

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SÜREKLİ DİZGELERDE
PARAMETRE KESTİRİMİ

Elektronik Yük. Müh. Ayten ATASOY

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde

“Doktor ”

Ünvanı Verilmesi için Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13.06.1997

Tezin Savunma Tarihi : 22.09.1997

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Temel KAYIKÇIOĞLU

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mahmut ÜN

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Ali GANGAL

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Fazlı ARSLAN

HAZİRAN 1997

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, doğrusal, zamanla değişmeyen, çok girişli-çok çıkışlı, sabit katsayılı dizgelerin, durum modeli parametrelerinin kestirimi konusunda yeni bir model oluşturulmuştur. Bu modele ait parametreler, yinelemeli Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmaları kullanılarak kestirildi. Geliştirilen modelin, bütün algoritmalarla doğruluğu kanıtlandı ve algoritmaların karşılaştırmalı olarak performans analizleri yapıldı. Bu çalışma; denetleyiciler ve gözlemleyicilerin, elektronik ve mekanik dizgelerin tasarımlarının yapılması konularında kullanılabilir. Yapılan bu çalışmanın, parametre kestirimi konusu ile ilgilenen meslektaşlarıma yararlı olmasını dilerim.

Doktora tezi danışmanlığımı üstlenerek, ilgi duyduğum bir konu üzerinde çalışmamı sağlayan, çalışmalarım süresince, bilgisini, tecrübesini ve ilgisini esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Temel KAYIKÇIOĞLU'na teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Ayrıca doktora çalışmam sırasında maddi ve manevi konularda destek olan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli dostlarım, bilgisayar laboratuvarı sorumluları Sevim KÜÇÜK ve Ferda TÜRKMEN'e, Arş. Gör. İlhan ÖZKAN'a, Arş. Gör. Selda KAZANICI'ya, eşime ve ismini yazamadığım bütün arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Trabzon, Haziran 1997

Ayten ATASOY

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	VI
SUMMARY.....	VII
ŞEKİL LİSTESİ.....	VIII
TABLO LİSTESİ.....	XI
SEMBOL LİSTESİ.....	XII
KISALTMA LİSTESİ.....	XIV
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. GİRİŞ.....	1
1.2. DİZGE TANISI VE PARAMETRE KESTİRİMİ KONUSUNDA YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	3
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE GELİŞTİRİLEN YÖNTEM	8
2.1. DİZGE MODELİ	8
2.2. PARAMETRE KESTİRİMİ İÇİN OLUŞTURULAN MODEL.....	8
2.3. AMAÇ FONKSİYONUNUN TANISI.....	12
2.4. GELİŞTİRİLEN DOĞRUSAL OLMAYAN PARAMETRE KESTİRİM YÖNTEMLERİ	13
2.4.1. Marquard-Levenberg Algoritmasıyla Parametre Kestirimi.....	13
2.4.2. Gradient Algoritması ile Parametre Kestirimi.....	15
2.4.3. Hessian-Gradient Algoritması ile Parametre Kestirimi.....	16
2.4.4. Partan Algoritması ile Parametre Kestirimi	17
2.5. AMAÇ FONKSİYONUNUN PARAMETRELERE GÖRE BİRİNCİ TÜREVLERİ.....	19
2.6. AMAÇ FONKSİYONUNUN PARAMETRELERE GÖRE İKİNCİ TÜREVLERİ.....	27
2.6.1. Amaç Fonksiyonunun c_{11} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	27

2.6.2. Amaç Fonksiyonunun c_{12} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	33
2.6.3. Amaç Fonksiyonunun c_{13} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	37
2.6.4. Amaç Fonksiyonunun c_{1n} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	38
2.6.5. Amaç Fonksiyonunun c_{21} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	41
2.6.6. Amaç Fonksiyonunun c_{mn} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	43
2.6.7. Amaç Fonksiyonunun k_{11} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	47
2.6.8. Amaç Fonksiyonunun k_{12} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	53
2.6.9. Amaç Fonksiyonunun k_{nm} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	58
2.6.10. Amaç Fonksiyonunun b_{11} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	61
2.6.11. Amaç Fonksiyonunun $b_{11} \dots b_{nr}$ 'e Göre Birinci Türevlerinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	61
2.6.12. Amaç Fonksiyonunun $d_{11} \dots d_{nr}$ 'e Göre Birinci Türevlerinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri.....	62
2.6.13. Hessian Matrisinin Oluşturulması.....	66
2.7. NOKTASAL DATA LARA GÖRE İNTEGRAL HESABI.....	67
2.8. ÇIKIŞLARDA OLUŞAN YANILGININ LEGENDRE FOKSİYONU İLE AZALTILMASI.....	68
2.9. FARKLI EŞDEĞER MODELLERİN BULUNMASI.....	76
3. BULGULAR.....	78
3.1. GELİŞTİRİLEN YÖNTEMİN PERFORMANS ANALİZLERİ.....	78
3.2. C MATRİSİNİN KARE OLDUĞU DURUMDAKİ SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI.....	78
3.2.1. Data Sayısına Göre Perfonmans Analizi.....	78

3.2.2. Gürültülü Durumda Performans Analizi.....	82
3.2.3. Algoritmaların Başlangıç Değerlerine Duyarlılığı	89
3.2.4. Algoritmaların Yakınsama Hızları.....	96
3.2.5. Algoritmaların Farklı Giriş İşaretlerine Karşı Duyarlılığı.....	99
3.2.5.1. Algoritmaların Birim Vuruş Giriş İşaretine Karşı Duyarlılığı	99
3.2.5.2. Algoritmaların Birim Basamak Giriş İşaretine Karşı Duyarlılığı.....	100
3.2.5.3. Algoritmaların $\cos(10t^2)$ Giriş İşaretine Karşı Duyarlılığı.....	102
3.3. C MATRİSİNİN DİKDÖRTGEN OLMASI DURUMUNDAKİ SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI.....	109
3.4. LEGENDRE FONKSİYONU KULLANILARAK YANILGININ AZALTILMASI	111
3.5. LEGENDRE FONKSİYONLARININ FARKLI ÖRNEKLERE UYGULANMASI.....	116
3.6. DEĞİŞİK BOYUTLU UYGULAMALAR.....	123
4. İRDELEME VE TARTIŞMA.....	133
5. SONUÇLAR	137
6. ÖNERİLER.....	139
7. KAYNAKLAR.....	140
8. ÖZGEÇMİŞ.....	142

ÖZET

Doğrusal, zamanla değişmeyen, sürekli dizgelerde parametre kestirimi; ekonomi, elektrik, robotik ve kimya gibi birçok farklı dallarda uygulama alanı bulmaktadır. Bu uygulamalarda kestirimin performansı; dizge tanısı, denetimi ve kontrolü için çok önemli olmaktadır.

Bu tezde; doğrusal, zamanla değişmeyen, sürekli dizgelerde parametre kestirimi konusu incelendi. Bilinen giriş değerleri ve ölçülen gürültülü çıkış değerlerinden yararlanarak dizgelerin durum uzayı parametrelerinin kestirimi için yeni bir yöntem incelendi. Kestirim için kurulan model, ölçülen giriş-çıkış verileri ve doğrusal olmayan parametrelere bağlı bir çıkış vektörü ile tanımlandı. Kestirilen model verileri ile ölçülen veriler arasındaki yanılğı olarak tanımlanan amaç fonksiyonu, En Küçük Kareler yöntemi ile ifade edildi ve Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmaları ile minimum yapıldı.

Önerilen yöntemin performansı, farklı gürültü düzeyleri, farklı sayıda örnek değerleri, farklı giriş işaretleri ve farklı başlangıç değerleri için incelendi. Elde edilen sonuçlar, önerilen yöntemin doğruluğunu ve geçerliliğini açıkça göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal zamanla değişmeyen dizge, Durum modeli, Parametre kestirimi, En Küçük Kareler yöntemi, Marquardt-Levenberg algoritması, Gradient algoritması, Hessian-Gradient algoritması, PARTAN algoritması.

SUMMARY

PARAMETER ESTIMATION IN LINEAR TIME-INVARIANT CONTINUOUS SYSTEMS

Estimation of parameters in linear time-invariant continuous systems arising in different areas such as economic, electric, robotic and chemical applications. In these applications, estimation performance is very important for the systems to be controllable, observable and identifiable.

In this dissertation, parameter estimation problem in linear time-invariant, continuous system is considered. A new method is introduced for estimating of parameters of state-space models of such systems from known input and noisy output data. The output of the system is expressed as a function of the input, the integral of the output, and the parameters. An objective function, defined as the error between model-predicted data and measurement data, is minimized by nonlinear least-squares methods, namely Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient and PARTAN algorithms.

The performance of the proposed method was tested on various systems for different noise levels, different number of measurements, different input signals and different initial values. Results illustrates the accuracy and the validity of the proposed method.

Key words: Linear time-invariant system, State model, Parameter estimation, Least-Squares method, Marquardt-Levenberg algorithm, Gradient algorithm, Hessian-Gradient algorithm, PARTAN algorithm.

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1. Dizgenin blok gösterimi.....	8
Şekil 2. Noktasal datalara göre integral hesabı.....	67
Şekil 3. Gürültüsüz durumda (a) Özgün dizge; $N=100$, $N=70$, $N=50$ ve $N=20$ için $y_1(t)$ çıkış tepkeleri (b) Özgün dizge; $N=100$, $N=70$, $N=50$ ve $N=20$ için $y_2(t)$ çıkış tepkeleri.....	80
Şekil 4. $\tau=0.05$ olan Toplamsal Beyaz Gauss gürültüsü için (a) Özgün dizge; $N=80$, ve $N=40$ için $y_1(t)$ çıkış tepkeleri (b) Özgün dizge; $N=80$, ve $N=40$ için $y_2(t)$ çıkış tepkeleri.....	81
Şekil 5. (a) İşaret/gürültü oranı 40 için özgün dizgenin $y_1(t)$ çıkış tepkeleri (b) İşaret/gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 iken Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen ve özgün dizgenin gürültüsüz durumdaki $y_1(t)$ çıkış eğrileri	85
Şekil 6. (a) İşaret/gürültü oranı 40 için özgün dizgenin $y_2(t)$ çıkışı (b) İşaret / gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 iken Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen ve özgün dizgenin gürültüsüz durumdaki $y_2(t)$ çıkış eğrileri	86
Şekil 7. (a) İşaret/gürültü oranı 40 için özgün dizgenin $y_3(t)$ çıkışı (b) İşaret/ gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 iken Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen ve özgün dizgenin gürültüsüz durumdaki $y_3(t)$ çıkış eğrileri	87
Şekil 8. İşaret/gürültü oranı 70 olduğu durumda özgün dizgenin ve herbir algoritma ile kestirilen $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çıkış eğrileri	90
Şekil 9. İşaret/gürültü oranı 40 olduğunda özgün dizgenin ve herbir algoritma ile kestirilen $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çıkış eğrileri	91
Şekil 10. θ_1 başlangıç değerleri için herbir algoritma ile kestirilen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ ve orjinal çıkış eğrileri.....	93
Şekil 11. θ_2 başlangıç değerleri için herbir algoritma ile kestirilen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ ve orjinal çıkış eğrileri.....	95

Şekil 12. θ_1 başlangıç değerlerine göre, amaç fonksiyonlarının iterasyon sayısına bağlı olarak değişimi	97
Şekil 13. θ_2 başlangıç değerlerine göre, amaç fonksiyonlarının iterasyon sayısına bağlı olarak değişimi	98
Şekil 14. Giriş işareti birim vuruş olduğu durumda elde edilen çıkış tepkeleri.....	101
Şekil 15. Giriş işareti birim basamak olduğu durumda elde edilen çıkış tepkeleri ..	102
Şekil 16. Giriş $\cos(10t^2)$ işareti olduğu ve 100 data kullanıldığı durumda elde edilen çıkış tepkeleri.....	104
Şekil 17. Giriş $\cos(10t^2)$ işareti olduğu ve 300 data kullanıldığı durumda elde edilen çıkış tepkeleri.....	106
Şekil 18. $\cos(10t^2)$ giriş işareti için 3-4 sn aralığındaki $y_2(t)$ çıkış tepkesi	107
Şekil 19. Giriş işareti $\cos(10t^2)$ olduğunda 3-3.5 sn aralığındaki $y_2(t)$ çıkış tepkesi	107
Şekil 20. $\cos(10t^2)$, birim vuruş ve birim basamak girişlerine ait amaç fonksiyonlarının iterasyona göre değişimi.....	108
Şekil 21. Gürültüsüz durumda kestirilen $y(t)$ çıkışları	110
Şekil 22. İşaret/gürültü oranı 70 iken elde edilen $y(t)$ çıkışları	112
Şekil 23. İşaret/gürültü oranı 40 iken elde edilen $y(t)$ çıkışları	112
Şekil 24. Legendre fonksiyonları ile gürültüsüz durumda kestirilen $y(t)$ çıkışları..	113
Şekil 25. Marquardt-Levenberg algoritması için; gürültüsüz, Legendreli ve Legendresiz durumda kestirilen $y(t)$ çıkışları.....	114
Şekil 26. İşaret/gürültü oranının 40 olduğu ve Legendre fonksiyonları kullanıldığı durumda, her bir algoritma ile kestirilen parametrelere göre $y(t)$ çıkışları	115
Şekil 27. Gürültüsüz durumda kestirilen $y_1(t)$ çıkış eğrileri (a) Legendre fonksiyonu kullanılmadan kestirilen parametrelere göre (b) Legendre fonksiyonu kullanılarak kestirilen parametrelere göre	119
Şekil 28. Gürültüsüz durumda kestirilen $y_2(t)$ çıkış eğrileri (a) Legendre fonksiyonu kullanılmadan kestirilen parametrelere göre (b) Legendre fonksiyonu kullanılarak kestirilen parametrelere göre.....	120
Şekil 29. İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen $y_1(t)$ çıkış eğrileri (a) Legendre fonksiyonu kullanılmadan kestirilen parametrelere göre (b) Legendre fonksiyonu kullanılarak kestirilen parametrelere göre	121

Şekil 30. İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen $y_2(t)$ çıkış eğrileri (a) Legendre fonksiyonu kullanılmadan kestirilen parametrelere göre (b) Legendre fonksiyonu kullanılarak kestirilen parametrelere göre.....	122
Şekil 31. İşaret/gürültü oranı 70 iken kestirilen ve orjinal $y(t)$ çıkışları.....	125
Şekil 32. İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen ve orjinal $y(t)$ çıkışları	125
Şekil 33. İşaret/gürültü oranı 70 iken kestirilen dizgelerin ve orjinal dizgenin $y(t)$ çıkışları.....	128
Şekil 34. İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen dizgelerin ve orjinal dizgenin $y(t)$ çıkışları	128
Şekil 35. Gürültüsüz durumda kestirilen ve orjinal $y(t)$ çıkışı	129
Şekil 36. (a) Gürültüsüz durumda kestirilen parametreler için $y(t)$ çıkışı (b) İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen parametreler için $y(t)$ çıkışı.....	132

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 1. Farklı ölçüm değerlerine göre parametre kestirim sonuçları.....	79
Tablo 2. Standart sapması $\sigma=0.005$ olan Toplumsal Beyaz Gauss gürültüsü altında parametre kestirim sonuçları.....	81
Tablo 3. Gürültü seviyesi 70 iken kestirilen parametreler ve standart sapmaları.....	88
Tablo 4. Gürültü seviyesi 40 iken kestirilen parametreler ve standart sapmaları.....	89



SEMBOL LİSTESİ

t	: Zaman
t_0	: Başlangıç zamanı
T	: Zamanın anlık değeri
N	: Alınan örnek sayısı
μ	: 1, 2, 3,...,N örnek numarası
n	: Ele alınan dizgenin boyutu
r	: Girişlerin sayısı
m	: Çıkışların sayısı
$\underline{x}(t)$	: Durum vektörü
$\underline{u}(t)$	: Giriş vektörü
$\underline{y}(t)$	: Çıkış vektörü
$\underline{w}(t)$	: Toplamsal Beyaz Gauss gürültüsü vektörü
A	: $n \times n$ boyutlu durum matrisi
B	: $n \times r$ boyutlu denetim matrisi
C	: $m \times n$ boyutlu çıkış matrisi
D	: $m \times r$ boyutlu geçiş matrisi
K	: $A C^{-1}$ matrisi
C^{-1}	: C matrisinin sağ-yalancı tersi
$\underline{\theta}$	: Parametre vektörü
$\phi(\underline{\theta})$	: Amaç fonksiyonu
$y_{id}(\mu\tau)$	: y_i çıkışının $\mu\tau$ anında ölçülen çıkış değeri
$y_{id}(\mu\tau, \underline{\theta})$	: y_i çıkışının $\mu\tau$ anında $\underline{\theta}$ bilinmeyenlerine bağlı çıkış değeri
$e_{id}(\mu\tau, \underline{\theta})$	: y_i çıkışının $\mu\tau$ anındaki $y_{id}(\mu\tau) - y_{id}(\mu\tau, \underline{\theta})$ farkı
$\underline{g}$	: Gradient vektörü
H	: Hessian matrisi
λ	: Pozitif ve küçük değerli bir sayı ($\lambda=0,001$)
ϵ	: Küçük değerli pozitif sayı ($\epsilon=0,0000001$)
q_∞	: ∞ parametresine göre birinci kısmi türev

$h_{\alpha\beta}$: α ve β parametrelerine göre ikinci kısmi türev

k : Pozitif değerli bir sayı

Δ : Artım

∇ : Gradient operatörü

I_i : i. Parçanın alanı

I : Toplam alan

$\underline{Z}(t)$: Yanılgı vektörü

$P_i(t)$: i. Legendre polinomu

$A_{i0}, A_{i1}, \dots, A_{i7}$: i. polinomun katsayıları

$P_{i0}(t), P_{i1}(t), \dots, P_{i7}(t)$: i. polinomun fonksiyonları

P : $n \times n$ boyutlu dönüşüm matrisi

$\hat{x}(t)$: Eşdeğer modelin durum vektörü

$\bar{A}$: Eşdeğer modelin $n \times n$ boyutlu durum matrisi

$\bar{B}$: Eşdeğer modelin $n \times n$ boyutlu denetim matrisi

$\bar{C}$: Eşdeğer modelin $m \times n$ boyutlu çıkış matrisi

$\bar{D}$: Eşdeğer modelin $m \times r$ boyutlu geçiş matrisi

Üst İndisler

T : Matrisin Transpozesi

$\cdot$: Zamana göre türev

Alt İndisler

i, j : 1, 2, 3, ... şeklinde artan değerler olarak kullanılmışlardır.

KISALTMA LİSTESİ

ARMA : Auto Regressive Moving Average

MA : Moving Average

ARX : Auto Regressive with eXternal input

PARTAN : PARralel TANgent



1. GENEL BİLGİLER

1. 1. GİRİŞ

Dizge modelleme ve tanısı konusu; son otuz yıldan beri, çok farklı konularda uygulama alanı bulmuştur. Kimyasal uygulamalar, biyomedikal dizgeler, sosyoekonomik dizgeler, taşımacılık, çevrebilim, elektrik güç devreleri, su bilimi, havacılık ve uzayda yolculuk ilmi gibi çok farklı dallarda uygulamaları yapılmıştır. Bu uygulama alanlarının herbiri için; dizgenin davranışını en iyi biçimde ifade edebilecek bir matematiksel model oluşturulur.

Bu matematiksel modelleme problemi, basit olarak iki farklı grup altında incelenir. Birinci olarak; ölçülebilen girişlerin ve çıkışların belli sayıdaki ölçümleri ile girişler ve çıkışlar arasındaki ilişkiyi verebilecek bir model oluşturulur. Girişler ve çıkışlar arasındaki ilişki genellikle matematiksel denklemler takımı ile (çoğu durumlarda doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ile) ifade edilirler. Bu denklemlerin elde edilmesi, benzer durumlarda modelleme problemi olarak bilinir. Kütle, enerji dengesi ve diğer fiziksel kurallara bağlı olarak yazılan denge denklemleri, dizgeyi modelleyen matematiksel denklemler takımı olacaktır. Uygulamalı mühendislik alanında bu tip modelleme problemleri ile sık sık karşılaşılır. Bazı tipik problemlere örnek olarak; çok makineli elektriksel güç sistemi, eşzamanlı yörüngeli uydu haberleşmeleri, nükleer güç reaktörünün kontrol mekanizması, hareket eden tanklı kimyasal reaktörün modellenmesi verilebilir. Bu örneklerin herbirinde, giriş ve çıkış nicelikleri kolaylıkla belirlenebilir ve onlarla ilişkili bir matematiksel model elde edilir. Ayrıca bu matematiksel modelin bütün parametreleri, bilinen giriş ve çıkışların belirli zaman aralığındaki ölçümlerinden yararlanılarak kestirilebilir.

Diğer modelleme problemi ise; tanımlı ölçülebilen çıkışlara veya sonuçlara sahip, fakat girişler veya nedenler çok doğru olarak tanımlanamaz olan dizgelerin modellenmesi durumunda ortaya çıkar. Bu modelleme problemine örnek olarak; herhangi bir ülkenin yıllık nüfus artışı, belirli bir ülkede yıllık yağmur miktarı, bir nehirde ortalama yıllık akış ve marketlerde belirli bir malzemenin günlük değeri gibi örnekler verilebilir. Bu örneklerin hepsinde; çıkışların değerleri ardışıl olarak bilinmektedir. Bunlar; zamana bağlı olarak dizi halinde belirlenecektir. Fakat girişler veya nedenler sayısızdır ve çoğu kez gözlenemez

olduklarından bütünüyle bilinemezler. Benzer durumlardaki modellemeler stochastic modelleme olarak bilinir.

Belirli zaman aralıklarında ölçülen giriş ve çıkış dizilerinin kullanılması sonucunda; dizge modelinin belirlenmesi dizge tanısı problemi olarak bilinir. Bir dizgenin, varolan bazı bilinenlerden yararlanılarak özgününe en elverişli biçimde ve mümkün olduğu kadar en yanlışsız olarak ifade edilmesi, modelleme olarak tanımlanır. Bir modelin yararlı olması için; anlaşılabilir biçimde karmaşık olmaması, dizge davranışlarının kestirim için uygun olması gerekmektedir.

Dizge modelleme konusu; zaman bölgesinde ve sürekli durumda saf açısal frekans bölgesinde olmak üzere iki gruba ayrılabilir. Zaman bölgesinde dizge tanısı, dizgenin başlangıç çalışmalarını da hesaba katması nedeniyle frekans bölgesinde yapılan çalışmalara göre üstünlük göstermektedir. Frekans bölgesi yaklaşımları dizgenin daha çok sürekli durum çalışmalarını gözönüne alır.

Dizge tanısı ve parametre kestirimi konusunda yapılan inceleme ve araştırmalar sürekli zaman ve ayrık zamanlarda olmak üzere bir başka görüşten iki ayrı biçimde yapılmaktadır.

Dizgenin doğası açısından da dizge tanısı ve parametre kestirimi; zamanla değişmeyen sabit parametrelili doğrusal dizgeler, zamanla-değişen sabit parametrelili doğrusal dizgeler, dağılmış parametrelili doğrusal dizgeler ve doğrusal olmayan dizgeler üzerinde yapılmaktadır.

Ayrıca dizge tanısı ve parametre kestirimi konusunda yapılan inceleme ve araştırmalar dizgelerin giriş ve çıkış uçlarına göre de; bir girişli-bir çıkışlı ve çok girişli-çok çıkışlı dizgeler üzerinde sürdürülmektedir.

Yapılan çalışmaların büyük bir çoğunluğu, dizgelerin doğrusal modellerinin elde edilmesi konusunu ele almıştır. Dizge tanısı; bir dizgenin uygun doğrusal modelinin parametrelerinin yanlışsız olarak elde edilmesi olarak düşünülebilir.

Dizge tanısı konusunda karşılaşılan sorunların bazıları şunlardır:

- a) Doğrusal model için boyutun belirlenmesi
- b) Modelin doğruluğunu belirlemek için uygun kriterin seçimi
- c) Model parametrelerinin belirlenmesi için, mümkün olabildiğince doğruluğu arttıracak giriş işaretini belirlemek.

1. 2. DİZGE TANISI VE PARAMETRE KESTİRİMİ KONUSUNDA YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bütün bu uygulama alanlarında; dizgenin matematiksel olarak en basit biçimde ifade edilmesi ve dizge davranışlarını en iyi biçimde verebilecek model parametrelerinin kestirimi amaçlanmıştır. Yukarıda anlatılan değişik dizge modelleme alanlarında çok sayıda parametre kestirimi çalışmaları yapılmıştır.

Kwan Y. Wong ve Elijah Polak [1], doğrusal zamanla değişmeyen ayrık zamanlı dizgelerin parametrelerinin kestirimi için, yardımcı değişken yönteminin kullanılıp kullanılmayacağını araştırdılar. Bu yöntem için en iyi çözümü veren kestirimlerin var olduğunu kanıtladılar ve ardışıl hesaplama dayalı on-line tanısı yöntemi kullandılar. Yardımcı değişken yönteminin, doğrusal türevsel sistemlerin parametrelerinin kestirimi için de kullanılabileceğini açıkladılar.

Edison Tse ve Howard L. Weinert tarafından [2], çok değişkenli stokastik (tahmini) doğrusal dizgenin boyutunun, dizge matrislerinin ve gürültü değişimlerinin bilinmediği durumunu ele almışlardır. Böyle bir dizgenin çıkış dataları kullanılarak, dizge tanısı için bir model geliştirilmiştir. Uygun parametre kestirimleri elde etmek için; çıkış işleminin yenilikler gösterimi kullanıldı ve bu dizge matrisleri kesin kanonik biçimde seçildi. Yenilikler gösteriminin parametreleri ve dizge yapısının kestirimi için bir sistematik yöntem tanımlandı.

Robert S. Roth [3]; gürültüsüz gözlemlere dayalı kısmi türevsel denklemler tanımlanan bir dizgede; sabitlerin tanısı problemini ele almıştır. Bu çalışmada kullanılan teknikler, R. Bellman'ın fikirlerinden çıkarıldı ve quasi-lineerleştirme, türevsel yaklaşımlar, dinamik programlama uygulamaları incelendi. Mevcut giriş-çıkış datasının bilindiği düşüncesinden; en elverişli çıkış datası için başlangıç koşulları ve dizge parametrelerinin her ikisini elde etmek için nümerik bir yöntem oluşturuldu. Burada (segmental) parçalı türevsel yaklaşım kullanıldı. R. Bellman'ın deterministik dizgelerin tanısı alanında yapmış olduğu katkının küçük bir kısmı uygulandı.

Gerard Alengrin ve Josiane Zerubia [4], ARMA model için, yeni bir parametre kestirimi yöntemi geliştirdiler. Bu çalışmalarında, bir dizgenin geçici durumda iken; Li ve Dickinson [5], tarafından belirlenen formüllerinin, bir adımlı kestirimci bağıntıları ile de kolaylıkla elde edilebileceğini gösterdiler. Dizgenin sürekli durumu için; dizgenin AR parametrelerini ve MA parametrelerini ayrı ayrı hesapladılar.

Hung-Yuon Chung ve York-Yih Sun [6], yapmış oldukları çalışmada doğrusal olmayan dizgelerin bilinmeyen parametrelerinin kestirimi ve analizi konusunu, Taylor serileri yaklaşımı kullanarak ele aldılar. Sayısal programlamaya uygun algoritmalar geliştirdiler. Bu yaklaşımın ana avantajı, tümlev için kullanılan matrisin yapısının oldukça basit olmasıdır. Nümerik örneklerle bu yaklaşımın doğruluğu gösterilmiştir.

A. M. Elramsis, M. A. Zohdy ve N. K. Loh [7], doğrusal olmayan, ayrık zamanlı dizge parametrelerinin kestirimi için yeni bir yöntem geliştirmişlerdir. Model yapısı; Gabor temel fonksiyonlarının frekans-yerleşim domeninde gösterildi. Gabor temel fonksiyonları için bir basitleştirme yapıldı ve bu fonksiyonların uzaysal Gaussian eğrileri bir üçgenle birlikte yerleştirildi. Gabor temel fonksiyonları için yapılan değişimler; gürültü etkilerini önlemek için de incelendi. Bu algoritma üç katlı neural network devrelerinde dizge tanısı problemini çözmek için (düzenli olmayan bir örnekleme aralığı ile) kullanıldı.

M. Darouach ve A. Bassong [8], cebirsel kısıtlamalar altında, doğrusal dinamik dizgeler için ardışıl durum kestirimi algoritması geliştirmişlerdir. Durum vektörü için minimum değişinti kestirimi; ölçülen model ve dinamik model denkleminin bağlı olarak Kalman Filtresi ile belirlenir. Doğrusal kısıtlamalı durum kestirimi için bu yöntemin genişletilmesi tartışıldı ve önceki durum kestirimi ile yeni ölçümler ve doğrusal cebirsel kısıtlamalar altında doğrusal ardışıl kestirimin elde edildiği gösterildi. Bu problem; güç dizgelerinde ve ekonomik dizgelerde karşımıza çıkabilir.

Doğrusal ayrık-zamanlı dizgelerin, rastlantı katsayıları ile ifade edilmesi durumunda model parametrelerinin kestirimi ile Michal Horwath [9] da ilgilenmiştir. Özellikle, maximum likelihood (olasılık) kestirimcileri ve onların tanımlanan model yapısına uygunluğu Michal Horwath tarafından araştırıldı. Bu kestirimciler, doğrusal ayrık-zamanlı ve sabit katsayılı dizge için; ARX modeli için en küçük kare kestirimcileri kadar basit bir yapıya sahiptirler. Michal Horwath'ın modeli; aynı boyutlu ARX modelindeki kadar bilinmeyen parametre sayısına sahiptir ve bu model, rastlantılı çıkışlara sahip gerçel dizgelerin modellenmesinde bir yöntem olarak kullanılabilir.

C. M. Liaw, T. S. Liu, A.H. Liu, Y.T. Chen ve C. J. Lin [10], tahrik dizgelerinin parametre kestirimi için dolaylı olarak bir rastlantı yöntemi kullandılar. Bu yöntemde, tahrik dizgelerinin her bir bloğu için bir ayrık-zamanlı ARMA modeli uydurulur ve örneklenmiş giriş/çıkış datalarından model tanısı yapılır. Sonra baskın enerji modları düşüncesinden gidilerek sürekli zaman modeli için uygun indirgeme derecesi belirlenir. Sonuç olarak sürekli

zaman modelinin parametreleri, tanısı yapılan ARMA modelinin frekans tepkesinin benzerliğinden yararlanılarak bulunur. Sunulan yöntem; bir pompalı depolanan güç dizgelerindeki tahrik sisteminin parametrelerinin kestirimi için kullanıldı. Bu yöntemin en büyük avantajı; durum uzayı dönüşümü, sıklıkla sistem bölümlerinin birim matris kullanılarak yapılmasıdır ve böylece dengeli gerçekleştirme ve spectral ayrışım kullanılan yöntemler için ters çevirme işlemleri ortadan kalkar. Bu algoritma, kararsız sistemler için doğrudan kullanılabilir.

M. Darouach ve M. Boutayeb [11], yapmış oldukları çalışmada; tek-girişli tek-çıkışlı ayrık zamanlı tekil sistemleri ele almışlardır. Bu sistem için; on-line durum ve parametre kestirimi konusunda ardışıl bir algoritma geliştirdiler. Ele alınan model; köşegenel gözlenebilir biçimde düşünülmüştür. Bu yaklaşım; genelleştirilmiş Kalman filtresine dayanır ve iki adımda geliştirilebilir. Birinci adımda, parametreler ardışıl en küçük kareler metoduyla kestirilir. Bu parametreler ikinci adımda; genelleştirilmiş Kalman filtresi kullanılarak, durum kestirimi için kullanıldı ve bu algoritmanın doğruluğu nümerik örneklerle kanıtlandı.

Linda A. Kamas, ve Seth R. Sanders [12], güç elektroniği devrelerinde parametrelerin ve ölçülemeyen devre değişkenlerinin parametrelerinin kestirimi ve devre modelinin oluşturulması konularını incelemişlerdir. Güç elektroniği devreleri üzerinde yapılan sayısız uygulamalarda; kapalı çevrimli kontrol tasarımları için, devre değişkenlerinin ölçümlerine ihtiyaç duyulur. Fakat bu çok pahalıdır ve doğrudan elde edilmesi mümkün olamaz. İndüktans akımları, bir devrenin elektriksel olarak izole edilmiş kısımlarındaki devre değişkenleri veya yüksek empedans düğümlerindeki gerilimleri, buna örnek olarak verilebilir. Bu çalışmada durum kestirimi için uygulanan yöntem; gözlemleyici teorisine ve Lyapunov fonksiyonuna dayanır ve bu artıştaki enerji olarak adlandırılır. Devre parametrelerinin bütünüyle bilinmediği durumlar için, bir adaptive kestirim algoritması geliştirildi. Bu algoritma, ölçülemeyen devre değişkenleriyle beraber bilinmeyen devre parametrelerinin kestiriminde kullanıldı. Ortalamalı ve singular dağılımlı analiz kullanılarak durum kestiriminin doğruluğu kanıtlandı.

H. Chai ve P. P. Acarnley [13], indüksiyon motorunun on-line parametre kestirimi için ekonomik bir algoritma tanımladılar. Bu parametreler, yalnızca işaretlerdeki bileşenlerden türetilir ve hesaplanmış olan parametrelerin en uygunudur. Spektral analiz kullanılarak; on-line test methodları için kullanılabilir olduğu gösterilir ve bu method standart off-line'a benzer. Bilgisayar uygulaması sonucunda; 2KW lık bir indüksiyon

motorundan elde edilen deneysel sonuçlar kadar; algoritma performansının da iyi olduğu görülmüştür.

A. V. B. Subrahmanyam ve G. P. Rao [14], yapmış oldukları çalışmada; sürekli zamanlı bir girişli-bir çıkışlı sistemin aktarma işlevinin parametrelerinin Markov, parametrelerinden yararlanılarak kestirimi için bir algoritma geliştirmişlerdir. Markov-Poisson parametreleri olarak bilinen parametrelerin yeni bir grubu, Markov parametrelerinin tanımını genelleştirmek için kullanılır. Benzer modellerin kestirimi için sürekli zamanlı dizgelerin aktarma fonksiyonlarını veren bu verimli algoritma detaylı olarak incelendi.

J. A. de Kock, F. S. van der Merwe ve H. S. Vermeulen [15]; çıkış hata tekniğini kullanarak indüksiyon motorlarda parametre kestirimi konusunda bir algoritma geliştirdiler. Güç sistemleri için indüksiyon motorlarının simülasyonları; doğru olmayan veya bilinmeyen parametre dataları ile sık sık engellenir. Motor parametrelerinin kestirimi için geliştirilen teknik, uygulanan gerilim bozulmaları ile birleştirilen çıkış hata tekniğini kullanır.

J. R. Roal ve H. Madhuranath [16]; dinamik dizgelerde durum uzayı modelinin parametrelerinin kestirimi problemini çözmek için bir neural network mimarisi oluşturmuşlardır. Ağırlık/eğim bilgisinin ön hesaplamasına bağlı olan mimari, doğrudan gradient hesaplaması (normalizasyonsuz) ve çıkış hata yöntemi kullanılarak geliştirildi.

Bu çalışmada ise; doğrusal zamanla-değişmeyen, çok-girişli çok-çıkışlı dizgelerin durum modeli kullanılarak parametrelerinin kestirimi konusu ele alındı. Durum modeli parametreleri kestirilecek olan dizgenin girişleri ve çıkışları, belirli zaman aralıklarında ölçülerek belirlenir. Ölçülen çıkış değerleri ile kestirilen parametrelere bağlı olarak ifade edilen çıkış değerleri arasındaki farkların karelerinin, yinelemeli olarak mümkün olduğu kadar minimum yapılması amaçlanmıştır. Bu yöntem yinelemeli en küçük kareler yöntemi [17] olarak adlandırılır. Bu yöntem ile ifade edilen amaç fonksiyonu ve durum modeli ile belirlenen dizge modeli bağıntısı kullanılarak, bilinmeyen dizge parametreleri kestirilir.

Bu çalışmada; belirlenen model çıkış vektörü kullanılarak oluşturulan amaç fonksiyonu; Gradient algoritması, Hessian- Gradient Algoritması, PARTAN algoritması [18] ve Marquardt-Levenberg algoritması [19] olarak adlandırılan dört değişik algoritma ile minimum yapılmaya çalışılmıştır. Her bir algoritma ile; amaç fonksiyonunu minimum yapan parametre değerleri kestirilmeye çalışılmıştır. Ayrıca çıkışlara değişik gürültü seviyelerinde; sıfır ortalamalı Beyaz Gauss gürültü işaretleri eklenerek; bu algoritmaların gürültüye karşı performansları incelenmiştir.

İncelenen dört ayrı yöntem ile oluşturulan algoritmaların; data sayısına göre performansları, hızları, gürültüye karşı duyarlılıkları, değişik giriş işaretlerine göre performansları araştırılmıştır.

Parametre kestirimi konusunda genel bilgiler ve bu konuda yapılan bazı çalışmalar, genel bilgiler bölümünde anlatılmıştır.

Bu çalışmada geliştirilen, durum-çıkış vektörlerini tek bir bağıntı altında toplayan modelin tanıtımı ve bu modele ait parametrelerin yinelemeli olarak Gradient, Hessian-Gradient, Partan ve Marquardt-Levenberg algoritmaları ile kestirimi konuları, yapılan çalışmalar bölümünde anlatılmıştır. Bu çalışmaya ait bilgisayar programları, UNIX altında C yazılım dili kullanılarak hazırlanmıştır.

Ölçülen çıkışlar ve kestirilen parametreler ile hesaplanan çıkışlar arasındaki farkların karelerinin minimum yapılması olarak tanımlanan amaç fonksiyonunu minimum yapan parametrelerin, bu algoritmalarla kestirilmesine ait sonuçlar; elde edilen sonuçlar ve bulgular bölümünde ayrıntılı olarak verilmiştir.

Ortaya çıkan sonuçların irdelenmesi ve birbiriyle karşılaştırılması ise irdeme bölümünde yapılmıştır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE GELİŞTİRİLEN YÖNTEM

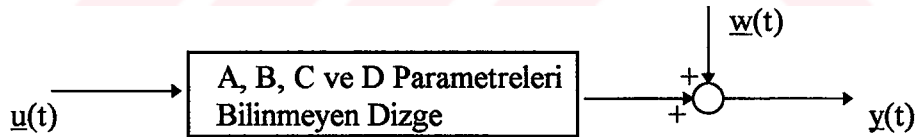
2.1. DİZGE MODELİ

Doğrusal, sabit parametrelili ve zamanla değişmeyen bir dizgeyi,

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \quad (1)$$

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) + \underline{w}(t) \quad (2)$$

durum modeli ile ifade edelim. Burada; durum matrisi A , denetim matrisi B , çıkış matrisi C ve geçiş matrisi D sıra ile, $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$ ve $m \times r$ boyutlarında olup; $\underline{x}(t)$ durum, $\underline{y}(t)$ çıkış, $\underline{u}(t)$ denetim sütun vektörleridirler ve $n \times 1$, $m \times 1$, $r \times 1$ boyutlarındadırlar. Burada, n , m ve r boyutlarının biliniyor olduğu kabul edilecektir. $\underline{w}(t)$, ortalaması sıfır ve standart sapması (σ) tüm ölçümler için eşit olan Gauss gürültüsünü ifade etmektedir ve her bir çıkışa birbirinden bağımsız olarak ilave edilmiştir. (1) ve (2) bağıntılarıyla ifade edilen dizgenin $\underline{u}(t)$ giriş büyüklükleri ve $\underline{y}(t)$ çıkış büyüklükleri belirli $\mu\tau$ zaman aralıklarında ($\mu\tau, \mu = 1, 2, \dots, N$) bilinmektedir. Ayrıca C çıkış matrisinin, tersi alınabilir bir kare matris ya da yalancı tersi alınabilir bir dikdörtgen matris olduğu varsayılmaktadır. (1) ve (2) bağıntıları ile ifade edilen dizgenin blok şeması;



Şekil 1. Dizgenin blok gösterimi

biçiminde gösterilebilir. Burada $\underline{u}(t)$ giriş büyüklüklerinin ve $\underline{y}(t)$ çıkış büyüklüklerinin vektörel değerleri; çok küçük değere sahip olan τ adım aralığı ile birlikte bilinmektedir. (1) ve (2) ile ifade edilen durum modelindeki A , B , C ve D matrislerinin her bir elemanı $\underline{u}(t)$ ve $\underline{y}(t)$ bilinenlerinden yararlanılarak belirlenecektir.

2.2. PARAMETRE KESTİRİMİ İÇİN OLUŞTURULAN MODEL

(1) ve (2) bağıntılarıyla durum modeli verilen bir dizge için, gürültüsüz durumda bir model oluşturulur. $\underline{x}(t)$ durum ve $\underline{y}(t)$ çıkış vektörlerinin boyutları birbirinden farklıdır ($n > m$). Bu farklı boyutlardaki vektörler kullanılarak tek bir matematiksel model ile dizge

davranışları ifade edilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmanın en üstün yanı; farklı boyutlardaki matrisel ifadeler birleştirilerek dizgenin tek bir vektör ile ifade edilmesi ve çıkışlar arasındaki yanılıgyı minimuma indirgeyecek bir algoritmanın oluşturulmasıdır.

Bu çalışmada (1) ve (2) bağıntıları birleştirilerek tek bir bağıntı elde edilmiştir. Bunun için önce (1) bağıntısının (t_0, T) zaman aralığında tümlevi alınır.

$$\underline{x}(T) = \underline{x}(t_0) + A \int_{t_0}^T \underline{x}(t) dt + B \int_{t_0}^T \underline{u}(t) dt \quad t_0 < T < \infty \quad (T, \text{ bir sabit}) \quad (3)$$

Burada $\underline{x}(t_0)$ başlangıç anındaki durum vektörünü göstermektedir. (3) ifadesi sol taraftan C çıkış matrisi ile çarpılıp, eşitliğin her iki tarafına $D\underline{u}(T)$ vektörü eklenirse

$$C\underline{x}(T) + D\underline{u}(T) = C\underline{x}(t_0) + CA \int_{t_0}^T \underline{x}(t) dt + CB \int_{t_0}^T \underline{u}(t) dt + D\underline{u}(T) \quad (4)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\underline{y}(t_0) = C\underline{x}(t_0) + D\underline{u}(t_0)$ çıkış vektörünün başlangıç değerlerini gösterir. (2) bağıntısında $\underline{w}(t) = 0$ gürültüsüz durumda; $\underline{x}(t)$ durum vektörü, $\underline{y}(t)$ bilinen çıkış vektörüne bağlı olarak

$$\underline{x}(t) = C^{-1} \underline{y}(t) - C^{-1} D\underline{u}(t) \quad (5)$$

biçiminde ifade edilir. Burada C çıkış matrisinin $n \times n$ boyutunda bir kare matris olması halinde, ters matrisinin alınması çok kolay olacaktır. Bu durumda (5) bağıntısı ile elde edilen $\underline{x}(t)$ durum vektörünün çözümü tektir ve yanılıgsızdır. Fakat, genelde C matrisi ($m < n$), bir dikdörtgen matris olacaktır. Böyle C matrisinin sağ-yalancı tersi alınarak çözüm yapılabilir. C matrisinin sağ-yalancı tersi [17,18]; C^T , C matrisinin transpozisini göstermek üzere;

$$C_R^{-1} = C^T (C C^T)^{-1} \quad (6)$$

biçiminde alınacaktır. Bu çalışmada C^{-1} gösterimi; $m < n$ durumunda sağ-yalancı ters olarak düşünülecektir. Böylece (5) bağıntısıyla bulunan $\underline{x}(t)$ durum vektörü minimum hatayla elde edilecektir.

