

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
STANDART OLMAYAN THETA METODU**

Fatih ER

**Danışman
Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2016**



© 2016 [Fatih ER]

TEZ ONAYI

Fatih ER tarafından hazırlanan "**Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Standart Olmayan Theta Metodu**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Bölümü Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Yard. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
Selçuk Üniversitesi



Enstitü Müdürü

Doç.Dr.Yasin TUNCER

.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Fatih ER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	4
3. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR	8
3.1. Gamma Fonksiyonu ve Özellikleri	8
3.2. Beta Fonksiyonu ve Özellikleri	10
3.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu ve Özellikleri	11
3.4. Wright Fonksiyonu ve Özellikleri	13
4. KESİRLİ TÜREV VE KESİRLİ İNTEGRAL	14
4.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve Kesirli İntegrali	14
4.2. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali	18
4.3. Caputo Kesirli Türevi	22
4.4. Kesirli Türevler Arasındaki İlişki	24
4.5. Kesirli Türevlerin Özellikleri	30
4.5.1. Lineerlik Özelliği	30
4.5.2. Kesirli Türevlerin Leibniz Kuralı	31
4.5.3. Bileşke Fonksiyonun Kesirli Türevi	32
5. THETA METODU	33
5.1. Giriş	33
5.2. Standart Theta Metodu	35
5.3. Standart Olmayan Theta Metodu	42

6. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN THETA METODU	57
6.1. Giriş	57
6.2. Kesirli Lineer Çok Adımlı Metotlar	57
6.3. Kesirli Theta Metodu	62
7. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	66
KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	73



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN STANDART OLMAYAN THETA METODU

Fatih ER

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN

Bu tez çalışmasında kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türev ve integrallerinin tanımları, bazı özellikleri ve karşılaştırmaları yapıldı. Adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde kullanılan standart ve standart olmayan Theta metotlarının, Thetanın farklı değerleri için, analitik çözüm ile karşılaştırılmış grafikleri ve kararlılık bölgeleri çizdirildi. Ayrıca kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için yeni bir metot olan ve kesirli lineer çok adımlı metotlar yardımıyla türetilen kesirli Theta metodu tanıtıldı.

Anahtar Kelimeler: Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, Kesirli lineer çok adımlı metotlar, Kesirli theta metodu

2016, 74 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

NONSTANDART THETA METHOD FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Fatih ER

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN

In this thesis Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov and Caputo's, which are used for finding the solution of the fractional differential equations, definitions, some certain properties and comparisons were made. Standart and nonstandart Theta methods, which are used for finding the numerical solutions of the ordinary differential equations, compared graphics with the analytic solution and stability regions was drawn for different values of the Theta. In addition, a new method namely fractional Theta method, which is used for solutions of fractional differential equations and derived with the help of fractional linear multi-step methods was introduced.

Keywords: Fractional differential equations, Fractional linear multi-step methods, Fractional theta methods.

2016, 74 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında desteğini fazlasıyla hissettiğim, deneyimini, emeğini ve güvenini hiçbir zaman eksik etmeyen, yoğun çalışma temposuna rağmen benden desteğini esirgemeyen, beni hep daha nitelikli üretime yönlendiren, kendisini örnek aldığım ve öğrencisi olmaktan büyük keyif aldığım değerli danışmanım Doç. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bari /İtalya kentindeki Erasmus yüksek lisans programı süresince bana tezimi hazırlamamda madden ve manen yardımcı olan Assoc. Prof. Dr. Roberto Garrappa(Universita Degli Studi di Bari Aldo Moro/ Bari /Italy)'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmayı SDÜ-BAP 4070-YL1-14 numaralı proje kapsamında madden destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkürler ederim.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme ve arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Fatih ER
ISPARTA, 2016

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1.1. Gamma fonksiyonunun grafiği	8
Şekil 3.3.1. $z > 0$ için Mittag-Leffler fonksiyonu örnek grafikleri	12
Şekil 5.3.1. Wl Bölgesi.....	49
Şekil 5.3.2. Wr Bölgesi.....	51
Şekil 5.3.3. $\Delta t = 0.01$ için standart ve standart olmayan Euler metotlarının karşılaştırılması	54
Şekil 5.3.4. $\Delta t = 0.01$ için standart ve standart olmayan trapezoid(yamuk) metotlarının karşılaştırılması.....	54
Şekil 5.3.5. $\Delta t = 0.01$ için standart ve standart olmayan Implicit(kapalı) Theta metotlarının karşılaştırılması.....	55
Şekil 5.3.6. Standart explicit Euler ($\theta = 0$) metodunun kararlılık bölgesi.....	55
Şekil 5.3.7. Standart implicit metodun ($\theta = 0.2$) için kararlılık bölgesi.....	55
Şekil 5.3.8. Standart trapezoid ($\theta = 0.5$) metodun kararlılık bölgesi.....	55
Şekil 5.3.9. Standart implicit Euler ($\theta = 1$) metodunun kararlılık bölgesi	55
Şekil 5.3.10. Standart olmayan explicit Euler ($\theta = 0$) metodunun kararlılık bölgesi.....	56
Şekil 5.3.11. Standart olmayan implicit metodun ($\theta = 0.2$) için kararlılık bölgesi	56
Şekil 5.3.12. Standart olmayan trapezoid ($\theta = 0.5$) metodun kararlılık bölgesi	56
Şekil 5.3.13. Standart olmayan implicit Euler ($\theta = 1$) metodunun kararlılık bölgesi.....	56
Şekil 6.3.1. $\theta = 0.5$ için analitik ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması	64
Şekil 6.3.2. $\theta = 0.5$ için kuadratür hatası.....	65

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 5.3.1. Bazı diferansiyel denklemler için standart olmayan sonlu fark şemaları.....	46
Çizelge 5.3.2. Standart ve standart olmayan Theta metotlarının mutlak E-kararlılığı ve E-kararlılığı	52
Çizelge 5.3.3. Standart ve standart olmayan Theta metotlarının tutarlılık, zero-kararlılık ve yakınsaklık özellikleri	53



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

D^p	p . mertebeden kesirli türev operatörü
$E_{\alpha,\beta}$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
E_α	Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
I^p	p . mertebeden kesirli integral operatörü
ADM	Adomian Ayırıştırma Metodu
DTM	Diferansiyel Dönüşüm Metodu
h	Adım uzunluğu(boyu)
HAM	Homotopi Analiz Metodu
$\mathcal{L}$	Laplace dönüşümü
RK	Runge-Kutta Metodu
RK4	4. mertebeden Runge-Kutta metodu
VIM	Varyasyonel İterasyon Metodu
Γ	Gamma fonksiyonu
Δt	Adım uzunluğu(boyu)
W	Wright fonksiyonu
β	Beta fonksiyonu
v_n^{EM}	(t_n, t_{n-1}) aralığında bir değer
$l_n(h)$	Lokal kesme hatası
C^θ	Theta metodunun kararlılık sabiti
e_n	Global hata

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve integral kavramı, klasik türev ve integral kavramlarından farklı olarak, keyfi mertebeden türev ve integrallerin uygulamalarını ve araştırmalarını kapsayan ve bundan dolayı klasik türev ve integral kavramlarına göre daha kapsamlı olan matematiksel bir kavramdır. Ayrıca kesirli türev ve integrallerin tek bir tanımları yoktur. Bu ayrıcalık ise kesirli türev ve integral problemlerinin çözümlerinin en iyi şekilde elde edilmesini sağlar. Bu kesirli türev ve integral kavramlarından başlıcaları Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve Weyl şeklinde sıralanabilir. Bu tanımların en büyük farkları başlangıç koşullarının fiziksel yorumlarıdır.

Kesirli analiz ilk olarak, klasik türevin Leibnitz tarafından ilk tanımı yapıldıktan sonra, L'Hospital'in 1695 yılında Leibnitz'e tam sayı mertebeden türevin, tam sayı olmayan mertebeli türeve genellenip genellenemeyeceğini sormasıyla başlamıştır. 1730 yılında Euler kesirli türev ve integral hesaplamalarında büyük öneme sahip olan Gamma (Euler-Gamma) fonksiyonunu tanımlamıştır. 1819 yılında da Lacroix, bu Gamma fonksiyonunu kullanarak $y = x^{1/2}$ fonksiyonunun türevini hesaplayarak, kesirli türeve ilk katkı yapan matematikçilerden biri olmuştur. Devam eden süreç içerisinde Laplace ve Fourier'in çalışmalarının da ardından, Abel 1823 yılında kesirli hesaplamaları ilk olarak Tautochrone probleminin

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt$$

şeklindeki integral denkleminin çözümünde kullanmıştır. Abel'in bu çalışmalarından sonra kesirli analiz üzerine yoğunlaşan Liouville, 1832-1837 yılları arasında yayımlanmış olduğu makalelerdeki kesirli türev ve integral tanımları, o dönem matematikçileri tarafından büyük ilgi ve destek görmüştür. Riemann ise 1847 yılında yazmış olduğu ancak vefatından on yıl sonra 1876 yılında yayımlanan makalesinde kesirli integral tanımı vermiştir. Daha sonra ise Riemann tarafından verilen bu tanım, Liouville'nin tanımıyla birleştirilerek yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. 1967-1968 yılları arasında Grünwald ve Letnikov kesirli mertebeden hesaplama için sonlu fark yaklaşımını

kullanarak kesirli türev ve integralin yaklaşık hesaplamaları için yeni bir bakış açısı geliştirmiştir. 1967 yılında da İtalyan matematikçi Caputo, Riemann-Liouville tanımına benzeyen ve fiziksel uygulamalarda daha çok tercih edilen bir kesirli türev tanımı yapmıştır. Gelişimi günümüzde de halen devam eden ve daha birçok matematikçinin de üzerinde çalıştığı kesirli analiz kavramının değişik uygulama alanları vardır. Bunlardan başlıcaları ısı transferi, viskoelastik, polimer fizik, sinyal işleme, elektromanyetik, elektrokimya, akustik şeklinde sıralanabilir.

Teknolojinin de gelişmesiyle birlikte uygulama alanları gün geçtikçe artmaya devam eden ve matematiğin uygulamalı dallarında da büyük bir öneme sahip olan kesirli analiz ve kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri oldukça güç olduğundan bazı sayısal yaklaşım yöntemleri ile bu sorunun üstesinden gelinmeye çalışılmıştır. Tek adımlı ve çok adımlı sayısal yaklaşım yöntemlerinin bu tip problemlere genelleştirmesi olan Kesirli Euler, Kesirli Trapezoid (yamuk), Kesirli Adams, Kesirli Runge-Kutta metotları bu yöntemlere örnek olarak gösterilebilir. Bu tez çalışmasında ise literatürde çok fazla çalışmaya rastlanmayan ve yukarıda bahsi geçen sayısal yaklaşım yöntemlerinin genel bir hali olan Kesirli Theta metodu incelenmiştir. Kesirli mertebeden bazı başlangıç değer problemlerinin çözümü için Kesirli Theta metodunun uygulaması yapılmış ve elde edilen yaklaşık çözümlerin analitik çözümler ile karşılaştırmalı grafikleri verilmiştir. Aynı bakış açısı, standart olmayan sonlu fark ayrıklaştırması ve Theta metodunun birlikte kullanımından elde edilen yeni bir sayısal yaklaşım yöntemi olan standart olmayan Kesirli Theta metodu için geliştirilmiştir.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır: Birinci bölüm giriş bölümü olup, ikinci bölümde ise konunun temelini oluşturan bazı kaynak özetleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ise kesirli analiz kavramında önemli bir yere sahip olan bazı özel fonksiyonların tanım ve özellikleri üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde ise, bazı kesirli türev ve kesirli integral tanımları verilerek, beşinci bölümde ise standart ve standart olmayan Theta metoduna giriş yapılmıştır. Bu çalışmadaki orijinal bölüm olan altıncı bölümde

ise kesirli Theta metodu detaylı olarak incelemiştir. Yedinci ve son bölümde ise sonuç ve tartışmalar bölümüne yer verilmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Fen bilimleri, sosyal bilimler, mühendislik gibi birçok alanda karşılaşılan matematiksel problemler diferansiyel denklemler ile ifade edilir. Çünkü genellikle günlük hayatta karşılaştığımız bu problemlerin değişim süreçleri vardır. Ancak bazı günlük hayat problemlerinin çözümünde adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yetersizliği, kesirli diferansiyel denklemlerin hızlı bir şekilde gelişmesine ve uygulama alanlarının artmasına sebep olmuştur.

17. yüzyılın sonlarından itibaren Leibnitz ve L'Hospital'in karşılıklı mektuplaşmalarıyla gelişimine başlayan kesirli analiz üzerine yapılan çalışmalar oldukça fazladır. Bu tez çalışmasında kullanılan ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili yapılmış olan bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir:

Lubich, 20. yüzyılın sonlarına doğru, ayrıklaştırılmış kesirli analiz ve konvolasyon kuadratür metodu üzerine çalışmalar yapmış ve bu metodun yakınsaklığı ve kararlılığı ile ilgili teoremleri ispatlamıştır(Lubich, 1986; Lubich, 1988).

Van Der Houven ve Sommeijer 1992 yılında kesirli Runge-Kutta (RK) metotlarını kullanarak konveksiyonel yayılım dalga eşitliklerini (convection-diffusion equations) çözmüş ve yayılım miktarının artması durumunda kesirli RK4 metodunun, klasik RK4 metoduna göre daha etkili olduğunu söylemiştir(Van Der Houven vd., 1992).

1997 yılında Diethelm ve Walz, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini extrapolasyon kullanarak çözmüşlerdir(Diethelm vd., 1997). 2002 yılında Diethelm, Ford ve Freed kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliklerini, kararlılık yapılarını incelemişler ve öngörme-düzeltilme yaklaşımı (predictor-corrector approach) kullanarak nümerik çözümleri üzerine çalışmışlardır. Ayrıca kesirli Adams metotları için ayrıntılı hata analizi yapmışlardır(Diethelm, 2002a; Diethelm vd., 2002b). 2003

yılında Diethelm ve Ford, Bagley Torvik denkleminin nümerik çözümü hakkında bir makale yayınlamışlardır(Diethelm vd., 2003). Ayrıca 2004 yılında Diethelm, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine çalışarak, Caputo kesirli türev ile başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerini çözmüştür (Diethelm, 2010).

1999 yılında Podlubny, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler üzerine kapsamlı bir çalışma yaparak 'Fractional Differential Equations' isimli kitabını yayımlamıştır (Podlubny, 1999).

2000 yılında Higham stokastik (olasılıksal, tahmini) Theta metodunun (stochastic Theta method) asimtotik kararlılığı üzerine çalışmış(Higham, 2000), 2004 yılında da Koleden ile beraber sıçramalı yayılım sistemlerinin(jump diffusion systems) yakınsaklık ve kararlılıkları hakkında bir makale yayımlamıştır(Higham vd., 2004).

2005 yılında Weilbeer, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine bir kitap yazmıştır. Bu kitapta kesirli türev ve integral tanımlarını ayrı ayrı incelemiş ve nümerik çözümler için kesirli geri fark metotlarını, Taylor açılımlarını, Adomian metodunu ve Adams metotlarını incelemiştir (Weilbeer, 2005).

2006 yılında Kilbas, Srivastava ve Trujillo, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin teori ve uygulamaları hakkında bir kitap yayınlamışlardır (Kilbas vd., 2006).

2006 yılında Odibat, Caputo kesirli türevleri ve nümerik kesirli integrasyon için trapezoid (yamuk) metodu kullanarak yeni bir algoritma tanımlamıştır(Odibat, 2006). 2007 yılında Shawagfeh ile beraber Caputo kesirli türevini içeren yeni bir geliştirilmiş Taylor formülü yayınlamıştır(Odibat vd., 2007). 2008 yılında da Momani ile birlikte kesirli Euler metoduna bağlı olarak yeni bir algoritma tanımlamış ve bu algoritmanın uygun ve etkili bir metot olduğunu göstermiştir(Odibat, 2008).

2008 yılında Usero, Caputo kesirli türevi için Taylor kuvvet serisinin genelleştirilmesi olarak bir kesirli kuvvet serisi elde etmiş ve bu seriyi kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanmıştır (Usero, 2008).

2006-2009 yıllarında ise, Galeone ve Garrappa kesirli Adams-Moulton metotları, bazı açık (explicit) Adams metotları ve kesirli diferansiyel denklemler için açık metotlar ve bu metotların kararlılıkları üzerinde çalışmışlardır(Galeone vd., 2006; Galeone vd., 2007; Galeone vd., 2008; Galeone vd., 2009). 2010 yılında Garrappa, tahmin-düzeltilme (predictor-corrector) algoritması kullanarak kesirli diferansiyel eşitliklerin lineer kararlılığını (linear stability) incelemiş ve farklı metotların kararlılık bölgeleriyle karşılaştırarak, elde ettiği sonuçları bir makalesinde yayımlamıştır(Garrappa, 2010). 2012 yılında Garrappa sağ taraflı süreksiz kesirli diferansiyel denklemler için kapalı (implicit) Euler metodu üzerinde çalışmıştır(Garrappa, 2012). 2013 yılında da yine kesirli diferansiyel denklemler için yamuk (trapezoidal) metotların teorileri hakkında bir makale yayımlamıştır(Garrappa, 2013). 2013 yılında, kesirli mertebeden bir diferansiyel denklem sisteminin standart olmayan sonlu fark yaklaşımı ile nümerik çözümleri bulunup, kararlılık analizi (Ongun vd., 2013)'te yapılmıştır.

2013 yılında Mazandarani ve Kamyad, Caputo türevli bulanık (fuzzy) kesirli başlangıç-değer problemleri için düzeltilmiş kesirli Euler metodu tanımlamışlardır(Mazandarani vd., 2013). Ayrıca Tong, Feng ve Hengjin, Riemann-Liouville tipi kesirli diferansiyel denklemler için bir nümerik metot elde etmişlerdir(Tong vd., 2013). Mohamed ve Mahmoud Caputo tipi kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için yeni bir algoritma tanımlamışlardır(Mohamed vd., 2013).

