T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI

ÇEŞİTLİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Beyza BOZKUŞ

Danışman
Doç. Dr. Cihangir ALACA

MANİSA-2021

TEZ ONAYI

Beyza BOZKUŞ tarafından hazırlanan **"Çeşitli Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri Üzerine"** adlı tez çalışması 01.07.2021 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Doç. Dr. Cihangir ALACA** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Ali MUTLU** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL** Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Beyza BOZKUŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(X, d)	Metrik uzay
$\{x_n\}$	x_n dizisi
$B(x, r)$	Açık yuvar
$B[x, r]$	Kapalı yuvar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümsesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümsesi
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
A°	A kümesinin içi
A'	A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
Tx	x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
T^n	T dönüşümünün n. iterasyonu
$T^n x$	x noktasının T dönüşümü altındaki n. iterasyonu

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının belirlenme ve hazırlanma sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübesiyle her zaman destek olan, karşılaştığım zorlukları yardımlarıyla aşmamı sağlayan değerli saygıdeğer hocam Doç. Dr. Cihangir ALACA'ya çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Lisans ve yüksek lisans sürecinde matematiksel bilgisini ve tecrübesini benimle paylaşmaktan çekinmeyen Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Anabilim Dalındaki başta Arş. Gör. Dr. Kübra ÖZKAN olmak üzere tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteklerini hiç eksik etmeyen, her zaman yanımda olup bugünlere gelmemde emeği olan başta aileme, öğrencilerime, arkadaşlarıma ve beni sürekli motive eden nişanlıma teşekkür etmeyi borç bilirim.

Beyza Bozkuş
Manisa, 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Çeşitli Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri Üzerine

Beyza BOZKUŞ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Cihangir ALACA

Sabit nokta teorisi günümüz gelişen modern matematiğin önemli konularından bir tanesidir. Son zamanlarda sabit nokta teoresinin çeşitli genelleştirmeleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan birisi de Jleli ve Samet [13] tarafından verilen $\mathcal{F}$-metrik uzay kavramıdır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak $\mathcal{F}$-metrik uzay kavramı ve bu uzayın bazı metrik ve topolojik özellikleri tanıtılmıştır. Daha sonra, bu uzaylarda değişmeli dönüşüm özelliğini sağlayan dört dönüşüm için yeni bir ortak sabit nokta teoremi ispatlanmış ve bu teoremin bazı sonuçları verilmiştir. Bu ana sonuçlar, Fisher'in teoremlerinin [7] ve [8], $\mathcal{F}$-metrik versiyonu olup burada ayrıca Mitrovic vd. [18] makalesinde verilen Teorem 4 ün bir genelleştirmesi $\mathcal{F}$-metrik uzaylarda sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, $\mathcal{F}$-metrik uzay, değişmeli dönüşüm.

2021, 32 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

On Fixed Point Theorems in Various Metric Spaces

Beyza BOZKUŞ

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Cihangir ALACA

Fixed point theory is one of the important topics of today's theory developing modern mathematics. Recently, several generalizations of the fixed point theory have been studied. One of these studies is the concept of $\mathcal{F}$-metric space given by Jleli and Samet [13].

In this thesis, firstly $\mathcal{F}$-metric space and some metric and topological properties are defined. Then, a new common fixed point theory for four mappings satisfying commuting mappings in this kind of spaces is proved and its results are given. These main results are $\mathcal{F}$-metric version of Fisher's main theorem [7] and [8]. Furthermore, a generalization of Theorem 4 given by Mitrovic et al in [18] is introduced in $\mathcal{F}$-metric spaces.

Keywords: Fixed point, $\mathcal{F}$-metric space, commuting mapping.

2021, 32 pages

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisinin; genel topoloji, fonksiyonel analiz, lineer olmayan fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teorisi, diferansiyel denklemler, potansiyel teorisi, yaklaşım teorisi, kontrol sistemleri ve oyun teorisi gibi birçok alanda uygulamaları ve ayrıca istatistik, mühendislik, biyoloji, matematiksel ekonomi, esneklik teorisi gibi disiplinlerde çeşitli çalışma ve uygulama alanları mevcuttur.

1.1. Klasik Sabit Nokta Teorisinde Kullanışlı Bazı Temel Kavramlar

Bir dönüşümün sabit nokta kavramını aşağıdaki gibi verebiliriz.
X boştan farklı bir küme olsun ve bir $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü verilsin. $T(x) = x$ eşitsizliğini sağlayan $x \in X$ noktaları varsa bu noktalara T dönüşümünün sabit noktası denir. T dönüşümünün sabit noktalarının T altında değişmediğine dikkat edelim.

• $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = 3x$ dönüşümü için $x = 0$ noktası bir sabit noktadır.

• $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = x+3$ öteleme dönüşümünün X te hiçbir sabit noktası yoktur.

• $X = [-1, 1]$ olmak üzere $Tx = x^3$ dönüşümü için $x = -1$, $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları sabit noktalardır.

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları daha çok merkeze tam metrik uzaylar alınarak yapılmıştır. Buradaki amaçlardan birisi de Banach sabit nokta teoreminin farklı uzaylarda çeşitli genelleştirmelerini verebilmektir.

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $k \geq 0$ sabiti varsa T ye bir Lipschitz dönüşümü (Lipschitz mapping) adı verilir. Bu eşitsizliği sağlayna k sayılarının en küçüğüne ise T nin Lipschitz sabiti (Lipschitz constant) denir ve genellikle L ile gösterilir. $L < 1$ ise T ye büzülme dönüşümü (contraction mapping), $L \leq 1$ ise T ye genişlemeyen dönüşüm (non-expansive mapping) denir. Burada $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T ye büzülebilir dönüşüm (contractive mapping) denir. Tüm bu dönüşümler arasındaki ilişkiyi aşağıdaki diyagramla verebiliriz.

Büzülme dönüşümü $\implies$ Büzülebilir dönüşüm $\implies$ Genişlemeyen dönüşüm $\implies$ Lipschitz koşulunun sağlanması

Teorem 1.1.1. $[1]$ (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Buna göre T nin X te bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar. Bu şekilde ifade edilen teoreme Banach büzülme dönüşüm prensibi (veya Banach sabit nokta teoremi) denir.

Bu teorem, sabit noktanın varlığıyla birlikte tek olduğu ve bu noktanın nasıl bulunabileceği konusunda bize bilgi verir. Tam metrik uzaylarda büzülebilir dönüşümlerin sabit noktası olmayabilir. Edelstein $[6]$, X kompakt iken büzülebilir dönüşümlerin sabit noktasının varlığını ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizinin bu sabit noktaya yakınsadığını göstermiştir.

Banach sabit nokta teoremi, genişlemeyen dönüşümler için geçerli olmayabilir. Ayrıca bu durum için iterasyon dizileri de yakınsak olmayabilir. Örnek olarak,

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad Tx = x + a \quad (a \neq 0)$$

öteleme dönüşümü, $\mathbb{R}$ deki standart metriğe göre genişlemeyen dönüşüm olup hiçbir sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm ile oluşturulan iterasyon dizisi yakınsak değildir.

Her büzülme dönüşümü düzgün süreklidir. Böylece büzülme dönüşümünün sürekli bir dönüşüm olduğu açıktır. O zaman T sürekli değilse kesinlikle büzülme dönüşümü de olamaz.

Teorem 1.1.2. $[1]$ (X, d) tam metrik uzayında, her $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ için T^n bir büzülme dönüşümü ise T nin bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir.

Bu teoreme göre T büzülme dönüşümü değilse bile T^n nin büzülme dönüşümü olması, T nin sabit noktasının varlığını garanti etmektedir. Aşağıda bu durumu açıklayan bir örnek verilmiştir.

Örnek 1.1.3. $T : [0, 2] \to [0, 2]$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T nin $x = 1$ noktasında sürekli olmadığı açıktır. O halde T bir büzülme dönüşümü olamaz. Ancak T^2, $[0, 2]$ de bir büzülme dönüşümüdür ve 0, T nin tek bir sabit noktasıdır.

Birçok araştırmacı tarafından Banach sabit nokta teoremi genelleştirilmiş ve farklı uzaylarda karşılığı araştırılmıştır. Örneğin, Kannan $[15]$ te yaptığı çalışmada büzülme dönüşümü yerine, $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ için

$$d(fx, fy) \leq \alpha\Big(d(x, fx) + d(y, fy)\Big)$$

eşitsizliği kullanılmıştır. 1972 yılında, Chatterjea $[3]$ te ispatlanan teoremde, $\alpha \in [0, 1)$ için

$$d(fx, fy) \leq \alpha\Big(d(x, fy) + d(y, fx)\Big)$$

eşitsizliği kullanılmıştır. Her büzülme dönüşümü sürekli olmasına rağmen Kannan veya Chatterjea dönüşümleri sürekli olmayabilir. $\alpha \in [0, 1)$ ve

$$m(x, y) = max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \frac{1}{2}[d(x, fy) + d(y, fx)]\}$$

olmak üzere $d(fx, fy) \leq \alpha m(x, y)$ genelleştirilmiş büzülme eşitsizliği ve bazı şartlara sahip φ fonksiyonu kullanılarak $d(fx, fy) \leq \varphi(d(x, y))$ ve $d(fx, fy) \leq \varphi(m(x, y))$ eşitsizliği ile birlikte çeşitli sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

(X, d) tam metrik uzaylarında self-dönüşümler için Banach sabit nokta teoreminin en önemli genelleştirmelerini aşağıdakilerle verebiliriz. Son yıllarda bu dönüşümlerin farklı uzaylarda karşılıkları araştırılmıştır.

