ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

SABİT AÇILI YÜZEYLER ÜZERİNE

Nurgün SABANCI

Yüksek Lisans

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2017

Ref.No.: 10158379

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

SABİT AÇILI YÜZEYLER ÜZERİNE

Nurgün SABANCI

Yüksek Lisans

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2017

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

Graduate School of Sciences

Department of Mathematics

ON THE CONSTANT ANGLE SURFACE

Nurgün SABANCI

Master's Thesis

Thesis Advisor
Assoc. Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

BILECIK, 2017

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
JÜRİ ONAY FORMU

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 21/06/2017 tarih ve 32 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/07/2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Nurgün SABANCI' nın "Sabit Açılı Yüzeyler Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ

ÜYE: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

ÜYE: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

ONAY

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ………….. tarih ve ………… sayılı kararı.

İMZA/ MÜHÜR

TEŞEKKÜR

Danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ' a, birikimlerini severek paylaşan Yrd. Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU ve Yrd. Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ' a, İngilizce çevirilerdeki yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Bengi YILDIZ' a, tez yazım sürecinde bana her zaman destek olan ve varlıklarını hep hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölümde Öklid uzayında ve Lorentz uzayında bu çalışma için gerekli kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında sabit açılı yüzeyler ve eğriler çalışılmıştır. Bazı açılabilir yüzeyler ve bazı konikal yüzeyler sabit açılı yüzey olma bakımından incelenmiştir. Ayrıca normali sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapan yüzey üzerinde yatan eğriler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde 3-boyutlu Lorentzian uzayda sabit açılı yüzeyler ve eğriler ele alınmıştır. Öncelikle sabit spacelike doğrultulu timelike sabit açılı yüzey üzerinde yatan eğriler için daha sonra sabit spacelike doğrultulu spacelike sabit açılı yüzey üzerinde yatan eğriler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Sabit açılı yüzey, açılabilir yüzeyler, helis, slant helis, Darboux vektör, timelike sabit açılı yüzey, spacelike sabit açılı yüzey, timelike helis, spacelike helis.

ABSTRACT

The thesis consists of four parts. The first part is the entry of the thesis. In the second part, terms definitions and theorems which are necessary for Öklid space and Lorentz space are given.

In the third part, constant angle surfaces and curves are studied in Euclidean 3-space. Special developable surfaces and some conical surfaces are examined from the point of view the constant angle property. Also, some characterization are given for a curve lying on a surface for which the unit normal makes a constant angle with a fixed direction.

In the fourth part, constant angle surfaces and curves are handled in Lorentzian 3-space. Firstly, some characterizations are given for a curve lying on spacelike fixed direction timelike constant angle surface, and then some characterizations are given for a curve lying on spacelike fixed direction spacelike constant angle surface.

Key words: Constant angle surface, developable surfaces, helix, slant helix, Darboux vector, timelike constant angle surface, spacelike constant angle surface, timelike helix, spacelike helix.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMA DİZİNİ

E^3	3-boyutlu Öklid Uzayı
E_1^3	3-boyutlu Lorentz Uzayı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cümlesi
$\lVert \; \rVert$	Norm Fonksiyonu
$\langle , \rangle$	İç Çarpım
$\langle , \rangle_L$	Lorentz İç Çarpımı
$\times$	Vektörel Çarpım
$\times_L$	Lorentz Vektörel Çarpım
$\oplus$	İç İşlem
$\odot$	Dış İşlem

1. GİRİŞ

Yüzeyin her noktasındaki birim normali, belirli bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa bu yüzeye sabit açılı yüzey denir. Bazı kaynaklarda sabit açılı yüzey yerine helisel yüzey de denmektedir. Bu tezde sabit açılı yüzey kavramı ve yüzey üzerinde yatan eğriler ele alınmıştır.

Munteanu vd. (2009), E^3 de, parametre eğrilerinin hız vektörlerini birbirine dik olarak sabit açılı yüzeylerin parametrik denklemlerini elde etmiş ve bu yüzeylerin eğrilikleri ile ilgili karakterizasyonlar vermiştir.

Güler vd.,(2011), Lorentz uzayında timelike sabit açılı, eğrilik, burulma gibi kavramlara değinmiştir. Lorentz uzayında spacelike sabit açılı yüzeyler ile ilgili çalışma yapmıştır (Atalay ve diğ, 2012). Lopez vd. (2011) ise Lorentz uzayında genel olarak sabit açılı yüzeyler ile ilgili karakterizasyonlar vermiştir.

Nistor (2011), bir eğriden geçen tanjant, normal ve binormal regle yüzeylerin hangi durumlarda sabit açılı yüzey olacağını incelemiştir. Özkaldı vd. (2011) ise bu sabit açılı yüzeyler üzerindeki geodezik eğri, asimptotik eğri ve eğrilik çizgisi gibi bazı özel eğriler hakkında karakterizasyonlar vermiştir.

Kahyaoğlu (2013) E^3 de, sabit açılı yüzey ailesinin oluşturulması ile ilgili karakterizasyonlar vermiştir. Ayrıca farklı eğriler için düzenlenen sabit açılı yüzey aileleri ile ilgili örneklere yer vermiştir.

Bu tezde öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayında sabit açılı yüzeyler ve eğriler çalışılmıştır. Sabit açılı bir yüzey üzerinde yatan eğri için bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Daha sonra yapılan çalışma Loretzian uzaya taşınmış ve Lorentz uzayında sabit açılı yüzeyler ve eğriler çalışılmıştır.

Bu tezin bir sonucu da Öklid uzayında ve Lorentz uzayında bazı özel açılabilir yüzeyler ve bazı konikal yüzeylerin sabit açılı yüzey olma yönünden incelenmiş olmasıdır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan bazı temel tanım, kavram ve teoremler verilecektir.

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: A\times A \to V$ fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir (Hacısalihoğlu,1993 a).

$i)$ $\forall\, P,Q,R \in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$

$ii)$ $\forall P \in A$ ve $\forall a \in V$ için $f(P,Q)=a$ olacak biçimde bir tek $Q\in A$ noktası vardır.

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. $x=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,...,\mathrm{x}_n)$, $y=(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,...,\mathrm{y}_n)$ olmak üzere V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle,\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$$

$$(x,y)\to\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A afin uzayına yeni bir ad olarak Öklid uzayı adı verilir ve E^n ile gösterilir.

$\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. Bu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{y}_3)$ olmak üzere

$$\langle,\rangle : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y)\to\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir (Hacısalihoğlu,1993 a).

Tanım 2.1.3. $x \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\| x \| = \sqrt{< x, x >}$$

reel sayısına x vektörünün normu denir. $\|x\| = 1$ olan vektöre birim vektör denir (Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2.1.4. $x,\ y \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$x \times y = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlı × operatörüne vektörel çarpım denir (Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2.1.6. $I \subset \mathbb{R}$, $I = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ bir açık alt aralık olmak üzere

$$\alpha : I \to E^n$$

$$t \to \alpha(\mathrm{t}) = \left(\alpha_1(\mathrm{t}), \alpha_2(\mathrm{t}), ..., \alpha_n(\mathrm{t})\right)$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha\left(I\right) \subset E^n$ alt cümlesine E^n de diferensiyellenebililir bir eğri denir. Ayrıca $\left(I, \alpha\right)$ ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu , I alt cümlesine eğrinin parametre aralığı ve $t \in I$ reel sayısına da eğrinin parametresi denir. Bir eğri $\alpha\left(I\right) \subset E^n$ şeklinde veya kısaca α ile gösterilir. Eğer $\alpha : I \to E^n$, C^k sınıfından ise α ya C^k sınıfından eğri denir (Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2.1.7. $\alpha'(\mathrm{t})\left[f \right] = D_{\alpha'(\mathrm{t})} f$ türevine $f : E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\alpha(\mathrm{t})$ eğrisi yönündeki yöne göre türevi veya kovaryant türevi denir (Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2 1.8. E^n de bir α eğrisi $\left(I, \alpha\right)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olmak üzere

$\alpha\left(t\right) = \left(\alpha_1\left(t\right), \alpha_2\left(t\right), ..., \alpha_n\left(t\right)\right) \subset E^n$ yazılabilir. Buradan elde edilen

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_t = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_t, \left.\frac{d\alpha_2}{dt}\right|_t, \ldots, \left.\frac{d\alpha_n}{dt}\right|_t \right) = \left.\left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)\right|_t$$

vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir. Bir diğer ifadeyle, $\left(\alpha'(\mathrm{t}), \alpha(\mathrm{t})\right) = \alpha'(\mathrm{t})\big|_{\alpha(\mathrm{t})} \in T_{E^n}\left(\alpha(\mathrm{t})\right)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(\mathrm{t})$ noktasında (I,α) komşuluğuna göre hız vektörü denir (Hacısalihoğlu,1993 a).

Tanım 2.1.9. E^n de bir α eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \to \mathbb{R}$$

$$t \to \|\alpha'(\mathrm{t})\|$$

olarak tanımlı fonksiyona α eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu ve $\|\alpha'\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına da α eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(\mathrm{t})$ noktasındaki skalar hızı denir (Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2.1.10. E^n de bir α eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. α nın her noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\forall t \in I$ için $\|\alpha'(\mathrm{t})\| = 1$ ise α ya birim hızlı eğri denir ve bu durumda $t \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir (Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2.1.11. Her noktada hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Her t için $\alpha'(\mathrm{t}) \neq \vec{0}$ oluyorsa (yani $\|\alpha'(\mathrm{t})\| \neq \vec{0}$) ise α ya regüler eğri denir (Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2.1.12. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $t(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $t(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(\mathrm{s})$ noktasındaki birim teğet vektör denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.13. $\mathbb{R}^3$uzayında birim hızlı $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\kappa(\mathrm{s}) = \|t'(\mathrm{s})\|$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(\mathrm{s})$ sayısına eğrinin $\alpha(\mathrm{s})$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu,2014).

Tanım 2.1.14. $\mathbb{R}^3$uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $n(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)} t'(s)$ eşitliğiyle belirli $n(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(\mathrm{s})$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.15. $\mathbb{R}^3$uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $b(s) = t(s) \times n(s)$ eşitliğiyle tanımlı $b(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(\mathrm{s})$ noktasındaki ikinci dik vektörü veya binormali denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.16. $t(s), n(s), b(s)$ vektörlerine $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$eğrisinin $\alpha(\mathrm{s})$noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{t(s), n(s), b(s)\}$ cümlesine, α eğrisinin $\alpha(\mathrm{s})$noktasındaki Frenet çatısı denir. $\{t, n, b\}$ vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.17. Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frene vektör alanları $t, n,$ b olmak üzere

$$\tau : I \to \mathbb{R} \ , \ \tau(s) = -\langle b'(s), \mathrm{n}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(\mathrm{s})$ sayısına eğrinin $\alpha(\mathrm{s})$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.18. $\alpha(s)$, κ eğriliğine τ torsiyonuna sahip $\mathbb{R}^3$de birim hızlı eğri olsun. $t(s) = \alpha'(s)$birim teğet , $n(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\| \alpha''(s) \|}$ asli normali ve $b(s) = t(s) \times n(s)$ binormali olmak üzere Serret-Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

dir. Burada $<t,t>=<n,n>=<b,b>=1,\ \ <t,n>=<t,b>=<n,b>=0$ dır

(Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.19. $\alpha,\ \mathbb{R}^3$ de regüler birim hızlı eğri olsun; α eğrisinin her noktadaki teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan α eğrisine genel helis denir

(Hacısalihoğlu, 1993 a).

Teorem 2.1.1 $\alpha,\ \mathbb{R}^3$ de bir eğri olsun.

$$(\tau / \kappa)\, sabit \Leftrightarrow \alpha \ helistir.$$

(Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2.1.20. $\alpha,\ \mathbb{R}^3$ de regüler birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin her noktadaki binormali sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan α eğrisine dairesel helis denir (Hacısalihoğlu, 1993 a).