Kesirli diferansiyel denklemler hakkında ülkemizde de özellikle 2000'li yıllardan sonra birçok lisansüstü çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları fizik alanında (Karadeniz, 2008; Çavuş, 2006), biyofizik alanında (Özkara, 2013), mühendislik alanında (Mutlu, 2010), matematik alanında ise (Ateş, 2010;

Taşbozan, 2011; Şimşek, 2011; Köse, 2007; Kiriş, 2007; Soytaş, 2006; Arslan, 2013; Khodadadighandhar, 2014; Anapalı, 2013; Karadem, 2016) olarak verilebilir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak oldukça güçtür ve bazı durumlarda analitik çözüm bulmak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle böyle durumlarda analitik çözüm bulmak yerine daha hızlı ve güvenilir sonuçlar veren nümerik çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemler Adomian Ayırıştırma Metodu(ADM), Varyasyonel İterasyon Metodu(VIM), Diferansiyel Dönüşüm Metodu(DTM), Homotopi Analiz Metodu(HAM) ve sonlu fark metotları olarak sıralanabilir.

Ayrıca diferansiyel denklemlerin Theta metodu ile çözümleri üzerine de (Stuart vd., 1991; Barclay vd., 2000; Lubuma vd., 2003; Farago, 2013; Kama, 2009) şeklinde çalışmalar yapılmıştır.

3. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

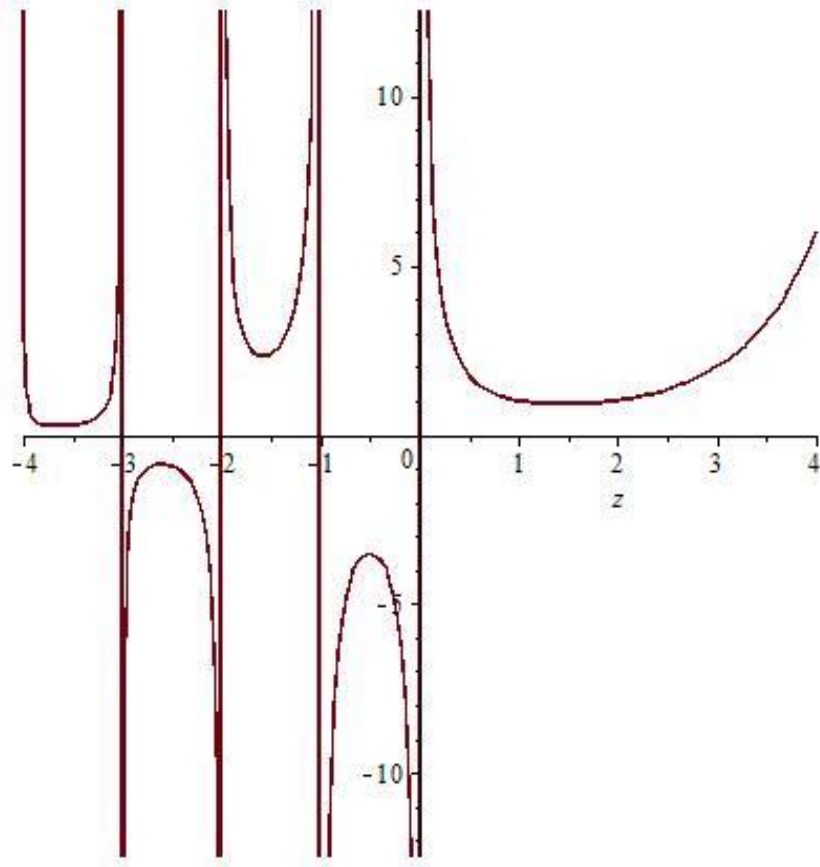
Bu bölümde kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinde ve nümerik çözümlerinde önemli bir yeri olan bazı özel fonksiyonlar ve bu özel fonksiyonların özellikleri verilecektir. Bu fonksiyonlar Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ve Wright fonksiyonlarıdır.

3.1. Gamma Fonksiyonu ve Özellikleri

Kesirli analizin en temel fonksiyonlarından biri olan Gamma fonksiyonu ilk olarak Euler tarafından $Re(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (3.1.1)$$

şeklde tanımlanır ve $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ için yakınsaktır(Podlubny, 1999).



Şekil 3.1.1. Gamma fonksiyonunun grafiği

Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

- 1) $\text{Re}(z) > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonunun tanımı olan (3.1.1) denklemi ile $\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{z-1} dt$ denklemi birbirlerine eşittirler.
- 2) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ olmak üzere Gamma fonksiyonu $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ eşitliğini sağlar.
- 3) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Gamma fonksiyonu $\Gamma(n) = (n-1)!$ eşitliğini sağlar.
- 4) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere Gamma fonksiyonu $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ eşitliğini sağlar.
- 5) $\text{Re}(z) > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)} \quad (3.1.2)$$

limitini sağlar. Bu eşitlik Gamma fonksiyonunun limit gösterimi şeklinde isimlendirilir. Ayrıca Gamma fonksiyonunun limit gösterimi (3.1.2)

$$\frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (1/n))^z}{1 + (z/n)}$$

ile verilen Euler'in sonlu çarpım denkleminde eşittir.

- 6) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

eşitliği ile de tanımlanabilir. Bu eşitliğe Gamma fonksiyonunun Weierstrass tanımı denir. Eşitlikteki γ sabitine Euler sabiti ya da Euler-Mascheroni sabiti denir ve bu sabit yaklaşık olarak

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \approx 0.5772156649$$

şeklinde verilir.

- 7) Gamma fonksiyonu her $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ için analitiktir.
- 8) Gamma fonksiyonu hiçbir zaman sıfıra eşit olmaz.
- 9) Tamsayıdan farklı her z kompleks sayısı için Gamma fonksiyonunun yansıma formülü

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \text{ ve } \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

şeklindedir.

10) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!! \sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}}$$

şeklinde özel bir forma sahiptir. Burada $n!!$ çift katlı faktöriyeldir ve

$$n!! = \begin{cases} n.(n-2) \dots 5.3.1, & n > 0 \text{ tek tamsayı} \\ n.(n-2) \dots 6.4.2, & n > 0 \text{ çift tamsayı} \\ 1, & n = 0, -1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır(Weilbeer, 2005).

3.2. Beta Fonksiyonu ve Özellikleri

Çoğu durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonunun kullanımı daha uygundur ve Beta fonksiyonu $Re(z) > 0$ ve $Re(w) > 0$ olmak üzere

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır(Podlubny, 1999). Beta fonksiyonunun tanımından yola çıkarak

$$\beta(z+1, w+1) = \int_0^1 t^z(1-t)^w dt$$

eşitliği elde edilir.

Özel bir fonksiyon olan Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonun aralarındaki bağlantıyı veren eşitlik

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

şeklindedir. Bu eşitlik Beta fonksiyonunun Laplace dönüşümünden elde edilir ve Beta fonksiyonunun simetri özelliğini sağladığını gösterir. Yani

$$\beta(z, w) = \beta(w, z)$$

simetri özelliği Beta fonksiyonu tarafından sağlanır.

Beta fonksiyonunun diğer bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

- 1) $\beta(z, w) = \beta(z + 1, w) + \beta(z, w + 1)$.
- 2) $\beta(z, w + 1) = \frac{w}{z} \beta(z + 1, w) = \frac{w}{w+z} \beta(z, w)$ (Weilbeer, 2005).

3.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu ve Özellikleri

Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli analizde önemli bir role sahip olan üstel fonksiyonun bir genellemesidir. Üstel fonksiyonların, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin doğal çözümleri olması gibi, Mittag-Leffler fonksiyonları da kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Bununla birlikte, bir diferansiyel denklemin mertebesi 1'e yaklaştıkça, Mittag-Leffler fonksiyonu üstel çözüme yakınsar. Bir ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonları $\alpha > 0, \beta > 0$ olmak üzere

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3.3.1)$$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3.3.2)$$

şeklinde tanımlanırlar (Podlubny, 1999; Kilbas vd., 2002).

Mittag-Leffler fonksiyonu, parametrelerin belli değerleri için bilinen fonksiyonlara indirgenir (Podlubny, 1999). Örneğin;

$$E_{\alpha, \beta}(0) = 1$$

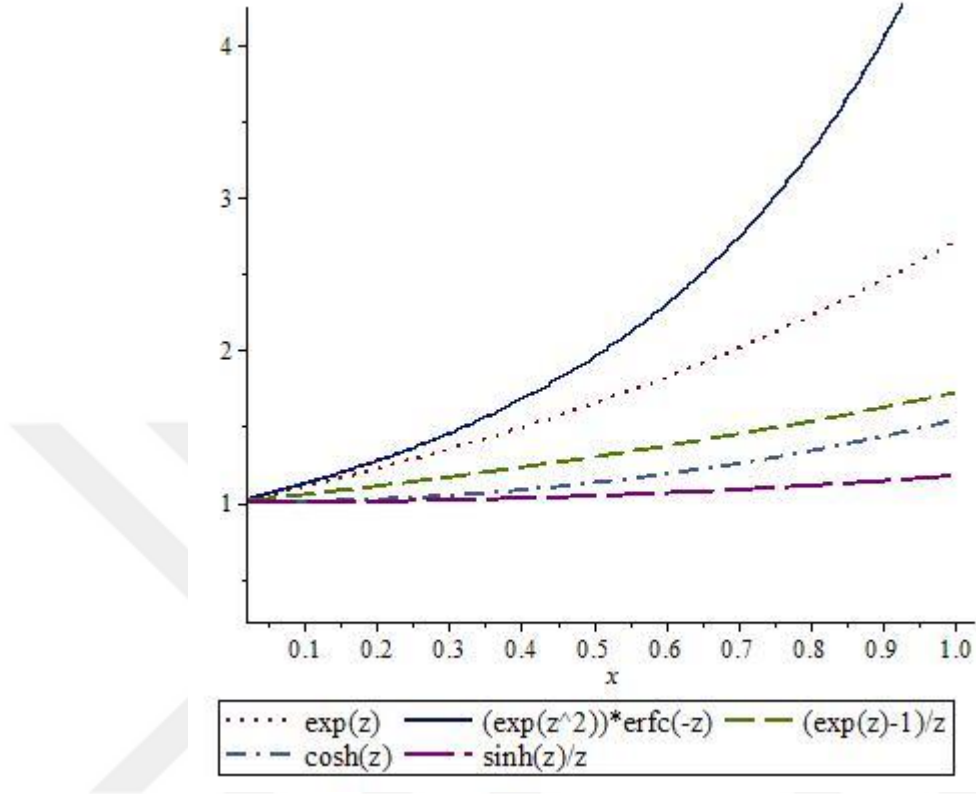
$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1/2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/2 + 1)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k + 1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}$$



Şekil 3.3.1. $z > 0$ için Mittag-Leffler fonksiyonu örnek grafikleri

Mittag-Leffler fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

- 1) $|z| < 1$ olmak üzere Mittag-Leffler fonksiyonu

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{z-1}$$

eşitliğini sağlar.

- 2) $|z| < 1$ olmak üzere $E_{\alpha}(z^{\alpha})$ Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} E_{\alpha}(z^{\alpha}) dt = \frac{1}{z - z^{1-\alpha}}$$

eşitliği ile verilir.

- 3) (3.3.1) denklemi ile verilen bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu her z kompleks sayısı için yakınsaktır (Weilbeer, 2005).

3.4. Wright Fonksiyonu ve Özellikleri

Wright fonksiyonu ya da diğer adıyla Fox-Wright fonksiyonu, Fox ve Wright tarafından 1935 yılında bulunmuştur. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu $E_{\alpha,\beta}(z)$ ile de bağlantısı bulunan Wright fonksiyonunun Agarwal ve Humbert tarafından Laplace dönüşümünde yardımıyla birçok kullanışlı bağlantıları elde edilmiştir. Örneğin, kesirli mertebeden difüzyon dalga denklemlerinde olduğu gibi lineer kısmi kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli rolü vardır. Wright fonksiyonunun en basit tanımı

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}$$

şeklindedir. Ayrıca Wright fonksiyonu $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ için z 'nin tam fonksiyonudur(Kilbas vd., 2006; Podlubny, 1999).

Wright fonksiyonunun integral gösterimi ise, H_{α} Hankel fonksiyonunu temsil etmek üzere,

$$W(z; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\alpha}} \tau^{-\beta} e^{\tau+2\tau^{-\alpha}} d\tau$$

şeklindedir.

Ayrıca Wright fonksiyonu ile Mittag-Leffler fonksiyonu arasındaki bağlantı, Mittag-Leffler fonksiyonunun da yardımıyla, Wright fonksiyonunun Laplace dönüşümü olarak adlandırılır ve bu bağlantı

$$\begin{aligned} L\{W(t; \alpha, \beta); s\} &= L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}; s\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \\ &= s^{-1} E_{\alpha,\beta}(s^{-1}) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir(Podlubny, 1999).

4. KESİRLİ TÜREV VE KESİRLİ İNTEGRAL

4.1. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve Kesirli İntegrali

$y = f(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Türevin limit tanımından yola çıkarak, $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevi

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (4.1.1)$$

şeklinde dir. Aynı tanımı ikinci kez uygularsak

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d^2f}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

şeklinde $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi elde edilir. Benzer şekilde (4.1.1) ve (4.1.2) eşitlikleri kullanılarak $f(x)$ fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevi

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3} \quad (4.1.3)$$

şeklinde elde edilir. Aynı şekilde devam edilerek $f(x)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevinin genel formülü

$$f^n(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(x-rh) \quad (4.1.4)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}$$

şeklinde tanımlanan binom katsayılarıdır.

Ayrıca herhangi bir p tamsayısı için (4.1.4) eşitliği

$$f_h^{(p)}(x) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(x-rh) \quad (4.1.5)$$

şeklini alır ve (4.1.5) denkleminde $p \leq n$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) = \frac{d^p f}{dx^p} \quad (4.1.6)$$

eşitliği sağlanır. Çünkü $\binom{p}{r}$ kombinasyonlarından sonraki bütün binom katsayıları sıfıra eşittir.

O halde p . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$\begin{aligned} {}^G L D_t^p f(x) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(x) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(x - rh) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ${}^G L D$, Grünwald-Letnikov kesirli türev operatörü ve a ve t de integralin başlangıç ve sınır noktalarıdır (Podlubny, 1999).

Ayrıca bazı kaynaklarda Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$\Delta_h^{(p)} f(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(x - rh)$$

olmak üzere

$${}^G L D_t^p f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^{(p)} f(x)}{h^p}$$

olarak da tanımlanır. Burada Δ geri fark operatörüdür (Weilbeer, 2005; Kilbas vd., 2006; Diethelm, 2010).

Şimdi p 'nin negatif olduğu durumlar için

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1) \cdots (p+r-1)}{r!} \quad (4.1.8)$$

olsun. O zaman (4.1.8) denkleminde

$$\begin{pmatrix} -p \\ r \end{pmatrix} = \frac{-p(-p-1) \cdots (-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \quad (4.1.9)$$

eşitliği elde edilir. Buradan (4.1.5) eşitliğinde p yerine $-p$ yazıldığında ise

$$f_h^{(-p)}(x) = h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(x - rh) \quad (4.1.10)$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.10) eşitliğinde eğer n sabit bir sayı ise $h \rightarrow 0$ iken $f_h^{(-p)}(x)$ in limiti sifıra gider. Sıfırdan farklı bir limit değeri elde etmek için $h = \frac{t-a}{n} \rightarrow 0$ iken $n \rightarrow \infty$ şeklinde düşünülmelidir. O zaman $f_h^{(-p)}(x)$ in limit değeri sonlu veya sonsuz olur. Buradan da

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(-p)}(x) = {}^{GL}D_t^{(-p)} f(x) \quad (4.1.11)$$

eşitliği elde edilir ki, bu eşitlik Grünwald-Letnikov kesirli integralinin tanımını verir. Yani,

$${}^{GL}I_t^{(p)} f(x) = {}^{GL}D_t^{(-p)} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(x - rh) \quad (4.1.12)$$

Burada ${}^{GL}I$ Grünwald-Letnikov kesirli integral operatörüdür(Podlubny, 1999).

Ayrıca Grünwald-Letnikov kesirli integrali

$$\binom{p}{r} = (-1)^r \binom{p}{r} = \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)\Gamma(r+1)}$$

olmak üzere

$${}^{GL}I_t^{(p)} f(x) = h^p \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)\Gamma(r+1)} f(x - rh)$$

şeklinde Gamma fonksiyonu ile de tanımlanabilir(Diethelm, 2010).

(4.1.7) denklemi ile tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli türevi ve (4.1.12) denklemi ile tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli integralinin genel bir açılımı, $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$${}^{GL}D_t^p f(x) = \lim_{nh=t-a} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(x - rh)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $p = m$ için m . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevinin, $p = -m$ için m . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integralinin tanımları görülebilir(Podlubny, 1999).

Grünwald-Letnikov kesirli integralindeki limitin varlığının ispatlanabilmesi için aşağıdaki teoreme ihtiyaç duyulur:

Teorem 4.1.1. $(\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ bir dizi ve farzedelim ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1,$$

$$\text{her } k \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0,$$

$$\text{her } k \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} = A,$$

$$\text{her } n \text{ için } \sum_{k=1}^n |a_{n,k}| < K$$

olsun. O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} \beta_k = A$$

dır(Podlubny, 1999).

Grünwald-Letnikov kesirli türevinin bazı önemli özelliklerine değinelim. Öncelikle tamsayı mertebeden türevler ile kesirli mertebeden türevler arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden gösterilmiştir:

Teorem 4.1.2. $\frac{d^n}{dx^n}$ tamsayı mertebeden türevi, ${}^{GL}_a D_t^p$ kesirli mertebeden türevi gösterebilir. $f^k(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ olmak üzere tamsayı mertebeden türev ile kesirli mertebeden türev arasındaki ilişki

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}^{GL}_a D_t^p f(t)) = {}^{GL}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}^{GL}_a D_t^{p+n} f(t)$$

eşitliği ile gösterilir(Podlubny, 1999).