1. Reich $[20]$ (X, d) tam metrik uzayı üzerinde tanımlı $T : X \longrightarrow X$ dönüşümü $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty).$$

2. Hardy-Rogers $[12]$ (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \longrightarrow X$, her $x, y \in X$ için a, b, c, e, $f \geq 0$ ve $a + b + c + e + f < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, Ty) + ed(y, Tx) + fd(x, y).$$

3. Ciric [4] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \longrightarrow X$, $0 \leq k < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq kmax\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)]\}.$$

4. Suzuki [21] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Artmayan $\theta : [0, 1) \to (\frac{1}{2}, 1]$ fonksiyonu

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{(1-r)}{r^2}, & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{1+r}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $x, y \in X$ için

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \implies d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

olacak şekilde $r \in [0, 1)$ varsa T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsaktır.

2018 yılında M. Jleli ve B. Samet [13] klasik metrik uzay kavramının bir genelleştirmesi olarak $\mathcal{F}$-metrik uzay kavramını tanıtmış, bu uzayların bazı metrik ve topolojik özelliklerini ispatlamış ve bu uzaylarda Banach sabit nokta teoereminin ispatını vermiştir. Bu tez çalışmasında, ilgili temel makaleden faydalanarak $\mathcal{F}$-metrik uzaylar hem metrik hem de topolojik olarak tanıtılmış, B. Fisher'in sabit nokta teoreminin bu uzaylar için karşılığı verilmiş ve bazı sabit nokta sonuçlarına ulaşılmıştır.

2. METERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan $\mathcal{F}$-metrik uzaylarla ilgili bazı önemli tanım, teorem ve özelliklere yer verilecektir.

2.1. $\mathcal{F}$-Metrik Uzaylarda Temel Kavramlar

Son yıllarda metrik uzay kavramı ile ilgili birçok genelleştirme ortaya çıkmıştır. Czerwik [5], b-metrik kavramını tanıtmıştır. Khamsi ve Hussain [16], bu fikri yeniden düzenleyerek relaxed$_p$ metrik olarak isimlendirmişlerdir ve s- relaxed$_p$ kavramını tanıtmışlardır. Herhangi bir s-relaxed$_p$ metriğinin bir b-metriği olduğunu göstermişlerdir. Ama tersinin doğru olmadığını ispatlamışlardır (bkz. örneğin [4]). Gähler [10], 2-metrik kavramını ortaya koymuştur. Bu $X \times X \times X$ dönüşümü ile tanımlanan bir kümedir. Bununla birlikte, farklı yazarlar s-relaxed$_p$ ve 2-metrik uzay kavramları arasında hiçbir ilişkinin olmadığını kanıtlamışlardır (bkz. örneğin [11]). Mustafa ve Sims [19] tarafından genelleştirilmiş metrik uzay kavramı, G-metrik uzay adı altında verilmiştir. Branciari [2] tarafından üçgen esitsizliği, dört noktadan oluşturularak daha genel bir metrik kavramı verilmiştir. Matthews [17] tarafından ise kısmi metrik kavramı verilmiştir. Son zamanlarda Jleli ve Samet [13] tarafından, üçgen eşitsizliği yerine dört noktadan oluşan (iii) şartı verilmiştir ve $\limsup$ koşulunu JS-metrik kavramı ile değiştirmişlerdir.

Yukarıdakiler ile ilgili daha fazla bilgi için Ciric ve Shahzad'ın [4] kitabı incelenebilir. Şimdi $\mathcal{F}$-metrik uzayın temel kavramlarını ve özelliklerini verelim.

2.2. $\mathcal{F}$-Metrik Uzayın Genelleştirilmesi

$\mathcal{F}$, aşağıdaki koşulları sağlayan $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon kümesi olsun.

(F_1) f azalmayan, yani $0 < s < t \Longrightarrow f(s) \leq f(t)$.

(F_2) Her $t_n \subset (0, +\infty)$ dizisi için

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} t_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(t_n) = -\infty.$$

Yukarıda verilmiş olan f fonksiyon kavramı kullanılarak metrik uzay kavramının $\mathcal{F}$-metrik uzaylara genelleştirilmesi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.2.1. [13] X boştan farklı bir küme ve $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $(f, \alpha) \in F \times [0, +\infty)$ var öyle ki

$(D1)$ $(x, y) \in X \times X$, $D(x, y) = 0 \iff x = y$.

$(D2)$ Her $(x, y) \in X \times X$ için $D(x, y) = D(y, x)$.

$(D3)$ Her $(x, y) \in X \times X$, her $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(u_1, u_N) = (x, y)$ olmak üzere $(u_i)_{i=1}^N \subset X$ için

$$D(x,y) > 0 \Longrightarrow f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) + \alpha$$

özellikleri sağlansın. Böylece D fonksiyonuna X üzerinde bir $\mathcal{F}$-metrik ve (X, D) ikilisine de $\mathcal{F}$-metrik uzay denir. X üzerinde herhangi bir metriğin, X üzerinde bir $\mathcal{F}$-metrik olduğu ifade edilmiştir. Gerçekten de d, X üzerinde bir metrik olup $(D1)$ ve $(D2)$ yi sağlar. Diğer yandan üçgen eşitsizliğiden, her $(x, y) \in X \times X$ için $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ olmak üzere $(u_i)_{i=1}^N \subset X$ ve $(u_1, u_N) = (x, y)$ olsun.

$$d(x,y) \leq \sum_{i=1}^{N-1} d(u_i, u_{i+1})$$

$$d(x,y) > 0 \Longrightarrow \ln\Big(d(x,y)\Big) \leq \ln\Big(\sum_{i=1}^{N-1} d(u_i, u_{i+1})\Big)$$

elde ederiz. Böylece d, $f(t) = \ln t$, $t > 0$ ve $\alpha = 0$ olup (D_3) sağlanır. Fakat, X üzerinde her $\mathcal{F}$-metrik, X üzerinde bir metrik olmak zorunda değildir. Aşağıda $\mathcal{F}$-metrik uzay olup metrik uzay olmayan durum için aksine bir örnek verelim.

Örnek 2.2.2. [13] $X = \mathbb{N}$ ve $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü, her $(x, y) \in X \times X$ için aşağıdaki eşitsizlikle tanımlanmış olsun.

$$D(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2, & (x,y) \in [0,3] \times [0,3] \\ |x-y|, & (x,y) \notin [0,3] \times [0,3] \end{cases}$$

D dönüşümünün $(D1)$ ve $(D2)$ yi sağladığı kolayca gösterilebilir. Ancak D üçgen eşitsizliğini sağlamaz. Çünkü,

$$d(1,3) = 4 > 1 + 1 = d(1,2) + d(2,3).$$

Böylece D dönüşümü X üzerinde bir metrik olmaz. Ayrıca, belirli bir $(x, y) \in X \times X$ için $D(x, y) > 0$ olur. $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ olmak üzere $(u_i)_{i=1}^N \subset X$ ve $(u_1, u_N) = (x, y)$ olsun.

$$I = \{i = 1, 2, ..., N-1 : (u_i, u_{i+1}) \in [0,3] \times [0,3]\}$$

ve

$$J=\{1,2,...,N-1\}\backslash I$$

alalım. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}) &= \sum_{i\in I} D(u_i,u_{i+1})+\sum_{j\in J} D(u_j,u_{j+1})\\ &= \sum_{i\in I}(u_{i+1}-u_i)^2+\sum_{j\in J}|u_{j+1}-u_j|.\end{aligned}$$

Burada iki farklı durum vardır. Şimdi bu durumları inceleyelim.

1. Durum: $(x,y)\notin[0,3]\times[0,3]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}D(x,y) &= |x-y|\\ &\le \sum_{i=1}^{N-1}|u_{i+1}-u_i|\\ &= \sum_{i\in I}|u_{i+1}-u_i|+\sum_{j\in J}|u_{j+1}-u_j|.\end{aligned}$$

Diğer yandan,

$$|u_{i+1}-u_i|\le(u_{i+1}-u_i)^2,\quad i\in I.$$

Buradan

$$\begin{aligned}D(x,y) &\le \sum_{i\in I}(u_{i+1}-u_i)^2+\sum_{j\in J}|u_{j+1}-u_j|\\ &= \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}).\end{aligned}$$

elde ederiz.

2. Durum: $(x,y)\in[0,3]\times[0,3]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}D(x,y) &= |x-y|^2\\ &\le 3|x-y|\\ &\le 3\Big(\sum_{i\in I}|u_{i+1}-u_i|+\sum_{j\in J}|u_{j+1}-u_j|\Big)\\ &\le 3\Big(\sum_{i\in I}|u_{i+1}-u_i|^2+\sum_{j\in J}|u_{j+1}-u_j|\Big)\\ &= 3\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i,u_{i+1}).\end{aligned}$$

Yukarıdaki durumlar birleştirildiğinde her $(x,y) \in X \times X$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(u_1, u_N) = (x,y)$ olmak üzere her $(u_i)_{i=1}^{N} \subset X$ için

$$D(x,y) > 0 \Rightarrow D(x,y) \leq 3 \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})$$

sonucunu elde ederiz.

$$D(x,y) > 0 \Rightarrow \ln\Big(D(x,y)\Big) \leq \ln\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) + \ln 3.$$

Buradan D nin , $f(t) = \ln t, t > 0$ ve $\alpha = \ln 3$ alınmasıyla $(D3)$ özelliğini sağladığı gösterilmiş olur. Böylece D, X üzerinde bir $\mathcal{F}$-metriktir.

