



JAIN-BASKAKOV TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Merve SAĞLAM

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2017

Merve SAĞLAM tarafından hazırlanan "JAIN-BASKAKOV TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 09/06/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarımı kabullendiğimi beyan ederim.

Merve SAĞLAM

09/06/2017

JAIN-BASKAKOV TIP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Merve SAĞLAM

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2017

ÖZET

Bu çalışmada P. Patel ve V. N. Mishra tarafından çalışılan Jain-Baskakov tip operatörlerle ilgili bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Öncelikle Bohman-Korovkin teoremi yardımıyla Jain-Baskakov tip operatörlerin kompakt bir küme üzerindeki yakınsaklığı daha sonra da King ve Stancu tip yaklaşım özellikleri , ağırlıklı yaklaşım özellikleri, A-istatistiksel yaklaşım özellikleri ile ikinci süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım oranı ve Voronovskaja tip asimptotik yaklaşım oranı verilmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Jain operatörü, Baskakov operatörü, Jain-Baskakov operatörü
A-istatistiksel yaklaşım, Yaklaşım oranı

Sayfa Adedi : 65

Danışman : Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

APPROXIMATION BY JAIN-BASKAKOV TYPE OPERATORS

(Ph. D. Thesis)

Merve SAĞLAM

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2017

ABSTRACT

In this study, some approximation properties of Jain- Baskakov type operators studied by P. Patel and V. N. Mishra have been examined. Firstly the convergence of Jain-Baskakov type operators on a compact set has been examined by using Bohman-Korovkin type theorem afterwards approximation properties of King type and Stancu type, weighted approximation, A-statistical convergence have been discussed rates of approximation for the operators have been second-order modulus of smoothness, Voronovskaja type asymptotic formula for the operators.

Science Code : 20404

Key Words : Jain operators, Baskakov operators, Jain-Baskakov operators
A-statistical convergence, Rate of convergence

Page Number : 65

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca ilgisini ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. İsmet YÜKSEL'e, bu süreçte hep yanımda olan, maddi ve manevi desteğini eksik etmeyen sevgili aileme teőekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	3
2.2. Yaklaşım Teorisinin Önemli Teoremleri	5
2.3. Analitik Fonksiyon	5
2.4. Ağırlıklı Uzay	6
2.5. Genel Baskakov Operatörü	7
3. JAIN-BASKAKOV TİP OPERATÖRÜN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	9
3.1. Jain Tip Operatörler	9
3.2. Yaklaşım Özellikleri	29
3.3. King Tip Yaklaşım	37
3.4. Stancu Tip Yaklaşım	46
3.5. Jain-Baskakov Operatörünün c Parametre Dönüşümü	53
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	65

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$C[a, b]$	$[a, b]$ da tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ da tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ da tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_\rho(\mathbb{R})$	Her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
C_ρ^k	$\left\{ f \in C_\rho : \lim_{ x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} < \infty \right\}$ alt uzayı
$L_n(f, x) = L_n(f)(x)$	$x \in \mathbb{R}$, L_n lineer operatörünün f sürekli fonksiyonuna uygulanması
$\omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$K(f, \delta)$	f fonksiyonunun Petree- K fonksiyoneli
$ K $	K kümesinin eleman sayısı
$\partial(K)$	K kümesinin yoğunluğu
$\delta_A(K)$	K kümesinin A yoğunluğu
$\rho(x)$	Ağırlık fonksiyonu
stA	A –istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\Gamma(n, m)$	Gamma fonksiyonu
$\beta(n, m)$	Beta fonksiyonu

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin önemli problemlerinden biri keyfi bir fonksiyona polinomlar yardımıyla yaklaşım elde edebilmektir. 1985 yılında Weirstrass $[a, b]$ da sürekli fakat türevli olmayan fonksiyonlara bir polinom yardımıyla düzgün yaklaşılabileceğini göstermiştir.

1912 yılında Weierstrass'ın teoremini sağlayan polinom örneği S. N. Bernstein tarafından

$f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C[0, 1]$, $x \in [0, 1)$ ve

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere n . dereceden B_n polinomu

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır [4]. Bohman(1951) ve Korovkin(1953) Bernstein polinomlarından yola çıkarak lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili önemli teoremler vermiştir. H. Bohman tarafından kapalı aralıkta sürekli olan fonksiyonun toplam biçimindeki özel tipten bir lineer pozitif operatör dizisine düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir [4]. Bohman'ın teoreminden sonra P. P. Korovkin tarafından daha genel olarak kapalı aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun herhangi bir lineer pozitif operatör dizisine düzgün yaklaşımı için gerek ve yeter koşullar verilmiştir [4]. Bu teoremler sayesinde birçok lineer pozitif operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bernstein polinomlarının reel ekseninde genelleştirmelerinden biri V. A. Baskakov tarafından

$x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ için

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^k$$

şeklinde tanımlanan operatördür [3].

1972 yılında G. G. Jain tarafından $0 \leq \beta < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ ve taban

fonksiyon

$$w_{\beta}(v, nx) = nx(nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{v!} \quad (1.1)$$

olmak üzere

$$B_n^{\beta}(f, x) = \sum_{v=0}^{\infty} nx(nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{v!} f\left(\frac{v}{n}\right) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlı operatöre Jain tip operatör denir [3].

$[0, \infty)$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için P. Patel ve V. N. Mishra tarafından

$\beta \in [0, 1)$, $x \in \mathbb{R}^+$ ve $f \in C_{p_0}(\mathbb{R}^+)$ için

$$K_n^{\beta}(f, x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v, nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) f(t) dt + e^{-nx} f(0) \quad (1.3)$$

Jain-Baskakov tip operatörler olarak isimlendirilen genelleştirilmiş lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri üzerinde çalışılmıştır [1].

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde gerekli olan temel kavram ve teoremler tanıtılmıştır. Bu amaçla fonksiyon uzayları ve lineer pozitif operatörlerle ilgili tanım ve teoremler verilmiş, diğer bölümlerin temelini oluşturan yaklaşım teorisinin önemli teoremleri ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde Jain tip operatörün genelleşmesi olan Jain-Baskakov tip operatörlerin temel özellikleri ve yaklaşım özellikleri incelenmiş, ikinci süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım oranı ve Voronovskaja tip teorem elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde lineer pozitif operatörlerin tanımı ve özellikleri, analitik fonksiyon, Gamma ve Beta fonksiyon tanımları, ağırlıklı uzay kavramı ve özellikleri verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

X ve Y normlu iki fonksiyon uzayı olmak üzere X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı mevcut ise L kuralına X den Y ye tanımlı operatör denir.

$$L(f, x) = L(f)(x) = g(x)$$

şeklinde gösterilir [9].

2.1.2. Tanım

$L : X \rightarrow Y$ bir operatör olmak üzere eğer L operatörü her $f_1, f_2 \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2, x) = \alpha L(f_1, x) + \beta L(f_2, x)$$

koşulunu sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir [9].

2.1.3. Tanım

X ve Y normlu iki fonksiyon uzayı olmak üzere $L : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

$$X^+ = \{f \in X : \forall t \in D_f \text{ için } f(t) \geq 0\}$$

ve

$$Y^+ = \{g \in Y : \forall x \in D_g \text{ için } g(x) \geq 0\}$$

şeklinde tanımlansın. X uzayı üzerinde tanımlanmış olan L lineer operatörü X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyonlardan oluşmuş olan Y^+ kümesindeki herhangi bir

fonksiyona dönüştürüyorsa bu L operatörüne lineer pozitif operatör denir [9].

2.1.4. Lemma

X ve Y normlu iki fonksiyon uzayı ve $L : X \rightarrow Y$ bir lineer pozitif operatör olmak üzere $f, g \in X$ için

$$f \leq g \text{ ise } L(f, x) \leq L(g, x)$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe L lineer operatörünün monotonluk özelliği denir [9].

2.1.5. Lemma

$L : X \rightarrow Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f, x)| \leq L(|f|, x)$$

eşitsizliği sağlanır [9].

2.1.6. Tanım

I, \mathbb{R} de herhangi bir aralık, $f \in C(I)$ olmak üzere her $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{x, t \in I \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f, \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir [9].

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $\omega(f, \delta) \geq 0$

(ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f, \delta_1) \leq \omega(f, \delta_2)$

(iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f, m\delta) \leq m\omega(f, \delta)$

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f, \delta)$

(v) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0 \iff f, I$ da düzgün sürekli

$$(vi) |f(t) - f(x)| \leq \omega(f, |t - x|)$$

$$(vii) |f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f, \delta)$$

2.2. Yaklaşım Teorisinin Önemli Teoremleri

2.2.1. Teorem

$f, [a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere öyle bir $P(x)$ cebirsel polinomu bulunabilir ki her $x \in [a, b]$ için

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır [9].

2.2.2. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $[a, b] \subset [c, d]$ olmak üzere $L_n : C[a, b] \rightarrow C[c, d]$ tanımlı (L_n) lineer pozitif operatör dizisi ve her $f \in C[a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a, b]} = 0$$

eşitliği sağlanır [9].

2.3. Analitik Fonksiyon

2.3.1. Tanım

Bir $f(z)$ fonksiyonunun hem z_0 noktasında hem de z_0 noktasının bir komşuluğunda bulunan her z noktasında türevi mevcutsa f fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir [13].

2.3.2. Tanım

$n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

Gamma fonksiyonu ve

$$\beta(n, m) = \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{m-1} dt$$

Beta fonksiyonu şeklinde tanımlıdır [13].

2.4. Ağırlıklı Uzay

2.4.1. Tanım

r negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $C^{(r)}(\mathbb{R})$, r . mertebeden türevleri olan ve sürekli \mathbb{R} üzerinde tanımlı tüm fonksiyonların uzayıdır [11, 12].

2.4.2. Tanım

$\rho : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ tanımlı olmak üzere ρ fonksiyonu

(i) $\rho(0) = 1$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x) = +\infty$

(iii) $[0, \infty)$ aralığında artan ve $(-\infty, 0)$ aralığında azalan

koşullarını sağlıyorsa ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir [10, 11].

2.4.3. Tanım

φ reel ekseninde sürekli monoton artan bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho(x) = 1 + \left(\varphi(x)^2\right)$$

şeklinde ρ fonksiyonu tanımlansın.

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; |g(x)| \leq M_f \rho(x), M_f > 0, x \in \mathbb{R}\}$$

ve

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}) : f \text{ süreklil}\}$$

uzaylarına ağırlıklı uzaylar denir.

Burada $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı norm

$$\|f\|_\rho := \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

şeklinde gösterilir.

2.5. Genel Baskakov Operatörü

2.5.1. Tanım

$x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k \frac{\Phi_n^{(k)}(x)}{k!}$$

olarak tanımlı operatöre genel Baskakov operatörü denir [1].

Burada $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin elemanları $x \in [0, \infty)$ olmak üzere

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için Φ_n , $[0, \infty)$ da analitiktir.

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\Phi_n(0) = 1$ dir.

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\Phi_n^{(k)}(x) \geq 0$ dir.

Özel olarak Φ_n operatörü $\Phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ olarak alınırsa

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+x)^{-n} \binom{n+k-1}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{x}{1+x}\right)^k$$

olup Klasik Baskakov operatörü özel olarak $\Phi_n(x) = (1-x)^n$ olarak alınırsa

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Bernstein operatörü

Özel olarak $\Phi_n(x) = e^{-nx}$ olarak alınırsa

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Szász operatörü elde edilir.

3. JAIN-BASKAKOV TIP OPERATÖRÜN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Patel ve Mishra tarafından çalışılan Jain-Baskakov tip operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenecektir [1].

3.1. Jain Tip Operatörler

$\lambda \geq 0$ için $p_\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, \infty]$, $p_\lambda(x) = 1 + x^{2+\lambda}$ ağırlık fonksiyonunu göz önüne alalım.