(5) ifadesi (4) bağıntısında yerleştirilirse ve sağ tarafa $D\underline{u}(0)$ eklenip çıkartılırsa T anındaki çıkış vektörü

$$\begin{aligned} \underline{y}(T) &= C\underline{x}(T) + D\underline{u}(T) \\ &= \underline{y}(t_0) + CAC^{-1} \int_{t_0}^T \underline{y}(t) dt - CAC^{-1}D \int_{t_0}^T \underline{u}(t) dt + CB \int_{t_0}^T \underline{u}(t) dt + D\underline{u}(T) - D\underline{u}(t_0) \end{aligned} \quad (7)$$

olarak elde edilir. (1) ve (2) bağıntılarının birleştirilmesi sonucunda (7) bağıntısı elde edildi. Bu bağıntıdan görüldüğü gibi $\underline{y}(t)$ çıkış vektörü; $\underline{u}(t)$ giriş vektörüne, $\underline{y}(t)$ çıkış vektörünün

tümlevine ve A, B, C, D, matrislerindeki bilinmeyen eleman değerlerine bağlı olarak ifade edilmiştir. Bundan sonraki aşamalarda dizge modeli (7) deki gibi düşünülecektir.

Tanısı istenen dizgeye ait A, B, C, ve D bilinmeyen matris elemanlarından oluşan, $\underline{\theta}$ bilinmeyenler vektörü; $n \times n + n \times r + m \times n + m \times r$ boyutunda olup,

$$\underline{\theta} = [a_{11} \ a_{12} \ .. \ a_{nn} \ b_{11} \ b_{12} \ .. \ b_{nr} \ c_{11} \ c_{12} \ .. \ c_{mn} \ d_{11} \ d_{12} \ .. \ d_{mr}]^T \quad (8)$$

biçiminde tanımlanır. Burada a_{ij} ; A matrisinin, b_{ij} ; B matrisinin, c_{ij} ; C matrisinin, d_{ij} ; D matrisinin (ij). nci bilinmeyen parametreleri olarak tanımlanır. (7) Bağntısında C matrisinin ters matrisini gösteren C^{-1} matrisinin elemanlarının da belirlenmesi gerekmektedir. Bu durumda bilinmeyen parametrelerin sayısı oldukça artmaktadır. Bu sorunu ortadan kaldırmak ve (7) bağntısını basitleştirmek amacıyla $AC^{-1}=K$ olarak alınırsa

$$\underline{y}(T) = \underline{y}(t_0) + CK \int_{t_0}^T \underline{y}(t) dt - CKD \int_{t_0}^T \underline{u}(t) dt + CB \int_{t_0}^T \underline{u}(t) dt + D\underline{u}(T) - D\underline{u}(t_0) \quad (9)$$

bağntısı ortaya çıkar. (9) bağntısına göre $\underline{\theta}$ bilinmeyenler vektörü; $m \times n + n \times m + n \times r + m \times r$ boyutunda olup,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(T) \\ y_2(T) \\ \vdots \\ y_m(T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_m(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T y_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T y_m(t) dt \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T u_r(t) dt \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T u_r(t) dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(T) - u_1(t_0) \\ \vdots \\ u_r(T) - u_r(t_0) \end{bmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bu bağıntıdan yararlanarak $y_1, y_2, \dots, y_m$ çıkışlarının T anındaki değerleri ayrı ayrı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
 y_1(T) = y_1(t_0) &+ [c_{11}c_{12}\dots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T y_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T y_m(t)dt \end{bmatrix} \\
 &- [c_{11}c_{12}\dots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T u_r(t)dt \end{bmatrix} \\
 &+ [c_{11}c_{12}\dots c_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T u_r(t)dt \end{bmatrix} + [d_{11}d_{12}\dots d_{1r}] \begin{bmatrix} u_1(T) - u_1(t_0) \\ u_2(T) - u_2(t_0) \\ \vdots \\ u_r(T) - u_r(t_0) \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 y_m(T) = y_m(t_0) &+ [c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T y_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T y_m(t)dt \end{bmatrix} \\
 &- [c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T u_r(t)dt \end{bmatrix} \\
 &+ [c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^T u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^T u_r(t)dt \end{bmatrix} + [d_{m1}d_{m2}\dots d_{mr}] \begin{bmatrix} u_1(T) - u_1(t_0) \\ u_2(T) - u_2(t_0) \\ \vdots \\ u_r(T) - u_r(t_0) \end{bmatrix} \quad (11)
 \end{aligned}$$

bağıntısı ortaya çıkar. (9) bağıntısına göre θ bilinmeyenler vektörü; $m \times n + n \times m + n \times r + m \times r$ boyutunda olup,

$$\underline{\theta} = [c_{11} \dots c_{mn} \ k_{11} \dots k_{mn} \ b_{11} \dots b_{nr} \ d_{11} \dots d_{mr}]^T \quad (12)$$

olarak tanımlanacaktır. Burada k_{ij} ; k matrisinin (ij) 'inci bilinmeyen parametresini gösterir. Bu çalışmada anlatılan algoritmalar kullanılarak (12)'deki parametreler belirlendikten sonra, $A=K.C$ bağıntısından yararlanılarak A matrisinin bütün parametreleri de belirlenmiş olur.

2. 3. AMAÇ FONKSİYONUNUN TANISI

Burada bilinmeyen dizgenin çıkış ölçümleri olarak ifade edilen $y_{id}(\mu\tau)$ ($i=1, \dots, m$; $\mu=0, \dots, N$) değerlerine en iyi yaklaşımı sağlayan durum modeli parametrelerinin belirlenmesi için, doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemi kullanıldı [19]. Burada τ ; ölçüm aralığını göstermektedir. N tane ölçülen çıkış değerlerine karşılık, bilinmeyen parametrelere bağlı olarak belirlenen $y_i(\mu\tau, \underline{\theta})$, $i=1, \dots, m$ çıkış değerleri arasındaki farkın minimum yapılması amaçlandı. Kısacası,

$$\phi(\underline{\theta}) = \sum_{\mu=1}^N \left\{ [y_{1d}(\mu\tau) - y_1(\mu\tau, \underline{\theta})]^2 + [y_{2d}(\mu\tau) - y_2(\mu\tau, \underline{\theta})]^2 + \dots + [y_{md}(\mu\tau) - y_m(\mu\tau, \underline{\theta})]^2 \right\} \quad (13)$$

bağıntısı ile ifade edilen amaç fonksiyonunun minimum yapılması sorununa gelinir. (13) bağıntısını

$$\phi(\underline{\theta}) = \sum_{\mu=1}^N \{ e_1^2(\mu\tau, \underline{\theta}) + e_2^2(\mu\tau, \underline{\theta}) + \dots + e_m^2(\mu\tau, \underline{\theta}) \} \quad (14)$$

biçiminde düzenleyebiliriz. Bu amaç fonksiyonunu minimum yapacak olan parametre değerleri; durum modelindeki matrislerin elemanları olacaktır. y_1 çıkışına ait fark fonksiyonu $e_1(\mu\tau, \underline{\theta})$ 'in herhangi bir $\mu\tau$ ($\mu = 0, 1, \dots, N$) zamanına bağlı matrisel ifadesi,

$$e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) = y_{1d}(\mu\tau) - y_1(t_0) - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt \end{bmatrix} \\ + [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t)dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \\ \vdots \\ u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \end{bmatrix} \quad (15)$$

olacaktır. Kestirimi yapılacak modelin m tane çıkışı bulunduğundan, m tane fark fonksiyonlarının karelerinin toplamalarının minimum yapılması amaçlanmıştır. m . fark fonksiyonun $\mu\tau$ anındaki değeri ise;

$$e_m(\mu\tau, \theta) = y_{md}(\mu\tau) - y_m(t_0) - \begin{bmatrix} c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t)dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t)dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \\ u_2(\mu\tau) - u_2(t_0) \\ \vdots \\ u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \end{bmatrix} \quad (16)$$

formülü ile ifade edilir.

2.4. GELİŞTİRİLEN DOĞRUSAL OLMAYAN PARAMETRE KESTİRİM YÖNTEMLERİ

(9) bağıntısında görüldüğü gibi; parametrelere bağlı $y(t)$ çıkış vektörü doğrusal olmayan bağıntılardan oluşur. Dolayısıyla (13) bağıntısıyla verilen amaç fonksiyonu da doğrusal olmayan bir ifadedir. Bu amaç fonksiyonunu minimum yapabilmek amacıyla; bu çalışmada birçok parametre kestirim yöntemi kullanıldı. Bunlar; Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmalarıdır.

2.4.1. Marquardt-Levenberg Algoritmasıyla Parametre Kestirimi

Durum modeli ile ifade edilen bir dizgenin, bilinmeyen A, B, C ve D matris parametrelerinin kestiriminde kullanılan yöntemlerden biri Marquardt-Levenberg yöntemidir [20]. Bu yöntem, iterasyona dayalıdır ve üstün yakınsama performansına sahiptir. $(i+1)$ 'inci iterasyonda bilinmeyen parametreler;

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i - [H_i + \lambda_i B_i^2]^{-1} \underline{q}_i \quad (17)$$

i'inci iterasyonda hesaplanan değerlere bağlı olarak hesaplanır. Burada $\underline{q}_i$, amaç fonksiyonunun i'inci adımdaki gradient sütun vektörü olup $n \times n + n \times r + m \times r + m \times n$ boyutundadır. H_i ise, amaç fonksiyonunun i. adımdaki Hessian kare matrisidir ve $n \times n + n \times r + m \times r + m \times n$ boyutlu pozitif tanımlı özelliğine sahiptir. B_i , $n \times n + n \times r + m \times r + m \times n$ boyutunda bir kare matristir. B_i matrisinin köşegeni üzerinde bulunan değerler, Hessian matrisinin köşegeni üzerinde bulunan değerlerin mutlak değerine eşittir. Eğer köşegen üzerinde 0 değeri varsa 1 olarak değiştirilir ve köşegen dışındaki terimler sıfırdır. (17) bağıntısındaki $\underline{q}$ vektörü; (13) ile tanımlanan $\phi(\underline{\theta})$ amaç fonksiyonunun, bilinmeyen parametrelerin her birine göre birinci türevinden oluşmaktadır. Amaç fonksiyonunun α bilinmeyen parametresine göre birinci türevi;

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_\alpha} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left[e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \frac{\partial e_1(\mu\tau, \underline{\theta})}{\partial \theta_\alpha} + \dots + e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \frac{\partial e_m(\mu\tau, \underline{\theta})}{\partial \theta_\alpha} \right] \\ &= 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \frac{\partial [y_{1d}(\mu\tau) - y_1(\mu\tau, \underline{\theta})]}{\partial \theta_\alpha} + \dots + e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \frac{\partial [y_{md}(\mu\tau) - y_m(\mu\tau, \underline{\theta})]}{\partial \theta_\alpha} \right\} \\ &= -2 \sum_{\mu=1}^N \left[e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \frac{\partial y_1(\mu\tau, \underline{\theta})}{\partial \theta_\alpha} + \dots + e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \frac{\partial y_m(\mu\tau, \underline{\theta})}{\partial \theta_\alpha} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

biçiminde yazılabilir. (17) Bağıntısındaki Hessian matrisi H ise; $\phi(\underline{\theta})$ amaç fonksiyonunun, bilinmeyen parametrelere göre ikinci türevini göstermektedir. α ve β parametrelerine göre Hessian matrisinin herbir elemanı;

$$h_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} = -2 \sum_{\mu=1}^N \left[e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \frac{\partial^2 y_1(\mu\tau, \underline{\theta})}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} + \dots + e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \frac{\partial^2 y_m(\mu\tau, \underline{\theta})}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} \right] \quad (19)$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots, m \times n + n \times m + n \times r + m \times r$ (parametre sayısı) olacaktır.

Marquardt-Levenberg algoritması için, aşağıdaki işlem adımları kullanılarak, istenilen koşullar gerçekleşinceye kadar iterasyon devam eder:

1. $i=1$ değeri için ilk adımda, $\lambda = 0.01$ gibi küçük bir λ değeriyle işleme başlanır.

2. Parametrelerin başlangıç vektörü olan $\underline{\theta}_1$ değerleri için amaç fonksiyonunun değeri $\phi(\underline{\theta}_1)$ hesaplanır.

3. Aynı başlangıç değerleri için $[H_i + \lambda B_i^2]^{-1} \underline{q}_i$ değeri hesaplanır.

4. Verilen (17) bağıntısından $\underline{\theta}_{i+1}$ değeri ve bu değer (14)'bağıntısı ile tanımlanan amaç fonksiyonunda yerine yazılarak $\phi(\underline{\theta}_{i+1})$ değeri hesaplanır.

5. Eğer $\phi(\underline{\theta}_{i+1}) > \phi(\underline{\theta}_i)$ ise $\lambda = 10 \times \lambda$ yapılarak 3 nolu adıma geri dönülür.

6. Eğer $\phi(\underline{\theta}_{i+1}) < \phi(\underline{\theta}_i)$ ise $\lambda = 0.1 \times \lambda$ yapılarak hesaplanan $\underline{\theta}_{i+1}$ değerleri $\underline{\theta}_i$ ile yer değiştirerek 3 nolu adıma geri dönülür.

Bu işlem herhangi bir yinelemede $|\phi(\underline{\theta}_{i+1}) - \phi(\underline{\theta}_i)| < \varepsilon$ ve $\lambda_{i+1} < \lambda_i$ olunca sona erer.

Burada ε , küçük değerli ve pozitif olarak tanımlanan bir sayıyı göstermektedir. Belirtilen bu koşul herhangi bir yineleme sonunda gerçekleşirse, işlem durdurulur ve hesaplanan son parametre değerleri kestirilen parametreler olarak kabul edilir.

2.4.2. Gradient Algoritması ile Parametre Kestirimi

Gradient algoritması [21], çok boyutlu problemleri çözmek için kullanılan algoritmaların en basitidir. Bu algoritma; kısıtlamalı ve kısıtlamasız problemlerin en doğru çözümünü bulmak için kullanılan yöntemlerin temelini oluşturur. Amaç fonksiyonunu minimum yapacak parametre değerlerinin kestirimi problemi:

$$\min_{\underline{\theta}} \phi(\underline{\theta}) \quad (20)$$

olarak gösterilir. Bu problemin minimumunu bulmak için; iterasyona dayalı gradient algoritması (i+1). adımda

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i + k \underline{q}_i, \quad k < 0 \quad (21)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\phi(\underline{\theta})$ amaç fonksiyonu ve parametrelerin birinci türevleri bağıntıları sırayla (14) ve (18) ile verilmiştir. Bu algorithmada 1. iterasyona başlamak için $\underline{\theta}_0$ parametre vektörü için başlangıç değerleri önceden verilmelidir. (i+1). iterasyonda; bir önceki iterasyonda kestirilen parametre değerleri kullanılacaktır. $\underline{q}_i$ vektörü; amaç fonksiyonunun i. iterasyondaki her bir parametreye göre birinci türevinden oluşur. k değeri ise; sıfırdan küçük bir değerdir ($k = -0.1$) olabilir. Eğer küçük bir k değeri alınırsa ($k = -0.001$), yakınsama hızı çok yavaş, fakat çözüm oldukça doğru olacaktır. Eğer k değeri büyük seçilirse, yakınsama hızı oldukça hızlı, fakat çözüm değerleri; gerçek çözüm değerleri civarında salınım yapacaktır.

Bu algoritma, $|\phi_i - \phi_{i+1}| < \epsilon$ kısıtlamasının ($\epsilon=0.000001$ küçük değerli bir sayı) gerçekleştiği iterasyonda sona erer ve en son iterasyonda elde edilen çözümler; kestirilen parametre değerleri olarak alınırlar.

2.4.3. Hessian-Gradient Algoritması ile Parametre Kestirimi

(21) bağıntısı ile tanımlanan Gradient algoritması sabit bir k değeri kullanmaktadır. $\phi(\theta)$ amaç fonksiyonunun ikinci türevinden oluşan Hessian matrisi kullanılarak ve her iterasyona ait optimal k değeri belirlemek sonucunda gradient algoritmasının performansı arttırılmış olur [21]. $\phi(\theta)$ amaç fonksiyonu; θ_i civarında Taylor serisine açılırsa ve ikinci dereceden yüksek terimleri ihmal edilirse ($\Delta\theta_i$, i . iterasyonda parametrelerdeki değişim vektörünü gösterir.);

$$\phi(\theta_i + \Delta\theta_i) = \phi(\theta_i) + \underline{q}_i^T \Delta\theta_i + \frac{1}{2} \Delta\theta_i^T H_i \Delta\theta_i \quad (22)$$

biçiminde yazılır. Gradient yolu boyunca

$$\Delta\theta_i = k_i \underline{q}_i \quad (23)$$

bağıntısı (22) de yerleştirilirse

$$\phi(\theta_i + k_i \underline{q}_i) = \phi(\theta_i) + k_i \underline{q}_i^T \underline{q}_i + \frac{1}{2} k_i^2 \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_i \quad (24)$$

ve k_i ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial f}{\partial k_i} = \underline{q}_i^T \underline{q}_i + k_i \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_i = 0 \quad (25)$$

bu bağıntıyı sıfıra eşitleyen k_i değeri belirlenir.

$$k_i = - \left[\frac{\underline{q}_i^T \underline{q}_i}{\underline{q}_i^T H_i \underline{q}_i} \right]_{\theta_i} \quad (26)$$

Bu algoritmada da, iterasyona başlarken parametrelerin belirli bir başlangıç değerine sahip olması gerekir. Bu başlangıç değerleri kullanılarak ikinci iterasyondaki parametre değerleri hesaplanır. Her iterasyon durumunda kestirilen parametre değerlerine bağlı olarak;

amaç fonksiyonunun (18) bağıntısıyla tanımlanan birinci türevi q_i , (19) bağıntısıyla tanımlanan ikinci türevi H_i matrisleri kullanılarak, i . iterasyona ait k_i değeri belirlenir ve

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i + k_i \underline{q}_i \quad (27)$$

bağıntısından $(i+1)$. iterasyondaki $\underline{\theta}_{i+1}$ parametre kestirim değerleri elde edilir.

Bu algoritma yerel gradient bilgisi içerdiğinden dolayı; başlangıç noktasına bağlı olarak bir yerel minimuma yakınsar. Her bir iterasyonda elde edilen parametre değerlerine göre amaç fonksiyonu değerleri (14) bağıntısı ile elde edilir. Bu algoritma $|\phi_i - \phi_{i+1}| < \varepsilon$ (ε çok küçük bir pozitif sayı) koşulu sağlandığında sona erer. En son iterasyondaki $\underline{\theta}_i$ parametre değerleri amaç fonksiyonunu minimum yapan çözüm değerleridir. Eğer bu koşul sağlanmazsa; en son elde edilen parametre değerleri kullanılarak, yeni k_i değeri bulunur. Bu k_i değeri ve en son elde edilen parametreler kullanılarak (27) bağıntısındaki gibi $\underline{\theta}_{i+1}$ parametreleri bu koşul sağlanıncaya kadar bulunur.

2.4.4. PARTAN Algoritması ile Parametre Kestirimi

Gradient algoritmasının yakınsamasını hızlandırmak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri;

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i + k_1 \nabla \phi(\underline{\theta}_i) + k_2 \nabla \phi(\underline{\theta}_{i-1}) = \underline{\theta}_i + k_1 \underline{q}_i + k_2 \underline{q}_{i-1} \quad (28)$$

biçiminde tanımlanır. Görüldüğü gibi; son iki iterasyona ait gradient yönü kullanılarak, yeni parametre kestirim değerleri elde edilir. Eğer k_1 , k_2 değerleri uygun genlikte seçilirse; bu algoritma paralel teğet ya da PARTAN [21] algoritması olarak bilinir.

Bu algoritmanın yakınsaması için, optimum k_1 ve k_2 katsayılarının kullanılması gerekir. Bu katsayıların optimum değerinin bulunuşu amacıyla (28) bağıntısı;

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i + \Delta \underline{\theta}_i + \Delta \underline{\theta}_{i-1} \quad (29)$$

olarak yazılabilir. $\phi(\underline{\theta})$ amaç fonksiyonunun minimum değerini elde etmek için $\phi(\underline{\theta}_i) - \phi(\underline{\theta}_{i+1}) \leq \varepsilon$, $\varepsilon < 0$ koşulunun sağlanması gerekir.

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i + \Delta \underline{\theta}_i + \Delta \underline{\theta}_{i-1} = \underline{\theta}_i + \Delta \underline{\theta}_i \quad (30)$$

Burada $\Delta\theta_{it}$, i. ve (i+1). Iterasyonlardaki parametre değerleri arasındaki değişim miktarıdır ve

$$\Delta\theta_{it} = k_1 \nabla\phi(\theta_i) + k_2 \nabla\phi(\theta_{i-1}) = k_1 \underline{q}_i + k_2 \underline{q}_{i-1} \quad (31)$$

olarak ifade edilir. $\Delta\phi(\theta_i)$ amaç fonksiyonundaki değişim miktarı bağıntısı

$$\Delta\phi(\theta_i) = \underline{q}_i^T \Delta\theta_{it} = k_1 \underline{q}_i^T \underline{q}_i + k_2 \underline{q}_{i-1}^T \underline{q}_i \quad (32)$$

olacaktır.

$$\phi(\theta_{i+1}) = \phi(\theta_i + \Delta\theta_{it}) = \phi(\theta_i) + \underline{q}_i^T \Delta\theta_{it} + \frac{1}{2} \Delta\theta_{it}^T H_i \Delta\theta_{it} \quad (33)$$

(33) ifadesinde; $\Delta\theta_{it}$ bağıntısını veren (31) ifadesi yerleştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \phi(\theta_i + \Delta\theta_{it}) &= \phi(\theta_i) + k_1 [\nabla\phi(\theta_i)]^T [\nabla\phi(\theta_i)] + k_2 [\nabla\phi(\theta_i)]^T [\nabla\phi(\theta_{i-1})] \\ &\quad + \frac{1}{2} k_1^2 \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_i + \frac{1}{2} k_1 k_2 \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_{i-1} + \frac{1}{2} k_1 k_2 \underline{q}_{i-1}^T H_i \underline{q}_i + \frac{1}{2} k_2^2 \underline{q}_{i-1}^T H_i \underline{q}_{i-1} \end{aligned} \quad (34)$$

bağıntısı elde edilir. Optimum k_1 ve k_2 katsayılarını belirlemek için, (34) bağıntısının k_1 'e göre birinci türevi

$$\frac{\partial\phi(\theta_i + \Delta\theta_{it})}{\partial k_1} = \underline{q}_i^T \underline{q}_i + k_1 \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_i + \frac{1}{2} k_2 \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_{i-1} + \frac{1}{2} k_2 \underline{q}_{i-1}^T H_i \underline{q}_i \quad (35)$$

ve k_2 ye göre birinci türevi

$$\frac{\partial\phi(\theta_i + \Delta\theta_{it})}{\partial k_2} = \underline{q}_{i-1}^T \underline{q}_{i-1} + \frac{1}{2} k_1 \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_{i-1} + \frac{1}{2} k_1 \underline{q}_{i-1}^T H_i \underline{q}_i + k_2 \underline{q}_{i-1}^T H_i \underline{q}_{i-1} \quad (36)$$

alınır. Ayrıca bu türev denklemleri sıfıra eşitlenirse k_1 ve k_2 katsayıları aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-abf + (c+d)eb}{b^2f - b(c+d)(c+d)} \\ k_2 &= \frac{a(c+d) - eb}{bf - (c+d)(c+d)} \end{aligned} \quad (37)$$

Burada;

$$\begin{aligned}
 a &= [\nabla\phi(\underline{\theta}_i)]^T \nabla\phi(\underline{\theta}_i) = \underline{q}_i^T \underline{q}_i \\
 b &= [\nabla\phi(\underline{\theta}_i)]^T H_i \nabla\phi(\underline{\theta}_i) = \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_i \\
 c &= \frac{1}{2} [\nabla\phi(\underline{\theta}_i)]^T H_i \nabla\phi(\underline{\theta}_{i-1}) = \frac{1}{2} \underline{q}_i^T H_i \underline{q}_{i-1} \\
 d &= \frac{1}{2} [\nabla\phi(\underline{\theta}_{i-1})]^T H_i \nabla\phi(\underline{\theta}_i) = \frac{1}{2} \underline{q}_{i-1}^T H_i \underline{q}_i \\
 e &= [\nabla\phi(\underline{\theta}_i)]^T \nabla\phi(\underline{\theta}_{i-1}) = \underline{q}_i^T \underline{q}_{i-1} \\
 f &= [\nabla\phi(\underline{\theta}_{i-1})]^T H_i \nabla\phi(\underline{\theta}_{i-1}) = \underline{q}_{i-1}^T H_i \underline{q}_{i-1}
 \end{aligned} \tag{38}$$

olarak kısaltılmıştır. Burada H_i , $\underline{q}_i$ 'lerin bulunuşları Marquardt-Levenberg yönteminde anlatıldığı gibi olacaktır.

(28) bağıntısında görüldüğü gibi; bu algoritmada iterasyona başlayabilmek için parametrelerin; önceki iki iterasyondaki değerlerinin de bilinmesi gerekmektedir. Bunun için ilk iterasyona başlarken, $\underline{\theta}_0$ ve $\underline{\theta}_1$ parametre değerlerinin başlangıç olarak verilmesi gerekmektedir.

Birinci iterasyonda, verilen başlangıç değerleri kullanılarak k_1 ve k_2 katsayıları hesaplanır. Bu katsayılar ve $\underline{\theta}_0$ ve $\underline{\theta}_1$ parametre değerleri kullanılarak, 1. iterasyondaki parametre değerleri kestirilir. Kestirilen bu parametrelere göre ϕ_1 amaç fonksiyonu değeri hesaplanır. Böylece iterasyon devam edecektir. İterasyonun sonuçlandırılması; $|\phi_i - \phi_{i+1}| < \varepsilon$ kısıtlaması (ε küçük bir sayı; $\varepsilon=0.000001$ olabilir) ile gerçekleşir ve en son elde edilen $\underline{\theta}$ değerleri, kestirilen parametre değerleri olacaktır.

2.5. AMAÇ FONKSİYONUNUN PARAMETRELERE GÖRE BİRİNCİ TÜREVLERİ

Bu türevlerin alınışını daha açık olarak;

$$\underline{\theta} = [c_{11} \cdots c_{mm} k_{11} \cdots k_{mm} b_{11} \cdots b_{1r} d_{11} \cdots d_{mr}]^T \tag{39}$$

bilinmeyenler vektöründeki sıralamaya göre C matrisinin herbir elemanına göre türevleri;

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) [10 \dots 0] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt \end{bmatrix} \\
&\quad - [10 \dots 0] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix} \\
&\quad + [10 \dots 0] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix} \\
&= -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [k_{11} k_{12} \dots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \dots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \dots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \tag{40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2 &= \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [01 \dots 0] K \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [01 \dots 0] K \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [01 \dots 0] B \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&= -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{21} b_{22} \dots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \tag{41}
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
q_n &= \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_n} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [k_{n1} k_{n2} \dots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\
&\quad \left. - [k_{n1} k_{n2} \dots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{n1} b_{n2} \dots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}
\end{aligned}$$

$$q_{n+1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_{n+1}} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial c c_{21}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (42)$$

⋮

$$q_{2n} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_{n+1}} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{2n}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (43)$$

⋮

$$q_{(m-1)n+1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_{(m-1)n+1}} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{m1}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (44)$$

⋮

$$q_{mxn} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_{mxn}} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (45)$$

olacaktır. K matrisinin her bir elemanına göre birinci türevi ise aşağıdaki gibi alınır.

$$q_{mxn+1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial \theta_{mxn+1}} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt \end{bmatrix} \right. \\ \left. - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ \begin{bmatrix} c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix} \right\} \cdots \\
& -2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ \begin{bmatrix} c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Bazı kısaltmalar yapılarak bu bağıntı aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{aligned}
q_{mxn+1} &= \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \cdots c_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& -2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - \begin{bmatrix} c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \cdots \\
& \cdots -2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - \begin{bmatrix} c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$$\vdots \quad (46)$$

$$q_{m \times n + m} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{1m}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} -$$

$$\cdots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (47)$$

$$q_{m \times n + m + 1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{21}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} -$$

$$\cdots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{m2} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (48)$$

$$\vdots$$

$$q_{m \times n + 2m} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{2m}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} -$$

$$\cdots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{m2} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (49)$$

$$\vdots$$

$$q_{m \times n + n \times m} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} -$$

$$\dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (50)$$

Amaç fonksiyonunun $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}, b_{21}, b_{22}, \dots, b_{nr}$ parametrelerine göre birinci türevleri ise şöyledir:

$$q_{mxn+nxm+1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (51)$$

$$q_{mxn+nxm+2} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{12}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \quad (52)$$

$\vdots$

$$q_{mxn+nxm+r} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{1r}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (53)$$

$$q_{mxn+nxm+r+1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{21}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{m2} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (54)$$

$$q_{mxn+nxm+2r} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{2r}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{m2} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (55)$$

$\vdots$

$$q_{mxn+nxm+nr} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{nr}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (56)$$

Son olarak $\phi(\underline{\theta})$ amaç fonksiyonunun $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{nr}$ parametrelerine göre türevleri;

$$q_{mxn+nxm+nr+1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ -[c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\} - 2 \sum_{\mu=1}^N e_2 \left\{ -[c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \dots$$

$$-2 \sum_{\mu=1}^N e_m \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (57)$$

$$q_{mxn+mxm+mxr+2} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{12}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + u_2(\mu\tau) - u_2(t_0) \right\} \cdots -2 \sum_{\mu=1}^N e_m \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (58)$$

⋮

$$q_{mxn+mxm+mxr+r} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{1r}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} -2 \sum_{\mu=1}^N e_2 \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \cdots \\ -2 \sum_{\mu=1}^N e_m \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (59)$$

$$q_{mxn+mxm+mxr+r+1} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{21}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\ -2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} k_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\}$$

$$\dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm}] \begin{bmatrix} k_{12} & 0 & \dots & 0 \\ k_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (60)$$

⋮

$$q_{m \times n + n \times m + n \times r + 2r} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{2r}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{12} \\ 0 & 0 & \dots & k_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n2} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

$$- 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - [c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{12} \\ 0 & 0 & \dots & k_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n2} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\}$$

$$\dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{12} \\ 0 & 0 & \dots & k_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n2} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (61)$$

⋮

$$q_{m \times n + n \times m + n \times r + m \times r} = \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{mr}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

$$- 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - [c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

$$\dots - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} \quad (62)$$

olarak belirlenir.

2.6. AMAÇ FONKSİYONUNUN İKİNCİ TÜREVLERİNİN ALINIŞI

Hessian matrisi H ; $\phi(\theta)$ amaç fonksiyonunun, (19) bağıntısında verildiği gibi bilinmeyen $c_{11}, \dots, c_{mn}$, $k_{11}, \dots, k_{mn}$, $b_{11}, \dots, b_{1r}$, $d_{11}, \dots, d_{mr}$ parametrelerine göre ikinci türevlerinden oluşur ve aşağıdaki biçimde elde edilir.

2.6.1. Amaç Fonksiyonunun c_{11} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

θ vektörünün, birinci bilinmeyen parametresi olarak tanımlanan c_{11} 'e göre ikinci türev, Hessian matrisinin $H[1,1]$ elemanı olacaktır.

$$h_{11} = H[1,1] = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial c_{11} \partial c_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \frac{\partial y_1}{\partial c_{11}} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial c_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + \left[b_{11} b_{12} \dots b_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \quad (63)$$

$$h_{12} = H[1,2] = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial c_{11} \partial c_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \frac{\partial y_1}{\partial c_{11}} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial c_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + \left[b_{11} b_{12} \dots b_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ \left[k_{21} k_{22} \dots k_{2m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{21} k_{22} \dots k_{2m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + \left[b_{21} b_{22} \dots b_{2r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (64)$$

⋮

$$h_{1n} = H[1,n] = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial c_{11} \partial c_{1n}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \frac{\partial y_1}{\partial c_{11}} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial c_{1n}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + \left[b_{11} b_{12} \dots b_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ \left[k_{n1} k_{n2} \dots k_{nm} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{n1} k_{n2} \dots k_{nm} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}_1(t) dt + \left[b_{n1} b_{n2} \dots b_{nr} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}_1(t) dt \right\} \quad (65)$$

$$\begin{aligned}
h_{1((n+1))} &= H[1, n+1] = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial c_{21}} = 0 \\
h_{1((n+2))} &= H[1, n+2] = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial c_{22}} = 0 \\
&\vdots \\
h_{1((m \times n))} &= H[1, m \times n] = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial c_{mn}} = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

Burada H_{ij} ; Hesian matrisi olarak tanımlanan H matrisinin (i,j) . elemanı olarak kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}
h_{1((m \times n + 1))} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial k_{11}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [d_{11} d_{12} \cdots d_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
h_{1((m \times n + 2))} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial k_{12}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [d_{21} d_{22} \cdots d_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}_1(t) dt \right\} \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
h_{1((m \times n + m))} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial k_{1m}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [d_{m1} d_{m2} \cdots d_{mr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right.
\end{aligned}$$

$$+ [b_{11}b_{12}\cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \} \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t)dt - [c_{11}c_{12}\cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} \quad (69)$$

$$h_{1(m \times n + m + 1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial k_{21}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11}k_{12}\cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t)dt - [k_{11}k_{12}\cdots k_{1m}] D \right. \\ \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt + [b_{11}b_{12}\cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} \\ \left\{ c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t)dt - [c_{11}c_{12}\cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} \quad (70)$$

$$h_{1(m \times n + m + 2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial k_{22}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11}k_{12}\cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t)dt - [k_{11}k_{12}\cdots k_{1m}] D \right. \\ \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt + [b_{11}b_{12}\cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} \\ \left\{ c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t)dt - [c_{11}c_{12}\cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} \quad (71)$$

⋮

$$h_{1(m \times n + 2m)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial k_{2m}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11}k_{12}\cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t)dt \right. \\ \left. - [k_{11}k_{12}\cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt + [b_{11}b_{12}\cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} \\ \left\{ c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t)dt - [c_{11}c_{12}\cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} \quad (72)$$

⋮

$$\begin{aligned}
h_{l(mx_n+nx_m)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial k_{am}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\
&\quad \left. - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&\quad \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\}
\end{aligned} \tag{73}$$

c_{11} parametresine göre birinci türevi alınan $\phi(\underline{\theta})$ amaç fonksiyonunun; tekrar $b_{11}, \dots, b_{1r}, b_{21}, \dots, b_{2r}, \dots, b_{nr}, \dots, b_{nr}$ parametrelerine göre ikinci türevleri aşağıdaki biçimde alınır.

$$\begin{aligned}
h_{l(mx_n+nx_m+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial b_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
h_{l(mx_n+nx_m+2)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial b_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt
\end{aligned} \tag{75}$$

⋮

$$\begin{aligned}
h_{l(mx_n+nx_m+r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt
\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
h_{l(mx_n+nx_m+r+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial b_{21}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\
&\quad \left. - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt
\end{aligned} \tag{77}$$

⋮

$$h_{1(mx_n+nx_m+2r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial b_{2r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (78)$$

⋮

$$h_{1(mx_n+nx_m+nx_r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (79)$$

Amaç fonksiyonunun D matrisinin bütün parametrelerine göre ikinci türevi;

$$h_{1(mx_n+nx_m+nx_r+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial d_{11}} \\ = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\ \left\{ - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\} \\ - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - k_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} \quad (80)$$

$$h_{1(mx_n+nx_m+nx_r+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial d_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + u_2(\mu\tau) - u_2(t_0) \right\} - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - k_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \right\} \quad (81)$$

⋮

$$\begin{aligned}
h_{1(m \times n + n \times m + n \times r + r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \\
&\quad + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \left\{ -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ -k_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\} \right\} \quad (82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{1(m \times n + n \times m + n \times r + r + 1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial d_{21}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \\
&\quad - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ -k_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} \quad (83)
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
h_{1(m \times n + n \times m + n \times r + 2r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial d_{2r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{12} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{22} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n2} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \\
&\quad - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ -k_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\} \quad (84)
\end{aligned}$$

⋮

$$h_{1(m \times n + n \times m + n \times r + m \times r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[b_{11} b_{12} \cdots b_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ - \left[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
& \left. - 2 \sum_{\mu=1}^N e_i(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ - k_{1m} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\} \right\} \quad (85)
\end{aligned}$$

2.6.2. Amaç Fonksiyonunun c_{12} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

Amaç fonsiyonunun c_{12} ye göre birinci türevinin, tekrar bütün parametrelere göre ikinci türevi aşağıda gösterildiği gibi olacaktır.

$$h_{21} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{11}} = h_{12} \quad (86)$$

$$\begin{aligned}
h_{22} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{21} k_{22} \cdots k_{2m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{21} k_{22} \cdots k_{2m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
\left. + \left[b_{21} b_{22} \cdots b_{2r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \quad (87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{23} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{13}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{21} k_{22} \cdots k_{2m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{21} k_{22} \cdots k_{2m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
+ \left[b_{21} b_{22} \cdots b_{2r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ \left[k_{31} k_{32} \cdots k_{3m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{31} k_{32} \cdots k_{3m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
\left. + \left[b_{31} b_{32} \cdots b_{3r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (88)
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
h_{2n} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{1n}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{21} k_{22} \cdots k_{2m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{21} k_{22} \cdots k_{2m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
+ \left[b_{21} b_{22} \cdots b_{2r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ \left[k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
\left. + \left[b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} \quad (89)
\end{aligned}$$

$$h_{2(n+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{21}} = 0, h_{2(n+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{22}} = 0, \dots, h_{2(mn)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{nm}} = 0 \quad (90)$$

$$h_{2(mn+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial k_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \dots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \quad (91)$$

$$h_{2(mn+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial k_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \dots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \quad (92)$$

$$\vdots$$

$$h_{2(mn+m)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial k_{1m}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \dots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \quad (93)$$

$$\vdots$$

$$h_{2(mn+nm)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial k_{nm}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \dots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \dots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{1m} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \quad (94)$$

$$h_{2(\max + \max + 1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial b_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (95)$$

$$h_{2(\max + \max + 2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial b_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \quad (96)$$

⋮

$$h_{2(\max + \max + r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (97)$$

$$h_{2(\max + \max + r + 1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial b_{21}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (98)$$

⋮

$$h_{2(\max + \max + \max)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (99)$$

$$h_{2(\max + \max + \max + 1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial d_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2n}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2n}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + \right.$$

$$\left. u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (100)$$

$$\begin{aligned} h_{2(\underline{m}x\underline{n} + \underline{n}x\underline{m} + \underline{n}x\underline{r} + 2)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial d_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ &\quad \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + \\ &\quad \left. + u_2(\mu\tau) - u_2(t_0) \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \quad (101) \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} h_{2(\underline{m}x\underline{n} + \underline{n}x\underline{m} + \underline{n}x\underline{r} + r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ &\quad \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \\ &\quad \left. + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (102) \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} h_{2(\underline{m}x\underline{n} + \underline{n}x\underline{m} + \underline{n}x\underline{r} + \underline{m}x\underline{r})} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ &\quad \left. + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{2m} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (103)$$

2.6.3. Amaç Fonksiyonunun c_{13} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

Yukarıda Hessian matrisinin ilk iki satırı elemanlarının bulunuşu förmülleri ile birlikte verildi. Şimdi üçüncü satır elemanlarının bulunuşunun förmüllerini elde edelim.

$$h_{31} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{13} \partial c_{11}} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial c_{13}} = h_{13}$$

$$h_{32} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{13} \partial c_{12}} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{13}} = h_{23} \quad (104)$$

$$h_{33} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{13} \partial c_{13}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{31} k_{32} \cdots k_{3m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{31} k_{32} \cdots k_{3m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{31} b_{32} \cdots b_{3r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \quad (105)$$

$$h_{34} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{13} \partial c_{14}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{31} k_{32} \cdots k_{3m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{31} k_{32} \cdots k_{3m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{31} b_{32} \cdots b_{3r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ \left[k_{41} k_{42} \cdots k_{4m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{41} k_{42} \cdots k_{4m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{41} b_{42} \cdots b_{4r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (106)$$

⋮

$$h_{3n} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{13} \partial c_{1n}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{31} k_{32} \cdots k_{3m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{31} k_{32} \cdots k_{3m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{31} b_{32} \cdots b_{3r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ \left[k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (107)$$

$$h_{3(n+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{13} \partial c_{21}} = 0, h_{3(n+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{13} \partial c_{22}} = 0, \dots, h_{3(mn)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{13} \partial c_{mm}} = 0 \quad (108)$$

2.6.4. Amaç Fonksiyonunun c_{1n} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{n1} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial c_{11}} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial c_{1n}} = h_{1n}, \quad h_{n2} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial c_{12}} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial c_{1n}} = h_{2n} \quad (109)$$

⋮

$$h_{nm} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial c_{1m}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \quad (110)$$

$$h_{n(n+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial c_{21}} = 0, \quad h_{n(n2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial c_{2n}} = 0, \dots, h_{n(mxn)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial c_{mn}} = 0 \quad (111)$$

⋮

$$h_{n(mxn+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial k_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (112)$$

$$h_{n(mxn+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial k_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (113)$$

⋮

$$h_{n(mxn+m)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial k_{1m}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

$$+ [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (114)$$

$$h_{n(mx+n+nxm)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial k_{nm}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ \right. \\ \left. - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [d_{m1} d_{m2} \cdots d_{mr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \right\} \quad (115)$$

$$h_{n(mx+n+nxm+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial b_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (116)$$

⋮

$$h_{n(mx+n+nxm+r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (117)$$

$$h_{n(mx+n+nxm+r+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial b_{21}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{12} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (118)$$

⋮

$$h_{n(mx+n+nxm+nr)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt - 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (119)$$

$$\begin{aligned}
h_{n(mx+n+nxm+nxr+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial d_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{n1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt
\end{aligned} \tag{120}$$

⋮

$$\begin{aligned}
h_{n(mx+n+nxm+nxr+r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{n1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt
\end{aligned} \tag{121}$$

⋮

$$\begin{aligned}
h_{n(mx+n+nxm+nxr+mxr)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{1n} \partial d_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{nm} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt
\end{aligned} \tag{122}$$

2.6.5. Amaç Fonksiyonunun c_{21} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{(n+1)1} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial c_{11}} = 0, \dots, h_{(n+1)n} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial c_{1n}} = 0 \quad (123)$$

⋮

$$h_{(n+1)(n+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial c_{21}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{11} b_{12} \dots b_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 = h_{11} \quad (124)$$

$h_{(n+1)(n+1)}$ bağıntısına dikkat edilecek olursa h_{11} bağıntısına eşdeğerdir. Aynı şekilde $h_{(n+1)(n+2)} \dots h_{(n+1)(2n)}$ bağıntıları da aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır.

$$h_{(n+1)(n+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial c_{22}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{11} b_{12} \dots b_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ \left[k_{21} k_{22} \dots k_{2m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{21} k_{22} \dots k_{2m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{21} b_{22} \dots b_{2r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} = h_{12} \quad (125)$$

⋮

$$h_{(n+1)2n} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial c_{2n}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{11} b_{12} \dots b_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ \left[k_{n1} k_{n2} \dots k_{nm} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{n1} k_{n2} \dots k_{nm} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + \left[b_{n1} b_{n2} \dots b_{nr} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} = h_{1n} \quad (126)$$

$$h_{(n+1)(2n+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial c_{31}} = 0, \dots, h_{(n+1)(m \times n)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial c_{mn}} = 0 \quad (127)$$

$$h_{(n+1)(m \times n+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial k_{11}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}_1(t) dt - \left[d_{11} d_{12} \dots d_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\ + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \dots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + \left[b_{11} b_{12} \dots b_{1r} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

$$\left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

(128)

$$h_{(n+1)(mxn+nxm)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial k_{nm}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