Örnek 2.2.3. [13] (s-relaxed$_p$ metrik sınıfı)

X üzerinde $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü bir s-relaxed$_p$ metrik olsun. (bkz. [9])

Yani, d dönüşümü, $(D1)$ ve $(D2)$ özelliklerini sağlar.

(S) $K \geq 1$, her $(x,y) \in X \times X$ için $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(u_1, u_N) = (x,y)$ olmak üzere her $(u_i)_{i=1}^{N} \subset X$ var öyle ki

$$d(x,y) \leq K \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}).$$

Böylece d, $f(t) = \ln t$, $t > 0$ ve $\alpha = \ln K$ alınmasıyla $(D3)$'ü sağlar. Sonuç olarak X üzerindeki herhangi bir s-relaxed$_p$ metriği, X üzerinde bir $\mathcal{F}$-metriktir.

Aşağıdaki örnek, $\mathcal{F}$-metrik sınıfının s-relaxed$_p$ metriklerinden daha geniş bir sınıf olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.2.4. [13] $X = \mathbb{N}$ ve $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $(x,y) \in X \times X$ için

$$D(x,y) = \begin{cases} exp(|x-y|), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} \tag{2.1}$$

eşitliği ile tanımlansın. D dönüşümünün $(D1)$ ve $(D2)$ yi sağladığı kolayca görülebilir. İlk önce D nin s-relaxed$_p$ de bir metrik olmadığını ispatlayalım. D nin Örnek 2.2.3 ün (S) koşulunu ve $K \geq 1$ sağladığını kabul edelim. Bu nedenle,

$$D(2n, 0) \leq K\Big(D(2n, n) + D(n, 0)\Big), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Yani,

$$exp(n) \leq 2K, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$\lim_{n \longrightarrow +\infty}$ için bir çelişki elde ederiz. Bu nedenle, D dönüşümü bir s-relaxed$_p$ metriği değildir. Şimdi, D dönüşümünün $\mathcal{F}$-metrik sınıfına ait olduğunu kanıtlayalım.

$$f(t) = \frac{-1}{t}, \quad t > 0$$

olsun. $f \in \digamma$ olduğu kolayca görülebilir. $(D3)$'ü sağlatmak için $(x,y) \in X \times X$ olmak üzere $D(x,y) > 0$ olsun. Her $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(u_1, u_N) = (x,y)$ olmak üzere $(u_i)_{i=1}^{N} \subset X$ var öyle ki

$$\begin{aligned}
&1 + f\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) - f\Big(D(x,y)\Big) \\
&= 1 - \frac{1}{\sum_{i=1:N-1, u_i+1 \neq u_i} exp(|u_{i+1} - u_i|)} + \frac{1}{exp(|x-y|)} \\
&\geq 1 - 1 + \frac{1}{exp(|x-y|)} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Böylece,

$$f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) + 1.$$

D dönüşümü $(D3)$ ten $f(t) = \frac{-1}{t}$, $t > 0$ ve $\alpha = 1$ olduğu kanıtlanır. Böylece, D dönüşümü bir $\digamma$-metriktir. [10] da kanıtlanmıştır (ayrıca bkz. [4]). Herhangi bir $K \geq 1$ için s-relaxed$_p$ metrik uzayının, b-metrik olmadığı kanıtlamıştır. $\digamma$-metrik uzaylar için bir benzerini ispatlayacağız.

$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü için $(D1)$, $(D2)$ ve $(S)'$ sağlanır ve $K \geq 1$ var öyle ki

$$d(x,y) \leq K\Big(d(x,z) + d(z,y)\Big), \qquad (x,y,z) \in X \times X \times X.$$

Böylece d nin X üzerinde bir b-metriği ve $(S) \implies (S)'$ olduğu gözlemlenir. Bu durumda herhangi bir $s-$relaxed$_p$ metrik bir b-metriktir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir.

2.3. $\digamma$-Metriklerin Karakterizasyonu

Bu kısımda, ilk önce $\digamma$-metrik uzaylar ile ilgili sınırlılık kavramı verilecek ve daha sonra $\digamma$-metriklerin diğer bilinen bazı metriklerle ilişkisi incelenecektir.

Tanım 2.3.1. [13] X boştan farklı bir küme ve $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü $(D1)$ ve $(D2)$ özelliklerini sağlasın. Eğer, X üzerinde bir d metriği,

$$(x,y) \in X \times X, D(x,y) > 0 \Rightarrow f\Big(d(x,y)\Big) \leq f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(d(x,y)\Big) + \alpha \qquad (3.1)$$

olmak üzere varsa (X, D) ikilisine $(f, \alpha) \in F \times [0, +\infty)$ a göre $\mathcal{F}$-metrik sınırlıdır denir.

Şimdi $\mathcal{F}$-metrik uzaylarda sınırlıklık ile ilgili aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 2.3.2. [13] X boştan farklı bir küme ve $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü $(D1)$ ve $(D2)$ özelliklerini sağlasın. f sağdan sürekli ve $(f, \alpha) \in F \times [0, +\infty)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) (X, D) yukarıdaki şekilde tanımlanmış (f, α) lı X üzerinde bir $\mathcal{F}$-metriktir.

(ii) (X, D), (f, α) ya göre $\mathcal{F}$-metriği sınırlıdır.

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$: (X, D), (f, α) ya göre X üzerinde bir $\mathcal{F}$-metrik olsun.
$d : X \times X \to [0, +\infty)$ dönüşümü, her $(x, y) \in X \times X$ için

$$d(x, y) = \inf\{\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) : N \in \mathbb{N},\ N \geq 2,\ (u_i)_{i=1}^{N} \subset X, (u_1, u_N) = (x, y)\}$$

eşitliği ile tanımlansın. d nin X üzerinde bir metrik olduğunu ispatlayalım. Her $x \in X$ için $D(x, x) = 0$ olduğundan d nin tanımından

$$d(x, x) = 0, \quad (x \in X)$$

elde ederiz. Şimdi $(x, y) \in X \times X$ için $x \neq y$ olsun. Kabul edilim ki, $d(x, y) = 0$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. d nin tanımına göre $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(u_1, u_N) = (x, y)$ olmak üzere $(u_i)_{i=1}^{N} \subset X$ vardır öyle ki

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) < \varepsilon.$$

(F_1) den

$$f\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) \leq f(\varepsilon) \qquad (3.2)$$

elde ederiz. Diğer yandan, $(D3)$ den

$$f\Big(D(x, y)\Big) \leq f\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) + \alpha. \qquad (3.3)$$

(3.2) ve (3.3) ü kullanarak

$$f\Big(D(x, y)\Big) \leq f(\varepsilon) + \alpha,\ \varepsilon > 0$$

elde ederiz. (F_2) yi kullanarak

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(f(\varepsilon) + \alpha\Big) = -\infty$$

olmasından dolayı bir çelişki elde ederiz. Bu çelişkiden dolayı $d(x,y) > 0$ olur. d nin tanımı ve $(D2)$ den $(x,y) \in X \times X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ olduğu kolayca görülebilir. Üçgen eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için x, y, $z \in X$ ve $\rho > 0$ alalım.
D nin tanımına göre $x = u_1, u_2, ..., u_n = y$ ve $y = u_n, u_{n+1}, ..., u_m = z$ öyle ki

$$\sum_{i=1}^{n-1} D(u_i, u_{i+1}) < d(x,y) + \rho$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m-1} D(u_i, u_{i+1}) < d(y,z) + \rho$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında,

$$d(x,z) \leq \sum_{i=1}^{m-1} D(u_i, u_{i+1}) < d(x,y) + d(y,z) + 2\rho, \quad \rho > 0$$

elde ederiz. $\rho \to 0^+$ için limit aldığımızda

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

elde ederiz. d nin X üzerinde bir metrik olduğu sonucuna varılır. Şimdi, d nin (3.1) eşitsizliğini sağladığını gösterelim. $(x,y) \in X \times X$ öyle ki $D(x,y) > 0$ olsun. d nin tanımından

$$d(x,y) \leq D(x,y)$$

olduğu açıktır ve (F_1) den

$$f\Big(d(x,y)\Big) \leq f\Big(D(x,y)\Big) \qquad (3.4)$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ olsun. d nin tanımına göre $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(u_1, u_N) = (x,y)$ olmak üzere $(u_i)_{i=1}^{N} \subset X$ var öyle ki