Burada tanımlı uzay

$$C_{p_\lambda}(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^+) : \frac{f(x)}{p_\lambda(x)} \text{ sınırlı } x \rightarrow \infty \text{ iken} \right\}$$

şeklindedir.

3.1.1. Tanım

$0 \leq \beta < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ ve taban fonksiyonu

$$w_\beta(v, nx) = nx(nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{v!} \quad (3.1)$$

olmak üzere

$$B_n^\beta(f, x) = \sum_{v=0}^{\infty} nx(nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{v!} f\left(\frac{v}{n}\right) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlı operatöre Jain tip operatör denir [1].

Eş.3.2 de özel olarak $\beta = 0$ alınırsa

$$B_n^\beta(f, x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(nx)^v}{v!} e^{-nx} f\left(\frac{v}{n}\right)$$

Szász-Mirakyan operatörü elde edilir [1].

İleri bölümlerde gerekli olan rekürans bağıntılarını elde edelim.

3.1.2. Lemma

$0 \leq \beta < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$ ve

$$S(r, nx, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k+r-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \quad (3.3)$$

olmak üzere

$$S(r, nx, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (nx + k\beta) S(r-1, nx + k\beta, \beta)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$S(r, nx, \beta)$ ifadesinin açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned} S(r, nx, \beta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k+r-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k+r-2}}{k!} (nx + k\beta) e^{-(nx+k\beta)} \\ &= nx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k+r-2}}{k!} (nx + k\beta) e^{-(nx+k\beta)} \\ &\quad + \beta \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(nx + k\beta)^{k+r-2}}{k!} (nx + k\beta) e^{-(nx+k\beta)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Eş.3.3 deki eşitlik Eş.3.4 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(r, nx, \beta) &= nxS(r-1, nx, \beta) + \beta S(r, nx + \beta, \beta) \\ &= nxS(r-1, nx, \beta) + \beta [(nx + \beta) S(r, nx + \beta, \beta) + \beta S(r, nx + 2\beta, \beta)] \\ &= nxS(r-1, nx, \beta) + \beta (nx + \beta) S(r-1, nx + \beta, \beta) \\ &\quad + \beta^2 S(r, nx + 2\beta, \beta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (nx + k\beta) S(r-1, nx + k\beta, \beta) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

3.1.3. Lemma

$0 \leq \beta < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$ ve

$$S(r, nx, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx + k\beta)^{k+r-1}}{k!} e^{-(nx+k\beta)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad S(1, nx, \beta) &= \frac{1}{1-\beta}, \\ \text{(ii)} \quad S(2, nx, \beta) &= \frac{nx}{(1-\beta)^2} + \frac{\beta^2}{(1-\beta)^3}, \\ \text{(iii)} \quad S(3, nx, \beta) &= \frac{n^2 x^2}{(1-\beta)^3} + \frac{3nx\beta^2}{(1-\beta)^4} + \frac{2\beta^4 + \beta^3}{(1-\beta)^5}, \\ \text{(iv)} \quad S(4, nx, \beta) &= \frac{n^3 x^3}{(1-\beta)^4} + \frac{6n^2 x^2 \beta^2}{(1-\beta)^5} + \frac{11nx\beta^4 + 4nx\beta^3}{(1-\beta)^6} + \frac{6\beta^6 + 8\beta^5 + \beta^4}{(1-\beta)^7} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Eş.3.3 deki $S(r, nx, \beta)$ bağıntısı için

(i) $r = 1$ özel durumunda

$$\begin{aligned} S(1, nx, \beta) &= \sum_{v=0}^{\infty} \beta^v (nx + v\beta) S(0, nx + v\beta, \beta) \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \beta^v \\ &= \frac{1}{1-\beta} \end{aligned} \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir.

(ii) $r = 2$ özel durumunda

$$S(2, nx, \beta) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta^v (nx + v\beta) S(1, nx + v\beta, \beta) \tag{3.6}$$

Eş.3.5 deki eşitlik Eş.3.6 de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 S(2, nx, \beta) &= \sum_{v=0}^{\infty} \beta^v (nx + v\beta) \frac{1}{1 - \beta} \\
 &= \frac{nx}{(1 - \beta)^2} + \frac{\beta^2}{(1 - \beta)^3}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir.

(iii) $r = 3$ özel durumunda

$$S(3, nx, \beta) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta^v (nx + v\beta) S(2, nx + v\beta, \beta) \tag{3.8}$$

Eş.3.7 deki eşitlik Eş.3.8 de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 S(3, nx, \beta) &= \sum_{v=0}^{\infty} \beta^v (nx + v\beta) \left[\frac{(nx + v\beta)}{(1 - \beta)^2} + \frac{\beta^2}{(1 - \beta)^3} \right] \\
 &= \frac{n^2 x^2}{(1 - \beta)^3} + \frac{3nx\beta^2}{(1 - \beta)^4} + \frac{2\beta^4 + \beta^3}{(1 - \beta)^5}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir.

(iv) $r = 4$ özel durumunda

$$S(4, nx, \beta) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta^v (nx + v\beta) S(3, nx + v\beta, \beta) \tag{3.10}$$

Eş.3.9 deki eşitlik Eş.3.10 de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 S(4, nx, \beta) &= \sum_{v=0}^{\infty} \beta^v (nx + v\beta) \left[\frac{(nx + v\beta)^2}{(1 - \beta)^3} + \frac{3(nx + v\beta)\beta^2}{(1 - \beta)^4} + \frac{2\beta^4 + \beta^3}{(1 - \beta)^5} \right] \\
 &= \frac{n^3 x^3}{(1 - \beta)^4} + \frac{6n^2 x^2 \beta^2}{(1 - \beta)^5} + \frac{11nx\beta^4 + 4nx\beta^3}{(1 - \beta)^6} + \frac{6\beta^6 + 8\beta^5 + \beta^4}{(1 - \beta)^7}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Elde ettiğimiz rekürans bağıntıları yardımıyla Lemma 3.1.4. ü elde edelim.

3.1.4. Lemma

$0 \leq \beta < 1$, $n \in N$, $x \in [0, \infty)$ olmak üzere

$$\sum_{v=0}^{\infty} w_{\beta}(v, nx) = 1$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Jensen tarafından tanımlanan Langrange formülü

$$\Phi(z) = \Phi(0) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \left[\frac{d^{v-1}}{dz^{v-1}} (f(z)) \Phi'(z) \right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^v$$

şeklinde olup [3] burada özel olarak $\Phi(z) = e^{nxz}$, $f(z) = e^{\beta vz}$, $u = ze^{-\beta z}$ seçimi yapılırsa

$$\begin{aligned} e^{nxz} &= 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \left[\frac{d^{v-1}}{dz^{v-1}} (e^{\beta vz} \cdot nx \cdot e^{nxz}) \right]_{z=0} \left(\frac{z}{e^{\beta z}} \right)^v \\ &= 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \left[nx(nx + v\beta)^{v-1} \cdot e^{(nx+v\beta)z} \right]_{z=0} \left(\frac{z}{e^{\beta z}} \right)^v \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \left[nx(nx + v\beta)^{v-1} \right] z^v e^{-\beta zv} \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilip Eş.3.12 de özel olarak $z = 1$ alınırsa

$$e^{nx} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \left[nx(nx + v\beta)^{v-1} \right] e^{-\beta v} \quad (3.13)$$

eşitliği elde edilir. Eş.3.13 eşitliği Eş.3.1 de kullanılırsa

$$\sum_{v=0}^{\infty} w_{\beta}(v, nx) = 1$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

3.1.5. Lemma

$0 \leq \beta < 1$ olmak üzere Eş.3.2 de tanımlı B_n^β operatörler dizisi

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad B_n^\beta(1, x) &= 1, \\
 \text{(ii)} \quad B_n^\beta(t, x) &= \frac{x}{1-\beta}, \\
 \text{(iii)} \quad B_n^\beta(t^2, x) &= \frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3}, \\
 \text{(iv)} \quad B_n^\beta(t^3, x) &= \frac{x^3}{(1-\beta)^3} + \frac{3x^2}{n(1-\beta)^4} + \frac{x(2\beta+1)}{n^2(1-\beta)^5}, \\
 \text{(v)} \quad B_n^\beta(t^4, x) &= \frac{x^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6x^3}{n(1-\beta)^5} \\
 &\quad + \frac{x^2}{n^2} \left(\frac{-36\beta^4 + 72\beta^3 - 36\beta^2 + 8\beta + 7}{(1-\beta)^6} \right) + \frac{x}{n^3} \left(\frac{x(6\beta^2 + 18\beta + 1)}{(1-\beta)^7} \right)
 \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat

$0 \leq \beta < 1$ olmak üzere Eş.3.2 de tanımlı B_n^β operatörler dizisi için;

(i) $f = 1$ özel durumunda

$$B_n^\beta(1, x) = 1 \tag{3.14}$$

elde edilir.

(ii) $f = t$ özel durumunda

$$B_n^\beta(t, x) = \sum_{v=1}^{\infty} nx(nx+v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{v!} \frac{v}{n} \tag{3.15}$$

Lemma 3.1.4. deki eşitlik Eş.3.15 de kullanılırsa

$$B_n^\beta(t, x) = x.S(1, nx + \beta, \beta) \tag{3.16}$$

Eş.3.5 deki eşitlik Eş.3.16 de kullanılırsa

$$B_n^\beta(t, x) = \frac{x}{1 - \beta} \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilir.

(iii) $f = t^2$ özel durumunda

$$B_n^\beta(t^2, x) = \frac{x}{n} \sum_{v=2}^{\infty} (nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{(v-2)!} + \frac{x}{n} \sum_{v=1}^{\infty} (nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{(v-1)!} \quad (3.18)$$

Eş.3.5 ve Eş.3.7 deki eşitlikler Eş.3.18 de kullanılırsa

$$B_n^\beta(t^2, x) = \frac{x^2}{(1 - \beta)^2} + \frac{x}{n(1 - \beta)^3} \quad (3.19)$$

eşitliği elde edilir.

(iv) $f = t^3$ özel durumunda

$$B_n^\beta(t^3, x) = \frac{x}{n^2} \sum_{v=2}^{\infty} (nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{(v-3)!} + 3 \frac{x}{n^2} \sum_{v=1}^{\infty} (nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{(v-2)!} + \frac{x}{n^2} \sum_{v=2}^{\infty} (nx + v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{(v-1)!} \quad (3.20)$$

Lemma 3.1.4. deki eşitlik Eş.3.20 de kullanılırsa

$$B_n^\beta(t^3, x) = \frac{x}{n^2} [S(3, nx + 3\beta, \beta) + 3S(2, nx + 2\beta, \beta) + S(1, nx + \beta, \beta)] \quad (3.21)$$

elde edilir.

Eş.3.5 , Eş.3.7 ve Eş.3.9 deki eşitlikler Eş.3.21 de kullanılırsa

$$B_n^\beta(t^3, x) = \frac{x}{n^2} \left(\frac{n^2 x^2}{(1 - \beta)^3} + \frac{3nx}{(1 - \beta)^4} + \frac{2\beta + 1}{(1 - \beta)^5} \right) = \frac{x^3}{(1 - \beta)^3} + \frac{3x^2}{n(1 - \beta)^4} + \frac{x(2\beta + 1)}{n^2(1 - \beta)^5} \quad (3.22)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca

(v) $f = t^4$ özel durumunda

$$\begin{aligned}
 B_n^\beta(t^4, x) &= \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \cdot \frac{v^4}{n^4} \\
 &= \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \left(\frac{v \cdot (v-1) \cdot (v-2) \cdot (v-3)}{n^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{6v(v-1)(v-2) + 7v(v-1) + v}{n^4} \right)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Eş.3.5, Eş.3.7 , Eş.3.9 ve Eş.3.11 deki eşitlikler Eş.3.23 de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 B_n^\beta(t^4, x) &= \frac{x^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6x^3}{n(1-\beta)^5} + \frac{x^2}{n^2} \left(\frac{-36\beta^4 + 72\beta^3 - 36\beta^2 + 8\beta + 7}{(1-\beta)^6} \right) \\
 &\quad + \frac{x}{n^3} \left(\frac{x(6\beta^2 + 18\beta + 1)}{(1-\beta)^7} \right)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

3.1.6. Tanım

$\beta \in [0, 1)$, $x \in \mathbb{R}^+$ ve $f \in C_{p_0}(\mathbb{R}^+)$ için

$$K_n^\beta(f, x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) f(t) dt + e^{-nx} f(0) \tag{3.25}$$

tanımlı operatöre Jain-Baskakov tip operatör denir [1].