Tanım 2.1.21. $\alpha,\ \mathbb{R}^3$ de regüler birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin her noktadaki normali sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan α eğrisine slant helis denir

(Kula ve Yaylı, 2005).

Tanım 2.1.22. $\alpha,\ \mathbb{R}^3$ de regüler birim hızlı eğri olsun. $u \neq 0$ sabit vektör için α eğrisinin $\omega = \tau t + \kappa b$ Darboux vektörü $<\omega, u> = c$ sabit fonksiyon ise $\alpha(s)$ eğrisine Darboux helis denir. Burada u vektörünün yönü, Darboux helisinin eksenidir

(Özkaldı ve Yaylı, 2011).

Tanım 2.1.23. U, $\mathbb{R}^2$ uzayının bir alt cümlesi olmak üzere $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \to \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ cümlesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir basit yüzey denir.

M , $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt cümlesi olsun. M nin her bir p noktası için

$$p \in \varphi(U) \text{ ve } \varphi(U) \subseteq M$$

olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M cümlesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.24. M , $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $p \in M$, $v_p \in T_p(M)$ olsun. $D_{v_p} W = \sum_{i=1}^{3} v_p [Wi] \frac{\partial}{\partial y_i}(\text{p})$ eşitliğiyle tanımlı $D_{v_p} W$ vektörüne, W vektör alanının, v_p teğet vektörü yönündeki kovaryant türev denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.25. W , M yüzeyi üstünde bir vektör alanı ve V , M yüzeyi üstünde teğet vektör alanı olsun. D , $\mathbb{R}^3$ uzayındaki doğal bağlantıyı göstermek üzere her $p \in M$ için $(\text{D}_V \text{W})(\text{p}) = D_{V(\text{p})} W$ eşitliğiyle tanımlı $D_V W$ vektör alanına, W nın, V teğet vektör alanı yönündeki kovaryant türev denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.26. N , M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında,

$$S_p(\text{v}_p) = -\text{D}_{v_p} N$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p : T_p(M) \to T_p(M)$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, N birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir. (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.27. M bir yüzey olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$K : M \to \mathbb{R}$$

$$p \to K(p) = detS(p)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(p)$ değerine de M nin p noktasındaki Gauss eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1993 b) .

Tanım 2.1.28. M bir yüzey olsun. M nin bir p noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$H : M \to \mathbb{R}$$

$$p \to H(p) = Iz(S(p))$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(p)$ değerine de M nin p noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1993 b).

Tanım 2.1.29. M yüzeyinin bir p noktasında, $S_p : T_p(M) \to T_p(M)$ lineer dönüşümünün sıfırdan farklı öz vektörlerine p noktasındaki asli vektörler denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.30. E^3 de, bir M yüzeyi üzerindeki v_p tanjant vektörü için $v_p \neq 0$ ve $\langle S(\mathrm{v}_p), \mathrm{v}_p \rangle = 0$ ise v_p vektörüne M yüzeyi üzerinde asimptotik doğrultu denir. M yüzeyi üzerindeki bir α eğrisinin her noktadaki teğeti bir asimptotik doğrultu ise α eğrisine M yüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.31. $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall p \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir (Hacısalihoğlu, 1993,b).

Tanım 2.1.32. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir (Hacısalihoğlu, 1993 b).

Tanım 2.1.33. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Hacısalihoğlu, 1993 b).

Teorem 2.1.2. Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalihoğlu, 1993,b).

Tanım 2.1.34. M , $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir eğrilik çizgisi veya asli eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.35. M , $\mathbb{R}^3$uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri olmak üzere, M yüzeyinin birim dik vektör alanı N olsun. α'' vektör alanı, $N \circ \alpha$ vektör alanının lineer birleşimi ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir geodezik eğri denir
(Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.36. M , $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.37. $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyi içinde birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi verilsin. Yüzeyin birim dik vektör alanı N olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere $Y = T \times N$ eşitliğiyle tanımlanan Y vektör alanını göz önüne alalım. Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı $\{T(s), Y(s), N(s)\}$ cümlesi $T_{\alpha(s)}\mathbb{R}^3$ uzayının ortonormal bir tabanı olur. Bu tabana, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin Darboux çatısı denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.38. $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), N(s) \rangle$ eşitliğiyle belirli $\kappa_n(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$noktasındaki normal eğriliği denir (Sabuncuoğlu.2014).

Tanım 2.1.39. $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), Y(s) \rangle$ eşitliğiyle belirli $\kappa_g(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.40. $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. $\tau_g(s) = -\langle N'(s), Y(s) \rangle$ eşitliğiyle belirli $\tau_g(s)$ sayısına (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$noktasındaki geodezik burulması denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.1.41. α, M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Eğri boyunca oluşan Darboux çatısını $\{T, Y, N\}$ ile gösterelim. Burada T, α eğrisinin birim tanjant vektörü; N, yüzeyin birim normali ve $Y = \pm T \times N$, birim vektördür. M yüzeyi üzerinde yatan α eğrisi için Darboux çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ Y' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ N \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada

$$< T, T > = < Y, Y > = < N, N > = 1,$$

$$< T, Y > = < T, N > = < Y, N > = 0$$

dır.

M yüzeyi üzerinde yatan α eğrisi için;

$$\kappa_g = \kappa cos\theta,\ \kappa_n = \kappa sin\theta,\ \tau_g = \tau - \theta'$$

dır. Burada θ, M yüzeyin birim normali ile $\alpha(s)$ eğrisinin binormali arasındaki açıdır. κ_g, $\alpha(s)$ eğrisinin geodezik eğriliği; κ_n, α eğrisinin normal eğriliği; τ_g, $\alpha(s)$ eğrisinin geodezik torsiyonu olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2014).

Teorem 2.1.3. M yüzeyi üzerinde yatan α eğrisi için

i) α eğrisi bir geodezik eğridir$\Leftrightarrow \kappa_g = 0$ dır.

ii) α eğrisi bir asimptotik eğridir$\Leftrightarrow \kappa_n = 0$ dır.

iii) α eğrisi bir asli doğrudur$\Leftrightarrow \tau_g = 0$ dır (Sabuncuoğlu, 2014).

2.2. Lorentz Uzayı

Tanım 2.2.1. V bir reel vektör uzayı olsun. Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $x, y, z \in V$ için $\langle , \rangle$ dönüşümü, aşağıdaki özelliklere sahipse bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir

(O' Neill, 1983).

1) $< x, y >=< y, x >$

2) $< ax + by, z >= a < x, z > +b < y, z >$

$< x, ay + bz >= a < x, y > +b < x, z >$

Tanım 2.2.2. $\langle , \rangle$, simetrik bilineer form olsun. Eğer

1) $u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle > 0$ ise $\langle , \rangle$ ye pozitif tanımlı denir.

2) $u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle < 0$ ise $\langle , \rangle$ ye negatif tanımlı denir.

3) $u \in V$ için $\langle u, u \rangle \geq 0$ ise $\langle , \rangle$ ye pozitif yarı tanımlı denir.

4) $u \in V$ için $\langle u, u \rangle \leq 0$ ise $\langle , \rangle$ ye negatif yarı tanımlı denir (O’Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. V bir reel vektör uzayı ve

$$<,>: V \times V \to \mathbb{R}$$

simetrik, bilineer form olsun. $W \subset V$ olmak üzere;

$$<,>: W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna, $<,>$ simetrik bilineer formun indeksi denir ve bu indeks genellikle ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}$ Öklid 3-uzayında iki vektör olmak üzere

$$< x, y >_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3,$$

Lorentz metriğiyle donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayına, Minkowski 3-uzayı denir ve $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5. $x \in \mathbb{R}^3_1$ olsun.

i) $< x, x >_L > 0$ ve $x = 0$ ise x spacelike vektördür,

ii) $< x, x >_L < 0$ ise x timelike vektördür,

iii) $< x, x >_L = 0$ ve $x \neq 0$ ise x null vektördür (O'Neill, 1983).

Tanım .2.2.6. $x \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\| x \|_L = \sqrt{|< x, x >_L|}$$

reel sayısına x vektörünün normu denir. $\| x \|_L = 1$ olan vektöre birim vektör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7 $\mathbb{R}_1^3$, bir Lorentz uzayı olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}_1^3$ için $< x, y >= 0$ ise x ve y vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Özdemir ve Ergin, 2007).

Tanım 2.2.8. $x,\ y \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\times_L : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \to \mathbb{R}_1^3$$

$$x \times_L y = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_3, x_3 y_1 - x_1 y_3, -x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlı "$\times_L$" operatörüne Lorentz anlamında vektörel çarpım denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.9. $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere;

$$f : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler sürekli iseler f fonksiyonuna C^k – sınıfından (k-yıncı sınıftan) diferensiyellenebilirdir denir. Özel olarak, f sadece sürekli ise C^0-sınıfındandır denir. U üzerinde tanımlı C^1-sınıfından fonksiyona U üzerinde 0-form adı verilir. Ayrıca,

$C^k(U, \mathbb{R}) = \{ f |\ f : U \to \mathbb{R} \},\ f$ fonksiyonu C^k sınıfından}

$C^k(U, \mathbb{R}) = \{ f |\ f : U \to \mathbb{R} \},\ f \in C^k(U, \mathbb{R}), k \in N$ }

şeklinde gösterilir (Beem ve Ehrlich. 1981).

Tanım 2.2.10. $\alpha : I \to \mathbb{R}_1^3$ regüler eğrisi verilsin. Her bir $t \in I$, $\mathrm{t} = \alpha'$ hız vektörü için

i) $\langle t,t \rangle_L > 0$ ise, α eğrisi spacelike (uzay benzeri),

ii) $\langle t,t \rangle_L < 0$ ise, α eğrisi timelike (zaman benzeri),

iii) $\langle t,t \rangle_L = 0$ ise, α eğrisi lightlike veya null eğri (ışık benzeri) olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.11. α, κ eğriliğine τ torsiyonuna sahip $\mathbb{R}_1^3$ de birim hızlı spacelike eğri olsun. $t(s) = \alpha'(s)$ birim teğet , $n(s) = \alpha''(s) / \| \alpha''(s) \|$ asli normali ve $b(s) = t(s) \times_L n(s)$ binormali olmak üzere Serret-Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

dir. Burada $< t,t >_L = 1, < n,n >_L = \varepsilon = \pm 1, < b,b >_L = -\varepsilon$, $< t,n >_L = < t,b >_L = < n,b >_L = 0$ dır (O'Neill, 1983).

i) $\varepsilon = 1$ ise α spacelike eğrisinin asli normali (n) spacelike ve binormali (b) timelikedır.

ii) $\varepsilon = -1$ ise α spacelike eğrisinin asli normali (n) timelike ve binormali (b) spacelikedır.

Tanım 2.2.12. α, κ eğriliğine τ torsiyonuna sahip $\mathbb{R}_1^3$ de birim hızlı timelike eğri olsun. $t(s) = \alpha'(s)$ birim teğet, $n(s) = \alpha''(s) / \| \alpha''(s) \|$ asli normali ve $b(s) = t(s) \times n(s)$ binormali olmak üzere Serret-Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

dir. Burada $<t,t>_L=-1$, $<n,n>_L=\varepsilon=1$, $<b,b>_L=1$, $<t,n>_L=<t,b>_L=<n,b>_L=0$ dır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.13. α , $\mathbb{R}_1^3$ de regüler birim hızlı eğri olsun; α eğrisinin her noktadaki teğeti sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine genel helis denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.1. α , $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike veya timelike bir eğri olsun.

$$(\tau/\kappa)\,\text{sabit} \Leftrightarrow \alpha \text{ bir helistir (O'Neill, 1983).}$$

Tanım 2.2.14. α , $\mathbb{R}_1^3$ de regüler birim hızlı eğri olsun; α eğrisinin her noktadaki binormali sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan α eğrisine dairesel helis denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.15. α , $\mathbb{R}_1^3$ de regüler birim hızlı eğri olsun; α eğrisinin her noktadaki normali sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine slant helis denir (Turgut, 1995).