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) < d(x,y) + \varepsilon$$

elde ederiz. (F_1) den

$$f\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) \leq f\Big(d(x,y) + \varepsilon\Big)$$

elde ederiz. $(D3)$ ve yukarıdaki eşitsizlikleri kullanarak

$$f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(d(x,y) + \varepsilon\Big) + \alpha, \quad \varepsilon > 0$$

elde ederiz. $\varepsilon \to 0^+$ için limiti alınır ve f in sağdan sürekliliğini kullanırsak

$$f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(d(x,y)\Big) + \alpha \qquad (3.5)$$

elde ederiz. (3.4) ve (3.5) den

$$f\Big(d(x,y)\Big) \leq f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(d(x,y)\Big) + \alpha$$

elde ederiz. Böylece (3.1) sağlanır ve (X, D), (f, α) ya göre $\mathcal{F}$-metrik sınırlı olur.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Kabul edelim ki (X, D), (f, α) ya göre $\mathcal{F}$-metrik sınırlı olsun. Yani, X üzerinde (3.1) eşitsizliğini sağlayan klasik d metriği vardır. Böylece D nin $(D3)$ ü sağladığını göstermek yeterlidir. $(x, y) \in X \times X$ var öyle ki $D(x, y) > 0$ olsun. $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(u_1, u_N) = (x, y)$ olmak üzere $(u_i)_{i=1}^N \subset X$ alalım. d, X üzerinde bir metrik olup üçgen eşitsizliğini sağlar ve

$$d(x,y) \leq \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) \qquad (3.6)$$

elde ederiz. Diğer yandan, (F_1) den

$$(u,v) \in X \times X, D(u,v) > 0 \Rightarrow f\Big(d(u,v)\Big) \leq f\Big(D(u,v)\Big)$$

olmasından dolayı

$$d(u,v) \leq D(u,v), \quad (u,v) \in X \times X \quad (3.7)$$

elde ederiz. (3.6) ve (3.7) den

$$d(x,y) \leq \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})$$

elde ederiz ve (F_1) kullanılmasıyla

$$f\Big(d(x,y)\Big) + \alpha \leq f\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) + \alpha$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlik kullanılarak ve

$$f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(d(x,y)\Big) + \alpha$$

den dolayı

$$f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\Big) + \alpha$$

elde ederiz. Böylece, $(D3)$ sağlanır ve D, X üzerinde bir $\mathcal{F}$-metrik olur. ■

Uyarı 2.3.3. [13] Teorem 2.3.2 ispatında f in sağ süreklilik şartı yalnızca $(i) \Rightarrow (ii)$ durumunu ispatlamak için kullanılmıştır. Ancak, herhangi bir $f \in \mathcal{F}$ için $(ii) \Rightarrow (i)$ durumunun ispatında f in sağ sürelilik şartı gerekli değildir.

Önerme 2.3.4. [13] Herhangi bir b-metrik uzay, $\mathcal{F}$-metrik uzay olmak zorunda değildir.

İspat: $X = [0,1]$ ve $d : X \times X \longrightarrow [0,+\infty)$ dönüşümü

$$d(x,y) = (x-y)^2, \quad (x,y) \in X \times X$$

eşitliği ile tanımlanmış olsun. d dönüşümünün $K = 2$ sabitli X üzerinde bir b-metrik olduğu kolay bir şekilde gösterilebilir. (bkz. [4]) Kabul edelim ki d dönüşümü $(f,\alpha) \in F \times [0,+\infty)$ olacak şekilde $(D3)$ ü sağlasın. $n \in \mathbb{N}^*$ ve

$$u_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 2, ..., n$$

olsun. $(D3)$ den

$$f\Big(d(0,1)\Big) \leq f\Big(d(0,u_1) + d(u_1,u_2) + ... + d(u_{n-1},1)\Big) + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Yani,

$$f(1) \leq f(\frac{1}{n}) + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

elde edilir. Diğer yandan (F_2) yi kullandığımızda

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(\frac{1}{n}) + \alpha = -\infty$$

olmasından dolayı bir çelişki elde edilir. Bu çelişkiden dolayı d dönüşümü bir b-metrik olmasına rağmen $(D3)$ sağlamadığı için $\mathcal{F}$-metrik olmaz. ■

2.4. $\mathcal{F}$-Metrik Topoloji Üzerine

Bu kısımda, $\mathcal{F}$-metrik uzaylar üzerinde tanımlanmış doğal topolojinin bazı temel özellikleri verilecektir.

Tanım 2.4.1. [13] (X,D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay olsun. X in bir A alt kümesinin $\mathcal{F}$-açık olabilmesi için gerek ve yeter şart her $x \in A$ için $r > 0$ sayısı var öyle ki $B(x,r) \subset A$ olmasıdır ve burada

$$B(x,r) = \{y \in X : D(x,y) < r\}$$

eşitliği ile gösterilir. X in C alt kümesi $\mathcal{F}$-kapalı olabilmesi için $X \backslash C$ kümesinin $\mathcal{F}$-açık olması gerekir. X in tüm $\mathcal{F}$-açık alt kümelerinin ailesini $\tau_{\mathcal{F}}$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.4.2. [13] (X,D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay olsun. $\tau_{\mathcal{F}}$, X üzerinde bir topolojidir.

Önerme 2.4.3. [13] (X,D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay olsun. X in boştan farklı bir A alt kümesi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) A, $\mathcal{F}$-kapalıdır.

(ii) Herhangi bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi için,

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0,\ x \in X \Longrightarrow x \in A.$$

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ Kabul edelim ki A, $\mathcal{F}$-kapalı $\{x_n\}$, A da bir dizi ve $x \in X$ için

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0 \qquad (4.1)$$

eşitliği sağlansın. Yine kabul edelim ki $x \in X \backslash A$ olsun. A, $\mathcal{F}$-kapalı olduğundan, $X \backslash A$, $\mathcal{F}$-açıktır. Bu nedenle, $B(x,r) \subset X \backslash A$ yani $B(x,r) \cap A = \varnothing$ olacak şekilde $r > 0$ vardır. (4.1) den $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$D(x_n, x) < r, \quad n \geq N$$

yani

$$x_n \in B(x,r), \quad n \geq N$$

elde ederiz. Bu nedenle, $x_N \in B(x,r) \cap A$ olması bir çelişkiye yol açar. Bu nedenle, $x \in A$ olup bu ise ispatı tamamlar.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Tersine, (ii) nin sağlandığını varsayalım. $x \in X \backslash A$ olsun. $r > 0$ olacak şekilde bazı $B(x,r) \subset X \backslash A$ olduğunun ispatlanması gerekir. Her bir $r > 0$ için $x_r \in B(x,r) \cap A$ olduğu varsayılarak çelişki elde ederiz. Bu herhangi bir $N \in \mathbb{N}^*$ için $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ olduğunu gösterir.

$$\{x_n\} \subset A, \quad \lim_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0.$$

(ii) den $x \in A$ olup $x \in X \backslash A$ ile çelişir. Bu nedenle A, $\mathcal{F}$-kapalıdır ve bu ise ispatı tamamlar. ■

Önerme 2.4.4. [13] (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ olsun. X in bir alt kümesi olarak $\bar{B}(a,r)$ aşağıdaki eşitlikle verilsin.

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in X : D(a,x) \leq r\}.$$

Her $\{x_n\} \subset X$ dizisi için

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0,\ x \in X \Longrightarrow D(x,y) \leq \lim_{n\to+\infty} \sup D(x_n, y), \quad y \in X \qquad (4.2)$$

ifadesi sağlanır ve $\bar{B}(a,r)$, $\mathcal{F}$-kapalıdır.

İspat: $\{x_n\} \subset B(a,r)$ dizisi $x \in X$ için

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0$$

eşitliğini sağlasın. $x \in \bar{B}(a,r)$ olduğu Önerme 2.4.3 ten açıktır. $\bar{B}(a,r)$ tanımına göre

$$D(x_n, a) \leq r, \quad n \in \mathbb{N}$$

olduğunu biliyoruz. $\sup \lim_{\to +\infty}$ ve (4.2) den

$$D(x,a) \leq \lim_{n\to+\infty} \sup D(x_n, a) \leq r.$$

Böylece $x \in \bar{B}(a,r)$ elde ederiz. Bu nedenle $\bar{B}(a,r)$, $\mathcal{F}$-kapalıdır. ■

Uyarı 2.4.5. [13] Önerme 2.4.4, $\bar{B}(a,r)$ nin $\mathcal{F}$-kapalı olması yalnızca yeterlilik koşulunu sağlar. $\bar{B}(a,r)$, $\mathcal{F}$-kapalı olmasının gerekli ve yeterli bir durum olup olmadığı ilginç bir problem olarak durmaktadır.

Tanım 2.4.6. [13] (X,D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve A, X üzerinde boştan farklı bir alt küme olsun. $\tau_{\mathcal{F}}$ topolojisine göre A nın kapanışı $\bar{A}$ ile gösterilir. Yani, A, kümesini kapsayan X in $\mathcal{F}$-kapalı alt kümelerinin arakesitine A nın kapanışı denir. Tanımdan açıktır ki $\bar{A}$ kümesi A yı kapsayan en küçük $\mathcal{F}$-kapalı kümesidir.