Burada tanımlı taban fonksiyonları

$$p_{n,v}(t) = \binom{n+v-1}{v} \frac{t^v}{(1+t)^{n+v}} \text{ ve } w_\beta(v, nx) = nx(nx+v\beta)^{v-1} \frac{e^{-(nx+v\beta)}}{v!}$$

şeklindedir.

Eş.3.25 de özel olarak $\beta = 0$ alınırsa

$$K_n^0(f, x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(nx)^v}{v!} e^{-nx} \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) dt + e^{-nx} f(0)$$

Szász-Baskakov tip operatör elde edilir.

3.1.7. Lemma

$$n \in \mathbb{N}, p_{n,v}(t, c) = \frac{(-t)^v}{v!} \phi_{n,c}^{(v)}(t)$$

olmak üzere $c \geq 0$ için ϕ fonksiyonunun iki özel durumu;

$$(i) \phi_{n,0}(t) = e^{-nt}$$

$$(ii) \phi_{n,1}(t) = (1+t)^{-n}$$

için

$$\int_0^{\infty} p_{n,v}(t, c) t^r dt = \frac{(v+r)!}{v!} \frac{1}{\prod_{i=1}^{r+1} (n-ic)} \quad (3.26)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş.3.1 de özel olarak $c = 0$ alınır ve Eş.3.26 eşitliği kullanılırsa

$$p_{n,v}(t, 0) = \frac{n^v t^v e^{-nt}}{v!} \quad (3.27)$$

elde edilir.

Eş.3.27 eşitliği kullanılırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n,v}(t, c) t^r dt = \frac{(v+r)!}{v!} \frac{1}{n^{r+1}}$$

elde edilir.

Eş.3.1 de özel olarak $c = 1$ alınır ve Eş.3.26 eşitliği kullanılırsa

$$p_{n,v}(t, 1) = \binom{n+v-1}{v} t^v (1+t)^{-(n+v)} \quad (3.28)$$

elde edilir.

Eş.3.28 eşitliği kullanılırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n,v}(t, c) t^r dt = \frac{(v+r)!}{v!} \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-(r+1))}$$

elde edilir.

3.1.8. Lemma

Eş.3.26 de tanımlı eşitlik, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t, c) dt &= \frac{1}{n} \\ \text{(ii)} \quad \int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t, c) t dt &= \frac{v}{n(n-c)} \\ \text{(iii)} \quad \int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t, c) t^2 dt &= \frac{v(v+1)}{n(n-c)(n-2c)} \\ \text{(iv)} \quad \int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t, c) t^3 dt &= \frac{v(v+1)(v+2)}{n(n-c)(n-2c)(n-3c)} \\ \text{(v)} \quad \int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t, c) t^4 dt &= \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{n(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)} \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat

Eş.3.26 eşitliğinde n yerine $n + c$ ve v yerine $v - 1$ yazılırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t,c) t^r dt = \frac{(v+r-1)!}{(v-1)!} \frac{1}{\prod_{i=1}^{r+1} (n+c-ic)} \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilir.

(i) Eğer Eş.3.29 eşitliğinde $r = 0$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t,c) t^0 dt = \frac{1}{n} \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir.

(ii) Eş.3.29 eşitliğinde $r = 1$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t,c) t dt = \frac{v}{n(n-c)} \quad (3.31)$$

eşitliği elde edilir.

(iii) Eş.3.29 eşitliğinde $r = 2$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t,c) t^2 dt = \frac{v(v+1)}{n(n-c)(n-2c)} \quad (3.32)$$

eşitliği elde edilir.

(iv) Eş.3.29 eşitliğinde $r = 3$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t,c) t^3 dt = \frac{v(v+1)(v+2)}{n(n-c)(n-2c)(n-3c)} \quad (3.33)$$

eşitliği elde edilir.

(v) Eş.3.29 eşitliğinde $r = 4$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n+c,v-1}(t,c)t^4 dt = \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{n(n-c)(n-2c)(n-3c)(n-4c)} \quad (3.34)$$

eşitliği elde edilir.

3.1.9. Lemma

Eş.3.26 de tanımlı eşitlik ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) dt &= \frac{1}{n-1} \\ \text{(ii)} \quad \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t)t dt &= \frac{v}{(n-1)(n-2)} \\ \text{(iii)} \quad \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t)t^2 dt &= \frac{v(v+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\ \text{(iv)} \quad \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t)t^3 dt &= \frac{v(v+1)(v+2)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \\ \text{(v)} \quad \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t)t^4 dt &= \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

$$\int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t)t^r dt = \frac{(v+r-1)!}{(v-1)!} \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-(r+1))} \quad (3.35)$$

(i) Eş.3.35 eşitliğinde $r = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) dt &= \frac{(v+0-1)!}{(v-1)!} \frac{1}{(n-1)} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

eşitliği elde edilir.

(ii) Eş.3.35 eşitliğinde $r = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t dt &= \frac{(v+1-1)!}{(v-1)!} \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-(1+1))} \\ &= \frac{v}{(n-1)(n-2)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir.

(iii) Eş.3.35 eşitliğinde $r = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t^2 dt &= \frac{(v+2-1)!}{(v-1)!} \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-(2+1))} \\ &= \frac{v(v+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

elde edilir.

(iv) Eş.3.35 eşitliğinde $r = 3$ alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t^3 dt &= \frac{(v+3-1)!}{(v-1)!} \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots(n-(3+1))} \\ &= \frac{v(v+1)(v+2)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir.

(v) Eş.3.35 eşitliğinde $r = 4$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t^4 dt = \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \quad (3.40)$$

eşitliği elde edilir.

3.1.10. Lemma

Eş.3.25 de tanımlı K_n^β operatörü için $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad K_n^\beta(1, x) &= 1 \\
\text{(ii)} \quad K_n^\beta(t, x) &= \frac{nx}{(n-2)(1-\beta)} \\
\text{(iii)} \quad K_n^\beta(t^2, x) &= \frac{n^2}{(n-2)(n-3)} \left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x(2-2\beta+\beta^2)}{n(1-\beta)^3} \right] \\
\text{(iv)} \quad K_n^\beta(t^3, x) &= \frac{n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left[\frac{x^3}{(1-\beta)^3} + \frac{3x^2}{n(1-\beta)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x}{n^2} \left(\frac{2\beta+1}{(1-\beta)^5} \right) + 3n^2 \left(\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x}{n(1-\beta)^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2nx}{(1-\beta)} \right] \\
\text{(v)} \quad K_n^\beta(t^4, x) &= \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left[\frac{n^3x^3}{(1-\beta)^3} + 3n^2x^2 \left(\frac{1}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{(1-\beta)^4} \right) \right. \\
&\quad \left. + n^3 \left(\frac{6x^3}{(1-\beta)^3} + \frac{18x^2}{n(1-\beta)^4} + \frac{6x}{n^2(1-\beta)^5} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{6nx(2\beta+1)}{(1-\beta)^5} + \frac{11n^2x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{11nx}{(1-\beta)^3} + \frac{6nx}{(1-\beta)} \right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Eş.3.25 de tanımlı K_n^β operatörü için

(i) $f = 1$ alınırsa

$$K_n^\beta(1, x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \int_0^{\infty} \binom{n+v-2}{v-1} \frac{t^{v-1}}{(1+t)^{n+v-1}} dt + e^{-nx} \quad (3.41)$$

Eş.3.36 deki eşitlik Eş.3.41 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(1, x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \frac{1}{(n-1)} + e^{-nx} \quad (3.42)$$

elde edilir. Eş.3.41 deki eşitlik Eş.3.42 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(1, x) = 1 \quad (3.43)$$

eşitliği elde edilir.

(ii) $f = t$ alınır

$$K_n^\beta(t, x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t dt + e^{-nx} \cdot 0 \quad (3.44)$$

Eş.3.37 deki eşitlik Eş.3.44 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(t, x) = \frac{n}{(n-2)} B_n^\beta(t, x) \quad (3.45)$$

Eş.3.17 deki eşitlik Eş.3.45 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(t, x) = \frac{nx}{(n-2)(1-\beta)} \quad (3.46)$$

eşitliği elde edilir.

(iii) $f = t^2$ alınır

$$K_n^\beta(t^2, x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \int_0^{\infty} \binom{n+v-2}{v-1} \frac{t^{v+1}}{(1+t)^{n+v-1}} dt \quad (3.47)$$

Eş.3.38 deki eşitlik Eş.3.47 da kullanılırsa

$$K_n^\beta(t^2, x) = \frac{n^2}{(n-2)(n-3)} B_n^\beta(t^2, x) + \frac{n}{(n-2)(n-3)} B_n^\beta(t, x) \quad (3.48)$$

Eş.3.19 deki eşitlik Eş.3.48 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(t^2, x) = \frac{n^2}{(n-2)(n-3)} \left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x(2-2\beta+\beta^2)}{n(1-\beta)^3} \right] \quad (3.49)$$

eşitliği elde edilir.

(iv) $f = t^3$ alınır

$$K_n^\beta(t^3, x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t^3 dt + e^{-nx} \cdot 0 \quad (3.50)$$

Eş.3.39 deki eşitlik Eş.3.50 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(t^3, x) = \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left[\sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) (v^3 + 3v^2 + 2v) \right] \quad (3.51)$$

Eş.3.2 deki eşitlik Eş.3.51 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(t^3, x) = \frac{n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)} B_n^\beta(t^3, x) + 3 \frac{n^2}{(n-2)(n-3)(n-4)} B_n^\beta(t^2, x) + 2 \frac{n}{(n-2)(n-3)(n-4)} B_n^\beta(t, x) \quad (3.52)$$

Eş.3.22 deki eşitlik Eş.3.52 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(t^3, x) = \frac{n^2 x^2 ((1-\beta)nx + 3(\beta^2 - 2\beta + 2))}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^4} + \frac{nx}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left(\frac{2\beta + 1}{(1-\beta)^5} + \frac{5 - 4\beta + 2\beta^2}{(1-\beta)^3} \right) \quad (3.53)$$

eşitliği elde edilir.