(129)

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial b_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt - 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt$$

(130)

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt - 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt$$

(131)

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt$$

(132)

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial d_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (133)$$

⋮

$$\begin{aligned} h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \cdots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \cdots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \left[b_{11} b_{12} \cdots b_{nr} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ - \left[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\ &\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{aligned} \quad (134)$$

⋮

$$\begin{aligned} h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+mxr)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ \left[k_{11} k_{12} \cdots k_{1m} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \left[k_{11} k_{12} \cdots k_{1m} \right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \left[b_{11} b_{12} \cdots b_{nr} \right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ - \left[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\ &\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{1m} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{aligned} \quad (135)$$

2.6.6. Amaç Fonksiyonunun c_{mn} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen

Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{(mxn)1} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial c_{11}} = 0$$

⋮

$$h_{(mxn)n} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial c_{1n}} = 0$$

⋮

$$h_{(mxn)[(m-2)xn+n]} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial c_{(m-1)n}} = 0 \quad (136)$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn)(m-1)xn+1} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial c_{m1}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{11} k_{12} \cdots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{11} b_{12} \cdots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} = h_{1n} = h_{n1}
\end{aligned} \tag{137}$$

⋮

$$h_{(mxn)((m-1)n+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial c_{m2}} = h_{2n} = h_{n2} \tag{138}$$

⋮

$$h_{(mxn)(mxn)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial c_{mn}} = h_{nn} \tag{139}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn)(mxn+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial k_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}
\end{aligned} \tag{140}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn)(mxn+m)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial k_{1m}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m1} \cdots c_{m1}] \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}
\end{aligned} \tag{141}$$

⋮

$$h_{(mxn)(mxn+m+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial k_{21}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right.$$

$$\begin{aligned}
& + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \} \left\{ c_{m2} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& \vdots \tag{142}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n)(m \times n + 2m)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial k_{2m}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
& \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{m2} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& \vdots \tag{143}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n)(m \times n + nxm)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial k_{nm}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
& \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{nm} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& - 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \left\{ \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [d_{m1} d_{m2} \cdots d_{mr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \tag{144}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n)(m \times n + nxm + 1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial b_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
& \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \tag{145}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n)(m \times n + nxm + 2)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial b_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
& \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \tag{146}
\end{aligned}$$

$$h_{(m \times n)(m \times n + nxm + r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right.$$

$$+ [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (147)$$

$$h_{(m \times n)(m \times n + n \times m + r + 1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial b_{21}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m2} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (148)$$

$$h_{(m \times n)(m \times n + n \times m + 2r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial b_{2r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m2} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (149)$$

$$h_{(m \times n)(m \times n + n \times m + n \times r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{mm} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt - \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (150)$$

$$h_{(m \times n)(m \times n + n \times m + n \times r + 1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial d_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\ + 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{n1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (151)$$

$$h_{(m \times n)(m \times n + n \times m + n \times r + 2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial d_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\ \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\ + 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{n1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \quad (152)$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n)(m \times n + n \times m + n \times r + r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{n1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt
\end{aligned} \tag{153}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n)(m \times n + n \times m + n \times r + m \times r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mn} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + [b_{n1} b_{n2} \cdots b_{nr}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) \right. \\
&\quad \left. + u_r(t_0) \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) k_{nm} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt
\end{aligned} \tag{154}$$

2.6.7. Amaç Fonksiyonunun k_{11} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{(m \times n+1)1} = h_{1(m \times n+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial c_{11}}, \dots, h_{(m \times n+1)(m \times n)} = h_{(m \times n)(m \times n+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial c_{mn}} \tag{155}$$

⋮

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n+1)(m \times n+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial k_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2
\end{aligned}$$

$$+\dots\dots+2\sum_{\mu=1}^N\left\{c_{m1}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_1(t)dt-[c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}]\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\}^2 \quad (156)$$

$$h_{(m \times n+1)(m \times n+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial k_{12}} = 2\sum_{\mu=1}^N\left\{c_{11}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_1(t)dt-[c_{11}c_{12}\dots c_{1n}]\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\}$$

$$\left\{c_{11}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_2(t)dt-[c_{11}c_{12}\dots c_{1n}]\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\}+2\sum_{\mu=1}^N\left\{c_{21}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_1(t)dt\right. \\ \left.-[c_{21}c_{22}\dots c_{2n}]\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\}\left\{c_{21}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_2(t)dt-[c_{21}c_{22}\dots c_{2n}]\begin{bmatrix}d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\}+2\sum_{\mu=1}^N\left\{c_{m1}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_1(t)dt-[c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}]\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\} \\ \left\{c_{m1}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_2(t)dt-[c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}]\begin{bmatrix}d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\} \quad (157)$$

$$h_{(m \times n+1)(m \times n+m)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial k_{1m}} = 2\sum_{\mu=1}^N\left\{c_{11}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_1(t)dt-[c_{11}c_{12}\dots c_{1n}]\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\} \\ \left\{c_{11}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_m(t)dt-[c_{11}c_{12}\dots c_{1n}]\begin{bmatrix}d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\int_{t_0}^{\mu\tau}\underline{u}(t)dt\right\}+2\sum_{\mu=1}^N\left\{c_{21}\int_{t_0}^{\mu\tau}y_1(t)dt\right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \right] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ \right. \\
& \left. \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - \left[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \right] \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt \right. \\
& \left. - \left[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn} \right] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - \left[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn} \right] \right. \\
& \left. \left. \begin{bmatrix} d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \right\} \quad (158) \\
& h_{(m \times n+1)(m \times n+n \times m)} = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial k_{11} \partial k_{mm}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - \left[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n} \right] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - \left[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt \right. \\
& \left. - \left[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \right] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - \right. \\
& \left. \left[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (159)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+1)(mxn+nxm+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial b_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\
& + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (160)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+1)(mxn+nxm+r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \\
& + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (161)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n+1)(m \times n+n \times m+n \times r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt
\end{aligned} \tag{162}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n+1)(m \times n+n \times m+n \times r+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial d_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\} \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&\quad \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - \\
&\quad [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt + \dots \\
& \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt
\end{aligned} \tag{163}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+1)(mxn+nxm+nxr+r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
& \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{11} \\ 0 & 0 & \dots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} \\
& + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{11} \\ 0 & 0 & \dots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right. \right. \\
& \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{11} \\ 0 & 0 & \dots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& + 2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \\
& \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N e_2(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt
\end{aligned} \tag{164}$$

$$h_{(mxn+1)(mxn+nxm+nxr+mxr)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11}c_{12}\dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt \right. \\
& - [c_{21}c_{22}\dots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left. \right\} - [c_{21}c_{22}\dots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \\
& \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left. \right\} + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t) dt - [c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
& \left. \left\{ -[c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} \right. \quad (165)
\end{aligned}$$

2.6.8. Amaç Fonksiyonunun k_{12} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{(mxn+2)1} = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial k_{12} \partial c_{11}} = h_{1(mxn+2)}, \quad h_{(mxn+2)2} = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial k_{12} \partial c_{12}} = h_{2(mxn+2)} > \dots$$

$$h_{(mxn+2)(mxn)} = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial k_{12} \partial c_{12}} = h_{(mxn)(mxn+2)}, \quad h_{(mxn+2)(mxn+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial k_{12} \partial k_{11}} = h_{(mxn+1)(mxn+2)} \quad (166)$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+2)(mxn+2)} &= \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial k_{12} \partial k_{12}} = +2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11}c_{12}\dots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \\
&+ 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{21}c_{22}\dots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 + \dots \\
&\dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{m1}c_{m2}\dots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix} \right\}^2 \quad (167)
\end{aligned}$$

$$\left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (169)$$

$$\begin{aligned} h_{(mxn+2)(mxn+nxm+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{12} \partial b_{11}} = +2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\ &\quad \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \right\} \\ &\quad c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \end{aligned} \quad (170)$$

$$\begin{aligned} h_{(mxn+2)(mxn+nxm+r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{12} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \cdots \\ &\quad \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+2)(mxn+nxm+nxr)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{12} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
&+ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \\
&\cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt
\end{aligned} \tag{172}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+2)(mxn+nxm+nxr+1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{12} \partial d_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\} \\
&+ 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \\
&\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \right. \\
&\left. \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}
\end{aligned} \tag{173}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+2)(mxn+nxm+nxr+r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{12} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \Bigg\} \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_{21}(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \\
&\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \Bigg\} + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \Bigg\} \quad (174)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+2)(mxn+nxm+nxr+mxr)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{12} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_2(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \right. \\
&\quad \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \Bigg\} - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \\
&\quad \left. + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} \quad (175)
\end{aligned}$$

2.6.9. Amaç Fonksiyonunun k_{nm} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{(mxn+nxm)l} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial c_{11}} = h_{l(mxn+nxm)}, \quad h_{(mxn+nxm)2} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial c_{12}} = h_{2(mxn+nxm)} \quad (176)$$

$$h_{(mxn+nxm)(mxn+nxm)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial k_{nm}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \quad (177)$$

$$h_{(mxn+nxm)(mxn+nxm+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial b_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \quad (178)$$

$$h_{(mxn+nxm)(mxn+nxm+r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \dots$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \right. \right. \\
 & \left. \int_{t_0}^{\mu t} \underline{u}(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu t} u_r(t) dt \quad (179)
 \end{aligned}$$

$$h_{(m \times n + n \times m)(m \times n + n \times m + n \times r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu t} \underline{u}(t) dt \right\} c_{mn} \int_{t_0}^{\mu t} u_r(t) dt \quad (180)$$

$$h_{(m \times n + n \times m)(m \times n + n \times m + n \times r + 1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial d_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \right. \right. \\
& \left. \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& \quad \quad \quad (181)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+mxn)(mxn+mxn+mxr+mxr)} &= \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial k_{mn} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \right. \\
& \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt \right. \right. \\
& \left. \left. - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \right. \\
& \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
& \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\} \\
& \left\{ - [c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \\
& \quad \quad \quad (182)
\end{aligned}$$

2.6.10. Amaç Fonksiyonunun b_{11} 'e Göre Birinci Türevinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{(mxn+nxm+1)1} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial c_{11}} = h_{1(mxn+nxm+1)} > \dots, h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial k_{nm}} = h_{(mxn+nxm)(mxn+nxm+1)} \quad (183)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial b_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\}^2 + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\}^2 + \dots$$

$$\dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\}^2 \quad (184)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial b_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\}$$

$$c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \quad (185)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+r)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial b_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\}$$

$$c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (186)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+mx)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial b_{1m}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} c_{1m} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\}$$

$$c_{2m} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} c_{mm} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (187)$$

2.6.11. Amaç Fonksiyonunun $b_{11} \dots b_{nr}$ 'e Göre Birinci Türevlerinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{(mxn+nxm+2)(mxn+nxm+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{12} \partial b_{11}} = h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+2)} \quad (188)$$

$$h_{(mxn+nxm+2)(mxn+nxm+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{12} \partial b_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \right\}^2 + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \right\}^2 + \dots$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \right\}^2 \quad (189)$$

$$h_{(mxn+nxm+2)(mxn+nxm+nxr)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{12} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \right\} c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \right\} c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_2(t) dt \right\} c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \quad (190)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr)(mxn+nxm+nxr)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{nr} \partial b_{nr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\}^2 + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{2n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\}^2 + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\}^2 \quad (191)$$

2.6.12. Amaç Fonksiyonunun $d_{11} \dots d_{mr}$ 'e Göre Birinci Türevlerinin Bilinmeyen Parametrelere Göre Türevleri

$$h_{(mxn+nxm+nxr+1)1} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial c_{11}} = h_{1(mxn+nxm+nxr+1)}$$

$$\vdots$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+1)(mxn+nxm+nxr)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial b_{nr}} = h_{(mxn+nxm+nxr)(mxn+nxm+nxr+1)} \quad (192)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+1)(mxn+nxm+nxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial d_{11}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_1(\mu\tau) + u_1(t_0) \right\}^2 + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{21} c_{22} \dots c_{2n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 + \dots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \dots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \quad (193)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+1)(mxn+nxm+nxr+2)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial d_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11} c_{12} \dots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \left\{ -[c_{11}c_{12}\cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_2(\mu\tau) - u_2(t_0) \right\} \\
& + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{21}c_{22}\cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{21}c_{22}\cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
& \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1}c_{m2}\cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{m1}c_{m2}\cdots c_{mn}] \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (194)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+rxm+nxr+1)(mxn+rxm+nxr+r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11}c_{12}\cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
& \left. + u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \right\} - [c_{11}c_{12}\cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \left\{ \right. \\
& + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{21}c_{22}\cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{21}c_{22}\cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \\
& \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \left\{ + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1}c_{m2}\cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} - [c_{m1}c_{m2}\cdots c_{mn}] \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \quad (195)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+nxm+nxr+1)(mxn+nxm+nxr+mxr)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&+ u_1(\mu\tau) - u_1(t_0) \left. \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \right. \\
&\left. \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + \cdots \\
&+ 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \right. \\
&\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} \quad (196)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(mxn+nxm+nxr+2)1} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{12} \partial c_{11}} = h_{1(mxn+nxm+nxr)(mxn+nxm+nxr+2)} \\
h_{(mxn+nxm+nxr+2)(mxn+nxm+nxr+2)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{12} \partial d_{12}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&+ u_2(\mu\tau) - u_2(t_0) \left. \right\}^2 + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 + \cdots \\
&\cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \quad (197)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n + n \times m + n \times r + 2)(m \times n + n \times m + n \times r + m \times r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial d_{12} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + u_2(\mu\tau) - u_2(t_0) \right\} \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \right. \\
&\quad \left. \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} + \cdots \\
&\quad + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & k_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\} \quad (198)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{(m \times n + n \times m + n \times r + r)(m \times n + n \times m + n \times r + r)} &= \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial d_{1r} \partial d_{1r}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right. \\
&\quad \left. + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\}^2 + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{21} c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 + \cdots \\
&\quad \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mm}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{11} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{21} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n1} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 \quad (199)
\end{aligned}$$

$$h_{(m \times n + n \times m + n \times r + m \times r)(m \times n + n \times m + n \times r + m \times r)} = \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial d_{mr} \partial d_{mr}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{21}c_{22} \cdots c_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\}^2 + \cdots + 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1}c_{m2} \cdots c_{mn}] \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + u_r(\mu\tau) - u_r(t_0) \right\}^2 \quad (200)
\end{aligned}$$

2.6.13. Hessian Matrisinin Oluşturulması

Amaç fonksiyonunun ikinci türevleri, yukarıdaki bağıntılardan yararlanılarak elde edilir. Hessian matrisinin elemanları bu türevlerden oluşmaktadır. Hessian matrisinin oluşturduğu form daha açık olarak; kendi içerisinde alt matrislere ayrılarak, aşağıdaki biçimde gösterilebilir:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_5 & h_6 & h_7 & h_8 \\ h_9 & h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} \end{bmatrix} \quad (201)$$

Burada h_1 alt matrisi; $c_{11}, \dots, c_{12}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mn}$ parametrelerinin birbirine göre ikinci türevinden oluşur. Köşegeni üzerinde $n \times n$ boyutlu, m tane alt matris bulunmaktadır ve diğer elemanları tamamen sıfır değerine sahiptir.

$c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1}$ parametrelerinin; $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{nm}$ parametrelerine göre ikinci türevleri h_2 alt matrisini, $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{mr}$ parametrelerine göre ikinci türevleri h_3 alt matrisini, $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{mr}$ parametrelerine göre ikinci türevleri h_4 alt matrisini oluşturur.

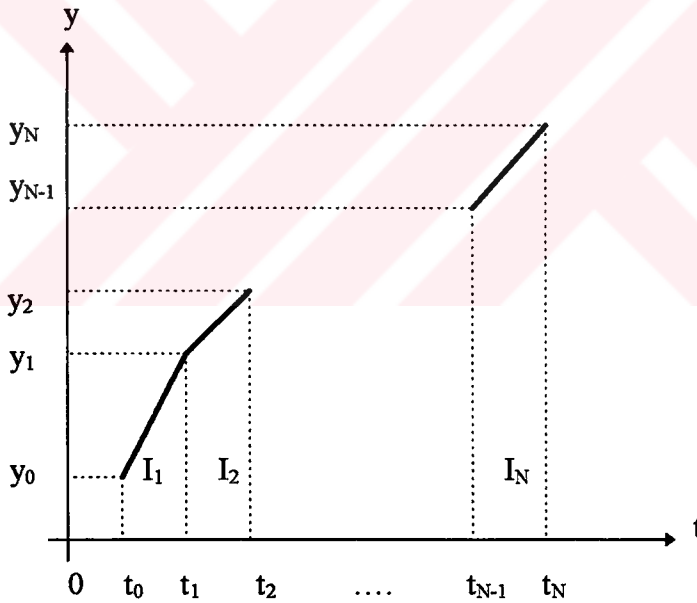
h_6 alt matrisi; $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{nm}$ parametrelerinin yine aynı parametrelere göre ikinci türevinden, h_7 alt matrisi, $k_{11}, \dots, k_{nm}$ parametrelerinin $b_{11}, \dots, b_{mr}$ parametrelerine göre ikinci türevinden, h_8 alt matrisi; $k_{11}, \dots, k_{nm}$ parametrelerinin $d_{11}, \dots, d_{12}, \dots, d_{mr}$ parametrelerine göre ikinci türevinden oluşturulur.

h_{11} matrisi; $b_{11}, \dots, b_{mr}$ parametrelerinin yine kendilerine göre ikinci türevlerinden, h_{12} matrisi de; $b_{11}, \dots, b_{mr}$ parametrelerinin $d_{11}, \dots, d_{mr}$ parametrelerine göre ikinci türevlerinden ve h_{16} matrisi ise $d_{11}, \dots, d_{mr}$ parametrelerinin kendilerine göre ikinci türevlerinden oluşmaktadır. Diğer alt matrisler ise aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
h_5[i,j] &= h_2[j,i] & i=1,\dots,nxm \text{ ve } j=1,\dots,mxn \\
h_9[i,j] &= h_3[j,i] & i=1,\dots,nxr \text{ ve } j=1,\dots,mxn \\
h_{13}[i,j] &= h_4[j,i] & i=1,\dots,mxr \text{ ve } j=1,\dots,mxn \\
h_{10}[i,j] &= h_7[j,i] & i=1,\dots,nxr \text{ ve } j=1,\dots,nxm \\
h_{14}[i,j] &= h_8[j,i] & i=1,\dots,mxr \text{ ve } j=1,\dots,nxm \\
h_{15}[i,j] &= h_{12}[j,i] & i=1,\dots,mxr \text{ ve } j=1,\dots,nxr
\end{aligned} \tag{202}$$

2.7. NOKTASAL DATALARA GÖRE İNTEGRAL HESABI

Hessian matrisinin ve q vektörünün elemanlarının elde edilmesi için çıkartılan (19) ve (18) förmüllerine bakıldığında ; girişlerin ve çıkışların integral değerlerinin hesaplanması gerektiği görülür. Bu çalışmada giriş ve çıkış işaretlerinin belirli bir τ zaman artımı ile N tane değeri noktasal olarak bilinmektedir.



Şekil 2. Noktasal data'lara göre integral hesabı

Şek.2. deki gibi, $t_0 \leq t \leq t_N$ zaman aralığında verilen bir y eğrisinin integral değeri

$$I = \int_{t_0}^{t_N} y(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} y(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} y(t)dt + \dots + \int_{t_{N-1}}^{t_N} y(t)dt \tag{203}$$

olarak belirlenir. Fakat bu çalışmada; giriş ve çıkış değerleri, belirli τ aralığı ile noktasal olarak bilinmektedir. $t_0 \leq t \leq t_N$ zaman aralığı N tane dilime bölerek elde edilen her bir dilimdeki eğri parçasını, bir doğru parçası olarak alırsak; her bir dilimin alanı bir yamuğun alanına eşit olacaktır.

$$1. \text{Yamuğun alanı } I_1 = \frac{\tau}{2}(y_0 + y_1)$$

$$2. \text{Yamuğun alanı } I_2 = \frac{\tau}{2}(y_1 + y_2)$$

⋮

$$N. \text{Yamuğun alanı } I_N = \frac{\tau}{2}(y_{N-1} + y_N) \quad (204)$$

τ aralığı ne kadar küçük olursa oluşacak olan hata o kadar minimuma indirilir. $[t_0 - t_N]$ zaman aralığındaki toplam alan; istenilen integral sonucunu verecektir.

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t_N} y(t)dt = I_1 + I_2 + \dots + I_N = \frac{\tau}{2}(y_0 + y_1) + \frac{\tau}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{\tau}{2}(y_{N-1} + y_N) \\ &= \frac{\tau}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1}) + y_N] \end{aligned} \quad (205)$$

(205) bağıntısı ile integral alma yöntemi, yamuk kuralı olarak adlandırılır. Bu çalışmada istenilen giriş ve çıkış datalarının integralleri, yamuk kuralı kullanılarak belirlenir. $\tau=0.01$ olarak alındığı için, alınan integrallerde oluşan hata gözlenemeyecek kadar azdır.

2.8. ÇIKIŞLARDA OLUŞAN YANILGININ LEGENDRE FONKSİYONU İLE AZALTILMASI

(2) bağıntısı ile tanımlanan $y(t)$ çıkış matrisi kullanılarak, $\underline{x}(t)$ durum vektörünün çözümü bulunmaya çalışılır. Burada $y(t)$ bilinenler vektörünün boyutu m ve $\underline{x}(t)$ bilinmeyenler vektörünün boyutu n ile gösteriliyor. Durum modeli ile ifade edilen dizgelerde $m < n$ olduğundan dolayı (2) bağıntısındaki denklem takımında; denklem sayısı az, fakat bilinenler fazladır. Burada sorun; az denklem kullanarak; fazla sayıdaki bilinmeyenlerin elde edilmesidir. Minimum norm çözümü kullanılarak, mümkün olabildiğince minimum yanılğı ile durum vektörlerinin çözümü bulunmaya çalışılır.

(2) bağıntısı kullanılarak $\underline{x}(t)$ durum vektörü; minimum norm çözümü ile [22]

$$\underline{x}(t) = C^{-1} \underline{y}(t) + C^{-1} D \underline{u}(t) \quad (206)$$

olarak elde edilir. Burada $m < n$ olduğundan C^{-1} , C matrisinin sağ-yalancı tersi olacaktır. Bu durumda hesaplanan durum vektörü, özgününe göre yanılğılı olacaktır. $\underline{x}(t)$ durum vektörü; yanılğı vektörü ve minimum norm çözümü olarak iki bileşene ayrılabilir.

$$\underline{x}(t) = C^{-1}\underline{y}(t) + C^{-1}D\underline{u}(t) + \underline{z}(t) = \hat{\underline{x}}(t) + \underline{z}(t) \quad (207)$$

$\hat{\underline{x}}(t)$ minimum norm çözümünü ve $\underline{z}(t)$ yanılğı vektörünü göstermektedir.

Doğrusal zamanla değişmeyen, sabit parametrelili bir dizge modelinin parametrelerinin kestirimi amacıyla; yukarıda anlatılan dört algoritmada; C matrisi bir kare matris iken; $\phi(\theta)$ amaç fonksiyonunun son iterasyondaki değeri oldukça küçük değere (sıfır sayılabilir) ulaşmaktadır. Parametrelere ait başlangıç değerleri, gerçek çözümlerden oldukça uzak olmasına karşın; kestirilen parametreler, özgün model parametrelerine oldukça yakın veya farklı bir eşdeğer model parametreleri olarak elde edilmektedir. Kestirilen eşdeğer model parametreleri kullanılarak elde edilen çıkış değerleri, özgün dizgenin çıkış değerlerine oldukça yakındır. ($\phi(\theta) \leq 10^{-5}$ veya 10^{-5} olabilir.)

Fakat, C matrisi dikdörtgen matris olduğu durumda; $\phi(\theta)$ amaç fonksiyonu oldukça büyük bir değere yakınsamakta ve kestirilen parametreler özgününe göre biraz hatalı bulunmaktadır. Amaç fonksiyonunun değerini olabildiğince minimuma indirmek ve parametre hatalarını azaltmak amacıyla; (207) da verilen bağıntıdaki $\underline{z}(t)$ vektörünün de $\underline{x}(t)$ durum vektörüne eklenmesi düşünülmüştür. $\underline{z}(t)$ vektörünün $\underline{y}(t)$ çıkış vektöründe oluşturduğu yanılğının $\underline{P}(t)$ vektör polinomu biçiminde olduğu varsayıldı. Bu polinomlar, 7. dereceden Legendre polinomları [23] ile ifade edilerek; $\phi(\theta)$ amaç fonksiyonunun değerinin minimum yapılması ve kestirilen parametrelerin daha doğru bir değerde olması sağlanmış olur. $\underline{P}(t)$ vektöründeki bir i. polinomun; 7. dereceden Legendre polinomu olarak ifadesi

$$\begin{aligned} P_i(t) = & A_{i0}P_{i0}(t) + A_{i1}P_{i1}(t) + A_{i2}P_{i2}(t) + A_{i3}P_{i3}(t) + A_{i4}P_{i4}(t) + A_{i5}P_{i5}(t) \\ & + A_{i6}P_{i6}(t) + A_{i7}P_{i7}(t) \end{aligned} \quad (208)$$

olarak yazılır. Burada $P_{i0}(t), P_{i1}(t), \dots, P_{i7}(t)$ fonksiyonları (i. çıkış için)

$$P_{i0}(t) = 1$$

$$P_{i1}(t) = t$$

$$P_{i2}(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

$$P_{i3}(t) = \frac{1}{2}5t^3 - 3t$$

$$\begin{aligned}
P_{i4}(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \\
P_{i5}(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t) \\
P_{i6}(t) &= \frac{1}{6}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5) \\
P_{i7}(t) &= \frac{1}{6}(429t^7 - 693t^5 + 315t^3 - 35t)
\end{aligned} \tag{209}$$

biçiminde ifade edilir. Legendre polinomları için:

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = 0, \quad m \neq n \tag{210}$$

$$\int_{-1}^1 \{P_n(t)\}^2 dt = \frac{2}{2n+1} \tag{211}$$

bağıntısı yazılabilir. Bu polinomlar $-1 \leq t \leq 1$ aralığında sınırlıdır. Yapılan çalışmada ise; zaman aralığı farklı dilimlerde olacaktır. Örneğin; $0 \leq t_i \leq 5\text{sn}$ aralığında işlem yapmak için; 500 data kullanan ve dataların örneklendiği zaman aralığı 0.01sn olan bir örnekte

$$t = \frac{t_i - \frac{500 \times 0.01}{2}}{\frac{500 \times 0.01}{2}} = \frac{t_i - 2.5}{2.5} \tag{212}$$

dönüşümü ile zaman aralığı $-1 \leq t \leq 1$ olarak düzenlenir.

(211) bağıntısının normalize edilmiş hali

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \{P_n(t)\}^2 dt = 1 \tag{213}$$

olacaktır ve

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^1 P_n(t) dt = 1 \tag{214}$$

dir. Bu çalışmada ise Legendre polinomlarının normalize hali kullanılacaktır. Legendre polinomları ile ifade edilen yanılğı vektörünün $y(t)$ çıkış vektörlerine eklenmesi halinde; bilinmeyenlerin sayısı $8 \times m$ tane daha artacaktır. $y(t)$ vektörüne eklenecek $\underline{P}(t)$ vektörü

$$\underline{P}(t) = \begin{bmatrix} A_{10}P_{10}(t) + A_{11}P_{11}(t) + A_{12}P_{12}(t) + \dots + A_{16}P_{16}(t) + A_{17}P_{17}(t) \\ \vdots \\ A_{m0}P_{m0}(t) + A_{m1}P_{m1}(t) + A_{m2}P_{m2}(t) + \dots + A_{m6}P_{m6}(t) + A_{m7}P_{m7}(t) \end{bmatrix} \quad (215)$$

biçimindedir. Bu durumda; parametrelerin birinci türevlerinin alınmasıyla oluşan vektöre; $A_{10}, A_{11}, \dots, A_{17}, \dots, A_{m0}, \dots, A_{m1}, \dots, A_{m7}$ bilinmeyenlerinin türevleri de eklenecektir. $\phi(\underline{\theta})$ amaç fonksiyonunun bu bilinmeyenlere göre birinci türevleri;

$$\begin{aligned} q_{m \times n + n \times m + n \times r + m \times r + 1} &= \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{10}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) P_{10}(t) \\ &\vdots \\ q_{m \times n + n \times m + n \times r + m \times r + 8} &= \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{17}} = -2 \sum_{\mu=1}^N e_1(\mu\tau, \underline{\theta}) P_{17}(t) \\ &\vdots \\ q_{m \times n + n \times m + n \times r + m \times r + m \times 8} &= \frac{\partial \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{m7}} = -2 \sum_{M=1}^N e_m(\mu\tau, \underline{\theta}) P_{m7}(t) \end{aligned} \quad (217)$$

olarak alınır. Legendre fonksiyonlarının katsayılarının bilinmeyen bütün parametrelere göre ikinci türevleri de aşağıdaki gibi alınır.

$$\begin{aligned} h_{1(m \times n + n \times m + n \times r + m \times r + 1)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial A_{10}} = 2 \left\{ [k_{11} k_{12} \dots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ &\quad \left. - [k_{11} k_{12} \dots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \dots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} P_{10}(t) \end{aligned} \quad (218)$$

$$\begin{aligned} h_{1(m \times n + n \times m + n \times r + m \times r + 8)} &= \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial A_{17}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{11} k_{12} \dots k_{1m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ &\quad \left. - [k_{11} k_{12} \dots k_{1m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{11} b_{12} \dots b_{1r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} P_{17}(t) \end{aligned} \quad (219)$$

$$h_{1(m \times n + n \times m + n \times r + m \times r + 8 + 1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial A_{20}} = 0$$

$\vdots$

$$h_{1(mxn+nxm+nxr+mxr+16)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial A_{27}} = 0$$

⋮

$$h_{1(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{11} \partial A_{m7}} = 0 \quad (220)$$

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial A_{10}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} p_{10}(t) \quad (221)$$

$$h_{2(mxn+nxm+nxr+mxr+8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{12} \partial A_{17}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} p_{17}(t) \quad (222)$$

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial A_{10}} = 0$$

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial A_{17}} = 0 \quad (223)$$

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial A_{20}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt - \right. \\ \left. [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} P_{20}(t) \quad (224)$$

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial A_{27}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right. \\ \left. - [k_{21} k_{22} \cdots k_{2m}] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt + [b_{21} b_{22} \cdots b_{2r}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} P_{27}(t) \quad (225)$$

$$h_{(n+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{21} \partial A_{m7}} = 0 \quad (226)$$

$$h_{(mxn)(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial c_{mm} \partial A_{m7}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ [k_{n1} k_{n2} \cdots k_{nm}] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{y}(t) dt \right.$$

$$-\left[k_{n1}k_{22}\cdots k_{nm}\right] D \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt + \left[b_{n1}b_{n2}\cdots b_{nr}\right] \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \} P_{m7}(t) \quad (227)$$

$$h_{(mxn+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial A_{10}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1(t)dt \right. \\ \left. - \left[c_{11}c_{12}\cdots c_{1n} \right] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} P_{10}(t) \quad (228)$$

$$h_{(mxn+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial A_{17}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_1 t(dt) \right. \\ \left. - \left[c_{11}c_{12}\cdots c_{1n} \right] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} P_{17}(t) \quad (229)$$

$$h_{(mxn+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+9)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial A_{20}} = 0$$

⋮

$$h_{(mxn+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial A_{m7}} = 0$$

⋮

$$h_{(mxn+nxm)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial A_{10}} = 0 \quad (230)$$

$$h_{(mxn+nxm)(mxn+nxm+nxr+mxr+[m-1]x8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{11} \partial A_{(m-1)7}} = 0 \quad (231)$$

$$h_{(mxn+nxm)(mxn+nxm+nxr+mxr+[m-1]x8+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial A_{m0}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t)dt \right.$$

$$-\left[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \Bigg\} P_{m0}(t) \quad (232)$$

$$h_{(mxn+nxm)(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial k_{nm} \partial A_{m7}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} y_m(t) dt \right. \\ \left. - \left[c_{m1} c_{m2} \cdots c_{mn} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t) dt \right\} P_{m7}(t) \quad (233)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial A_{10}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} P_{10}(t) \quad (234)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial A_{17}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{11} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} P_{17}(t) \quad (235)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+9)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial A_{20}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} P_{20}(t) \quad (236)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+16)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial A_{27}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{21} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} P_{27}(t) \quad (237)$$

$$h_{(mxn+nxm+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{11} \partial A_{m7}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{m1} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_1(t) dt \right\} P_{m7}(t) \quad (238)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{nr} \partial A_{10}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{1n} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\} P_{10}(t) \quad (239)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr)(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial b_{nr} \partial A_{m7}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ c_{mn} \int_{t_0}^{\mu\tau} u_r(t) dt \right\} P_{m7}(t) \quad (240)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial A_{10}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ - \left[c_{11} c_{12} \cdots c_{1n} \right] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt + u_1(t) - u_1(0) \right\} P_{10}(t) \quad (241)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+1)(mxn+nxm+nxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial A_{17}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11}c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt + u_1(t) - u_1(0) \right\} P_{17}(t) \quad (242)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+1)(mxn+nxm+nxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{11} \partial A_{m7}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1}c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} P_{m7}(t) \quad (243)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{mr} \partial A_{10}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{11}c_{12} \cdots c_{1n}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt \right\} P_{10}(t) \quad (244)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial d_{mr} \partial A_{m7}} = 2 \sum_{\mu=1}^N \left\{ -[c_{m1}c_{m2} \cdots c_{mn}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & k_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nm} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \int_{t_0}^{\mu\tau} \underline{u}(t)dt + u_r(t) - u_r(0) \right\} P_{m7}(t) \quad (245)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{10} \partial A_{10}} = 2 \sum_{\mu=1}^N P_{10}(t) \cdot P_{10}(t) \quad (246)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{10} \partial A_{17}} = 2 \sum_{\mu=1}^N P_{10}(t) P_{17}(t) \quad (247)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr+1)(mxn+nxm+nxr+mxr+9)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{10} \partial A_{20}} = 0 \quad (248)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr+2)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{11} \partial A_{10}} = 2 \sum_{\mu=1}^N P_{11}(t) P_{10}(t) \quad (249)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{m7} \partial A_{10}} = 0 \quad (250)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)(mxn+nxm+nxr+mxr+1)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{m7} \partial A_{11}} = 0 \quad (251)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)[mxn+nxm+nxr+mxr+(m-1)8+1]} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{m7} \partial A_{m0}} = 2 \sum_{\mu=1}^N P_{m7}(t) P_{m0}(t) \quad (252)$$

$$h_{(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)(mxn+nxm+nxr+mxr+mx8)} = \frac{\partial^2 \phi(\underline{\theta})}{\partial A_{m7} \partial A_{m7}} = 2 \sum_{\mu=1}^N P_{m7}(t) P_{m7}(t) \quad (253)$$

Bu bağıntıların kullanılması ile amaç fonksiyonunun parametrelere göre birinci türevlerinden oluşan $\underline{q}$ vektörünün ve parametrelerin ikinci türevinden oluşan Hessian matrisinin boyutları oldukça büyümetedir.

Bu çalışmada Legendre polinomlarının kullanıldığı ve kullanılmadığı durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Bu inceleme sonuçları daha sonra anlatılacaktır.

2.9. FARKLI EŞDEĞER MODELLERİN BULUNMASI

(1) ve (2) bağıntıları ile tanımlanan özgün dizgenin durum değişkenleri vektörü $\underline{x}(t)$ ile bu özgün dizgenin farklı bir eşdeğer modelinin durum değişkenleri $\hat{\underline{x}}(t)$ arasında [24,25],

$$\hat{\underline{x}}(t) = P \underline{x}(t) \quad (254)$$

ilişkisi bulunmaktadır. P , $n \times n$ boyutunda singüler olmayan ve (254) ilişkisini sağlayan bir dönüşüm matristir. Burada özgün dizgeye ait durum vektörü,

$$\underline{x}(t) = P^{-1} \hat{\underline{x}}(t) \quad (255)$$

olarak elde edilir . (255) bağıntısı durum ve çıkış denkleminde yerleştirilirse;

$$\hat{\underline{x}}(t) = PAP^{-1} \hat{\underline{x}}(t) + PB\underline{u}(t) \quad (256)$$

$$\underline{y}(t) = CP^{-1} \hat{\underline{x}}(t) + D\underline{u}(t) \quad (257)$$

bağıntıları elde edilir ve bu bağıntılar farklı değerlere sahip eşdeğer model parametreleri oluşturmaktadır. Durum modeli ise,

$$\hat{\underline{x}}(t) = \bar{A} \hat{\underline{x}}(t) + \bar{B}\underline{u}(t) \quad (258)$$

$$\underline{y}(t) = \bar{C} \hat{\underline{x}}(t) + \bar{D}\underline{u}(t) \quad (259)$$

biçiminde yazılabilir. Burada durum modeli parametreleri,

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}, \quad \bar{D} = D \quad (260)$$

olarak alındı.

3. BULGULAR

3.1. GELİŞTİRİLEN YÖNTEMİN PERFORMANS ANALİZLERİ

Bu çalışmada, durum modeli parametreleri bilinmeyen, doğrusal zamanla değişmeyen, çok girişli çok çıkışlı dizgelerin parametrelerinin kestirimi amacıyla; durum vektörü ve çıkış vektörü tek bir vektör ile ifade edildi. Bu vektörde farklı boyutlara sahip olan durum ve çıkış vektörleri, tek bir çıkış vektörü altında toplanmıştır. Girişler ve çıkışlar arasındaki ilişkiyi veren bu vektör, bilinmeyen parametrelere ve belirli zaman aralıklarıyla ölçülebilen giriş-çıkış datalarına bağlı olarak ifade edilmektedir. Ölçülen çıkış dataları ile kestirilen modelin çıkış dataları arasındaki farkı en küçük kareler yöntemi ile minimum yapan parametre değerleri kestirilen parametreler olacaktır.

Oluşturulan bu amaç fonksiyonunu minimum yapmak amacıyla; Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmaları kullanıldı. Herbir algoritmaya göre elde edilen parametrelere göre durum modelleri oluşturuldu. Durum denklemleri çözülerek, belirli τ aralıklarıyla çıkış dataları hesaplandı. Burada kullanılan bütün algoritmalara ait çıkış tepkisi çözümleri ($y(t)$ çıkış eğrileri) aynı eksen takımı üzerinde gösterildi. Parametre kestirimi için, farklı seviyelerde toplamsal Beyaz Gauss gürültüsü ilave edilerek ve farklı başlangıç koşullarında uygulamalar yapılarak, karşılaştırmalı performans analizi gerçekleştirildi. Ayrıca parametre kestiriminde kullanılan data sayısının, gürültülü ve gürültüsüz durumda algoritmaların performansına etkisi araştırıldı. Dizgelere değişik giriş işaretleri uygulanarak, algoritmaların giriş işaretlerine göre performansı ve duyarlılığı incelendi. Özgün dizgenin çıkış eğrileri ile kestirilen parametreler kullanılarak hesaplanan çıkış eğrileri arasındaki yanılğı fazla olduğu durumda, çıkışlara Legendre fonksiyonları ilave edilerek yanılğı azaltılmaya çalışılmıştır.

3.2. C MATRİSİNİN KARE MATRİS OLDUĞU DURUMDA SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI

3.2.1. Data Sayısına Göre Performans Analizi

Bu uygulamada, farklı data sayıları kullanılarak; data sayısının kestirilen parametrelerin doğruluğuna olan etkisi incelenmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada anlatılan

parametre kestirim algoritmalarının hepsinde aynı sonuç elde edildiğinden, bu örnek için Marquardt-Levenberg algoritması ile elde edilen sonuçlar verilmektedir. Durum modeli,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanan ve girişine birim basamak işlevi uygulanan tek girişli-iki çıkışlı bir dizge ele alındı.

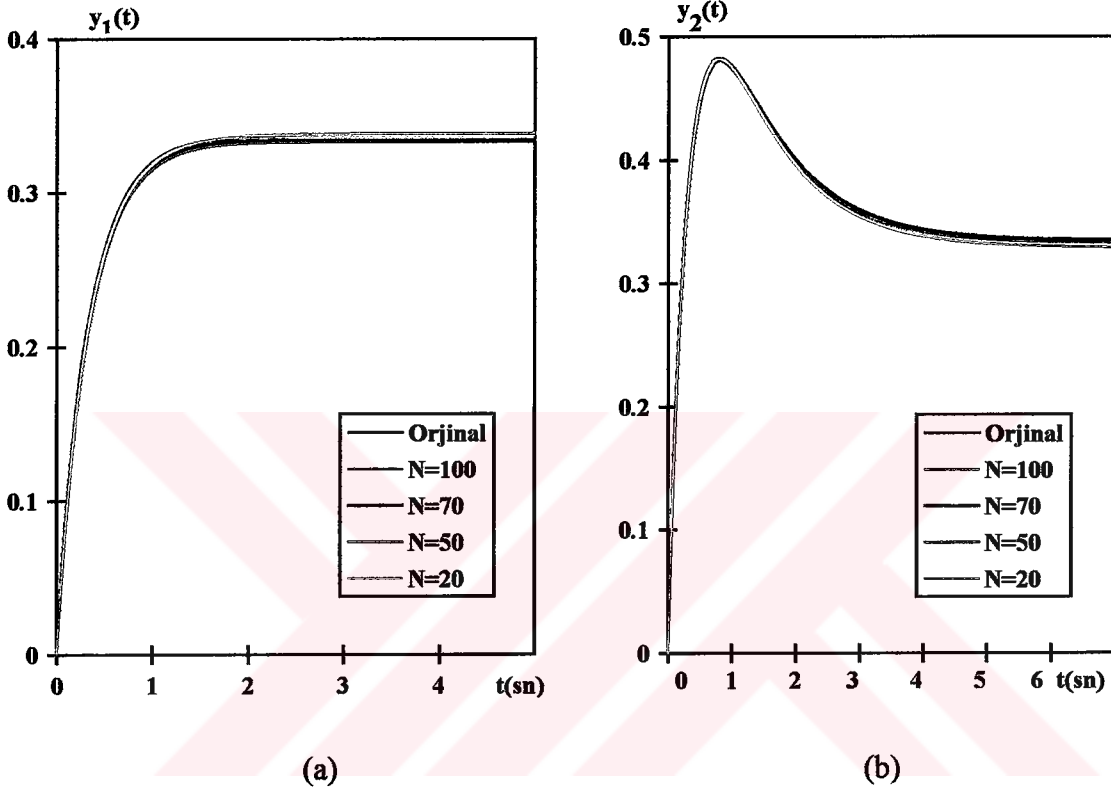
Çıkış değerlerinin gürültüsüz olması durumunda farklı data sayılarına göre, bilinmeyen parametrelerin kestirimi ayrı ayrı yapılmış ve bu sonuçlar Tablo 1' de ayrıntılı olarak verilmiştir. Sonuçlardan görüldüğü gibi, kullanılan data sayısı arttıkça parametre değerleri gerçek değere oldukça yakınsar.