Önerme 2.4.7. [13] (X,D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay olmak üzere X in boştan farklı bir A alt kümesi için

$$x \in \bar{A}, r > 0 \Longrightarrow B(x,r) \cap A \neq \varnothing$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $(f,\alpha) \in \mathcal{F} \times [0,+\infty)$ olacak şekilde $(D3)$ sağlanır.

$$A' = \{x \in X : \forall r > 0,\ a \in A : D(x,a) < r\}$$

ile tanımlanmış olsun. $(D1)$ den $A \subset A'$ olduğu görülebilir. Şimdi, A' nün, $\mathcal{F}$-kapalı olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$, A' üzerinde bir dizi olsun öyle ki

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0, \quad x \in X \qquad (4.3)$$

eşitliği sağlansın. $r > 0$ olsun ve $\delta_r > 0$ var öyle ki (F_2) yi kullanarak

$$0 < t < \delta_r \Rightarrow \mu(t) < \mu(r) - \alpha \qquad (4.4)$$

elde ederiz. Diğer yandan, $N \in \mathbb{N}$ ve (4.3) ten

$$D(x_n, x) < \frac{\delta_r}{3}, \quad n \geq N.$$

$x_N \in A'$ olduğundan $a \in A$ var öyle ki

$$D(x_n, x) < \frac{\delta_r}{3}$$

ifadesini elde ederiz. $D(x,a) > 0$ olsun ve $(D3)$ ten

$$f\Big(D(x,a)\Big) \leq f\Big(D(x,x_N) + D(x_N,a)\Big) + \alpha \leq f\Big(\frac{2\delta_r}{3}\Big) + \alpha.$$

Fakat (4.4) ten $\frac{2\delta_r}{3} < \delta_r$ olduğundan

$$f(\frac{2\delta_r}{3}) < f(r) - \alpha$$

elde ederiz. Böylece, $D(x,a) < r$ olup (F_1) den

$$f\Big(D(x,a)\Big) < f(r).$$

Bu nedenle, her durumda

$$D(x,a) < r$$

sahibiz ve bu da bize $x \in A'$ sonucunu verir. Önerme $2.4.3$ e göre A yı içeren A', $\mathcal{F}$-kapalıdır. Böylece $\bar{A} \subset A'$ dır. ■

Tanım 2.4.8. $[13]$ (X,D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve $\{x_n\}$, X te bir dizi olsun. $\tau_{\mathcal{F}}$ topolojisine göre $\{x_n\}$, x e yakınsak ise $x \in X$ için $\{x_n\}$, $\mathcal{F}$-yakınsak olduğu söylenebilir, yani X in x içeren her Ax, $\mathcal{F}$-açık alt kümesi her $n \geq \mathbb{N}$ için $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki $x_n \in Ax$ tir. Böylece, $\{x_n\}$ nin limiti x olur.

Önerme 2.4.9. $[13]$ (X,D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$, X te bir dizi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $\{x_n\}$, $x \in X$ noktasına $\mathcal{F}$-yakınsaktır.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} D(x_n,x) = 0$.

Önerme 2.4.10. $[13]$ (X,D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve $\{x_n\}$, X te bir dizi olsun. Böylece,

$$(x,y) \in X \times X,\ \lim_{n\to+\infty} D(x_n,x) = \lim_{n\to+\infty} D(x_n,y) = 0 \Rightarrow x = y$$

dir.

İspat: $(x,y) \in X \times X$ verilsin öyle ki

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n,x) = \lim_{n\to+\infty} D(x_n,y) = 0.$$

Kabul edelim ki $x \neq y$ olsun. Yani, $(D1)$ den $D(x,y) > 0$ dır. $(f,\alpha) \in \mathcal{F} \times [0,+\infty)$ var öyle ki, her n için $(D3)$ ten

$$f\Big(D(x,y)\Big) \leq f\Big(D(x,x_n) + D(x_n,y)\Big) + \alpha$$

elde ederiz. Diğer yandan $(D2)$ ve (F_2) yi kullanarak

$$\lim_{n\to+\infty} f\Big(D(x,x_n) + D(x_n,y)\Big) + \alpha = \lim_{n\to+\infty} f\Big(D(x_n,x) + D(x_n,y)\Big) + \alpha = -\infty$$

sonucunu elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Bu çelişkiden dolayı $x = y$ dir. ■

Tanım 2.4.11. [13] (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve $\{x_n\}$, X te bir dizi olsun.

(i) $\{x_n\}$ dizisi

$$\lim_{m,n\to+\infty} D(x_n, x_m) = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa bu diziye $\mathcal{F}$-Cauchy dizisi denir.

(ii) X teki her $\mathcal{F}$-Cauchy dizisi X in belirli bir elemanına $\mathcal{F}$-yakınsak ise (X, D), $\mathcal{F}$-tamdır denir.

Örnek 2.4.12. [13] $X = \mathbb{N}$ olmak üzere $D : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü (2.1) gibi tanımlansın. Örnek 2.2.4 te $f(t) = \frac{-1}{t}$, $t > 0$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere (X, D) nin $\mathcal{F}$-metrik uzay olduğu gösterilmiştir. Şimdi, (X, D) nin $\mathcal{F}$-tam olduğunu ispatlayacağız.
$\{x_n\} \subset X$ bir $\mathcal{F}$-Cauchy dizisi olsun. Böylece, tanımdan

$$\lim_{n,m\to+\infty} D(x_n, x_m) = 0$$

elde ederiz. $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki

$$D(x_n, x_m) < \frac{1}{2}, \quad n, m \geq N.$$

Kabul edelim ki $n, m \geq N$ için $x_n \neq x_m$ olsun. D nin tanımı ve yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak

$$1 \leq D(x_n, x_m) = \exp(|x_n - x_m|) < \frac{1}{2}$$

sonucu elde ederiz ki bu bir çelişkidir. O zaman

$$x_n = x_N, \quad n \geq N.$$

Böylece

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x_N) = 0$$

dır. Yani $\{x_n\}$ dizisi x_N noktasına $\mathcal{F}$-yakınsaktır. Sonuç olarak (X, D), $\mathcal{F}$-tamdır.

Önerme 2.4.13. [13] (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay olsun. $\{x_n\} \subset X$, $\mathcal{F}$-yakınsak ise $\mathcal{F}$-Cauchy'dir.

İspat: $(f, \alpha) \in \mathcal{F} \times [0, +\infty)$ öyle ki $(D3)$ sağlansın. $x \in X$ için

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x) = 0 \qquad (4.5)$$

ve $\varepsilon > 0$ bir sabit olsun. (F_2) den $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$0 < t < \delta \Rightarrow f(t) < f(\varepsilon) - \alpha \qquad (4.6)$$

sağlanır. Diğer yandan, (4.5) ten $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki

$$D(x_n, x) + D(x_m, x) < \delta \quad n, m \geq N \qquad (4.7)$$

elde ederiz. Burada iki farklı durum vardır. Şimdi bu durumları inceleyelim.

1. Durum $x_m = x_n$ olsun. Bu durumda $(D1)$ den

$$D(x_m, x_n) = 0 < \varepsilon$$

sonucunu elde ederiz.

2. Durum $x_m \neq x_n$ olsun. Bu durumda (4.7) den

$$0 < D(x_n, x) + D(x_m, x) < \delta.$$

Böylece, (4.6) dan

$$f\Big(D(x_n, x) + D(x_m, x)\Big) < f(\varepsilon) - \alpha$$

sonucunu elde ederiz. $(D3)$ kullanılarak

$$f\Big(D(x_n, x_m)\Big) \leq f\Big(D(x_n, x) + D(x_m, x)\Big) + \alpha < f(\varepsilon)$$

elde ederiz. (F_1) den

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon$$

dir. Sonuç olarak,

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad n, m \geq N$$

elde ederiz. Böylece

$$\lim_{n,m \to +\infty} D(x_n, x_m) = 0$$

dır. Yani, $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$-Cauchy'dir. ■

Tanım 2.4.14. [13] X boştan farklı bir küme, (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. A, X üzerindeki $\tau_{\mathcal{F}}$ topolojisine göre kompaktsa, A, $\mathcal{F}$-kompaktır.

Önerme 2.4.15. [13] X boştan farklı bir küme, (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) A, $\mathcal{F}$-kompakttır.

(ii) Herhangi bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi için $x \in A$ ve $\{x_{n_k}\}$, $\{x_n\}$ nin bir alt dizisi olmak üzere

$$\lim_{k \to +\infty} D(x_{n_k}, x) = 0.$$

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ Kabul edelim ki A, $\mathcal{F}$-kompakt olsun. A nın boştan farklı $\mathcal{F}$-kapalı alt kümelerinin herhangi bir azalan dizisi, boş olmayan bir kesişime sahiptir. $\{x_n\}$, A da bir dizi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_n = \{x_m : m \geq n\}$$

olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $C_{n+1} \subset C_n$ ve $\{\overline{C_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, A nın boştan farklı $\mathcal{F}$-kapalı alt kümelerinin azalan bir dizisidir. Bu nedenle, x in bazıları $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$ aittir. Daha sonra, $\varepsilon > 0$ bir sabit olsun. $x \in \overline{C_0}$ ve Önerme 2.4.7 den $n_0 \geq 0$ ve $x_{n_0} \in A$ var öyle ki $D(x_{n_0}, x) < \varepsilon$. Böylece herhangi $k \in \mathbb{N}$ için $n_k \geq k$ ve $x_{n_k} \in A$ var öyle ki
$D(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Bu nedenle,

$$\lim_{k\to+\infty} D(x_{n_k}, x) = 0$$

elde ederiz. Diğer yandan, A, $\mathcal{F}$-kompakt olduğu için $\mathcal{F}$-kapalı ve $x \in A$ dır.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Tersinin sağlandığı kabul edelim. $(f, \alpha) \in \mathcal{F} \times [0, +\infty)$ olmak üzere $(D3)$ sağlanır. İlk olarak,

$$\forall r > 0, \exists\, (x_i)_{i=1,2,\ldots,n} \subset A : A \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} B(x_i, r) \qquad (4.8)$$

ifadesi sağlansın. Çelişki yöntemini kullaranak, kabul ediyoruz ki $r > 0$ ve
$(x_i)_{i=1,2,\ldots,n} \subset A$ sonlu sayıda elemanı için

$$A \nsubseteq \bigcup_{i=1,\ldots,n} B(x_i, r)$$

elde ederiz. $x_1 \in A$ keyfi bir eleman olsun. Böylece

$$A \nsubseteq B(x_1, r)$$

olur. Yine, $x_2 \in A$ gibi keyfi bir eleman alalım.