Tanım 2.2.16. M $\mathbb{R}_1^3$uzayının bir alt cümlesi olsun. M nin her bir p noktası için $\varphi: M \to \varphi(M)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise M cümlesine $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir yüzey denir (O’Neill, 1983).

Tanım 2.2.17. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M olsun. M üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Tanım 2.2.18. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M olsun. M üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Tanım 2.2.19. M , $\mathbb{R}_1^3$ de bir yüzey olsun. Eğer $\forall p \in M$, $\forall f \in C^\infty (M,\mathbb{R})$

$$v_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$f \to v_p[f]$$

operatörü, $\forall f,\ g \in C^{\infty}\left(M,\mathbb{R}\right);\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ için

1) $v_p\left[\lambda f + \mu g\right] = \lambda v_p\left[f\right] + \mu v_p\left[g\right]$

2) $v_p\left[f.g\right] = g\left(p\right)v_p\left[f\right] + f\left(p\right)v_p\left[g\right]$

aksiyomlarını sağlıyorsa, bu operatöre $p \in M$ noktasında bir tanjant vektörü denir (Beem ve Ehrlich. 1981).

M bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi;

$$T_M\left(p\right) = \{\ \overrightarrow{v_p} \mid \overrightarrow{v_p} : C^{\infty}\ (M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\ \}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2.20. $M \subset \mathbb{R}_1^3$ yüzeyi verilsin. $\forall p \in M$ noktasında, $\mathbb{R}_1^3$ ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir (Turgut, 1995).

Tanım 2.2.21. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Turgut, 1995).

Tanım 2.2.22. $r\left(s,v\right)$, $\mathbb{R}_1^3$ de yüzey olsun. $t\left(s\right) = \alpha'\left(s\right)$ birim teğet, $n\left(s\right) = \alpha''\left(s\right) / \|\alpha''\left(s\right)\|$ asli normali, $b\left(s\right) = t\left(s\right) \times_L n\left(s\right)$ binormali ve $\omega = \tau t + \kappa b$ Darboux vektörü ile oluşan bazı yüzey çeşitleri;

Teğetsel açılabilir yüzey : $r\left(s,v\right) = \alpha\left(s\right) + vt\left(s\right)$

Normal yüzey : $r\left(s,v\right) = \alpha\left(s\right) + vn\left(s\right)$

Binormal yüzey : $r\left(s,v\right) = \alpha\left(s\right) + vb\left(s\right)$

Açılabilir Rektifiyan yüzey : $r\left(s,v\right) = \alpha\left(s\right) + v\omega\left(s\right)$

Açılabilir Darboux yüzey : $r\left(s,v\right) = b\left(s\right) + vt\left(s\right)$

Açılabilir Teğetsel Darboux yüzeyi : $\omega\left(s\right) + vn\left(s\right)$

olarak tanımlanır (Izumiya, 2004).

Tanım 2.2.23 : α , $\mathbb{R}_1^3$ de regüler spacelike birim hızlı eğri olsun; $u \neq 0$ sabit vektör için α eğrisinin $\omega = \tau t + \varepsilon\kappa b$ Darboux vektörü $<\omega, u> = c$ sabit fonksiyon ise α eğrisine spacelike Darboux helis denir. Burada u vektörünün yönü, Darboux helisinin eksenidir (Scofield, 1995).

Tanım 2.2.24 : α , $\mathbb{R}_1^3$ de regüler timelike birim hızlı eğri olsun; $u \neq 0$ sabit vektör için $\alpha(s)$ eğrisinin $\omega = \tau t + \kappa b$ Darboux vektörü $<\omega, u> = c$ sabit fonksiyon ise α eğrisine timelike Darboux helis denir. Burada u vektörünün yönü, Darboux helisinin eksenidir (Scofield, 1995).

Tanım 2.2.25 : α , M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Eğri boyunca oluşan Darboux çatısını $\{T, Y, Z\}$ ile gösterelim.

Burada T , α eğrisinin birim tanjant vektörü; Z , yüzeyin birim normali ve $Y = \pm Z \times_L T$, birim vektördür .

i) M yüzeyi bir timelike yüzey ise, M yüzeyi üzerinde yatan α eğrisi spacelike ya da timelike olduğunda Darboux çatısının türev formülleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & -\varepsilon\kappa_n \\ \kappa_g & 0 & \varepsilon\tau_g \\ \kappa_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada

$$<T,T>_L = \varepsilon = \pm 1, \ <Y,Y>_L = -\varepsilon, \ <Z,Z>_L = 1,$$

$$<T,Y>_L = <T,Z>_L = <Y,Z>_L = 0$$

dır

ii) M yüzeyi bir spacelike yüzey olduğunda, M yüzeyi üzerinde yatan α eğrisi spacelike eğri olduğundan Darboux çatısının türev formülleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ \kappa_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada

$$< T, T >_L = < Y, Y >_L = 1, < Z, Z >_L = -1,$$

$$< T, Y >_L = < T, Z >_L = < Y, Z >_L = 0$$

dır

M yüzeyi spacelike (timelike), α eğrisi spacelike (timelike) olduğunda;

$$\kappa_g = \kappa cos\theta,\ \kappa_n = \kappa sin\theta,\ \tau_g = \tau + \theta'$$

olarak;

M yüzeyi timelike, α eğrisi spacelike olduğunda;

$$\kappa_g = \kappa cosh\theta,\ \kappa_n = \kappa sinh\theta,\ \tau_g = \tau + \theta'$$

olarak tanımlanır. Burada θ, M yüzeyin birim normali ile $\alpha(s)$ eğrisinin binormali arasındaki açıdır. κ_g, α eğrisinin geodezik eğriliği; κ_n, α eğrisinin normal eğriliği; τ_g, α eğrisinin geodezik torsiyonu olarak adlandırılır (Yaylı ve Kızıltuğ, 2012).

Teorem 2.2.2: M spacelike (timelike) yüzeyi üzerinde yatan α eğrisi için

i) α eğrisi bir geodezik eğridir $\Leftrightarrow \kappa_g = 0$ dır.

ii) α eğrisi bir asimptotik eğridir $\Leftrightarrow \kappa_n = 0$ dır.

iii) α eğrisi bir asli doğrudur $\Leftrightarrow \tau_g = 0$ dır (O'Neill, 1983).

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLER VE EĞRİLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid Uzayında sabit açılı yüzeyler ve eğriler ele alınmıştır. Bazı özel regle yüzeyler, sabit açılı yüzey karakterizasyonunun temel teoremi altında sınıflandırılmıştır. Bazı özel regle yüzeyler ve bazı konikal yüzeyler sabit açılı yüzey olma bakımından incelenmiştir. Ayrıca sabit açılı yüzey üzerinde yatan eğriler için bazı karekterizasyonlar verilmiştir.

Tanım 3.1. Bir yüzeyin her noktadaki birim normali, belirli bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa bu yüzeye sabit açılı yüzey denir (Nistor, 2011).

Nistor (2011) bir eğriden geçen bazı regle yüzeyleri sabit açılı yüzey olma bakımından incelenmiştir.

Teorem 3.1. $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyinin bir sabit açılı yüzey olabilmesi için gerek ve yeter koşul

i) Ya yüzey $r : M \to \mathbb{R}^3$

$$r(u_1,u_2) = \left(u_1 cos\theta\left(cos\ u_2, sin\ u_2\right) + \gamma(u_2), u_1 sin\theta\right) \tag{3.1}$$

$$\gamma(u_2) = cos\theta\left(-\int_0^{u_2} \eta(\tau)\sin\tau d\tau, \int_0^{u_2} \eta(\tau)\cos\tau d\tau\right),$$

parametrik denklemiyle verilmelidir,

veya

ii) M yüzeyi $xsin\theta - zcos\theta = 0$ düzleminin bir açık parçasıdır,

veya

iii) M yüzeyi β, $\mathbb{R}^2$ de bir diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere, $\beta \times \mathbb{R}$ silindirinin açık bir parçasıdır (Munteanu ve Nistor, 2009).

Bu bölümde uzay eğrisi ile ilişkilendirilmiş üç tane açılabilir yüzeyi ele alacağız. $\alpha, \kappa(s) \neq 0$ olacak şekildeki bir birim hızlı uzay eğrisi olsun.

$$r(s,v) = \alpha(s) + vw(s)$$

şeklinde tanımlı regle yüzey, α nın açılabilir rektifiyanı olarak adlandırılır. Izumiya

$$r(s,v)=b(s)+vt(s)$$

şeklinde tanımlı regle yüzeyi, α nın Darboux açılabiliri olarak adlandırılmıştır.

$$r(s,v)=w(s)+vn(s)$$

şeklinde tanımlı regle yüzey α nın tanjant Darboux açılabiliri olarak adlandırılır.

Aşağıdaki üç teorem, E^3 de tanjant, normal ve binormal sabit açılı yüzeyler için bir karakterizasyondur.

Teorem 3.2. Tanjant açılabilir sabit açılı yüzeyler silindirik helisler tarafından üretilir (Nistor, 2011).

İspat:

Tanjant açılabilir yüzeyi ;

$$r(s,v)=\alpha(s)+vt(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım. Burada $\alpha: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ yay parametreli bir diferensiyellenebilir uzay eğrisi ve t, α eğrisinin birim teğet vektör alanıdır.

Yüzeyin birim normalini hesaplayalım. Bunun için $r(s,v)$ nin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$r_s(s,v)=\alpha'(s)+vt'(s)$$

$$=t(s)+v\kappa n$$

$$r_v(s,v)=t(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali ise

$$r_s\times r_v=(0,0,-v\kappa)=-v\kappa b$$

$$N=\pm\frac{r_s\times r_v}{\|r_s\times r_v\|}=\pm b$$

olarak hesaplanır. Yüzeyin yönlendirmesini, α eğrisinin binormali ile yüzeyin normalini eşit olacak şekilde seçelim. Yüzey sabit açılı yüzey olduğundan yüzeyin normali ile sabit bir k vektörü sabit bir açı yapacağından,

$$\langle b, \mathrm{k} \rangle = \langle N, \mathrm{k} \rangle = \theta$$

elde edilir. Bu da α eğrisinin bir silindirik helis olduğunu gösterir.

Teorem 3.3. Tanjant açılabilir sabit açılı yüzeyler Teorem 3.1**.** de bahsi geçen $\eta(t) = \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ için elde edilmiştir (Nistor 2011).

İspat :

α silindirik helisini

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c}\cos s, \frac{a}{c}\sin s, \frac{b}{c}s\right)$$

parametrik denklemiyle ele alalım. Buradan s ye göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin s, \frac{a}{c}\cos s, \frac{b}{c}\right)$$

elde edilir. Yüzeyin parametrik denklemi

$$r(s,v) = \alpha(s) + vt(s)$$

$$r(s,v) = \left(\frac{a}{c}(\cos s - v\sin s), \frac{a}{c}(\sin s + v\cos s), \frac{b}{c}(s+v)\right)$$

dir.

k sabit doğrultusunu tanjant ve normal parçasını

$$k = \sin\theta\,\alpha' + \cos\theta N$$

olarak alalım. $\langle r_s, k \rangle$ iki şekilde hesaplanır. Birinci olarak

$$\langle r_s, k \rangle = \langle \alpha', \sin\theta\,\alpha' \rangle = \sin\theta$$

ve ikinci olarak

$$\langle r_s, k\rangle = \frac{b}{c}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{b}{c} = \sin\theta \text{ ve } \frac{a}{c} = \cos\theta$$

elde edilir.

Parametre değişimi $u_1 = s + v$ yapılarak

$$r(s,u_1) = \left(\cos\theta\left(\cos s - u_1 \sin s + s\sin s\right), \cos\theta\left(\sin s + u_1\cos s - s\cos s\right), u_1 \sin\theta\right)$$

bulunur.