Tablo 1. Farklı ölçüm değerlerine göre parametre kestirim sonuçları

Parametre	Gerçek değer	N=100	Kestirim N=70	değerleri N=50	N=20
a ₁₁	0	-0.0002	-0.0002	-0.0020	0.0001
a ₁₂	1	1.0010	1.0007	0.9999	0.9999
a ₂₁	-3	-2.9999	-2.9899	-2.9899	-2.9799
a ₂₂	-4	-3.9999	-3.9999	-3.9899	-3.9899
b ₁₁	0	0.0003	0.0001	0.0030	0.0100
b ₂₁	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
c ₁₁	1	1.0004	1.0010	1.0060	0.9999
c ₁₂	1	1.0009	1.0080	1.0050	0.9899
c ₂₁	1	1.0003	1.0010	0.9999	0.9999
c ₂₂	2	2.0010	2.0017	2.0140	1.9999

Belirlenen bu parametreler kullanılarak, kestirilen dizgenin durum denklemleri oluşturulur ve oluşturulan durum denklemleri çözümlenerek $\tau=0.01$ sn aralıklarla $y_1(\mu\tau)$ ve $y_2(\mu\tau)$, $\mu=1,\dots,N$ değerleri elde edilir. Her τ zaman aralığında yapılan ölçümlerde $y_1(\mu\tau)$ ve $y_2(\mu\tau)$, değerlerinin doğru olarak elde edilmesi gerekmektedir. Gürültüsüz durumda elde edilen $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkış tepkisi eğrileri, data sayısı $N=100$, $N=70$, $N=50$ ve $N=20$ için çizilerek, özgün dizge ile aynı zaman eksenini üzerinde Şekil 3.a ve Şekil 3.b' de gösterilmiştir.

Bu şekillerden görüldüğü gibi; özgün dizgenin $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkış eğrileri ile data sayısı $N=100$ ve $N=70$ iken kestirilen dizge çıkış eğrileri, yanılıgsız olarak üst üste çakışmaktadır. $N=50$ ve $N=20$ iken elde edilen çıkış eğrileri ise yanılıklı olmaktadır. En fazla yanılı $N=20$ data sayısı kullanıldığı çıkış eğrilerinde olmaktadır.



Şekil 3. Gürültüsüz durumda

- a) Özgün dizge, $N=100$, $N=70$, $N=50$ ve $N=20$ için $y_1(t)$ çıkış tepkeleri
b) Özgün dizge, $N=100$, $N=70$, $N=50$ ve $N=20$ için $y_2(t)$ çıkış tepkeleri

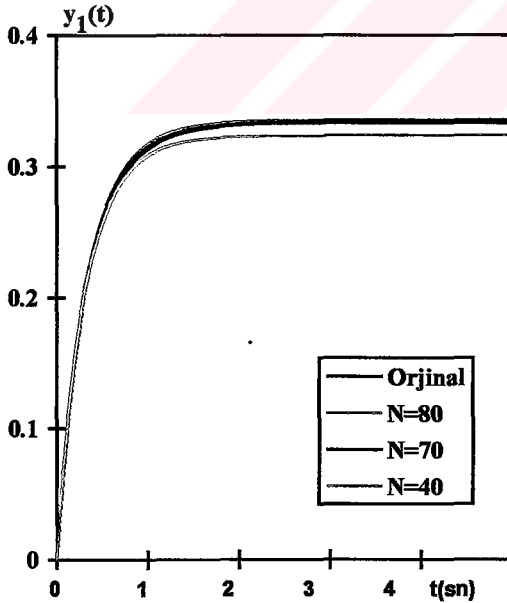
Gürültülü durumda kullanılan data sayısının kestirilen parametrelere ve dolayısıyla çıkışlara etkisini gözlemek amacıyla; durum modeli parametreleri, model çıkışlarına her defasında aynı oranda gürültü eklenerek 20 farklı örnek datası için 20 kere kestirildi ve bu 20 parametre değerlerinin ortalaması alındı. İşaret/gürültü oranı, çıkıştaki işaret enerjisinin, gürültü değişintisine oranı olarak tanımlandı. Burada, standart sapması $\sigma=0.005$ olan toplamsal Beyaz Gauss gürültüsü eklenmesi durumunda, yine Marquardt-Levenberg algoritması ile elde edilen 20 tane farklı parametrelerin ortalama değerleri Tablo 2’de gösterildiği gibi hesaplanmıştır.

Tablo 2’den görüldüğü gibi; parametrelerde oluşan yanılı, gürültünün etkisiyle ve kullanılan data sayısının az olması sonucunda artmaktadır. $N=80$, $N=70$ ve $N=40$ tane

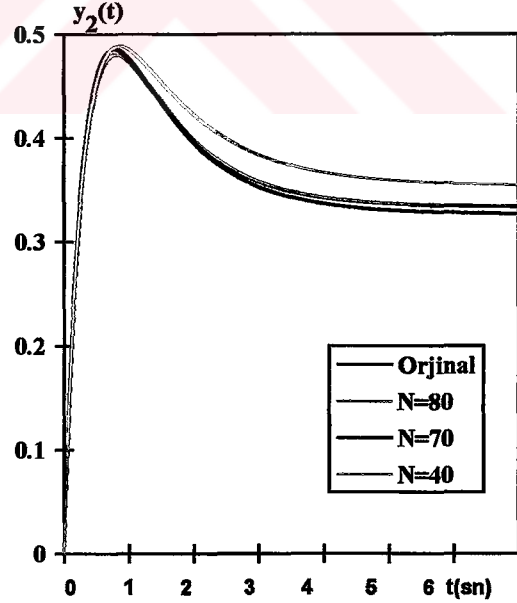
ölçüm değeri için, hesaplanan parametre değerleri kullanılarak, durum denklemleri çözümlerinden hesaplanan $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkış tepkisi eğrileri Şekil 4.a ve 4.b' de görüldüğü gibi özgün dizge çıkış tepkeleriyle karşılaştırılır. Burada özgün dizge $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkış eğrileri $N=80$ iken çizilen $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkış eğrileri ile üst üste çakışmaktadır.

Tablo 2. Standart sapması $\sigma=0.005$ olan Toplamsal Beyaz Gauss gürültüsü altında parametre kestirim sonuçları

Parametre	Gerçek değer	Kestirim değerleri		
		N=80	N=70	N=40
a_{11}	0	0.0006	0.0027	0.0293
a_{12}	1	1.0017	1.0078	0.9476
a_{21}	-3	-2.9999	-3.0126	-2.9508
a_{22}	-4	-4.0184	-4.0912	-4.0512
b_{11}	0	0.0001	0.0006	0.0090
b_{21}	1	0.9999	0.9999	1.0053
c_{11}	1	1.0072	1.0018	0.9329
c_{12}	1	1.0013	1.0012	1.0077
c_{21}	1	1.0030	0.9999	1.0704
c_{22}	2	2.0026	2.0770	1.9904



(a)



(b)

Şekil 4. $\sigma = 0.05$ olan Toplamsal Beyaz Gauss gürültüsü için

a) Özgün dizge, $N=80$, $N=70$ ve $N=40$ için $y_1(t)$ çıkış tepkeleri

b) Özgün dizge, $N=80$, $N=70$ ve $N=40$ için $y_2(t)$ çıkış tepkeleri

$N=70$ iken çıkışlarda yanılğı oluşmaktadır. $N=40$ için ise yanılğı oldukça artmaktadır. Uygulama sonucundan da görüldüğü gibi, gürültüsüz ve özellikle gürültülü durumda; parametre kestirimi için, kullanılan data sayısının fazla olması, belirlenen parametrelerin doğruluğunu oldukça arttırmaktadır. Bu algoritmanın performansı, verilen data sayısı ile doğru orantılıdır. Özellikle gürültülü datalar kullanılırken çok fazla data almak hatayı azaltacaktır. Bundan sonraki örneklerde mümkün olduğu kadar fazla data sayısı kullanılacaktır.

3.2.2. Gürültülü Durumda Performans Analizi

Marquardt-Levenberg, Hessien-Gradient, PARTAN ve Gradient yöntemlerinin performans analizlerini yapabilmek için C matrisinin kare olduğu bir örnek seçilmiştir. Bu örnek bir girişli-üç çıkışlıdır ve durum modeli,

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u(t), \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t), \quad u(t) = 100e^{-\frac{(t-0.1)^2}{0.001}}$$

biçimindedir. $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ çıkışları ve $u(t)$ girişleri $\tau=0.01$ sn aralıklarla ölçüldü. Başlangıç vektörü olarak,

$$\underline{\theta} = [0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ -3 \ -5.5 \ -3 \ 0 \ 0 \ 3]^T$$

değerleri alınmıştır. Yapılan ölçümlerin 500 tanesi kullanılarak değişik gürültü seviyeleri için uygulamalar yapıldı. Özgün dizgenin çıkış eğrileri $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ 'e; işaret/gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 olan değişik gürültüler eklenerek, parametre değerleri anlatılan bütün algoritmalar kullanılarak hesaplandı. İşaret/gürültü oranı, çıkıştaki işaret enerjisinin, gürültü değişintisine oranı olarak tanımlandı.

Bu çalışmada kullanılan algoritmalar için durum modeli parametreleri, model çıkışlarına her defasında aynı oranda gürültü eklenerek 20 farklı örnek datası kullanılarak kestirildi. Bu parametrelerin özgün dizgenin parametrelerine eşit olmadığı görüldü. Aynı işaret/gürültü oranı için kestirilen bu 20 farklı parametreler kullanılarak durum denklemleri çözüldü. Özgün dizgenin durum vektörü için $\hat{\underline{x}} = P\underline{x}$ dönüşümünü sağlayan P dönüşüm matrisi hesaplanır. (255) ve (260) bağıntıları kullanılarak kestirilen her bir dizge parametrelerinin, özgün dizgenin eşdeğer modeli olup olmadığı kontrol edilir. Sonuçta, bu P

dönüşüm matrisi ile özgün dizge parametrelerine ulaşıldığı görüldü. Öyleyse kestirilen bu parametreler özgün dizgenin bir eşdeğer model parametreleridirler. Bunu daha açık gösterebilmek için Marquardt Levenberg algoritmasının işaret/gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 olduğu durumlardaki birer örneğini inceleyelim:

İşaret/gürültü oranı 70 iken kestirilen parametre ve amaç fonksiyonu değerleri:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1467 & 1.03415 & 0.19454 \\ -1.7167 & -0.2482 & 3.06450 \\ 1.42351 & -2.48264 & -5.6814 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.07884 \\ 0.02926 \\ 3.05046 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.55894 & -0.0571 & -0.0234 \\ 0.01072 & 0.61805 & -0.0234 \\ -1.0893 & -0.0891 & 1.97199 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(12)=742.966125$$

olarak hesaplandı. Bu parametrelerin özgün modelin, farklı bir eşdeğer model parametreleri olduğunu göstermek için P dönüşüm matrisi hesaplandı ve elde edilen son parametre değerleri ise;

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.00038 & 0.98722 & 0.00214 \\ 0.00431 & 0.00890 & 1.04262 \\ -6.0852 & -11.0043 & -6.0857 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.00361 \\ -0.0220 \\ 6.03268 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0.95371 & 0.00531 & -0.0053 \\ -0.0048 & 0.93964 & -0.0046 \\ 0.02813 & 0.04336 & 0.98262 \end{bmatrix}$$

olarak belirlendi. Bu parametreler özgün dizge parametrelerine oldukça yakındır ve kestirilen parametrelerin bir eşdeğer model oluşturduğu açıkça görülmektedir.

İşaret/gürültü oranı 50 iken kestirilen parametrelerin ve amaç fonksiyonu değerleri:

$$A = \begin{bmatrix} 0.33657 & 1.28101 & -0.5782 \\ -1.2332 & 0.21624 & 2.03472 \\ 1.88233 & -6.0713 & -6.6289 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.01837 \\ -0.0097 \\ 3.00451 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.70687 & 0.19587 & -0.0152 \\ 0.00044 & 0.94570 & -9.0155 \\ -1.1948 & 0.27300 & 1.97138 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(15)=1040.649170$$

olarak kestirildi. Bu parametrelerin $\hat{x} = P x$ dönüşümünü sağlayan bir diğer çözümü;

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.01053 & 1.00199 & 0.00681 \\ 0.04648 & -0.0013 & 1.04583 \\ -6.0937 & -10.987 & -6.0852 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -0.0053 \\ -0.0255 \\ 6.0550 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0.94407 & 0.01113 & -0.0048 \\ -0.0051 & 0.92717 & -0.0053 \\ 0.02969 & 0.04127 & 0.97434 \end{bmatrix}$$

parametrelerini vermektedir ve bu parametreler özgün dizgenin parametrelerine benzemektedirler.

İşaret/gürültü oranı 40 iken,

$$A = \begin{bmatrix} 6.18897 & 4.04964 & -2.05116 \\ -7.1468 & -3.3296 & 2.57409 \\ 21.0463 & 5.63686 & -8.9320 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.00610 \\ 0.23287 \\ 3.28673 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.52657 & 0.30864 & -0.0347 \\ 0.53928 & 0.89404 & -0.0829 \\ -4.6952 & -1.2498 & 1.8844 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(23)=1301.265015

değerleri elde edildi. Bu parametrelerin özgün dizgenin bir eşdeğer modelinin parametrelerinin olup olmadığı kontrolü sonucunda elde edilen eşdeğer model parametreleri;

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.01396 & 1.01575 & 0.00186 \\ 0.04162 & -0.10057 & 1.03391 \\ -6.0788 & -10.6165 & -5.9861 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -0.0073 \\ -0.0273 \\ 6.06052 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0.94014 & 0.01955 & -0.0052 \\ -0.0047 & 0.93193 & -0.0058 \\ 0.02514 & -0.0440 & 0.96903 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplandı.

İşaret/gürültü oranı 30 iken kestirilen parametreler;

$$A = \begin{bmatrix} -1.7563 & 3.40254 & 2.66219 \\ -1.8287 & 2.58223 & 3.38572 \\ 2.79454 & -6.7712 & -6.8894 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.0891 \\ -0.4054 \\ 3.08929 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.59694 & -0.5334 & -0.0674 \\ -0.1971 & 0.96721 & 0.09942 \\ -1.1414 & 1.14249 & 2.00526 \end{bmatrix}$$

ve amaç fonksiyonunun son iterasyondaki değeri;

Amaç fonk(17)=1735.828369

olarak bulunur. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ eşdeğer modelleri ise;

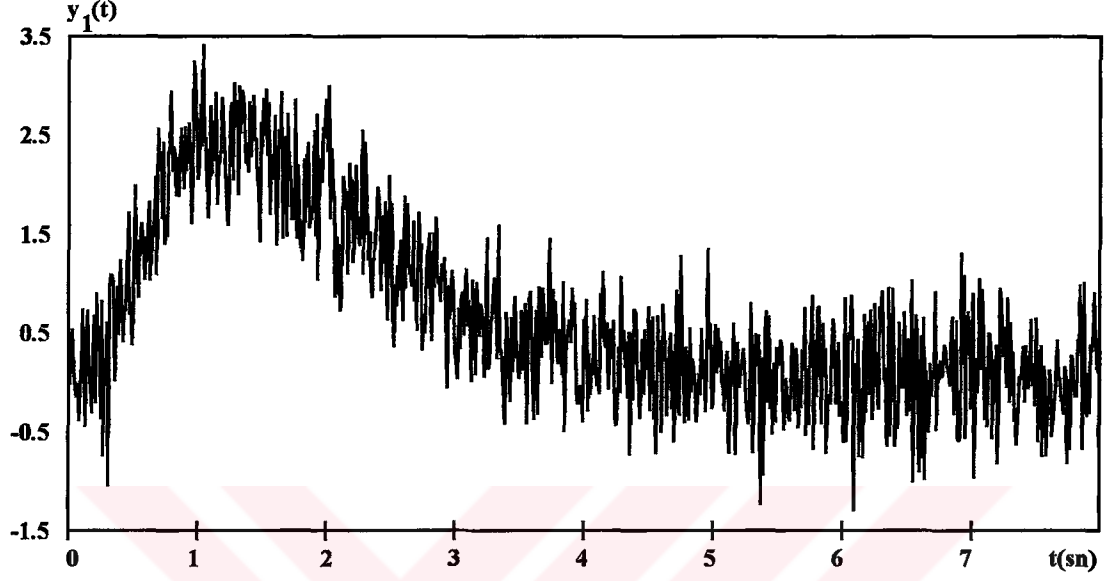
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.01246 & 1.00766 & 0.03572 \\ 0.05956 & 0.05555 & 1.04491 \\ -6.1150 & -11.236 & -6.1315 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -0.0043 \\ -0.0292 \\ 6.03970 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0.92499 & -0.0145 & -0.0070 \\ -0.0049 & 0.91418 & -0.0067 \\ 0.04211 & 0.11387 & 0.96656 \end{bmatrix}$$

değerlerine sahiptirler.

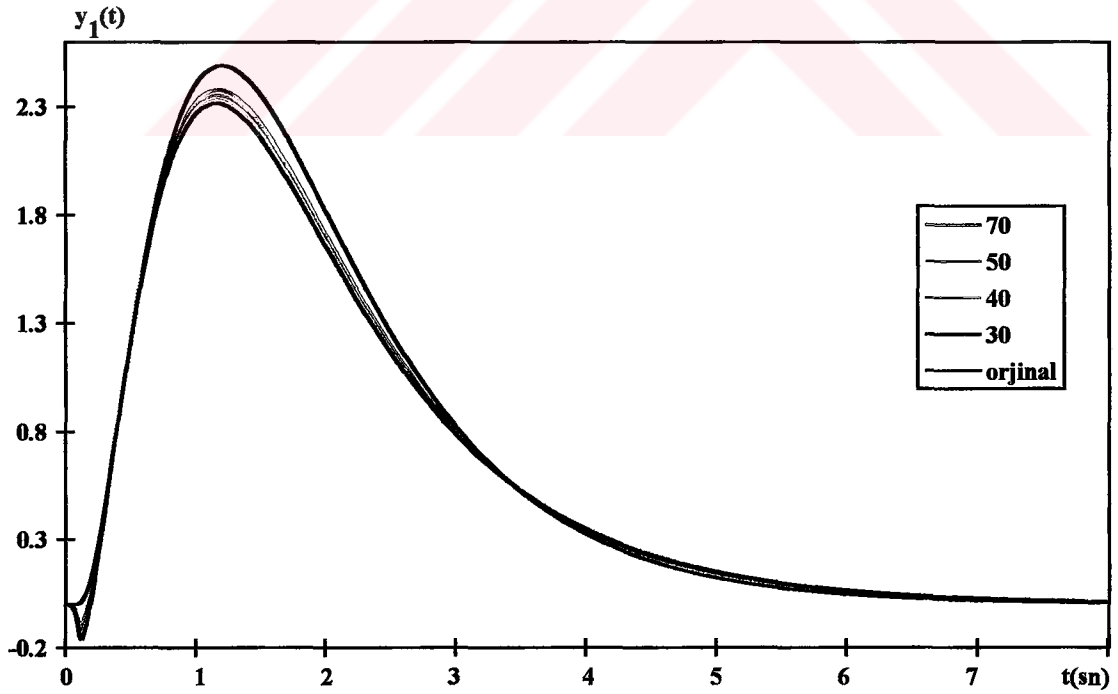
Yukarıda verilen parametre değerlerine bakıldığında; gürültü arttıkça parametrelerde oluşan yanılmanın da arttığı gözlenmektedir. Farklı gürültü düzeyleri altında, Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen parametreler kullanılarak durum denklemleri çözüldü ve çıkışların 0.01sn aralıklarıyla değerleri hesaplandı. $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ çıkışları sırasıyla, Şekil 5, 6 ve 7'de gösterilmiştir. Gürültü arttıkça, parametre kestirimi sonucunda oluşan yanılmanın arttığı gözlenmektedir. Bu durum, bütün algoritmalar için geçerli olduğundan dolayı; burada yalnızca Marquardt-Levenberg algoritmasının sonuçları verilmiştir.

Bu çalışmada incelenen algoritmaların tümü kullanılarak, değişik gürültü düzeyleri altında parametreler kestirilmeye çalışıldı. Kestirim sonucunda elde edilen parametrelerin

ortalama değerleri ve standart sapmaları, işaret/gürültü oranı 70 için Tablo 3’de ve 40 için Tablo 4’de gösterildiği gibi hesaplanmıştır.



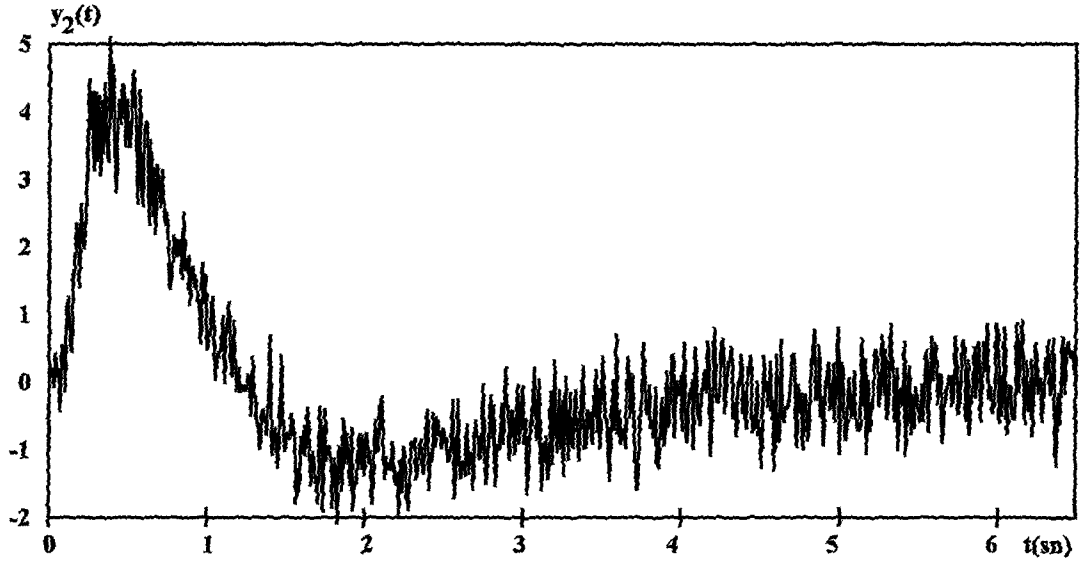
(a)



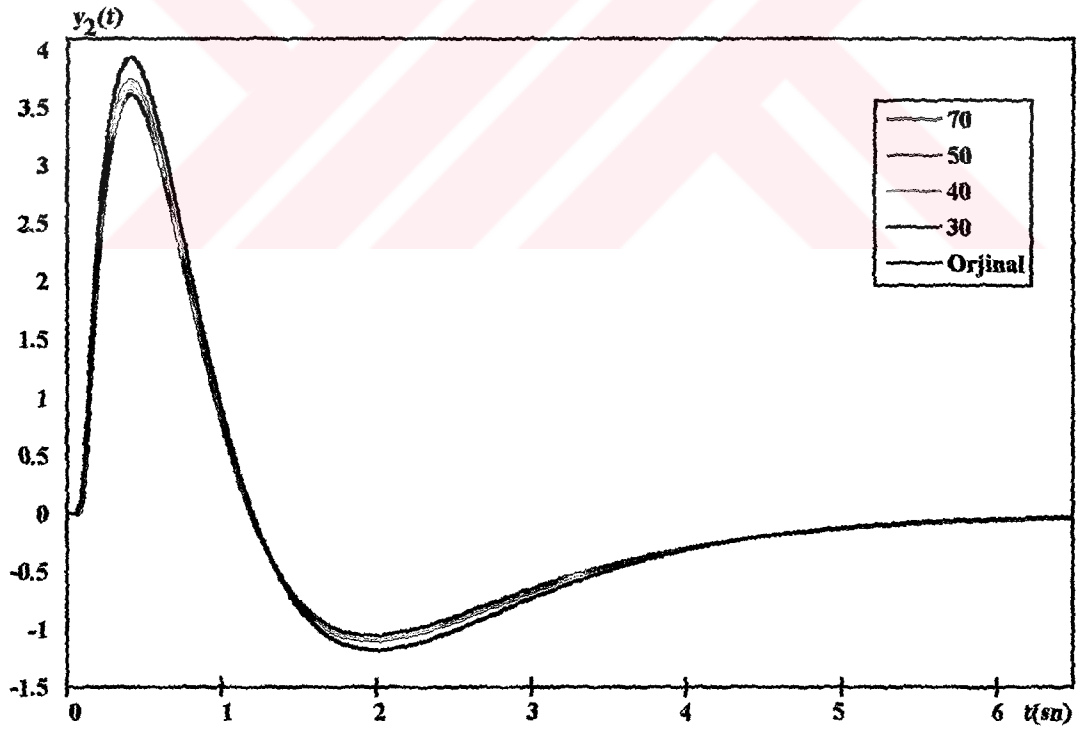
(b)

şekil 5.a) İşaret/gürültü oranı 40 için özđün dizgenin $y_1(t)$ çıkışı

b) İşaret/gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 iken Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen ve özđün dizgenin gürültüsüz durumdaki $y_1(t)$ çıkış eğrileri



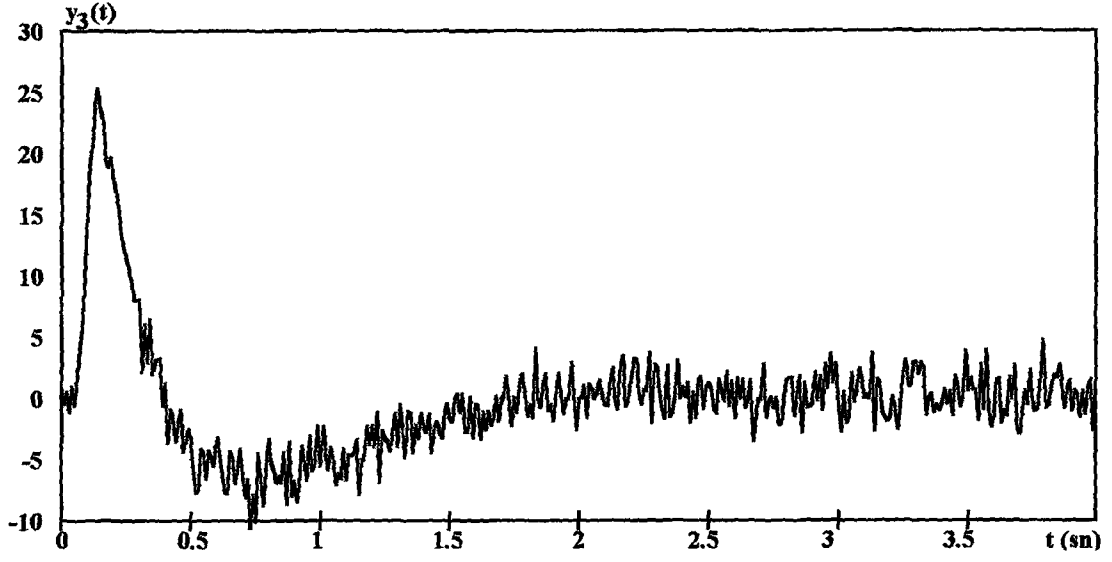
(a)



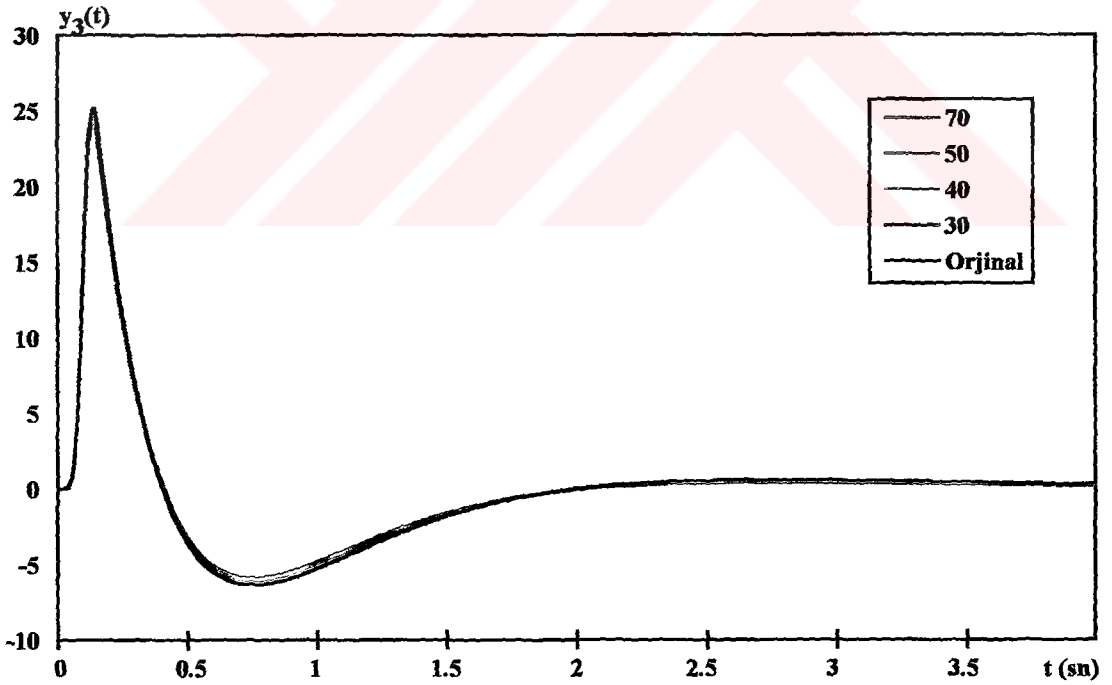
(b)

Şekil 6.a) İşaret/gürültü oranı 40 için özgün dizgenin $y_2(t)$ çıkışı

b) İşaret/gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 iken Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen ve özgün dizgenin gürültüsüz durumdaki $y_2(t)$ çıkış eğrileri



(a)



(b)

Şekil 7. a) İşaret/gürültü oranı 40 için özgün dizgenin $y_3(t)$ çıkışı

b) İşaret/gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 iken Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen ve özgün dizgenin gürültüsüz durumdaki $y_3(t)$ çıkış eğrileri

İşaret/Gürültü oranı 70 ve 40 olduğu durumda; özgün dizge çıkış eğrileri ve bu algoritmalar ile kestirilen parametrelere göre elde edilen $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çıkış eğrilerine bir örnek Şekil 8 ve Şekil 9’da ayrı ayrı gösterilmiştir. Bu sonuçlardan görüldüğü gibi, Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen model çıkışları özgün dizge çıkışlarına oldukça yakındır. Kullanılan bu algoritmalar, gürültülü durumdaki performansları, yanılının en azdan en fazlaya doğru; Marquardt-Levenberg, Hessian-Gradient, Gradient ve PARTAN algoritması olarak sıralanabilir. Değişik gürültü seviyeleri kullanılarak, gürültü attıkça bu algoritmalarla kestirilen parametrelerdeki yanılının daha fazla olduğu tablolardan görülmektedir. Fakat, gürültüye karşı en iyi performansı Marquardt-Levenberg algoritması vermektedir.

Tablo 3. Gürültü seviyesi 70 iken kestirilen parametreler ve standart sapmaları

Parametre	Gerçek Çözüm	Başlangıç Değerleri	Marquardt-Levenberg	Hessian-Gradient	Partan	Gradient
a_{11}	0	0.1	0.0009±0.0135	0.03541±0.1310	0.00464±0.0166	0.02867±0.0469
a_{12}	1	1.5	0.9992±0.0026	1.01082±0.0383	1.00063±0.0015	1.00351±0.0047
a_{13}	0	0.5	0.0063±0.0138	0.04132±0.1263	0.01063±0.0169	0.03350±0.0472
a_{21}	0	0	-0.010±0.0344	-0.00159±0.0230	-0.0090±0.0447	-0.00218±0.018
a_{22}	0	0	0.0060±0.0177	0.02014±0.05669	-0.0009±0.0050	0.00047±0.0021
a_{23}	1	1	0.9887±0.0348	0.99342±0.02401	0.99021±0.0446	0.99688±0.0184
a_{31}	-6	-3	-5.9803±0.2797	-6.07208±0.1317	-6.0009±0.3028	-6.1397±0.2218
a_{32}	-11	-5.5	-11.0007±0.117	-11.0926±0.286	-10.9676±0.034	-10.9954±0.027
a_{33}	-6	-3	-5.9872±0.2814	-6.07603±0.1308	-6.00567±0.303	-6.14314±0.223
b_{11}	0	0	-0.0002±0.0073	-0.16776±0.063	-0.00210±0.009	-0.0148±0.0248
b_{21}	0	0	0.0062±0.0198	0.00225±0.01411	0.00468±0.0253	0.00013±0.0095
b_{31}	6	3	5.9941±0.1613	6.03145±0.1018	6.00589±0.170	6.08519±0.1274
c_{11}	1	0.5	0.9640±0.1056	0.92461±0.0987	1.05586±0.140	0.95293±0.0727
c_{12}	0	0	-0.0182±0.055	-0.02012±0.0433	0.01948±0.064	-0.0133±0.0484
c_{13}	0	0	-0.0006±0.012	-0.00286±0.0138	0.00528±0.0128	-0.0071±0.0115
c_{21}	0	0	0.0049±0.054	0.01132±0.05328	-0.0216±0.0782	0.01092±0.052
c_{22}	1	0.5	0.9619±0.0630	0.93583±0.06221	1.00914±0.0707	0.95664±0.0685
c_{23}	0	0	0.0057±0.0085	-0.0071±0.00963	0.00069±0.013	-0.0034±0.0108
c_{31}	0	0	-0.0220±0.0685	0.0592±0.06127	0.00489±0.065	0.02827±0.0503
c_{32}	0	0	0.0725±0.0851	0.0981±0.0897	-0.0324±0.112	0.02518±0.078
c_{33}	1	0.5	0.9864±0.0384	0.9779±0.0396	1.00601±0.039	0.99610±0.034

Tablo 4. Gürültü seviyesi 40 iken kestirilen parametreler ve standart sapmaları

Parametre	Gerçek Çözüm	Başlangıç Değerleri	Marquardt-Levenberg	Hessien-Gradient	Partan	Gradient
a_{11}	0	0.1	0.0370±0.0499	0.08351±0.1712	0.00713±0.0215	0.02974±0.0078
a_{12}	1	1.5	1.0002±0.0056	1.01329±0.0310	1.00083±0.0020	1.00330±0.0012
a_{13}	0	0.5	0.0352±0.0457	0.08846±0.1645	0.01322±0.0218	0.03570±0.0097
a_{21}	0	0	-0.0198±0.0437	0.00271±0.0451	-0.0172±0.0586	0.01487±0.0380
a_{22}	0	0	-0.0125±0.0324	0.00971±0.0384	-0.0019±0.0069	0.00293±0.0053
a_{23}	1	1	0.9821±0.0420	0.99853±0.0384	0.98219±0.0583	1.01386±0.0381
a_{31}	-6	-3	-5.9783±0.3585	-6.0463±0.3319	-5.9826±0.3922	-6.10940±0.029
a_{32}	-11	-5.5	-10.9948±0.1921	-11.039±0.3017	-10.966±0.0476	-10.9873±0.002
a_{33}	-6	-3	-5.9793±0.3585	-6.0447±0.3275	-5.9879±0.3924	-6.11346±0.030
b_{11}	0	0	-0.0039±0.0114	-0.0417±0.0864	-0.00348±0.011	-0.01511±0.004
b_{21}	0	0	0.0101±0.0254	-0.0019±0.0247	0.00917±0.033	-0.00882±0.020
b_{31}	6	3	5.9963±0.2037	6.02038±0.1830	5.99451±0.220	6.064970±0.021
c_{11}	1	0.5	0.9418±0.1427	0.91035±0.2595	1.08067±0.185	0.905633±0.061
c_{12}	0	0	-0.0217±0.0730	-0.0087±0.0617	0.02823±0.084	-0.02327±0.033
c_{13}	0	0	-0.0020±0.0161	-0.00457±0.028	0.00721±0.017	-0.00811±0.006
c_{21}	0	0	0.01341±0.072	0.02396±0.129	-0.0287±0.105	0.01851±0.0356
c_{22}	1	0.5	0.9510±0.0833	0.93838±0.083	1.01761±0.093	0.93166±0.0158
c_{23}	0	0	-0.0069±0.0118	-0.0064±0.013	0.00214±0.017	-0.0033±0.0078
c_{31}	0	0	0.0249±0.0891	0.04269±0.094	-0.00116±0.088	0.03842±0.0151
c_{32}	0	0	0.0798±0.1083	0.10633±0.127	-0.05101±0.149	0.05697±0.0439
c_{33}		0.5	0.9812±0.0490	0.98492±0.049	1.004734±0.052	0.95565±0.0196

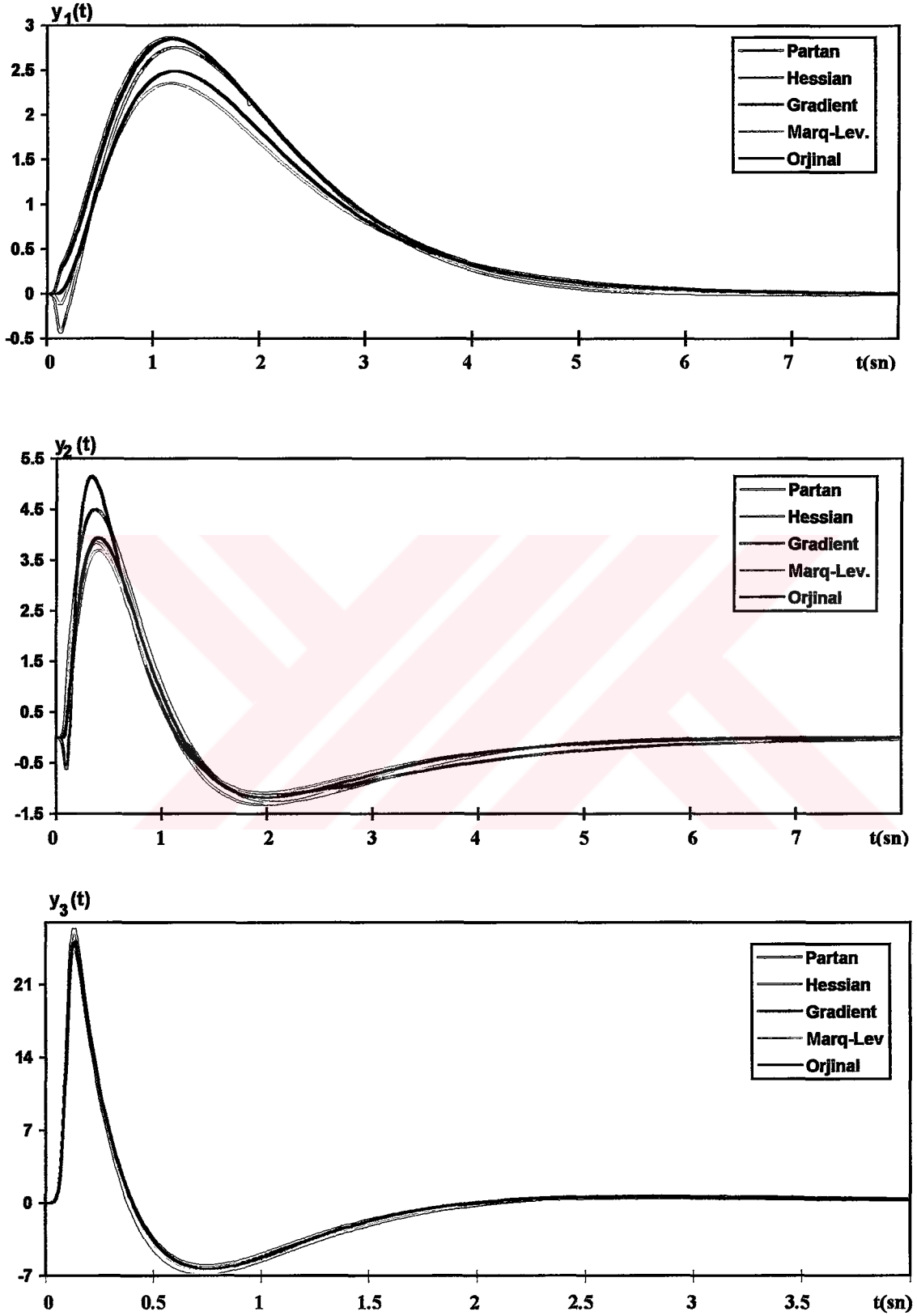
3.2.3. Algoritmaların Başlangıç Değerlerine Duyarlılığı

Burada 3.2.2 bölümünde ele alınan uygulama için farklı başlangıç koşulları kullanılarak, verilen algoritmaların başlangıç koşullarına duyarlılığı incelenmeye çalışılmıştır. Bunun için önce gürültüsüz durumda;

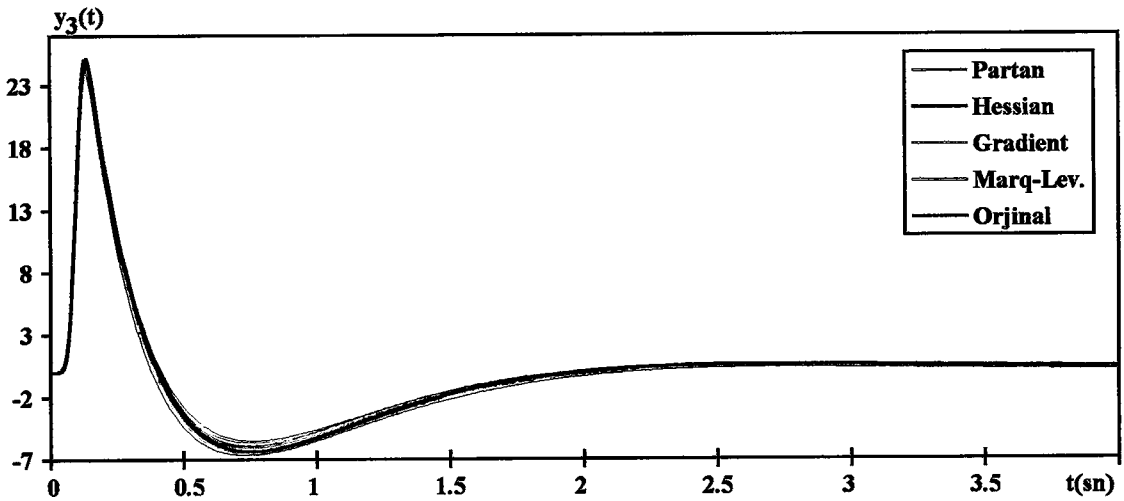
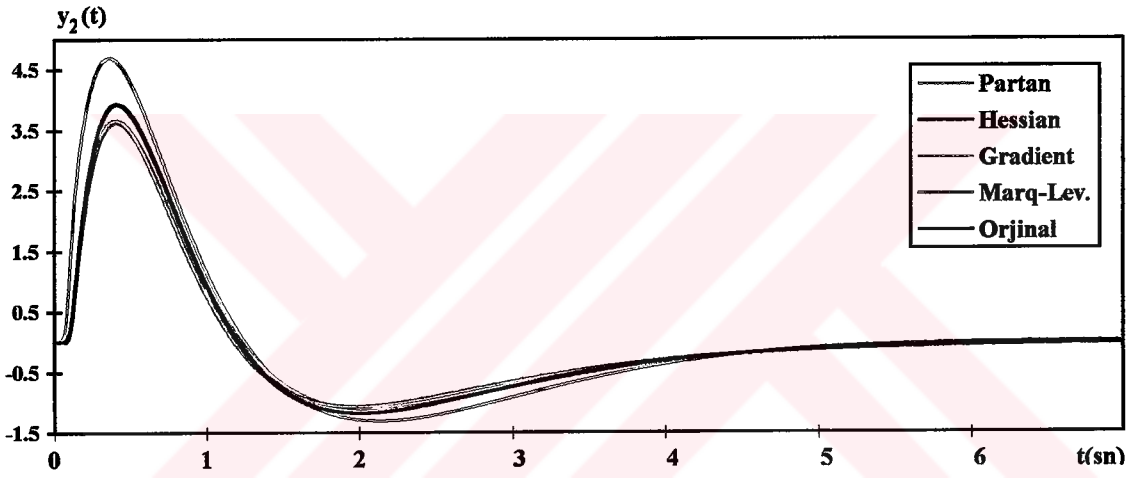
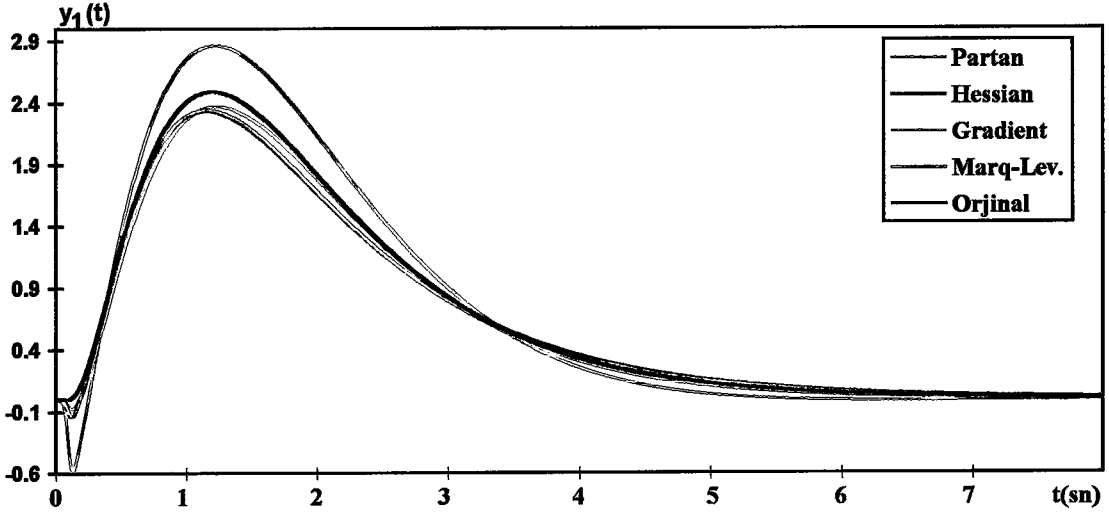
$$\theta_1 = [1 \ 0 \ 2 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 0.1 \ 1 \ 0.3 \ 0.6 \ 2 \ 1 \ 0 \ -0.1 \ 2 \ 0.5 \ -0.9 \ 0.4 \ 1.2]^T$$

başlangıç vektörü ve 500 tane data kullanılarak bütün algoritmalar ile parametreler ayrı ayrı kestirilmiştir. Elde edilen parametre değerleri bütün algoritmalar için aşağıda verilmiştir:

Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri;



Şekil 8. İşaret/gürültü oranı 70 olduğu durumda özgün dizgenin ve her bir algoritma ile kestirilen $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çıkış eğrileri



Şekil 9. İşaret/gürültü oranı 40 olduğunda özgün dizgenin ve herbir algoritma ile kestirilen $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çıkış eğrileri

$$A = \begin{bmatrix} -11.2934 & 1.09682 & -3.3398 \\ 7.99216 & -5.6931 & 3.82980 \\ 4.62037 & -33.0534 & -1.3228 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.9097 \\ 0.31924 \\ 0.40494 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -0.3785 & -0.8098 & 0.21243 \\ -1.2127 & -2.8249 & 0.49601 \\ -6.5976 & -1.6456 & -1.3228 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(50)=0.136104$$

PARTAN algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri;

$$A = \begin{bmatrix} -5.7136 & -1.8547 & 0.89799 \\ 3.75338 & -0.4704 & 0.0982 \\ -2.5764 & 1.8148 & 0.1816 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1.4175 \\ 0.86289 \\ 0.491286 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.59867 & 0.83439 & 0.26032 \\ -0.9542 & -1.9770 & 0.66767 \\ -3.6749 & 1.49110 & 0.9318 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(1284)=0.322390$$

Hessian-Gradient algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri;

$$A = \begin{bmatrix} -5.7451 & -1.9098 & 0.88493 \\ 3.74959 & -0.4766 & 0.12995 \\ -2.5014 & -1.8979 & 0.21713 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1.4238 \\ 0.85136 \\ 0.50830 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.57439 & 0.80258 & 0.26366 \\ -0.9456 & -1.9813 & 0.67052 \\ -3.6776 & 1.47796 & -0.9492 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(9437)=0.136368$$

Gradient algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri;

$$A = \begin{bmatrix} -5.7825 & -1.9727 & 0.82667 \\ 3.75216 & -0.4540 & 0.16365 \\ -2.5590 & -2.0247 & 0.2332 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1.4296 \\ 0.85791 \\ 0.52617 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.57254 & 0.79657 & 0.25433 \\ -0.9615 & -2.0100 & 0.66488 \\ -3.6844 & 1.46234 & -0.1688 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(5945)=0.138978$$

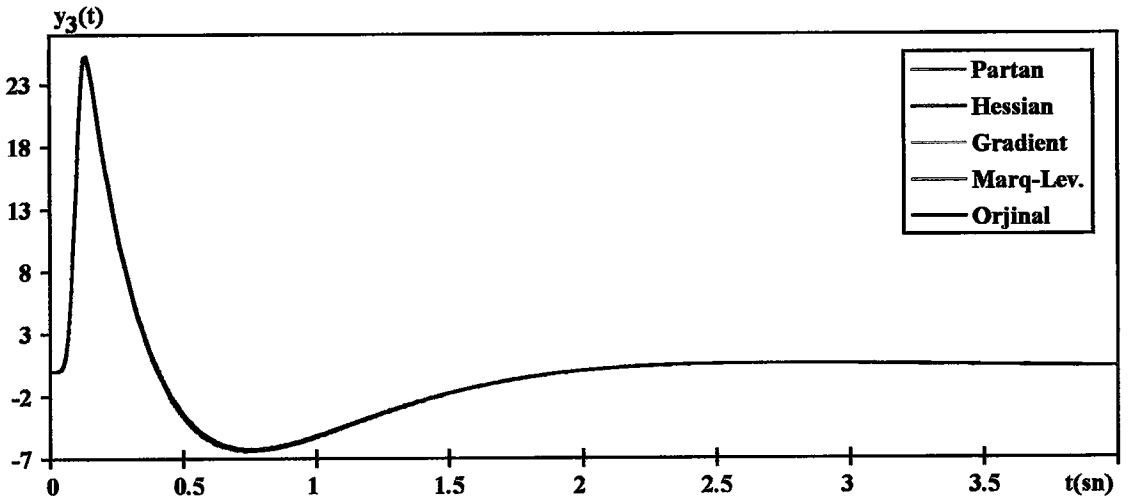
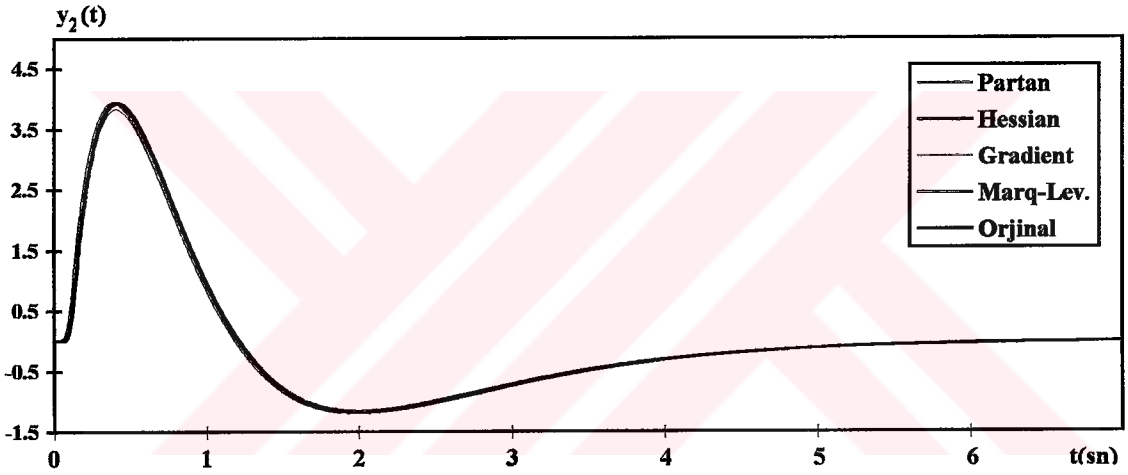
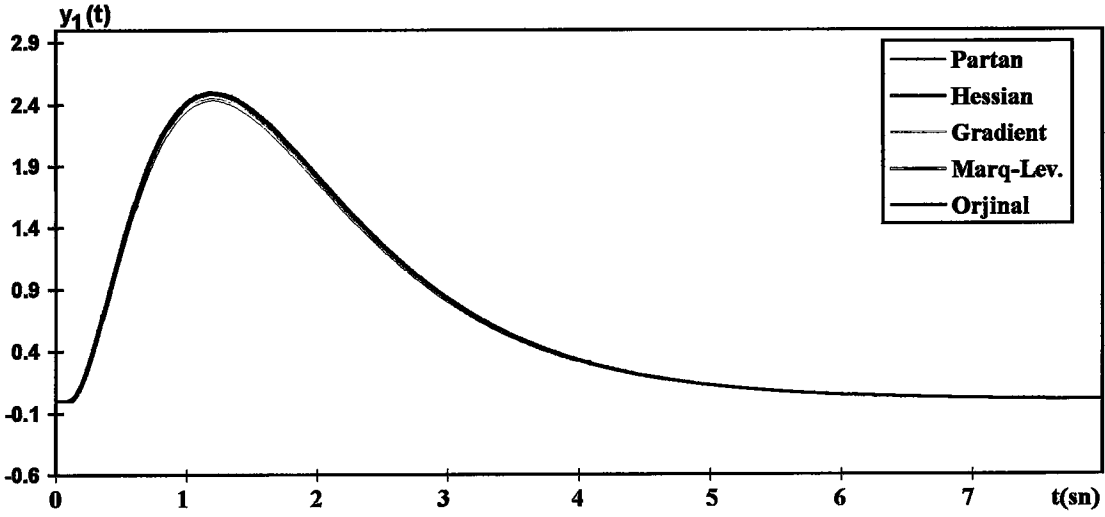
Bütün algoritmalar için kestirilen bu parametre değerleri kullanılarak, durum denklemlerinin çözümünden dizgenin çıkışları 0.01sn aralıklarla hesaplanır ve eğrileri Şekil 10'da gösterildiği gibi elde edilir.

Aynı uygulama başlangıç değerleri;

$$\underline{\theta}_2 = [-0.3 \ 0.5 \ -1 \ 0.8 \ 0.9 \ 2 \ -0.1 \ 0.5 \ 1 \ -0.1 \ 1 \ -0.2 \ -0.4 \ -1 \ -0.9 \ 1 \ -1 \ 0.3 \ -0.3 \ 0.2 \ -1]^T$$

olduğu durumda ve 500 tane data kullanılarak bütün algoritmalar için tekrarlanmış ve durum modeli parametreleri kestirilmiştir. Elde edilen parametre değerleri bütün algoritmalar için aşağıda verilmiştir:

Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri;



Şekil 10. θ_1 başlangıç değerleri için her bir algoritma ile kestirilen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ ve orjinal çıkış eğrileri

$$A = \begin{bmatrix} 2.02288 & -5.6199 & -0.8737 \\ 6.91140 & -5.4803 & 7.01171 \\ -2.9635 & 3.27615 & -2.5479 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1.1986 \\ 1.77162 \\ -0.4810 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -0.3573 & -0.7780 & -1.1986 \\ -0.2477 & -0.1975 & -0.1113 \\ -1.5382 & 2.11240 & -0.8857 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(54)=0.136104

PARTAN algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri;

$$A = \begin{bmatrix} -4.0027 & -1.1791 & -3.9873 \\ 3.70519 & -1.8688 & 1.91425 \\ -0.0607 & 0.70914 & -0.1306 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.8395 \\ 0.99646 \\ -1.1424 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.38078 & 0.36575 & 0.04004 \\ -0.1662 & -1.1061 & -0.8205 \\ -3.3743 & 1.68101 & -1.33936 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(3307)=0.322363

Hessian-Gradient algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri;

$$A = \begin{bmatrix} -4.2698 & -0.9675 & -4.1640 \\ 3.36870 & -1.7789 & 1.72985 \\ 0.32392 & 0.53330 & 0.04484 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.8124 \\ 1.00898 \\ -1.1814 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.38538 & 0.43635 & 0.10848 \\ -0.1345 & -1.0937 & -0.8418 \\ -3.3854 & 1.62742 & -1.3710 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(18692)=0.136723

Gradient algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri;

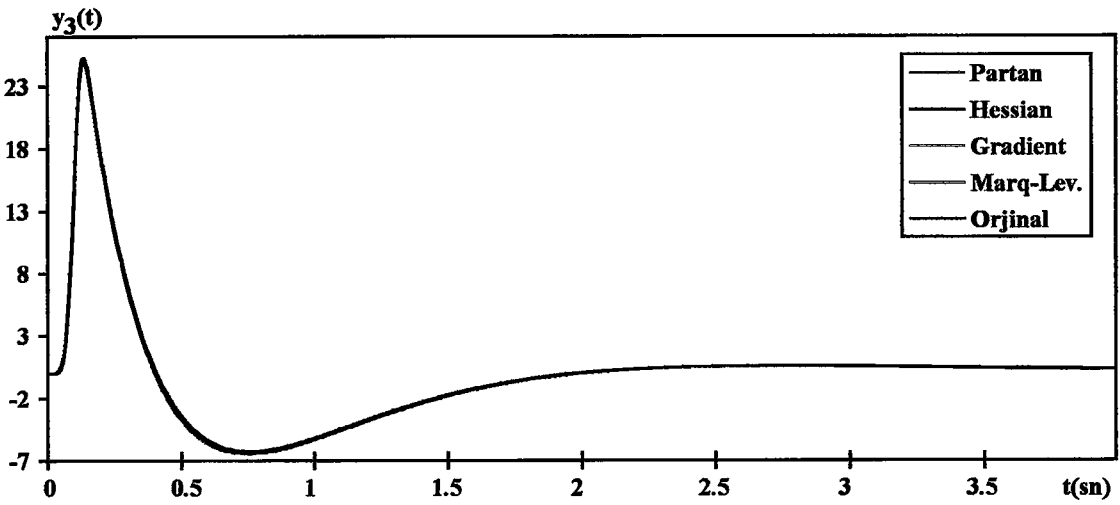
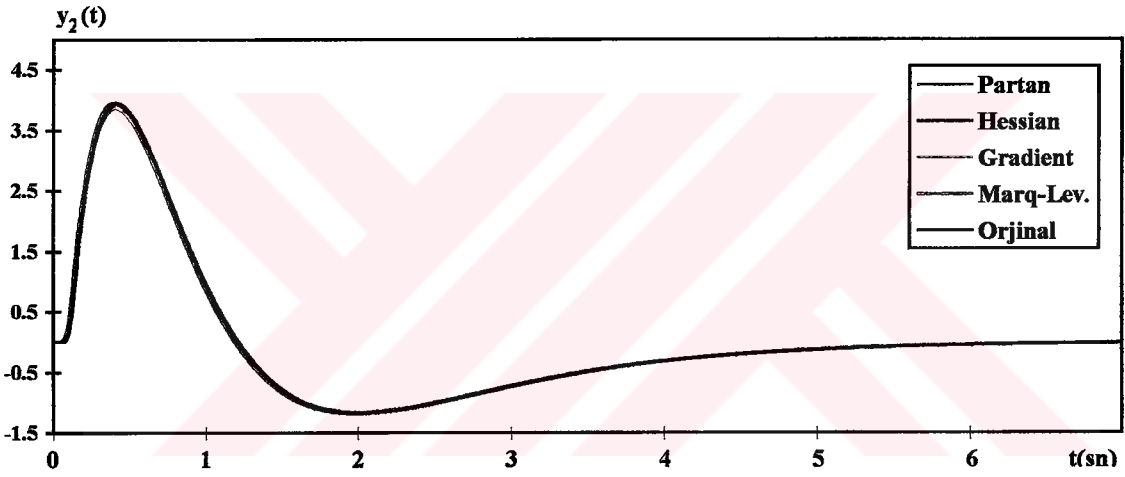
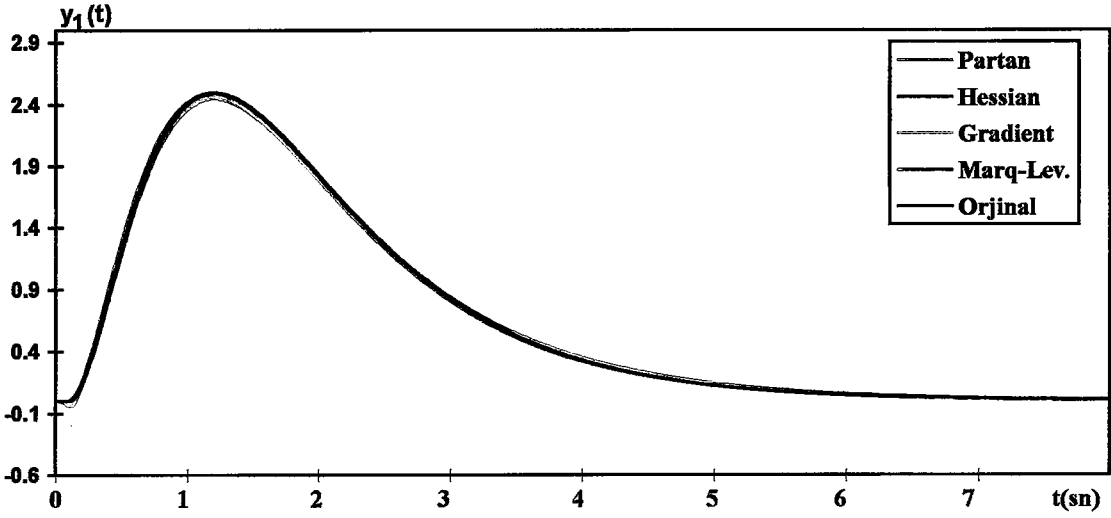
$$A = \begin{bmatrix} -4.3043 & -0.9736 & -4.2155 \\ 3.29699 & -1.7748 & 1.68697 \\ 0.40849 & 0.48846 & 0.10137 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.7847 \\ 1.03773 \\ -1.2027 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.38714 & 0.41875 & 0.12240 \\ -0.1367 & -1.1045 & -0.8602 \\ -3.3785 & 1.66052 & -1.3606 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(9485)=0.416571

Bütün algoritmalar için kestirilen bu parametre değerleri kullanılarak, durum denklemlerinin çözümünden dizgenin çıkışları 0.01sn aralıklarla hesaplanır ve eğrileri Şekil 11'de gösterildiği gibi elde edilir.

Şekil 10 ve Şekil 11'de görüldüğü gibi, farklı başlangıç koşullarında kestirilen parametreler özgün dizgenin durum modeli parametrelerinden farklı olsa dahi, hesaplanan $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çıkışları, orjinal çıkışlarla aynı olmaktadır. Çok az da olsa, PARTAN ve Gradient algoritmaları ile kestirilen $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışlarında yanılğı vardır.

Sonuç olarak, kullanılan bütün algoritmalarla, farklı başlangıç koşullarında kestirilen durum modeli parametreleri; özgün modelin farklı bir eşdeğer modeline yakınsamaktadır.



Şekil 11. θ_2 başlangıç değerleri için her bir algoritma ile kestirilen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ ve orjinal çıkış eğrileri

3.2.4. Algoritmaların Yakınsama Hızları

Gradient algoritması, yalnızca amaç fonksiyonunun parametrelere göre birinci türevini içeren basit ve k sabitine göre hızı değişen bir algoritmadır. (21) bağıntısı ile tanımlanan bu algortmada, k sabitinin seçimi çok önemlidir. k sabiti çok küçük seçilirse, bu algoritma çok yavaş olarak minimuma yakınsar, fakat daha doğru sonuç vermektedir. k sabiti büyük seçilirse, çok hızlı olarak minimum olur, fakat gerçek çözüm etrafında titreşim yapar ve yanlış çözüm bulunur.

Marquardt-Levenberg algoritması ise; (17) bağıntısında ifade edildiği gibi, amaç fonksiyonunun parametrelere göre birinci ve ikinci türevlerini içermektedir ve çok hızlı bir algoritmadır.

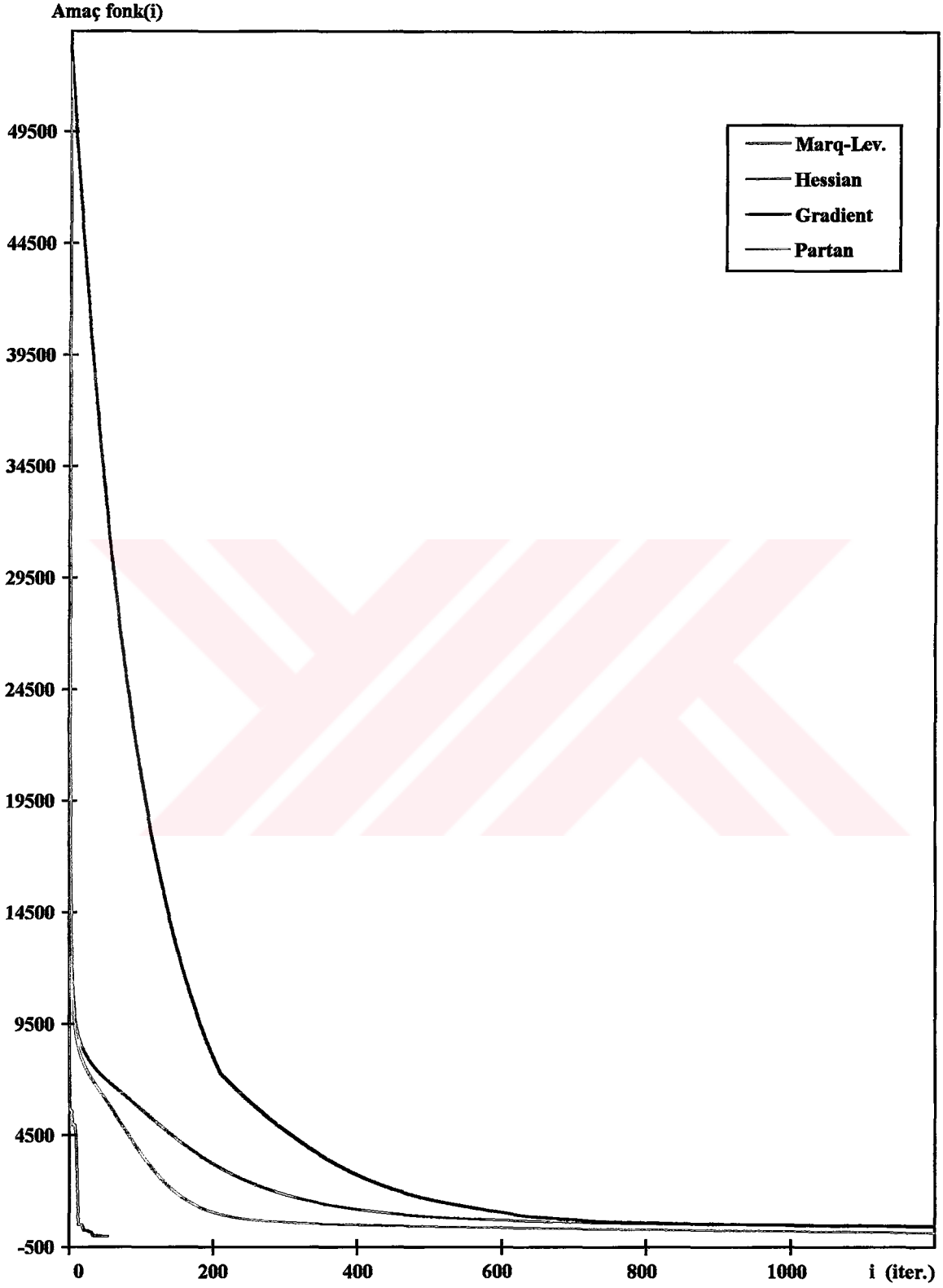
Hessian-Gradient algoritması, amaç fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini içermektedir. Bu algoritma çok yavaş olmasına karşın, çok düzenli olarak ve az yamılgılı olarak minimuma yakınsamaktadır.

PARTAN algoritması ise; (28) bağıntısı ile ifade edildiği gibi k_1 ve k_2 olmak üzere iki sabitten oluşmaktadır. Her iterasyon için yeni k_1 ve k_2 sabitleri hesaplanır. Çok yavaş ve minimuma çok titreşimli olarak yakınsar.

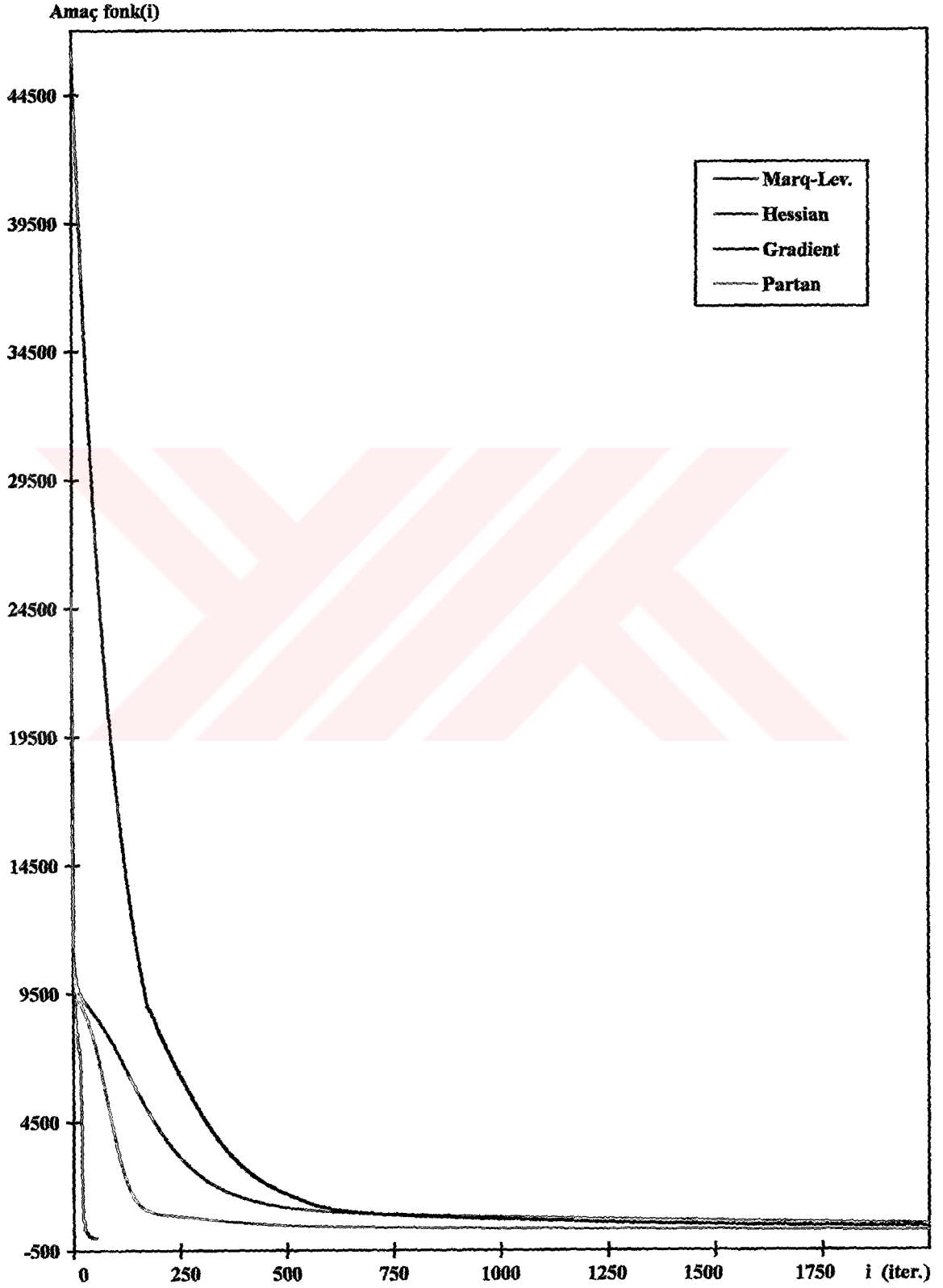
Şekil 12, 3.2.3. bölümünde, $\underline{\theta}_1$ başlangıç vektörü için uygulaması yapılmış dizge için, bütün algoritmalara ait amaç fonksiyonlarının iterasyona göre değişimini göstermektedir. Şekil 13 ise, aynı dizgenin $\underline{\theta}_2$ başlangıç vektörü için uygulaması yapılmış dizge için, bütün algoritmalara ait amaç fonksiyonlarının iterasyona göre değişimini göstermektedir.

Şekillerden de görüldüğü gibi; Marquardt-Levenberg algoritması en kısa zamanda minimuma yakınsar. Hessian-Gradient algoritması çok kararlı bir biçimde fakat, çok uzun iterasyonda minimum oluyor. Gradient algoritması $k=0.0095$ alındığı için, burada çok uzun iterasyonda, düzenli olarak minimuma yaklaşmıştır. $k=0.95$ olduğu durumda ise, çok kısa bir iterasyonda amaç fonksiyonunu minimum yapan değerler etrafında salınım yapmaktadır. Fakat minimum değerleri yakalaması çok zor olmaktadır. Gradient algoritması, Şekil 13'deki eğride çok az da olsa; son iterasyonlara doğru amaç fonksiyonunun minimumu etrafında salınım yapmaktadır.

Sonuç olarak, yakınsama performansı en hızlı ve en doğru olan algoritma, Marquardt-Levenberg algoritmasıdır. En az iterasyonda ve en kısa zamanda minimuma yakınsamaktadır. Partan algoritması da, Hessian-Gradient ve Gradient algoritmalarına göre



Şekil 12. θ_1 başlangıç değerlerine göre, amaç fonksiyonlarının iterasyon sayısına bağlı olarak değişimi



Şekil 13. θ_2 başlangıç değerlerine göre, amaç fonksiyonlarının iterasyon sayısına bağlı olarak değişimi

daha kısa zamanda minimuma ulaşır. Çok yavaş olsa da, Hessian-Gradient algoritması çok doğru olarak minimuma yakınsar.

3.2.5. Algoritmaların Farklı Giriş İşaretlerine Karşı Duyarlılığı

Bu bölümde; verilen bir uygulama üzerinde, değişik giriş işaretleri kullanılarak durum modeli parametreleri bütün algoritmalar için ayrı ayrı kestirildi. Farklı giriş işaretlerine karşı algoritmaların performansları incelendi. Bunun için, durum modeli,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

olarak verilen bir dizgenin giriş ve çıkış dataları 0.01sn aralıklarla ölçüldü. Başlangıç vektörü;

$$\underline{\theta} = [0 \ 0.5 \ -1.5 \ -2 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0.5]^T$$

olarak seçilmiştir.

3.2.5.1. Algoritmaların Birim Vuruş Giriş İşaretine Karşı Duyarlılığı

Verilen bu dizgenin girişine birim vuruş işareti uygulandı ve bu giriş işaretine karşı algoritmaların performansı incelendi. Birim vuruş işareti, matematiksel olarak tam ifade edilemediğinden dolayı, burada Gauss işaretinin birim vuruş işaretine benzetilmiş hali kullanılmıştır ve

$$u(t) = 100e^{-\frac{(t-0.1)^2}{0.001}}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Giriş ve çıkış ölçümlerinden 100 tanesi kullanılarak, gürültüsüz durumda Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmaları ile durum modeli parametreleri kestirildi.

Marquardt-Levenberg algoritması kullanıldığı durumda amaç fonksiyonu 18. ci iterasyonda minimuma ulaştı. Elde edilen durum modeli parametreleri ve amaç fonksiyonunun değerleri şöyledir:

$$A = \begin{bmatrix} -1.984704 & 3.573944 \\ 0.285461 & -2.023933 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.003997 \\ 0.514296 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.545701 & 0.004334 \\ -1.081761 & 1.942501 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(18) = 0.001578$$

Gradient algoritması kullanılarak amaç fonksiyonu ancak 10000 iterasyonda minimuma ulaşmıştır ve;

$$A = \begin{bmatrix} -0.347033 & 1.399143 \\ -1.233595 & -3.661632 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.093629 \\ 0.606157 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.852628 & -0.131554 \\ -0.132745 & 1.675334 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(10000)=0.001775$$

parametre değerleri elde edilmiştir.

Hessian-Gradient algoritması ile elde edilen parametre değerleri;

$$A = \begin{bmatrix} -0.478683 & 1.480236 \\ -0.860498 & -3.525864 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.106036 \\ 0.625916 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.790457 & -0.13313 \\ -0.268318 & 1.648601 \end{bmatrix}$$

ve amaç fonksiyonunun değeri;

$$\text{Amaç fonk}(7392)=0.001664$$

olarak bulunmuştur.

PARTAN algoritması kullanılarak elde edilen parametreler;

$$A = \begin{bmatrix} -0.272152 & 1.38709 \\ -1.423264 & -3.73583 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.081803 \\ 0.586461 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.900713 & -0.125429 \\ -0.066463 & 1.720161 \end{bmatrix}$$

ve amaç fonksiyonu;

$$\text{Amaç fonk}(1136)=0.001581$$

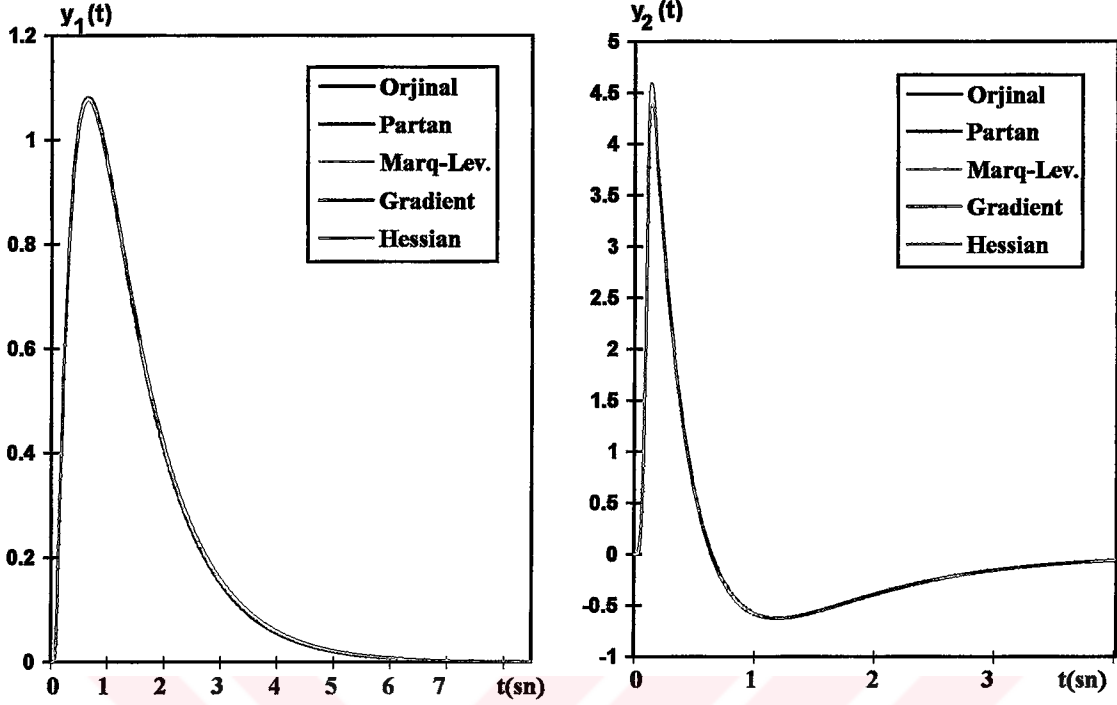
değerlerine sahiptirler.

Elde edilen bu sonuçlara bakıldığında; Marquardt-Levenberg algoritması en kısa iterasyonda, en küçük değere ulaşan algoritmadır.

Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmalarının birim vuruş işaretine karşı performanslarını daha iyi gözlemek amacıyla; her algoritma ile kestirilen parametre değerleri kullanılarak durum modeli oluşturuldu. Bu durum modeli çözümlenerek durum vektörleri hesaplandı ve çıkışlara ait datalar 0.01sn aralıklarla belirlendi. Elde edilen bu çıkış dataları kullanılarak bütün algoritmalara ait çıkışlar aynı eksen takımı üzerinde Şekil 14'de gösterildi. Şekilden de görüldüğü gibi, kullanılan bütün algoritmalar; giriş işareti birim vuruş olduğu durumda çok iyi performans göstermektedirler. Kestirilen parametrelere göre çizilen $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkış eğrileri orjinal eğri ile tamamen çakışmaktadır.

3.2.5.2. Algoritmaların Birim Basamak İşareti Karşı Duyarlılığı

Giriş işareti olarak birim basamak işlevi alındığı ve giriş-çıkış ölçümlerinden 500 tanesi kullanıldığı durumda, Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen durum modeli parametreleri;



Şekil 14. Giriş işareti birim vuruş olduğu durumda elde edilen çıkış tepkeleri

$$A = \begin{bmatrix} -0.63285 & 2.458173 \\ -0.351018 & -3.347856 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.000151 \\ 0.500097 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.807037 & 0.003988 \\ -0.509799 & 1.981625 \end{bmatrix}$$

ve amaç fonksiyonunun son iterasyondaki değeri;

$$\text{Amaç fonk}(12)=0.000048$$

olarak elde edilir.

Gradient algoritması kullanılarak aynı değerler;

$$A = \begin{bmatrix} -0.347555 & 1.370553 \\ -1.224108 & -3.596351 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.094546 \\ 0.602249 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.847876 & -0.11808 \\ -0.13351 & 1.646535 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(5997)=0.000466$$

olarak hesaplanır.

Hessian-Gradient algoritmasının kullanılması sonucunda durum modeli parametreleri;

$$A = \begin{bmatrix} -0.343414 & 1.352424 \\ -1.221789 & -3.558408 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.095344 \\ 0.60036 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.842606 & -0.108539 \\ -0.129578 & 1.630162 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplandı ve bu durumda amaç fonksiyonu;

$$\text{Amaç fonk}(2499)=0.001671$$

değerinde minimuma ulaşmıştır.

PARTAN algoritması ile elde edilen sonuçlar ise;

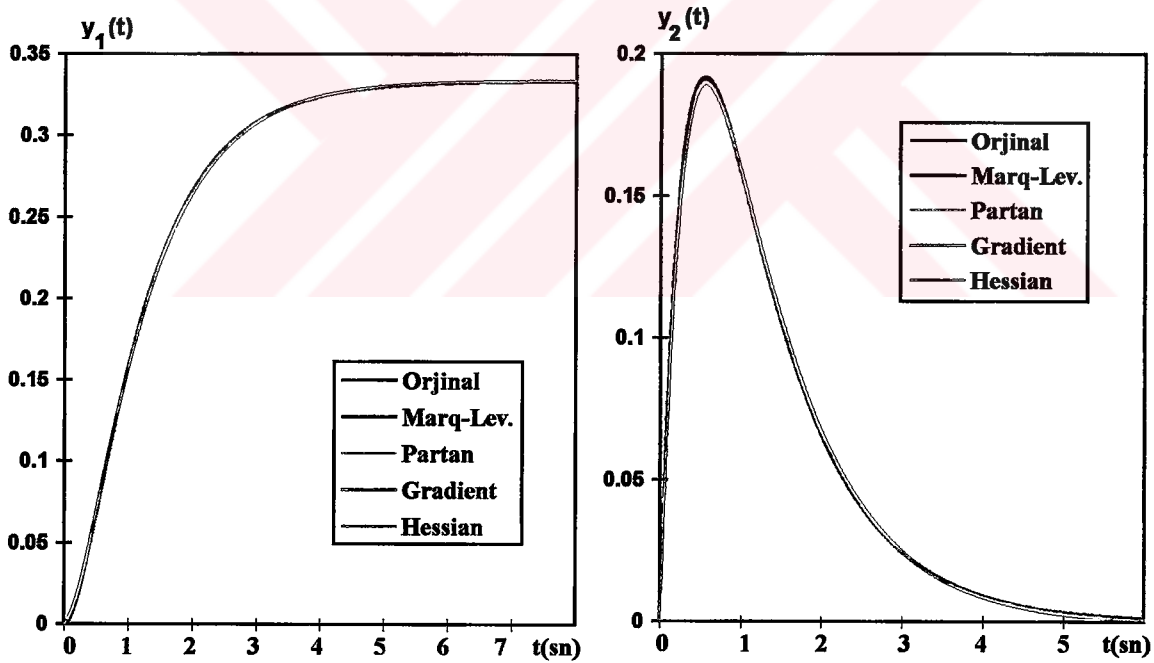
$$A = \begin{bmatrix} -0.33777 & 1.362593 \\ -1.274353 & -3.630987 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.09114 \\ 0.601432 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.868187 & -0.123875 \\ -0.125963 & 1.65998 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(1646)=0.000096$$

değerlerine sahiptirler.

Bu parametrelere göre; durum modeli çözümü yapılarak $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışları hesaplandı. Elde edilen çıkışlar Şekil 15' de gösterilmektedir.

Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmalarının birim basamak giriş işaretine karşı hesaplanan çıkış eğrileri orjinal eğri ile tamamen çakışmaktadır. Kullanılan algoritmaların birim basamak girişine karşı, performanslarının iyi olduğu gözlenmektedir.



Şekil 15. Giriş işareti birim basamak olduğu durumda elde edilen çıkış tepkeleri

3.2.5.3. Algoritmaların $\cos(10t^2)$ Giriş İşaretine Karşı Duyarlılığı

Giriş işareti olarak $u(t) = \cos(10t^2)$ işareti uygulanmıştır ve hesaplamalar yapılırken önce 100 data kullanılmıştır. Bu durumda kestirilen durum modeli parametreleri ve amaç fonksiyonunun son iterasyondaki değerleri aşağıda verildiği gibidir:

Marquardt-Levenberg algoritması için;

$$A = \begin{bmatrix} 0.119191 & 2.120248 \\ -1.621882 & -4.120389 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.020057 \\ 0.538543 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.784656 & -0.023836 \\ 0.157639 & 1.814044 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(13)=0.000103

Gradient algoritması için;

$$A = \begin{bmatrix} -0.167431 & 1.138012 \\ -0.819118 & -3.635531 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.151423 \\ 0.608589 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.680881 & -0.14156 \\ -0.162026 & 1.654668 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(373)=0.000475

Hessian-Gradient algoritması için;

$$A = \begin{bmatrix} -0.511205 & 1.444373 \\ -0.456934 & -3.420245 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.136869 \\ 0.630892 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.693177 & -0.137203 \\ -0.365584 & 1.634695 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(3784)=0.000157

PARTAN algoritması için;

$$A = \begin{bmatrix} -0.571103 & 1.43453 \\ 0.492111 & -3.391513 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.129011 \\ 0.643341 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.728521 & -0.138914 \\ -0.388185 & 1.627728 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(807)=0.000124

değerleri elde edildi ve durum denklemleri çözülerek $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışları hesaplandı. Hesaplanan bu çıkışlar Şekil 16'da bütün algoritmaların sonuçlarını gösterecek biçimde çizilmiştir. $y_2(t)$ çıkışının daha net görülebilmesi için 3-4sn aralığındaki kısmı Şekil 18'de büyütülerek gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, data sayısı dizgeyi tanımak için yeterli olmamıştır. Buna karşın Marquardt-Levenberg algoritması iyi sonuç vermektedir. $\cos(10t^2)$ giriş işaretine karşı algoritmaların en duyarlı olanları, sırayla; Marquardt-Levenberg, PARTAN ve Hessian-Gradient algoritmalarıdır. Gradient algoritması ise iyi performans göstermemektedir.