$$D(x_1, x_2) \geq r$$

elde ederiz. Bu iki ifadeden

$$A \nsubseteq B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$$

sonucunu elde ederiz. $x_3 \in A$ başka bir keyfi eleman olsun. Böylece

$$D(x_i, x_3) \geq r, \quad i = 1, 2.$$

Bu işleme tümevarım yöntemiyle devam edilirse, $\{x_n\} \subset A$ dizisini

$$D(x_n, x_m) \geq r, \quad n, m \in \mathbb{N}^*$$

olacak şekilde oluşturabiliriz. Bu durumda, $\{x_n\}$ nin herhangi bir $\mathcal{F}$-Cauchy alt dizisinden, (yani (4.7) den) $\mathcal{F}$-yakınsak bir alt dizisi elde etmek mümkün değildir. Böylece (ii) den bir çelişki elde ederiz, bu da (4.8) i kanıtlar. $\{A_i\}_{i\in I}$, X in $\mathcal{F}$-açık alt kümesinin keyfi bir elemanı olsun, öyle ki

$$A \subset \bigcup_{i \in I} A_i. \qquad (4.9)$$

Kabul edelim ki

$$\exists r_0 > 0 : \forall x \in A, \exists i \in I : B(x, r_0) \subset A_i \qquad (4.10)$$

olsun. Herhangi bir $r > 0$ var olduğunu kabul ederek çelişki yöntemiyle ispatlayacağız. Her $i \in I$ için $x_r \in A$ olacak şekilde $B(x_r, r) \nsubseteq A_i$ dir. Her $n \in \mathbb{N}^*$ ve $i \in I$ için $B(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq A_i$ olacak şekilde $x_n \in A$ vardır. (ii) ve $\{x_n\}$ den bir $\{x_{n_k}\}$ dizisi elde edilir, öyle ki $x \in A$ için

$$\lim_{k \to +\infty} D(x_{n_k}, x) = 0. \qquad (4.11)$$

Diğer yandan, (4.9) a göre $j \in I$ olacak şekilde $x \in A_j$ vardır. A_j, X in $\mathcal{F}$-açık alt kümesidir ve $r_0 > 0$ dır öyle ki $B(x, r_0) \subset A_j$. Böylece, herhangi bir $n_k \in \mathbb{N}^*$ ve $z \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ için

$$\begin{aligned} D(x,z) > 0 \Longrightarrow f\Big(D(x,z)\Big) &\leq f\Big(D(x, x_{n_k}) + D(x_{n_k}, z)\Big) + \alpha \\ &< f\Big(D(x, x_{n_k}) + \frac{1}{x_{n_k}}\Big) + \alpha \end{aligned}$$

elde ederiz. $K \in \mathbb{N}^*$ var öyle ki (4.11) ve (F_2) den

$$f\Big(D(x, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k}\Big) < f(r_0) - \alpha, \qquad k \geq K$$

ve

$$D(x,z) > 0 \Rightarrow f\Big(D(x,z)\Big) < f(r_0)$$

sonuçlarını elde ederiz. Bu nedenle, (F_1) den

$$D(x,z) < r_0$$

dir. Böylece

$$B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset A_j, \qquad n_k \in \mathbb{N}^*$$

olup

$$B\Big(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\Big) \subset B(x, r_0), \qquad n_k \in \mathbb{N}^*$$

sonucunu elde ederiz. Her $i \in I$ için $B(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq A_i$ dir, öyle ki bu bir çelişkidir. Böylece (4.10) sağlanmış olur. Ayrıca, (4.8) den $(x_p)_{p=1,\ldots,n} \subset A$ var öyle ki

$$A \subset \bigcup_{p=1,\ldots,n} B(x_p, r_0)$$

elde ederiz. Fakat (4.10) dan herhangi bir $p = 1, ..., n$, $i(p) \in I$ için $B(x_p, r_0) \subset A_{i(p)}$ var öyle ki

$$A \subset \bigcup_{p=1,...,n} A_{i(p)}.$$

Böylece A, $\mathcal{F}$-kompakttır. ■

Tanım 2.4.16. [13] X boştan farklı bir küme (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $x_n \subset A$ dizisi için $x \in A$, $\{x_{n_k}\}$, $\{x_n\}$ nin bir alt dizisidir, öyle ki

$$\lim_{k \to +\infty} D(x_{n_k}, x) = 0$$

oluyorsa A alt kümesine dizisel $\mathcal{F}$-kompakttır denir.

Tanım 2.4.17. [13] (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay, A, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Böylece

$$\forall r > 0, \exists (x_i)_{i=1,...,n} \subset A : A \subset \bigcup_{i=1,...,n} B(x_i, r)$$

ifadesi sağlanıyor ise A alt kümesine $\mathcal{F}$-tamamen sınırlıdır denir.

Önerme 2.4.18. [13] (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve A, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun.

(i) A nın $\mathcal{F}$-kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart A nın dizisel $\mathcal{F}$-kompakt olmasıdır.

(ii) Eğer A, $\mathcal{F}$-kompakt ise A, $\mathcal{F}$-tamamen sınırlıdır.

2.5. $\mathcal{F}$-Metrik Uzaylarda Banach Büzülme Dönüşümü

Bu kısımda, Banach büzülme dönüşüm prensibinin $\mathcal{F}$-metrik uzaylardaki karşılığından bahsedilecektir.

Teorem 2.5.1. [13] (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve $g : X \longrightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(i) (X, D) bir tam $\mathcal{F}$- metrik uzay olsun.

(ii) $k \in (0, 1)$ öyle ki

$$D\Big(g(x), g(y)\Big) \leq kD(x, y), \quad (x, y) \in X \times X.$$

Buna göre, g dönüşümü $x^* \in X$ gibi bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, herhangi bir $x_0 \in X$ ve $x_n \subset X$ için

$$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N} \qquad (5.1)$$

ile tanımlanan dizi x^* noktasına $\mathcal{F}$-yakınsaktır.

İspat: İlk önce, g dönüşümünün en fazla bir sabit noktaya sahip olduğunu kanıtlayalım. $(u, v) \in X \times X$ ve $u \neq v$ olmak üzere g nin iki sabit noktası olsun, yani

$$D(u, v) > 0,\ g(u) = u, g(v) = v$$

dir. (ii) den

$$D(u, v) = D\Big(g(u), g(v)\Big) \leq kD(u, v) < D(u, v)$$

elde ederiz ki bu ise bir çelişkidir.
$(f, \alpha) \in \mathcal{F} \times [0, +\infty)$ öyle ki $(D3)$ sağlansın ve $\varepsilon > 0$ bir sabit olsun. (F_2) den $\delta > 0$ var öyle ki

$$0 < t < \delta \Longrightarrow f(t) < f(\varepsilon) - \alpha. \qquad (5.2)$$

$x_0 \in X$ keyfi bir eleman olsun. $\{x_n\} \subset X$ dizisi (5.1) deki gibi tanımlanmış olsun. Genelliği bozmadan $D(x_0, x_1) > 0$ olarak alabiliriz. Aksi taktirde x_0, g dönüşümünün bir sabit noktası olacaktır. (ii) den

$$D(x_n, x_{n+1}) \leq k^n D(x_0, x_1), \quad n \in \mathbb{N}$$

ve

$$\sum_{i=n}^{m-1} D(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{k^n}{1-k} D(x_0, x_1), \quad m > n$$

elde ederiz. Böylce

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k^n}{1-k} D(x_0, x_1) = 0,$$

bazı $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki

$$0 < \frac{k^n}{1-k} D(x_0, x_1) < \delta, \qquad n \geq N \qquad (5.3)$$

sonucunu elde ederiz. Dolayısıyla (5.2) ve (F_1) den

$$f\Big(\sum_{i=n}^{m-1} D(x_i, x_{i+1})\Big) \leq f\Big(\frac{k^n}{1-k} D(x_0, x_1)\Big) < f(\varepsilon) - \alpha, \quad m > n \geq N. \qquad (5.4)$$

$(D3)$ ve (5.4) kullanılarak

$$D(x_n, x_m) > 0, m > n \geq N \Longrightarrow f\Big(D(x_n, x_m)\Big) \leq f\Big(\sum_{i=n}^{m-1} D(x_i, x_{i+1})\Big) + \alpha < f(\varepsilon)$$

elde edilir ve (F_1) den

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad m > n \geq N.$$

Bu $\{x_n\}$ nin $\mathcal{F}$-Cauchy olduğunu kanıtlar. (X, D), $\mathcal{F}$-tam olduğundan $x^* \in X$ var öyle ki $\{x_n\}$, x^* noktasına $\mathcal{F}$-yakınsaktır, yani

$$\lim_{n\to+\infty} D(x_n, x^*) = 0. \qquad (5.5)$$

Böylece x^* nın, g nin bir sabit noktası olduğu ispatlanır. Kabul edelim ki $D\Big(g(x^*), x^*\Big) > 0$ olsun. Buradan çelişki elde ederiz. $(D3)$ ten

$$f\Big(D(g(x^*), x^*)\Big) \leq f\Big(D(g(x^*), g(x_n))\Big) + D(g(x_n), x^*) + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) ve (F_1) den

$$f\Big(D\big(g(x^*), x^*\big)\Big) \leq f\Big(kD(x^*, x_n) + D(x_{n+1}, x^*)\Big) + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}$$

sonucunu elde ederiz. Diğer yandan, (F_2) ve (5.5) ten

$$\lim_{n\to+\infty} f\Big(kD(x^*, x_n) + D(x_{n+1}, x^*)\Big) + \alpha = -\infty.$$

Bu nedenle $D(g(x^*), x^*) = 0$ yani $g(x^*) = x^*$ elde edilir. Sonuç olarak, $x^* \in X$ olup g nin bir tek sabit noktası vardır. ■

Sonuç 2.5.2. [13] (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay ve $(f, \alpha) \in \mathcal{F} \times [0, +\infty)$ olsun öyle ki $(D3)$ sağlansın. $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere $g : B(x_0, r) \to X$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki aşağıdakiler sağlansın.