Ayrıca bu teoremden yola çıkılarak tamsayı mertebeden ve kesirli mertebeden türev operatörlerinin değişmeli oldukları söylenebilir.

Aşağıdaki teoremden ise kesirli mertebeden türevlerin kendi aralarındaki ilişki gösterilmiştir:

Teorem 4.1.3. $0 \leq m < p < m+1$, $0 \leq n < q < n+1$, $f^k(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, r-1)$ ve $r = \max(n, m)$ olsun. p ve q kesirli türevlerin mertebeleri olmak üzere, bu türevlerin arasındaki ilişki

$${}^{GL}_a D_t^q ({}^{GL}_a D_t^p f(t)) = {}^{GL}_a D_t^p ({}^{GL}_a D_t^q f(t)) = {}^{GL}_a D_t^{p+q} f(t)$$

eşitliği ile verilir(Podlubny, 1999).

Ayrıca Teorem 4.1.2 de olduğu gibi kesirli türev operatörlerinin değişmeli oldukları söylenebilir.

4.2. Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali

Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı için (4.1.10) denklemindeki p -ye farklı değerler verelim ve bu değerlere karşılık gelen durumları inceleyelim. Bölüm 4.2 nin tamamı (Podlubny, 1999)'dan faydalanılarak yazılmıştır.

$p = 1$ için;

$$f_h^{-1}(x) = \frac{1}{h} \sum_{r=0}^n f(x - rh)$$

$f(x)$ fonksiyonunun sürekli ve $nh = t - a$ olduğunu düşünürsek

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{-1}(x) = {}^G L_a^L D_t^{-1} f(x) = \int_0^{t-a} f(x-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (4.2.1)$$

elde edilir.

$p = 2$ için;

$$\left[\begin{matrix} 2 \\ r \end{matrix} \right] = \frac{2.3 \cdots (2+r-1)}{r!} = r+1$$

olmak üzere

$$f_h^{-2}(x) = h \sum_{r=0}^n (r+1) h f(x - rh)$$

elde edilir. $x + h = y$ yi göstermek üzere

$$f_h^{-2}(x) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(x - rh)$$

olur. $h \rightarrow 0$ iken $y \rightarrow x$ e gideceği için

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{-2}(x) = {}^G L_a^L D_t^{-2} f(x) = \int_0^{t-a} z f(x-z) dx = \int_a^t (x-\tau) f(\tau) d\tau \quad (4.2.2)$$

elde edilir.

$p = 3$ için;

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3.4 \cdots (3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

olmak üzere

$$f_h^{-3}(x) = \frac{h}{2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2)h^2 f(x-rh)$$

elde edilir. $x+h=y$ yi göstermek üzere

$$f_h^{-3}(x) = \frac{h}{2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh)$$

ve bu eşitliğe denk olarak

$$f_h^{-3}(x) = \frac{h}{2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{2} \sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh)$$

eşitliği yazılabilir. $h \rightarrow 0$ iken $y \rightarrow x$ e gideceği için

$${}^G L_a D_t^{-3} f(x) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(x-z) dz = \int_a^t (x-\tau)^2 f(\tau) d\tau \quad (4.2.3)$$

ve

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{h^2}{2} \sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \int_a^t (x-\tau)^2 f(\tau) d\tau = 0$$

elde edilir. Bu şekilde p -ye değerler vererek devam edilip (4.2.1)-(4.2.3) denklemlerinden de yola çıkarak

$$\begin{aligned} {}^G L_a D_t^{-p} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(x-rh) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada (4.2.4) denklemi p . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralinin genel tanımıdır. Yani, ${}^{RL}I$ Riemann-Liouville kesirli integral operatörü olmak üzere, p . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}^{RL}I_t^p = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (4.2.5)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (x - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır.

${}^{RL}D$, Riemann-Liouville kesirli türev operatörü olmak üzere, p . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev tanımı ise

$${}^{RL}D_t^p f(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (x - \tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad (4.2.6)$$

şeklindedir. Burada $m \leq p \leq m + 1$ dir.

Riemann-Liouville kesirli türev ve integralinin bazı önemli özelliklerine değinelim. Her $t > a$ için $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olması durumunda (4.2.5) denklemi ile tanımlanan integral

$${}^{RL}D_t^{-p} \left({}^{RL}D_t^{-q} f(t) \right) = {}^{RL}D_t^{-p-q} f(t) \quad (4.2.7)$$

eşitliğini sağlar. (4.2.7) eşitliğinin sağlandığı ise aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^{-p} \left({}^{RL}D_t^{-q} f(x) \right) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (x - \tau)^{q-1} {}^{RL}D_t^{-p} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t - \tau)^{q-1} d\tau \int_a^\tau (\tau - \xi)^{p-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t - \tau)^{q-1} (\tau - \xi)^{p-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t (t - \xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi \\ &= {}^{RL}D_t^{-p-q} f(t) \end{aligned}$$

Ayrıca (4.2.7) denkleminde p ve q nun yeri değiştirilebilir. Yani (4.2.7) denklemi

$${}^{RL}D_t^{-q} \left({}^{RL}D_t^{-p} f(t) \right) = {}^{RL}D_t^{-p} \left({}^{RL}D_t^{-q} f(t) \right) = {}^{RL}D_t^{-p-q} f(t)$$

şeklinde de yazılabilir.

Riemann-Liouville kesirli türevinin önemli özelliklerinden birisi $p > 0$ ve $t > a$ için

$${}^{RL}_a D_t^p \left({}^{RL}_a D_t^{-p} f(x) \right) = f(x) \quad (4.2.8)$$

olmasıdır. Yani aynı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli integralinin bir sol tersidir. Aslında Riemann-Liouville kesirli türevinin bu özelliği, $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve $p \geq q \geq 0$ olmak üzere daha genel bir durum olan

$${}^{RL}_a D_t^p \left({}^{RL}_a D_t^{-q} f(x) \right) = {}^{RL}_a D_t^{p-q} f(x) \quad (4.2.9)$$

eşitliğinin bir özel halidir.

Riemann-Liouville kesirli türevinin bir diğer önemli özelliği ise, $f(x)$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $k - 1 \leq p \leq k$ için integrallenebilir olmasıdır.

Yani

$${}^{RL}_a D_t^{-p} \left({}^{RL}_a D_t^p f(x) \right) = f(x) - \sum_{j=1}^k \left[{}^{RL}_a D_t^{-p-q} f(x) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \quad (4.2.10)$$

eşitliği sağlanır. Riemann-Liouville kesirli türevinin bu özelliği, $0 \leq k - 1 \leq q < k$ için daha genel bir durum olan

$${}^{RL}_a D_t^{-p} \left({}^{RL}_a D_t^q f(x) \right) = {}^{RL}_a D_t^{q-p} f(x) - \sum_{j=1}^k \left[{}^{RL}_a D_t^{q-j} f(x) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \quad (4.2.11)$$

eşitliğinin bir özel halidir.

Ayrıca Riemann-Liouville kesirli türevinin;

Tamsayı mertebeden türevlerle ilişkisi, $\frac{d^n}{dt^n}$ tamsayı mertebeden türevi göstermek üzere

$$\frac{d^n}{dt^n} \left({}^{RL}_a D_t^p f(x) \right) = {}^{RL}_a D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(x) \right) = {}^{RL}_a D_t^{p+n} f(x)$$

eşitliği ile verilir. Burada $f^k(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ dir.

Kesirli mertebeden türevlerle ilişkisi, $m - 1 \leq p < m$ ve $n - 1 \leq q < n$ olmak üzere

$${}^{RL}_a D_t^q \left({}^{RL}_a D_t^p f(t) \right) = {}^{RL}_a D_t^p \left({}^{RL}_a D_t^q f(t) \right) = {}^{RL}_a D_t^{p+q} f(t)$$

eşitliği ile verilir.

4.3. Caputo Kesirli Türevi

Kesirli analizin en temel yaklaşımlarından biri olan Riemann-Liouville kesirli türev ve integralleri, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde ve dinamik sistem uygulamalarında oldukça önemli bir paya sahiptir. Ancak teknolojinin gelişmesi metotların problemlere uygulanma şeklini değiştirmiştir. Örneğin, Riemann-Liouville kesirli yaklaşımının başlangıç koşulları, Riemann-Liouville kesirli türevlerinin limit değerleri biçiminde tanımlanırlar. Yani $b_1, b_2, \dots, b_n$ ler keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} {}^{RL}D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1 \\ \lim_{t \rightarrow a} {}^{RL}D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2 \\ &\vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} {}^{RL}D_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

Riemann-Liouville kesirli türevinin başlangıç koşulları (4.3.1) denkleminde olduğu gibidir. Ancak uygulamalı problemler, fiziksel olarak yorumlanabilir başlangıç koşullarının kullanımına imkân veren kesirli mertebeden türev tanımlarını gerektirir. Bu açıdan bakıldığında, (4.3.1) denkleminde olduğu gibi limit değerlerini içeren başlangıç-değer problemleri Riemann-Liouville kesirli yaklaşımıyla çözülebilir, fakat bu şekildeki başlangıç koşullarının (4.3.1) fiziksel olarak yorumu mevcut olmadığı için pratikte kullanışsızdırlar(Podlubny, 1999).

Teknolojinin gelişmesiyle Riemann-Liouville kesirli yaklaşımında oluşan bu eksikliğin giderilmesi için M. Caputo 1967 de

$${}_a^C D_t^p f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (x-t)^{n-p-1} f^{(n)}(s) ds\tag{4.3.2}$$

şeklindeki Caputo kesirli türevini tanımlamıştır. Burada $n-1 < p < n$ dir(Podlubny, 1999; Caputo, 2013).

Doğal koşullar altında, $p \rightarrow n$ iken $f(x)$ fonksiyonunun p . mertebeden Caputo kesirli türevi, $f(x)$ fonksiyonunun n . mertebeden tamsayı mertebeli türevine eşittir. Bunu göstermek için varsayalım ki $0 \leq n - 1 < p < n$ ve $f(x)$ fonksiyonu her $T > a$ için $[a, T]$ kapalı aralığında $(n + 1)$ defa sürekli türeve sahip olsun. O zaman $p \rightarrow n$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow n} {}^C D_t^p f(x) &= \lim_{p \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(p)(t-a)^{(n-p)}}{\Gamma(n-p+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(n-p+1)} \int_a^t (x-\tau)^{(n-p)} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Buradan açıktır ki, Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirli yaklaşımlarında olduğu gibi, Caputo kesirli yaklaşımının da tamsayı mertebeden türevlerle ilişkisi vardır.

Caputo kesirli türevinin en temel avantajı, Caputo türevli kesirli diferansiyel denklemlerin başlangıç koşullarının, tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerin başlangıç koşullarıyla aynı formda olmasıdır.

Caputo kesirli yaklaşımı ve Riemann-Liouville kesirli yaklaşımı arasındaki farklardan birisi sabitin türevidir. Caputo kesirli yaklaşımında herhangi bir sabitin türevi sıfırdır. Ancak Riemann-Liouville kesirli yaklaşımında sabitin türevi, C herhangi bir sabit olmak üzere

$${}^{RL} D_t^p C = \frac{C t^{-p}}{\Gamma(1-p)}$$

şeklindedir.

Caputo kesirli yaklaşımı ve Riemann-Liouville kesirli yaklaşımı arasındaki farklardan birisi de tamsayı ve kesirli mertebeden türevlerin sıralanışıdır. Bu iki

kesirli yaklaşım için tamsayı ve kesirli mertebeden türevlerin sıralanışı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$${}_a^C D_t^p ({}_a^C D_t^m f(x)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(x) \quad (4.3.3)$$

$${}_a^{RL} D_t^m ({}_a^{RL} D_t^p f(x)) = {}_a^{RL} D_t^{p+m} f(x) \quad (4.3.4)$$

Bu iki denklemde de $m = 0, 1, 2, \dots$ ve $n - 1 < p < n$ dir. (4.3.3) ve (4.3.4) denklemlerindeki türev operatörlerinin yer değiştirmesi ancak aşağıdaki koşullar altında gerçekleşir:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^m ({}_a^C D_t^p f(x)) &= {}_a^C D_t^p ({}_a^C D_t^m f(x)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(x) \\ f^{(s)}(0) &= 0, s = n, n + 1, \dots, m \text{ ve } m = 0, 1, 2, n - 1 < p < n \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} {}_a^{RL} D_t^m ({}_a^{RL} D_t^p f(x)) &= {}_a^{RL} D_t^p ({}_a^{RL} D_t^m f(x)) = {}_a^{RL} D_t^{p+m} f(x) \\ f^{(s)}(0) &= 0, s = 0, 1, 2, \dots, m \text{ ve } m = 0, 1, 2, n - 1 < p < n \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

(4.3.5) ve (4.3.6) denklemlerinden şu açıkça farkedilebilir ki, Riemann-Liouville kesirli yaklaşımının aksine, $s = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ olması durumunda Caputo yaklaşımındaki $f^{(s)}(0)$ lar için herhangi bir kısıtlama yoktur (Podlubny, 1999).

4.4. Kesirli Türevler Arasındaki İlişki

Aşağıdaki teoremden verilen önemli sonuç, Grünwald-Letnikov kesirli türeviyle Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri arasındaki ilişki hakkında öngörü sahibi olmamızı sağlayacaktır:

Teorem 4.4.1. $p \geq 0, n - 1 < p < n$ ve $f \in C^n[a, b]$ olsun. O zaman

$${}_a^{GL} D_t^p f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k+1-p)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (x-\tau)^{n-1-p} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (4.4.1)$$

eşitliği sağlanır (Weilbeer, 2005).

İspat 4.4.1. Öncelikle şunu belirtmeliyiz ki binom katsayılarının bilinen bir özelliği olan

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad k, n \in \mathbb{N} \quad (4.4.2)$$

eşitliğini $p \in \mathbb{R}$ için genel binom katsayılarına aktaralım. Bu özdeşlik

$$\binom{p}{k} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(-p)\Gamma(k+1)}$$

özdeşliği kullanılarak ispatlanabilir.

(4.1.1) denkleminin sağ tarafını limitsiz bir şekilde $f_h^p(x)$ şeklinde tanımlarsak

$$\begin{aligned} f_h^p(x) &= \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p}{k} f(x - kh) \\ &= \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p-1}{k} f(x - kh) + \frac{1}{h^p} \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{p-1}{k-1} f(x - kh) \\ &= \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p-1}{k} f(x - kh) \\ &\quad + \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} \binom{p-1}{k} f(x - (k+1)h) \\ &= \frac{1}{h^p} (-1)^m \binom{p-1}{m} f(a) \\ &\quad + \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{p-1}{k} (f(x - kh) - f(x - (k+1)h)) \end{aligned}$$

olur.

$\Delta f(x - kh) = f(x - kh) - f(x - (k+1)h)$, $(x - kh)$ noktasındaki birinci geri fark formülü ve $\nabla f(a) = f(a + h) - f(a)$, a noktasındaki birinci ileri fark formülünü gösterebilir. Ek olarak yüksek mertebeden geri ve ileri fark formülleri için sırasıyla Δ^k ve ∇^k notasyonları kullanılacak ve $\Delta^0 f(x) = 0 = \nabla^0 f(x)$ olarak kabul edilecektir. (4.4.2) özelliğini tekrar uygularsak

$$\begin{aligned} f_h^p(x) &= \frac{1}{h^p} (-1)^m \binom{p-1}{m} \nabla^0 f(a) + \frac{1}{h^p} (-1)^{m-1} \binom{p-2}{m-1} \nabla f(a) \\ &\quad + \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k \binom{p-2}{k} \Delta^2 f(x - kh) \end{aligned}$$

ve aynı metotla n defa uygularsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$f_h^p(x) = \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} \nabla^k f(a) + \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{m-n} (-1)^k \binom{p-n}{k} \Delta^n f(x - kh) \quad (4.4.3)$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplam teriminin k . terimini düşünelim

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} \nabla^k f(a) \\ = \left(\frac{m-k}{mh} \frac{m}{m-k} \right)^{p-k} \frac{1}{h^k} (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} \nabla^k f(a) \\ = \left(\frac{m-k}{b-a} \right)^{p-k} \left(\frac{m}{m-k} \right)^{p-k} (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} \frac{\nabla^k f(a)}{h^k} \end{aligned}$$

ve $h \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ iken yukarıdaki eşitliğin limitini alırsak

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} \nabla^k f(a) \\ = (b-a)^{-p+k} \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} (m-k)^{p-k} \\ \times \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m-k} \right)^{p-k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla^k f(a)}{h^k} \end{aligned}$$

elde edilir ve yukarıdaki eşitlikte verilen limitler mevcuttur. Yukarıdaki limitin varlığı için şu belirtilmelidir ki

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} (m-k)^{p-k} \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2) \cdots (-p+m)}{(m-k)^{-p+k}(m-k)!} = \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m-k} \right)^{p-k} = 1$$

ve sonuç olarak

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla^k f(a)}{h^k} = f^{(k)}(a)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.4.3) denkleminin ilk toplamının k . teriminin limiti aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{m-k} \binom{p-k-1}{m-k} \nabla^k f(a) = \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \quad (4.4.4)$$

(4.4.3) denklemindeki ilk toplamın k . terimi için özel durum olarak kurulmuş olan tüm toplamın limitini kolaylıkla ifade edebiliriz. (4.4.3) denklemindeki ikinci toplamın limitini hesaplamak için:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{m-n} (-1)^k \binom{p-n}{k} \Delta^n f(x-kh) \\ = \frac{1}{\Gamma(-p+n)} \sum_{k=0}^{m-n} (-1)^k \Gamma(-p+n) \binom{p-n}{k} k^{-n+1+p} \\ \times h(kh)^{n-1-p} \frac{\Delta^n f(x-kh)}{h^n} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

ve

$$\begin{aligned} b_k &= (-1)^k \Gamma(-p+n) \binom{p-n}{k} k^{-n+1+p}, \\ a_{m,k} &= h(kh)^{n-1-p} \frac{\Delta^n f(x-kh)}{h^n}, h = \frac{b-a}{m} \end{aligned}$$

olsun. Teorem 4.1.1 i uygulamak için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b_k = (-1)^k \Gamma(-p+n) \binom{p-n}{k} k^{-n+1+p}$$

ve eğer $n-1-p > -1$ ise,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-n} a_{m,k} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ mh=b-a}} \sum_{k=0}^{m-n} h(kh)^{n-1-p} \frac{\Delta^n f(x-kh)}{h^n} \\ &= \int_a^t (x-\tau)^{n-1-p} f^{(n)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

dir. Teorem (4.1.1)'in uygulanmasından sonra, (4.4.3) denkleminin ikinci toplamının limiti aşağıdaki gibi olur:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{m-n} (-1)^k \binom{p-n}{k} \Delta^n f(x-kh) = \frac{1}{\Gamma(-p+n)} \int_a^t (x-\tau)^{n-1-p} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

Son olarak elde edilen sonuçlar birleştirilirse

$${}^G_a D_t^p f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k+1-p)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (x-\tau)^{n-1-p} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.4.2. $p > 0$ ve $n-1 < p < n$ olsun. Riemann-Liouville kesirli türevi ${}^{RL}_a D_t^p f(x)$ var ve f fonksiyonu a da $(n+1)$ defa türeve sahip olsun. O zaman hemen hemen her yerde

$${}_a^C D_t^p f = {}^{RL}_a D_t^p [f - T_{n-1}[f; a]]$$

eşitliği sağlanır. Burada $T_{n-1}[f; a]$, f fonksiyonunun a noktası civarında $(n-1)$. mertebeden Taylor polinomudur ve $f \in C^n[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ olmak üzere

$$T_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} D^k f(x_0)$$

şeklinde tanımlanır(Weilbeer, 2005).

