∞ civarında

$$F_m(g(\zeta)) = \zeta^m + o(1) \quad (2.23)$$

dir.

İspat: Öncelikle teoremin b) kısmını ispatlayarak başlayalım.

ii) ζ 'yi sabit tutup, $|z|$ 'yi yeterince büyük seçersek

$$\log\left(\frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta}\right) = \log\left(\frac{g(z) - g(\zeta)}{z\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)}\right) = \log\left(\frac{g(z) - g(\zeta)}{z}\right) + \log\left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}}\right) \quad (2.24)$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F_m(g(\zeta)) z^{-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^m = \sum_{n,m=1}^{\infty} Y_{mn} z^{-m} \zeta^{-n}$$

olduğundan

$$\frac{1}{m} F_m(g(\zeta)) = \frac{1}{m} \zeta^m - \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \zeta^{-n} \quad (2.25)$$

elde edilir.

i) t 'yi sabitler ve $|z|$ 'i yeterince büyük seçersek

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{z}{g(z)-t}\right) &= \log\left(\frac{z}{g(z)} \frac{1}{1-\frac{t}{g(z)}}\right) = \log\left(\frac{z}{g(z)}\right) + \log\left(\frac{1}{1-\frac{t}{g(z)}}\right) \\
&= \log\left(\frac{z}{g(z)}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{t}{g(z)}\right)^n \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F_m(0) z^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \left(z^{-n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} b_m^{(n)} z^{-m} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F_m(0) z^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{t^n}{n} b_m^{(n)} z^{-m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F_m(0) z^{-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m} z^{-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{t^n}{n} b_m^{(n)} z^{-m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} F_m(0) z^{-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{t^m}{m} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{t^n}{n} b_m^{(n)} \right) z^{-m}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Böylece

$$F_m(t) = F_m(0) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m}{n} b_m^{(n)} t^n + t^m \tag{2.27}$$

dır ve ikinci ifade elde edilir.

Özel olarak, F_m bir polinomdur. İspatın b) kısmından ∞ civarında

$$F_m(g(\zeta)) = \zeta^m + o(1) \tag{2.28}$$

olduğu ispatlanmıştır. Bundan dolayı, ∞ civarında

$$F_m(t) = [g^{-1}(t)]^m + o(1) \tag{2.29}$$

dir ve buradan ilk gösterilim elde edilir. ■

2.2. Faber Serileri

$|z - z_0| < r, r > 0$ daresinde tanımlı analitik bir fonksiyon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.30)$$

şeklinde Taylor serisine açılabilir. Bu seride katsayılar

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

formülü ile verilir. Bu seri dairede mutlak ve dairenin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır.

Serinin yakınsaklık yarıçapı ρ ise

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \rho \geq r \quad (2.32)$$

dir.

Faber serileri, r yarıçaplı daire durumunda ifade edilen Taylor serilerinin basit bağlantılı bölgeler durumuna genelleştirilmesidir. Faber serisinin özellikleri, Taylor serisinin özellikleri ile benzerdir.

Teorem 2.4: $g \in \Sigma$ ve $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ g 'nin Faber polinomları olsun. φ fonksiyonunun $R > 1$ için, $\gamma_R = g(|z| = R)$ 'nin içinde analitik olduğunu varsayalım.

i) O halde γ_R 'nin içinde φ fonksiyonu

$$\varphi(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(t) \quad (2.33)$$

açılımına sahiptir.

ii) Bu açılımdaki katsayılar

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{\varphi(g(z))}{z^{n+1}} dz \quad (2.34)$$

ile verilir, burada $1 < \rho < R$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R}$ 'dir.

iii) Bu serinin γ_R 'nin içindeki kompakt alt kümeler üzerinde yakınsaklığı düzgündür.

iv) Ayrıca, bu gösterilim tektir.

v) Tersine olarak, eğer $\{c_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R}$ koşulunu sağlayan bir dizi

ise,

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(t) \quad (2.35)$$

ifadesi γ_R 'nin içinde bir analitik fonksiyon belirtir [7].

İspat: $1 < \rho < R$ olsun. O halde t , $\gamma_\rho = g(\{z: |z| = \rho\})$ eğrisinin içinde ise, Cauchy İntegral Formülünden

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \varphi(g(z)) \frac{g'(z)}{g(z) - t} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \varphi(g(z)) \left[\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) z^{-n-1} \right] dz \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(t), \end{aligned} \quad (2.36)$$

burada $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \varphi(g(z)) z^{-n-1} dz, n = 0, 1, 2, \dots$, olarak elde edilir.

t , γ_ρ 'nin iç bölgesinin kompakt bir alt kümesinde ve $|z| = \rho$ kompakt alt kümesinde Faber polinomlarının üretici fonksiyonunun serisi düzgün yakınsak

olduğundan integrasyon ve toplamın yer değiştirmesi sağlanır. Elde edilen son seri $(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(t))$ γ_ρ 'nun içinin kompakt bir alt kümesinde düzgün yakınsaktır.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\max_{|z|=\rho} |\varphi(g(z))| \right)^{\frac{1}{n}}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \quad (2.37)$$

$\rho \rightarrow R^-$ için limite geçilirse i), ii) ve iii) elde edilir.

iv) Eğer $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n F_n(t)$ ise, $1 < \rho < R$ ve her $m \geq 0$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \left[(c_0 - d_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - d_n) F_n(g(z)) \right] z^{-m-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \left[(c_0 - d_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - d_n) (z^n + o(1)) \right] z^{-m-1} dz \\ &= c_m - d_m \end{aligned} \quad (2.38)$$

elde edilir. Buradan φ fonksiyonunun seri gösteriminin teklifi elde edilir.