(iv) $f = t^4$ alınır

$$K_n^\beta(t^4, x) = \frac{n^4}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} B_n^\beta(t^4, x) + 6 \frac{n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} B_n^\beta(t^3, x) + 11 \frac{n^2}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} B_n^\beta(t^2, x) + 6 \frac{n}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} B_n^\beta(t, x) \quad (3.54)$$

Eş.3.17 , Eş.3.19, Eş.3.22 ve Eş.3.24 deki eşitlikler Eş.3.54 de kullanılırsa

$$K_n^\beta(t^4, x) = \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \left[\frac{n^4 x^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6n^3 x^3 (\beta^2 - 2\beta + 2)}{(1-\beta)^5} \right. \\ \left. + n^2 x^2 \left(\frac{-25\beta^4 + 28\beta^3 + 48\beta^2 - 72\beta + 36}{(1-\beta)^6} \right) \right. \\ \left. + \frac{nx(6\beta^6 - 36\beta^5 + 101\beta^4 - 152\beta^3 + 134\beta^2 - 52\beta + 14)}{(1-\beta)^7} \right] \quad (3.55)$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.11. Lemma

Eş.3.25 de tanımlı K_n^β operatörünün momentleri $\mu_{1,n}^\beta(x)$, $\mu_{2,n}^\beta(x)$, $\mu_{3,n}^\beta(x)$ ve $\mu_{4,n}^\beta(x)$ olmak üzere

$$(i) \mu_{1,n}^\beta(x) = \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)}$$

$$(ii) \mu_{2,n}^\beta(x) = \frac{nx(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3} + \frac{x^2(n^2\beta^2+n(1-\beta)(1+5\beta)+6(1-\beta)^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2}$$

$$(iii) \mu_{3,n}^\beta(x) = x^3 \left[\frac{n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^3} - \frac{3n^2}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} + \right. \\ \left. \frac{3n}{(n-2)(1-\beta)} - 1 \right] + x^2 \left[3n^2 \left(\frac{2-2\beta+\beta^2}{(1-\beta)^4} \right) \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)} + \right. \\ \left. \frac{nx}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left[\left(\frac{2\beta+1}{(1-\beta)^5} + \frac{5-4\beta+2\beta^2}{(1-\beta)^3} \right) \right] \right]$$

$$(iv) \mu_{4,n}^\beta(x) = x^4 \left[\frac{n^4}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(1-\beta)^4} - \frac{4n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^3} + \right. \\ \left. \frac{6n^2}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} - \frac{4n}{(n-2)(1-\beta)} + 1 \right] \\ x^3 \left[\frac{6n^3(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(1-\beta)^5} - \frac{12n^2(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^4} + \right. \\ \left. x^2 \left[\frac{n^2(-25\beta^4+28\beta^3+48\beta^2-72\beta+36)}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^6} - \frac{4n \left(\frac{2\beta+1}{(1-\beta)^5} + \frac{5-4\beta+2\beta^2}{(1-\beta)^3} \right)}{(n-2)(n-3)(n-4)} \right] \right]$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Eş.3.25 de tanımlı K_n^β operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \text{(i) } \mu_{1,n}^\beta(x) &= K_n^\beta((t-x), x) \\ &= K_n^\beta(t, x) - xK_n^\beta(1, x) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Eş.3.43 ve Eş.3.46 deki eşitlikler Eş.3.56 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu_{1,n}^\beta(x) &= \frac{nx}{(n-2)(1-\beta)} - x \\ &= \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Eş.3.25 de tanımlı K_n^β operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\text{(ii) } \mu_{2,n}^\beta(x) = K_n^\beta(t^2, x) - 2xK_n^\beta(t, x) + x^2 \quad (3.57)$$

Eş.3.46 ve Eş.3.49 deki eşitlikler Eş.3.57 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu_{2,n}^\beta(x) &= \frac{nx(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3} \\ &\quad + \frac{x^2(n^2\beta^2+n(1-\beta)(1+5\beta)+6(1-\beta)^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$\text{(iii) } \mu_{3,n}^\beta(x) = K_n^\beta(t^3, x) - 3xK_n^\beta(t^2, x) + 3x^2K_n^\beta(t, x) - x^3 \quad (3.58)$$

olduğundan

Eş.3.46, Eş.3.49 deki eşitlikler Eş.3.58 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu_{3,n}^{\beta}(x) = & x^3 \left[\frac{n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^3} - \frac{3n^2}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} \right. \\ & \left. + \frac{3n}{(n-2)(1-\beta)} - 1 \right] \\ & + x^2 \left[\frac{3n^2}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left(\frac{2-2\beta+\beta^2}{(1-\beta)^4} \right) \right. \\ & \left. - \frac{3n(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3} \right] \\ & + \frac{nx}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left[\left(\frac{2\beta+1}{(1-\beta)^5} + \frac{5-4\beta+2\beta^2}{(1-\beta)^3} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$(iv) \mu_{4,n}^{\beta}(x) = K_n^{\beta}(t^4, x) - 4xK_n^{\beta}(t^3, x) + 6x^2K_n^{\beta}(t^2, x) - 4x^3K_n^{\beta}(t, x) + x^4 \quad (3.59)$$

Eş.3.46, Eş.3.49 ve Eş.3.55 deki eşitlikler Eş.3.59 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu_{4,n}^{\beta}(x) = & x^4 \left[\frac{n^4}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(1-\beta)^4} - \frac{4n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^3} \right. \\ & \left. + \frac{6n^2}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} - \frac{4n}{(n-2)(1-\beta)} + 1 \right] \\ & + x^3 \left[\frac{6n^3(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(1-\beta)^5} - \frac{12n^2(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^4} \right. \\ & \left. + \frac{3n^2(\beta^2-2\beta+2)}{(n-2)(1-\beta)^3} \right] \\ & + x^2 \left[\frac{n^2(-25\beta^4+28\beta^3+48\beta^2-72\beta+36)}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^6} - \frac{4n \left(\frac{2\beta+1}{(1-\beta)^5} + \frac{5-4\beta+2\beta^2}{(1-\beta)^3} \right)}{(n-2)(n-3)(n-4)} \right] \\ & + x \left[\frac{n(6\beta^6-36\beta^5+101\beta^4-152\beta^3+134\beta^2-52\beta+14)}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(1-\beta)^7} \right] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.12. Lemma

A , \mathbb{R} nin kompakt bir alt kümesi, $n > 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ ve her $x \in A$ için K_n^β operatörü

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{\beta_n}(f, x) = f(x)$$

eşitiğini sağlar.

İspat

K_n^β operatörü pozitif lineer operatördür. Korovkin teoreminin sonuçlarından

$$K_n^{\beta_n}(f, x) \Rightarrow f(x)$$

eşitliğinin sağlanması için $f(t) = 1, t, t^2$ test fonksiyonlarının sağlatılması gerekir.

$$K_n^{\beta_n}(t^k, x) = x^k \text{ için}$$

(i) $k = 0$ alınır

$$K_n^{\beta_n}(1, x) = 1 \text{ olup } K_n^{\beta_n}(1, x) \Rightarrow 1 \text{ dir.}$$

(ii) $k = 1$ alınır

$$K_n^{\beta_n}(t, x) = \frac{x}{(1 - \beta_n)} + \frac{2x}{(n - 2)(1 - \beta_n)}$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken $K_n^{\beta_n}(t, x) \Rightarrow x$ dir.

(iii) $k = 2$ alınır

$$\begin{aligned} K_n^{\beta_n}(t^2, x) &= \frac{n^2 x^2}{(n - 2)(n - 3)(1 - \beta_n)^2} + \frac{nx(2 - 2\beta_n + \beta_n^2)}{(n - 2)(n - 3)(1 - \beta_n)^3} \\ &= \frac{n^2 x^2}{n(1 - \frac{2}{n})n(1 - \frac{3}{n})(1 - \beta_n)^2} + \frac{nx(2 - 2\beta_n + \beta_n^2)}{n(1 - \frac{2}{n})n(1 - \frac{3}{n})(1 - \beta_n)^3} \\ &= \frac{x^2}{(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n})(1 - \beta_n)^2} + \frac{x(2 - 2\beta_n + \beta_n^2)}{n(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n})(1 - \beta_n)^3} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ iken $K_n^{\beta_n}(t^2, x) \Rightarrow x^2$ dir.

Bu sonuçlardan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{\beta_n}(f, x) = f(x)$$

elde edilir.

3.2. Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde Jain-Baskakov operatörleri için süreklilik modülü cinsinden yaklaşım oranı ve ağırlıklı yaklaşım oranı incelenecektir.

3.2.1. Tanım

$C_B[0, \infty)$ sürekli ve sınırlı bütün fonksiyonların uzayı ve bu uzay üzerindeki tanımlı norm

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in [0, \infty)\}$$

olmak üzere K -fonksiyoneli

$$K_2(f, \delta) = \inf \{\|f - g\| + \delta \|g''\|\}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$\delta > 0 \text{ ve } W^2 = \{g \in C_B[0, \infty) : g', g'' \in C_B[0, \infty)\}$$

olarak tanımlıdır.

$$w_2(f, \sqrt{\delta}) = \sup_{0 < h \leq \sqrt{\delta}} \sup_{x \in [0, \infty)} \{|f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|\}$$

şeklindeki ifadeye ikinci dereceden süreklilik modülü denir.

Jain-Baskakov tip operatörler için ikinci süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesini elde edelim.

3.2.2. Teorem

$f \in C_B^*[0, \infty)$, $n > 3$ ve $C > 0$ için

$$\left| K_n^\beta(f, x) - f(x) \right| \leq \omega\left(f, \mu_{1,n}^\beta(x)\right) + C\omega_2\left(f, \sqrt{\left(\mu_{1,n}^\beta(x)\right)^2 + \mu_{2,n}^\beta(x)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$$\tilde{K}_n^\beta(f, x) := C_B^*[0, \infty) \rightarrow C_B^*[0, \infty)$$

olmak üzere

$$\tilde{K}_n^\beta(f, x) = K_n^\beta(f, x) - f\left(x + \frac{x(2 - 2\beta + n\beta)}{(n-2)(1-\beta)}\right) + f(x)$$

şeklinde yardımcı operatörü tanımlarsak bu operatör lineerdir

$$\tilde{K}_n^\beta(t, x) = x$$

ve e_0, e_1 test fonksiyonlarını sağlar.

Buradan $\tilde{K}_n^\beta((t-x), x) = 0$ eşitliği elde edilir.

$g \in W^2$ ve $x, t \in [0, \infty)$ için Taylor formülü

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u) du \quad (3.60)$$

\tilde{K}_n^β operatörüne uygulanırsa

$$\tilde{K}_n^\beta(g(t), x) - g(x)\tilde{K}_n^\beta(1, x) = g'(x)\tilde{K}_n^\beta((t-x), x) + \tilde{K}_n^\beta\left(\int_x^t (t-u)g''(u) du, x\right) \quad (3.61)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left| K_n^\beta(f, x) \right| &\leq (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nx) \int_0^{\infty} p_{n, v-1}(t) |f(t)| dt + e^{-nx} f(0) \\ &\leq \|f\| \end{aligned} \quad (3.62)$$

buradan

$$\begin{aligned} \left| \tilde{K}_n^\beta(f, x) \right| &\leq \left| K_n^\beta(f, x) \right| + \left| f \left(x + \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right) \right| + |f(x)| \\ &\leq 3\|f\| \end{aligned} \quad (3.63)$$

olup eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \tilde{K}_n^\beta(g, x) - g(x) \right| &= \left| K_n^\beta \left(\int_x^t (t-u) g''(u) du, x \right) + \right. \\ &\quad \left. \int_{x + \frac{x(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2)(1-\beta)}}^{x + \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)}} \left(x + \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} - u \right) g''(u) du \right| \\ &\leq K_n^\beta \left(\left| \int_x^t (t-u) g''(u) du \right|, x \right) \\ &= \left[\mu_{2,n}^\beta(x) + \left(\frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right)^2 \right] \|g''\| \end{aligned} \quad (3.64)$$

eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| K_n^\beta(f, x) - f(x) \right| &\leq \left| \tilde{K}_n^\beta(f, x) + f \left(x + \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right) + f(x) - f(x) \right| \\ &\leq \left| \tilde{K}_n^\beta(f-g, x) \right| + \left| \tilde{K}_n^\beta(g, x) - g(x) \right| + |f(x) - g(x)| \\ &\quad \left[\mu_{2,n}^\beta(x) + \left(\frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right)^2 \right] \|g''\| + \omega \left(f, \left| \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right| \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$g \in W^2$ üzerinden infimum alınırsa

$$\left| K_n^\beta(f, x) - f(x) \right| \leq K_2 \left(f, \mu_{2,n}^\beta(x) + \left(\frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right)^2 \right) + \omega \left(f, \left| \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right| \right) \quad (3.65)$$

olup ayrıca

$$K_2(f, \delta) \leq C\omega_2 \left(f, \sqrt{\delta} \right) \quad (3.66)$$

olduğundan

$$\left| K_n^\beta(f, x) - f(x) \right| \leq C\omega_2 \left(f, \sqrt{\mu_{2,n}^\beta(x) + \left(\frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right)^2} \right) + \omega \left(f, \left| \frac{x(2-2\beta+n\beta)}{(n-2)(1-\beta)} \right| \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Jain-Baskakov tip operatörler için ikinci süreklilik modülü cinsinden yakınsaklık oranını hesaplayalım.

$$B_{\rho_0}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C[0, \infty), |f(x)| \leq M_f(1+x^2) \right\} \quad (3.67)$$

koşulunu sağlayan \mathbb{R}^+ üzerinde tanımlı bütün fonksiyonlarının uzayı ve M_f, f fonksiyonuna bağlı bir pozitif içerik olmak üzere

$$C_{\rho_0}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in B_{\rho_0}(\mathbb{R}) : f \text{ sürekli ve } x \rightarrow \infty \text{ iken } \frac{f(x)}{\rho_0(x)} \text{ sınırlı} \right\}$$

uzayı şeklinde tanımlıdır.