İspat 4.4.2. Bu ispat Weilbeer'in kitabından ayrıntılı olarak incelenebilir.

Lemma 4.4.1. $p \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ ve $n > p$ olsun. O zaman Riemann-Liouville kesirli türev ve integral operatörleri

$$D_a^p = D^n I_a^{n-p}$$

eşitliğini sağlar(Weilbeer, 2005).

Lemma 4.4.1 ve Riemann-Liouville kesirli türev tanımından yola çıkarak

$$\begin{aligned} {}^{RL}_a D_t^p [f - T_{n-1}[f; a]](x) &= {}^{RL}_a D_t^n {}^{RL}_a I_t^{n-p} [f - T_{n-1}[f; a]](x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^t \frac{(x-\tau)^{n-p-1}}{\Gamma(n-p)} (f(\tau) - T_{n-1}[f; a](\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğe kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_a^t \frac{1}{\Gamma(n-p)} (f(\tau) - T_{n-1}[f; a](\tau))(x - \tau)^{n-p-1} d\tau \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n-p+1)} [(f(\tau) - T_{n-1}[f; a](\tau))(x - \tau)^{n-p}]_{\tau=a}^{\tau=t} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-p+1)} \int_a^t (Df(\tau) - DT_{n-1}[f; a](\tau))(x - \tau)^{n-p} d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada integralin dışındaki terim sıfır olduğundan

$${}^{RL}I_t^{n-p}[f - T_{n-1}[f; a]] = {}^{RL}I_t^{n-p+1} {}^{RL}D_t^n[f - T_{n-1}[f; a]]$$

olur. Varsayımlarımız altında bu işlemi n defa tekrar edersek şu sonuca ulaşırız:

$${}^{RL}I_t^{n-p}[f - T_{n-1}[f; a]] = {}^{RL}I_t^{2n-p} {}^{RL}D_t^n[f - T_{n-1}[f; a]]$$

$$= {}^{RL}I_t^n {}^{RL}I_t^{n-p} {}^{RL}D_t^n[f - T_{n-1}[f; a]]$$

Burada $T_{n-1}[f; a]$ $(n-1)$. Dereceden bir polinom olduğu için ${}^{RL}D_t^n T_{n-1}[f; a] = 0$ dir. Bu nedenle

$${}^{RL}I_t^{n-p}[f - T_{n-1}[f; a]] = {}^{RL}I_t^n {}^{RL}I_t^{n-p} {}^{RL}D_t^n f$$

olur. Son eşitlik (4.4.6) denklemiyle birleştirilirse

$${}^{RL}D_t^p[f - T_{n-1}[f; a]](x) = {}^{RL}I_t^n {}^{RL}I_t^{n-p} {}^{RL}D_t^n f(x) = {}^{RL}I_t^{n-p} {}^{RL}D_t^n f(x) = {}^C D_t^p f$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.1. $p \geq 0, n-1 < p < n$ ve $f \in C^n[a, b]$ olsun. O zaman

$${}^G D_t^p f(x) = T_{n-1}[f; a](x) + {}^C D_t^p f(x) = {}^{RL}D_t^p f(x)$$

ilişkisi sağlanır(Weilbeer, 2005).

İspat: ${}^G D_t^p f(x) = T_{n-1}[f; a](x) + {}^C D_t^p f(x)$ durumu Teorem 4.4.1 de, $T_{n-1}[f; a](x) + {}^C D_t^p f(x) = {}^{RL}D_t^p f(x)$ durumu da Teorem 4.4.2 de ispatlanmıştır.

4.5. Kesirli Türevlerin Özellikleri

4.5.1. Lineerlik Özelliği

Kesirli mertebeden türevlerin lineerliği, tamsayı mertebeden türevlerin lineerliğine benzer şekilde

$$D^p(\gamma f(t) + \mu g(t)) = \gamma D^p f(t) + \mu D^p g(t) \quad (4.5.1.1)$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada D^p herhangi bir kesirli türev operatörüdür.

Şimdi (4.5.1.1) lineerlik özelliğini Grünwald-Letnikov kesirli türevi için ispat edelim: Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımından yola çıkarak

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_t^p(\gamma f(t) + \mu g(t)) &= \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} (\gamma f(t-rh) + \mu g(t-rh)) \\ &= \gamma \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\ &\quad + \mu \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} g(t-rh) \\ &= \gamma {}^{GL}D_t^p f(t) + \mu {}^{GL}D_t^p g(t) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca lineerlik özelliği p . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi için $(k-1 < p < k)$ aşağıdaki gibi ispat edilir: Riemann-Liouville kesirli türev tanımından yola çıkarak

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^p(\gamma f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} (\gamma f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\mu}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} \mu g(\tau) d\tau$$

$$= \gamma_a^{RL} D_t^p f(t) + \mu_a^{RL} D_t^p g(t)$$

elde edilir(Podlubny, 1999).

4.5.2. Kesirli Türevlerin Leibniz Kuralı

Kesirli türevlerin Leibniz kuralı; $f(t)$, $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ve $\varphi(t)$, $[a, t]$ kapalı aralığında $(n+1)$ defa türevlenebilir olsun. O zaman $\varphi(t)f(t)$ çarpımının kesirli türevi

$${}_a^L D_t^p (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a^L D_t^{p-k} f(t) - R_n^p(t) \quad (4.5.2.1)$$

Ve $n \geq p+1$ olmak üzere

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi) d\xi \quad (4.5.2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada (4.5.2.1) denklemi sonsuz bir serinin kısmi toplamlar serisi olarak düşünülebilir ve $R_n^p(t)$ de bu serinin kalanını verir. (4.5.2.2) denkleminde $\xi = \tau + \psi(t-\tau)$ ve $\tau = a + \mu(t-a)$ dönüşümleri yapılp, elde edilen ifadenin $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0$$

elde edilir ve buradan Leibniz kuralı için

$${}_a^L D_t^p (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a^L D_t^{p-k} f(t) \quad (4.5.2.3)$$

eşitliği elde edilir(Podlubny, 1999).

4.5.3. Bileşke Fonksiyonun Kesirli Türevi

Tanım 4.5.3.1. $g(x)$, x^0 noktasının komşuluğunda tanımlanan ve x^0 noktasında n . mertebeye kadar türeve sahip bir fonksiyon ve $f(y)$, $y^0 = g(x^0)$ noktasının komşuluğunda tanımlanan ve y^0 noktasında n . mertebeye kadar türeve sahip bir fonksiyon olsun. O zaman x^0 noktasında $h(x) = f[g(x)]$ bileşke fonksiyonunun n . mertebeden türevi

$$h_n = \sum_{k=1}^n f_k \sum_{p(n,k)} n! \prod \frac{g_i^{\lambda_i}}{(\lambda_i)! (i!)^{\lambda_i}}$$

formülü ile elde edilir. Bu formüle Faa di Bruno formülü denir. Burada

$$h_n = \frac{d^n}{dx^n} h(x^0), \quad f_k = \frac{d^k}{dy^k} f(y^0), \quad g_i = \frac{d^i}{dx^i} g(x^0)$$

ve $\mathcal{N}_0$ pozitif tamsayıların kümesi olmak üzere

$$p(n, k) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_i \in \mathcal{N}_0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = k, \sum_{i=1}^n i\lambda_i = n \right\}$$

dir (Constantine vd., 1996).

$\varphi(t)$, $\varphi(t) = F(h(t))$ şeklinde verilen bir bileşke fonksiyon olsun. Burada $h(t)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, Faa di Bruno formülünün de yardımıyla, $\varphi(t)$ fonksiyonunun p . mertebeden türevi

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p F(h(t)) &= \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \varphi(t) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{p}{k} \frac{k! (t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \sum_{m=1}^k F^{(m)}(h(t)) \sum_{r=1}^k \prod_{r=1}^k \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(t)}{r!} \right)^{a_r} \end{aligned}$$

eşitliği ile verilir. Burada $\sum, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ nın negatif olmayan tamsayı değerlerinin kombinasyonları olmak üzere

$$\sum_{r=1}^k r a_r = k$$

ve

$$\sum_r a_r = m$$

dir (Podlubny, 1999).

5. THETA METODU

5.1. Giriş

Theta metoduna başlamadan önce, metot anlatılırken kullanılacak olan bazı terimlerin tanımları aşağıda verilmiştir.

Öncelikle

$$Dy = \frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(0) = y_0 \quad (5.1.1)$$

eşitliği ile birinci mertebeden başlangıç-değer problemini ele alalım. Burada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $y_0 \in \mathbb{R}$ 'dir.

Tanım 5.1.1. t bağımsız ve $y(t)$ bağımlı değişken olmak üzere $y(t)$ ve t 'nin değişik mertebeden ileri farkını bulunduran denklemlere fark denklemleri denir(Oturanç vd., 2012).

Tanım 5.1.2. $[0, \infty)$ aralığında $t_n = n\Delta t, n = 0, 1, 2, \dots$ ve (5.1.1) denkleminin t_n noktasındaki $y(t_n)$ çözümünün bir yaklaşık çözümü y_n olmak üzere

$$\varphi(\Delta t, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0, k \in N \quad (5.1.2)$$

fark denkleminin uygun başlangıç koşulları altındaki çözümü $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dir(Kama, 2009).

(5.1.2) fark denkleminin t_{n+k} zamanındaki y_{n+k} yaklaşımını bulmak için $y_{n+j}, j = 0, 1, 2, \dots, k$ iterasyonlarının yapılması gerekir. Eğer $k = 1$ alınırsa nümerik metoda tek adımlı metot, $k > 1$ alınırsa çok adımlı veya k –adımlı metot denir. Eğer (5.1.2) denklemindeki $y_{n+k}, y_{n+k} = \varphi(\Delta t, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}) = 0$ şeklinde ise metoda açık(explicit) form, diğer durumlarda kapalı(implicit) form denir(Kama, 2009).

Tanım 5.1.3. Her $t^* \in (0, \infty), t^* = t_n = n\Delta t$ sabit noktası için

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|y_n - y(t^*)\| = 0 \quad (5.1.3)$$

ise (5.1.2) fark denklemi yakınsaktır denir(Kama, 2009).

Bundan sonra

$$D_{\Delta t} y_n = F_{\Delta t}(f; y_n) \quad (5.1.4)$$

gösterimi (5.1.2) fark denklemi yerine kullanılacaktır.

Tanım 5.1.4. $k \geq 1, \alpha_k = 1$ ve $|\alpha_k| + |\beta_k| > 0$ olmak üzere

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1.5)$$

şeklinde tanımlı metoda Lineer çok adımlı(multi-step yada k-step) metot denir(Suli, 2010; Lambert, 1991).

Lineer çok adımlı metotların birinci ve ikinci karakteristik polinomları sırasıyla

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^j, \sigma(z) = \sum_{j=0}^k \beta_j z^j \quad (5.1.6)$$

denklemleri ile tanımlanır.

Tanım 5.1.5. $\pi(r, \lambda \Delta t)$ kararlılık polinomunu göstermek üzere

$$\pi(r, \lambda \Delta t) = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \Delta t \beta_j) r^j \quad (5.1.7)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca lineer çok adımlı metotlar, birinci ve ikinci karakteristik polinomlar kullanılarak

$$\pi(r, h) = \rho(r) - h\sigma(r), h = \lambda \Delta t \quad (5.1.8)$$

şeklinde de gösterilebilir(Kama, 2009).

Tanım 5.1.6. Eğer (5.1.7) kararlılık polinomunun bütün kökleri birim çember içinde kalıyorsa, (5.1.5) nümerik metoduna mutlak kararlı(absolute stable ya da A-stable) denir. Aksi taktirde (5.1.5) nümerik metodu mutlak kararlı değil (absolute unstable) şeklinde adlandırılır. Ayrıca eğer R_A bölgesindeki her $\lambda \Delta t$ için (5.1.5) nümerik metodu A-stable ise, kompleks düzlemin alt kümesi olan R_A bölgesine mutlak kararlılık bölgesi (region of A-stability) denir(Kama, 2009; Lambert, 1991).

Tanım 5.1.7. (5.1.2) denklemindeki birinci ve ikinci karakteristik polinomlar $\rho(1) = 0, \sigma(1) = \rho'(1) \neq 0$ (5.1.9)

şartlarını sağlıyorsa, (5.1.5) nümerik metoduna tutarlı (consistent) denir. Ayrıca birinci karakteristik polinom olan $\rho(z)$ nin köklerinin mutlak değerleri bir ve birden küçükse (root condition), (5.1.5) nümerik metodu zero kararlı (zero-stable) denir(Kama, 2009; Lambert, 1991).

5.2. Standart Theta Metodu

Tanım 5.2.1. $\theta \in [0,1]$ bir parametre olmak üzere tek adımlı Theta metodu

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(\theta y_{n+1} + (1 - \theta)y_n) \quad (5.2.1)$$

ve iki adımlı Theta metodu

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \theta f(y_{n+1}) + (1 - \theta)f(y_n) \quad (5.2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu eşitliklerde θ 'nın bazı özel değerleri için klasik nümerik metotlar elde edilir. Örneğin;

$$\theta = 0 \rightarrow y_{n+1} - y_n = \Delta t f(y_n) \quad (5.2.3)$$

Explicit(açık) Euler Metodu,

$$\theta = \frac{1}{2} \rightarrow y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2} \Delta t [f(y_{n+1}) + f(y_n)] \quad (5.2.4)$$

Trapezoid(yamuk) Metodu,

$$\theta = 1 \rightarrow y_{n+1} - y_n = \Delta t f(y_{n+1}) \quad (5.2.5)$$

Implicit(kapalı) Euler Metotları elde edilir (Kama, 2009).

Not 5.2.1. Standart Theta Metodu $\theta = 0$ için explicit(açık), $\theta \neq 0$ için implicit(kapalı) bir metottur.

Aşağıdaki teorem ile $\theta \neq 0$ ve $\theta \neq 1$ olması durumunda tek adımlı ve iki adımlı Theta metotları arasındaki ilişki verilmiştir.

Teorem 5.2.1. $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (5.2.1) denklemi ile verilen tek adımlı Theta metodunu sağlasın. O zaman

$$y_n = (1 - \theta)v_n + \theta v_{n+1} \quad (5.2.6)$$

eşitliğini sağlayan $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de (5.2.2) denklemi ile verilen iki adımlı Theta metodunu sağlar.

Tam tersine, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi iki adımlı Theta metodunu sağlasın. O zaman

$$v_n = y_n - \Delta t \theta f(y_n) \quad (5.2.7)$$

eşitliğini sağlayan $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de tek adımlı Theta metodunu sağlar (Kama, 2009).

İspat 5.2.1. Tek adımlı ve iki adımlı Theta metotlarını aşağıdaki gibi yeniden yazalım.

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t f[\theta v_{n+1} + (1 - \theta)v_n] \quad (5.2.8)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \theta f(y_{n+1}) + \Delta t (1 - \theta) f(y_n) \quad (5.2.9)$$

$\theta \in [0,1]$ olsun. $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin iki adımlı Theta metodunu sağladığını farzedelim. O zaman (5.2.7) ile verilen $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$v_{n+1} = y_{n+1} - \Delta t \theta f(y_{n+1}) \quad (5.2.10)$$

eşitliğini sağlar. (5.2.9) denklemindeki terimler yeniden düzenlenip, (5.2.10) denklemi de kullanılarak

$$v_{n+1} = y_n + \Delta t (1 - \theta) f(y_n) = y_n + \Delta t f(y_n) - \Delta t \theta f(y_n) \quad (5.2.11)$$

eşitliği elde edilir. (5.2.10) denkleminin sağ tarafını (5.2.11) denkleminde yerine yazılması ile

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t f(y_n) \quad (5.2.12)$$

denklemi elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $(1 - \theta)$ ile çarpılıp, (5.2.11) denklemi de kullanılarak

$$\Delta t (1 - \theta) f(y_n) = v_{n+1} - y_n \quad (5.2.13)$$

eşitliği elde edilir. (5.2.13) denkleminde küçük değişiklikler yapılarak (5.2.6) eşitliği elde edilir.