(i) (4.2) sağlansın.

(ii) (X, D) bir tam $\mathcal{F}$-metrik uzay olsun.

(iii) $k \in (0, 1)$ var öyle ki

$$D\Big(g(x), g(y)\Big) \leq kD(x, y), \quad (x, y) \in B(x_0, r) \times B(x_0, r).$$

(iv) $0 < \varepsilon < r$ var öyle ki

$$f\Big(k\varepsilon + D(x_0, g(x_0))\Big) \leq f(\varepsilon) - \alpha.$$

Böylece g bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $0 < \varepsilon < r$ olsun öyle ki (iv) sağlansın. İlk önce,

$$g\Big(B(x_0, \varepsilon)\Big) \subset B(x_0, \varepsilon) \qquad (5.6)$$

olduğunu ispatlayalım. $x \in B(x_0, \varepsilon)$ olsun. Yani,

$$D(x_0, x) \leq \varepsilon.$$

Kabul edelim ki $D\Big(g(x), x_0\Big)$ olsun. $(D3)$ ten

$$f\Big(D(g(x), x_0)\Big) \leq f\Big(D(g(x), g(x_0)) + D(g(x_0), x_0)\Big) + \alpha$$

elde ederiz. (F_1), (iii) ve (iv) kullanarak

$$\begin{aligned} f\Big(D(g(x), x_0)\Big) &\leq f\Big(kD(x, x_0) + D(g(x_0), x_0)\Big) + \alpha \\ &\leq f\Big(k\varepsilon + D(g(x_0), x_0)\Big) + \alpha \\ &\leq f(\varepsilon) \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. (F_1) den $D(g(x), x_0) \leq \varepsilon$ dur ve $g(x) \in B(x_0, \varepsilon)$ sonucunu verir. Böylece, (5.6) ifadesini ispatladık. Ayrıca, $g : B(x_0, \varepsilon) \longrightarrow B(x_0, \varepsilon)$ dönüşümü iyi tanımlıdır ve Banach büzülme şartını sağlar. Diğer yandan, Önerme $2.4.4$ den (4.2) kabul edildiğinden $B(x_0, \varepsilon)$ nin $\mathcal{F}$-kapalı olduğu bilinmektedir. Böylece, (i) den $\mathcal{F}$-tamdır. Sonuç olarak, aranan ifade Teorem $2.5.1$ den elde edilir. ■

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, Brain Fisher'in sabit nokta teoremlerinin $\mathcal{F}$-metrik uzaylar için karşılığı verilmiş ve bazı orijinal sabit nokta sonuçlarına ulaşılmıştır.

Önerme 3.0.1. [14] (X, D) bir metrik uzay ve K, $L \colon X \longrightarrow X$ bir dönüşüm olsun. K nın değişmeli bir L dönüşümü var ise K sabit bir noktaya sahiptir.
(Yani, $L(K(x)) = K(L(x)), x \in X$)

Not 3.0.2. Önerme 3.0.1 de Jungck'ın klasik metrik uzaylardaki değişmeli dönüşüm kavramını verdik. Aşağıda vermiş olduğumuz tanımın ispatında bu kavramdan yararlanarak $\mathcal{F}$-metrik uzaylarda değişmeli dönüşüm kavramını uyguladık.

3.1. Fisher Sabit Nokta Teoremlerinin $\mathcal{F}$-Metrik Versiyonları

Teorem 3.1.1. (X, D) bir tam $\mathcal{F}$-metrik uzay ve $K, L, M, N : X \longrightarrow X$ self-dönüşümler ve K ile L, N ile M de aralarında değişmeli bir dönüşüm olsun. Her x, $y \in X$ için $0 \leq \lambda < 1$ öyleki

$$D(Kx, Ny) \leq \lambda D(Lx, My). \qquad (3.1)$$

Eğer, her $x \in X$ için L ve M sürekli ise $Kx \in M(X)$ ve $Nx \in L(X)$ dir. Böylece K, L, N ve M bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Keyfi bir $x_0 \in X$ alalım. Böylece, $Kx_0 \in M(X)$ öyle ki $x_1 \in X$ için
$Mx_1 = Kx_0$, $Nx_1 \in L(X)$ öyle ki $x_2 \in X$ için $Lx_2 = Nx_1$ dir.
Bu işlemi genellersek, $x_{2k+1} \in X$ için $Mx_{2k+1} = Kx_{2k}$ ve $x_{2k+2} \in X$ için
$Lx_{2k+2} = Nx_{2k+1}$. $(k = 0, 1, 2, ...)$
$k \geq 0$ için

$$y_{2k} = Mx_{2k+1} = Kx_{2k}$$

$$y_{2k+1} = Lx_{2k+2} = Nx_{2k+1}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım. Şimdi, $\{y_n\}$ nin bir $\mathcal{F}$-Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $(f, \alpha) \in \mathcal{F} \times [0, +\infty)$ alınmasıyla $(D3)$ sağlanır. $\varepsilon > 0$ bir sabit olsun. (F_2) den $\delta > 0$ var öyle ki

$$0 < t < \delta \Rightarrow f(t) < f(\varepsilon) - \alpha. \qquad (3.2)$$

(3.1) den

$$\begin{aligned} D(y_{2k}, y_{2k+1}) = D(Kx_{2k}, Nx_{2k+1}) &\leq \lambda D(Lx_{2k}, Mx_{2k+1}) \\ &= \lambda D(y_{2k-1}, y_{2k}) \\ &\leq \lambda^2 D(y_{2k-1}, y_{2k-2}). \end{aligned}$$

Bu işlemi n kere tekrarlarsak

$$\begin{aligned} D(y_{2k}, y_{2k+1}) &\leq \lambda D(y_{2k-1}, y_{2k}) \\ &\leq \lambda^2 D(y_{2k-2}, y_{2k-1}) \\ ... &\leq \lambda^n D(y_0, y_1) \end{aligned}$$

yani

$$\sum_{i=n}^{m-1} D(y_i, y_{i+1}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(y_0, y_1), \quad m > n$$

elde ederiz. Böylece

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(y_0, y_1) = 0.$$

$N \in \mathbb{N}$ var öyle ki

$$0 < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(y_0, y_1) < \delta, \quad n \geq N.$$

Dolayısıyla (3.2) ve (F_1) den

$$f\Big(\sum_{i=n}^{m-1} D(y_i, y_{i+1})\Big) \leq f\Big(\frac{\lambda^n}{1-\lambda} D(y_0, y_1)\Big) < f(\varepsilon) - \alpha. \quad m > n > N. \tag{3.3}$$

$(D3)$ ve (3.3) ü kulllanarak

$$D(y_n, y_m) > 0, \ (m > n > N) \Rightarrow f\Big(D(y_n, y_m)\Big) \leq f\Big(\sum_{i=n}^{m-1} D(y_i, y_{i+1})\Big) + \alpha < f(\varepsilon)$$

sonucunu elde ederiz, yani (F_1) den

$$D(y_n, y_m) < \varepsilon, \quad m > n \geq N.$$

Böylece, $\{y_n\}$ bir $\mathcal{F}$-Cauchy dizisidir. Hipotezden (X, D) nin $\mathcal{F}$-tam olması ve $u \in X$ alınmasıyla

$$\lim_{k\to+\infty} Kx_{2k} = \lim_{k\to+\infty} Mx_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} Nx_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} Lx_{2k+2} = u.$$

L sürekli, K ve L değişmeli olduğundan

$$Lu = L(\lim_{k\to+\infty} Kx_{2k}) = \lim_{k\to+\infty} LKx_{2k} = \lim_{k\to+\infty} KLx_{2k} = K \lim_{k\to+\infty} Lx_{2k} = Ku$$

ve M sürekli, N ve M değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} Mu = M(\lim_{k\to+\infty} Nx_{2k+1}) &= \lim_{k\to+\infty} MNx_{2k+1} \\ &= \lim_{k\to+\infty} NMx_{2k+1} \\ &= N(\lim_{k\to+\infty} Mx_{2k+1}) \\ &= Nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(Ku, Nu) &\leq \lambda D(Lu, Mu) \\ &\leq \lambda D(Ku, Nu) \\ &\Rightarrow Ku = Nu. \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Bulduğumuz ifadeleri (3.1) de yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} D(KLx_{2k}, Nx_{2k+1}) &\leq \lambda D(L^2x_{2k}, Mx_{2k+1}) \\ &\Rightarrow D(Lu, u) \leq \lambda D(Lu, u) \\ &\Rightarrow Lu = u \\ &\Rightarrow Ku = Lu = Nu = Mu = u \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz ki bu da bize K, L, M ve N dönüşümlerinin bir ortak sabit noktaya sahip olduğunu gösterir. Şimdi, ortak sabit noktanın tekliğini gösterelim. v, K, L, M ve N nin başka bir ortak sabit noktası olsun yani $u \neq v$. Yani $Ku = Lu = Mu = Nu = u$ ve $Kv = Lv = Mv = Nv = v$. O zaman $D(u, v) > 0$ dır. (3.1) den

$$\begin{aligned} D(u, v) &= D(Ku, Nv) \\ &\leq \lambda D(Lu, Mv) \\ &= \lambda D(u, v) \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz ki bu bir çelişkidir ve K, L, M ve N dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. ■

Sonuç 3.1.2. Teorem 3.1.1, [8] in ana teoreminin bir $\mathcal{F}$-metrik versiyonudur. Ayrıca, [7] nin ana sonucunun bir genelleştirilmesidir.