İkinci bir parametre değişimi $u_2 = s + \frac{\pi}{2}$ yapılarak

$$r(u_1,u_2) = \left(u_1\cos\theta\left(\cos u_2, \sin u_2\right) + \gamma(u_2), u_1\sin\theta\right)$$

elde edilir. Burada

$$\gamma(u_2) = \cos\theta\left(\sin u_2 - \left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right)\cos u_2, -\cos u_2 - \left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right)\sin u_2\right)$$

Şimdi, bu ifadeyi Teorem 3.1. ile karşılaştıralım. Bunun için Teorem 3.1. de geçen η diferensiyellenebilir fonksiyonunu belirleyelim.

İddia ediyoruz ki $\eta(t) = \frac{\pi}{2} - t$

dır. Bu iddiayı ispatlamak için

$$-\int_0^{u_2} \eta(t)\sin t\,dt = \left(\frac{\pi}{2} - u_2\right)\cos u_2 + \sin u_2 - \frac{\pi}{2}$$

ve

$$\int_0^{u_2} \eta(t)\cos t\,dt = \left(\frac{\pi}{2} - u_2\right)\sin u_2 - \cos u_2 + 1$$

hesaplanır. Buradan $\eta(t) = \frac{\pi}{2} - t$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Bu teorem silindirik helisin $\alpha(s) = \left(\frac{a}{c}\cos s, \frac{a}{c}\sin s, \frac{b}{c}s\right)$ genel durumuna genelleştirilebilir.

Teorem 3.4. Normal sabit açılı yüzeyler düzlemin bir parçasıdır (Nistor, 2011).

İspat:

Normal yüzeyi;

$$r(s,v) = \alpha(s) + vn(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım ve yüzeyin birim normalini hesaplayalım. Bunun için $r(s,v)$ nin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$r_s(s,v) = \alpha'(s) + vn'(s)$$

$$r_s(s,v) = t(s) + v(-\kappa t + \tau b)$$

$$r_s(s,v) = (1 - \kappa v)t + v\tau b$$

$$r_v(s,v) = n(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali ise

$$r_s \times r_v = -\tau v t + (1 - \kappa v)b$$

$$\|r_s \times r_v\| = \sqrt{\tau^2 v^2 + (1 - \kappa v)^2} = \sqrt{\Delta}$$

$$N = \frac{-\tau v t + (1 - \kappa v)b}{\sqrt{\Delta}}, \qquad k = \sin\theta\alpha' + \cos\theta N$$

olarak hesaplanır. Normal yüzeyin birim normali N ile sabit bir k doğrultusu sabit bir θ açısı yapacağından

$$\langle N,k\rangle=\cos\theta$$

dır. Buna göre

$$\langle N,k\rangle=\left\langle\frac{-\tau v t+(1-\kappa v)b}{\sqrt{\Delta}},k\right\rangle=\cos\theta$$

$$\langle N,k\rangle=\frac{-\tau v}{\sqrt{\Delta}}\langle t,k\rangle+\frac{(1-\kappa v)}{\sqrt{\Delta}}\langle b,k\rangle=\cos\theta$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının karesi alınırsa,

$$\frac{\tau^2 v^2}{\Delta}\langle t,k\rangle^2-\frac{2\tau v(1-\kappa v)}{\Delta}\langle t,k\rangle\langle b,k\rangle+\frac{(1-\kappa v)^2}{\Delta}\langle b,k\rangle^2=\cos^2\theta$$

$$\frac{\tau^2 v^2}{\Delta}\langle t,k\rangle^2-\frac{2\tau v}{\Delta}\langle t,k\rangle\langle b,k\rangle+\frac{2\tau\kappa v^2}{\Delta}\langle t,k\rangle\langle b,k\rangle+\frac{\left(1-2\kappa v+\kappa^2 v^2\right)}{\Delta}\langle b,\mathrm{k}\rangle^2=\cos^2\theta$$

v ye bağlı bir polinom elde edilir.

$$\frac{v^2}{\Delta}\left[\tau^2\langle t,k\rangle^2+2\tau\kappa\langle t,k\rangle\langle b,k\rangle+\kappa^2\langle b,k\rangle^2\right]+\frac{v}{\Delta}\left[-2\tau\langle t,k\rangle\langle b,k\rangle-2\kappa\langle b,k\rangle^2\right]+$$
$$+\frac{v^0}{\Delta}\left[\langle b,k\rangle^2-\Delta\cos^2\theta\right]=0$$

$\Delta=\tau^2 v^2+1-2\kappa v+\kappa^2 v^2$ dır.

$$v^2\left[\tau^2\langle t,k\rangle^2+2\tau\kappa\langle t,k\rangle\langle b,k\rangle+\kappa^2\langle b,k\rangle^2-\tau^2\cos^2\theta-\kappa^2\cos^2\theta\right]+$$
$$+v\left[-2\tau\langle t,k\rangle\langle b,k\rangle-2\kappa\langle b,\mathrm{k}\rangle^2+2\kappa\cos^2\theta\right]+v^0\left[\langle b,k\rangle^2-\cos^2\theta\right]=0$$

v ye bağlı polinomun katsayıları 0 a eşitleyerek aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\langle b,k\rangle^2-\cos^2\theta=0 \tag{3.2}$$

$$\kappa\langle b,k\rangle^2+\tau\langle b,k\rangle\langle t,k\rangle-\kappa\cos^2\theta=0 \tag{3.3}$$

$$\left(\kappa\langle b,k\rangle+\tau\langle t,k\rangle\right)^{2}-\left(\tau^{2}+\kappa^{2}\right)\cos^{2}\theta=0 \tag{3.4}$$

(3.2) deki eşitlikten $\langle b,k\rangle=\pm\cos\theta$ dır.

(3.2) deki denklemi (3.3) deki denklemde yazılırsa

$$\tau\langle b,k\rangle\langle t,k\rangle=0$$

elde edilir. Buna göre aşağıdaki durumları verebiliriz:

a) $\tau=0$ ise

(3.3) ve (3.4) denklemlerinin her ikisi birden (3.2) denklemine otomatik olarak indirgenir. Çünkü α bir düzlemsel eğri olur ve bu eğrinin binormali ile düzlemin normali çakışır.

Bu normal yüzeyi, doğrultmanı α üreteç eğrisinin normal doğrusu olan bir regle yüzey olarak düşünebiliriz. Bu durumda normal sabit açılı yüzey, düzlemin bir parçası olarak elde edilir.

b) $\tau\neq 0$ ise

b.1) $\langle b,k\rangle=0$ ise (1) denkleminden

$$\cos\theta=0$$

elde edilir. Bu ifadeyi (3.4) denkleminde yerine yazıldığında

$$\langle t,k\rangle=0$$

elde edilir.

$$\langle t,k\rangle=0$$

denkleminin s ye göre türevini alındığında

$$\langle n,k\rangle=0$$

elde edilir. Buradan k doğrultmanının t,n,b ortogonal vektör alanlarının her birine dik olduğu elde edilir ki bu bir çelişkidir. Çünkü $\{t,n,b\}$ bir ortonormal bazdır.

b.2) $\langle t,k\rangle = 0$ ise (b.1) durumuna benzer bir çelişki elde edilir. Yine bu durum sağlanmaz.

Böylece, normal sabit açılı yüzeyler Teorem 3.1. deki (ii) durumu olarak elde edilir.

Teorem 3.5. Binormal sabit açılı yüzeyler silindirik yüzeyin bir parçasıdır

(Nistor , 2011).

İspat :

Bir binormal yüzeyi

$$r(s,v) = \alpha(s) + vb(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım.

Yüzeyin birim normalini hesaplayalım. Bunun için $r(s,v)$ nin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$r_s(s,v) = \alpha'(s) + vb'(s)$$

$$r_s(s,v) = t(s) + v(-\tau n)(s)$$

$$r_s(s,v) = t - \tau vn$$

$$r_v(s,v) = b(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali N ise;

$$r_s \times r_v = -\tau vt - n$$

$$\|r_s \times r_v\| = \sqrt{1+\tau^2 v^2} = \sqrt{\Delta}$$

olmak üzere

$$N = \pm \frac{r_s \times r_v}{\|r_s \times r_v\|} = \pm \frac{-\tau vt - n}{\sqrt{\Delta}}$$

olarak elde edilir. N ile k iç çarpılırsa

$$\langle N,k\rangle=\left\langle\frac{-\tau vt-n}{\sqrt{\Delta}},k\right\rangle=-\frac{-\tau v}{\sqrt{\Delta}}\langle t,k\rangle-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\langle n,k\rangle$$

elde edilir. Ayrıca yüzey sabit açılı yüzey olduğundan

$$\langle N,k\rangle=\cos\theta$$

dır. Bu ifadenin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left[-\frac{-\tau v}{\sqrt{\Delta}}\langle t,k\rangle-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\langle n,k\rangle\right]^2=\cos^2\theta$$

$$\frac{\tau^2v^2}{\Delta}\langle t,k\rangle^2+\frac{2\tau v}{\Delta}\langle t,k\rangle\langle n,k\rangle+\frac{1}{\Delta}\langle n,\mathrm{k}\rangle^2=\cos^2\theta$$

elde edilir. Burada

$\Delta=1+\tau^2v^2$ dir.

Denklem düzenlenirse v ye bağlı ikinci dereceden

$$\tau^2v^2\langle t,k\rangle^2+2\tau v\langle t,k\rangle\langle n,k\rangle+\langle n,k\rangle^2-\cos^2\theta-\tau^2v^2\cos^2\theta=0$$

$$v^2\left[\tau^2\langle t,k\rangle^2-\tau^2\cos^2\theta\right]+v\left[2\tau\langle t,k\rangle\langle n,k\rangle\right]+v^0\left[\langle n,k\rangle^2-\cos^2\theta\right]=0$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun katsayılarını sıfıra eşitleyerek aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\tau^2\left(\langle t,k\rangle-\cos\theta\right)\left(\langle t,k\rangle+\cos\theta\right)=0 \tag{3.5}$$

$$\tau\langle t,k\rangle\langle n,k\rangle=0 \tag{3.6}$$

$$\left(\langle n,k\rangle-\cos\theta\right)\left(\langle n,k\rangle+\cos\theta\right)=0 \tag{3.7}$$

Bir önceki tekniğe benzer bir şekilde $\tau=0$ şartına ek olarak $\langle t,k\rangle=0$ şartı ortaya çıkar α düzlemsel eğrisinin binormali sabit k doğrultusuna paraleldir ve $\theta=\frac{\pi}{2}$ elde edilir.

Böylece, binormal sabit açılı yüzeyler α düzlemsel eğri ile üretilen silindirik yüzeylerdir.

Bu durumda ise Teorem 3.1 in (3.4) durumu gerçekleşir.

Teorem 3.6. Rektifiyan açılabilir sabit açılı yüzeyler slant helisler tarafından üretilir (Özkaldı ve Yaylı, 2011).

İspat :

Rektifiyan açılabilir yüzeyi

$$r(s,v) = \alpha(s) + v\omega(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım. Burada α eğrisinin Darboux vektörü $\omega = \tau t + \kappa b$ dir. Buna göre rektifiyan yüzey

$$r(s,v) = \alpha(s) + v(\tau t + \kappa b)$$

ile ifade edilebilir. Yüzeyin birim normalini hesaplayalım. Bunun için $r(s,v)$' nin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$r_s(s,v) = \alpha'(s) + v(\tau' t + \tau t' + \kappa' b + \kappa b')$$

$$r_s(s,v) = t(1 + v\tau') + b(v\kappa')$$

$$r_v(s,v) = \tau t + \kappa b$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali N olmak üzere

$$r_s \times r_v = (0, -\kappa'\tau + \kappa + \kappa\tau' v, 0)$$

$$N = \pm \frac{r_s \times r_v}{\| r_s \times r_v \|} = \pm n$$

olarak hesaplanır. Yüzeyin yönlendirmesini α eğrisinin normali ile yüzeyin normalini aynı olacak şekilde seçelim. Yüzey sabit açılı bir yüzey olduğundan,

$$\langle N, \mathrm{k} \rangle = \langle n, \mathrm{k} \rangle = \theta$$

dır. Bu da bize α eğrisinin bir slant helis olduğunu gösterir.