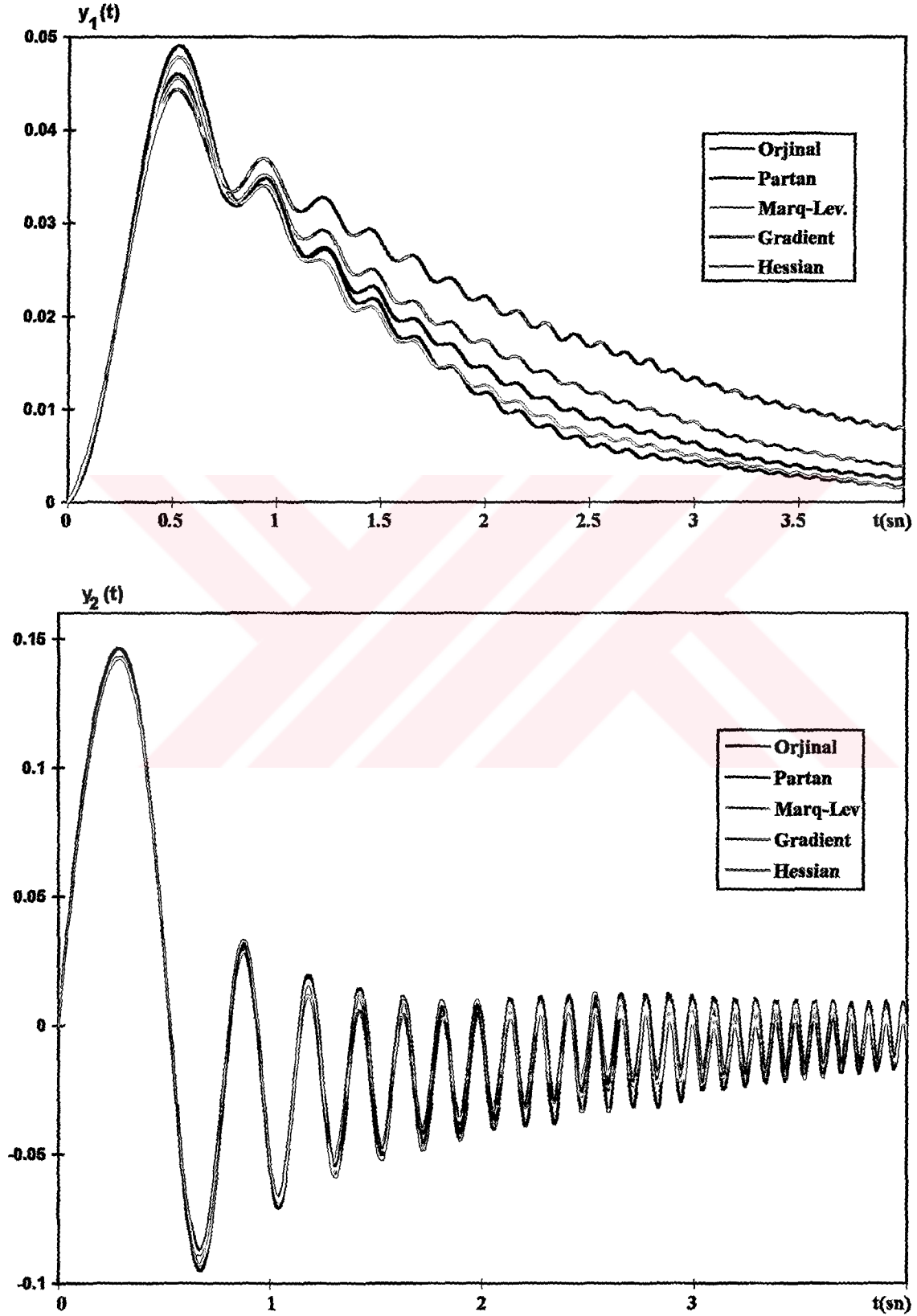
Aynı uygulamalar 300 tane data kullanılarak tekrarlanmıştır. Bu durumda elde edilen sonuçlar aşağıda verildiği gibidir:

Marquardt-Levenberg algoritması için;

$$A = \begin{bmatrix} -0.435252 & 2.037947 \\ -0.756259 & -3.425909 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.000266 \\ 0.505536 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.921626 & 0.005311 \\ -0.394809 & 1.912009 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(16)=0.001257

Gradient algoritması için;



Şekil 16. Giriş $\cos(10t^2)$ işareti olduğu ve 100 data kullanıldığı durumda elde edilen çıkış tepkeleri

$$A = \begin{bmatrix} -0.318061 & 1.402673 \\ -1.359019 & -3.543931 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.102365 \\ 0.628805 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.765168 & -0.11862 \\ -0.066608 & 1.532433 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(9999)=0.00269

Hessian-Gradient algoritması için;

$$A = \begin{bmatrix} -0.340701 & 1.395584 \\ -1.29732 & -3.521511 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.089096 \\ 0.591879 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.838917 & -0.120855 \\ -0.113697 & 1.650789 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(294)=0.001259

Partan algoritması için;

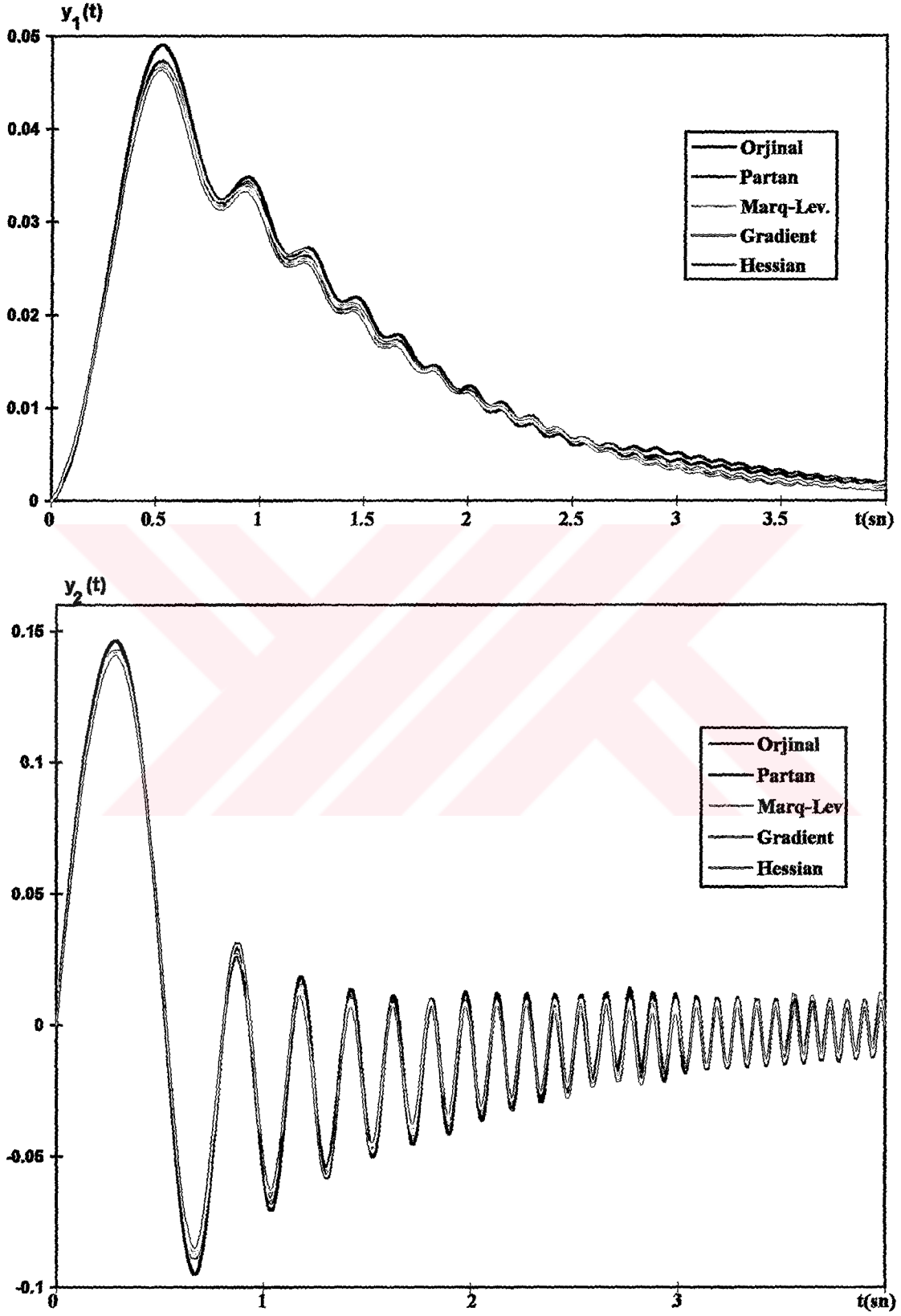
$$A = \begin{bmatrix} -0.356619 & 1.430467 \\ -1.232186 & -3.505555 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.094272 \\ 0.586597 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.818965 & -0.126314 \\ -0.121698 & 1.667905 \end{bmatrix}$$

Amaç fonk(132)=0.001259

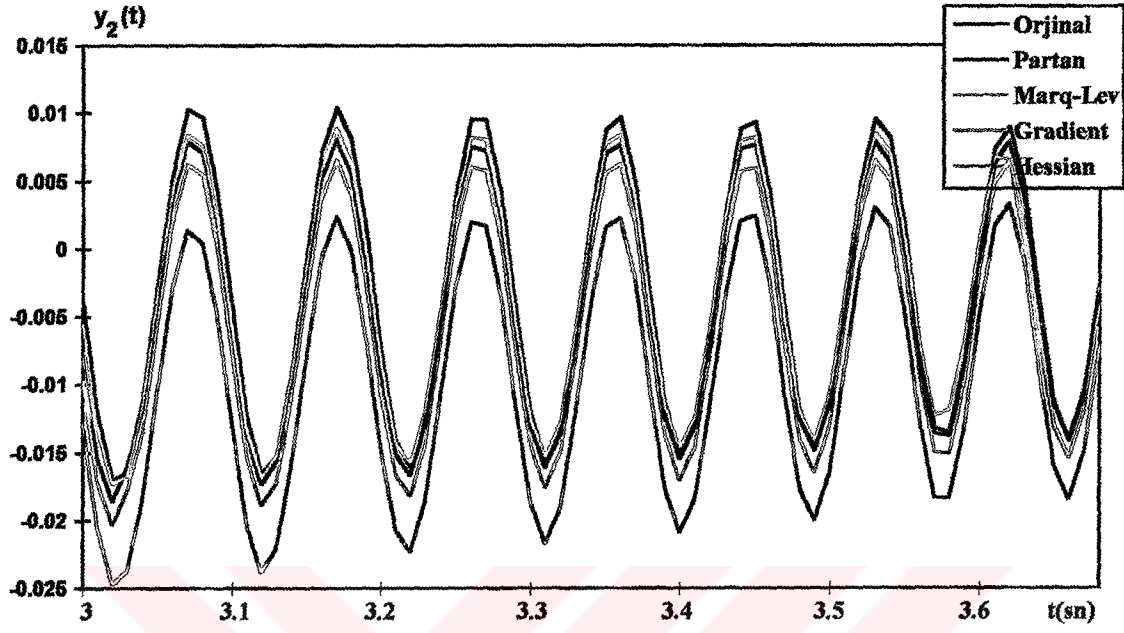
değerleri elde edildi ve durum denklemleri çözülerek $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışları hesaplandı. Bu çıkışlar Şekil 17’de bütün algoritmaların sonuçlarını gösterecek biçimde çizilmiştir. $y_2(t)$ çıkışının daha net görülebilmesi için 3-3.5sn aralığındaki kısmı Şekil 19’da büyütülerek gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, data sayısı fazla alındığı durumda kestirilen parametre değerleri daha doğru sonuç vermektedir. Marquadt-Levenberg algoritması, data sayısının az ve çok olduğu durumlarda en doğru sonucu veren algoritmadır.

Sonuç olarak; parametre kestirimi amacıyla oluşturulan dizge modeline, bütün algoritmaların uygulanması ile en iyi sonucu veren algoritma Marquardt-Levenberg algoritmasıdır. Birim basamak, birim vuruş ve $\cos(10t^2)$ işaretlerinin giriş tepkisi olarak kullanılması sonucunda; özgün modele en yakın sonucu veren giriş işaretleri birim basamak ve birim vuruş işaretleridir. Hatta kestirilen dizgenin çıkış eğrileri ile orjinal çıkış eğrileri tamamen çakışmaktadır. Giriş $\cos(10t^2)$ işareti olduğu durumda ise çıkış eğrilerinde yanılğı olmaktadır, bu yanılğıyı azaltmak için, ölçüm aralığının ve data sayısının seçimine dikkat edilmelidir.

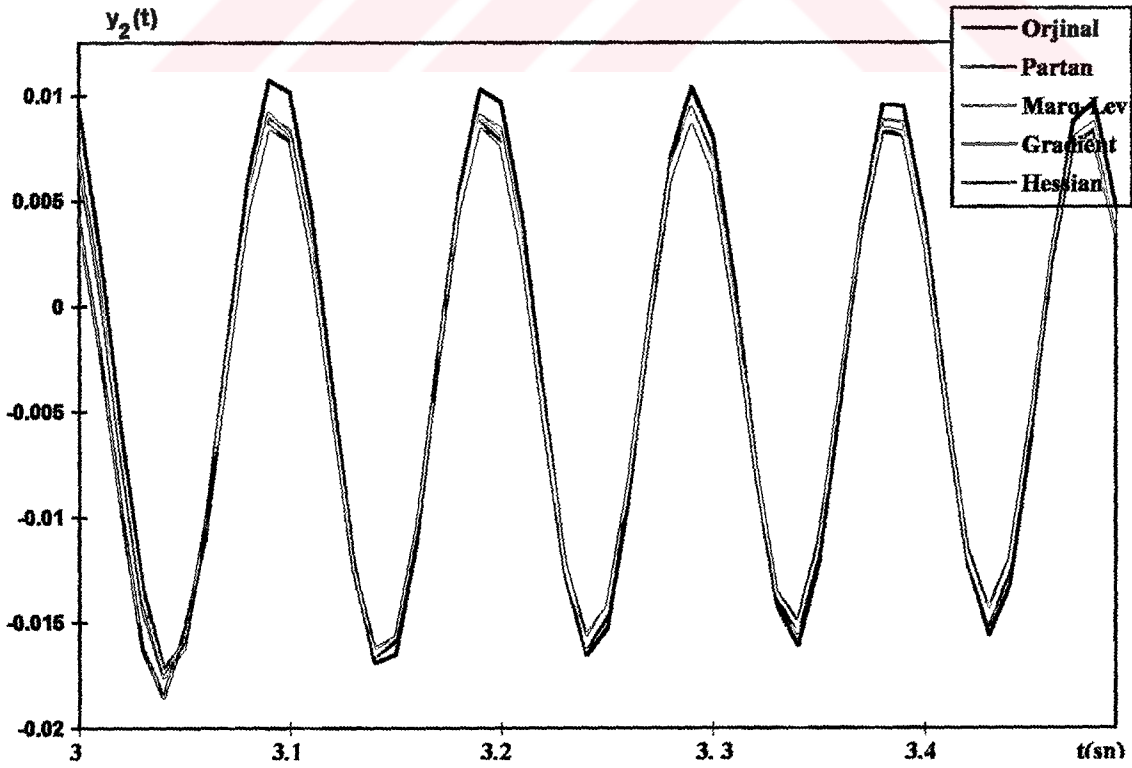
Birim basamak, birim vuruş ve $\cos(10t^2)$ giriş işaretlerinin performanslarını daha iyi karşılaştırma yapabilmek için Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve Partan algoritmalarına ait amaç fonksiyonlarının değişimleri Şekil 20’de gösterilmiştir. Bu şekillerden görüldüğü gibi, en kısa iterasyonda minimuma ulaşan girişler sırayla; birim vuruş, birim basamak ve $\cos(10t^2)$ işaretleridirler. En kısa iterasyona göre sıralama, Marquardt-Levenberg, PARTAN, Hessian-Gradient ve Gradient olarak yapılabilir.



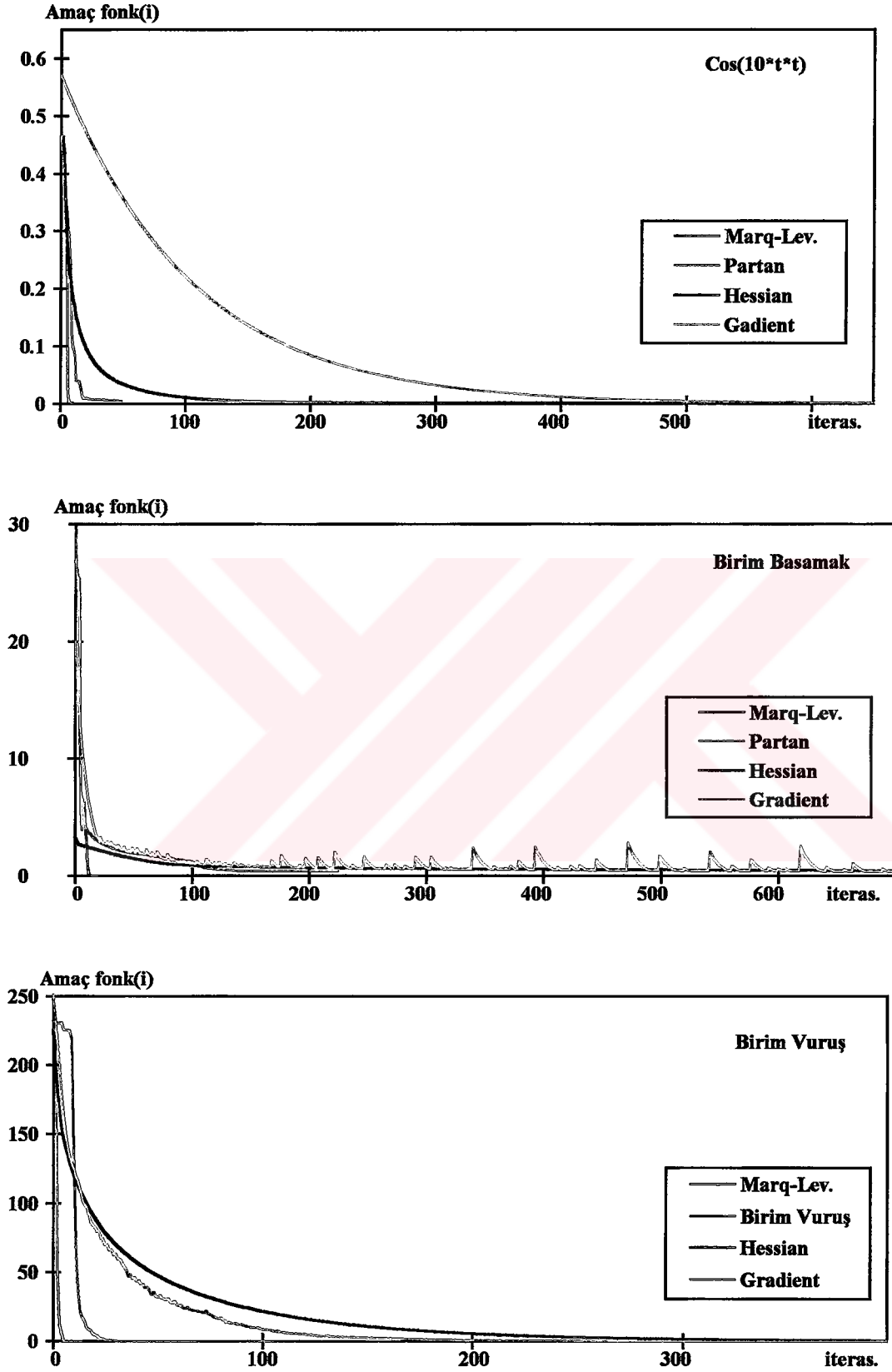
Şekil 17. Giriş $\cos(10t^2)$ işareti olduğu ve 300 data kullanıldığı durumda elde edilen çıkış tepkeleri



Şekil 18. $\text{Cos}(10t^2)$ giriş işareti için 3-4sn aralığındaki $y_2(t)$ çıkış tepkisi



Şekil 19. Giriş işareti $\text{Cos}(10t^2)$ olduğunda 3-3.5sn aralığındaki $y_2(t)$ çıkış tepkisi



Şekil 20. $\text{Cos}(10t^2)$, birim vuruş ve birim basamak girişlerine ait amaç fonksiyonlarının iterasyona göre değişimi

3.3. C MATRİSİNİN DİKDÖRTGEN OLMASI DURUMUNDAKİ SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI

C matrisinin kare olmaması durumunda özgün dizge parametrelerinin kestirimi için, parametre değerlerine göre performans analizi yapılamamaktadır. Bu nedenle bu örnekte çıkış eğrilerinin aynı zaman ekseninde gösterilmesi ile performans analizleri yapılmaya çalışılmıştır.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}(t), \quad u(t) = 100e^{-\frac{(t-0.1)^2}{0.001}}$$

olan tek girişli-tek çıkışlı dizgenin, giriş ve çıkış dataları $\tau = 0.01$ sn aralıklarla bilinmektedir. Bu datalardan 500 tanesi kullanılarak parametrelerin kestirilmesi, aşağıdaki verilen başlangıç değerleri için yapılmıştır.

$$\underline{\theta}_1 = [0.02 \ 0.5 \ -1.5 \ -2 \ 0.1 \ 0.7 \ 0.5 \ 1]^T$$

Verilen başlangıç değerleri kullanılarak; bu çalışmada anlatılan algoritmalar yardımıyla gürültüsüz durumdaki dizgenin durum modeli parametreleri kestirilmeye çalışıldı. Elde edilen sonuçlar, bütün algoritmalar için aşağıda verildiği gibidir.

Marquardt-Levenberg algoritmasının sonuçları:

$$A = \begin{bmatrix} -2.321731 & -4.798686 \\ -0.305562 & -0.631553 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.951164 \\ 0.265763 \end{bmatrix} \quad C = [0.790133 \ 1.633092]$$

Amaç fonk(11)=919.088440

Hessian-Gradient algoritmasının sonuçları:

$$A = \begin{bmatrix} -0.130658 & 1.029492 \\ 0.356401 & -2.808187 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.957687 \\ 0.779957 \end{bmatrix} \quad C = [-0.227476 \ 1.792346]$$

Amaç fonk(532)=919.101135

Gradient algoritmasının sonuçları:

$$A = \begin{bmatrix} -0.137728 & 1.063635 \\ 0.361449 & -2.791361 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.990362 \\ 0.784371 \end{bmatrix} \quad C = [-0.232142 \ 1.792764]$$

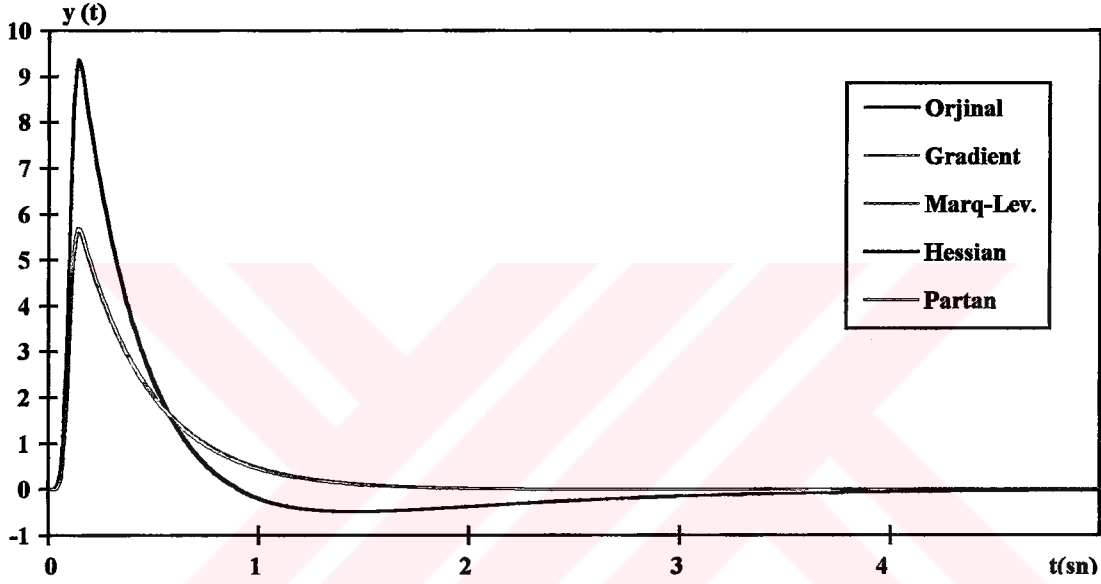
Amaç fonk(2260)=919.124756

PARTAN algoritmasının sonuçları:

$$A = \begin{bmatrix} -0.782217 & -0.797753 \\ -2.125071 & -2.167279 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.104725 \\ -0.079810 \end{bmatrix} \quad C = [1.157207 \ 1.180192]$$

Amaç fonk(250)=919.088501

Kestirilen bu durum modeli parametreleri kullanılarak, durum modeli çözümü yapılır ve herbir algoritmaya ait çıkışlar $\tau=0.01$ sn zaman aralıklarıyla hesaplanır. Herbir algoritma için çıkış eğrileri aynı zaman ekseninde Şekil 21’de gösterildi. Bu Şekilden görüldüğü gibi; kullanılan bütün algoritmalara ait çıkış eğrileri, başlangıç anlarında oldukça yanılıgılı olarak üst üste çakışmaktadır. 4sn’dan sonra, bütün çıkış eğrileri orjinal çıkış eğrisi ile çakışmaktadır. Gürültüsüz durumda, bütün algoritmaların performansı aynı olmaktadır.



Şekil 21. Gürültüsüz durumda kestirilen $y(t)$ çıkışları

Verilen uygulama için; çıkış datalarına işaret/gürültü oranı 70 ve 40 olan toplamsal Gauss gürültüsü eklenerek algoritmaların gürültüye karşı performansları incelendi. İşaret/gürültü oranı olarak, işaret enerjilerinin işarete eklenen toplamsal Gauss gürültüsünün değışintisine oranı olarak tanımlanmıştır. Burada, bütün gürültüler için kestirilen parametre değerlerinin verilmesi gereksiz görüldüğünden dolayı; yalnızca işaret/gürültü oranı 40 ve başlangıç vektörü θ_1 için kestirilen durum modeli parametreleri verilecektir.

Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen parametre değerleri;

$$A = \begin{bmatrix} -2.945481 & -2.232752 \\ -0.820692 & -0.622106 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.974324 \\ 0.278527 \end{bmatrix} \quad C = [1.227768 \quad 0.930681]$$

ve amaç fonksiyonunun son bulduğu iterasyon sayısı ile birlikte değeri

Amaç fonk(11)=791.625

olarak elde edildi.

Hessian-Gradient algoritması ile durum modeli parametreleri;

$$A = \begin{bmatrix} -0.104623 & 0.954770 \\ 0.305412 & -2.787128 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.975590 \\ 0.764148 \end{bmatrix} \quad C = [-0.195340 \quad 1.782632]$$

ve son iterasyondaki amaç fonksiyonunun değeri iterasyon sayısının değeri ile birlikte

$$\text{Amaç fonk}(505)=976.554810$$

olarak elde edildi.

Gradient algoritması ile durum modeli parametreleri;

$$A = \begin{bmatrix} -0.098909 & 0.954018 \\ 0.288437 & -2.782088 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.013250 \\ 0.762485 \end{bmatrix} \quad C = [-0.185026 \quad 1.784647]$$

ve amaç fonksiyonu değeri;

$$\text{Amaç fonk}(2059)=1082.115723$$

olarak belirlendi.

PARTAN algoritması ile elde edilen parametre değerleri;

$$A = \begin{bmatrix} -2.793497 & -0.411197 \\ -1.321679 & -0.194548 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.565531 \\ 0.688243 \end{bmatrix} \quad C = [2.021338 \quad 0.297536]$$

ve amaç fonksiyonunun son iterasyondaki değeri,

$$\text{Amaç fonk}(89)=1004.066956$$

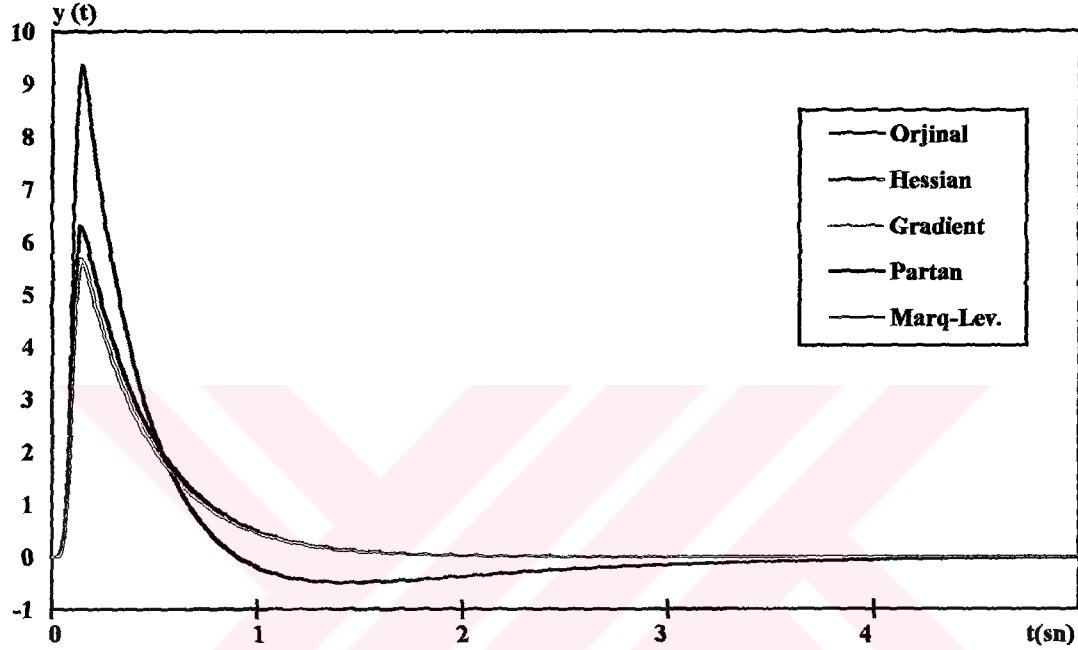
olarak belirlendi.

İşaret/gürültü oranı 70 ve 40 olduğu durumda; bütün algoritmalar kullanılarak kestirilen parametreler için, durum denklemi çözümü yapılarak, 0.01sn aralıklarla $y(t)$ çıkışları hesaplandı. Bu çıkışlar aynı zaman ekseninde; işaret/gürültü oranı 70 olduğu durum için Şekil 22 ve 40 olduğu durum için Şekil 23'de gösterildi. Bu şekillerden görüldüğü gibi, titreşimin olduğu başlangıç anlarında yanılgi oluşmakta, diğer zamanlarda ise bütün algoritmaların eğrileri üst üste çakışmaktadır. Gürültüye karşı en iyi perfonmansı Hessian-Gradient, en kötü perfonmansı ise Gradient algoritmaları vermektedir.

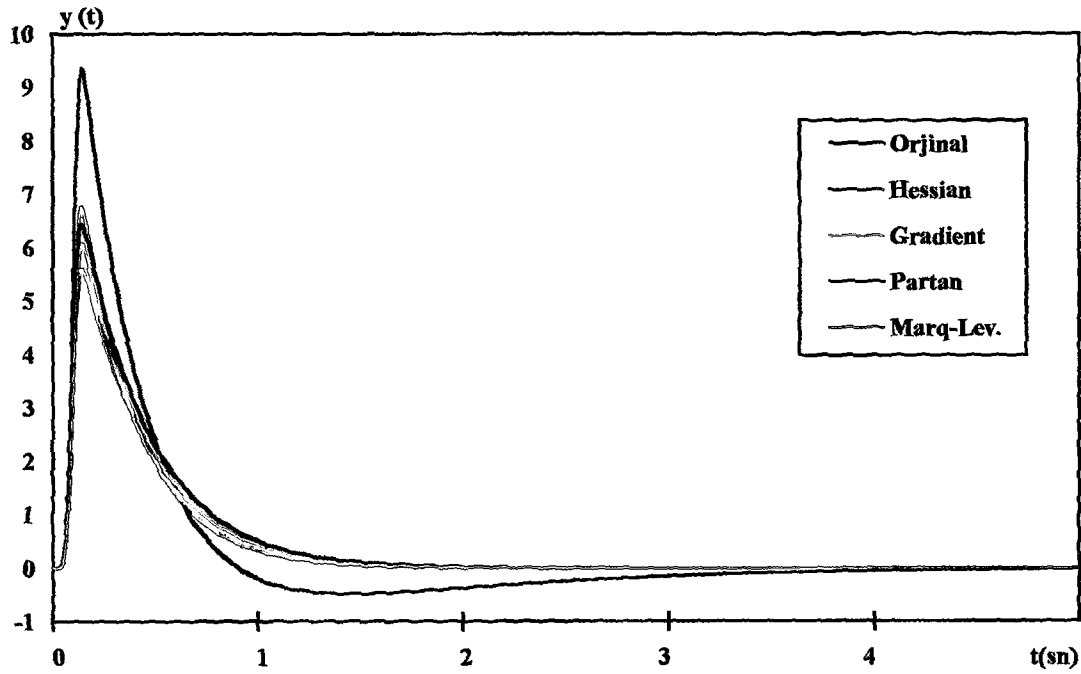
3.4. LEGENDRE FONKSİYONU KULLANILARAK YANILGININ AZALTILMASI

C matrisinin dikdörtgen olması sonucunda elde edilen (9) modelinin çıkış bağıntısında; dikdörtgen matrisin yalancı tersinin alınması sonucunda parametre kestirim değerleri yanılgi olmaktadır. Dikdörtgen C matrisinin tersinin alınması sonucunda elde

edilen dizge çıkışlarında oluşan yanılğı, 7. dereceden Legendre fonksiyonu ile ifade edildi; özgün dizge çıkışları ile, Legendre fonksiyonları eklenen (9) bağıntısındaki çıkışlar arasındaki farkın karesel minimizasyonu ile elde edilen parametre değerleri kestirildi. Burada kullanılan Legendre fonksiyonlarının katsayıları da bilinmeyen dizge parametrelerine ilave



Şekil 22. İşaret/gürültü oranı 70 iken elde edilen $y(t)$ çıkışları



Şekil 23. İşaret/gürültü oranı 40 iken elde edilen $y(t)$ çıkışları

edilmiş ve başlangıç değerleri, sıfır olarak alınmışlardır. Önce gürültüsüz durumda, çıkışlara Legendre fonksiyonları ilave edilerek parametre değerleri kestirildi. Kestirilen bu durum modeli parametreleri kullanılarak çözüm yapıldı ve $y(t)$ çıkışları hesaplandı. Bütün algoritmalar için elde edilen çıkış eğrileri Şekil 24’de gösterilmektedir.

Çıkışlara Legendre fonksiyonları ilave edilerek, işaret/gürültü oranı 40 ve başlangıç vektörü θ_1 için; Marquardt-Levenberg algoritması ile kestirilen parametre değerleri;

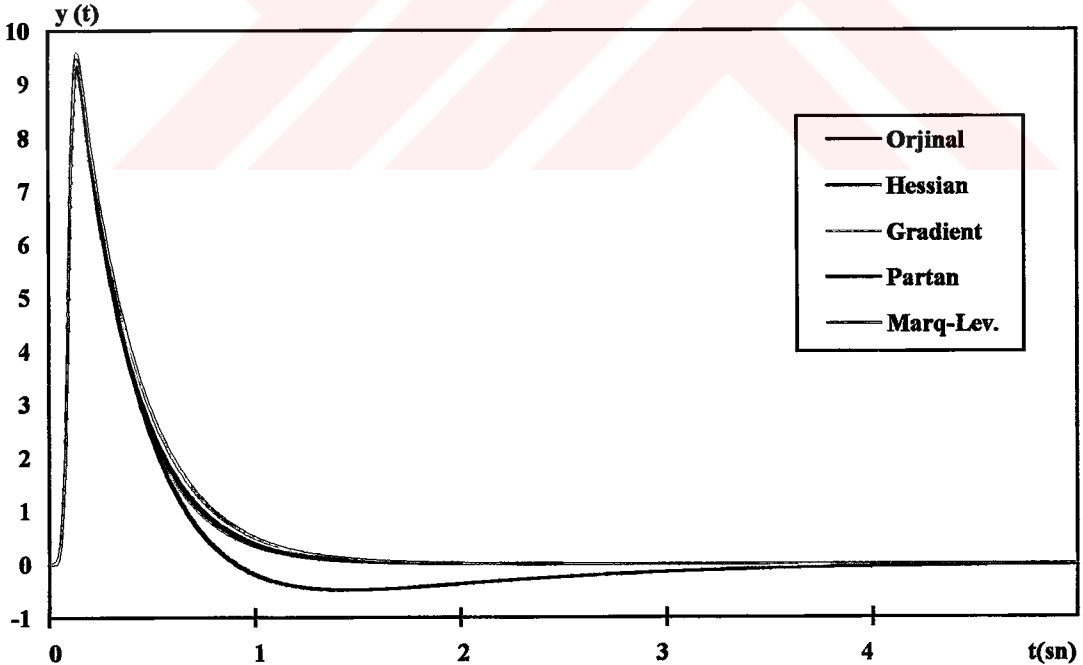
$$A = \begin{bmatrix} -3.441461 & -10.436787 \\ -0.270542 & 0.820463 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3.075785 \\ 0.584733 \end{bmatrix} \quad C = [0.394335 \quad 1.195885]$$

ve amaç fonksiyonunun son itereasyon değeri ile birlikte değeri

$$\text{Amaç fonk}(184)=189.794588$$

olarak elde edildi.

Parametrelerin kestiriminde Legendre fonksiyonlarının çıkışlara ilave edilmesinin bu örnek için çok yararlı olduğunu göstermek amacıyla; Marquardt-Levenberg algoritması ile elde edilen parametre değerleri kullanılarak her iki durumda elde edilen $y(t)$ çıkışı Şekil 25’de gösterilmiştir.



Şekil 24. Legendre fonksiyonları ile gürültüsüz durumda kestirilen $y(t)$ çıkışları

Bu örnek için yapılan incelemelerde, Marquardt-Levenberg algoritmasının, çıkışlara Legendre fonksiyonu ilave edilmesi ile elde edilen sonucunun, sadece Marquardt-Levenberg

algoritması kullanılan yöntemle göre daha iyi sonuç verdiği gözlenmiştir. Ayrıca, en son iterasyondaki amaç fonksiyonlarının değerlerine bakıldığında, Legendre fonksiyonlarının kullanılması sonucunda bu değerin oldukça azalmış olduğu görülmektedir.

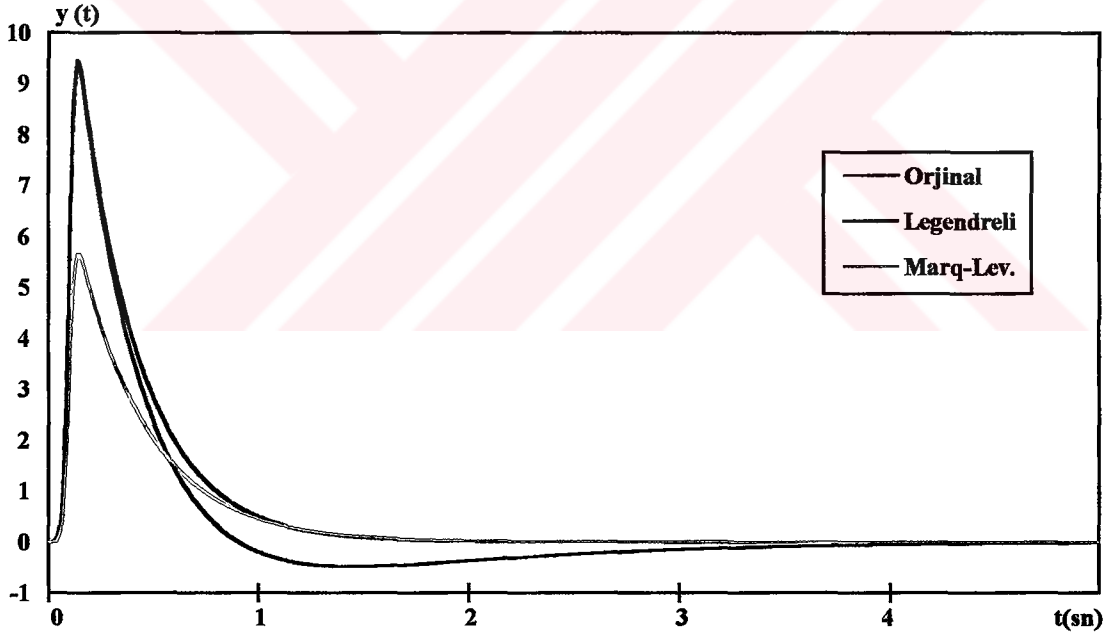
Bu çalışmada anlatılan bütün algoritmalar kullanılarak, işaret/gürültü oranı 40 ve başlangıç vektörü $\underline{\theta}_1$ iken parametre değerleri ayrı ayrı elde edildi. $y(t)$ çıkışına, başlangıç değerleri sıfır alınan Legendre fonksiyonları ilave edilerek, parametreler Hessian-Gradient algoritması ile belirlendi. Bu parametreler,

$$A = \begin{bmatrix} -0.03201 & 1.000956 \\ 0.118101 & -3.692874 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.984676 \\ 0.999597 \end{bmatrix} \quad C = [-0.066326 \quad 2.073940]$$

olarak elde edildi. Amaç fonksiyonu ise;

$$\text{Amaç fonk}(1418)=191.063889$$

değerindedir.



Şekil 25. Marquardt-Levenberg algoritması için; gürültüsüz, Legendreli ve Legendresiz durumda kestirilen $y(t)$ çıkışları

Gradient algoritması, Legendre fonksiyonları ile birlikte kullanılırsa;

$$A = \begin{bmatrix} 0.220276 & 1.376500 \\ 0.663185 & -4.144227 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.443525 \\ 1.109349 \end{bmatrix} \quad C = [-0.317257 \quad 1.982527]$$

$$\text{Amaç fonk}(1742)=180.813263$$

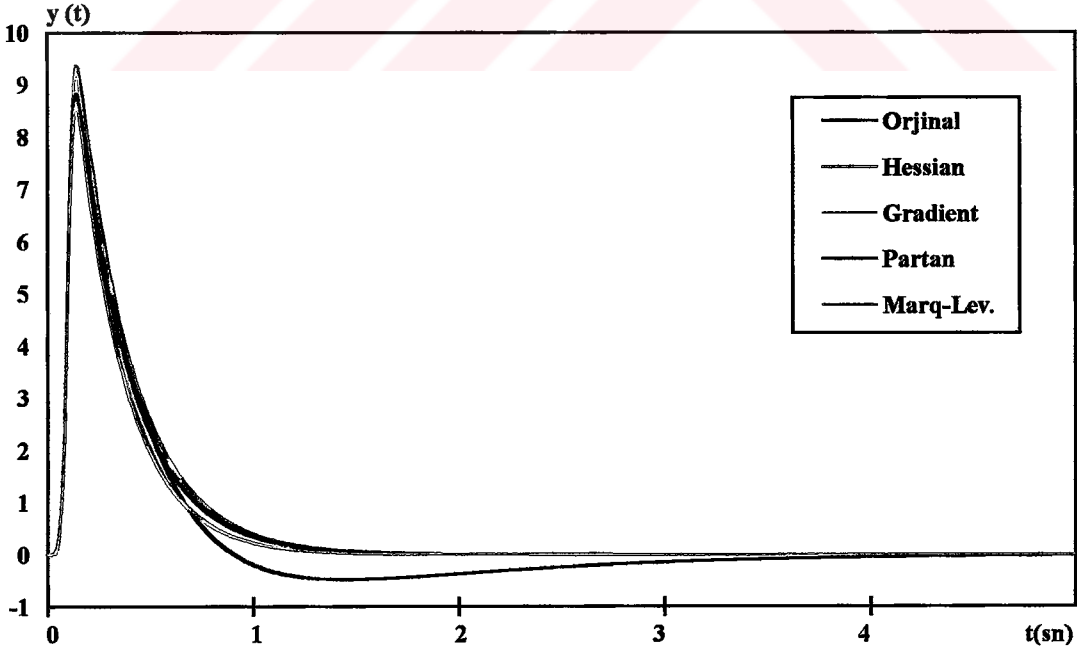
sonuçları elde edildi. PARTAN algoritması ile elde edilen parametre değerleri;

$$A = \begin{bmatrix} -0.186515 & 1.037220 \\ 0.653529 & -3.634299 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.00193 \\ -0.93819 \end{bmatrix} \quad C = [0.366206 \quad -2.036487]$$

ve Amaç fonk(118)=156.987991 değerinde olacaktır.