v) Eğer $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R}$ ise $c(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ serisi $|z| < R$ için yakınsaktır. $1 < \rho < R$ koşulunu sağlayan her bir ρ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{c(z)g'(z)}{g(z) - t} dz \quad (2.39)$$

fonksiyonu $\gamma_\rho = g(|z| = \rho)$ eğrisinin içinde olan t 'ler için analitiktir. $c(z)$ fonksiyonunun serisi $|z| = \rho$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{c(z)g'(z)}{g(z) - t} dz &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} z^n \left[\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(t) z^{-m-1} \right] dz \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} z^{n-1} dz + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \left[\sum_{m=1}^{\infty} F_m(t) z^{n-m-1} \right] dz$$

Burada,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{dz}{z^m} = \begin{cases} 1, & m = -1 \\ 0, & m \neq -1 \end{cases} \quad (2.41)$$

olduğu için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{c(z)g'(z)}{g(z)-t} dz = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(t) \quad (2.42)$$

elde edilir. Dolayısıyla bu seri γ_ρ içinde analitik bir fonksiyona yakınsar. $\rho \rightarrow R$ için limite geçilerek ispat tamamlanır. ■

3. BASİT BAĞLANTILI VE SINIRLI BİR BÖLGE İÇİNDEKİ YALINKAT FONKSİYONLAR

$\Omega \subset \mathbb{C}$ orijini içeren basit bağlantılı, sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ ile gösterilen Ω 'nın sınırı analitik bir eğri olsun. $\varphi(z)$, Ω 'yı birim daireye dönüştüren ve $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ koşullarını sağlayan analitik ve yalınkat fonksiyon olsun. Şimdi birim dairede tanımlı bazı klasik sınıfların benzerlerini Ω 'da tanımlayalım [10].

Tanım 3.1: $F(0) = 0$ ve $F'(0) = 1$ koşullarını sağlayan ve Ω bölgesinde analitik ve yalınkat olan $F(z)$ fonksiyonlarının sınıfı $S(\Omega)$ ile tanımlayalım.

Tanım 3.2: $z \in \Omega$ için $P(0) = \frac{1}{\varphi'(0)}$ ve $\text{Re}\{P(z)\} > 0$ koşullarını sağlayan ve Ω bölgesinde analitik olan $P(z)$ fonksiyonlarının sınıfını $P(\Omega)$ ile göstereceğiz. ($P(0) = 1$ yerine $P(0) = \frac{1}{\varphi'(0)}$ koşulu uygunluk için alınmıştır.)

Tanım 3.3: Eğer $F(z) \in S(\Omega)$ için $F(\Omega)$ kümesi \mathbb{C} 'de konveks bir bölge ise F fonksiyonuna konvektir denir. Ω bölgesindeki konveks fonksiyonların sınıfını $C(\Omega)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.4: Varsayalım ki Ω , reel eksene göre simetrik olsun. Eğer $F(z)$ yalnızca $z \in \Omega$ reel değerleri için reel oluyorsa $F(z) \in S(\Omega)$ fonksiyonu tipik reel fonksiyon olarak adlandırılır. Ω bölgesindeki tipik reel fonksiyonların sınıfı $T(\Omega)$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.5: Eğer Ω orjine göre simetrikse $F(z) \in S(\Omega)$ tek fonksiyonların sınıfını belirtirken $S^{(2)}(\Omega)$ gösterilimini kullanacağız.

Basit bağlantılı, sınırlı, orijini içeren ve kapasitesi 1 olan bir Ω bölgesi için Riemann Tasvir Teoremine göre $\Delta = \{z: |z| > 1\}$ bölgesini $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ bölgesine tasvir eden bir ve yalnız bir $g \in \Sigma$ fonksiyonu olduğunu belirtmiştik. O halde yukarıda tanımlanan sınıflardaki $F(z)$ fonksiyonları Ω 'nın kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak olan

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n F_n(z) \quad (3.1)$$

şeklinde Faber seri açılımına sahiptir.

Ω bölgesi reel eksene ve orijine göre simetrik olsun. $F(z)$ fonksiyonu yukarıda tanımlanan sınıflardan birine aitse

$$F(z) = \frac{f(\varphi(z))}{\varphi'(0)} \quad (3.2)$$

olacak şekilde birim dairede tanımlı karşı gelen sınıftan bir ve yalnız $f(z)$ fonksiyonu vardır. Bu nedenle $F(z)$ 'in Faber serisi için

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) F_n(z), \quad f \in S \quad (3.3)$$

notasyonunu kullanacağız. Burada $A_n = A_n(f)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Faber katsayılarının $f \in S$ fonksiyonuna bağlı olduğunu görürüz.

Burada $\{A_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ Faber katsayılarının mutlak değerleri için üst sınırlar araştıracağız. Dolayısıyla Ω bölgesi için aynı anda hem iç hem de dış tasvir fonksiyonlarına ihtiyacımız olacaktır. Bu da oldukça karmaşık ve zor olduğundan özel olarak Örnek 3'teki

$$\Omega = E_r = \left\{ z = x + iy : \frac{x^2}{\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2} < 1, r > 1 \right\} \quad (3.4)$$

eliptik bölgesine odaklanacağız. Aşağıdaki teorem gerekli iç dönüşümü verir [5,6].