Teorem 3.7. Darboux açılabilir sabit açılı yüzeyler, silindirik helisin binormal eğrileri tarafından üretilir (Özkaldı ve Yaylı, 2011).

İspat :

Darboux açılabilir yüzeyi;

$$r(s,v) = b(s) + vt(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım. $r(s,v)$ nin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$r_s(s,v) = b'(s) + vt'(s)$$

$$r_s(s,v) = \tau n + v\kappa n$$

$$r_s(s,v) = (\tau + \kappa v)n$$

$$r_v(s,v) = t(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali ise

$$N = \pm \frac{r_s \times r_v}{\| r_s \times r_v \|} = \pm b$$

olarak elde edilir. Yüzeyin yönlendirmesini, α eğrisinin binormali ile yüzeyin normalini aynı olacak şekilde seçelim. Yani $N = b$ dir. Yüzey sabit açılı bir yüzey olduğundan,

$$\langle N, \mathrm{k} \rangle = \langle b, \mathrm{k} \rangle = \theta$$

dır. Bu da bize α eğrisinin bir silindirik helis olduğunu gösterir.

Şimdi Teorem (3.1) ile Darboux açılabilir yüzeyinin sağlandığı sabit açı özelliği arasındaki direk bağlantıyı görelim. Bunun için Teorem (3.1) deki η fonksiyonunu tanımlayalım.

Genelliği bozmadan α silindirik helisini

$$\alpha(s)=\left(\frac{a}{c}\cos s,\frac{a}{c}\sin s,\frac{b}{c}s\right)$$

parametrik denklemi ile ele alalım. Frenet formüllerini kullanarak Darboux açılabilir yüzeyi,

$$r(s,v)=b(s)+vt(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım.

$$\alpha'=\left(-\frac{a}{c}\sin s,\frac{a}{c}\cos s.\frac{b}{c}\right)$$

$\|\alpha'(s)\|=1$ olduğundan $\alpha'(s)=t(s)$ dir.

$$\alpha''=\left(-\frac{a}{c}\cos s.-\frac{a}{c}\sin s,0\right)$$

$\|\alpha''(s)\|=\frac{a}{c}$ dir. $n(s)=\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ olduğundan

$$n(s)=(-\cos s,-\sin s,0)$$

$$t(s)\times n(s)=\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{a}{c}\sin s & \frac{a}{c}\cos s & \frac{b}{c} \\ -\cos s & -\sin s & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan;

$$b(s)=\left(\frac{b}{c}\sin s,-\frac{b}{c}\cos s,\frac{a}{c}\right)$$

dir. $r(s,v)=b(s)+vt(s)$ yüzeyi

$$r(s,v)=\left(\left(\frac{b}{c}-v\frac{a}{c}\right)\sin s,\left(-\frac{b}{c}+v\frac{a}{c}\right)\cos s,\frac{a}{c}+v\frac{b}{c}\right) \qquad (3.8)$$

olarak elde edilir. Bu parametrizasyonun Teorem 3.1 durum (i) deki özel durum olduğunu ispatlayalım. Bunun için

k sabit doğrultusu normal ve tanjant kısımlarına ayrılarak

$$k = \sin\theta\alpha' + \cos\theta N$$

şeklinde yazılabilir.

$\langle r_v, k\rangle$ iki şekilde hesaplanabilir. Birinci olarak

$$\langle r_v, k\rangle = \langle \alpha', \sin\theta\,\alpha'\rangle = \sin\theta$$

ikinci olarak da

$$\langle r_v, k\rangle = \frac{b}{c}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{b}{c} = \sin\theta \ , \ \frac{a}{c} = \cos\theta$$

bulunur.

(3.1) ve (3.8) denklemlerinin üçüncü bileşenlerine dikkat edilirse

$$u_1 = v + \cot\theta$$

parametre değişimi yapılır. Buna göre

$$r(s,u_1) = \left(\left(\frac{1}{\sin\theta} - u_1\cos\theta\right)\sin s, \left(-\frac{1}{\sin\theta} + u_1\cos\theta\right)\cos s, u_1\sin\theta\right)$$

bulunur.

İkinci bir parametre değişimi $u_2 = s + \frac{\pi}{2}$ yapılarak da

$$r(s,u_1) = \left(u_1\cos\theta\left(\cos u_2, \sin u_2\right) + \varphi(u_2), u_1\sin\theta\right)$$

elde edilir. Burada

$$\varphi(u_2) = \left(-\frac{1}{\sin\theta}\cos u_2, -\frac{1}{\sin\theta}\sin u_2 \right)$$

dir.

3.1. Sabit Açılı Konikal Yüzeyler

Bu bölümde konikal yüzeyleri, sabit açılı yüzey olma bakımından ele alacağız.

Teorem 3.1.1. Sabit açılı konikal yüzeyler dairesel konilerdir (Nistor, 2009).

İspat :

$\mathbb{R}^3$ de tepe noktası orijin olan bir konikal yüzey

$$r(s,v) = v\alpha(s)$$

parametrik denklemi ile verilir. Burada α, bir regüler eğridir. Bunun anlamı, herhangi bir koni; α üreteç eğrisi birim küre üzerinde yatan bir eğri olarak tekrar parametrelendirilebilir. Yani $\|\alpha(s)\| = 1$ alınabilir. Bu durumda yüzeyin birim normali N yi hesaplamak için yüzeyin parametrik denkleminin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$r_s(s,v) = v\alpha'(s)$$

$$r_s(s,v) = vt(s)$$

$$r_v(s,v) = \alpha(s)$$

olmak üzere; yüzeyin birim normali

$$N = \pm\frac{r_v \times r_s}{\|r_v \times r_s\|} = \alpha(s) \times \alpha'(s)$$

olarak hesaplanır. Yüzey bir sabit açılı yüzey olduğundan

$$\langle N, k \rangle = \langle \alpha \times \alpha', k \rangle = \theta$$

elde edilir. Her iki tarafın s ye göre türevini alınırsa,

$$\langle \alpha' \times \alpha', k \rangle + \langle \alpha \times \alpha'', k \rangle = 0$$

dır. $\langle \alpha' \times \alpha', k \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \alpha \times \alpha'', k \rangle = 0$$

elde edilir.

Şimdi α'' vektörünü $\{\alpha, \alpha', \alpha \times \alpha'\}$ ortonormal bazının lineer birleşimi olarak yazalım.

$$\alpha'' = c_1\alpha + c_2\alpha' + c_3(\alpha \times \alpha')$$

c_1 i bulabilmek için $\alpha'' = c_1\alpha + c_2\alpha' + c_3(\alpha \times \alpha')$ ifadesinin her iki tarafını α ile iç çarpalım.

$$\langle \alpha'', \alpha \rangle = c_1 \langle \alpha, \alpha \rangle + c_2 \langle \alpha', \alpha \rangle + c_3 \langle \alpha \times \alpha', \alpha \rangle$$

$$c_1 = \langle \alpha'', \alpha \rangle$$

dır. c_2 yi bulabilmek için $\alpha'' = c_1\alpha + c_2\alpha' + c_3(\alpha \times \alpha')$ ifadesinin her iki tarafını α' ile iç çarpalım.

$$\langle \alpha'', \alpha \rangle = c_1 \langle \alpha, \alpha' \rangle + c_2 \langle \alpha', \alpha' \rangle + c_3 \langle \alpha \times \alpha', \alpha \rangle$$

$$c_2 = \langle \alpha'', \alpha \rangle$$

dır. c_3 ü bulabilmek için $\alpha'' = c_1\alpha + c_2\alpha' + c_3(\alpha \times \alpha')$ ifadesinin her iki tarafı $\alpha \times \alpha'$ ile iç çarpalım.

$$\langle \alpha'', \alpha \times \alpha' \rangle = c_1 \langle \alpha, \alpha \times \alpha' \rangle + c_2 \langle \alpha', \alpha \times \alpha' \rangle + c_3 \langle \alpha \times \alpha', \alpha \times \alpha' \rangle$$

$$c_3 = \langle \alpha'', \alpha \times \alpha' \rangle$$

elde edilir.

$$\alpha'' = \langle \alpha'', \alpha \rangle \alpha + \langle \alpha'', \alpha' \rangle \alpha' + \langle \alpha'', \alpha \times \alpha' \rangle \alpha \times \alpha' \tag{3.9}$$

$\|\alpha(s) = 1\|$ ve $\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan $\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ ifadesinin türevi alındığında

$$\langle \alpha'', \alpha \rangle = 1$$

elde edilir. $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ ifadesinin türevi alındığında

$$\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$$

elde edilir. Bulduğumuz değerleri (3.9) deki denklemde yerine yerine yazalım.

$$\alpha'' = -\alpha + \langle \alpha'', \alpha \times \alpha' \rangle \alpha \times \alpha'$$

dır. Burada $\langle \alpha'', \alpha \times \alpha' \rangle = \kappa_g$; κ_g, α nın geodezik eğriliğidir. κ_g değerini $\langle \alpha \times \alpha'', k \rangle = 0$ de yerine koyalım,

$$\langle \alpha \times (-\alpha + \kappa_g (\alpha \times \alpha')), k \rangle = 0$$

$$-\langle \alpha \times \alpha, k \rangle + \kappa_g \langle \alpha \times (\alpha \times \alpha'), k \rangle = 0$$

$$\kappa_g \langle (\alpha.\alpha)\alpha' - (\alpha.\alpha')\alpha, k \rangle = 0$$

$$\kappa_g \langle \alpha' \times k \rangle = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu da bize α eğrisinin düzlemsel eğri yani α nın bir çember olduğunu söyler. Böylece $r(s,v) = v\alpha(s)$ dairesel konidir.

Teorem 3.1.2. Tanjant sabit açılı konikal yüzeyler, silindirik helis eğriler tarafından üretilir (Nistor, 2009).

İspat :

Tepe noktası orijin olan konikal yüzey;

$$r(s,v) = vt(s)$$

parametrik denklemi ile verilir. Yüzeyin parametrik denkleminin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$r_s(s,v) = vt'(s) = v\kappa n$$

$$r_v(s,v) = t(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali ise

$$r_s \times r_v = (0, 0, -v\kappa) = -v\kappa b$$

$$N = \pm \frac{r_s \times r_v}{\| r_s \times r_v \|} = \pm b$$

olarak hesaplanır. Sabit açılı yüzeylerde yüzeyin normali ile sabit bir k vektörü sabit açı yapacağından

$$\langle b, \mathrm{k} \rangle = \langle N, \mathrm{k} \rangle = \theta$$

olur ki bu da bize α eğrisinin bir silindirik helis olduğunu gösterir. Yani yüzey silindirik helisin tanjant eğrileri tarafından üretilmiştir.

Teorem 3.1.3. Normal konikal sabit açılı yüzeyler, Darboux helisin normal eğrileri tarafından üretilir (Nistor, 2009).

İspat :

Tepe noktası orijin olan bir normal konikal yüzeyi

$$r(s,v) = vn(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım. Yüzeyin parametrik denkleminin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa;

$$r_s(s,v) = vn'(s)$$

$$r_s(s,v) = v(-\kappa t + \tau b)$$

$$r_v(s,v) = n(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali N olmak üzere,

$$r_s \times r_v = (-\tau v, 0, \kappa v) = -\tau vt - \kappa vb$$

$$\| r_s \times r_v \| = v\sqrt{\left(\tau^2 + \kappa^2\right)}$$

$$N = \pm \frac{r_s \times r_v}{\| r_s \times r_v \|} = \mp \frac{\tau t + \kappa b}{\sqrt{\left(\tau^2 + \kappa^2\right)}}$$

olarak hesaplanır. Yüzeyin yönlendirmesini, yüzeyin normali ile α üreteç eğrisinin Darboux vektörünü eşit olacak şekilde seçelim. Yani

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left(\tau^2 + \kappa^2\right)}}\left(\tau t + \kappa b\right)$$

olur. Yüzeyin normali α eğrisinin Darboux vektörü ve yüzey bir sabit açılı yüzey olduğundan, eğrinin Darboux vektörü sabit bir k vektörü ile sabit bir açı yapar.