Burada K_n^β operatörü için istatistiksel yakınsaklık ile A-istatistiksel yakınsaklık özelliklerini inceleyelim. Öncelikle bizim için gerekli olan istatistiksel yakınsaklık tanım ve teoremlerine yer vereceğiz.

Temeli pozitif tamsayılarda doğal yoğunluk kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklığın bilinen yakınsaklığın bir genellemesi olduğu söylenebilir.

3.2.3. Tanım

(x_n) reel terimli dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyleki her $n \geq n_0$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ sağlanıyor ise $x = (x_n)$ dizisi L sayısına yakınsaktır [13].

İlk defa 1951 yılında Fast ve Stehinaus tarafından (x_n) dizisinin $l \in \mathbb{R}$ ye yakınsaklığı uzaklık kavramından yoğunluk kavramına taşınmıştır [11, 12].

3.2.4. Tanım

\mathbb{N} doğal sayılar kümesini göstermek üzere $K \subset \mathbb{N}$ ve $K(n) = \{k \in K : k \leq n\}$ kümesinin eleman sayısı $|K(n)|$ ile gösterilsin.

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |K(n)|$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin doğal yoğunluğu denir [11, 12].

$$\delta(\mathbb{N}) = 1$$

$$\delta(n^2 : n \in \mathbb{N}) = 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

3.2.5. Tanım

$x = (x_n)$ reel(*kompleks*)terimli bir dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere eğer $\forall \varepsilon > 0$

$$\delta(\{k : k \leq n, |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise x dizi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ şeklinde gösterilir [12].

İstatistiksel yakınsaklık tanımından anlaşılacağı gibi $x = (x_n)$ dizisi bir l sayısına istatistiksel yakınsak ise l sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da diziyeye ait sonlu ya da sonsuz çoklukta terimi bulunabilir. Bu durum istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu gösterir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır fakat bu durumun tersi her zaman doğru değildir.

3.2.6. Teorem

Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır.

İspat

$x = (x_k)$ dizisi bir a sayısına yakınsak bir dizi olsun.

Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olduğunda $|x_k - a| < \varepsilon$ olacak biçimde k_0 sayısı bulunabilir.

O halde

$$|\{k \leq n : |x_k - a| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

yazılabilir. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - a| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_0}{n} = 0$$

elde edilir. $st - \lim x_k = 0$

3.2.7. Teorem

$x = (x_n)$ dizisinin bir $L \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$K = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \text{ için } \delta(K) = 1 \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = L$$

olacak şekilde en az bir (x_{n_k}) yakınsak alt dizisinin bulunmasıdır [11, 12].

3.2.8. Tanım:

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere (x_k) dizisi için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L \quad \text{iken} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (Ax)_n = L$$

ise A matrisine regüler matris denir [11, 12].

3.2.9. Teorem

$A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$(i) \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \|A\| < \infty$$

$$(ii) \text{ Her sabit } k \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

Silwerman-Toeplitz koşullarının sağlanmasıdır [11, 12].

3.2.10. Tanım

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$\delta_A(K) = \lim_n (Ax_k)_n = \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K kümesinin A -yoğunluğu denir [11].

3.2.11. Teorem

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matrisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_k (a_{nk}) = 0$$

ise bu durumda A – *istatistiksel* yakınsaklık klasik anlamda yakınsaklıktan daha kuvvetlidir [12].

3.2.12. Tanım

$x = (x_k)$ reel terimli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$K = K(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K(\varepsilon)} a_{n_k} = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $stA - \lim x = L$ şeklinde gösterilir [12].

3.2.13. Teorem

$A = (a_{n_k})$ negatif olmayan regüler matris olsun. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $C_{\rho_1}(\mathbb{R})$ den $C_{\rho}(\mathbb{R})$ ye giden pozitif lineer operatörlerin bir dizisi ve

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\rho(x)}{\rho'(x)} = 0 \text{ ve } F_k(x) = \frac{x^k \rho(x)}{1+x^2} \text{ olmak üzere}$$

$$stA - \lim_n \|T_n f - f\|_{\rho} = 0 \Leftrightarrow stA - \lim_n \|T_n F_k - F_k\|_{\rho} = 0$$

eşitliği vardır [12].

3.2.14. Teorem

$f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$, $A = (a_{n_k})$ negatif olmayan regüler matris, $\lambda > 0$, $0 \leq \beta_n < 1$ ve $stA - \lim_n \beta_n = 0$ olmak üzere

$$stA - \lim_n \left\| K_n^{\beta_n} f - f \right\|_{\rho_{\lambda}} = 0$$

eşitliği vardır.

İspat

Eş.3.25 de tanımlı K_n^{β} operatörü için

(i)Eş.3.43 deki eşitlik kullanılırsa

$$\left\| K_n^{\beta_n}(1, x) - 1 \right\|_{\rho_0} = 0$$

elde edilir.

(ii)Eş.3.46 deki eşitlik kullanılırsa

$$\left\| K_n^{\beta_n}(t, x) - x \right\|_{\rho_0} \leq \frac{2}{(n-2)} + \frac{n\beta_n}{(n-2)(1-\beta_n)}$$

elde edilir.

(iii)Eş.3.49 deki eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\| K_n^{\beta_n}(t^2, x) - x^2 \right\|_{\rho_0} &\leq \left| \frac{n^2\beta_n^2}{(n-2)(n-3)(1-\beta_n)^2} \right| + \left| \frac{n(1+5\beta_n)}{(n-2)(n-3)(1-\beta_n)} \right| \\ &\quad + \left| \frac{6}{(n-2)(n-3)} \right| + \left| \frac{n(2-2\beta_n+\beta_n^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta_n)^3} \right| \end{aligned}$$

elde edilir.

(i), (ii) ve (iii) sonuçlarından

$$stA - \lim_n \left\| K_n^{\beta_n} f - f \right\|_{\rho_0} = 0 \quad k = 0, 1, 2.$$

elde edilir.

3.3. King Tip Yaklaşım

2003 yılında King klasik Bernstein operatörlerinin genelleştirmesini yaparak lineer pozitif operatörü tanımladı [8]. Bu operatörler e_0 ve e_2 test fonksiyonlarını gerçektir. Bu bölümde Jain-Baskakov tip operatörler için King tip yaklaşımı inceleyeceğiz.

3.3.1. Tanım

$x \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, 1)$, $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ ve $(r_n(x))$, $[0, 1)$ de sürekli fonksiyon dizisi, $0 \leq r_n(x) \leq 1$ için

$$K_n^{*\beta}(f, r_n(x)) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v, nr_n(x)) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) f(t) dt + e^{-nr_n(x)} f(0) \quad (3.68)$$

şeklindeki operatöre Jain-Baskakov tip operatörün King tip genelleştirmesi denir [2].

3.3.2. Lemma

Eş.3.68 de tanımlı $K_n^{*\beta}$ operatörü

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad K_n^{*\beta}(1, r_n(x)) &= 1 \\
\text{(ii)} \quad K_n^{*\beta}(t, r_n(x)) &= \frac{n(r_n(x))}{(n-2)(1-\beta)} \\
\text{(iii)} \quad K_n^{*\beta}(t^2, r_n(x)) &= \frac{n^2}{(n-2)(n-3)} \left[\frac{((r_n(x)))^2}{(1-\beta)^2} + \frac{(r_n(x))(2-2\beta+\beta^2)}{n(1-\beta)^3} \right] \\
\text{(iv)} \quad K_n^{*\beta}(t^3, r_n(x)) &= \frac{n^3}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left[\frac{((r_n(x)))^3}{(1-\beta)^3} + \frac{3((r_n(x)))^2}{n(1-\beta)^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(r_n(x))}{n^2} \left(\frac{2\beta+1}{(1-\beta)^5} \right) + 3n^2 \left(\frac{((r_n(x)))^2}{(1-\beta)^2} + \frac{(r_n(x))}{n(1-\beta)^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2n(r_n(x))}{(1-\beta)} \right] \\
\text{(v)} \quad K_n^{*\beta}(t^4, r_n(x)) &= \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left[\frac{n^3((r_n(x)))^3}{(1-\beta)^3} \right. \\
&\quad \left. + 3n^2((r_n(x)))^2 \left(\frac{1}{(1-\beta)^2} + \frac{1}{(1-\beta)^4} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{11n(r_n(x))}{(1-\beta)^3} + \frac{6n(r_n(x))}{(1-\beta)} \right]
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat

Eş.3.68 de tanımlı $K_n^{*\beta}$ operatörü için

(i) $f = 1$ alınırsa

$$K_n^{*\beta}(1, r_n(x)) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v, nr_n(x)) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) dt + e^{-nr_n(x)}.1 \quad (3.69)$$

Eş.3.1 eşitliği Eş.3.69 eşitliğinde kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(1, r_n(x)) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v, nr_n(x)) \frac{1}{(n-1)} + e^{-nr_n(x)} \quad (3.70)$$

Eş.3.68 eşitliği Eş.3.70 eşitliğinde kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(1, r_n(x)) = B_n^\beta(1, r_n(x)) \quad (3.71)$$

Eş.3.17 eşitliği Eş.3.71 eşitliğinde kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(1, r_n(x)) = 1 \quad (3.72)$$

eşitliği elde edilir.

(ii) $f = t$ alınırsa

$$K_n^{*\beta}(t, r_n(x)) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nr_n(x)) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t dt + e^{-nx}.0 \quad (3.73)$$

Eş.3.17 eşitliği Eş.3.73 eşitliğinde kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(t, r_n(x)) = \frac{n}{(n-2)} \frac{r_n(x)}{(1-\beta)} \quad (3.74)$$

eşitliği elde edilir.

(iii) $f = t^2$ alınırsa

$$K_n^{*\beta}(t^2, r_n(x)) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v, nr_n(x)) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t^2 dt + e^{-nx}.0 \quad (3.75)$$

Eş.3.68 eşitliği Eş.3.75 eşitliğinde kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(t^2, r_n(x)) = \frac{n^2}{(n-2)(n-3)} B_n^\beta(t^2, r_n(x)) + \frac{n}{(n-2)(n-3)} B_n^\beta(t, r_n(x)) \quad (3.76)$$

Eş.3.68 eşitliği Eş.3.76 eşitliğinde kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(t^2, r_n(x)) = \frac{n^2(r_n(x))}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} + \frac{nr_n(x)(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3} \quad (3.77)$$

eşitliği elde edilir.

(iv) $f = t^3$

Eş.3.68 eşitliği kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(t^3, r_n(x)) = \frac{n^2 ((r_n(x)))^2 (-(1-\beta)n(r_n(x)) + 3(\beta^2 - 2\beta + 2))}{(n-2)(n-3)(n-4)(1-\beta)^4} + n(r_n(x)) \left(\frac{2\beta + 1}{(1-\beta)^5} + \frac{5 - 4\beta + 2\beta^2}{(1-\beta)^3} \right) \quad (3.78)$$

eşitliği elde edilir.