Teorem 3.6: $\varphi(z) = \sqrt{k_0} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{rz}{2} \right); \frac{1}{r^4} \right)$ fonksiyonu birebir, $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi'(0) = \frac{rK\sqrt{k_0}}{\pi}$ koşullarını sağlayan ve $E_r (r > 1)$ eliptik bölgesini \mathbb{D} birim dairesi üzerine tasvir eden dönüşümdür.

3.1. Bir Eliptik Bölge İçindeki Yalınkat Fonksiyonlar

Basit bağlantılı ve sınırlı Ω bölgesi için verdiğimiz tanımları, önemini vurgulamak amacıyla E_r bölgesi için tekrar hatırlatalım.

$S(E_r)$: $F(0) = 0$ ve $F'(0) = 1$ normalizasyon koşullarını sağlayan ve E_r ($r > 1$) eliptik bölgesi üzerinde yalınkat ve analitik fonksiyonlar sınıfı olarak tanımlarız.

$S(E_r)$ 'nin iki alt sınıfı $C(E_r)$ ve $S^{(2)}(E_r)$ 'dir:

$$C(E_r) = \{F(z) \in S(E_r): F(E_r) \text{ konveks}\}$$

$$S^{(2)}(E_r) = \{F(z) \in S(E_r): F(z) \text{ tek fonksiyon}\}$$

Ayrıca, $F(0) = \frac{1}{\varphi'(0)} = \frac{\pi}{rK\sqrt{k_0}}$ ve $\text{Re}\{F(z)\} > 0$ koşullarını sağlayan E_r ($r > 1$) eliptik bölgesi içindeki analitik fonksiyonların sınıfını $P(E_r)$ ile göstereceğiz.

Eğer $F(z)$ yukarıda tanımlanan sınıflardan birine dahilse ve $f(z)$, \mathbb{D} birim dairesinde tanımlı uygun sınıftan ise $F(z)$ fonksiyonunun (3.3) şeklinde Faber açılımına sahip olduğunu biliyoruz.

S , C , P ve $S^{(2)}$ sınıflarındaki f fonksiyonlarının katsayı problemleri için sırasıyla

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \quad (3.5)$$

$$c(z) = \frac{z}{1-z} \quad (3.6)$$

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad (3.7)$$

$$o(z) = \frac{z}{1-z^2} \quad (3.8)$$

fonksiyonlarının ekstrem fonksiyonlar olduğunu belirtmiştik. $S(E_r)$, $C(E_r)$, $P(E_r)$ ve $S^2(E_r)$ sınıflarındaki fonksiyonlar için de (3.2) gösterilimi dikkate alındığında, bazı katsayı problemleri için bu fonksiyonların ekstrem fonksiyonlar olduğunu göreceğiz.

Birim daire için bu fonksiyonların tüm dönmeleri de ekstrem fonksiyondur. Elips durumunda $S(E_r)$, $C(E_r)$ ve $P(E_r)$ sınıfları için sırasıyla $k(z)$ ve $-k(-z)$, $c(z)$ ve $-c(-z)$, ve $p(z)$ ve $-p(-z)$ olmak üzere iki tane ekstrem fonksiyon olduğu gösterilecektir. Bu durumu elipsin invaryant dönmelerinin yalnızca 0 ve π açılı dönmeler olmasından kaynaklandığı yorumunu yapabiliriz. $S^2(E_r)$ sınıfındaki ekstrem fonksiyon $o(z)$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan $-o(-z) = o(z)$ olur. Dolayısıyla $S^2(E_r)$ sınıfına ait bir tane ekstrem fonksiyon mevcuttur.

Yukarıda verilen sınıflardaki fonksiyonların Faber katsayılarının çeşitli lineer kombinasyonları için keskin sınırları ilerleyen bölümde teoremler içinde elde edeceğiz. Bu teoremler tezin ana sonuçlarını oluşturacaktır. Şimdi adı geçen sınıflardaki fonksiyonların Faber katsayılarının kontur integrali yerine daha basit olarak belirli integral şeklindeki gösterilimini elde edeceğiz.

Lemma 3.7: $F(z)$ fonksiyonu, $E_r(r > 1)$ elipsinde analitik ve (3.1) ile verilen Faber seri açılımına sahipse $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ Faber katsayıları

$$A_n = \frac{r^n}{\pi} \int_0^{\pi} F\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \cos n\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

ile elde edilir.

İspat: (3.1)'den

$$F\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \quad (3.10)$$

yazabiliriz. Burada $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, Örnek 3'de E_r eliptik bölgesine ait Faber polinomlarıdır. Dolayısıyla

$$P_n\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) = 2^n r^{-n} F_n(\cos \theta) \quad (3.11)$$

ve $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ n . dereceden monik Chebyshev polinomları olduğundan

$$F_n(\cos \theta) = 2^{1-n} \cos n\theta \quad (3.12)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikleri (3.10)'da yerine yazarsak

$$F\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n 2r^{-n} \cos n\theta \quad (3.13)$$

elde edilir. Bu ifade de $\cos m\theta$ ile çarpılarak 0'dan π 'ye integre edilirse

$$\int_0^{\pi} F\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \cos m\theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n 2r^{-n} \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta \quad (3.14)$$

yazarız. Burada $m \neq n$ için

$$I = \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos((m-n)\theta) + \cos((m+n)\theta)] d\theta = 0,$$

$m = n \neq 0$ için $I = \frac{\pi}{2}$ ve $m = n = 0$ olduğundan sonuç ispatlanmış olur. ■

Sonuç 3.8: $S(E_r)$, $C(E_r)$, $P(E_r)$ ve $S^{(2)}(E_r)$ sınıfları içindeki fonksiyonlar eğer (3.3) ile verilen Faber açılımına sahipse, o halde $\{A_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ Faber katsayıları

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}} \int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos n\theta d\theta, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (3.15)$$

formülü ile elde edilir.