Buna göre

$$\langle \omega, \mathrm{k} \rangle = \langle N, \mathrm{k} \rangle = \theta$$

olur ki bu da bize α eğrisinin bir Darboux helis olduğunu gösterir. Yani yüzey Darboux helisin normal eğrileri tarafından üretilmiştir.

3.2. Sabit Açılı Yüzeyler ve Bu Yüzeyler Üzerindeki Eğriler

Bu bölümde sabit açılı yüzey üzerinde yatan eğriler için bazı karakterizasyonlar vereceğiz.

Teorem 3.2.1. M, birim normali N olan bir sabit açılı yüzey, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ bir eğri ve sabit doğrultu k olsun. Eğri boyunca Darboux çatısı $\{T, Y = T \times N, N\}$ olmak üzere;

1) α eğrisi M üzerinde bir geodezik eğri ise, bu durumda α eğrisi E^3 de ekseni k olan bir slant helistir.

2) α eğrisi M üzerinde bir asimptotik eğri ise, bu durumda α eğrisi E^3 de ekseni k olan bir genel helistir.

3) α eğrisi bir eğrilik çizgisi ise, bu durumda α eğrisi E^3 de ekseni k olan bir helistir.

4) α eğrisi bir eğrilik çizgisi ise, bu durumda sabit k doğrultusu, Y ile N vektörlerinin gerdiği düzlemdedir (Özkaldı ve Yaylı, 2011).

İspat:

1) α eğrisi M üzerinde bir geodezik eğri olduğundan dolayı, yüzeyin normali ile eğrinin asli normali çakışır. Yüzey bir sabit açılı yüzey olduğundan sabit bir k doğrultusu ile sabit bir açı yapacağından

$$< N,k >=< n,k >= \theta$$

elde edilir ki bu da bize α eğrisinin ekseni k olan bir slant helis olduğunu gösterir.

2) α eğrisi M üzerinde bir asimptotik eğri olduğundan

$$\kappa_n = 0$$

dır.

$\kappa_n = \kappa sin\gamma$, $\kappa \neq 0$, $sin\gamma = 0$ olacağından $\gamma = 0$ elde edilir. γ, α eğrisinin binormali ile yüzeyin birim normali arasındaki açı olduğundan eğrinin binormali ile yüzeyin normali çakışır. Yüzey bir sabit açılı yüzey olduğundan sabit bir k doğrultusu ile sabit bir açı yapacağından

$$< b,k >=< N,k >= \theta$$

elde edilir. Bu da α eğrisinin ekseni k olan bir silindirik helis olduğunu gösterir.

3) α eğrisi bir eğrilik çizgisi olduğundan S, M yüzeyinin şekil operatörü ve $c \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$N' = S(T) = cT$$

dir.

Yüzey bir sabit açılı yüzey olduğundan

$$< N, \mathrm{k} >= c$$

dir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$< N', k >= 0$$

$$< T, k >= 0$$

elde edilir. Bu da bize α eğrisinin bir helis olduğunu gösterir.

4) M , E^3 te sabit açılı bir yüzey olsun. M üzerindeki α eğrisi eğrilik çizgisi olduğu için

$$N' = S(T) = cT$$

dir. Burada c sabit; S , M yüzeyinin şekil operatörüdür.

M sabit açılı yüzey olduğundan

$$< N, k >= sabit$$

dir. Bu denklemin türevi alınırsa,

$$< N', k >=< cT, k >= 0, \quad c \neq 0$$

olduğundan

$$< T, k >= 0$$

elde edilir. Böylece

$$k = \lambda Y + \mu N$$

yazılabilir.

Teorem 3.2.2. M birim normali N ve sabit doğrultusu k olan bir sabit açılı yüzey, α ise M üzerinde bir eğrilik çizgisi olsun. Eğri boyunca Darboux çatısı $\{T, Y = T \times N, N\}$ olmak üzere

$$r(s,v) = \alpha(s) + vN(\alpha(s))$$

parametrik denklemi ile verilen regle yüzey bir sabit açılı yüzeydir (Özkaldı ve Yaylı, 2011).

İspat :

$$r(s,v)=\alpha(s)+vN(\alpha(s))$$

Regle yüzeyin birim normalini hesaplayalım. Bunun için parametrik ifadesinin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$r_s(s,v)=\alpha'(s)+vN'(\alpha(s))$$

$$r_s(s,v)=t+vct$$

$$r_s(s,v)=(1+vc)t$$

$$r_v(s,v)=N(\alpha(s))$$

elde edilir. Regle yüzeyin birim normali $\tilde{N}$ îse

$$r_s\times r_v=(0,-(1+vc),0)=-(1+vc)$$

$$\|r_s\times r_v\|=1+vc$$

$$\tilde{N}=\pm\frac{r_s\times r_v}{\|r_s\times r_v\|}=\pm Y$$

olarak hesaplanır. Regle yüzeyin yönlendirmesini, yüzeyin normali ile α üreteç eğrisinin Y vektör alanına eşit olacak şekilde seçelim. Bu durumda

$$<N,k>=<n,k>=\theta$$

ifadesinden

$$k=cos\psi N+sin\psi Y$$

yazabiliriz. Böylece $\langle\tilde{N},k\rangle=\frac{\pi}{2}-\psi$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4. 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEY VE EĞRİLER

Bu bölümde 3-boyutlu Lorentz Uzayında sabit açılı yüzeyler ve eğriler ele alınmıştır. 3-boyutlu Lorentz uzayında bazı özel regle yüzeyler sabit açılı yüzey karakterizasyonunun temel teoremi altında sınıflandırılıp bu yüzeyler ile bazı konikal yüzeyler sabit açılı yüzey olma bakımından incelenmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Lorentz uzayında sabit açılı yüzey üzerinde yatan eğriler için bazı karekterizasyonlar verilmiştir.

Tanım 4.1. $r : M \to E_1^3$ bir spacelike immersiyon ve N, M üzerinde bir birim normal vektör alanı olsun. Eğer N sabit bir u timelike vektörü ile sabit bir hiperbolik açı yapıyorsa M ye bir spacelike sabit açılı yüzey denir (Lopez ve Munteanu, 2011).

Lopez ve Munteanu sadece sabit timelike doğrultulu spacelike yüzeyleri çalışmışlar bunlarla ilgili aşağıdaki karakterizasyonlar vermişlerdir.

Teorem 4.1. $\mathbb{R}_1^3$de bir M spacelike yüzeyinin bir sabit açılı yüzey olabilmesi için gerek ve yeter koşul

yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u,v) = \left(u\cosh\theta(\cos v, \sin v) + \psi(v), -u\sinh\theta\right)$$

$$\psi(v) = \sinh\theta\left(\int \alpha(v)\sin v, -\int \alpha(v)\cos v\right)$$

Burada α diferensiyellenebilir fonksiyondur (Lopez ve Munteanu, 2011).

Daha sonra bu tanım [Atalay ve diğerleri] tarafından sabit spacelike doğrultulu spacelike yüzeyler için verilip, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında spacelike sabit açılı yüzeyler aşağıdaki gibi sınıflandırılmıştır.

Teorem 4.2. $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike M yüzeyinin sabit spacelike doğrultulu bir sabit açılı yüzey olması için

i) Yüzeyin parametrik denklemi

$$r(u,v) = \left(u\cosh\theta\cos(v) + \gamma_1(v), u\cosh\theta\sin(v) + \gamma_2(v), -u\sinh\theta\right)$$

burada

$$\gamma(v)=(\gamma_1(v),\gamma_2(v))=\sinh\theta\left(\int_0^v \sin(\tau)\Gamma(\tau)\partial\tau,-\int_0^v \cos(\tau)\Gamma(\tau)\partial\tau\right)$$

olmalıdır,

veya

ii) Silindirikal yüzeyin bir parçası olmalıdır.

$$r(u,v)=(u,\alpha_1(v),\alpha_2(v))$$

veya

iii) Denklemi

$$(\cosh\theta)\,y+(\sinh\theta)\,z=0$$

olan Lorentz düzleminin bir parçası olmalıdır.

4.1. Tanjant Açılabilir Sabit Açılı Spacelike Yüzeyler

Bu bölümde Öklid uzayına benzer şekilde tanjant açılabilir spacelike yüzeyleri sabit açılı yüzey olma bakımından ele alınmıştır.

$$\alpha: I\rightarrow E_1^3$$

de bir regüler eğri, M tanjant yüzeyi de α ile üretilen

$$r(s,v)=\alpha(s)+v\alpha'(s) \quad , \quad (s,v)\in I\times\mathbb{R}$$

parametrik denklemiyle verilen bir yüzey olsun. M nin (s,v) noktasındaki tanjant düzlemi $\{r_s,r_v\}$ vektörlerinin lineer birleşimi olduğundan

$$r_s=\alpha'(s)+v\alpha''(s)$$

$$r_v=\alpha'(\mathrm{s})$$

dir.

Yüzey $r_s\times_L r_v=v(\alpha'(s)\times\alpha''(s))\neq 0$ olan noktalarda regülerdir. Genelliği bozmadan $v>0$ alınabilir. Diğer taraftan M bir spacelike yüzey ve $\alpha(s)\in M$

olduğundan, α eğrisi bir spacelike eğri olmak zorundadır. α eğrisini s yay parametresi ile parametrelendirilirse

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$$

dir. $\alpha''(s)$, $\alpha'(s)$ vektörüne dik olduğundan α'' ivme vektörü spacelike, timelike veya null vektör olabilir. Bununla birlikte M nin $\{E, F, G\}$ birinci temel formları $\{r_s, r_v\}$ bazına göre hesaplanırsa

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}(s,v) = \begin{bmatrix} \langle r_s, r_s \rangle & \langle r_s, r_v \rangle \\ \langle r_v, r_s \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}(s,v) = \begin{bmatrix} 1 + v^2 \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

M bir spacelike yüzey olduğundan $EG - F^2 > 0$ dır. Böylece $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L > 0$ olmalıdır ki yani α'' bir spacelike vektördür. Buna göre $\{t, n, b\}$ Frenet çatısı

$$\begin{aligned} t(s) &= \alpha'(s) \\ n(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ b(s) &= t(s) \times_L n(s) \end{aligned}$$

dir. t ve n vektörleri birer spacelike vektör olacağından b bir timelike vektör olmak zorundadır. Frenet formülleri

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t + \tau b \\ b' &= \tau n \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada $\tau(s) = -\langle n'(s), \mathrm{b}(s) \rangle_L$ fonksiyonu α nın s noktasındaki torsiyonu olarak adlandırılır.

$r(s,v)$ tanjant yüzeyinin birim normali N hesaplanırsa

$$N = \frac{r_s \times_L r_v}{\|r_s \times_L r_v\|} = -b$$

elde edilir.

Aşağıdaki sonucu verebilmek için Minkowski uzayında helis kavramını hatırlayalım. Bir s-yay parametreli spacelike veya timelike $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi için $u \in E_1^3$ bir sabit vektör olmak üzere $\langle \alpha'(s), u \rangle_L$ fonksiyonu sabit ise α eğrisine bir helis denir. Buna denk olarak

$$\text{“}\frac{\tau}{\kappa} = sabit \Leftrightarrow \alpha \text{ eğrisi bir helistir. ”}$$

yazılabilir.

Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1.1. Tanjant açılabilir sabit açılı spacelike yüzeyler, spacelike silindirik helis tarafından üretilir (Lopez ve Munteanu, 2009).