(5.2.13) denklemindeki y_n ile v_n yer değiştirilerek görülür ki $n \geq 0$ için $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (5.2.8) denklemiyle gösterilen tek adımlı Theta metodunu sağlar.

Tam tersine, eğer $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi (5.2.8) tek adımlı Theta metodunu sağlarsa, (5.2.6) denklemindeki $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin (5.2.9) denklemi ile verilen iki adımlı Theta metodunu sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten de (5.2.10) denkleminde

$$y_n = \theta v_{n+1} + (1 - \theta)v_n = v_n + \theta(v_{n+1} - v_n) \quad (5.2.14)$$

eşitliği elde edilir. (5.2.8) denkleminde

$$v_{n+1} - v_n = \Delta t f[\theta v_{n+1} + (1 - \theta)v_n] \quad (5.2.15)$$

eşitliği elde edilir. (5.2.14) ve (5.2.15) denklemleri kullanılarak

$$v_n = y_n - \Delta t \theta f(y_n) \quad (5.2.16)$$

eşitliği elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

f yeterince düzgün bir fonksiyon olsun. O zaman Standart Theta Metodu için lokal kesme hatası (local truncation error) $l_n(h)$,

$$l_n(h) = y(t_n) - y(t_{n-1}) - h\theta f(t_n, y(t_n)) - h(1 - \theta)f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) \quad (5.2.17)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $y(t)$, (5.1.1) başlangıç değer probleminin çözümü ve h de adım uzunluğudur. Bu nedenle (5.1.1) başlangıç değer problemi, (5.2.17) denkleminde yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$l_n(h) = y(t_n) - y(t_{n-1}) - h\theta y'(t_n) - h(1 - \theta)y'(t_{n-1}) \quad (5.2.18)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra $y(t_n) = y(t_{n-1} + h)$ ve $y'(t_n) = y'(t_{n-1} + h)$ şeklinde düzenlenip, $t = t_{n-1}$ noktasında Taylor serisine açılırsa

$$l_n(h) = \left(\frac{1}{2} - \theta\right) h^2 y''(t_{n-1}) + \left(\frac{1}{6} - \frac{\theta}{2}\right) h^3 y'''(t_{n-1}) + O(h^4) \quad (5.2.19)$$

eşitliği elde edilir ki, bu eşitlik Standart Theta Metodu için lokal kesme hatasını verir(Farago, 2013).

Bir nümerik metodun tutarlılık mertebesi lokal kesme hatasına göre tanımlanır. Örneğin $l_n(h) = O(h^{p+1})$ ise, o zaman nümerik metot p . mertebeden tutarlıdır denir. Bu şu anlama geliyor ki, Explicit Euler ($\theta = 0$) ve Implicit Euler ($\theta = 1$) metotlarının tutarlılık mertebeleri 1'dir, fakat Trapezoid ($\theta = 1/2$) metodun tutarlılık mertebesi ise 2'dir(Farago, 2013).

Şimdi Explicit Euler Metodunun $(\theta = 0)$ yakınsaklığını, kararlılık sabitini ve global hatasını (e_n) tanımlayalım(Farago, 2013).

(5.1.1) başlangıç değeri probleminin $\theta = 0$ için bazı $Nh = t^* \in (0, T)$ sabit noktalarındaki nümerik çözümünün şemasını

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}), n = 1, 2, \dots, N \\ y_0 &= u_0 \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 5.2.2. $a \geq 1, b \geq 0$ ve s_n sayıları

$$|s_n| \leq a|s_{n-1}| + b, n = 1, 2, \dots \quad (5.2.21)$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman

$$|s_n| \leq a^n \left(|s_0| + n \frac{b}{a} \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2.22)$$

tahmini doğrudur(Farago, 2013).

İspat 5.2.2. Tümevarım metodu kullanılarak teoremin doğruluğu kolaylıkla ispatlanabilir. Gerçekten, $n = 0$ için (5.2.22) denklemi doğrudur. Şimdi (5.2.22) denkleminin $n - 1$ için doğru olduğu varsayımı altında, (5.2.21) denkleminde

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq a \left[a^{n-1} \left(|s_0| + (n-1) \frac{b}{a} \right) \right] + b \\ &= a^n \left(|s_0| + n \frac{b}{a} \right) - a^{n-1}b + b \leq a^n \left(|s_0| + n \frac{b}{a} \right) \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

elde edilir.

$v_n^{EEM} \in (t_{n-1}, t_n)$ verilen bir değer olmak üzere Explicit Euler Metodunun $t = t_n$ noktasındaki lokal kesme hatası

$$l_n(h) = u(t_n) - u(t_{n-1}) - hu'(t_{n-1}) = \frac{h^2}{2} u''(v_n^{EEM}) \quad (5.2.24)$$

şeklinde yazılabilir. $M_2 = \max_{[0, t^*]} |u''|$ olarak düzenlenirse

$$l_n(h) \leq l(h) = M_2 \frac{h^2}{2} \quad (5.2.25)$$

elde edilir. (5.2.20) denklemiyle tanımlanan Explicit Euler Metodunu ele alalım. (5.2.24) denkleminde dolayı

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + hf(t_{n-1}, u(t_{n-1})) + l_n(h) \quad (5.2.26)$$

elde edilir. $t = t_n$ noktasındaki global hata $e_n = u(t_n) - y_n$ olması dolayısıyla

$$e_n = e_{n-1} + h(f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) - f(t_{n-1}, y_{n-1})) + l_n(h) \quad (5.2.27)$$

denklemini elde edilir. Lipschitz koşulu ve (5.2.25) denklemini kullanarak $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$|e_n| \leq |e_{n-1}| + hL|e_{n-1}| + l(h) = (1 + Lh)|e_{n-1}| + l(h) \quad (5.2.28)$$

elde edilir. Daha sonra $a = 1 + Lh, b = l(h)$ ve $x \geq 0$ için $1 + x \leq e^x$ eşitsizliği kullanılarak, Teorem 5.2.2 den hareketle

$$|e_n| \leq e^{hl^n} \left[|e_0| + \frac{nl(h)}{1 + hL} \right] \leq e^{hl^n} [|e_0| + nl(h)] \quad (5.2.29)$$

$nh = t_n \leq t^*$ olduğundan, $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$e^{hl^n} = e^{Lhn} = e^{Lt_n} \leq e^{Lt^*}, nl(h) = nM_2 \frac{h^2}{2} = \frac{M_2 t_n}{2} h \leq \frac{M_2 t^*}{2} h$$

eşitlikleri sağlanır. $e_0 = 0$ olduğundan ve (5.2.29) denklemini de kullanılarak

$$|e_n| \leq C_{EEM} h \quad (5.2.30)$$

elde edilir. Burada $n = 1, 2, \dots, N$ ve $C_{EEM} = e^{Lt^*} \frac{M_2 t^*}{2}$ dır. (5.2.30) denkleminde $n = N$ yazılarak

$$|e_N| \leq C_{EEM} h \quad (5.2.31)$$

elde edilir ve bu Explicit Euler Metodunun C_{EEM} kararlılık katsayısı ile beraber yakınsak olduğunu ispatlar.

Şimdi de Implicit Euler Metodunun ($\theta = 1$) yakınsaklığını, kararlılık sabitini ve global hatasını tanımlayalım(Farago, 2013).

Implicit Euler Metodunun yakınsak olduğunu göstermenin klasik bir yolu, onun zero-kararlı (zero-stable) olduğunu göstermektir. Ancak Teorem 5.2.2 kullanılarak Implicit Euler Metodunun yakınsaklığının temel bir ispatı verilecektir. Bu amaçla öncelikle Standart Theta Metodunun lokal yaklaşma hatası için düzgün bir kestirim, (5.2.18) denklemini de kullanılarak

$$\begin{aligned} l_n(h) &= u(t_n) - u(t_{n-1}) - (1 - \theta)hu'(t_{n-1}) - \theta u'(t_n) \\ &= \theta(u(t_n) - u(t_{n-1}) - hu'(t_n)) + (1 - \theta)(u(t_n) - u(t_{n-1}) - hu'(t_{n-1})) \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

şeklinde elde edilir. Lagrange kalanı ile Taylor polinomundan

$$u(t_{n-1}) = u(t_n) - hu'(t_n) + \frac{h^2}{2}u''(t_n) - \frac{h^3}{6}u'''(v_n^1) \quad (5.2.33)$$

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) - hu'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2}u''(t_{n-1}) - \frac{h^3}{6}u'''(v_n^2)$$

eşitlikleri bulunur. Buradan $u''(t_n) = u''(t_{n-1}) + hu'''(v_n^3)$, $v_n^i \in (t_{n-1}, t_n)$, $i = 1, 2, 3$ eşitliği (5.2.33) eşitliklerinde yerine yazılıp, (5.2.32) denkleminin yardımıyla

$$l_n(h) = \frac{h^2}{2}(1 - 2\theta)u''(t_{n-1}) + \frac{h^3}{6}[-3\theta u'''(v_n^3) + \theta u'''(v_n^1) + (1 - \theta)u'''(v_n^2)] \quad (5.2.34)$$

elde edilir. $M_3 = \max_{[0, t^*]} |u'''|$ notasyonu kullanılarak

$$|l_n(h)| \leq l(h) = C_2^\theta h^2 + C_3^\theta h^3 \quad (5.2.35)$$

elde edilir. Burada

$$C_2^\theta = \frac{|1 - 2\theta|}{2} M_2, C_3^\theta = \frac{1 + 3\theta}{6} M_3 \quad (5.2.36)$$

şeklinde dir.

Standart Theta Metodunun global hatası e_n , $n = 1, 2, \dots, N$ ve $e_0 = 0$ olmak üzere

$$e_n = e_{n-1} + h\theta[f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, y_n)] + h(1 - \theta)[f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) - f(t_{n-1}, y_{n-1})] + l_n(h) \quad (5.2.37)$$

olur. Bu eşitlik Lipschitz koşuluyla beraber

$$|e_n| \leq |e_{n-1}| + \theta Lh|e_n| + (1 - \theta)Lh|e_{n-1}| + |l_n(h)| \quad (5.2.38)$$

eşitsizliğini gerektirir. (5.2.36) denklemini kullanılarak, (5.2.38) denkleminde

$$a = \frac{1 + (1 - \theta)Lh}{1 - \theta Lh}, b = \frac{l(h)}{1 - \theta Lh} \quad (5.2.39)$$

seçilirse

$$|e_n| \leq a|e_{n-1}| + b, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5.2.40)$$

eşitsizliği

$$0 < h < \frac{1}{\theta L} \quad (5.2.41)$$

değerleri için sağlanır. Burada

$$a = 1 + \frac{Lh}{1 - \theta Lh} \geq 1, b \geq 0 \quad (5.2.42)$$

olur. Teorem 5.2.2, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ve (5.2.41) denklemini sağlayan h lar için, (5.2.40) denklemine uygulandığı zaman

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq a^n \left(|e_0| + n \frac{b}{a} \right) = a^n \left(|e_0| + t_n \frac{l(h)}{h} \frac{1}{1 + (1 - \theta)Lh} \right) \\ &\leq a^n \left(t_n \frac{l(h)}{h} \right) \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

elde edilir.

a^n hakkında bir kestirim yapabilmek için, (5.2.42) denklemine göre

$$a = 1 + \frac{Lh}{1 - \theta Lh} = 1 + \frac{1}{\theta} \frac{\theta Lh}{1 - \theta Lh} \quad (5.2.44)$$

şeklinde yazılabilir. $\varepsilon > 0$ herhangi bir sabit sayı olsun. 0 zaman her $x \in (0, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})$ sayısı için $\frac{x^2}{1-x} < \varepsilon x$ eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle $\frac{x}{1-x} = x + \frac{x^2}{1-x}$ eşitliği için

$$\frac{x}{1-x} \leq (1 + \varepsilon)x, \quad \forall x \in (0, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}) \quad (5.2.45)$$

kestirimi elde edilir. (5.2.45) denklemi, (5.2.44) denkleminin sağ tarafına uygulandığı zaman

$$\begin{aligned} a &< 1 + \frac{1}{\theta} (1 + \varepsilon) \theta Lh = 1 + (1 + \varepsilon)Lh, \forall h \in (0, h_0), h_0 = h_0(\varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)\theta L} \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

denklemi elde edilir. Buradan $s > 0$ için $1 + s < e^s$ kestirimi kullanılarak

$$a^n < e^{L(1+\varepsilon)t_n}, h \in (0, h_0) \quad (5.2.47)$$

sağlanır.

Teorem 5.2.3. $\varepsilon > 0$ herhangi bir sabit sayı ve $h < h_0$ olsun. 0 zaman $\theta \in (0, 1]$ için Standart Theta Metodunun global hatası

$$|e_n| \leq t_n (C_2^\theta h + C_3^\theta h^2) e^{L(1+\varepsilon)t_n}, n = 1, 2, \dots, N \quad (5.2.48)$$

dır(Farago, 2013).

Sonuç 5.2.1. Teorem 5.2.3 ün varsayımları ve notasyonları doğrultusunda, e_N global hata kestirimi

$$|e_n| \leq t^* (C_2^\theta h + C_3^\theta h^2) e^{L(1+\varepsilon)t^*} \quad (5.2.49)$$

sağlanır(Farago, 2013).

Teorem 5.2.4. $\theta \in (0,1]$ için Standart Theta Metodu her $t^* \in (0,T)$ sabit noktasında yakınsaktır. Ayrıca Standart Theta Metodu,

$\theta \neq 0.5$ için tek adımlıdır ve kararlılık sabiti $C_2^\theta t^* e^{Lt^*}$ dır.

$\theta = 0.5$ için iki adımlıdır ve kararlılık sabiti $C_3^\theta t^* e^{Lt^*}$ dır(Farago, 2013).

Teorem 5.2.5. (5.1.1) başlangıç değer problemi için Lipschitz koşulu altında Standart Theta Metodu, $\theta \in [0,1]$, her $t^* \in (0,T)$ sabit noktasında yakınsaktır. Metodun kararlılık sabiti

$$C^\theta = \begin{cases} \frac{1+3\theta}{6} M_3 t^* e^{Lt^*}, & \theta = 0.5 \\ \frac{|1-2\theta|}{2} M_2 t^* e^{Lt^*}, & \theta \neq 0.5 \end{cases} \quad (5.2.50)$$

şeklinde tanımlanır(Farago, 2013).

Standart Theta Metodunun mutlak kararlı (absolute stable ya da A-stable) olduğunu gösteren teorem aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 5.2.6. Tek ve iki adımlı Standart Theta Metotları her $\lambda \Delta t, Re\lambda < 0$ olmak üzere $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ kapalı aralığında koşulsuz olarak mutlak kararlıdır (unconditionally absolute stable). Ancak $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ aralığında ise

$$\Delta t < \frac{2Re\lambda}{(1-2\theta)|\lambda|^2} \quad (5.2.51)$$

olmak koşuluyla mutlak kararlıdır (conditionally absolute stable)(Kama, 2009).

5.3. Standart Olmayan Theta Metodu

Runge-Kutta ve lineer çok adımlı metotlar bazı kısıtlamalara sahip olmakla birlikte, yeterince küçük Δt adım boyu kullanımı ile özellikle ayrık dinamik sistemler için kabul edilebilir yaklaşım gösterirler. Bu sebeple, bu çalışmanın amacı, Δt 'nin standart olmayan şekilde uygun seçimi ile Theta metodu kullanarak bu kısıtlamaların üstesinden gelmektir. Klasik nümerik metotlar,

özellikle Standart Theta Metodu, Δt adım boyunun yeterince küçük olması durumunda (5.1.1) başlangıç değer problemi için iyi nitelikte yaklaşımlar göstermektedir. Bu bölümde Standart olmayan sonlu fark metodunun (Non-standart finite difference scheme) kullanımı ve Δt adım boyunun seçimindeki serbestlik ile aynı nitelikteki yaklaşımların korunup korunmadığına vurgu yapılacaktır.

Standart olmayan sonlu fark yöntemi ilk defa Mickens (1994) tarafından adi türevli ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulmak için tanımlanmıştır. Ayrıca Mickens yapmış olduğu çalışmalarında (Mickens, 1990), (Mickens, 1993), (Mickens, 1999), (Mickens, 2002), (Mickens, 2006), standart ve standart olmayan sonlu fark metotları ve bu metotların en iyi şekilde sonuç vermeleri için kullanılması gereken denominatör fonksiyonu ve metodun tutarlılık, yakınsaklık ve kararlılık özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Bu yöntem kısaca aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 5.3.1. $D_{\Delta t}y(t_n) = F_{\Delta t}(f; y_n)$ fark denklemi aşağıdaki şartlardan en az birini sağlarsa standart olmayan sonlu fark metodu olarak adlandırılır (Mickens, 1994; Kama, 2009):

- $D_{\Delta t}y(t_n)$ ayrık türevinde Δt klasik denominatör yerine

$$\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$\varphi(\Delta t) = \Delta t + O((\Delta t)^2) \tag{5.3.1}$$

$$\left[\text{örneğin, } \varphi(\Delta t) = 1 - e^{-\Delta t}, \varphi(\Delta t) = \frac{e^{\Delta t} - 1}{\lambda} \right]$$

şartlarını sağlayan pozitif $\varphi(\Delta t)$ denominatör fonksiyonu kullanılır.