İspat: (3.2)'den $F(z) = \frac{f(\varphi(z))}{\varphi'(0)}$ olduğundan, Lemma 3.7'de yerine yazarsak

$$A_n = \frac{r^n}{\pi} \int_0^\pi F\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{r^n}{\pi} \int_0^\pi \frac{f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right)}{\varphi'(0)} \cos n\theta d\theta \quad (3.16)$$

elde edilir. Ayrıca $\varphi'(0) = \frac{rK\sqrt{k_0}}{\pi}$ olduğundan

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}} \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos n\theta d\theta, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (3.17)$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.9: Eğer $F(z) \in S^{(2)}(E_r)$ ise, o halde $A_{2n}(f) = 0$, $n = 0,1,2, \dots$ 'dır.

İspat: (3.15)'den

$$A_{2n}(f) = \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}} \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos 2n\theta d\theta \quad (3.18)$$

elde edilir.

$$A_{2n}(f) = \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos 2n\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos 2n\theta d\theta \right] \quad (3.19)$$

yazarsak ve ikinci integralde $\pi - \theta = t$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$A_{2n}(f) = \frac{r^{2n-1}}{K\sqrt{k_0}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) + f\left(\varphi\left(\frac{-2 \cos \theta}{r}\right)\right) \right] \cos 2n\theta d\theta \quad (3.20)$$

elde edilir. Burada $\frac{f(\varphi(z))}{\varphi'(0)} = F(z) \in S^{(2)}(E_r)$ olduğundan hem f ve hem de φ fonksiyonu tek olduğundan $A_{2n}(f) = 0$ sonucuna ulaşırız. ■

Sonuç 3.10: $S(E)$, $C(E)$, $P(E)$ ve $S^{(2)}(E_r)$ sınıfları içindeki fonksiyonlar eğer (3.3) ile verilen Faber açılımına sahipse, o halde $\{A_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ Faber katsayıları

$$A_n(f) = \frac{2^n n! r^{n-1}}{(2n)! K \sqrt{k_0}} \int_0^\pi \frac{d^n}{dx^n} [f(\varphi(x))] \Big|_{x=\frac{2 \cos \theta}{r}} \sin^{2n} \theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

formülü ile elde edilir.

İspat: (3.15)'den

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}}{K \sqrt{k_0}} \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos n\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

olduğunu biliyoruz. $F_n(x)$ n. dereceden monik Chebyshev polinom olduğu için

$$F_n(\cos \theta) = 2^{1-n} \cos n\theta \quad (3.23)$$

olduğundan

$$\cos n\theta = 2^{n-1} F_n(\cos \theta) \quad (3.24)$$

elde ederek yukarıdaki ifadede yerine yazarsak

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}}{K \sqrt{k_0}} \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) 2^{n-1} F_n(\cos \theta) d\theta \quad (3.25)$$

elde ederiz. $x = \cos \theta$ $\left(\frac{\theta = \cos^{-1} x}{d\theta = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}}\right)$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1} 2^{n-1}}{K \sqrt{k_0}} \int_1^{-1} f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) F_n(x) \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.26)$$

elde edilir.

$$\frac{F_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(-1)^n 2^{1-n}}{1.3 \dots (2n-1)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.27)$$

olduğundan

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1} 2^{n-1}}{K\sqrt{k_0}} \frac{(-1)^n 2^{1-n}}{1.3 \dots (2n-1)} \int_{-1}^1 f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] dx \quad (3.28)$$

yazılır. Bu ifadedeki integrale n defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_{-1}^1 f(\varphi(x)) \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] dx \quad (3.29)$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] dx$$

elde edilir. Yerine yazılarak

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}} \frac{(-1)^{2n}}{1.3 \dots (2n-1)} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] dx \quad (3.30)$$

elde edilir. Bu ifadede $x = \cos \theta$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$A_n(f) = \frac{r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}} \frac{1}{1.3 \dots (2n-1)} \int_{\pi}^0 \frac{d^n}{dx^n} f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) \Big|_{x=\cos \theta} \left[(\sin^2 \theta)^{n-\frac{1}{2}} \right] (-\sin \theta) d\theta$$

$$= \frac{r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}} \frac{1}{1.3 \dots (2n-1)} \int_0^{\pi} \frac{d^n}{dx^n} f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) \Big|_{x=\cos \theta} \sin^{2n} \theta d\theta \quad (3.31)$$

$$= \frac{r^{n-1}}{K\sqrt{k_0}} \frac{1}{1.3 \dots (2n-1)} \frac{n! 2^n}{n! 2^n} \int_0^{\pi} \frac{d^n}{dx^n} f\left(\varphi\left(\frac{2x}{r}\right)\right) \Big|_{x=\cos \theta} \sin^{2n} \theta d\theta$$

$$= \frac{r^{n-1} n! 2^n}{(2n)! K\sqrt{k_0}} \int_0^{\pi} \frac{d^n}{dx^n} f(\varphi(x)) \Big|_{x=\frac{2\cos \theta}{r}} \sin^{2n} \theta d\theta$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4. ANA SONUÇLAR

Bu bölümde tezdeki amacımız olan Faber katsayılarının çeşitli lineer kombinasyonlarına ait keskin eşitsizlikler elde ederek bu eşitsizlikleri ispatlayacağız.