(v) $f = t^4$ alınır

$$K_n^{*\beta}(t^4, r_n(x)) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v, n(r_n(x))) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) t^4 dt + e^{-nx} \cdot 0 \quad (3.79)$$

Eş.3.38 deki eşitlik Eş.3.79 da kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(t^4, r_n(x)) = \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \left[\frac{n^4 ((r_n(x)))^4}{(1-\beta)^4} + \frac{6n^3 ((r_n(x)))^3 (\beta^2 - 2\beta + 2)}{(1-\beta)^5} + n^2 ((r_n(x)))^2 \left(\frac{-25\beta^4 + 28\beta^3 + 48\beta^2 - 72\beta + 36}{(1-\beta)^6} \right) + \frac{n(r_n(x)) (6\beta^6 - 36\beta^5 + 101\beta^4 - 152\beta^3 + 134\beta^2 - 52\beta + 14)}{(1-\beta)^7} \right] \quad (3.80)$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi de

$$K_n^{*\beta}(t^2, r_n(x)) = \frac{n^2 (r_n(x))}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} + \frac{nr_n(x) (2 - 2\beta + \beta^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3} = x^2$$

olmak üzere

$$\frac{n^2 (r_n(x))}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} + \frac{nr_n(x) (2 - 2\beta + \beta^2)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3} - x^2 = 0$$

buradan da

$$r_n(x) = \frac{(-2 + 2\beta - \beta^2)}{2n(1-\beta)} \pm \sqrt{\frac{(2-2\beta+\beta^2)^2}{4n^2(1-\beta)^2} + \frac{x^2(n-2)(n-3)(1-\beta)^2}{n^2}}, n \neq 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{*\beta}(t, r_n(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-2 + 2\beta - \beta^2)}{2(n-2)(1-\beta)^2} + \sqrt{\frac{(2-2\beta+\beta^2)^2}{(n-2)^2(1-\beta)^4} + \frac{x^2(n-3)}{(n-2)}} \right) \\ &= x \end{aligned}$$

3.3.3. Teorem

$K_n^{*\beta}$ operatörünün birinci ve ikinci momentleri $\mu_{1,n}^\beta$, $\mu_{2,n}^\beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mu_{1,n}^\beta(x) &= \frac{(-2 + 2\beta - \beta^2)}{2(n-2)(1-\beta)^2} + \sqrt{\frac{(2-2\beta+\beta^2)^2}{(n-2)^2(1-\beta)^4} + \frac{x^2(n-3)}{(n-2)}} - x \\ \text{(ii)} \quad \mu_{2,n}^\beta(x) &= 2x^2 + \frac{(-2 + 2\beta - \beta^2)x}{(n-2)(1-\beta)^2} - 2x \sqrt{\frac{(2-2\beta+\beta^2)^2}{(n-2)^2(1-\beta)^4} + \frac{x^2(n-3)}{(n-2)}} \end{aligned}$$

dir.

İspat

$K_n^{*\beta}$ operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mu_{1,n}^\beta(x) &= K_n^{*\beta}((t-x), r_n(x)) \\ &= K_n^{*\beta}(t, r_n(x)) - x K_n^{*\beta}(1, r_n(x)) \\ &= \frac{(-2 + 2\beta - \beta^2)}{2(n-2)(1-\beta)^2} + \sqrt{\frac{(2-2\beta+\beta^2)^2}{(n-2)^2(1-\beta)^4} + \frac{x^2(n-3)}{(n-2)}} - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \mu_{2,n}^\beta(x) &= x^2 - 2x \left(\frac{(-2 + 2\beta - \beta^2)}{2(n-2)(1-\beta)^2} + \sqrt{\frac{(2 - 2\beta + \beta^2)^2}{(n-2)^2(1-\beta)^4} + \frac{x^2(n-3)}{(n-2)}} \right) + x^2 \\
&= 2x^2 + \frac{(-2 + 2\beta - \beta^2)x}{(n-2)(1-\beta)^2} - 2x \sqrt{\frac{(2 - 2\beta + \beta^2)^2}{(n-2)^2(1-\beta)^4} + \frac{x^2(n-3)}{(n-2)}}
\end{aligned}$$

eşitlikler elde edilir.

3.3.4. Teorem

A , \mathbb{R} nin kompakt bir alt kümesi, $n > 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ ve her $x \in A$ için Eş.3.81 de tanımlı $K_n^{*\beta}$ operatörü,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{*\beta}(f, r_n(x)) = f(x)$$

eşitliğini sağlar.

İspat

$K_n^{*\beta}$ operatörü pozitif lineer operatördür. Korovkin teoreminin sonuçlarından

$$K_n^{*\beta}(f, r_n(x)) \rightrightarrows f(x)$$

eşitliğinin sağlanması için $f(t) = 1$, t , t^2 test fonksiyonlarının sağlatılması gerekir.

$$K_n^{*\beta}(t^k, r_n(x)) = x^k$$

için

(i) $k = 0$ alınırsa

Eş.3.72 deki eşitlik kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(1, r_n(x)) = 1 \text{ olup } \lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{*\beta}(1, r_n(x)) \rightrightarrows 1$$

dir.

(ii) $k = 1$ alınırsa

Eş.3.74 deki eşitlik kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(t, r_n(x)) = \frac{(-2 + 2\beta - \beta^2)}{2(n-2)(1-\beta)^2} + \sqrt{\frac{(2 - 2\beta + \beta^2)^2}{(n-2)^2(1-\beta)^4} + \frac{x^2(n-3)}{(n-2)}}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{*\beta}(t, r_n(x)) \Rightarrow x$$

dir.

(iii) $k = 2$ alınırsa

Eş.3.77 deki eşitlik kullanılırsa

$$K_n^{*\beta}(t^2, r_n(x)) = x^2 \text{ olup } \lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{*\beta}(t^2, r_n(x)) \Rightarrow x^2$$

dir.

(i), (ii) ve (iii) sonuçlarından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{*\beta}(f, r_n(x)) = f(x)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi de $K_n^{*\beta}(f, x)$ operatörü için Voronovskaja tip asimptotik yakınsama oranını elde edelim.

3.3.5. Teorem

f fonksiyonu \mathbb{R}^+ üzerinde sınırlı integrallenebilir, birinci ve ikinci dereceden türevlenebilir, $\beta_n \in (0, 1)$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\beta_n \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(K_n^{*\beta}(f, x) - f(x) \right) = x(x+2) \frac{f''(x)}{2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

f fonksiyonu için Taylor formülü

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{(t-x)^2}{2}f''(x) + \varepsilon(t,x)(t-x)^2$$

şeklindedir. Burada tanımlı $\varepsilon(t,x)$ sınırlı ve $\lim_{t \rightarrow x} \varepsilon(t,x) = 0$ dır.

Gerçekten; $[c,x]$ aralığında

$$F(u) = f(x) - f(u) - f'(u)(x-u)$$

şeklinde F fonksiyonunu tanımlayalım. F fonksiyonunun birinci mertebeden türevi alınırsa

$$\begin{aligned} F'(u) &= -f'(u) - f''(u)(x-u) + f'(u) \\ &= -f''(u)(x-u) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Özel olarak

$$G(u) = F(u) - \left(\frac{x-u}{x-t}\right)^2 F(t)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Burada Rolle Teoremi [6, 7]. G fonksiyonu için uygularsak;

$G'(s) = 0$ olacak şekilde $s \in (t,x)$ vardır.

$$G'(s) = (x-s) \left[-f''(s) + \frac{2}{(x-t)^2} F(t) \right]$$

elde edilir.

Buradan da

$$F(t) = \frac{(x-t)^2}{2!} f''(s)$$

elde edilip sonuç olarak

$$f(x) - f(c) - f'(x)(x-t) - f''(t) \frac{(x-t)^2}{2} = f''(s) \frac{(x-t)^2}{2}$$

eşitliği mevcuttur.

Burada f sürekli fonksiyon olduğundan $x \rightarrow t$ için $s \rightarrow t$ ve $\varepsilon(t, x) \rightarrow 0$ dir. Taylor formülüne $K_n^{*\beta}$ operatörü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} K_n^{*\beta}(f, x) - f(x) &= f'(x) K_n^{*\beta}(t-x, x) + \frac{f''(x)}{2} K_n^{*\beta}((t-x)^2, x) + K_n^{*\beta}(\varepsilon(t, x)(t-x)^2, x) \\ &= \frac{f''(x)}{2} K_n^{*\beta}((t-x)^2, x) + K_n^{*\beta}(\varepsilon(t, x)(t-x)^2, x) \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$K_n^{*\beta}(\varepsilon(t, x)(t-x)^2, x) \leq \sqrt{K_n^{*\beta}(\varepsilon^2(t, x), x)} \sqrt{K_n^{*\beta}((t-x)^4, x)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n K_n^{*\beta}(\varepsilon^2(t, x), x) = \varepsilon^2(x, x) = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n K_n^{*\beta}(\varepsilon(t, x)(t-x)^2, x) = 0$$

olup

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(K_n^{*\beta}(f, x) - f(x) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{f''(x)}{2} K_n^{*\beta}((t-x)^2, x) \\ &= \frac{f''(x)}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nx^2}{(n-3)} + \frac{nx(2-2\beta_n + \beta_n^2)}{(n-3)(1-\beta_n^2)} \right) \\ &= (x^2 + 2x) \frac{f''(x)}{2} \end{aligned}$$

3.4. Stancu Tip Yaklaşım

Bu bölümde Jain-Baskakov tip operatörlerinin Stancu tip genelleştirmesinin yakınsaklık özelliklerini inceleyeceğiz [1].

3.4.1. Tanım

$\beta \in [0, 1)$, $x \in [0, \infty)$ ve $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ için

$$K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f,x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v,nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\gamma}\right) dt + e^{-nx} f\left(\frac{\alpha}{n+\gamma}\right) \quad (3.81)$$

şeklinde gösterilen operatöre Jain-Baskakov tip operatörlerin Stancu tip genelleştirmesi denir

3.4.2. Lemma

$0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq \gamma$ ve $n > 3$ ve Eş.3.81 de tanımlı $K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f,x)$ operatörü için

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(1,x) &= 1, \\ \text{(ii)} \quad K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(t,x) &= \frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)}, \\ \text{(iii)} \quad K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(t^2,x) &= \frac{x^2n^4}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} + \frac{\alpha^2}{(n+\gamma)^2} \\ &\quad + \frac{n^2x(n(2-2\beta+\beta^2+2\alpha-4\alpha\beta+2\alpha\beta^2)-6\alpha+6\alpha\beta)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3(n+\gamma)^2} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Eş.3.81 de tanımlı $K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f,x)$ operatörü için

(i) $f = 1$ alınırsa

$$K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(1,x) = (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v,nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) dt + e^{-nx}.1 \quad (3.82)$$

Eş.3.82 de kullanılırsa

$$K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(1,x) = 1 \quad (3.83)$$

elde edilir.

(ii) $f = t$ alınır

$$\begin{aligned} K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t,x) &= (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v,nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) \left(\frac{nt}{n+\gamma} \right) dt + e^{-nx} \cdot \frac{\alpha}{n+\gamma} \\ &\quad + (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} w_\beta(v,nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) \left(\frac{\alpha}{n+\gamma} \right) dt + e^{-nx} \cdot \frac{\alpha}{n+\gamma} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Eş.3.37 eşitliği Eş.3.84 de kullanılırsa

$$K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t,x) = \frac{n^2x + \alpha(n-2)}{(n-2)(n+\gamma)} \quad (3.85)$$

elde edilir.