- $F_{\Delta t}(f; y(t_n))$ ifadesinde lineer olmayan ifadeler yerine lokal olmayan (non-local) terimler

kullanılabilir. [Örneğin, $y^2(t_n) \approx y_{n+1}y_n, y_{n-1}y_n, y_{n-1}y_{n+1}, y^3(t_n) \approx y^2(t_n)y_{n+1}$]

Standart olmayan sonlu fark metodu aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

Öncelikle

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \lambda) \quad (5.3.2)$$

test problemimiz olsun. Burada λ bir parametredir. $\Delta t > 0$ adım uzunluğu ve $t_n = t_0 + n\Delta t$ olmak üzere standart olmayan sonlu fark metodu iki adımda oluşturulabilir(Arslan, 2013):

1.Adım: (5.3.2) denkleminin sol tarafındaki türev $y_n, y(t_n)$ 'in bir yaklaşımı olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\varphi(\Delta t, \lambda)} \quad (5.3.3)$$

şeklinde ayrık olarak yazılır.

2.Adım:(5.3.2) denklemindeki lineer olmayan terimler yerine $F(t, y_n, y_{n-1}, \dots, \lambda)$ lokal olmayan ayrık gösterimlerle ifade edilirse (5.3.2) denklemi

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\varphi(\Delta t, \lambda)} = F(t, y_n, y_{n-1}, \dots, \lambda) \quad (5.3.4)$$

ayrık formda yazılır.

Mickens standart olmayan sonlu fark metodu için bazı kurallar tanımlamıştır. Bu kuralları şu şekilde ifade edebiliriz(Arslan vd., 2011; Kama, 2009):

- 1) Ayrık türevlerin mertebeleri diferansiyel denklemin mertebesi ile aynı olmalıdır.

- 2) Ayırık türevlerde olan denominator fonksiyonlar, alışılmış kullanımdan ziyade (h yerine) adım uzunluğuna bağlı daha komplike terimlere açılarak elde edilir.
- 3) Lineer olmayan terimler genellikle lokal olmayan (non-lokal) gösterimlere sahiptir.
- 4) Diferansiyel denklemin özel çözümleri aynı zamanda sonlu fark modellerinin özel ayırık çözümleri olmalıdır.
- 5) Diferansiyel denklemin çözümü için geçerli olan özel şartlar, sonlu fark yönteminin çözümleri için de geçerli olmalıdır.

Klasik ayırıştırma $\varphi(\Delta t, \lambda) = \Delta t$ olarak alınırken bu yöntemde $\varphi(\Delta t, \lambda)$, Δt adım uzunluğuna bağlı denominator fonksiyonu olarak tanımlanır ve bu fonksiyon, $\Delta t \rightarrow 0$ iken (5.3.1) koşulunu sağlar. Diğer yandan (5.3.1) koşulunu sağlayan denominator fonksiyonların seçimi belli koşullar altında keyfi olabilir. Bu seçim yapılırken dikkat edilmesi gereken konu (5.3.2) test problemi ile (5.3.4) ayırık formda ifade edilen denklemin çözümlerinin birbirleri ile dinamik olarak tutarlılık (dynamic consistency) göstermesidir (Arslan., 2013).

Denominator fonksiyonu bulunurken gerekli olan adımlar aşağıdaki gibi sıralanabilir (Arslan vd., 2011):

- 1) Sonlu fark Euler metodu kullanılarak birinci mertebeden türevler sonlu fark modeli olarak yazılır.
- 2) Taylor açılımı kullanarak adım boyu olan Δt değeri bulunur.
- 3) Bulunan bu h değeri denominator fonksiyonu olarak adlandırılır ve üstel, trigonometrik, vb. fonksiyonlardan oluşabilir.
- 4) Eğer ayırıklaştırdığımız denklem $1 + a\Delta t$ şeklinde ifade edilebiliyorsa, denominator fonksiyonu $\varphi(\Delta t, \lambda) = \frac{e^{\lambda\Delta t} - 1}{\lambda}$, ($\lambda \neq 0$) şeklinde seçilebilir.
- 5) $\lambda = 0$ olduğu durumda ise denominator fonksiyonu $\varphi(\Delta t) = \Delta t$ olarak seçilebilir.

Diferansiyel Denklemler	Standart Olmayan Sonlu Fark Şemaları
$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \beta y^3 = 0$	$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{4\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)} + y_k + \beta \left(\frac{\sin^2(\Delta t)}{4\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}\right) y_k^3 = 0$
$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^2 = 0$	$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{4\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)} + y_k + \varepsilon \left(\frac{\sin^2(\Delta t)}{4\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}\right) y_k^2 = 0$
$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt}$	$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{4\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)} + y_k$ $= \varepsilon \left(\frac{\sin(\Delta t)}{2\sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}\right) (1 - y_k^2) \left(\frac{y_k - \cos(\Delta t)y_{k-1}}{2\sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}\right)$

Çizelge 5.3.1. Bazı diferansiyel denklemler için standart olmayan sonlu fark şemaları

Tanım 5.3.2. φ , (5.3.1) koşulunu sağlayan bir denominator fonksiyon ve Δt adım uzunluğu olmak üzere

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\varphi(\Delta t)} = \theta f(y_{n+1}) + (1 - \theta)f(y_n) \quad (5.3.5)$$

şeklindeki fark denkleminde standart olmayan Theta metodu denir.

Şimdi standart olmayan Theta metodunun temel kararlılığından (elementary stability ya da E-stability) bahsedelim(Lubuma, 2003; Kama, 2009).

Öncelikle

$$Dy = \frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(0) = y_0 \quad (5.3.6)$$

eşitliği ile birinci mertebeden denklem sistemi verilsin. Burada $y = y(t) = [y^1 \ y^2 \ \dots \ y^m]^T: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m, f = [f^1 \ f^2 \ \dots \ f^m]^T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ve $y_0 = [y_0^1 \ y_0^2 \ \dots \ y_0^m]^T \in \mathbb{R}^m$ dir.

Tanım 5.3.3. Her bir $y_0 \in E$ ve her $t \in (0, \infty), y(t) \in E, t \geq 0$ için (5.3.6) diferansiyel denkleminin $E \subseteq \mathbb{R}^m$ alt kümesinde bir tek çözümü varsa (5.3.6) denkleminin bir dinamik sistem denir(Kama, 2009).

$\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ sabit vektörü (5.3.6) diferansiyel denkleminin $f(\tilde{y}) = 0$ şartını sağlayan herhangi bir sabit noktası olsun. (5.3.6) diferansiyel denkleminin bütün sabit

noktaları hiperbolik olduğundan dolayı herhangi bir $\lambda \in \sigma(J)$ için $Re(\lambda) \neq 0$ dır. Burada $\sigma(J)$,

$$J = J(f(\tilde{y})) = \left(\frac{\partial(f^i(\tilde{y}))}{\partial y^j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (5.3.7)$$

şeklindeki J jakobyen matrisinin spektrumudur.

J köşegen (diagonal) matris olduğundan dolayı $Q^{-1}JQ = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eşitliğini sağlayacak şekilde $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ singüler olmayan (non-singüler) matrisi elde edilir.

$\tilde{y}$, (5.3.6) diferansiyel denkleminin sabit noktası olduğundan dolayı

$$\frac{d\varepsilon}{dy} = J\varepsilon, \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 \quad (5.3.8)$$

lineerleştirilmiş sisteminin

$$\varepsilon(t) = e^{J(t-t_0)}\varepsilon_0 = [e^{\lambda_1(t-t_0)}q_1 \ e^{\lambda_2(t-t_0)}q_2 \ \dots \ e^{\lambda_n(t-t_0)}q_n]Q^{-1}\varepsilon_0 \quad (5.3.9)$$

çözümü, (5.3.6) diferansiyel denkleminin $\tilde{y}$ çözümüyle ilişkilendirilebilir.

Tanım 5.3.4. $\tilde{y}$, (5.3.6) diferansiyel denkleminin bir sabit noktası olmak üzere, eğer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0 \text{ yada } \lambda \in \sigma(J) \text{ için } Re(\lambda) < 0 \quad (5.3.10)$$

ise lineer kararlı (linearly stable) olarak adlandırılır. Aksi halde $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararsız (linearly unstable) olarak adlandırılır(Lubuma, 2003, Kama, 2009).

Tanım 5.3.5. (5.3.6) diferansiyel denklem sisteminin her $\tilde{y}$ sabit noktasının lineer kararlılık özellikleri, (5.3.5) sisteminin $\tilde{y}$ sabit noktasının lineer kararlılık özellikleri ile aynı ise, (5.3.5) denklemini ile verilen standart olmayan Theta metodu temel kararlıdır (elementary stable ya da E-stable) denir(Lubuma, 2003; Kama, 2009).

Not 5.3.1. Standart Theta metodu $\theta = \frac{1}{2}$ haricinde temel kararlı değildir(Roux, 2002; Lubuma, 2003).

Şimdi yeni bir temel kararlı standart olmayan Theta metodu tanımlayalım:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\frac{\varphi(q\Delta t)}{q}} = \theta f_{k+1} + (1 - \theta)f_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3.11)$$

Burada, $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu denominator fonksiyondur ve her $z \in (0, \infty)$ için $\varphi(z) \in (0, 1)$ dir.

$$E = \bigcup_{\{\tilde{y} \in R: f(\tilde{y})=0\}} \sigma(Jf(\tilde{y})) \quad (5.3.12)$$

kümesinin her λ elemanı $Re(\lambda) \neq 0$ denklemini sağlar ve

$$q \geq \max\{|\lambda|: \lambda \in E\} \quad (5.3.13)$$

sabit bir sayıdır.

(5.3.1) denkleminde dolayı, standart olmayan Theta metodu, $\Delta t \rightarrow 0$ için standart theta metoduna benzerdir. Daha net olarak, standart olmayan Theta metodu tutarlı ve zero-kararlıdır. Standart Theta metodunda olduğu gibi, standart olmayan Theta metodunun lokal kesme hatası

$$\left[y(t_{k+1}) - y(t_k) - \frac{\varphi(q\Delta t)}{q} \theta f(y(t_{k+1})) - \frac{\varphi(q\Delta t)}{q} (1 - \theta) f(y(t_k)) \right] / \Delta t \quad (5.3.14)$$

$$T_k = \begin{cases} O(\Delta t), & \theta \neq 0.5 \\ O((\Delta t)^2), & \theta = 0.5 \end{cases}$$

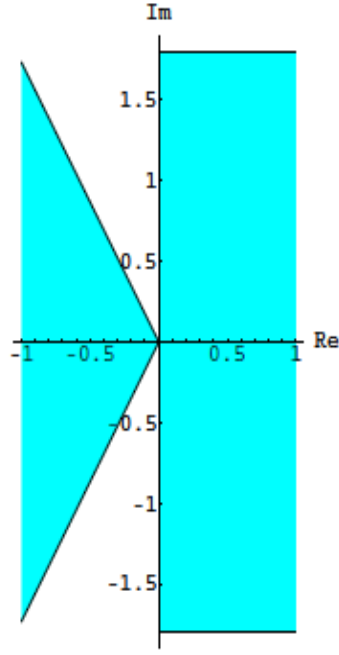
şeklindedir.

Standart olmayan Theta metodu, φ denominator fonksiyonunun uygun seçimlerine göre birinci ($\theta \neq \frac{1}{2}$) veya ikinci ($\theta = \frac{1}{2}$) basamaktan olabilir. Fakat Δt adım uzunluğunun farklı değerleri için standart olmayan Theta metodunun, standart Theta metoduna göre daha iyi sonuç verdiği aşağıdaki teoremden anlaşılmaktadır:

Teorem 5.3.1. $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ ve $E \subseteq W_l$ için

$$W_l = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda < 0, \arg\lambda \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right] \right\} \cup \{ \lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda > 0 \} \quad (5.3.15)$$

ise (5.3.5) denklemi ile verilen standart olmayan Theta metodu temel kararlıdır(Lubuma, 2003; Kama, 2009).



Şekil 5.3.1. W_l Bölgesi

İspat 5.3.1. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$r = \frac{1 + \frac{\varphi(q\Delta t)}{q}(1 - \theta)\lambda}{1 - \frac{\varphi(q\Delta t)}{q}\theta\lambda} \quad (5.3.16)$$

olsun. O zaman

$$|r|^2 = \frac{1 + 2\varphi(q\Delta t)(1 - \theta)\frac{|\lambda|}{q}\cos \arg \lambda + (\varphi(q\Delta t))^2(1 - \theta)^2\frac{|\lambda|^2}{q^2}}{1 - 2\varphi(q\Delta t)\theta\frac{|\lambda|}{q}\cos \arg \lambda + (\varphi(q\Delta t))^2\theta^2\frac{|\lambda|^2}{q^2}} \quad (5.3.17)$$

denklemini kolayca elde edilebilir.

$E \subseteq W_l$ sağlansın. Ayrıca (5.3.6) diferansiyel denklem sisteminin $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararlı olsun. Herhangi bir $\lambda \in \sigma(J)$, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ve bu nedenle $\arg \lambda \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ olur. (5.3.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
|r|^2 &= \frac{1 + 2\varphi(q\Delta t)(1 - \theta) \frac{|\lambda|}{q} |\cos \arg \lambda| + (\varphi(q\Delta t))^2 (1 - \theta)^2 \frac{|\lambda|^2}{q^2}}{1 + 2\varphi(q\Delta t)\theta \frac{|\lambda|}{q} |\cos \arg \lambda| + (\varphi(q\Delta t))^2 \theta^2 \frac{|\lambda|^2}{q^2}} \\
&< 1 - 2\varphi(q\Delta t)(1 - \theta) \frac{|\lambda|}{q} |\cos \arg \lambda| + (\varphi(q\Delta t))^2 (1 - \theta)^2 \frac{|\lambda|^2}{q^2} \\
&< 1 - 2\varphi(q\Delta t)(1 - \theta) \frac{|\lambda|}{q} |\cos \arg \lambda| + \varphi(q\Delta t)(1 - \theta) \frac{|\lambda|}{q} \\
&= 1 + \varphi(q\Delta t)(1 - \theta) \frac{|\lambda|}{q} (1 - 2|\cos \arg \lambda|) \\
&\leq 1 \quad (|\cos \arg \lambda| \geq 0.5)
\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Buradan (5.3.11) denkleminin $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararlıdır.

Eğer (5.3.6) diferansiyel denkleminin $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararsız ise o zaman $Re\lambda > 0$ şartını sağlayan bir $\lambda \in \sigma(J)$ vardır. (5.3.17) denklemini kullanarak

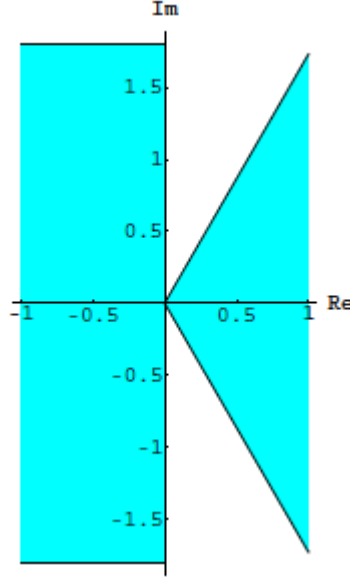
$$|r|^2 > \frac{1 + (\varphi(q\Delta t))^2 (1 - \theta)^2 \frac{|\lambda|^2}{q^2}}{1 + (\varphi(q\Delta t))^2 \theta^2 \frac{|\lambda|^2}{q^2}} > 1 \tag{5.3.19}$$

Böylece (5.3.11) denkleminin $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararlıdır. Bu nedenle, (5.3.6) diferansiyel denkleminde, standart olmayan theta metodu (5.3.11) temel kararlıdır.

Teorem 5.3.2. $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ ve $E \subseteq W_r$ için

$$W_r = \{\lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda < 0\} \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda > 0, \arg \lambda \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]\right\} \tag{5.3.20}$$

ise (5.3.5) denklemi ile verilen standart olmayan theta metodu temel kararlıdır (Lubuma, 2003; Kama, 2009).



Şekil 5.3.2. W_r Bölgesi

İspat 5.3.2. $E \subseteq W_r$ sağlansın. (5.3.6) diferansiyel denklem sisteminin $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararlı ve herhangi bir $\lambda \in \sigma(J)$ için $Re(\lambda) > 0$ olsun. (5.3.17) ve (5.3.18) denklemlerini kullanarak

$$|r|^2 < \frac{1 + (\varphi(q\Delta t))^2(1 - \theta)^2 \frac{|\lambda|^2}{q^2}}{1 + (\varphi(q\Delta t))^2\theta^2 \frac{|\lambda|^2}{q^2}} \leq 1 \quad (5.3.21)$$

Buradan (5.3.11) denkleminin $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararlıdır.

Öte yandan, (5.3.6) diferansiyel denkleminin $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararlı ise en az bir $\lambda \in \sigma(J)$ için $Re(\lambda) > 0$ ve bu yüzden $\lambda \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ dür.

(5.3.17) denkleminde

$$\begin{aligned} |r|^2 &> \frac{1}{1 - 2\varphi(q\Delta t)\theta \frac{|\lambda|}{q} \cos \arg \lambda + (\varphi(q\Delta t))^2\theta^2 \frac{|\lambda|^2}{q^2}} \\ &> \frac{1}{1 - 2\varphi(q\Delta t)\theta \frac{|\lambda|}{q} \cos \arg \lambda + \varphi(q\Delta t)\theta \frac{|\lambda|}{q}} \\ &= \frac{1}{1 + \varphi(q\Delta t)\theta \frac{|\lambda|}{q} (1 - 2 \cos \arg \lambda)} \\ &\geq 1 \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Bu (5.3.11) denkleminin $\tilde{y}$ sabit noktasının lineer kararlı olduğunu kanıtlar. Bu nedenle standart olmayan Theta metodu (5.3.11) temel kararlıdır.

Tanım 5.3.5. $\lambda \in \sigma(J)$, $Re(\lambda) > 0$ ve $\Delta t > 0$ için

$$r = \frac{1 + \frac{\varphi(q\Delta t)}{q} (1 - \theta)\lambda}{1 - \frac{\varphi(q\Delta t)}{q} \theta\lambda} \quad (5.3.23)$$

olmak üzere $|r| < 1$ ise standart olmayan Theta metodu $\lambda\Delta t$ için mutlak temel (Absolute elementary) kararlıdır. Aşağıdaki Tablo 5.3.2 standart ve standart olmayan Theta metotlarının kararlılıkları ile ilgilidir(Lubuma, 2003).