Teorem 4.1: $k(z)$, $c(z)$, $p(z)$ ve $o(z)$ fonksiyonları sırasıyla (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.8) ile belirtilen fonksiyonlar olmak üzere

$$|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)| \leq 3A_1(k) + r^{-2}A_3(k) \quad , \quad f \in S \quad (4.1)$$

$$|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)| \leq 3A_1(c) + r^{-2}A_3(c) \quad , \quad f \in C \quad (4.2)$$

$$|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)| \leq 3A_1(p) + r^{-2}A_3(p) \quad , \quad f \in P \quad (4.3)$$

$$|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)| \leq 3A_1(o) + r^{-2}A_3(o) \quad , \quad f \in S^{(2)} \quad (4.4)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak (4.1) eşitsizliği için $f(z) = k(z)$ veya $f(z) = -k(-z)$ olması ile; (4.2) eşitsizliği için $f(z) = c(z)$ veya $f(z) = -c(-z)$ olması ile; (4.3) eşitsizliği için $f(z) = p(z)$ veya $f(z) = -p(-z)$ olması ile; (4.4) eşitsizliği için ise $f(z) = o(z)$ olması ile mümkündür.

İspat: $f \in S$ olsun. (4.1) eşitsizliğini elde etmek için

$$M_n(f) = \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos^3 \theta \, d\theta \quad (4.5)$$

integralini ele alırsak

$$M_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos^3 \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos^3 \theta \, d\theta \quad (4.6)$$

yazarak ikinci integralde $t = \pi - \theta$ değişken dönüşümü uygulanarak ve $\varphi(z)$ fonksiyonunun da tek olmasından dolayı

$$M_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) - f\left(-\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \right] \cos^3 \theta d\theta \quad (4.7)$$

elde edilir. $f \in S$ olduğundan ve $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m$ şeklinde Taylor seri açılımına sahip olmasından

$$M_n(f) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1} \varphi^{2m+1}\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right] \cos^3 \theta d\theta \quad (4.8)$$

yazarız. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\cos^3 \theta \geq 0$ ve $\varphi^{2m+1}\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \geq 0$ olduğundan,

$$|M_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} |a_{2m+1}| \varphi^{2m+1}\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right] \cos^3 \theta d\theta \quad (4.9)$$

ederiz. Bieberbach Tahmini'nden

$$\begin{aligned} |M_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \varphi^{2m+1}\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right] \cos^3 \theta d\theta \\ &= M_n(k(z)) = M_n(-k(-z)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir.

$$\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \quad (4.11)$$

olduğu için $M_n(f)$ integralinde yerine yazarsak

$$M_n(f) = \int_0^{\pi} f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos^3 \theta d\theta$$

$$= \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) \left(\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta\right) d\theta \quad (4.12)$$

$$= \frac{K\sqrt{k_0}}{4} (3A_1(f) + r^{-2}A_3(f))$$

şeklinde bir katsayı kombinasyonu elde ederiz. $|M_n(f)| \leq M_n(k)$ olduğunu elde ettiğimiz için

$$|3A_1(f) + r^{-2}A_3(f)| \leq 3A_1(k(z)) + r^{-2}A_3(k(z)) \quad (4.13)$$

$$= 3A_1(-k(-z)) + r^{-2}A_3(-k(-z))$$

yazarak (4.1)'i ispatlamış oluruz.

$f \in C$ olsun. (4.8) integralini ele alırsak $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\cos^3\theta \geq 0$ ve $\varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \geq 0$ olduğundan

$$|M_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} |a_{2m+1}| \varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \right] \cos^3\theta d\theta \quad (4.14)$$

eşitsizliği elde edilir. C sınıfındaki tüm fonksiyonlar için $|a_n| \leq 1$ olduğundan

$$|M_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{2m+1}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \right] \cos^3\theta d\theta = M_n(c(z)) = M_n(-c(-z)) \quad (4.15)$$

elde edilir. Böylece (4.2) eşitsizliği (4.1) eşitsizliğinin ispatına benzer şekilde tamamlanmış olur.

$f \in P$ olsun. $f \in P$ fonksiyonu $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ şeklinde Taylor seri açılımına sahiptir. (4.7) integralini ele alarak bu açılımı (4.7) integralinde yerine yazarsak

$$M_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) - f\left(-\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) \right] \cos^3\theta d\theta$$

(4.16)

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \varphi^{2n+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] \cos^3 \theta d\theta$$

elde ederiz. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\cos^3 \theta \geq 0$ ve $\varphi^{2n+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \geq 0$ olduğundan

$$|M_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} |b_{2n+1}| \varphi^{2n+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] \cos^3 \theta d\theta \quad (4.17)$$

elde edilir. Caratheodory Lemması'ndan $|b_n| \leq 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} |M_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{2n+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] \cos^3 \theta d\theta \\ &= M_n(p(z)) = M_n(-p(-z)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilerek (4.3) eşitsizliği (4.1)'e benzer olarak ispatlanmış olur.