Burada Legendre fonksiyonları kullanılarak kestirilen durum modeli parametreleri, özgün dizgenin parametre değerlerinden farklı değerlere sahiptir. Fakat çıkış eğrileri ise; özgün dizgenin çıkış eğrisine oldukça yakındır. Öyleyse kestirilen parametreler, özgün dizgenin bir eşdeğer modelinin parametreleridirler.

Marquardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmaları kullanılarak, işaret/gürültü oranı 40 olduğu durumda elde edilen yukardaki parametre değerleri için, Legendre fonksiyonu kullanılarak elde edilen $y(t)$ çıkış eğrileri, Şekil 26'da gösterilmiştir. Bu şekillerden de görüldüğü gibi, çıkış bağıntılarına Legendre fonksiyonlarının eklenmesi sonucunda elde edilen parametrelere göre çizilen çıkış eğrileri, gürültülü durumda dahi, orjinal çıkış eğrisine oldukça yakındır ve amaç fonksiyonunun değeri Legendresiz duruma göre oldukça düşük olmaktadır. Gürültüsüz durumda yanılğı oldukça azalmaktadır.



Şekil 26. İşaret/gürültü oranı 40 olduğu ve Legendre fonksiyonları kullanıldığı durumda, her algoritma ile kestirilen parametrelere göre $y(t)$ çıkışları

3.5. LEGENDRE FONKSİYONLARININ FARKLI ÖRNEKLERE UYGULANMASI

Legendre fonksiyonlarının dizge çıkışların belirlenmesindeki etkisini incelemek amacıyla durum modeli aşağıdaki gibi verilen iki girişli-iki çıkışlı bir dizge ele alındı.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100e^{-(t-0.1)^2/0.001} \\ 10e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Parametreler için başlangıç vektörü aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$\underline{\theta} = [1 \ 1 \ 0.2 \ 0.6 \ 1 \ 0.8 \ -3 \ -7 \ 1 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.9 \ 0.7 \ 1.2 \ 0.9 \ 0.3 \ 0.1 \ -1.2 \ 0.1 \ 0.2 \ 1.1]^T$$

Bu dizgenin $\tau=0.01$ sn aralıklarla $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışları ölçüldü. Bu başlangıç vektörü ve ölçülen datalardan 500 tanesi kullanılarak; işaret/gürültü oranının 40 olduğu ve gürültünün olmadığı durumlarda, Marquardt-Levenberg, Hessian-Gradient, Gradient ve PARTAN algoritmalarının hepsi için dizgenin durum modeli parametreleri kestirilir. Legendre fonksiyonlarının başlangıç değerleri sıfır alınmıştır. Burada Gürültüsüz durumda elde edilen durum modeli parametreleri; Legendre fonksiyonlarının eklenmesi ve eklenmemesi durumları için ayrı ayrı verilecektir:

Önce, Legendre fonksiyonlarını kullanan Marquadt-Levenberg algoritması ile kestirilen parametre değerlerini verelim.

$$A = \begin{bmatrix} 0.150634 & 1.013353 & -0.505523 \\ 0.196845 & -0.138743 & 0.948097 \\ -1.100686 & -2.371183 & -1.840943 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.675525 & 0.121775 \\ -0.027129 & -0.416930 \\ 1.165851 & 1.004237 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.017287 & 0.874374 & -0.89163 \\ 0.455710 & 1.096493 & 0.635992 \end{bmatrix}$$

Amaç fonksiyonunun en son iterasyondaki değeri ise;

$$\text{Amaç fonk}(10000)=0.254227$$

olarak hesaplandı. Legendre fonksiyonları kullanılmadan aynı algoritma ile kestirilen parametreler;

$$A = \begin{bmatrix} 0.408912 & 0.037264 & -0.871350 \\ -2.474382 & -0.880346 & 6.120526 \\ 0.409828 & -0.271058 & -0.474021 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.507749 & -0.485289 \\ 12.845069 & -4.049433 \\ 1.202951 & 0.932819 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.102599 & 0.146638 & -2.409303 \\ 0.201151 & 0.171095 & -0.626418 \end{bmatrix}$$

ve amaç fonksiyonu,

$$\text{Amaç fonk}(829)=35.686230$$

değerlerine sahiptirler. Legendre fonksiyonu kullanan Gradient algoritması ile elde edilen sonuçlar,

$$A = \begin{bmatrix} -0.260463 & 0.254737 & -0.893460 \\ 0.283092 & -0.264549 & 1.499952 \\ 0.935715 & -1.030492 & -1.742169 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.252446 & 0.579306 \\ 1.080614 & 0.094317 \\ 1.043139 & 1.143192 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.449647 & 0.442533 & -1.423443 \\ -0.5427540 & 0.582002 & 0.335405 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(49999)=2.329204$$

değerlerine sahiptirler. Legendre fonksiyonu kullanmayan Gradient algoritması ile kestirilen parametreler;

$$A = \begin{bmatrix} -0.685888 & -0.782911 & 0.3632624 \\ 2.919248 & -0.728945 & -1.112383 \\ -1.013863 & -0.510856 & 0.467931 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.598308 & 0.712891 \\ 0.236152 & 1.537886 \\ 1.243114 & 0.734468 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.200529 & -2.279835 & 0.161725 \\ -1.444874 & -0.509613 & 0.643529 \end{bmatrix}$$

ve amaç fonksiyonunun son değeri,

$$\text{Amaç fonk}(3288)=40.251148$$

olarak hesaplandı. Hessian-Gradient algoritması, Legendre fonksiyonlarının var olduğu durumda uygulanması sonucunda kestirilen parametre değerleri;

$$A = \begin{bmatrix} -0.056883 & 0.062694 & -0.434989 \\ -0.079411 & 0.024290 & 1.071876 \\ 1.705638 & -1.346268 & -1.126576 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.480186 & 1.120880 \\ 1.425926 & -0.215950 \\ 0.922528 & 1.342998 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.657646 & 0.602996 & -1.793928 \\ -0.918252 & 0.748266 & 0.017133 \end{bmatrix}$$

ve amaç fonksiyonunun değeri,

$$\text{Amaç fonk}(2021)=23.894541$$

olarak belirlenir. Legendre fonksiyonları kullanılmadan ise;

$$A = \begin{bmatrix} 0.000425 & 0.014674 & -0.362800 \\ -0.134912 & 0.064851 & 1.007991 \\ 1.843785 & -1.414192 & -1.015801 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.514597 & 1.120880 \\ 1.425926 & -0.215950 \\ 0.922528 & 1.342998 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.691424 & 0.622104 & -1.837452 \\ -0.975884 & 0.773700 & -0.071257 \end{bmatrix}$$

parametre değerleri ve amaç fonksiyonunun değeri de;

$$\text{Amaç fonk}(1801)=35.742207$$

olarak bulunur. Aynı uygulamalar PARTAN algoritması için yapılırsa aşağıdaki parametreler elde edilir. Önce Legendre fonksiyonları varken elde edilen sonuçları verelim.

$$A = \begin{bmatrix} -0.035490 & 0.042610 & -0.416030 \\ -0.104044 & 0.043711 & 1.059130 \\ 1.753576 & -1.333356 & -1.107755 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.494853 & 1.099106 \\ 1.417553 & -0.161736 \\ 0.935032 & 1.306206 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.686005 & 0.601476 & -1.807709 \\ -0.947020 & 0.742280 & -0.023853 \end{bmatrix}$$

$$\text{Amaç fonk}(1000)=28.371107$$

Legendre fonksiyonları kullanılmayan PARTAN algoritması ile;

$$A = \begin{bmatrix} 0.022184 & -0.005563 & -0.374524 \\ -0.118949 & 0.060126 & 1.032139 \\ 1.785977 & -1.351966 & -1.027932 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.542822 & 1.141974 \\ 1.430311 & -0.235666 \\ 0.641524 & -2.316855 \end{bmatrix}$$

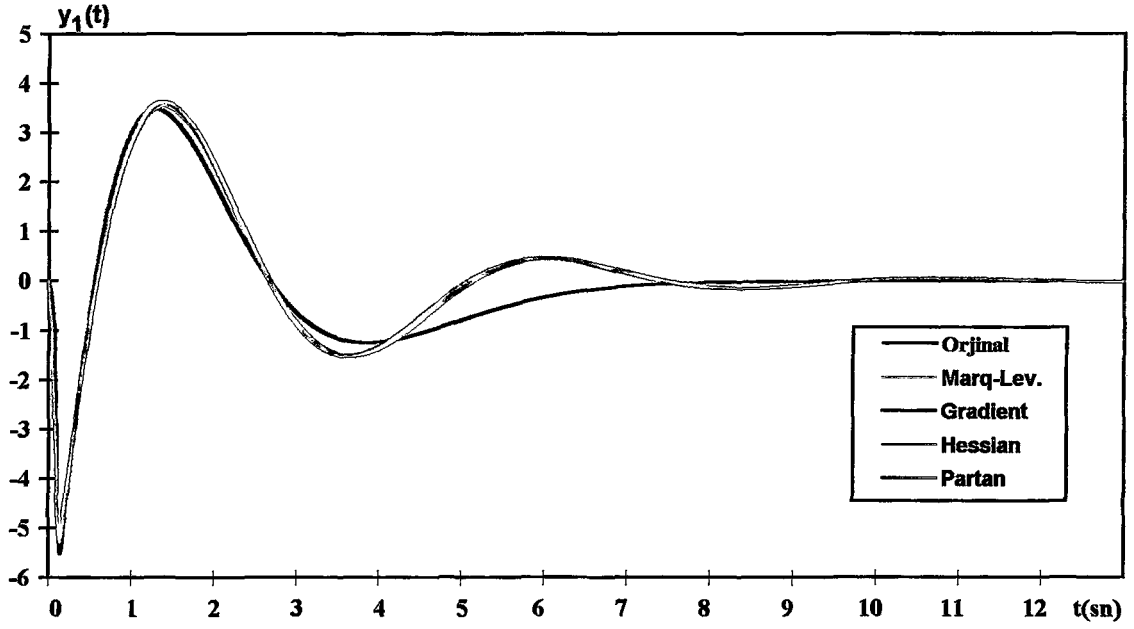
$$C = \begin{bmatrix} -0.704986 & 0.603878 & -1.855897 \\ 0.966070 & 0.750745 & -0.070212 \end{bmatrix}$$

parametreleri hesaplanır. Bu durumdaki amaç fonksiyonunun değeri ise,

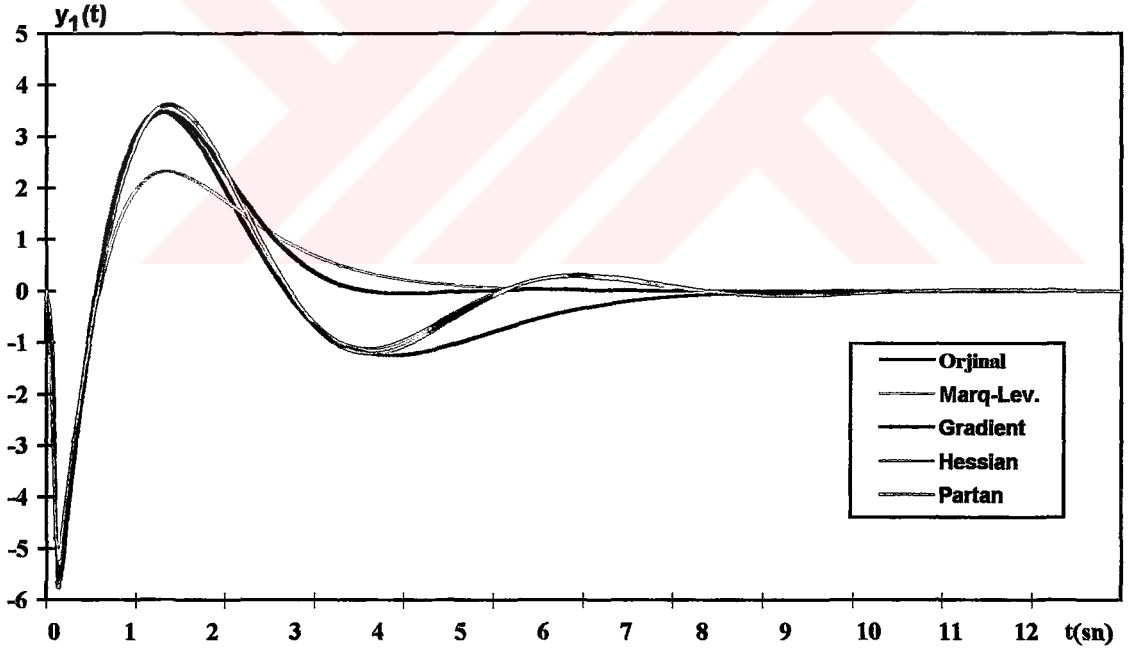
$$\text{Amaç fonk}(111)=632.677280$$

değerinde son bulur.

Gürültüsüz durumda, bütün algoritmalar için kestirilen parametre değerlerine bağlı olarak $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışları $\tau=0.01$ aralıklarla hesaplanır. Hesaplanan bu $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışları Şekil 27 ve Şekil 28'de bütün algoritmalar için aynı eksen takımı üzerinde gösterilmiştir. İşaret/gürültü oranının 40 olduğu durumda elde edilen parametre değerleri aynı biçimde hesaplandı. Fakat burada elde edilen parametre değerleri verilmeyecek, yalnızca $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkış eğrileri, Legendre fonksiyonlarının eklenmesi ve eklenmemesi durumları için Şekil 29 ve Şekil 30'da gösterilecektir.



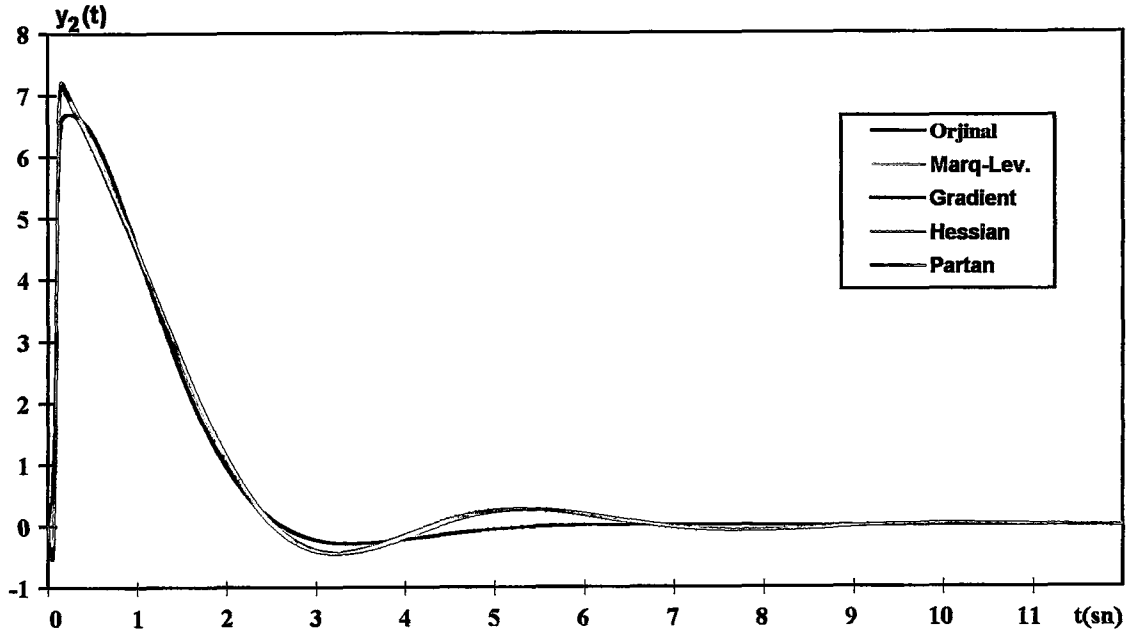
(a)



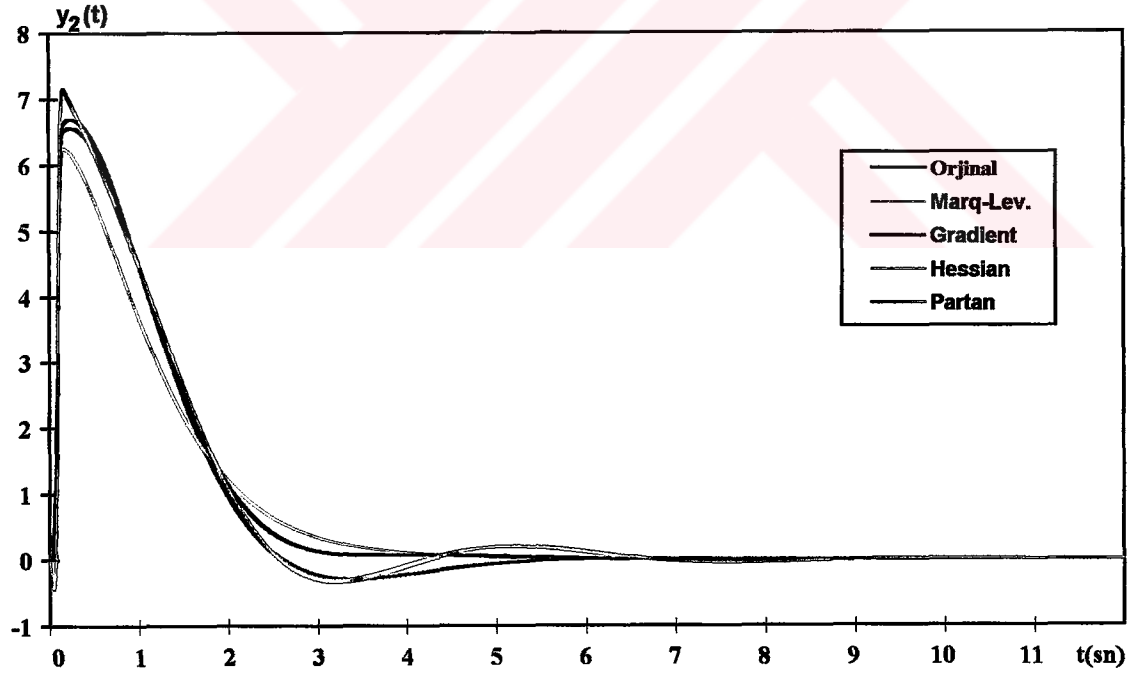
(b)

Şekil 27. Gürültüsüz durumda kestirilen $y_1(t)$ çıkış eğrileri

- a) Legendre fonksiyonu kullanılmadan kestirilen parametrelere göre
 b) Legendre fonksiyonu kullanılarak kestirilen parametrelere göre



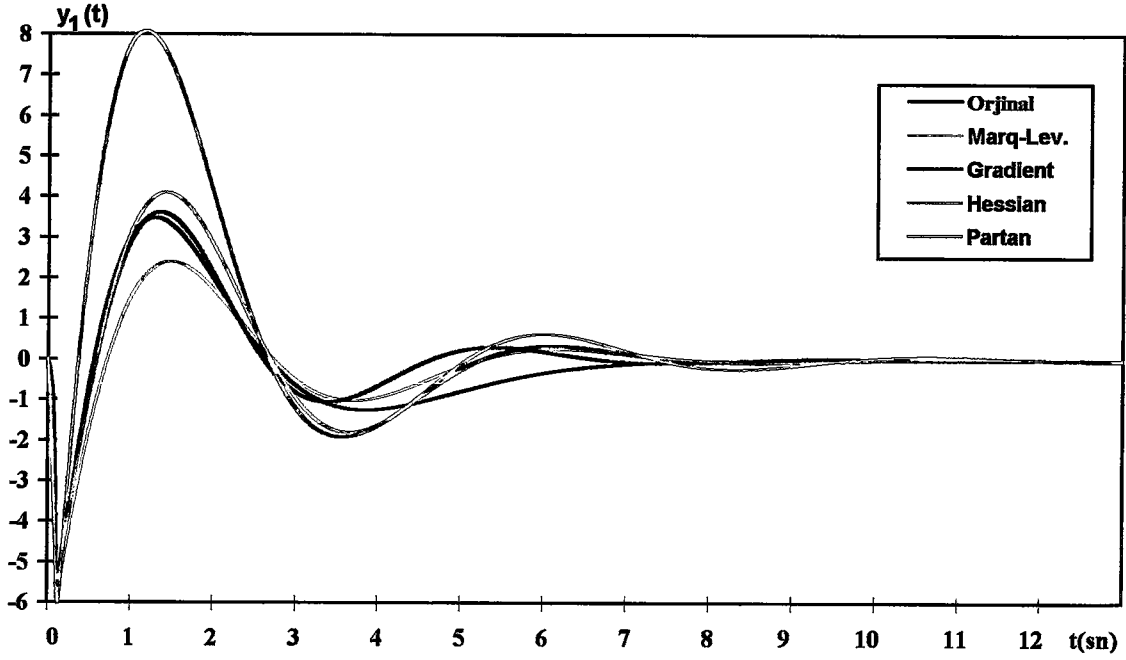
(a)



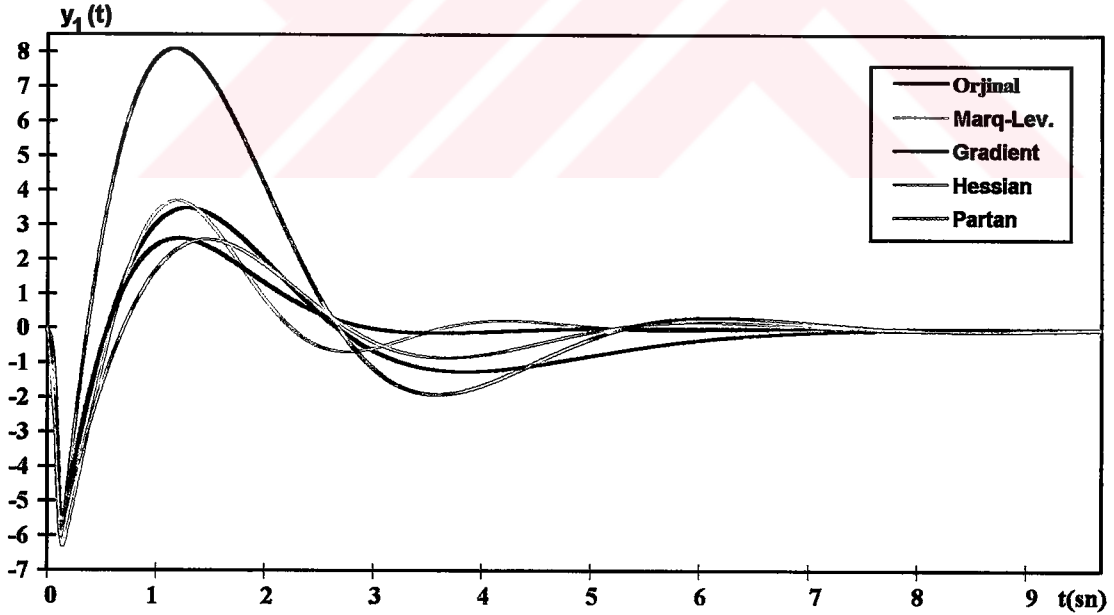
(b)

Şekil 28. Gürültüsüz durumda kestirilen $y_2(t)$ çıkış eğrileri

- a) Legendre fonksiyonu kullanılmadan kestirilen parametrelere göre
- b) Legendre fonksiyonu kullanılarak kestirilen parametrelere göre



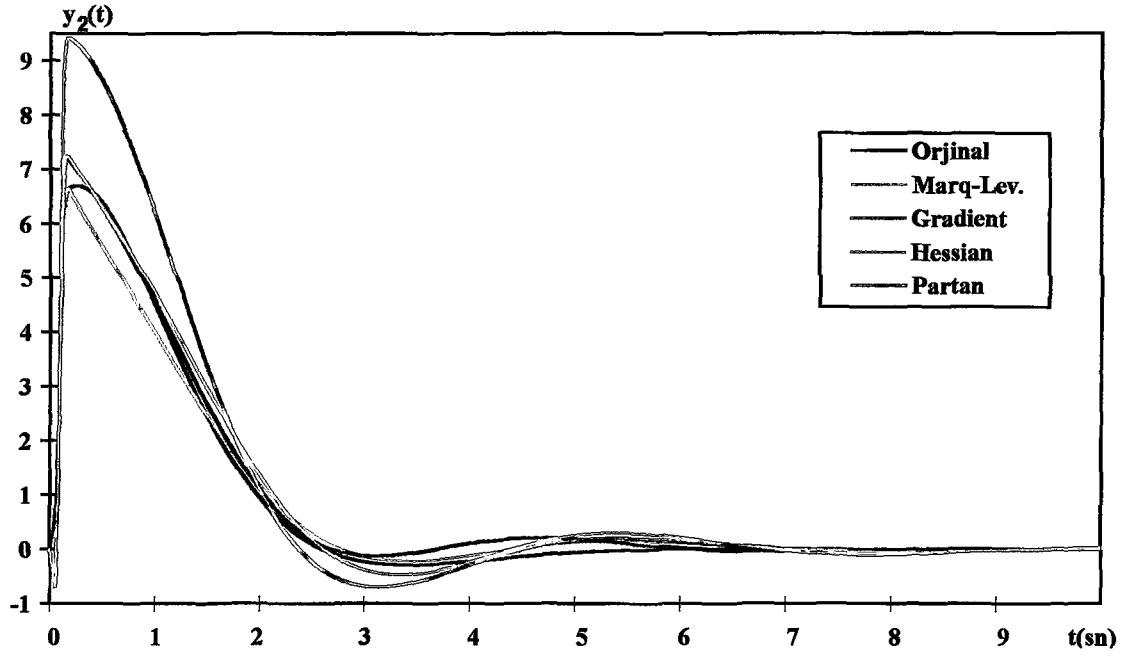
(a)



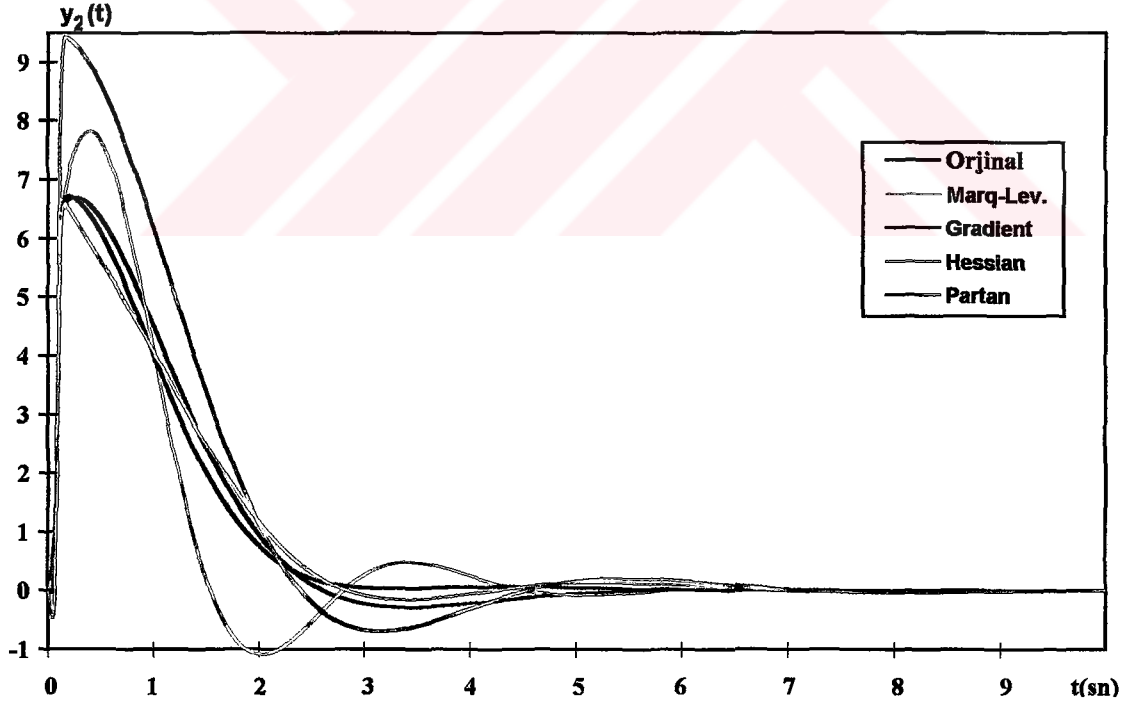
(b)

Şekil 29. İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen $y_1(t)$ çıkış eğrileri

- a) Legendre fonksiyonu kullanılmadan kestirilen parametrelere göre
- b) Legendre fonksiyonu kullanılarak kestirilen parametrelere göre



(a)



(b)

Şekil 30. İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen $y_2(t)$ çıkış eğrileri

- a) Legendre fonksiyonu kullanılmadan kestirilen parametrelere göre
 b) Legendre fonksiyonu kullanılarak kestirilen parametrelere göre

Şekillerden görüldüğü gibi, bu örnek için, çıkışlara Legendre fonksiyonlarının eklenmesi ile çıkış eğrileri biraz daha bozulmuştur. PARTAN algoritması ile elde edilen modelin çıkış eğrileri başlangıç anlarında çok fazla yanılıklı olmaktadır. Diğer algoritmalar için şu söylenebilir: Geçici durumun başlangıç anı ve sürekli durumda orijinal çıkış eğrisi ile kestirilen çıkış eğrileri birbirini iyi izlemekte, diğer zamanlarda ise izleme iyi olmamaktadır. Burada C matrisinin dikdörtgen olması sonucunda elde edilen parametre kestirim değerlerindeki yanılığın azaltılmasında Legendre fonksiyonlarının iyi yönde etkisi olmamıştır.

Şekil 27 ve 28'deki Legendre fonksiyonları kullanılmadan yapılan çözümlerde, bütün algoritmalarla elde edilen çıkış eğrileri çakışmaktadır, yani gürültüsüz durumda performanslarının aynı olduğunu söyleyebiliriz. Gürültülü durumda, PARTAN algoritması çok kötü sonuç vermekte ve en iyi performansı ise, Hessian-Gradient algoritması göstermektedir. Sonuç olarak; bu örnek için Legendre fonksiyonlarının kullanılarak parametre değerlerinin kestirimi, $y(t)$ çıkış eğrisindeki yanılığı azaltmamasına rağmen amaç fonksiyonunun değerinin daha küçük bir değere ulaşmasını sağlamaktadır.

3.6. DEĞİŞİK BOYUTLU UYGULAMALAR

Uygulama 1:

Bir girişli-bir çıkışlı, dördüncü dereceden bir dizgeyi ele alalım. Bu dizgenin durum modeli aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2525 & -3502.7 & 1357.3 & -113.32 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad u(t) = \text{birim basamak işlevi}$$

$$\underline{y}(t) = [18084.9 \quad 11336.16 \quad 951.649 \quad 0] \underline{x}(t)$$

Parametreler için başlangıç değerleri vektörü aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$\underline{\theta} = [1 \ 1 \ 0.2 \ 0.6 \ 1 \ 0.8 \ -3 \ -7 \ 1 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.9 \ 0.7 \ 1.2 \ 0.9 \ 0.3 \ 0.1 \ -1.2 \ 0.1 \ 0.2 \ 1.1]^T$$

Bu dizgenin $\tau = 0.01$ sn aralıklarla $y(t)$ çıkışı ölçüldü. Ölçülen bu datalardan 500 tanesi ve $\underline{\theta}$ başlangıç vektörü kullanılarak; Marquardt-Levenberg, Hessian-Gradient, PARTAN ve Gradient algoritmaları yardımıyla parametreler ayrı ayrı kestirildi. Farklı gürültü seviyeleri

ile bozulan çıkışlar için, her bir algoritma ile kestirilen parametrelere göre elde edilen $y(t)$ çıkışları Şekil 31 ve Şekil 32’de gösterilmiştir.

Bu örnekte verilen parametre başlangıç koşulları kullanılarak, işaret/gürültü oranı 70 olduğu durumda; Marquardt-Levenberg, Hessian-Gradient, PARTAN ve Gradient algoritmalarının uygulama sonuçları için, amaç fonksiyonlarının aldıkları en son iterasyondaki değerleri ve kestirilen parametrelerin matrisel değerleri aşağıdaki verilmiştir.

Marquardt-Levenberg algoritması ile elde edilen A, B, ve C matrisleri,

$$A = \begin{bmatrix} 0.078602 & 0.083148 & 0.096248 & 0.00025 \\ -0.39341 & -0.416166 & -0.481732 & -0.001253 \\ 0.351766 & 0.372113 & 0.430738 & 0.001120 \\ -431.6641 & -456.6326 & -528.5739 & -1.374401 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.203951 \\ -0.997927 \\ 0.801353 \\ 195.85905 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.125978 \quad 1.319518 \quad 1.583445 \quad 0.095591]$$

ve amaç fonksiyonunun en son iterasyondaki değeri,

$$\text{Amaç fonk}(14)=13.777989$$

olarak bulunur. Hessian-Gradient algoritması ile edilen A, B, ve C matrisleri,

$$A = \begin{bmatrix} 0.125062 & 0.078393 & 0.065808 & 0.006224 \\ 1.886883 & 1.182759 & 0.992879 & 0.093911 \\ -5.359661 & -3.359608 & -2.820257 & -0.266754 \\ 5.431695 & 3.404761 & 2.858161 & 0.270399 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.000321 \\ -0.000201 \\ -0.000169 \\ 0.999984 \end{bmatrix}$$

$$C = [18.0849 \quad 11.336198 \quad 9.516286 \quad 0.900097]$$

ve amaç fonksiyonu

$$\text{Amaç fonk}(7)=0.010134$$

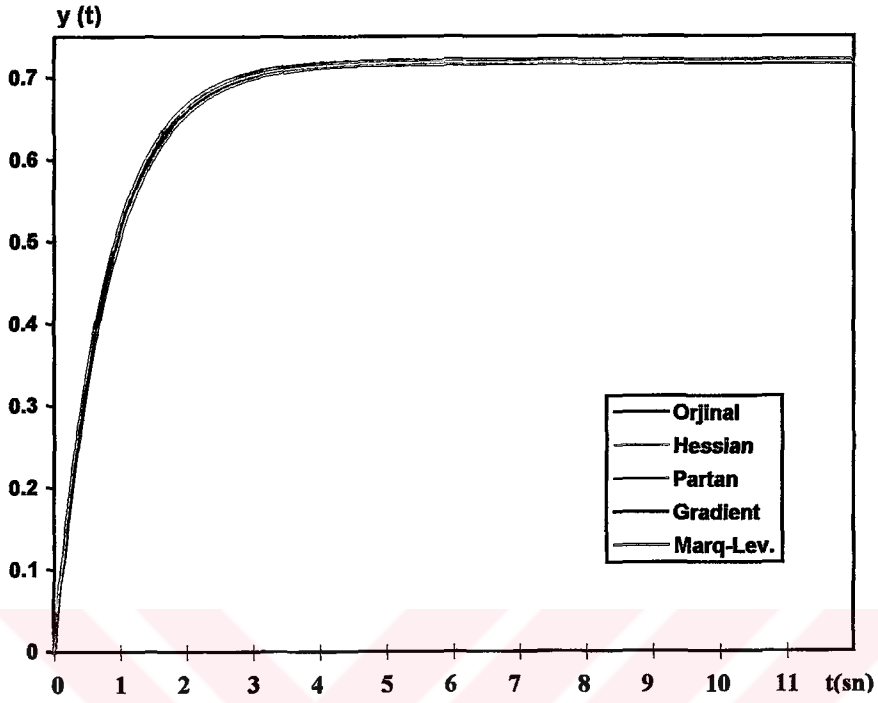
değerlerine sahiptirler. PARTAN algoritması kullanılarak,

$$A = \begin{bmatrix} -0.21653 & -0.254281 & -0.304238 & 0.017602 \\ 0.729802 & -0.85704 & -1.025418 & -0.059327 \\ -0.121544 & -0.142735 & -0.170777 & -0.00988 \\ 0.102237 & 0.120062 & 0.143649 & 0.008311 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.327716 \\ -0.851111 \\ 0.980037 \\ 1.013172 \end{bmatrix}$$

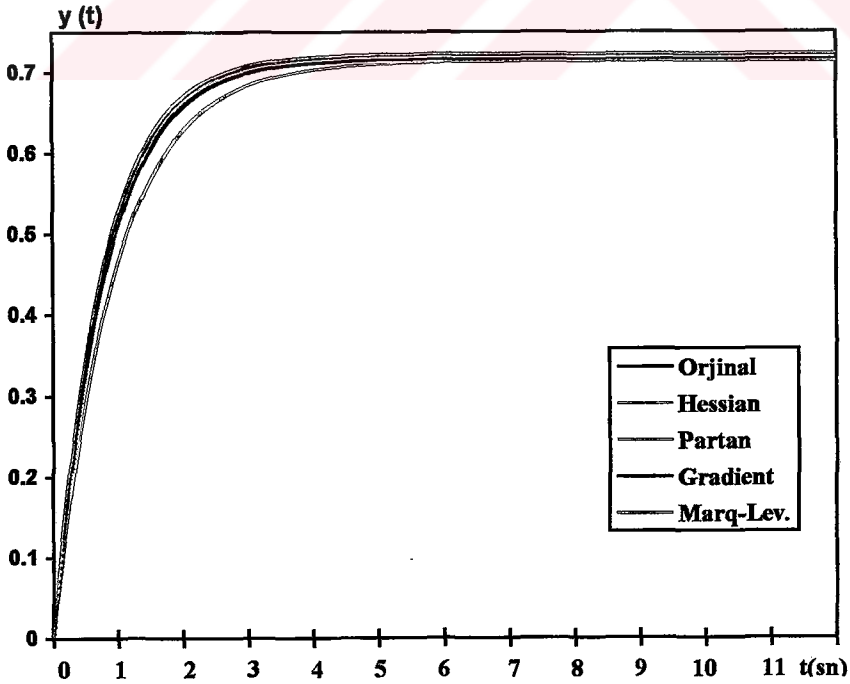
$$C = [1.124543 \quad 1.320603 \quad 1.580053 \quad 0.091416]$$

parametreleri elde edilir ve amaç fonksiyonunun değeri,

$$\text{Amaç fonk}(6)=0.013033$$



Şekil 31. İşaret/gürültü oranı 70 iken kestirilen ve orjinal $y(t)$ çıkışları



Şekil 32. İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen ve orjinal $y(t)$ çıkışları

biçimindedir. Son olarak Gradient algoritması için elde edilen parametre değerleri,

$$A = \begin{bmatrix} -0.226418 & -0.265336 & -0.318407 & -0.019222 \\ -0.740150 & -0.867372 & -1.040861 & -0.062836 \\ -0.136166 & -0.159571 & -0.191488 & -0.11560 \\ 0.097732 & 0.1145310 & 0.1374390 & 0.008297 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.333158 \\ -0.841945 \\ 0.986149 \\ 1.005775 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.125978 \quad 1.319518 \quad 1.583445 \quad 0.095591]$$

ve amaç fonksiyonunun değeri,

$$\text{Amaç fonk}(13294)=13.778405$$

olarak elde edildi. Özgün dizgenin durum modeli parametreleriyle, bu sonuçlar karşılaştırıldığında; bütün algoritmalarla kestirilen parametre değerleri çok farklı değerlere yakınsadığı görülmektedir. Fakat Şekil 31 ve Şekil 32'de görüldüğü gibi; işaret/gürültü oranı 70 ve 40 olduğu durumlarda dahi elde edilen $y(t)$ çıkış eğrileri özgün dizgenin çıkış eğrisine oldukça yakınsamaktadır. Özellikle; işaret/gürültü oranı 70 olduğu durumda Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmalarının kullanılması ile elde edilen çıkış eğrileri, orjinal dizgenin çıkış eğrisiyle tamamen çakışmaktadır. Öyleyse; bu parametrelerin, özgün dizgenin farklı bir eşdeğerinin parametreleri olduğunu söyleyebiliriz.

Gradient algoritması ve Marquardt-Levenberg algoritması diğer algoritmalarla göre daha fazla yanılıklı olmaktadır. Bu amaç fonksiyonlarının değerlerine bakıldığında daha açık bir şekilde gözlenmektedir. Yine de işaret/gürültü oranı 70 olduğu durumda, Gradient algoritması ve Marquardt-Levenberg algoritması kullanılarak elde edilen parametrelerin çıkış eğrileri, özgün dizgenin çıkış eğrilerine oldukça yakındır. Yalnızca işaret/gürültü oranı 40 olduğu durumda PARTAN algoritmasının sonuçlarında daha fazla yanılı ortaya çıkmaktadır. Bu örnek için Legendre fonksiyonlarının kullanılmasına gerek duyulmamıştır.