Çizelge 5.3.2. Standart ve standart olmayan Theta metotlarının mutlak E-kararlılığı ve E-kararlılığı

Kararlılık Türü	Açık Theta Metodu ($\theta = 0$)		Kapalı Theta Metodu			
	Standart	Standart Olmayan	$\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$		$\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$	
			Standart	Standart Olmayan	Standart	Standart Olmayan
Temel Kararlılık	Hayır	Evet	Hayır	Evet	Hayır	Evet
Mutlak Temel Kararlılık (her $\lambda\Delta t$ için)	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır	Evet	Evet
Mutlak Temel Kararlılık(her $\lambda\Delta t : arg\lambda \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ için)	Hayır	Evet	Hayır	Evet	Evet	Evet
Mutlak Temel Kararlılık(her $\lambda\Delta t : Im\lambda = 0$ için)	Hayır	Evet	Hayır	Evet	Evet	Evet

Aşağıdaki Tablo 5.3.3 standart ve standart olmayan Theta metotlarının tutarlılık, zero-kararlılık ve yakınsaklıkları ile ilgilidir(Roux, 2002).

Çizelge 5.3.3. Standart ve standart olmayan Theta metotlarının tutarlılık, zero-kararlılık ve yakınsaklık özellikleri

Özellik	Standart Theta Metodu	Standart Olmayan Theta Metodu
Tutarlılık	Evet	Evet
Zero-Kararlılık	Evet	Evet
Yakınsaklık	Evet	Evet

Aşağıda farklı $\Theta(\theta)$ değerleri için standart ve standart olmayan theta metotlarının, üstel büyüme denkleminin (exponential growth equation) uygulanarak, karşılaştırılması verilmiştir:

Öncelikle

$$y' = 3y, \quad y(0) = 7 \quad (5.3.24)$$

şeklinde üstel büyüme denklemi verilsin. (5.3.24) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = 7e^{3t} \quad (5.3.25)$$

şeklindedir. (5.3.24) denklemini, (5.2.2) ve (5.3.5) metotlarına uygulandığında, standart Theta metodu şeması,

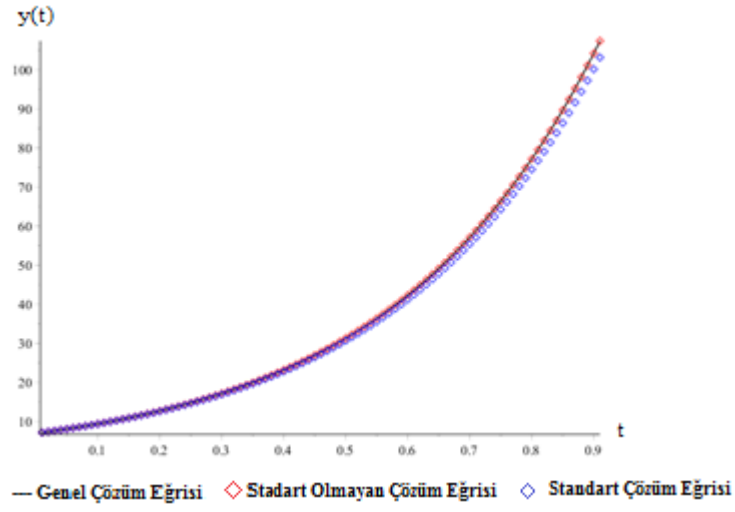
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = 3\theta y_{n+1} + 3(1 - \theta)y_n \quad (5.3.26)$$

standart olmayan Theta metodu şeması,

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\varphi(\Delta t)} = 3\theta y_{n+1} + 3(1 - \theta)y_n \quad (5.3.27)$$

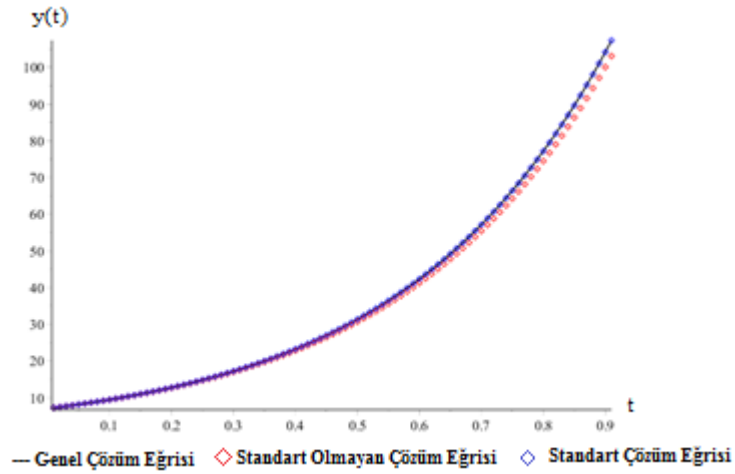
şeklindedir.

$\theta = 0$ için,



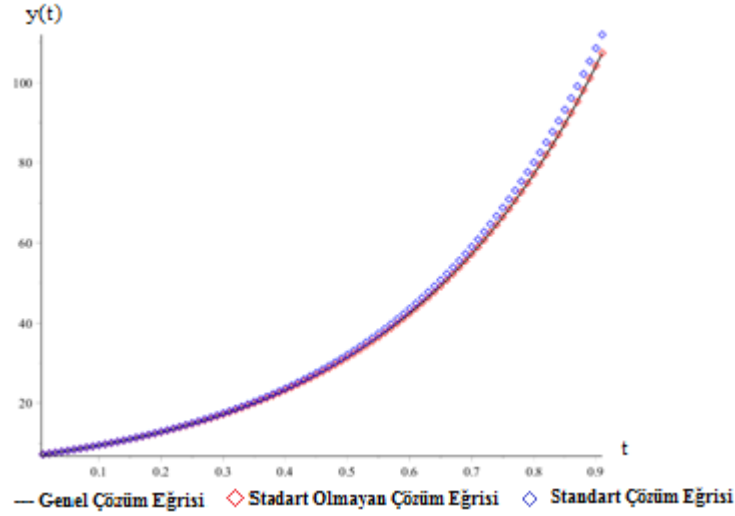
Şekil 5.3.3. $\Delta t = 0.01$ için standart ve standart olmayan Euler metotlarının karşılaştırılması

$\theta = \frac{1}{2}$ için,



Şekil 5.3.4. $\Delta t = 0.01$ için standart ve standart olmayan trapezoid(yamuk) metotlarının karşılaştırılması

$\theta = 1$ için,



Şekil 5.3.5. $\Delta t = 0.01$ için standart ve standart olmayan Implicit(kapalı) Theta metotlarının karşılaştırılması

Şekil 5.3.3, Şekil 5.3.4 ve Şekil 5.3.5 ile üstel büyüme denkleminin karşılık gelen (5.3.24) başlangıç değer probleminin bazı özel theta ($\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$) değerlerine ait standart ve standart olmayan sayısal çözümlerinin, genel çözüm ile karşılaştırmalı grafikleri verilmiştir. Standart olmayan Theta metodu ile sayısal çözümlerin, genel çözüme daha yakın çözümler verdiği gözlemlenebilir.

Aşağıdaki grafiklerde,

$$y' = \lambda y \quad (5.2.28)$$

lineer test problemi olmak üzere, standart ve standart olmayan Theta metotlarının bazı Theta değerleri için ($\theta = 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1$) kararlılık bölgeleri Maple18 programı kullanılarak çizdirilmiştir. Standart olmayan explicit(Euler) metot ($\theta = 0$) için denminatör fonksiyonu

$$\varphi(\lambda, h) = \frac{e^{\lambda h} + 1}{\lambda} \quad (5.2.29)$$

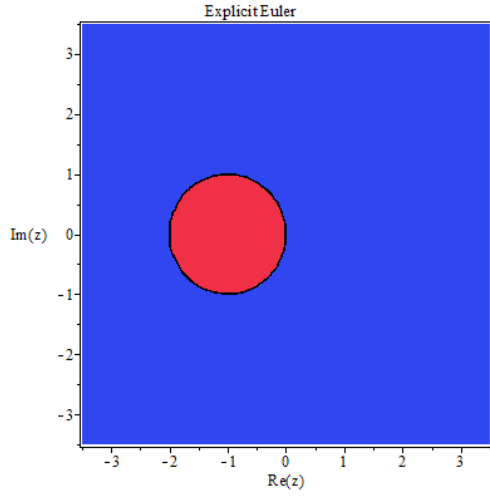
şeklinde, standart olmayan implicit metotlar ($\theta = \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1$) için denminatör fonksiyonu

$$\varphi(\lambda, h) = \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda} \quad (5.2.30)$$

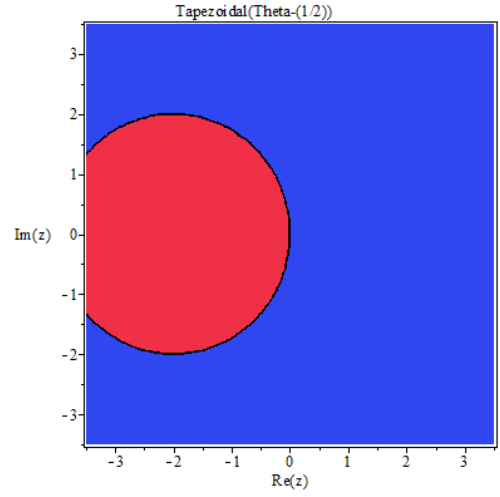
şeklinde seçilmiştir.

Aşağıdaki şekillerde Theta'nın farklı değerleri için ($\theta = 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1$), standart Theta metodunun (Şekil 5.3.6, Şekil 5.3.7, Şekil 5.3.8, Şekil 5.3.9) ve standart olmayan Theta metodunun (Şekil 5.3.10, Şekil 5.3.11, Şekil 5.3.12, Şekil 5.3.13) kararlılık bölgelerinin grafikleri verilmiştir. Bu kararlılık bölgesi grafikleri Maple18 paket programı kullanılarak elde edilmiştir.

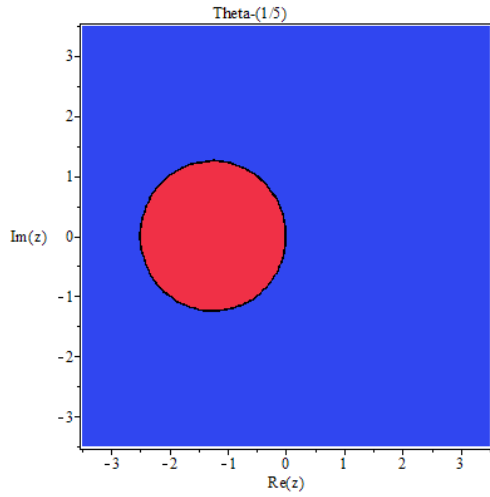




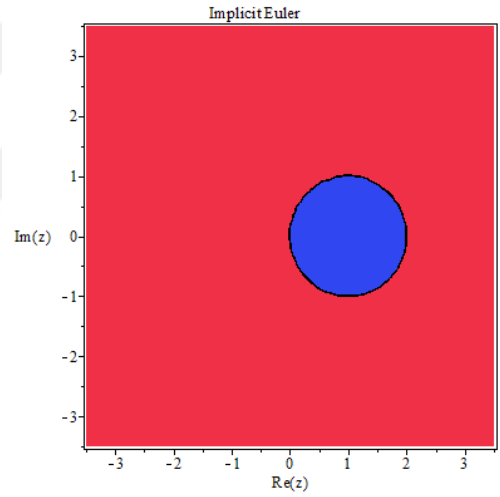
Şekil 5.3.6. Standart explicit Euler ($\theta = 0$) metodunun kararlılık bölgesi



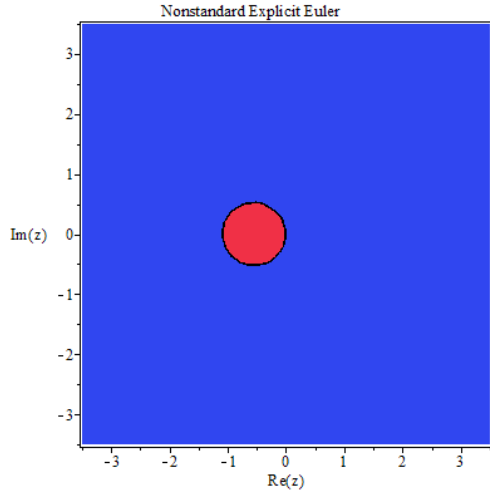
Şekil 5.3.8. Standart trapezoid ($\theta = 0.5$) metodun kararlılık bölgesi



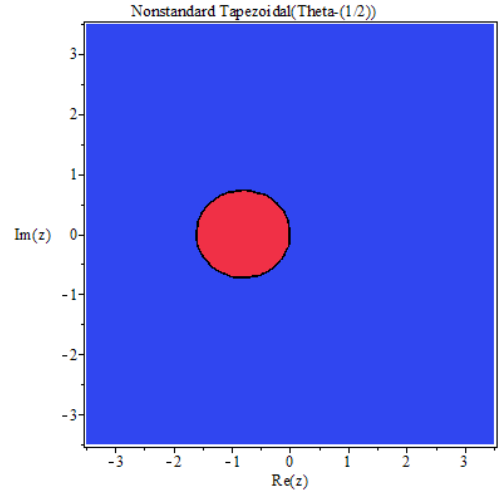
Şekil 5.3.7. Standart implicit metodun ($\theta = 0.2$) için kararlılık bölgesi



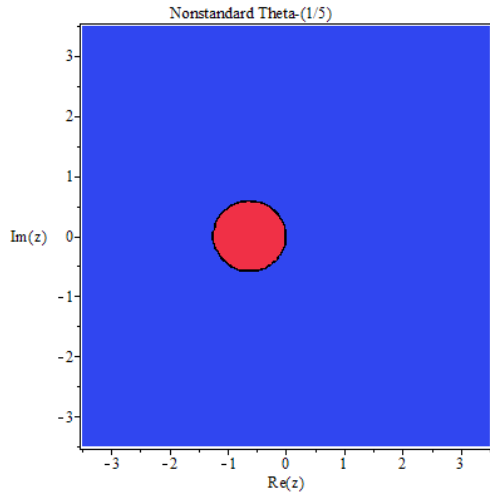
Şekil 5.3.9. Standart implicit Euler ($\theta = 1$) metodunun kararlılık bölgesi



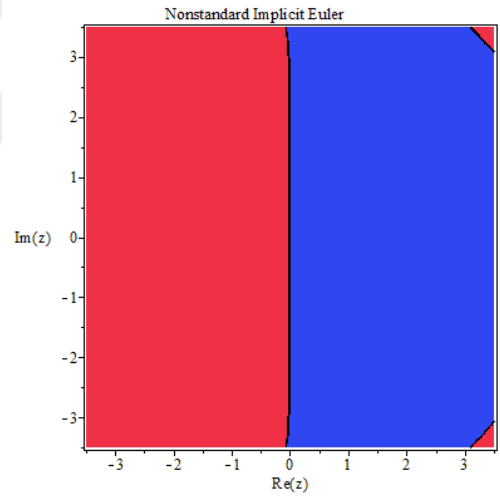
Şekil 5.3.10. Standart olmayan explicit Euler ($\theta = 0$) metodunun kararlılık bölgesi



Şekil 5.3.12. Standart olmayan trapezoid ($\theta = 0.5$) metodun kararlılık bölgesi



Şekil 5.3.11. Standart olmayan implicit ($\theta = 0.2$) için kararlılık bölgesi



Şekil 5.3.13. Standart olmayan implicit Euler ($\theta = 1$) metodunun kararlılık bölgesi

6. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN THETA METODU

6.1. Giriş

Bu kısımda günümüzde kullanım alanları gün geçtikçe artan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Theta metodunun kullanılması ele alınmıştır. Bu kısmın amacı, adi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan klasik Theta metodundan yola çıkarak, kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan kesirli lineer çok adımlı metodun da yardımıyla yeni ve kararlı bir metot olan kesirli Theta metodunu elde etmektir.

Bu amaçla kullanacak olduğumuz başlangıç değer problemi, $f: [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad (6.1.1)$$

şeklindeki kesirli mertebeden diferansiyel denklemdir.

6.2. Kesirli Lineer Çok Adımlı Metotlar

Γ , Euler-Gamma fonksiyonu olmak üzere, α mertebeden Riemann-Liouville integrali

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad x \geq 0, \operatorname{Re} \alpha > 0 \quad (6.2.1)$$

şeklinde olsun. $I^\alpha f(x)$ (sabit f ve x için) analitik olarak α -ya bağlıdır.

Eğer $f, [0, x]$ kapalı aralığında k -defa sürekli diferansiyellenebilirse, o zaman α 'nın negatif reel kısmı sayesinde, analitik olarak $\operatorname{Re}(\alpha) > -k$ için

$$I^\alpha f(x) = \frac{d^k}{dx^k} I^{\alpha+k} f(x) \quad (6.2.2)$$

şeklinde devam edebilir.

Eğer $-k \leq \operatorname{Re}(\alpha) < 0$ ve $j = 0, 1, \dots, k-1$ için $f^{(j)}(0) = 0$ ise o zaman 1. tür Abel integral eşitliğinin (first kind Abel integral equation)

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-s)^{-\alpha-1} y(s) ds, x \geq 0 \quad (6.2.3)$$

çözümü $y(x) = I^\alpha f(x)$ şeklindedir (Lubich, 1986).