$f \in S^{(2)}$ olsun. Bu sınıftan olan fonksiyonlar tek fonksiyon olduğu için (4.7) integralinden

$$M_n(f) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right) \cos^3 \theta d\theta \quad (4.19)$$

elde edilir. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\cos^3 \theta \geq 0$ ve $\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \geq 0$ olduğundan

$$|M_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| f \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right) \right| \cos^3 \theta d\theta \quad (4.20)$$

elde edilir. Distorsiyon Teoremine göre

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{1 - |z|^2}, \quad f \in S^{(2)} \quad (4.21)$$

eşitsizliği doğru olduğu için

$$|M_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left| \varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right|}{1 - \left| \varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right|^2} \cos^3 \theta d\theta \quad (4.22)$$

yazılabilir. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\cos^3 \theta \geq 0$ ve $\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \geq 0$ olduğundan

$$|M_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right)}{1 - \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right)^2} \cos^3 \theta d\theta = M_n(o) \quad (4.23)$$

sonucuna varırız. Dolayısıyla (4.4) eşitsizliğinin sağlandığı yukarıdakilere benzer şekilde gösterilmiş olur. ■

Teorem 4.2: $k(z)$, $c(z)$ ve $p(z)$ fonksiyonları sırasıyla (3.5), (3.6) ve (3.7) ile belirtilen fonksiyonlar olmak üzere

$$\left| A_0(f) \pm \frac{1}{2} r^{-2n} A_{2n}(f) \pm \frac{1}{2} r^{-4n} A_{4n}(f) \right| \leq A_0(k) \pm \frac{1}{2} r^{-2n} A_{2n}(k) \pm \frac{1}{2} r^{-4n} A_{4n}(k) \quad (4.24)$$

, $f \in S$

$$\left| A_0(f) \pm \frac{1}{2} r^{-2n} A_{2n}(f) \pm \frac{1}{2} r^{-4n} A_{4n}(f) \right| \leq A_0(c) \pm \frac{1}{2} r^{-2n} A_{2n}(c) \pm \frac{1}{2} r^{-4n} A_{4n}(c) \quad (4.25)$$

, $f \in C$

$$\left| A_0(f) \pm \frac{1}{2} r^{-2n} A_{2n}(f) \pm \frac{1}{2} r^{-4n} A_{4n}(f) \right| \leq A_0(p) \pm \frac{1}{2} r^{-2n} A_{2n}(p) \pm \frac{1}{2} r^{-4n} A_{4n}(p) \quad (4.26)$$

, $f \in P$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak (4.24) eşitsizliği için $f(z) = k(z)$ veya $f(z) = -k(-z)$ olması ile; (4.25) eşitsizliği için $f(z) = c(z)$ veya $f(z) = -c(-z)$ olması ile; (4.26) eşitsizliği için $f(z) = p(z)$ veya $f(z) = -p(-z)$ olması ile mümkündür.

İspat: $f \in S$ olsun. (4.24) eşitsizliğini elde etmek için

$$I_n(f) = \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \quad (4.27)$$

integralini ele alalım. Yukarıdaki teoremden olduğu gibi integrali iki integralin toplamı olarak yazarak, ikinci integralde $t = \pi - \theta$ değişken dönüşümü uygulayarak ve $\varphi(z)$ fonksiyonunun da tek olmasını kullanarak

$$I_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) + f\left(-\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \quad (4.28)$$

elde ederiz. $f \in S$ olduğundan ve $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m$ şeklinde Taylor seri açılımına sahip olmasından

$$I_n(f) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \varphi^{2m}\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \quad (4.29)$$

yazarız. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta \geq 0$ ve $\varphi^{2m}\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \geq 0$ olduğundan,

$$|I_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=1}^{\infty} |a_{2m}| \varphi^{2m}\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \quad (4.30)$$

elde ederiz. Bieberbach Tahmini'nden

$$\begin{aligned}
|I_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=1}^{\infty} 2m\varphi^{2m} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \\
&= I_n(k(z)) = -I_n(-k(-z))
\end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. $1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta = 1 \pm \frac{1}{2}(\cos 2n\theta + \cos 4n\theta)$ eşitliğini $I_n(f)$ integralinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
I_n(f) &= \int_0^{\pi} f \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right) \left(1 \pm \frac{1}{2}(\cos 2n\theta + \cos 4n\theta) \right) d\theta \\
&= rK\sqrt{k_0} \left(A_0(f) \pm \frac{1}{2}r^{-2n}A_{2n}(f) \pm \frac{1}{2}r^{-4n}A_{4n}(f) \right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde bir katsayı kombinasyonu elde ederiz. $|I_n(f)| \leq I_n(k)$ olduğunu elde ettiğimiz için

$$\begin{aligned}
&\left| A_0(f) \pm \frac{1}{2}r^{-2n}A_{2n}(f) \pm \frac{1}{2}r^{-4n}A_{4n}(f) \right| \\
&\leq A_0(k(z)) \pm \frac{1}{2}r^{-2n}A_{2n}(k(z)) \pm \frac{1}{2}r^{-4n}A_{4n}(k(z)) \\
&= -\left[A_0(-k(-z)) \pm \frac{1}{2}r^{-2n}A_{2n}(-k(-z)) \pm \frac{1}{2}r^{-4n}A_{4n}(-k(-z)) \right]
\end{aligned} \tag{4.33}$$

yazarak (4.24)'i ispatlamış oluruz.

$f \in C$ olsun. (4.29) integralini ele alırsak $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta \geq 0$ ve $\varphi^{2m} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \geq 0$ olduğundan

$$|I_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=1}^{\infty} |a_{2m}| \varphi^{2m} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \tag{4.34}$$

eşitsizliği elde edilir. C sınıfındaki tüm fonksiyonlar için $|a_n| \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|I_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \varphi^{2m} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \\
&= I_n(c(z)) = -I_n(-c(-z))
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. Böylece (4.25) ispatlanmış olur.