(iii) $f = t^2$ alınır

$$\begin{aligned} K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t^2,x) &= (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} (v,nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) \left(\frac{n^2t^2}{(n+\gamma)^2} \right) dt + e^{-nx} \left(\frac{\alpha}{(n+\gamma)} \right)^2 \\ &\quad + (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} (v,nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) \left(\frac{2nt\alpha}{(n+\gamma)^2} \right) dt + e^{-nx} \left(\frac{\alpha}{(n+\gamma)} \right)^2 \\ &\quad + (n-1) \sum_{v=1}^{\infty} (v,nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1}(t) \left(\frac{\alpha^2}{(n+\gamma)^2} \right) dt + e^{-nx} \left(\frac{\alpha}{(n+\gamma)} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.86)$$

Eş.3.38 eşitliği Eş.3.86 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t^2,x) &= \frac{x^2n^4}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2} + \frac{\alpha^2}{(n+\gamma)^2} \\ &\quad + \frac{n^2x(n(2-2\beta+\beta^2+2\alpha-4\alpha\beta+2\alpha\beta^2)-6\alpha+6\alpha\beta)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3(n+\gamma)^2} \end{aligned} \quad (3.87)$$

3.4.3. Lemma

Eş.3.81 de tanımlı $K_{n,\alpha,\gamma}^\beta$ operatörünün birinci ve ikinci momentleri $\mu_{1,n,\alpha,\gamma}^\beta$ $\mu_{2,n,\alpha,\gamma}^\beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \mu_{1,n,\alpha,\gamma}^\beta(x) &= \frac{x(n^2\beta + (1-\beta)(2n+2\gamma-n\gamma))}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} + \frac{\alpha}{(n+\gamma)} \\
 \text{(ii)} \quad \mu_{2,n,\alpha,\gamma}^\beta(x) &= x^2 \left\{ \frac{n^4(1-\beta) - 6(1-\beta)^2\gamma^2 + n^3((1-\beta)(1+5\beta-2\beta\gamma))}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^2(n+\gamma)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n((1-\beta)\gamma(12-5\gamma) + n^2(6-6\beta-4\gamma+10\beta\gamma+\gamma^2))}{(n-2)(n-3)(1-\beta)(n+\gamma)^2} \right\} \\
 &\quad + x \left\{ \frac{n^3(2+2\alpha\beta-2\beta-4\alpha\beta^2+\beta^2+2\alpha\beta^3)}{(n-2)(n-3)(1-\beta)^3(n+\gamma)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(2\alpha(1-\beta)(6-5\gamma) + n^2(2\alpha(2-5\beta-\gamma+\gamma\beta)))}{(n-2)(n-3)(1-\beta)(n+\gamma)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{12\alpha\gamma}{(n-2)(n-3)(n+\gamma)^2} \right\} \\
 &\quad + \frac{\alpha^2}{(n+\gamma)^2}
 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Eş.3.81 de tanımlı $K_{n,\alpha,\gamma}^\beta$ operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa eşitlikleri elde edilir.

3.4.4. Teorem

A , \mathbb{R} nin kompakt bir alt kümesi , $n > 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ ve her $x \in A$ için Eş.3.81 de tanımlı $K_{n,\alpha,\gamma}^\beta$ operatörü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta_n}(f, x) = f(x)$$

dir.

İspat

$K_{n,\alpha,\gamma}^\beta$ operatörü lineer pozitif operatördür. Korovkin teoreminin sonuçlarından

$$K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(f, x) \Rightarrow f(x)$$

eşitliğinin sağlanması için $f(t) = 1, t, t^2$ test fonksiyonlarının sağlanması gerekir.

$$K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t^k, x) = x^k$$

(i) $k = 0$ için

Eş.3.83 eşitliği kullanılırsa

$$K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(1, x) = 1 \text{ olup } K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(1, x) \Rightarrow 1$$

elde edilir.

(ii) $k = 1$ için

Eş.3.85 eşitliği kullanılırsa

$$K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t, x) = \frac{n^2 x}{n(1 - \frac{2}{n})n(1 + \frac{\gamma}{n})(1 - \beta)} + \frac{\alpha}{(n + \gamma)}$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken $K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t, x) \Rightarrow x$ elde edilir.

(iii) $k = 2$ için

Eş.3.87 eşitliği kullanılırsa

$$K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t^2, x) = \frac{x^2}{(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n})(1 - \beta_n)^2} + \frac{x(2 - 2\beta_n + \beta_n^2)}{n(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n})(1 - \beta_n)^3}$$

$n \rightarrow \infty$ iken $K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t^2, x) \Rightarrow x^2$ dir.

(i), (ii), ve (iii) koşullarından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(f,x) = f(x)$$

eşliği elde edilir.

3.4.5. Teorem

$f \in C_B^*[0, \infty)$, $C > 0$ ve $n > 3$ olmak üzere

$$\left| K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta n}(f,x) - f(x) \right| \leq \omega\left(f, \mu_{1,n,\alpha,\gamma}^\beta(x)\right) + C_2 \omega_2\left(f, \sqrt{\left(\mu_{2,n,\alpha,\gamma}^\beta(x)\right)^2 + \mu_{2,n,\alpha,\gamma}^\beta(x)}\right)$$

eşitsizliği vardır.

İspat

$$\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^\beta(f,x) := C_B^*[0, \infty) \rightarrow C_B^*[0, \infty)$$

olmak üzere

$$\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^\beta(f,x) = K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(f,x) - f\left(\frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)}\right) + f(x) \quad (3.88)$$

şeklinde tanımlı yardımcı operatör lineerdir.

Eş.3.83 deki eşitlik yardımıyla

$$\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^\beta(1,x) = 1 \text{ elde edilir.}$$

Diğer taraftan

$$\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t,x) = K_{n,\alpha,\gamma}^\beta(t,x) - \frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} + x \quad (3.89)$$

elde edilir.

Eş.3.85 deki eşitlik Eş.3.89 de kullanılırsa

$$\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(t,x) = x$$

eşitliği elde edilir ve $\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}$ yardımcı operatörü e_0, e_1 test fonksiyonlarını sağlar.

Eş.3.4 deki eşitlik ve $\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}$ yardımcı operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}((t-x),x) = 0 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

$g \in W^2$ ve $x, t \in [0, \infty)$ için taylor formülü

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)du \quad (3.90)$$

şeklinde olup Eş.3.90 deki eşitlik \tilde{K}_n^{β} operatörüne uygulanırsa

$$\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(g(t),x) - \tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(g(x),x) = g'(x)\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}((t-x),x) + \tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du,x\right) \quad (3.91)$$

eşitliği elde edilir. Eş.3.91 deki eşitlikte lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(g(t),x) - g(x)\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(1,x) = g'(x)\tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}((t-x),x) + \tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du,x\right) \quad (3.92)$$

eşitliği elde edilir. Eş.3.92 deki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır

$$\left| \tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(g,x) - g(x) \right| = \left[\left(\mu_{1,n,\alpha,\gamma}^{\beta}(x) \right)^2 + \mu_{2,n,\alpha,\gamma}^{\beta}(x) \right] \|g''\| \quad (3.93)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left| \tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f,x) \right| \leq \|f\| \quad (3.94)$$

Eş.3.94 deki eşitsizlik yardımıyla

$$\left| \tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f,x) \right| \leq 3 \|f\| \quad (3.95)$$

elde edilir. Eş.3.94 deki eşitsizlik Eş.3.95 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f,x) - f(x) \right| &\leq \left| \tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f-g,x) \right| + \left| \tilde{K}_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(g,x) - g(x) \right| + |f(x) - g(x)| \\ &\quad + \left| f \left(\frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} \right) - f(x) \right| \\ &\leq 3 \|f-g\| + \|f-g\| \\ &\quad + \left[\mu_{2,n}^{\beta}(x) + \left(\frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} \right)^2 \right] \|g''\| \\ &\quad + \omega \left(f, \left| \frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} \right| \right) \end{aligned} \quad (3.96)$$

eşitsizliği elde edilir.

Eş.3.96 deki eşitsizlikte $g \in W^2$ üzerinden infimum alınır

$$\begin{aligned} \left| K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f,x) - f(x) \right| &\leq K_2 \left(f, \mu_{2,n}^{\beta}(x) + \left(\frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} \right)^2 \right) \\ &\quad + \omega \left(f, \left| \frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} \right| \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

elde edilir. Ayrıca

$$K_2(f, \delta) \leq C\omega_2 \left(f, \sqrt{\delta} \right) \quad (3.98)$$

Eş.3.98 deki eşitsizlik Eş.3.97 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| K_{n,\alpha,\gamma}^{\beta}(f,x) - f(x) \right| &\leq C\omega_2 \left(f, \sqrt{\mu_{2,n}^{\beta}(x) + \left(\frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} \right)^2} \right) \\ &\quad + \omega \left(f, \left| \frac{n^2x + \alpha(n-2)(1-\beta)}{(n-2)(1-\beta)(n+\gamma)} \right| \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.5. Jain-Baskakov Operatörünün c Parametre Dönüşümü

Gupta tarafından Beta temel fonksiyonlarının ağırlık fonksiyonları göz önüne alınarak Szasz Mirakyan tip operatörlerinin integral dönüşümleri üzerinde çalışmalar yapıldı [1]. Dubey ve Jain $c > 0$ parametresi için Szasz-Mirakyan operatörünün yaklaşım özelliklerini inceledi [3].

3.5.1. Tanım

$x \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, 1)$, $f \in C_{\rho_0}(\mathbb{R}^+)$ ve $c > 0$ için

$$K_{n,c}^{\beta}(f, x) = \frac{(n-c)}{c} \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v, nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1,c}(t) f(t) dt + e^{-nx} f(0) \quad (3.99)$$

şeklinde gösterilen operatöre Jain-Baskakov tip operatörlerin c parametresi dönüşümü denir

Burada taban fonksiyon

$$p_{n,v-1,c}(t) = c \frac{\Gamma(n/c + v - 1)}{\Gamma(v) \Gamma(n/c)} \frac{(ct)^{v-1}}{(1+ct)^{n/c+v-1}}$$

şeklinde tanımlıdır.

3.5.2. Lemma

Eş.3.99 de tanımlı $K_{n,c}^{\beta}$ operatörü için $n > 3c > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K_{n,c}^{\beta}(1, x) &= 1, \\ \text{(ii)} \quad K_{n,c}^{\beta}(t, x) &= \frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}, \\ \text{(iii)} \quad K_{n,c}^{\beta}(t^2, x) &= \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)} \left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x(2-2\beta+\beta^2)}{n(1-\beta)^3} \right] \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Eş.3.99 eşitliğinde

(i) $f = 1$ alınır

$$K_{n,c}^{\beta}(1,x) = (n-c) \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v,nx) \frac{1}{(n-c)} + e^{-nx} \quad (3.100)$$

Eş.3.101 eşitliği Eş.3.100 de kullanılırsa

$$K_{n,c}^{\beta}(1,x) = 1 \quad (3.101)$$

elde edilir.

(i) $f = t$ alınır

$$K_{n,c}^{\beta}(t,x) = \frac{n}{(n-2c)} B_n^{\beta}(t,x) \quad (3.102)$$

Eş.3.17 eşitliği Eş.3.102 de kullanılırsa

$$K_{n,c}^{\beta}(t,x) = \frac{n}{(n-2c)} \frac{x}{(1-\beta)} \quad (3.103)$$

(ii) $f = t^2$ alınır

$$K_{n,c}^{\beta}(t^2,x) = \frac{(n-c)}{c} \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v,nx) \int_0^{\infty} p_{n,v-1,c}(t) t^2 dt + e^{-nx} \cdot 0 \quad (3.104)$$

Eş.3.101 eşitlikliği Eş.3.104 de kullanılırsa

$$K_{n,c}^{\beta}(t^2,x) = \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)} \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v,nx) \frac{v^2}{n^2} + \frac{n}{(n-2c)(n-3c)} \sum_{v=1}^{\infty} w_{\beta}(v,nx) \frac{v}{n} \quad (3.105)$$

Eş.3.17, Eş.3.19 eşitlikleri Eş.3.105 de kullanılırsa

$$K_{n,c}^{\beta}(t^2,x) = \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)} B_n^{\beta}(t^2,x) + \frac{n}{(n-2c)(n-3c)} B_n^{\beta}(t,x) \quad (3.106)$$

Eş.3.101 eşitlikliği Eş.3.106 de kullanılırsa

$$K_{n,c}^{\beta}(t^2, x) = \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)} \left[\frac{x^2}{(1-\beta)^2} + \frac{x((1-\beta)^2+1)}{n(1-\beta)^3} \right] \quad (3.107)$$

elde edilir.