Uygulama 2:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \sin 2t \end{bmatrix}, \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Durum modeli ile ifade edilen iki girişli-bir çıkışlı bir dizgenin çıkışları ve girişleri, $\tau=0.01$ sn aralıklarla ölçülerek, parametre kestirim algoritmaları için datalar belirlendi. Bu dataların 500 tanesi ve parametre başlangıç vektörü;

$$\underline{\theta} = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad -0.5 \quad 2 \quad 0.2 \quad 0.9]^T$$

kullanılarak, bu çalışmada oluşturulan durum modeli parametre kestirim algoritmaları, farklı gürültüler için uygulandı. Her algoritma için elde edilen parametreler ve amaç fonksiyonunun değerleri ayrıntılı olarak aşağıda verildi:

İşaret/gürültü oranı 70 olduğu durumda Marquardt-Levenberg algoritması için parametre değerleri;

$$A = \begin{bmatrix} -0.100746 & -0.467632 \\ -0.443444 & -2.058327 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.085031 & 3.146206 \\ -0.501074 & 2.011490 \end{bmatrix} \quad C = [0.200566 \quad 0.930964]$$

ve amaç fonksiyonunun son iterasyondaki değeri;

$$\text{Amaç fonk}(5)=4.159314$$

olarak hesaplandı. Aynı işaret/gürültü oranı için Hessian-Gradient algoritması uygulandığında;

$$A = \begin{bmatrix} 0.075092 & 0.347220 \\ -0.452140 & -2.090654 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.034279 & 1.986076 \\ -0.348687 & 1.939057 \end{bmatrix} \quad C = [0.197609 \quad 0.913728]$$

parametre değerleri ve

$$\text{Amaç fonk}(82)=4.159325$$

değerinde amaç fonksiyonu bulunur. Gradient algoritması kullanılarak, kestirilen parametre değerleri matrisel olarak ifade edildiğinde,

$$A = \begin{bmatrix} 0.079315 & 0.335532 \\ -0.469452 & -1.985971 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.032949 & 1.986494 \\ -0.360860 & 1.946716 \end{bmatrix} \quad C = [0.207020 \quad 0.875777]$$

biçimindedir. Amaç fonksiyonunun en son iterasyondaki değeri,

$$\text{Amaç fonk}(11)=15.447195$$

olarak elde edildi. Partan algoritması kullanıldığında kestirilen parametreler,

$$A = \begin{bmatrix} 0.071697 & 0.352880 \\ -0.394396 & -1.941152 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.000158 & 1.998367 \\ -0.500703 & 1.990898 \end{bmatrix} \quad C = [0.179217 \quad 0.882073]$$

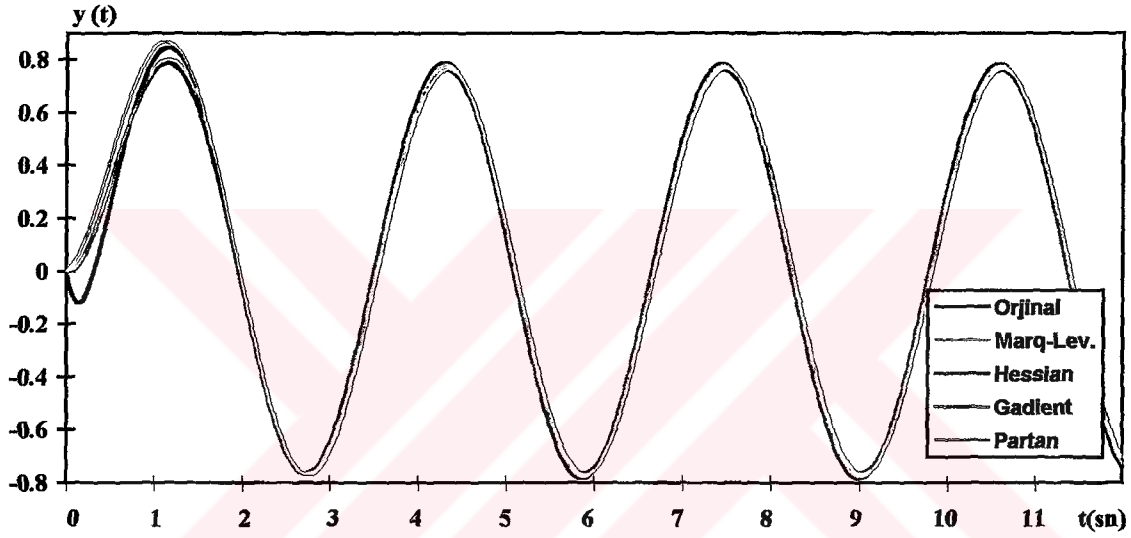
ve amaç fonksiyonu,

$$\text{Amaç fonk}(4)=18.304049$$

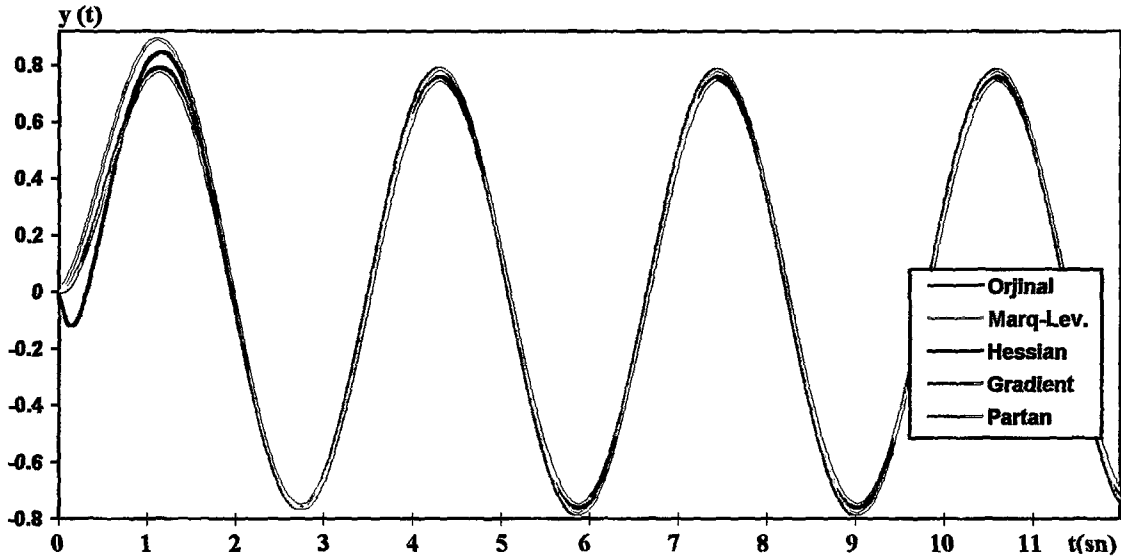
olarak belirlendi. Bu uygulamalarda belirlenen parametre değerlerinden yararlanılarak, $y(t)$ çıkış eğrileri aynı eksen takımı üzerinde Şekil 33'de gösterilmiştir. Aynı uygulamalar işaret/gürültü oranı 40 iken ve gürültüsüz durumda tekrarlandı. Burada bu uygulamaların sonuçları, yalnızca $y(t)$ eğrileri kullanılarak, Şekil 34 ve Şekil 35'de gösterildi. Bu eğrilerden görüldüğü gibi, gürültülü ve gürültüsüz durumda, bütün algoritmalar kullanılarak kestirilen dizgelerin $y(t)$ çıkış eğrileri, özgün dizgenin çıkış eğrisini çok az bir yanılğı ile izlemektedir. Bu yanılğı başlangıç anında daha fazla, diğer durumlarda ise

gözlenebilecek kadar az olmaktadır. Bundan dolayı; bu örnek için Legendre fonksiyonlarının kullanılması gereksiz olduğu düşünülerek uygulaması yapılmamıştır.

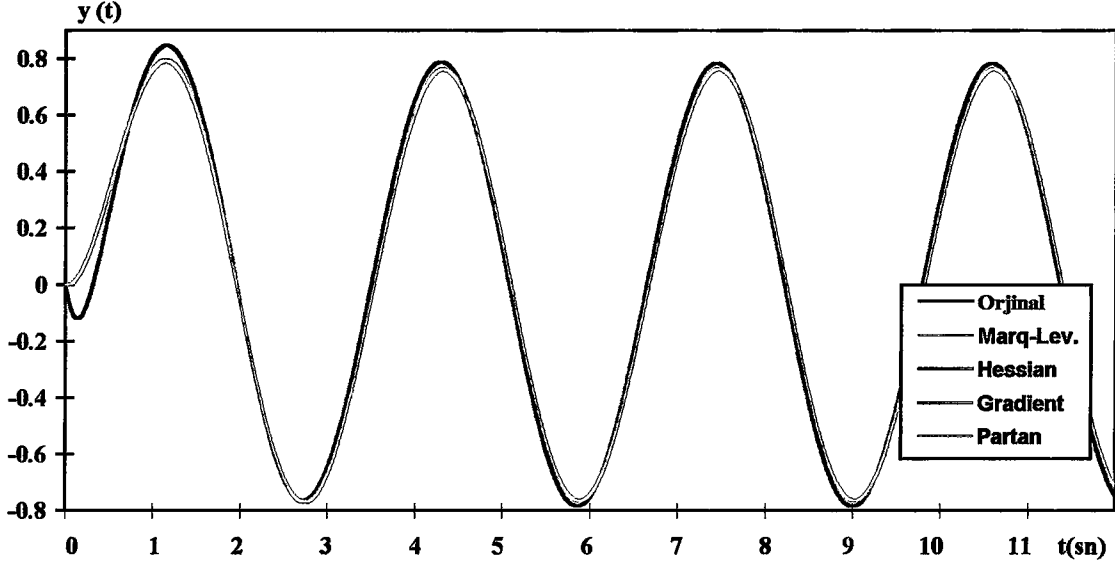
Şekillerden görüldüğü gibi, değişik gürültü seviyeleri altında kestirilen parametrelere göre elde edilen $y(t)$ çıkışları; ilk başlangıç anında oluşan çok az bir yanlgı dışında, orijinal çıkış eğrisini oldukça doğru olarak izlemektedir. Kestirim sonucunda elde edilen parametreler, orijinal parametrelerden farklı olmaktadır. Fakat, farklı bir eşdeğer modele yakınsama olduğu görülmektedir.



Şekil 33. İşaret/gürültü oranı 70 iken kestirilen dizgelerin ve orjinal dizgenin $y(t)$ çıkışı



Şekil 34. İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen dizgelerin ve orjinal dizgenin $y(t)$ çıkışı



Şekil 35. Gürültüsüz durumda kestirilen ve orjinal $y(t)$ çıkışı

Uygulama 3: Durum modeli;

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -178.2 & -335 & -248.5 & -91.1 & -15.7 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 100e^{-(t-0.1)^2/0.001}$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 82.61 & 117.22 & 62.11 & 13.51 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

ile ifade edilen dizgenin giriş ve çıkış büyüklükleri, yine 0.01 sn aralıklarla ölçülerek; bu çalışmada anlatılan algoritmalar yardımıyla durum modeli parametreleri kestirilecektir. $\underline{\theta}$ kestirilecek parametrelerin başlangıç vektörü

$$\underline{\theta} = [20 \ 220.71 \ 11230.5 \ 10^{-1} \ -0.3 \ 20.91 \ -0.2 \ 10.1 \ -0.2 \ -10.2 \ 1 \ -0.6 \ -20.4 \ 10^{-0.2} \ -3 \ 1120 \ 1 \ -2]^T$$

olarak alınarak, gürültüsüz ve işaret/gürültü oranı 40 iken, bu çalışmada anlatılan algoritmaların hepsi için parametre değerleri ayrı ayrı kestirildi. Burada işaret/gürültü oranı 40 olduğu durum için, parametre değerleri verilmeyecek, yalnızca $y(t)$ çıkış eğrisi

verilecektir. Gürültüsüz durum için her bir algoritma ile kestirilen parametre sonuçları, amaç fonksiyonunun değeri ve iterasyon sayısı aşağıda verilmiştir.

Marquardt-Levenberg Algoritması ile:

$$A = \begin{bmatrix} -1.910465 & -2.419383 & -0.122357 & -1.156895 & 0.828130 \\ 2.995461 & 3.793404 & 0.191847 & 1.813922 & -1.298444 \\ -1.308739 & -1.657367 & -0.083819 & -0.792516 & 0.567300 \\ -4.258843 & -5.393331 & -0.272761 & -2.578972 & 1.846083 \\ 3.228914 & 4.089045 & 0.206799 & 1.955291 & -1.399639 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.791558 \\ 0.122586 \\ -0.171216 \\ -2.013453 \\ 0.247504 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.663796 \quad 2.107005 \quad 0.106559 \quad 1.007523 \quad -0.721207]$$

ve Amaç fonk(23)=0.227889

sonuçları elde edilir.

Hessien-Gradient Algoritması ile elde edilen parametreler matrisel olarak:

$$A = \begin{bmatrix} -1.550513 & -0.971344 & 0.825189 & -0.352255 & 1.437055 \\ 1.527344 & 0.956829 & -0.812859 & 0.346991 & -1.415581 \\ 2.131514 & 1.335321 & -1.134400 & 0.484250 & -1.975541 \\ -0.637160 & -0.399159 & 0.339099 & -0.144754 & 0.590536 \\ 0.330163 & 0.206836 & -0.175714 & 0.075009 & -0.306004 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.325953 \\ 0.438721 \\ -0.278152 \\ -2.816252 \\ 0.525788 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.630137 \quad 1.021226 \quad -0.867566 \quad 0.370344 \quad -1.510852]$$

ve amaç fonksiyonunun değeri;

$$\text{Amaç fonk}(616)=0.227940$$

belirlenir.

PARTAN Algoritması için:

$$A = \begin{bmatrix} -1.236126 & -1.061740 & 0.530587 & -0.362791 & 1.330320 \\ -0.955196 & 0.820443 & -0.410003 & 0.280341 & -1.027983 \\ 1.680831 & 1.443709 & -0.721470 & 0.493308 & -1.808913 \\ -1.071656 & 0.920473 & 0.459992 & 0.314521 & 1.153318 \\ 0.676286 & 0.580880 & -0.290285 & 0.198484 & -0.727820 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.556633 \\ 0.594130 \\ -0.298535 \\ -3.248487 \\ 0.548863 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.557190 \quad 1.337511 \quad -0.668399 \quad 0.457021 \quad -1.675851]$$

$$\text{Amaç fonk}(7)=0.227889$$

sonuçları elde edildi.

Gradient Algoritması için elde edilen sonuçlar:

$$A = \begin{bmatrix} -1.555839 & 0.983702 & 0.824061 & -0.356193 & 1.447866 \\ 1.531479 & 0.968300 & -0.811159 & 0.350617 & -1.425197 \\ 2.139488 & 1.352722 & -1.133195 & 0.489814 & -1.991011 \\ -0.645384 & -0.408053 & 0.341832 & -0.147754 & 0.600595 \\ 0.334870 & 0.211727 & -0.177367 & 0.076665 & -0.311631 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.331154 \\ 0.439937 \\ -0.279826 \\ -2.825639 \\ 0.527276 \end{bmatrix}$$

$$C = [1.635658 \quad 1.034169 \quad -0.866338 \quad 0.374467 \quad -1.522146]$$

$$\text{Amaç fonk}(1626)=0.227937$$

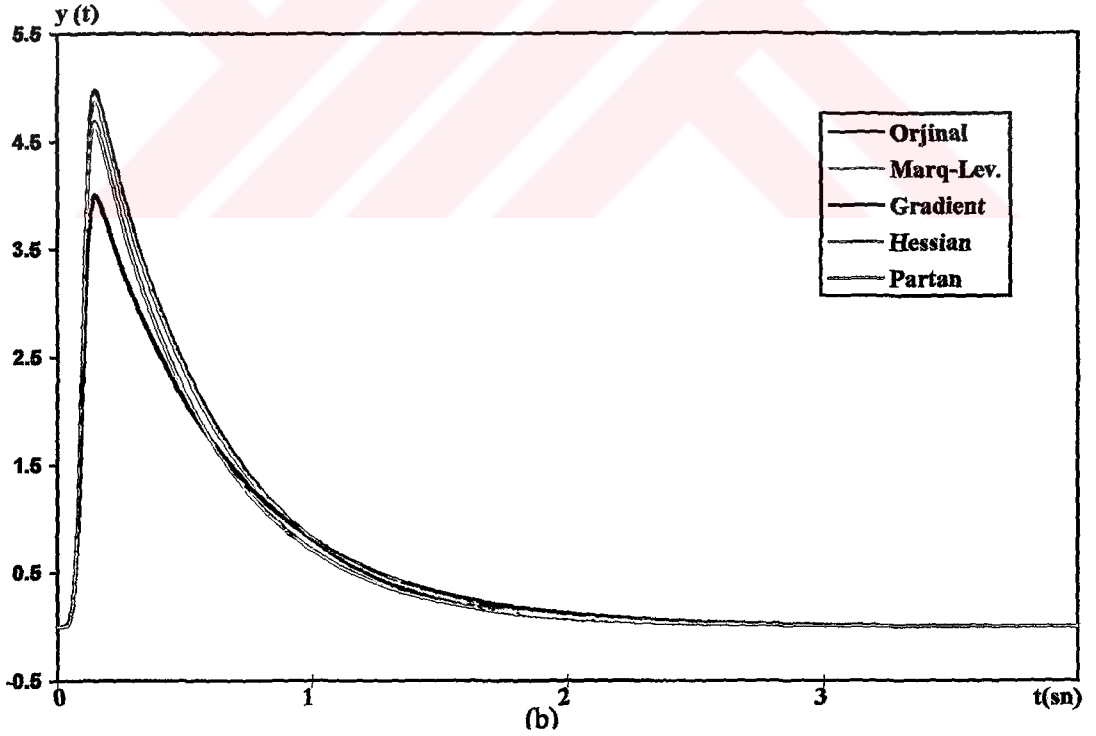
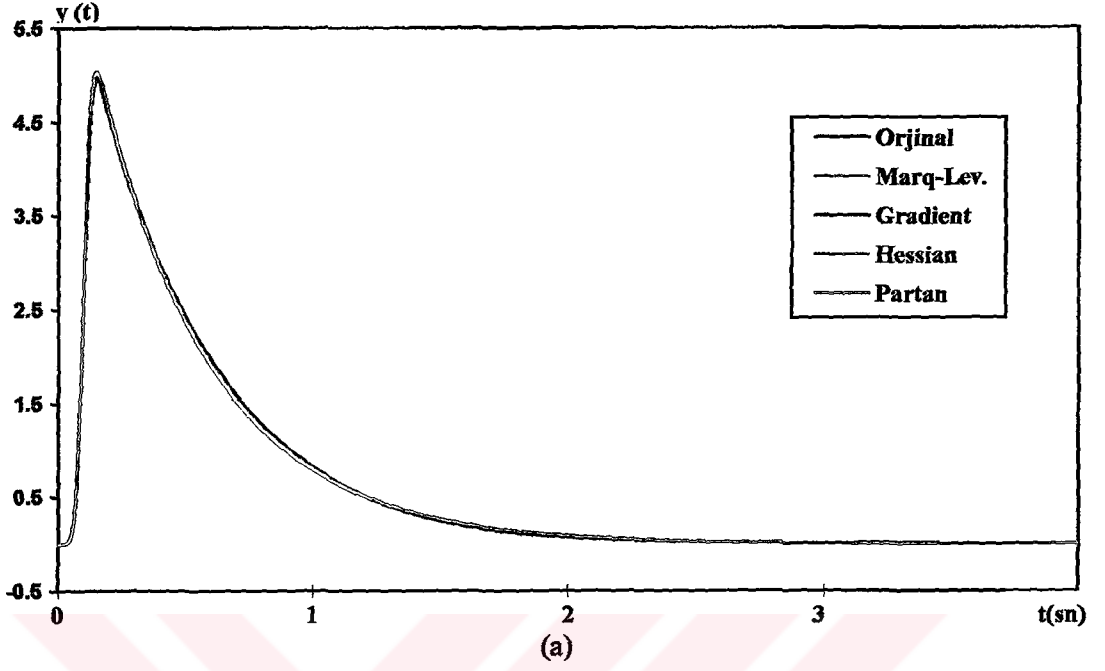
değerindedirler. Bu parametrelere göre hesaplanan $y(t)$ çıkış eğrisi Şekil 36.a'da gösterildi.

Gürültülü durumda kestirilen parametre değerleri verilmeyecektir. Yalnızca bu değerlere göre hesaplanan $y(t)$ çıkış eğrisi ve özgün dizgenin çıkış eğrisi aynı eksen takımı üzerinde Şekil 36.b'de gösterildi.

Şekil 36.a'dan, gürültüsüz durumda elde edilen çıkış eğrilerinin özgün dizgenin çıkış eğrisiyle tamamen üst üste çakıştığı görülmektedir. Marquardt-Levenberg, Hessian-Gradient, Gradient ve PARTAN algoritmaları ile kestirilen parametre değerlerine bakıldığında, bu değerlerin özgün dizge parametre değerlerine eşit olmadığı görülür. Öyleyse kestirilen bu durum modeli parametreleri, özgün dizgenin aynı çıkışı veren başka bir eşdeğer model parametreleridirler.

Şekil 36.b'de; işaret/gürültü oranı 40 iken Partan algoritması ile belirlenen $y(t)$ çıkışı, özgün dizgenin çıkışı ile tamamen üst üste çakışmaktadır. Marquardt-Levenberg ve Hessian-Gradient algoritmalarının sonuçları da, çok az bir yanılğı ile orjinal çıkışı izlemektedir. Gradient algoritması ise, en fazla yanılılı olan algoritmadır.

Bu örnek için bütün algoritmalar, oldukça iyi sonuç verdiğinden dolayı; çıkışlara Legendre fonksiyonlarının ilave edilmesine gerek duyulmamıştır.



Şekil 36. a) Gürültüsüz durumda kestirilen parametreler için $y(t)$ çıkışı

b) İşaret/gürültü oranı 40 iken kestirilen parametreler için $y(t)$ çıkışı

4. İRDELEME VE TARTIŞMA

Bu bölümde; doğrusal zamanla değişmeyen ve durum modeli ile ifade edilen dizgelerin parametrelerinin kestirimi için oluşturulan model kullanılarak, Marquardt-Levenberg, PARTAN, Gradient ve Hessian-Gradient algoritmaları ile elde edilen sonuçların irdelenmesi ve tartışması yapılacaktır. Her ölçüm aralığında ölçülen çıkışlar ile, kestirimi yapılan çıkışların aralarındaki farkların karelerinin minimum yapılması amaçlanmıştır. Bulgular bölümünde, bu amaç fonksiyonu farklı koşullar altında minimum yapılmaya çalışılmış ve sonuçları burada verilmeye çalışılacaktır. Geliştirilen yöntemin performansını test etmek için yapılan çalışmalar aşağıdaki biçimde incelenebilir:

1. Önce; uygulamalar üzerinde, dizgelerin giriş ve çıkışlarından alınan örnek sayısının, kestirilen parametrelerin doğruluğuna olan etkisi gözlenmeye çalışılmıştır. Bir dizgeyi ifade eden parametrelerin doğru olarak kestirilebilmesi için dizgenin giriş ve çıkışlarından ölçülen değerlerin, sistemin tanınması için yeterli sayıda olması gerekmektedir. Eğer yeterli sayıda örnek alınmazsa, parametreler doğru olarak kestirilemez. Örnek sayısının fazla olması ise; amaç fonksiyonunun değerinin çok uzun zamanda minimuma ulaşmasını sağlar ve iterasyon sayısını oldukça uzatır. Öyleyse, alınan örnek sayısının fazla olması da istenen bir durum değildir. Bu sebeple dizgelerin değişim hızları dikkate alınarak uygun aralıklarla ve yeterli sayıda örnek alınmalıdır. Örneklerin, alındığı zaman aralığının etkileri de çok önemlidir. Örnekleme aralığının çok küçük seçilmesi, yamuk kuralı ile hesaplanan integral değerlerindeki hatanın az olmasını sağlar. Eğer ölçüm aralığı geniş olursa; integral alma işleminde ortaya çıkan hata büyümekte ve kestirilen parametrelerdeki hata fazla olmaktadır. Bu çalışmada yapılan bütün örneklerde giriş ve çıkış değerleri 0.01 sn aralıklarla ölçülmektedir.

Ele alınan bir dizgenin, parametreleri $N=100$, $N=70$, $N=50$ ve $N=20$ ölçüm değerleri kullanılarak kestirilmeye çalışıldı ve kestirim sonucunda elde edilen parametre değerleri Tablo 1’de gösterilmektedir. Bu değerlere karşılık gelen $y_1(t)$, $y_2(t)$ çıkış eğrileri de Şekil 3 ‘de çizilmiştir. Sonuçlardan görüldüğü gibi; $N=100$ ve $N=70$ data sayısı ile yapılan parametre kestirimi çalışmalarının sonuçları, özgün dizgenin parametrelerine eşittir ve çıkışlar orijinal çıkışlarla çakışmaktadır. $N=20$ için elde edilen sonuçlar $N=50$ ye göre daha fazla yanlıya sahiptir. Aynı uygulama; gürültülü durumda alınan örnek sayısının, kestirilen parametrelere olan etkisini incelemek amacıyla kullanılmıştır. Bu uygulama sonuçları;

standart sapması $\sigma=0.005$ olan Toplamsal Beyaz Gauss Gürültüsü altında, $N=80$, $N=70$ ve $N=40$ örnek sayıları için Tablo 2’de verilmiştir. Sonuçlardan $N=80$ için elde edilen parametre değerlerinin orjinal parametrelere oldukça yakın olduğu görülmektedir. Şekil 4’de bu data sayıları kullanılarak kestirilen parametrelere göre çıkış eğrileri çizilmiştir. $N=80$ için gürültülü durumda elde edilen eğriler üst üste çakışmaktadır. $N=70$ ve $N=40$ tane örnek kullanıldığında kestirilen çıkış eğrileri çok fazla yanılıklı olmaktadır.

Gürültülü durumda; parametre kestirimi için kullanılan ölçüm değerlerinin fazla olması yanılığı oldukça azaltmaktadır. Alınan örnek sayısının etkisi, ölçümlere gürültü eklendiği zaman daha belirgin olarak gözlenmektedir.

2. Bu çalışmada oluşturulan modele ait amaç fonksiyonunu minimum yapan parametre değerlerinin kestirimi için; yinelemeli, Marquardt -Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN algoritmaları kullanılmıştır. Çıkışlara farklı seviyelerde gürültü eklenerek, algoritmaların gürültüye karşı performansları incelenmiş ve algoritmalar karşılaştırılarak, hangi algoritmanın gürültüye karşı daha duyarlı olduğunun yorumu yapılmaya çalışılmıştır. Bunun için çıkışlara aynı işaret/gürültü oranına sahip gürültüler eklenerek, 20 farklı örnek datası hazırlandı (Burada işaret/gürültü oranı; çıkıştaki işaret enerjisinin, gürültünün değışintisine oranı olarak tanımlandı.). Bu 20 farklı giriş dataları kullanılarak; dizgenin durum modeli parametreleri bütün algoritmalarla 20 kere kestirildi. Kestirilen 20 farklı parametre değerinin önce; özgün dizgenin bir eşdeğer modeli olup olmadığı kontrolü yapıldı. Eşdeğer modelin özgün dizge parametrelerine dönüşümü $\hat{x} = p_x$ bağıntısı kullanılarak yapıldı ve özgün dizge parametrelerine oldukça yakın değerler elde edildi. Sonuçta elde edilen dizge parametrelerinin, özgün dizgenin farklı bir eşdeğer modeline ait olduğu görüldü. Elde edilen 20 farklı parametre değerlerinin ortalamaları alındı ve standart sapmaları hesaplandı. İşaret/gürültü oranı 70 ve 40 iken elde edilen ortalama parametre değerleri ve standart sapmaları, sırayla Tablo 1 ve Tablo 2’ de verilmiştir. Marquardt-Levenberg algoritması için işaret/gürültü oranı 70, 50, 40 ve 30 için $y_1(t)$ çıkışı Şekil 5’de, $y_2(t)$ çıkışı Şekil 6’da, $y_3(t)$ çıkışı Şekil 7’de gösterilmiştir. Bu şekillere ve tablo değerlerine bakıldığında gürültü arttıkça, parametre kestiriminde oluşan yanılığın da artmakta olduğu görülür.

Daha sonra bütün algoritmalarla elde edilen çıkış eğrileri aynı eksen takımı üzerinde gösterilerek, hangi algoritmanın gürültüye karşı daha iyi performans gösterdiği incelenmiştir. Bunun için işaret/gürültü oranı 70 iken $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ çıkışları, bütün algoritma

sonuçlarını gösterecek biçimde Şekil 8’de gösterildi. İşaret/gürültü oranı 40 için elde edilen sonuçlar ise Şekil 9’da gösterilmektedir. Bu şekillere bakıldığında, en iyiden kötüye doğru algoritmaların performansı; Marquardt-Levenberg, Hessian-Gradient, Gradient ve PARTAN olarak sıralanabilir.

Gürültülü durumlarda daha iyi sonuç elde edebilmek için alınan örnek sayısının fazla olmasına dikkat edilmelidir.

3. Uygulamanın bu bölümünde, parametrelerin farklı başlangıç değerleri kullanılarak; oluşturulan modelin ve kullanılan algoritmaların, başlangıç değerlerine karşı duyarlılığı incelenmiştir.

Bu uygulama için iki farklı parametre başlangıç vektörleri alınarak, gürültüsüz durumda giriş ve çıkışlar 0.01 sn aralıklarla ölçüldü. Ölçülen bu datalar ve başlangıç vektörleri kullanılarak, durum modeli parametreleri, bütün algoritmalarla ayrı ayrı kestirildi. Kestirilen parametre değerlerine bakıldığında, orjinal parametrelerden çok farklı değerlere sahip olduğu gözlenir. Bu parametreler kullanılarak, durum modeli oluşturuldu, durum denklemleri çözüldü ve $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ çıkışları 0.01 sn aralıklarla hesaplandı. θ_1 başlangıç vektörü için hesaplanan çıkışlar Şekil 10’da, θ_2 başlangıç vektörü için ise Şekil 11’de çizilmiştir. Bu eğrilere bakıldığında; farklı başlangıç koşullarında hesaplanan çıkışlar, özgün dizgenin çıkışlarını vermektedir. Öyleyse, kestirilen bu parametre değerleri, özgün dizgenin farklı bir eşdeğer modeline aittir. Bunun nedeni, tanımlanan amaç fonksiyonunun birden fazla minimuma sahip olmasıdır.

Bu çalışmada, amaç fonksiyonunu minimum yapan parametre değerleri, başlangıç vektörü olarak verilen değerlerin en yakınında bulunan yerel minimum değerleridir.

4. Bu uygulamada kullanılan algoritmaların yakınsama hızlarını karşılaştırmak amacıyla amaç fonksiyonunun her iterasyonda elde edilen değerleri θ_1 başlangıç vektörü için Şekil 12’de, θ_2 başlangıç vektörü için Şekil 13’de, bütün algoritma sonuçlarını içerecek biçimde verilmiştir. Bu şekillerden görüldüğü gibi; Marquardt-Levenberg algoritması, en az iterasyon değerinde ve en kısa zamanda minimuma ulaşan algoritmadır. PARTAN algoritması da, Hessian-Gradient ve Gradient algoritmalarına göre daha az iterasyonda minimuma ulaşır. Hessian-Gradient algoritması ise en yavaş ve çok uzun iterasyon değerinde minimumu bulur. Gradient algoritmasının hızı, algortmada tanımlanan k sabitinin değerine bağlı olarak değişim göstermektedir. k sabiti, küçük değere sahipse; amaç fonksiyonu çok uzun iterasyon sonucunda minimuma ulaşır. Eğer k büyük değerli ise amaç fonksiyonu kısa

zamanda minimuma yakınsar. Fakat bazı durumlarda minimumu tam bulamadığından, minimum civarında salınım yapar. En iyi performansı gösteren algoritmanın Marquardt-Levenberg algoritması olduğu gözlenmektedir.

5. Bu çalışmada geliştirilen modelin, farklı giriş işaretlerine karşı performansını incelemek amacıyla bir uygulama yapılmıştır. Bu uygulamada giriş işaretlerinin birim basamak, birim vuruş ve $\text{Cos}(10t^2)$ olduğu durumlar için; durum modeli parametreleri kestirildi. Parametrelerin kestirimi, tüm algoritmalar kullanılarak yapıldı. Kestirilen parametrelere göre elde edilen $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkış eğrileri; giriş işareti birim vuruş olduğu durum için Şekil 14’de, birim basamak olduğu durum için Şekil 15’de ve $\text{Cos}(10t^2)$ olduğu durum için Şekil 16’da gösterilmektedir. 0.01 sn aralıklarla 100 tane örnek sayısı kullanılarak; birim basamak ve birim vuruş giriş işaretleri için hesaplanan çıkışlar, orjinal çıkışları yanılıksız olarak vermektedir. $\text{Cos}(10t^2)$ giriş işareti için ise; 100 tane örnek sayısı yeterli olmamaktadır. Aynı uygulama 300 örnek sayısı kullanıldığı durumda yanılığın oldukça azaldığı Şekil 17’de görülmektedir. $\text{Cos}(10t^2)$ giriş işareti çok sık değişimlere sahip olduğundan dolayı, ölçüm aralığının da uygun değerde seçilmesine dikkat edilmelidir.

Birim basamak, birim vuruş ve $\text{Cos}(10t^2)$ giriş işaretleri kullanıldığı durumlara ait, amaç fonksiyonunun iterasyona bağlı değişimi Şekil 20’de gösterilmiştir. Giriş işareti birim vuruş olduğu durumda, elde edilen sonuçların çok az iterasyon değerine sahip olduğu görülmektedir.

6. Daha sonra, C çıkış matrisinin dikdörtgen olduğu uygulamalar yapıldı. Kestirilen parametrelere ait çıkış eğrilerinden görüldüğü gibi, bazı örneklerde; geçici durumların oluştuğu zaman aralığında eğrilerdeki yanılığın fazla olduğu; fakat sürekli durumun oluştuğu zaman aralığındaki eğrilerde yanılığın olmadığı gözlenmiştir. Bu yanılığın azaltılması için; çıkışlarda oluşan yanılığ Legendre fonksiyonları ile ifade edildi. Legendre fonksiyonlarının katsayıları da kestirilecek olan parametrelere ilave edildi. Şekil 24’de Legendre fonksiyonları kullanılarak bütün algoritmalara ait kestirim sonuçları, gürültüsüz durumda gösterilmektedir. Elde edilen eğrilerin orjinal çıkış eğrisini oldukça yakından izlediği görülmektedir. Fakat bu uygulama farklı örneklere uyarlandığı durumda, her örnek için iyi sonuç vermediği gözlenmiştir.

Legendre fonksiyonlarının kullanımının doğru yapılabilmesi için sistem dinamiğinin iyi bilinmesi gerekmektedir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, doğrusal zamanla değişmeyen sabit parametrelili, sürekli zamanlı, çok girişli-çok çıkışlı ve durum modeli ile ifade edilen dizgeler ele alındı. Bu dizgelerin giriş ve çıkış dataları belirli zaman aralıklarıyla bilinmektedir. Bu giriş ve çıkış datalarından yararlanılarak; boyutu bilinen bir dizgenin durum modeli parametrelerinin kestirimi için, yeni bir model oluşturuldu. Bu model, iki farklı boyuttaki durum ve çıkış vektörlerinin tek bir vektör altında toplanmasıyla oluşturulmuştur ve örnekleme anında ölçülen dizge çıkış tepkeleri ile bilinmeyen parametrelere bağımlı olarak ifade edilen dizge çıkış tepkeleri arasındaki farkların karesel minimizasyonuna dayanmaktadır. Elde edilen bu model kullanılarak dizge parametrelerinin kestiriminde iterasyona dayalı; Marguardt-Levenberg, Gradient, Hessian-Gradient ve PARTAN yöntemlerini kullanan değişik yöntemler sınanmıştır ve karşılaştırmalı performans analizleri yapılmıştır.

Kullanılan data sayısının, kestirilen parametrelerin doğruluğuna olan etkisi; gürültülü ve gürültüsüz durumlar için ayrı ayrı araştırıldı. Kullanılan data sayısının, özellikle gürültülü durumda, dizgeyi tam olarak tanıtmaya yetebilecek sayıda olmasının gerekli olduğu sonucuna varılmıştır. Burada kullanılan algoritmaların gürültüye karşı performansları ise iyiden kötüye doğru, Marquardt-Levenberg, Hessian-Gradient, Gradient ve PARTAN olarak sıralanabilir.

Farklı başlangıç değerleri kullanılarak, algoritmaların başlangıç değerlerine göre performansları incelendi. Kestirilen parametrelere göre durum modeli çözümü yapılarak, çıkış değerleri hesaplandığı durumda; hesaplanan çıkışların orjinal çıkışlara eşit olduğu görülmektedir. Kestirilen parametre değerlerinin, özgün dizgenin farklı bir eşdeğerinin durum modeli parametreleri olduğu görülmektedir.

Bu çalışmada incelenen Marquardt-Levenberg, PARTAN, Gradient ve Hessian-Gradient algoritmalarının, verilen dizge için farklı giriş işaretleri kullanılarak, giriş işaretlerine karşı performansları incelendi. Bütün algoritmalar, birim basamak ve birim vuruş girişlerine karşı oldukça iyi performans göstermişlerdir. Girişe $\cos(10t^2)$ gibi, çok fazla titreşime sahip işaretler uygulandığı durumlarda, alınan örneklerin yeterli sıklıkta ve yeterli sayıda olması çıkış eğrilerinde ve parametrelerde oluşacak olan yanılıgyı oldukça azaltmaktadır. Kullanılan algoritmalar arasında, yine en iyi performansı Marguardt-Levenberg algoritması vermiştir.

İncelenen örneklere göre yöntemler yakınsama hızı bakımından karşılaştırıldığında, Marguardt-Levenberg algoritmasının en hızlı, en az iterasyon sayısında minimuma ulaşan ve en az yanılığa sahip algoritma olduğu gözlenmiştir. PARTAN ve Hessian-Gradient algoritmaları, matematiksel olarak daha karmaşık işlemler gerektirdiği için, diğer algoritmalara göre daha yavaştır. Fakat; PARTAN algoritması da, Hessian-Gradient algoritmasına göre, çok daha az iterasyon sayısında amaç fonksiyonunu minimuma ulaştırır. Gradient algoritması ise; çok hızlı ve basit bir algoritmadır. Fakat; bu algoritmanın amaç fonksiyonunun minimuma ulaştığı iterasyon sayısı, k sabitinin seçimine bağlıdır. k sabiti çok küçük seçilirse iterasyon sayısı artar. k sabiti büyük seçilirse, iterasyon sayısı oldukça azalır. Fakat, amaç fonksiyonunu minimum yapan değerleri yakalaması zorlaşır ve minimum civarında salınım yapar. En hızlıdan yavaş doğru sıralama, Marguardt-Levenberg, PARTAN, Gradient ve Hessian-Gradient algoritmaları olarak yapılmaktadır.

Bazı örneklerde kestirilen parametre değerlerinin, oldukça fazla yanılıklı olduğu görüldü ve bu yanılığın giderilmesi amacıyla; çıkışlara Legendre fonksiyonlarıyla ifade edilen bir hata fonksiyonunun eklenmesi uygun görüldü. Legendre fonksiyonlarının kullanılması ile yapılan kestirim sonucunda amaç fonksiyonunun değerinin oldukça minimuma indiği gözlemlendi. Ancak, değişik uygulamalar sonucunda; Legendre fonksiyonlarının seçimine dikkat edilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır.

Ortaya çıkan bu sonuçlara bakıldığında; parametre kestirimi amacıyla geliştirilen model, Marquardt-Levenberg algoritmasının kullanılması ile üstün bir performansa sahiptir. Bu çalışmada geliştirilen parametre kestirim yöntemi; her türlü doğrusal, zamanla değişmeyen dizgelerin parametrelerinin kestirimi konusunda geniş uygulama alanı bulacağı düşünülmektedir.

6. ÖNERİLER

Bir dizgeye ait parametrelerin doğru olarak kestirilmesi, dizgenin tanınmasında ve kontrol edilmesinde oldukça büyük önem taşımaktadır. Bu amaçla, buradaki çalışmada parametre kestirimi konusunda bir algoritma geliştirilmiştir.

Yapılan uygulamalardan; bu çalışmada kullanılan model ve bu modelden yararlanılarak kullanılan algoritmaların hepsi için kestirilen parametreler; sürekli durumda özgün dizgenin çıkış eğrisini yanlıgsız olarak izlemekte olduğu görülmektedir. Geçici durumlarda ise; çok az da olsa, bazı örneklerde yanılığ olmaktadır ve bu yanılığ çıkışlara Legendre fonksiyonlarının eklenmesi ile giderilmektedir.

Bu çalışmada sunulan durum modeli ile ifade edilen dizgeler için parametre kestirim yöntemleri, ayrık zamanlı, devingen, doğrusal ve zamanla değişmeyen dizgelerin durum modellenmesi ve indirgenmesinde; doğrusal zamanla değişmeyen, sabit RC, RL devrelerinin tasarımında, tanısında ve indirgenmesinde çok başarılı olacağı kanısındayım.

7. KAYNAKLAR

1. Wong, K.Y. ve Polak, E., Identification of Linear Discrete Time System Using the Instrumental Variable Method, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-12, 6, (1967), 707-718.
2. Tse, E. ve Weinert, H.L. Structure Determination and Parameter Identification for Multivariable Stochastic Linear System, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-20, 5, (1975), 603-612.
3. Roth, R. S., Techniques in the Identifications of Deterministic System, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26, 5, (1981), 1169-1175.
4. Alengrin, G. ve Zerubia, S., A Method to Estimate the Parameters of an ARMA Model, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-32, 12, (1987), 1113-1116.
5. Li, S. ve Dickinson W., An Efficient Method to Compute Consistent Estimates of the AR Parameters of an ARMA Model, IEEE Transactions Automatic Control, AC-31, (1986), 275-278.
6. Chung, H. Y. ve Sun, Y. Y., Analysis and Parameter Estimation of Nonlinear Systems with Hammerstein Model Using Taylor Series Approach, IEEE Transaction on Circuits and Systems, 35,12, (1988), 1539-1542.
7. Elramlisi, A. M, Zohdy, M. A. ve Loh N. K., A Joint Frequency-Position Domain Structure Identification of Nonlinear Discrete-Time Systems by Neural Networks, IEEE Transactions on Automatic Control, 36,5, (1991), 629-635.
8. Darouach, M. ve Bassong, A., Recursive State Estimation for Linear Dynamic Systems Under Algebraic Constraints, Electronics Letters, 27, 10, (1991), 803-804.
9. Horvath, M., Parameter Estimation for Linear Discrete-Time Models with Random Coefficients, IEEE Transactions on Automatic Control, 36, 10, (1991), 1213-1215.
10. Liaw, C. M., Liu, T. S., Liu, A. H., Chen, Y. T. ve Lin, C. J., Parameter Estimation of Excitation Systems from Sampled Data, IEEE Transactions on Automatic Control, 37, 5, (1992), 663-666.
11. Darouach, M. ve Boutayeb, M., Recursive State and Parameter Estimation of SISO Singular Systems, IEE Proceedings-D, 139, 2, (1992), 204-206.
12. Kamas, L. A. ve Sanders, S. R., Parameter and State Estimation in Power Electronics Circuits, IEEE Transactions on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications, 40, 12,(1993), 920-928.

13. Chai, H. ve Acernley, P. P., Induction Motor Parameter Estimation Algorithm Using Spectral Analysis, IEE Proceedings-B, 139, 3, (1992), 165-174.
14. Subrahmanyam, A. V. B. ve Rao, G. P., Identification of Continuous-Time SISO Systems via Markov Parameter Estimation, IEE Proceedings-D, 140, 1, (1993), 1-10.
15. De Kock, J. A., V. der Merwe, F. S. ve Vermeulen, H. J., Induction Motor Parameter Estimation Through an Output Error Technique, IEEE Transactions on Energy Conversion, 9, 1, (1994), 69-76.
16. Raol, J. R. ve Madhuranath, H., Neural Network Architectures for Parameter Estimation of Dynamical Systems, IEE Proc.-Control Theory Appl., 143, 4, (1996), 387-394.
17. Noshed, M. Z., Generalized Inverses and Applications, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1976.
18. Rao, C.R. ve Mitra, S.K., Generelized Inverse of Matrices and its Applications, Wiley & Sons, Canada, 1971.
19. Norton, J. P., An Introduction to Indentification, Academic Press, London, 1986.
20. Bard, Y., Nonlinear Parameter Estimation, Academic Press, New York and London, 1974.
21. Wismer, D. A. Ve Chattergy, R. Introduction to Nonlinear Optimization., North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979.
22. Sinha, N. K. ve Kuszta, B., Modelling and Identification of Dynamics Systems, Van Nostrand Reinhold Co., New York, Cincinnati, Toronto, London ve Melbourne, 1983.
23. Spiegel, M. R., Mathematical Handbook of Formulas and Tables, Mc Graw-Hill Book Co., New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney, 1968.
24. Chen, C. T., Linear System Theory and Desing, Holt, Rinehart and Winston, Co., New York, 1984.
25. Ogata, K., State Space Analysis of Control System, Prentice-Hall, United States of America, 1967.

8. ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Trabzon'un Akçaabat ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Akçaabat'ta tamamladı. Lise öğrenimini 1982 yılında Akçaabat Lisesi'nde tamamladı ve aynı yıl girdiği Öğrenci Seçme ve Yerleştirme sınavı sonucunda, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünü kazandı. Bölümde Elektronik dalını seçti ve 1987 yılında Elektronik Mühendisi olarak öğrenimini tamamladı. 1988 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Elektrik- Elektronik Mühendisliği bölümü, Devreler ve Sistemler kürsüsünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 1989 yılında aynı üniversitenin Elektronik dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve 1992 yılında Yüksek Mühendis ünvanını aldı. 1992-1993 öğrenim döneminde aynı bölümde Doktora öğrenimine başladı. Yabancı dil olarak İngilizce bilmektedir.