$f \in P$ olsun. $f \in P$ fonksiyonu $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ şeklinde Taylor seri açılımına sahiptir. (4.28) integralini ele alarak bu açılımı (4.28) integralinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
I_n(f) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right) + f \left(-\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right) \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right)^{2n} \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{4.36}$$

elde ederiz. $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta \geq 0$ ve $\varphi^{2m} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \geq 0$ olduğundan

$$|I_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_{2n}| \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right)^{2n} \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \tag{4.37}$$

elde edilir. Caratheodory Lemması'ndan $|b_n| \leq 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|I_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right)^{2n} \right] (1 \pm \cos 3n\theta \cos n\theta) d\theta \\
&= I_n(p(z)) = -I_n(-p(-z))
\end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilerek (4.26) eşitsizliği ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.3: $k(z), c(z), p(z)$ ve $o(z)$ fonksiyonları sırasıyla (3.5), (3.6), (3.7 ve (3.8) ile belirtilen fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| A_1(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+4} A_{4n-3}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+2} A_{4n-1}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n} A_{4n+1}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n-2} A_{4n+3}(f) \right| \\ & \leq A_1(k) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+4} A_{4n-3}(k) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+2} A_{4n-1}(k) \pm \frac{1}{4} r^{-4n} A_{4n+1}(k) \\ & \pm \frac{1}{4} r^{-4n-2} A_{4n+3}(k), \quad f \in S \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} & \left| A_1(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+4} A_{4n-3}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+2} A_{4n-1}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n} A_{4n+1}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n-2} A_{4n+3}(f) \right| \\ & \leq A_1(c) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+4} A_{4n-3}(c) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+2} A_{4n-1}(c) \pm \frac{1}{4} r^{-4n} A_{4n+1}(c) \\ & \pm \frac{1}{4} r^{-4n-2} A_{4n+3}(c), \quad f \in C \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} & \left| A_1(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+4} A_{4n-3}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+2} A_{4n-1}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n} A_{4n+1}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n-2} A_{4n+3}(f) \right| \\ & \leq A_1(p) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+4} A_{4n-3}(p) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+2} A_{4n-1}(p) \pm \frac{1}{4} r^{-4n} A_{4n+1}(p) \\ & \pm \frac{1}{4} r^{-4n-2} A_{4n+3}(p), \quad f \in P \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} & \left| A_1(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+4} A_{4n-3}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+2} A_{4n-1}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n} A_{4n+1}(f) \pm \frac{1}{4} r^{-4n-2} A_{4n+3}(f) \right| \\ & \leq A_1(o) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+4} A_{4n-3}(o) \pm \frac{1}{4} r^{-4n+2} A_{4n-1}(o) \pm \frac{1}{4} r^{-4n} A_{4n+1}(o) \\ & \pm \frac{1}{4} r^{-4n-2} A_{4n+3}(o), \quad f \in S^{(2)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak (4.39) eşitsizliği için $f(z) = k(z)$ veya $f(z) = -k(-z)$ olması ile; (4.40) eşitsizliği için $f(z) = c(z)$ veya $f(z) = -c(-z)$ olması ile; (4.41) eşitsizliği için $f(z) = p(z)$ veya $f(z) = -p(-z)$ olması ile; (4.42) eşitsizliği için $f(z) = o(z)$ olması ile mümkündür.

İspat: $f \in S$ olsun. (4.39) eşitsizliğini elde etmek için

$$I_n(f) = \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \quad (4.43)$$

integralini ele alalım. Yukarıdaki teoremlerde olduğu gibi

$$L_n(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) - f\left(-\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \right] \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \quad (4.44)$$

yazılabilir. $f \in S$ olduğundan ve $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m$ şeklinde Taylor seri açılımına sahip olmasından

$$L_n(f) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \varphi^{2m+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right] \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \quad (4.45)$$

yazarız. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) \geq 0$ ve $\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \geq 0$ olduğundan,

$$|L_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m+1}| \varphi^{2m+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right] \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \quad (4.46)$$

elde ederiz. Bieberbach Tahmini'nden,

$$\begin{aligned} |L_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \varphi^{2m+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right] \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \\ &= I_n(k(z)) = I_n(-k(-z)) \end{aligned} \quad (4.47)$$

elde ederiz.

$$\cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) = \cos \theta \pm \frac{1}{4} \cos(4n-3)\theta \pm \frac{1}{4} \cos(4n-1)\theta \pm \frac{1}{4} \cos(4n+1)\theta \pm \frac{1}{4} \cos(4n+3)\theta \quad (4.48)$$

$$\frac{1}{4} \cos(4n+1)\theta \pm \frac{1}{4} \cos(4n+3)\theta$$

olduğu için $L_n(f)$ integralinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
L_n(f) &= \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) \cos\theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \\
&= \int_0^\pi f\left(\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right) \begin{pmatrix} \cos\theta \pm \frac{1}{4}\cos(4n-3)\theta \pm \frac{1}{4}\cos(4n-1)\theta \\ \pm \frac{1}{4}\cos(4n+1)\theta \pm \frac{1}{4}\cos(4n+3)\theta \end{pmatrix} d\theta \quad (4.49) \\
&= K\sqrt{k_0} \begin{pmatrix} A_1(f) \pm \frac{1}{4}r^{-4n+4}A_{4n-3}(f) \pm \frac{1}{4}r^{-4n+2}A_{4n-1}(f) \\ \pm \frac{1}{4}r^{-4n}A_{4n+1}(f) \pm \frac{1}{4}r^{-4n-2}A_{4n+3}(f) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde bir katsayı kombinasyonu elde ederiz. $|I_n(f)| \leq I_n(k)$ olduğunu elde ettiğimiz için