3.5.3. Lemma

$K_{n,c}^{\beta}$ operatörünün birinci ve ikinci momentleri $\mu_{1,n}^{\beta}(x)$ ve $\mu_{2,n}^{\beta}(x)$ olmak üzere

$$(i) \mu_{1,n}^{\beta}(x) = \frac{x(n\beta + 2c(1-\beta))}{(n-2c)(1-\beta)},$$

$$(ii) \mu_{2,n}^{\beta}(x) = \frac{x^2(n^2\beta^2 + n(c + 4c\beta - 5c\beta^2) + 6c^2 - 12c^2\beta + 6c^2\beta^2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2} + \frac{nx(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^3}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Eş.3.99 de tanımlı $K_{n,c}^{\beta}$ operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (i) \mu_{1,n,c}^{\beta}(x) &= K_{n,c}^{\beta}((t-x), x) \\ &= K_{n,c}^{\beta}(t, x) - xK_{n,c}^{\beta}(1, x) \end{aligned} \quad (3.108)$$

Eş.3.101, Eş.3.103 eşitlikleri Eş.3.108 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu_{1,n,c}^{\beta}(x) &= \frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)} - x \\ &= \frac{nx - x(n - n\beta - 2c + 2c\beta)}{(n-2c)(1-\beta)} \\ &= \frac{x(n\beta + 2c(1-\beta))}{(n-2c)(1-\beta)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } \mu_{2,n,c}^\beta(x) &= K_{n,c}^\beta((t-x)^2, x) \\
 &= K_{n,c}^\beta(t^2, x) - 2xK_{n,c}^\beta(t, x) + x^2
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

Eş.3.103, Eş.3.107 eşitlikleri Eş.3.109 de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \mu_{2,n,c}^\beta(x) &= \frac{n^2x^2}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2} + \frac{n^2x(2-2\beta+\beta^2)}{n(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^3} \\
 &\quad - \frac{2nx^2}{(n-2c)(1-\beta)} + x^2 \\
 &= \frac{nx^2 - 2nx^2(n-3c)(1-\beta) + x^2(n-2c)(n-3c)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2} \\
 &\quad + \frac{nx(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^3} \\
 &= \frac{x^2(n^2\beta^2 + n(c+4c\beta-5c\beta^2) + 6c^2 - 12c^2\beta + 6c^2\beta^2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2} \\
 &\quad + \frac{nx(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^3}
 \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir.

3.5.4. Teorem

E , \mathbb{R}^+ nin kompakt bir alt kümesi, $n > 3c > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ ve her $x \in E$ için Eş.3.99 de tanımlı $K_{n,c}^\beta$ operatörü,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n,c}^{\beta_n}(f, x) = f(x)$$

eşitliğini sağlar.

İspat

Korovkin teoreminin sonuçlarından

$$K_{n,c}^{\beta_n}(t^k, x) = x^k$$

için $f(t) = 1, t, t^2$ test fonksiyonlarının sağlanıyorsa

$$K_{n,c}^{\beta_n}(f, x) \Rightarrow f(x)$$

dir.

(i) $k = 0$ alınıp Eş.3.101 deki eşitlik kullanılırsa

$$K_{n,c}^{\beta_n}(1, x) = 1 \text{ olup } K_{n,c}^{\beta_n}(1, x) \Rightarrow 1 \text{ dir.}$$

(ii) $k = 1$ alınır

$$\begin{aligned} K_{n,c}^{\beta_n}(t, x) &= \frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)} \\ &= \frac{x(n-2c+2c)}{(n-2c)(1-\beta)} \\ &= \frac{x(n-2c)}{(n-2c)(1-\beta)} + \frac{2cx}{(n-2c)(1-\beta)} \\ &= \frac{x}{(1-\beta)} + \frac{2cx}{(n-2c)(1-\beta)} \end{aligned}$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken $K_{n,c}^{\beta_n}(t, x) \Rightarrow x$ dir.

(iii) $k = 2$ alınır

$$\begin{aligned} K_{n,c}^{\beta_n}(t^2, x) &= \frac{n^2x^2}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^2} + \frac{nx(2-2\beta+\beta^2)}{(n-2c)(n-3c)(1-\beta)^3} \\ &= \frac{n^2x^2}{n(1-\frac{2c}{n})n(1-\frac{3c}{n})(1-\beta)^2} + \frac{nx(2-2\beta+\beta^2)}{n(1-\frac{2c}{n})n(1-\frac{3c}{n})(1-\beta)^3} \\ &= \frac{x^2}{(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3c}{n})(1-\beta)^2} + \frac{x(2-2\beta+\beta^2)}{n(1-\frac{2c}{n})(1-\frac{3c}{n})(1-\beta)^3} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ iken $K_{n,c}^{\beta_n}(t^2, x) \Rightarrow x^2$ dir. Bu sonuçlardan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n,c}^{\beta_n}(f, x) = f(x)$$

eşliği elde edilir.

3.5.5. Lemma

$f \in C_B^*[0, \infty)$, $n > 3c > 0$ ve $C_3 > 0$ olmak üzere

$$\left| K_{n,c}^{\beta_n}(f, x) - f(x) \right| \leq \omega\left(f, \mu_{1,n,c}^\beta(x)\right) + C_3 \omega_2\left(f, \sqrt{\left(\mu_{1,n,c}^\beta\right)^2 + \mu_{2,n,c}^\beta}\right)$$

eşitsizliği vardır.

İspat

$$\tilde{K}_{n,c}^\beta(f, x) := C_B^*[0, \infty) \rightarrow C_B^*[0, \infty)$$

için

$$\tilde{K}_{n,c}^\beta(f, x) = K_{n,c}^\beta(f, x) - f\left(\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}\right) + f(x) \quad (3.110)$$

şeklinde tanımlı yardımcı operatörü lineerdir.

Eş.3.101 eşitliği Eş.3.110 de kullanılırsa

$$\tilde{K}_{n,c}^\beta(1, x) = 1$$

elde edilir.

$$\tilde{K}_{n,c}^\beta(t, x) = K_{n,c}^\beta(t, x) - \left(\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}\right) + x \quad (3.111)$$

Eş.3.103 deki eşitlik Eş.3.111 deki eşitlikte kullanılırsa

$$\tilde{K}_{n,c}^\beta(t, x) = x \quad (3.112)$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\tilde{K}_{n,c}^\beta$ yardımcı operatörü e_0, e_1 test fonksiyonlarını sağlar.

Eş.3.112 deki eşitlik ve $\tilde{K}_{n,c}^\beta$ yardımcı operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$\tilde{K}_{n,c}^\beta((t-x), x) = 0$ eşitliği elde edilir.

$g \in W^2$ ve $x, t \in [0, \infty)$ için Taylor formülü

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u) du \quad (3.113)$$

şeklinde olup

Eş.3.113 deki eşitlik \tilde{K}_n^β operatörüne uygulanırsa

$$\tilde{K}_{n,c}^\beta(g(t), x) - \tilde{K}_{n,c}^\beta(g(x), x) = g'(x)\tilde{K}_{n,c}^\beta((t-x), x) + \tilde{K}_{n,c}^\beta\left(\int_x^t (t-u)g''(u) du, x\right) \quad (3.114)$$

elde edilir.

Eş.3.113 ve Eş.3.114 eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| \tilde{K}_{n,c}^\beta(f, x) - f(x) \right| &\leq \left| \tilde{K}_{n,c}^\beta(f, x) + f\left(\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}\right) + f(x) - f(x) \right| \\ &\leq \left| \tilde{K}_{n,c}^\beta(f, x) + f\left(\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}\right) + f(x) - f(x) \right| \\ &\quad + \left| g(x) - g(x) + \tilde{K}_n^\beta(g, x) - \tilde{K}_n^\beta(g, x) \right| \\ &\leq \left| \tilde{K}_{n,c}^\beta(f-g, x) \right| + \left| \tilde{K}_{n,c}^\beta(g, x) - g(x) \right| + |f(x) - g(x)| \\ &\quad + \left| f\left(\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}\right) - f(x) \right| \\ &\leq 3\|f-g\| + \|f-g\| \\ &\quad + \left[\mu_{2,n,c}^\beta(x) + \left(\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}\right)^2 \right] \|g''\| + \omega\left(f, \left|\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)}\right|\right) \end{aligned} \quad (3.115)$$

eşitsizliği elde edilir.

Eş.3.115 deki eşitsizlikte $g \in W^2$ üzerinden infimum alınırsa

$$\left| K_{n,c}^\beta(f,x) - f(x) \right| \leq K_2 \left(f, \mu_{2,n,c}^\beta(x) + \left(\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)} \right)^2 \right) + \omega \left(f, \left| \frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)} \right| \right) \quad (3.116)$$

elde edilir. Ayrıca

$$K_2(f, \delta) \leq C \omega_2 \left(f, \sqrt{\delta} \right) \quad (3.117)$$

olup

Eş.3.117 deki eşitsizlik Eş.3.116 deki eşitsizlikte kullanılırsa

$$\left| K_{n,c}^\beta(f,x) - f(x) \right| \leq C \omega_2 \left(f, \sqrt{\mu_{2,n,c}^\beta(x) + \left(\frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)} \right)^2} \right) + \omega \left(f, \left| \frac{nx}{(n-2c)(1-\beta)} \right| \right)$$

elde edilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde ise temel kavramlardan bahsedilmiştir. Bu amaçla fonksiyon uzayları ve lineer operatörlerle ilgili tanım ve teoremler verilmiş, yaklaşım teorisinin önemli teoremleri ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde Jain operatörün genelleşmesi olan ve Patel ve Mishra tarafından çalışılan Jain Baskakov tip operatörlerin temel özellikleri ve yaklaşım özellikleri incelenmiş, ikinci süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım oranı ve Voronovskaja tip yakınsaklık oranları elde edilmiştir.

Jain operatörün yeni bir geliştirilmesi olan q -Jain operatör için de benzer sonuçlar elde edilebilir.





KAYNAKLAR

1. Patel, P., Mishra, V. N. (2014). Jain-Baskakov operators and its different generalization. *Acta Mathematica Vietnamica*, 39(3), 15-25.
2. Gupta, V., Agarwal, R. P., Verma, D. (2013). Approximation for a new sequence of summation integral type operators. *The American Mathematical Montly*, 2(3), 260-264.
3. Jain, G. C. (1972). Approximation of functions by a new class of linear operators. *Journal Austral Studia Math.*, 13(3), 271-276.
4. Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 20-45.
5. Gupta, V., Mohatapra, R. N., Finta, Z. (2005). *On certain family of mixed summation integral type operators*. Delhi: Hindustan Publishing (India), 181-191.
6. Umar, S., Razi, Q. (1985). Approximation of functions by a generalized Szasz operators. *Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik* , 45-52
7. Vore, R. A., Lorentz, G. G. (1993). *Constructive Approximation*. New York: Springer, 10-27.
8. Korovkin, P. P. (1995). *Linear Operators and Approximation Theory*. Delhi: Hindustan Publishing (India).
9. Verma, D. K., Gupta, V., Agrawal, P. N. (2012). Some approximation properties of Baskakov-Durmeyer-Stancu operators. *Applied Mathematics and Computation*, 614-656.
10. Gupta, V., Grevbel, G. C. (2016). A note on modified Phillips operators. *The American Mathematical Montly*, 3(7), 15-45.
11. Fridy, J. A., Miller, H. (1991). A matrix characterization of statistical covergences. *Mathematical and Computer Modelling*, 3(8), 59-66.
12. Duman, O., Orhan, C. (2004). Statistical approximation by positive linear operators. *Rocky Mountain Journal Math.* , 187-197.
13. Başkan, T. (2010). *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*. Bursa: Nobel Yayıncılık, 27-86



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : SAĞLAM, Merve
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 24.10.1989, Ankara
Telefon : 0545-720-08-11
e-mail : merve.saglam.28@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	Devam ediyor.
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi/Matematik	2012
Lise	Sincan Lisesi	2006

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak.



GAZİ GELECEKTİR..