Sonuç 3.1.3. Ana sonucumuz, [18] deki Teorem 4 ün bir genellemesidir ve dikkat edilmelidir ki (3.1) den K süreklidir. Ayrıca, [18] deki Teorem 4 ü elde etmek için Teorem 3.1.1 den $K = N$ ve $L = M = I$ (I birim dönüşüm) almak yeterlidir.

Teorem 3.1.4. (X, D) bir $\mathcal{F}$-metrik uzay olsun ve $K : X \longrightarrow X$ dönüşümünün aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

(i) (X, D) bir tam $\mathcal{F}$-metrik uzay.

(ii) $a \leq b, c$, $b + c < 1$ var öyle ki her $x, y \in X$ için

$$D(Kx, Ky) \leq bD(x, y) + c \max\{D(x, Kx), D(y, Ky)\}. \qquad (3.4)$$

Böylece, K nın bir tek sabit noktası vardır.

İspat: $(f, \alpha) \in F \times [0, +\infty)$ alınmasıyla $(D3)$ sağlanır. $\varepsilon > 0$ bir sabit olsun. (F_2) den $\delta > 0$ var öyle ki

$$0 < t < \delta \Rightarrow f(t) < f(\varepsilon) - \alpha. \qquad (3.5)$$

(3.4) ten

$$D(K^n x, K^{n+1} x) \leq bD(K^{n-1} x, K^n x) + c \max\{D(K^{n-1} x, K^n x), D(K^n x, K^{n+1} x)\}.$$

Böylece

$$D(K^n x, K^{n+1} x) \leq (b + c) D(K^{n-1} x, K^n x)$$

veya

$$D(K^n x, K^{n+1} x) \leq \frac{b}{1 - c} D(K^{n-1} x, K^n x)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$\lambda = \max\{(b + c), \frac{b}{1 - c}\} < 1$$

olsun. Bu işlemi n kez tekrarlarsak

$$D(K^n x, K^{n+1} x) \leq \lambda D(K^{n-1} x, K^n x) + \lambda^2 D(K^{n-2} x, K^{n-1} x) + ... + \lambda^n D(x, Kx)$$

yani

$$\sum_{i=n}^{m-1} D(K^i x, K^{i+1} x) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} D(x, Kx), \quad m > n$$

elde ederiz. Böylece

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} D(x, Kx) = 0.$$

$N \in \mathbb{N}$ var öyle ki

$$0 < \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} D(x, Kx) < \delta, \ n \geq N. \qquad (3.6)$$

(3.5) ve (F_1) den

$$f\Big(\sum_{i=n}^{m-1} D(K^i x, K^{i+1} x)\Big) \leq f\Big(\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} D(x, Kx)\Big) < f(\varepsilon) - \alpha, \quad m > n \geq N. \qquad (3.7)$$

$(D3)$ ve (3.7) den

$$D(K^n x, K^m x) < \varepsilon, \quad m > n \geq N$$

sonucunu elde ederiz. Böylece $\{K^n x\}$ bir $\mathcal{F}$-Cauchy dizisidir. (X, D), $\mathcal{F}$-tam olması ve $z \in X$ alınmasıyla $\{K^n x\}$, z noktasına $\mathcal{F}$-yakınsaktır, yani

$$\lim_{n\to+\infty} D(K^n x, z) = 0. \qquad (3.8)$$

Kabul edelim ki z, K nın sabit bir noktası ve $D(Kz, z) > 0$ olsun. $(D3)$ ten

$$f\Big(D(Kz, z)\Big) \leq f\Big(D(Kz, K^n x) + D(K^n x, z)\Big) + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) ve (F_1) den

$$f\Big(D(Kz, z)\Big) \leq f\Big(\lambda D(z, K^n x) + D(K^{n+1} x, z)\Big) + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diğer yandan, (F_2) ve (3.8) den

$$\lim_{n\to+\infty} f\Big(\lambda D(z, K^n x) + D(K^{n+1} x, z)\Big) + \alpha = -\infty$$

elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle,

$$D(Kz, z) = 0$$

yani

$$Kz = z.$$

Sonuç olarak $z \in X$ in sabit noktası z dir. Şimdi sabit noktanın tekliğini gösterelim. $(u, v) \in X \times X$ için

$$D(u, v) > 0, \quad Ku = u, \quad Tv = v$$

olsun. (ii) den

$$\begin{aligned} D(u, v) = D(Ku, Kv) &\leq bD(u, v) + c\max\{D(u, Ku), D(v, Tv)\} \\ &\leq (b + c)D(u, v) \\ &< D(u, v) \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Böylece K dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. ■

Sonuç 3.1.5. Yukarıda vermiş olduğumuz Teorem 3.1.4, kaynaklar kısmındaki [7] nin ana teoreminin $\mathcal{F}$-metrik versiyonudur ve aynı zamanda [7] nin ana sonucunun bir genellemesidir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının ilk kısmında metrik uzaylar hakkında bilgi verilmiş ve daha sonra Banach sabit nokta teoreminin son yıllarda farklı uzaylarda karşılığı olarak önemli genelleştirmelere yer verilmiştir. İkinci kısımda ise tezin konusunu oluşturan Jleli ve Samet [13] tarafından verilen $\mathcal{F}$-metrik uzay kavramının temel tanım ve teoremlerinden bahsedilmiştir.

Tez çalışmasının orijinal sonuçlarının yer aldığı üçüncü kısımda ise $\mathcal{F}$-metrik uzay kavramı kullanılarak [7] ve [8] makalelerinde B. Fisher tarafından verilen teoremlerin $\mathcal{F}$-metrik versiyonu verilerek bu yeni tip uzaylarda ispatlanmıştır. Ayrıca, Microvic vd. [18] makalesinde verilen Teorem 4 ün $\mathcal{F}$-metrik uzaylarda bir genelleştirilmesi verilmiştir.

Bu tez çalışmasında sabit nokta teorisi üzerine verilen yöntem ve teknikler kullanılarak literatürde hali hazırda bulunan klasik tüm sabit nokta teoremlerinin karşılığı olup olmadığı $\mathcal{F}$-metrik uzaylarda araştırılabilir. Ayrıca, klasik metrik uzaylarda verilen tanımlar ve dönüşüm tiplerinden faydalanarak bunların $\mathcal{F}$-metrik uzaylarda karşılıkları verilip bu uzaylar için yeni sabit nokta teoremleri ispatlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Banach, S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales. Fundamenta Mathematicae 1922, 3, 133-4181.

[2] Branciari, A. A Fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric space. Publ. Math. Debrecen. 2000, 57, 31-37.

[3] Chatterjea, S.K. Fixed point theorems. Comptes rendus de I'Academie Bulgare des Sciences. 1972, 25, 727-730.

[4] Ciric, W., Shahzad, N.: Fixed Point Theory in Distance Spaces. Springer, Cham 2014.

[5] Czerwik S.: Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Math. Univ. Ostrav. 1993, 1, 5-11.

[6] Edelstein, M. Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces. Proceeding of the American Mathematical Society. 1947, 44, 369-374.

[7] Fisher B., Fixed point mappings on metric spaces, Societatea de Stiinte Matematice din Romania, 1976, 3(4), 255-259.

[8] Fisher B., Four mappings with a common fixed point (Arabic summary), J. Univ. Kuwait, 1981; 8 : 131-139.

[9] Fagin, R., Kumar, R., Sivakumar, D.: Comparing top k lists. SIAM J. Discret. Math. 2003, 17(1), 134-160.

[10] Gähler, S. $2-$metrische Raume und ihre topologische struktur. Mathematische Nachrichten. 1963, 26, 115-148.

[11] Ha, K.S., Cho, Y.J., White, A.: Strictly convex and 2-convex 2-normed spaces. Math. Jpn. 1988, 33, 375-384.

[12] Hardy, G.E., Rogers, T.D. A generalization of a fixed point theorem of Reich. Canadian Mathematical Bulletin. 1973, 16, 201-206.

[13] Jleli, M., Samet, B. : On a new generalization of metric spaces. J. Fixed Point Theory Appl. 2018, 20 : 128.

[14] Jungck, G. Commuting mappings and fixed points. Amer. Math. Monthly. 1976, 83, 261-263.

[15] Kannan, R. Some results on fixed points. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. 1968, 10, 71-76.

[16] Khamsi, M.A., Hussain, N.: KKM mappings in metric type spaces. Nonlinear Anal. 2010, 7(9), 3123-3129.

[17] Matthews, S.G.: Partial metric topology. In: Proceedings of the 8th Summer Conference on General Topology and Applications. Annals of the New York Academy of Sciences, vol. 1994, 728, 183-197.

[18] Mitrovic, Z.D.; Aydi, H.; Hussain, N.; Mukheimer, A. Reich, Jungck, and Berinde common fixed point results on F-metric spaces and an application. Mathematics 2019 ; $7:387$, $doi:10.3390/math7050387$.

[19] Mustafa, Z., Sims, B. A new approach to generalized metric spaces, Journal Nonlinear and Convex Anal. 2006, $7(2)$, 289-297.

[20] Reich, S. Fixed points of contractive functions. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 1972, 5, 26-42.

[21] Suzuki, T. A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness. Proceedings of the American Mathematical Society. 2008, 136, 1861-1869.