$$\begin{aligned}
&\left| A_1(f) \pm \frac{1}{4}r^{-4n+4}A_{4n-3}(f) \pm \frac{1}{4}r^{-4n+2}A_{4n-1}(f) \pm \frac{1}{4}r^{-4n}A_{4n+1}(f) \pm \frac{1}{4}r^{-4n-2}A_{4n+3}(f) \right| \\
&\leq A_1(k(z)) \pm \frac{1}{4}r^{-4n+4}A_{4n-3}(k(z)) \pm \frac{1}{4}r^{-4n+2}A_{4n-1}(k(z)) \pm \frac{1}{4}r^{-4n}A_{4n+1}(k(z)) \\
&\quad \pm \frac{1}{4}r^{-4n-2}A_{4n+3}(k(z)) \quad (4.50) \\
&= A_1(-k(-z)) \pm \frac{1}{4}r^{-4n+4}A_{4n-3}(-k(-z)) \pm \frac{1}{4}r^{-4n+2}A_{4n-1}(-k(-z)) \\
&\quad \pm \frac{1}{4}r^{-4n}A_{4n+1}(-k(-z)) \pm \frac{1}{4}r^{-4n-2}A_{4n+3}(-k(-z))
\end{aligned}$$

yazarak (4.38)'ü ispatlamış oluruz.

$f \in C$ olsun. (4.44) integralini ele alırsak $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\varphi\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \geq 0$ ve $\cos\theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) \geq 0$ olduğundan

$$|L_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m+1}| \varphi^{2m+1} \left(\frac{2\cos\theta}{r}\right) \right] \cos\theta \left(\frac{1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta}{\cos 4n\theta \cos 2\theta} \right) d\theta \quad (4.51)$$

eşitsizliği elde edilir. C sınıfındaki tüm fonksiyonlar için $|a_n| \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|L_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{2m+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \\
&= L_n(c(z)) = L_n(-c(-z))
\end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir. Böylece (4.39) ispatlanmış olur.

$f \in P$ olsun. $f \in P$ fonksiyonu $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ şeklinde Taylor seri açılımına sahiptir. (4.44) integralini ele alarak bu açılımı (4.44) integralinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
L_n(f) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f \left(\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right) - f \left(-\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right) \right] \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \varphi^{2n+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{4.53}$$

elde ederiz. $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $\cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) \geq 0$ ve $\varphi \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \geq 0$ olduğundan

$$|L_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} |b_{2n+1}| \varphi^{2n+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] \cos \theta \left(\frac{1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta}{\cos 4n\theta \cos 2\theta} \right) d\theta \tag{4.54}$$

elde edilir. Caratheodory Lemması'ndan $|b_n| \leq 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|L_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{2n+1} \left(\frac{2 \cos \theta}{r} \right) \right] \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \\
&= L_n(p(z)) = L_n(-p(-z))
\end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilerek (4.41) eşitsizliği ispatlanmış olur.

$f \in S^{(2)}$ olsun. Bu sınıftan olan fonksiyonlar tek fonksiyon olduğu için (4.44) integralinden

$$L_n(f) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \quad (4.56)$$

elde edilir. $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $\cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) \geq 0$ ve $\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \geq 0$ olduğundan

$$|L_n(f)| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| f\left(\varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right)\right) \right| \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \quad (4.57)$$

elde edilir. Distorsiyon Teoremine göre

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{1 - |z|^2}, \quad f \in S^{(2)} \quad (4.58)$$

eşitsizliği doğru olduğu için

$$\begin{aligned} |L_n(f)| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left| \varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right|}{1 - \left| \varphi\left(\frac{2 \cos \theta}{r}\right) \right|^2} \cos \theta (1 \pm \cos 4n\theta \cos 2\theta) d\theta \\ &= L_n(o) \end{aligned} \quad (4.59)$$

sonucuna varırız. Dolayısıyla (4.42) eşitsizliğinin sağlandığını göstermiş oluruz. ■

Not: Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak bu şekilde çok daha fazla katsayı eşitsizlikleri elde edilebilir [11].

KAYNAKLAR

- [1] Bieberbach L., (1916), "Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln", Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften, 138, 940-955.
- [2] Duren P. L., (1983), "Univalent functions", (Vol. 259), Springer-Verlag.
- [3] De Branges L., (1985), "A proof of the Bieberbach conjecture", Acta Mathematica, 154(1-2), 137-152.
- [4] Carathéodory C., (1907), "Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen", Mathematische Annalen, 64(1), 95-115.
- [5] Lawden D. F., (1989), "Elliptic functions and applications", (Vol. 80), Springer-Verlag.
- [6] Nehari Z., (1952), "Conformal mapping", (Vol. 58), McGraw-Hill.
- [7] Schober G., (1975), "Univalent functions-selected topics", (Vol. 478), Springer-Verlag.
- [8] Faber G., (1903), "Über polynomische entwickelungen, Mathematische Annalen", 57(3), 389-408.
- [9] Lowner K., (1917), "Untersuchungen tiber die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z|<1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden", Ber. der K6n. Siichsischen Gesellschaft der Wiss, zu Leipzig, 26.
- [10] Haliloğlu E., (1993), "Bounds for Faber coefficients of functions univalent in an ellipse", Ph.D. Thesis, Iowa State University.
- [11] Haliloğlu E., (2007), "Bounds for certain linear combinations of the Faber coefficients of functions analytic in an ellipse", Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 50(1), 163-171.