İspat:

M tanjant spacelike yüzeyi, α ile üretilen parametrik denklemi

$$r(s,v) = \alpha(s) + v\alpha'(s) \quad , \quad (s,v) \in I \times \mathbb{R}$$

olan bir yüzey olduğundan yüzeyin birim normali

$$N = \frac{r_s \times_L r_v}{\|r_s \times_L r_v\|} = -b$$

dir. Ayrıca yüzey sabit açılı bir spacelike yüzey olduğundan, yüzeyin normali bir u timelike vektörü ile sabit bir hiperbolik açı yapacağından

$$\langle N, u \rangle_L = \langle b, u \rangle_L = sabit$$

elde edilir. Bu da α eğrisinin bir spacelike helis olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.2. M, α eğrisi tarafından üretilen bir tanjant açılabilir spacelike yüzey olsun. M nin bir sabit açılı yüzey olması için gerek ve yeter koşul $\tau^2 < \kappa^2$ olmak üzere α eğrisinin bir helis olmasıdır. Üstelik u timelike sabit doğrultusu ve θ sabit hiperbolik açısı sırasıyla

$$u = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}\left(-\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)\right)$$

$$cosh(\theta) = \frac{\kappa}{\sqrt{\left(\kappa^2 - \tau^2\right)}}$$

dır.

İspat :

Kabul edelim ki M yüzeyi $< u, u >_L = -1$ olan bir timelike vektör ile yüzeyinin sabit bir açı yapsın. Bu durumda $N = -b$ olduğundan

$$< b(s), u >_L = c, \qquad c < 0$$

sabit bir fonksiyondur. Bu denklemde s ye göre türev alınıp, Serret-Frenet formülleri kullanıldığında

$$\langle b'(s), u \rangle_L = 0$$

$$\langle \tau n(s), u \rangle_L = 0$$

$$\tau \langle n(s), u \rangle_L = 0$$

elde edilir.

(i) $\langle n(s), u \rangle_L \neq 0$ ise, $\tau = 0$ olur ki bu durumda α bir eğrisi düzlemsel eğridir. $b(s)$ vektörü sabit v vektörüdür ve $N = -v$, M yüzeyi üzerinde sabittir. $b = v$ olduğundan $\alpha \in Sp\{t, n\}$ dir. Böylece N, sadece u vektörü ile değil herhangi bir timelike vektör ile de sabit bir açı yapar. Bundan dolayı, u diğer vektörler tarafından v yerine koyulmuştur.

u sabit vektörü t ile b nin gerdiği düzlemdedir. Yani

$$u = 0.t + b$$

şeklinde yazılabilir.

$$u = -\frac{\tau}{\kappa}t + \frac{\kappa}{\kappa}b$$

$\tau = 0$ olduğundan

$$u = -\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}t + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}b$$

elde edilir. Her iki tarafı b ile çarparsak

$$\langle b, u \rangle_L = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}} = c$$

denklemi elde edilir. Burada

$$\cosh\theta = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}$$

olduğu görülür.

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}$$

denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\kappa}{\kappa\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{\kappa^2}}}$$

denkleminden $\kappa^2 - \tau^2 > 0$ ve $\kappa^2 > \tau^2$ eşitliği sağlanır. $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olduğundan α nın helis olduğu görülür.

(ii) $\langle n(s), u \rangle_L = 0$ ve $\tau \neq 0$ olsun.

$$\langle n(s), u \rangle_L = 0$$

denkleminin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\left\langle -\kappa t(s) + \tau b(s), u \right\rangle_L = 0$$

$$-\kappa \left\langle t(s), u \right\rangle + \tau \left\langle b(s), u \right\rangle_L = 0$$

elde edilir.

M yüzeyi bir sabit açılı yüzey olduğundan $N = -b$ dir.

$$< b(s), u >_L = c$$

olduğundan

$$\left\langle t(s), u \right\rangle_L = \frac{c\tau}{\kappa}$$

dir. Bu da bize α eğrisinin bir helis olduğunu gösterir.

$$u = \frac{c\tau}{\kappa} t - cb$$

alalım. $\left\langle u, u \right\rangle_L = -1$ olduğundan

$$\left\langle \frac{c\tau}{\kappa} t - cb, \frac{c\tau}{\kappa} t - cb \right\rangle_L = -1$$

$$\frac{c^2\tau^2}{\kappa^2} \left\langle t, t \right\rangle_L - \frac{2c^2\tau}{\kappa} \left\langle t, b \right\rangle_L + c^2 \left\langle b, b \right\rangle_L = -1$$

elde edilir.

$$\left\langle t, t \right\rangle_L = 1, \left\langle t, b \right\rangle_L = 0, \left\langle b, b \right\rangle_L = -1$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$c = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}, \quad \left(\tau^2 < \kappa^2\right)$$

u vektörü ise

$$u = \left\langle t, u \right\rangle_L t + \left\langle b, u \right\rangle_L b$$

$$u=\langle t,u\rangle_L\, t-cb$$

olur. Buradan da yine $\langle b,u\rangle_L = c = -\cosh\theta$ olduğundan

$$\cosh\theta=\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}$$

olduğu açıktır.

Aksine α eğrisi bir helis ve α tarafından üretilen tanjant açılabilir spacelike yüzey M olsun. α eğrisi bir helis olduğundan $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının ve $\langle b,u\rangle_L$ iç çarpımının sabit fonksiyon olduğunu biliyoruz.

i) $\tau=0$ ise α eğrisi düzlemsel eğridir. α eğrisi tarafından üretilen tanjant açılabilir spacelike yüzey M düzlemdir ki , bu düzlem sabit açılı yüzey olma şartını sağlar.

ii) $\tau\neq 0$ ise u doğrultusu

$$u=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}\left(-\tau(s)t(s)+\kappa(s)b(s)\right)$$

olsun. Serret-Frenet denklemlerini kullanılarak

$$\frac{du}{ds}=0$$

elde edilir, bu da u nun sabit bir vektör olduğunu gösterir.

$$\langle b,u\rangle_L=\left\langle b,\frac{1}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}\left(-\tau t+\kappa b\right)\right\rangle_L$$

$$\langle b,u\rangle_L=-\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}\langle b,\mathrm{t}\rangle_L+\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}\langle b,b\rangle_L$$

$$\langle b,t\rangle_L=0\,,\langle b,b\rangle_L=-1$$

olduğundan

$$\langle b,u\rangle_L=-\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-\tau^2}}$$

ve

$$\cosh\theta = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}$$

dır. Ayrıca $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olduğundan

$$\langle b,u \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\tau^2}{\kappa^2}}}$$

sabittir. $N = -b$ olduğundan

$$-\langle b(s),u \rangle_L = \langle N,u \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\tau^2}{\kappa^2}}}$$

dir. Bu ifadeden de M tanjant açılabilir spacelike yüzey bir sabit açılı yüzeydir.

4.2. Tanjant Açılabilir Sabit Açılı Timelike Yüzeyler

Şimdi sabit açılı yüzey kavramını, tanjant açılabilir timelike yüzeyler için verelim.

M, α eğrisi tarafından üretilen bir tanjant açılabilir timelike yüzey olsun. α eğrisi bir spacelike (α'' timelike) ya da α eğrisi timelike (α'' spacelike) bir eğridir.

α yay-uzunluğu ile parametrelendirilsin. α nın Frenet çatısı $\{t,n,b\}$ ise

$$\begin{aligned} t(s) &= \alpha'(s) \\ n(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ b(s) &= t(s) \times n(s) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda Frenet formülleri;

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \kappa t + \tau b \\ b' &= \varepsilon \tau n \end{aligned}$$

dır. Burada $\tau(s)=\langle n'(s),b(s)\rangle_L$, $\kappa(s)=\|\alpha''(s)\|$ ve $\langle t(s),t(s)\rangle_L=\varepsilon=-\langle n(s),n(s)\rangle_L$ $\varepsilon\in\{1,-1\}$ dir.

Her iki durumda da b spacelike vektördür.

Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.2.1 Açılabilir sabit açılı timelike Darboux yüzeyi, silindirik helis tarafından üretilir.

İspat:

Açılabilir Darboux yüzeyi

$$r(s,v)=b(s)+vt(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım. $r(s,v)$ parametrik denkleminin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$r_s(s,v)=b'(s)+vt'(s)$$

$$=\varepsilon\tau n+v\kappa n$$

$$=(\varepsilon\tau+v\kappa)n$$

$$r_v(s,v)=t(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali ise

$$N=\pm\frac{r_s\times_L r_v}{\| r_s\times_L r_v\|}=\pm b$$

olarak elde edilir. Yüzey sabit açılı bir yüzey olduğundan,

$$\langle N,u\rangle_L=\langle b,u\rangle_L=sabit$$

dır. Bu ise α eğrisinin bir silindirik helis olduğunu gösterir.

4.3. Lorentz Uzayında Konikal ve Silindirik Yüzeyler

Bu bölümde silindir ve konilerin spacelike ya da timelike sabit açılı yüzey olduklarını inceleyeceğiz. Biliyoruz ki silindir yüzeyi

$$r(s,\mathrm{v}) = \alpha(s) + v\,u$$

parametrik denklemi ile verilir. Burada α eğrisi bir regüler eğri, u sabit vektör ve $\alpha'(s) \times u \neq 0$ dır. Bir koni yüzeyi ise

$$r(s,v) = v\alpha(s)$$

parametrik denklemi ile verilir. Burada α regüler eğri, koninin tepe noktası orijin ve $v(\alpha(s) \times_L \alpha'(s)) \neq 0$ dır.

Teorem 4.3.1. Spacelike sabit açılı silindirler düzlemlerdir.

İspat :

α eğrisi tarafından üretilen, sabit doğrultusu u olan spacelike silindir M olsun. Yüzey spacelike olduğundan, u spacelike bir vektördür ve kabul edelim ki $|u| = 1$ olsun.

α eğrisini içeren bir π düzlemi ve bu düzleme dik bir u düşünelim. π timelike düzlemdir. Birim normal vektör $N(s,v) = N(s) = \alpha'(s) \times_L u$ dır.

α eğrisi bir doğru olmasın, $\kappa(s) \neq 0$ dır. α eğrisinin Frenet çatısını $\{t, n, b\}$ olarak alalım. α eğrisi bir düzlemsel eğridir,

$$b(s) = \mp u$$

$$N(s) = \mp n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$$

ve k birim timelike vektör olsun.

$$\langle N(s), \mathrm{k} \rangle_L = sabit$$

Yüzey sabit açılı bir yüzey olduğundan $\langle N(s), \mathrm{k} \rangle_L = sabit$ dir. Bu durumda

$$\langle n(s),k\rangle = sabit$$

elde edilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\langle n'(s),\mathrm{k}\rangle_L = \langle \kappa t(s)+\tau b(s),\mathrm{k}\rangle_L = 0$$

$$\langle n'(s),\mathrm{k}\rangle_L = \kappa\langle t(s),\mathrm{k}\rangle_L + \tau\langle b(s),\mathrm{k}\rangle_L = 0$$

elde edilir.

$b(s) = \mp u$ olduğundan u düzleme dik bir spacelike vektör ve k birim timelike vektör olduğundan

$$\langle b(s),\mathrm{k}\rangle_L = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\kappa\langle t(s),\mathrm{k}\rangle_L = 0$$

elde edilir . $\kappa(s) \neq 0$ olduğundan

$$\langle t(s),\mathrm{k}\rangle_L = 0$$

olmalıdır. Bu da α eğrisinin bir düzlemsel eğri olduğunu gösterir.

$$\langle t(s),\mathrm{k}\rangle_L = 0$$

İfadesinin her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\langle t'(s),\mathrm{k}\rangle_L = \kappa(s)\langle n(s),\mathrm{k}\rangle_L = 0$$

elde edilir. $\kappa(s) \neq 0$ olduğundan

$$\langle n(s),\mathrm{k}\rangle_L = 0$$

olmalıdır. Aslında, $n(s)$ ve k her ikisi de timelike vektördür. İki timelike vektör birbirine dik olamayacağından bu bir çelişkidir. Bu durumda

$$\kappa(s)=0$$

olmalıdır. $\kappa(s)=0$ olduğundan α eğrisi bir M spacelike düzleminde yatan bir doğrudur.

Teorem 4.3.2. Timelike sabit açılı tanjant konikal yüzeyler, spacelike (timelike) helisin tanjant eğrileri tarafından üretilir.

İspat :

Tepe noktası orijin olan tanjant konikal yüzey;

$$r(s,v)=vt(s)$$

parametrik denklemi ile verilir. Yüzeyin parametrik denkleminin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$r_s(s,v)=vt'(s)$$

$$=v\kappa n$$

$$r_v(s,v)=t(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali ise

$$r_s \times_L r_v=(0,0,-v\kappa)=-v\kappa b$$

$$N=\pm\frac{r_s \times_L r_v}{\| r_s \times_L r_v \|}=\pm b$$

olarak hesaplanır. Timelike sabit açılı yüzeylerde yüzeyin normali ile sabit bir u vektörü sabit açı yapacağından

$$\langle b,u\rangle_L=\langle N,u\rangle_L=sabit$$

olur ki bu da α eğrisinin bir silindirik helis olduğunu gösterir. Yani yüzey silindirik helisin tanjant eğrileri tarafından üretilmiştir.

Teorem 4.3.3. Timelike sabit açılı normal konikal yüzeyler, timelike Darboux helisin normal eğrileri tarafından üretilir.

İspat :

Tepe noktası orijin olan sabit açılı normal konikal yüzeyi

$$r(s,v)=vn(s)$$

parametrik denklemi ile ele alalım. Yüzeyin parametrik denkleminin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$r_s(s,v)=vn'(s)$$

$$=v(\kappa t+\tau b)$$

$$r_v(s,v)=n(s)$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali ise,

$$r_s \times_L r_v=(\tau v,0,\kappa v)=-\tau vt-\kappa vb$$

$$\| r_s \times_L r_v \|=v\sqrt{\tau^2+\kappa^2}$$

$$N=\pm\frac{r_s \times_L r_v}{\| r_s \times_L r_v \|}=-\frac{\tau t+\kappa b}{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}$$

olarak elde edilir. Yüzeyin normali, α eğrisinin Darboux vektörü olduğundan, eğrinin Darboux vektörü sabit doğrultulu u vektörü ile bir sabit açı yapar. Yani

$$\langle \omega,u\rangle_L=\langle N,u\rangle_L=sabit$$

olur. Bu da α eğrisinin bir Darboux helis olduğunu gösterir. Yani yüzey Darboux helisin normal eğrileri tarafından üretilmiştir.

4.4. Lorentz Uzayında Sabit Açılı Yüzey ve Eğriler

Bu bölümde Lorentz uzayında sabit açılı yüzey üzerinde yatan eğriler için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 4.4.1. M, birim normali Z olan bir sabit açılı yüzey, $\alpha : I\subset\mathbb{R}\rightarrow M$ bir eğri ve sabit doğrultu u olsun. Eğri boyunca Darboux çatısı $\{T,Y=\pm Z\times_L T,Z\}$ olmak üzere;

1) M , $\mathbb{R}_1^3$ de sabit açılı bir timelike yüzey olsun. M üzerindeki timelike α eğrisi geodezik eğri ise α eğrisi bir slant helistir.

2) M , E_1^3 de sabit açılı bir timelike yüzey olsun. M üzerindeki timelike α eğrisi asli doğru ise α eğrisi helistir.

3) M , E_1^3 de sabit açılı bir spacelike yüzey olsun. M üzerindeki spacelike α eğrisi bir asli doğru ise α eğrisi helistir.

4) M , E_1^3 de sabit açılı bir spacelike yüzey olsun. M üzerindeki spacelike α eğrisi eğrilik çizgisi ise u doğrultusu Y, Z vektörleri tarafından gerilen timelike düzlemdedir.

İspat :

1) α timelike eğrisi M üzerinde bir geodezik eğri olduğundan dolayı, yüzeyin normali ile eğrinin asli normali çakışır. Yüzey bir sabit açılı yüzey olduğundan sabit bir u doğrultusu ile sabit bir hiperbolik açı yapacağından

$$< N, u >_L = < n, u >_L = ch\theta$$

elde edilir ki bu da bize α eğrisinin ekseni u olan bir slant helis olduğunu gösterir.

2) α timelike eğrisi bir asli doğru ise $\tau_g = 0$ dır.

$$\tau_g = 0 = \tau + \theta'$$

ve M bir sabit açılı yüzey olduğundan

$$< Z, u >_L = c$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$< Z', u >_L = 0$$

elde edilir. Frenet formüleri kullanılırsa,

$$< \kappa_n T + \tau_g Y, u >_L = 0$$

elde edilir. $\tau_g = 0$ olduğundan

$$<\kappa_n T, u>_L = 0 = \kappa_n <T, u>_L = 0$$

dır. $\kappa_n \neq 0$ ise

$$<T, u>_L = 0$$

elde edilir. Bu da bize α timelike eğrisinin bir helis olduğunu gösterir.

3) α spacelike eğrisi bir asli doğru ise $\tau_g = 0$ dır.

$$\tau_g = 0 = \tau + \theta'$$

ve M sabit açılı yüzey olduğundan

$$<Z, u>_L = c$$

dir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$<Z', u>_L = 0$$

elde edilir. Frenet formüleri kullanılırsa,

$$<\kappa_n T + \tau_g Y, u>_L = 0$$

elde edilir. $\tau_g = 0$ olduğundan,

$$<\kappa_n T, u>_L = 0 = \kappa_n <T, u>_L = 0$$

dır. $\kappa_n \neq 0$ ise

$$<T, u>_L = 0$$

dır. Bu da α spacelike eğrisinin bir helis olduğunu gösterir.

4) α spacelike eğrisi eğrilik çizgisi olduğu için

$$\begin{aligned} Z' &= N' \\ &= S(T) \\ &= cT \end{aligned}$$

dir. Burada c sabit; S, M spacelike yüzeyinin şekil operatörüdür.

M bir sabit açılı yüzey olduğundan

$$< N,u >_L = sabit$$

dir. Bu denklemin s ye göre türevi alınırsa,

$$< N',u >_L = < cT,u >_L$$
$$= 0$$

elde edilir. $c \neq 0$ olduğundan

$$< T,u >_L = 0$$

elde edilir. Böylece

$$u = \lambda Y + \mu Z$$

yazılabilir.

Teorem 4.4.2. Birim normali Z olan M, E_1^3 de spacelike yüzey, α ise M üzerinde bir spacelike eğri olsun. M yüzeyinin parametrizasyonu

$$r(s,v) = \alpha(s) + vZ(\alpha(s))$$

ise, M bir spacelike sabit açılı yüzeydir.

İspat :

$$r(s,v) = \alpha(s) + vZ(\alpha(s))$$

parametrik ifadesinin sırasıyla s ye ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa,

$$r_s(s,v) = \alpha'(s) + vZ'(\alpha(s))$$
$$r_s(s,v) = t + vct$$
$$r_v(s,v) = Z(\alpha(s))$$

elde edilir. Yüzeyin birim normali ise

$$r_s \times_L r_v = \left(0, -\left(1+vc\right), 0\right) = -\left(1+vc\right)$$

$$Z = \pm \frac{r_s \times_L r_v}{\| r_s \times_L r_v \|} = \pm Y$$

olarak hesaplanır. Bu durumda.

$$u = cos\theta Z + sin\theta Y$$

yazılabilir. Böylece $\left(Z, u\right) = \left(\pi / 2\right) - \theta$ dır. Yüzeyin normali ile sabit doğrultu arasında sabit bir açı olduğundan M yüzeyi spacelike sabit açılı yüzeydir.

KAYNAKLAR

Atalay, G.S., Güler, F., Kasap, E., **“**Spacelike Constant Angle Surfaces in Minkowski 3-space”, ***J. Math. Comput. Sci***., 2- 3: 451-461 (2012).

Babaarslan, M., “Sabit Eğimli Yüzeyler ve Uygulamaları”, Doktora Tezi, ***Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara (2013).

Beem, J.K.,, Ehrlich,.P.E., “Global Lorentzian Geometry (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics)”, ***Published by Marcel Dekker Inc***., U.S.A., (1981).

Cermelli, P., Di Scala, A., J., “ Constant Angle Surfaces in Liquid Crystals”, ***Phylos Magazine***, 1871-1888 (2007).

Dillen, F., Fastenakels, J., Van der Veken J., Vrancken, L., “Constant Angle Surfaces in $S^2 \times R$”, ***Monaths. Math.,*** 152: 89-96 (2007).

Dillen, F., Munteanu, M., I., “Constant Angle Surfaces in $H^2 \times R$”, ***Bull. Braz. Math. Soc.,*** 40:85-97 (2009).

Gray, A., Abbena, E., Salamon, S., “Modern Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica”, ***3rd Edition. Studies in Advanced Mathematics***, 47, (2006).

Hacısalihoğlu, H.H., “Diferensiyel Geometri”, ***Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi***, Ankara (1993).

Hacısalihoğlu, H.H., “Diferensiyel Geometri”, ***Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi No:2***, Ankara (1993).

Izumiya, S., Takeuchii N., “New Special Curves and Developable Surfaces”, ***Turk. J. Math.,*** 28: 153-163 (2004).

Kahyaoğlu, S., “ E^3 de Sabit Açılı Yüzey Ailesi ”, Doktora Tezi, ***Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Samsun (2013)

Kuhnel, W., “Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds”, ***Wiesbaden Braunchweig*** (1999).

Kula, L., Yaylı, Y., “On Slant Helix and its Spherical İndicatrix”, ***Appl. Math. And Comp. ,***169: 600-607 (2005).

KAYNAKLAR(Devam Ediyor)

Lopez, R. , Munteanu, M.I., “Constant Angle Surfaces in Minkowski Space” , ***Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*** 18: 271-289 (2011).

Munteanu, M.I., Nistor, A. I., “A New Approach on Constant Angle Surfaces in E^3 “, ***Turk. J. Math.,*** 33: 169-178 (2009).

Nistor, A., “Certain Constant Angle Surfaces Constructed on Curves”, ***Mathematics Subject Classification*** (2000)

O'Neill, “Semi-Rieamann Geometry”, ***Academics Press***, Newyork (1983).

Özkaldı, S ., Yaylı, Y., “Constant Angle Surfaces and Curves ın E^3 ”, ***International Electronic Journal of Geometry,*** 4: 70-78 (2011).

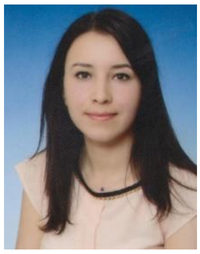
Özdemir, M, Ergin, A.A., “Spacelike Darboux Curves in Minkowski 3-Space”, ***Differential Geometry-Dynamical Systems Vol.9***,131-137 (2007).

Scofield, P. D., “Curves of Constant Precession” , ***The American Mathematical Montly***, 102: 531-537 (1995).

Şenol, A., “General Helices in Space Forms”, Doktora Tezi, ***Graduate School of Natural and Applied Sciences***, Ankara Üniversitesi, Ankara (2008).

Turgut, A., “3-boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler”, Doktora Tezi, ***Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara Üniversitesi***, Ankara (1995).

Yaylı, Y., Kızıltuğ, S., “Timelike Curves on Timelike Parallel Surfaces in Minkowski 3-space E_1^3 ” , ***Mathematica Aeterna*** , 2*:* (2012).



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Nurgün SABANCI

Doğum Yeri ve Tarihi :Bilecik / 23.06.1992

Eğitim Durumu

Orta Öğrenimi :Bilecik Anadolu Lisesi

Lisans Öğrenimi :Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi

Bildiği Yabancı Dil :İngilizce

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar :Özel Bilgiçağı Etüt Merkezi (2014-2016)
Özel Bilecik Hatem Anadolu Lisesi
(2016- Halen)

İletişim

Adres :Gülümbe Köyü Yunuslar Mah.
Çanakkale Şehitleri Sokağı No : 17
Merkez/BİLECİK

Tel :05055767399

E-Posta Adresi :nsabanci.92@gmail.com