α tamsayı olmak üzere, I^α tekrarlı integrasyon yada tekrarlı türevi ifade eder:

$$I^k f(x) = \int_0^x \int_0^{x_k} \cdots \int_0^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \cdots dx_k \quad (6.2.4)$$

$$I^0 f(x) = f(x), I^{-k} f(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x)$$

Bu yüzden I^α 'ya, α mertebeden kesirli integral diye isim verilir ve ayrıca $D^{-\alpha}$ ($-\alpha$ mertebeden kesirli türev) ile de gösterilebilir (Lubich, 1986).

Ayrıca (6.1.1) başlangıç değer problemi Volterra integral eşitliği formunda

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \quad (6.2.5)$$

şeklinde yazılabilir (Lubich, 1986; Garrappa, 2009).

Nümerik yaklaşma için I^α 'nın iki karakteristik özelliğinin korunması istenir. Bu iki özellik

1. I^α 'nın homojenliği

$$(I^\alpha f)(x) = x^\alpha (I^\alpha f(tx))(1) \quad (6.2.6)$$

2. I^α 'nın konvulasyon yapısı

$$I^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} f \quad (6.2.7)$$

şeklinde verilebilir (Lubich, 1986).

O zaman konvulasyon kuadratur (convolution quadrature) denklemi

$$I_h^\alpha f(x) = h^\alpha \sum_{j=0}^n w_{n-j} f(jh) + h^\alpha \sum_{j=0}^s w_{n,j} f(jh), (x = nh) \quad (6.2.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $w_n (n \geq 0)$ konvulasyon kuadratur ağırlıkları (convolution quadrature weights) ve $w_{n,j} (n \geq 0, j = 0, \dots, s, s \text{ sabit})$ başlangıç

kuadratür ağırlıkları (starting quadrature weights), h' 'a bağlı değildir. h^α çarpanından dolayı, I^α 'nın homojenliği

$$(I^\alpha f)(x) = x^\alpha (I_{h/x}^\alpha f(tx))(1) \quad (6.2.9)$$

şeklinde yazılır ve böylece konvolasyon yapısı korunmuş olur.

p . mertebeden konvolasyon kuadratürü hesaplamasının kolay bir yöntemi, p . mertebeden lineer çok adımlı metodun α kuvvetini kullanmaktır ki bu yöntem kesirli lineer çok adımlı metodu (fractional linear multi-step method) denir (Lubich, 1986; Galeone vd., 2009).

(6.2.1) ve (6.2.8) denklemlerinde $\alpha = 1$ olduğunu varsayalım. Eğer bir lineer çok adımlı metot $((\rho, \sigma))$ (lineer çok adımlı metodun sırasıyla birinci ve ikinci karakteristik polinomları) kuadratür problemine uygulandığında

$$y'(x) = f(x), \quad y(0) = 0 \text{ yani } y(x) = \int_0^x f(s) ds \quad (6.2.10)$$

olur.

(6.2.8) nümerik çözümü konvolasyon kuadratür yöntemiyle elde edilebilir. Burada, ξ herhangi bir değişken olmak üzere w_n konvolasyon kuadratür ağırlıkları

$$w(\xi) = \frac{\sigma(1/\xi)}{\rho(1/\xi)} \quad (6.2.11)$$

şeklinde tanımlanan $w(\xi)$ üreteç fonksiyonunun (generating function) katsayılarından oluşur (Lubich, 1986; Lubich, 1988).

Bir lineer çok adımlı metodun yakınsaklığına, onun kararlı ve tutarlı olması sayesinde karar verilebilir. Aşağıda $\alpha \in \mathbb{C}$ için kararlılığın ve tutarlılığın tanımları verilmiştir. Bu tanımlarda $w = (w_n)_0^\infty$, (6.2.8) denklemindeki konvolasyon kuadratürdür (Lubich, 1986).

Tanım 6.2.1. Eğer $w_n = O(n^{\alpha-1})$ ise I^α için w konvolasyon kuadratürü kararlıdır (Lubich, 1986).

Tanım 6.2.2. Eğer $h^\alpha w(e^{-h}) = 1 + O(h^p)$, $p > 0$, ise I^α için w konvolasyon kuadratürü p . mertebeden tutarlıdır (Lubich, 1986).

Diğer tanım ve teoremlerde kullanılacağı için aşağıdaki notasyonların kullanılması uygun olacaktır(Lubich, 1986):

$$\Omega_h^\alpha f(x) = h^\alpha \sum_{j=0}^n w_{n-j} f(jh), (x = nh) \quad (6.2.12)$$

(6.2.8) denkleminin konvolasyon kısmı,

$$E_h^\alpha = \Omega_h^\alpha - I^\alpha \quad (6.2.13)$$

notasyonu da konvolasyon kuadratür hatasıdır.

Tanım 6.2.3. Eğer her $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$ için

$$(E_h^\alpha t^{\beta-1})(1) = O(h^\beta) + O(h^p) \quad (6.2.14)$$

ise, o zaman w konvolasyon kuadratürü p . mertebeden yakınsaktır(Lubich, 1986).

Şimdi konvolasyon kuadratür denklemindeki (6.2.8) başlangıç ve konvolasyon kuadratür ağırlıklarından bahsedelim (Galeone, 2008; Garrappa, 2013).

(6.2.8) denklemindeki $w_{n,j}$ başlangıç kuadratür ağırlıkları, orijin etrafındaki tam çözümün asimtotik davranışının tanımlanması ile ilgilidir. Bu nedenle $w_{n,j}$ başlangıç kuadratür ağırlıkları metodun kararlılığına etki etmez. Ancak w_n konvolasyon kuadratür ağırlıkları bu metodun ana bileşenleridir ve bu yaklaşımın kesirli diferansiyel denklemler için avantajı, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan kesirli lineer çok adımlı metotların, adi diferansiyel denklemler için kullanılan lineer çok adımlı metotların genelleştirilmesi ile elde edilebilmeleridir.

Çok adımlı metotları (5.1.5) konvolasyon kuadratür metodu şeklinde yazabilmek için (6.2.11) denklemi ile verilen $w(\xi)$ üreteç fonksiyonu, w_n konvolasyon kuadratür ağırlıklarının formal kuvvet serisinin (formal power serie) katsayıları olarak

$$w(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \xi^n \quad (6.2.15)$$

şeklinde ifade edilir.

Daha sonra $w(\xi)$ üreteç fonksiyonunun kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanabilmesi için, w_n konvolasyon ağırlıklarının, $w(\xi)$ üreteç fonksiyonunun kesirli mertebeden formal kuvvet serisinin katsayılarıyla eşitlenmesi gerekir.

$$w_\beta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \xi^n, \quad w_\beta(\xi) = \left[\frac{\sigma(1/\xi)}{\rho(1/\xi)} \right]^n \quad (6.2.16)$$

(6.2.16) denklemi (6.2.8) denkleminde uygulanıp, daha sonra (6.2.5) denleminde yerine yazılırsa elde edilen yöntem kesirli lineer çok adımlı metot denir ve

$$y_n = y_0 + h^\alpha \sum_{j=0}^n w_{n-j} f_j + h^\alpha \sum_{j=0}^s w_{n,j} f_j \quad (6.2.17)$$

genel formülüyle ifade edilebilir.

Genellikle formal kuvvet serisinin katsayıları ile kesirli lineer çok adımlı metodun konvolasyon kuadratür katsayıları eşitlenirken zorluklar yaşanır. Bu zorlukları ortadan kaldırmak için aşağıdaki teoremden verilen J.C.P Miller formülü kullanılır (Galeone, 2008; Garrappa, 2013).

Teorem 6.2.1. $\varphi(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^n$ formal kuvvet serisi olsun. O zaman herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$(\varphi(\xi))^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^{(\alpha)} \xi^n \quad (6.2.18)$$

denklemindeki $v_n^{(\alpha)}$ katsayıları yinelemeli olarak

$$v_0^{(\alpha)} = 1, \quad v_n^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{(\alpha+1)j}{n} - 1 \right) a_j v_{n-1}^{(\alpha)} \quad (6.2.19)$$

şeklinde eşitlenebilir (Galeone, 2008; Garrappa, 2013).

6.3. Kesirli Theta Metodu

Önceki bölümde (6.2.17) denklemi ile verilen kesirli lineer çok adımlı metodu, (5.1.5) denklemi ile verilen lineer çok adımlı metodun genelleştirilmesi ile elde edilmişti. Bu bölümde ise kesirli Theta metodu, klasik Theta metodundan yola çıkılarak elde edilecek ve bu işlem önceki bölümde de olduğu gibi (6.2.8) denklemi ile verilen konvolasyon kuadratür metodu kullanılarak yapılacaktır.

Öncelikle standart Theta metodu

$$y_{n+1} - y_n = h(1 - \theta)f_n + h\theta f_{n+1} \quad (6.3.1)$$

şeklinde verilsin. Metodun birinci ve ikinci karakteristik polinomları, (5.1.6) denkleminde olduğu gibi

$$\rho(\xi) = \xi - 1, \sigma(\xi) = \theta(\xi - 1) + 1 \quad (6.3.2)$$

şeklinde elde edilir.

Konvolasyon kuadratür metodunun, w_n kuadratür ağırlıkları bulunurken kullanılacak olan $w(\xi)$ üreteç fonksiyonu, $\theta \in [0,1]$ olmak üzere

$$w(\xi) = \theta + \frac{\xi}{1 - \xi} \quad (6.3.3)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\theta = 0$ için,

$$w(\xi) = \frac{\xi}{1 - \xi} \quad (6.3.4)$$

şeklinde kesirli Euler metodunun üreteç fonksiyonu,

$\theta = \frac{1}{2}$ için,

$$w(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right] \quad (6.3.5)$$

şeklinde kesirli trapezoid metodun üreteç fonksiyonu,

$\theta = 1$ için,

$$w(\xi) = \frac{1}{1 - \xi} \quad (6.3.6)$$

şeklinde kesirli implicit Euler metodunun üreteç fonksiyonu elde edilir.

(6.1.1) başlangıç değer problemi çözülürken kullanılan Riemann-Liouville kesirli integral denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulandıktan sonra

$$Y(s) = G(s)F(s)$$

$$G(s) = s^{-\alpha} = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, s \right\} \quad (6.3.7)$$

eşitliği elde edilir (Podlubny, 1999).

Daha sonra, kesirli Theta metodunu elde etmek için bulunan ve (6.3.3) denklemi ile verilen $w(\xi)$ üreteç fonksiyonu, (6.3.7) denklemindeki $G(s)$ fonksiyonuna uygulandığında

$$G \left(\frac{w(\xi)}{h} \right) = \left(\frac{w(\xi)}{h} \right)^{-\alpha} = \left(\frac{h}{\theta} \right)^{\alpha} (1 - \xi)^{\alpha} (1 - \xi + \xi\theta)^{-\alpha} \quad (6.3.8)$$

şeklinde formal kuvvet serisine dönüşür. (6.3.8) denkleminin sağ tarafındaki ifadenin katsayıları,

$$\left(\frac{h}{\theta} \right)^{\alpha} (1 - \xi)^{\alpha} (1 - \xi + \xi\theta)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \xi^n \quad (6.3.9)$$

eşitliğinde olduğu gibi, w_n konvolasyon kuadratür katsayılarına eşitlenmelidir. Ancak (6.3.9) denkleminin sağ ve sol tarafındaki ifadelerin katsayıları eşitlenirken karşılaşılan bazı zorluklardan dolayı, bu işlem Teorem 6.2.1 de belirtilen J.C.P. Miller formülü kullanılarak yapılır. Şöyle ki (6.3.8) denkleminin sağ tarafındaki $(1 - \xi)^{\alpha}$ çarpanı

$$m_0^{(\alpha)} = 1, m_n^{(\alpha)} = - \left(\frac{\alpha + 1}{n} - 1 \right) m_{n-1}^{(\alpha)} \quad (6.3.10)$$

şeklinde, $(1 - \xi + \xi\theta)^{-\alpha}$ çarpanı da

$$n_0^{(-\alpha)} = 1, n_n^{(-\alpha)} = \left(\frac{1 - \alpha}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) n_{n-1}^{(-\alpha)} \quad (6.3.11)$$

şeklinde J.C.P. Miller formülü her iki çarpana da uygulanır. Daha sonra (6.3.10) ve (6.3.11) denklemleri çarpılarak

$$\left(\frac{h}{\theta} \right)^{\alpha} (1 - \xi)^{\alpha} (1 - \xi + \xi\theta)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n \quad (6.3.12)$$

şeklinde kesirli Theta metodunun konvolasyon kuadratür katsayıları elde edilir. Burada

$$c_n = \sum_{j=0}^k n_j^{(-\alpha)} m_{n-j}^{(\alpha)}$$

dır. O zaman kesirli Theta metodunun genel formülü, (6.2.17) denkleminde yola çıkılarak

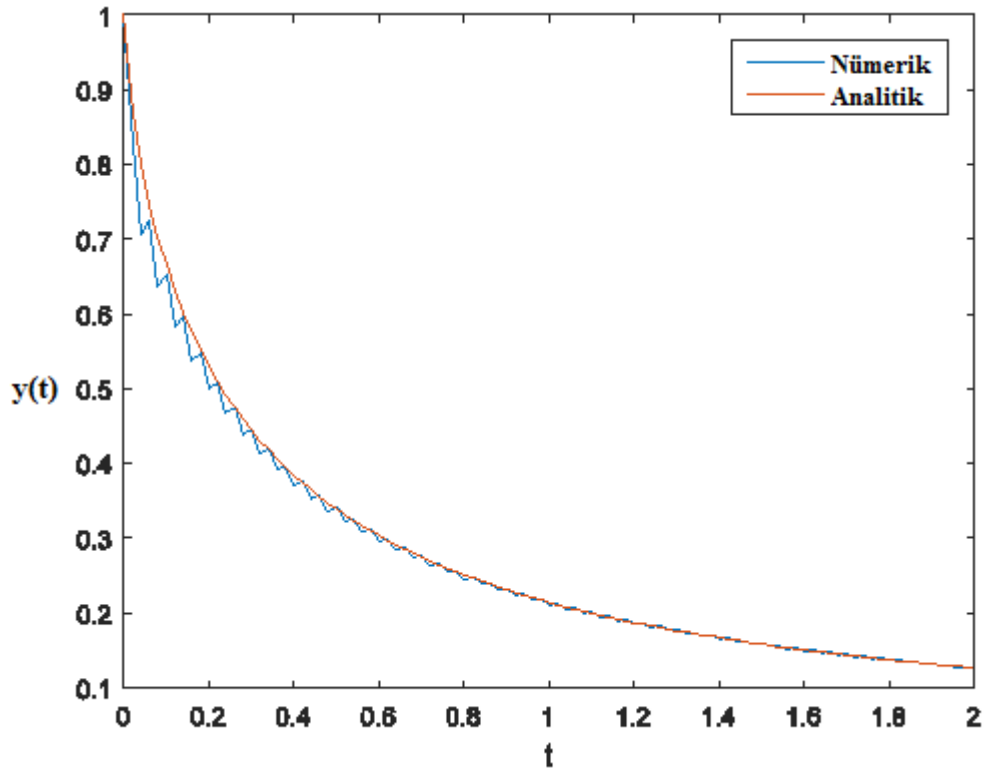
$$y_n = y_0 + h^\alpha \sum_{j=0}^n c_{n-j} f_j + h^\alpha \sum_{j=0}^s c_{n,j} f_j \quad (6.3.13)$$

şeklinde elde edilir.

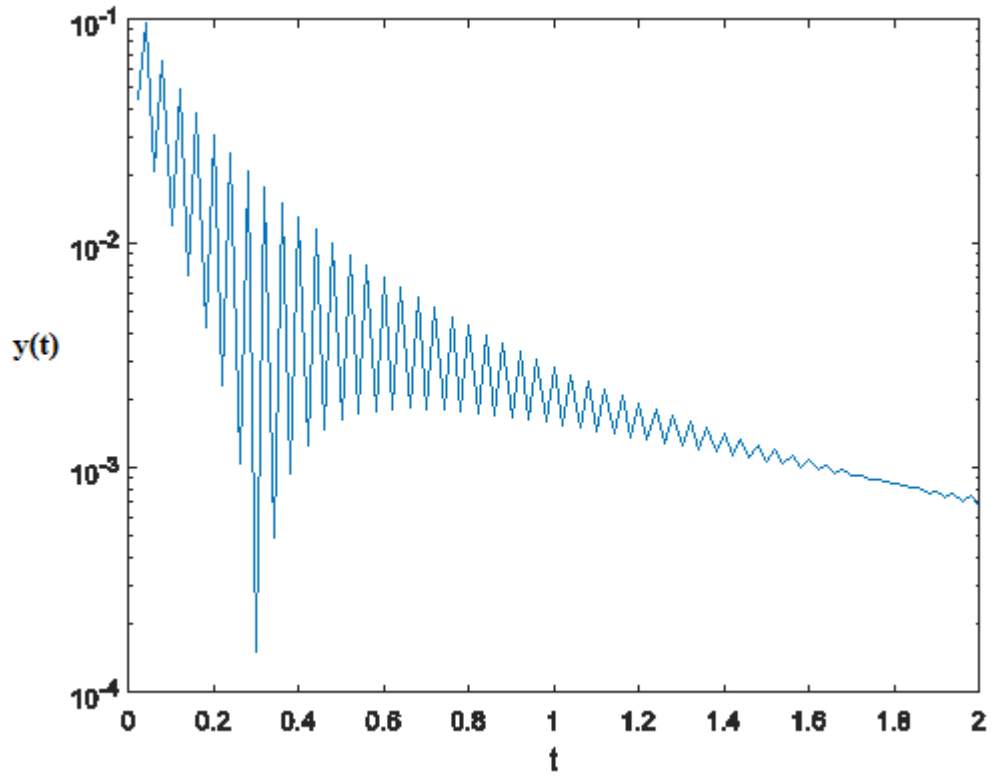
Aşağıdaki örnekte kesirli lineer çok adımlı metot ile çözülen

$$D^{0.7} y(t) = -2y, \quad y(0) = 1 \quad (6.3.14)$$

başlangıç değer probleminin, $E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere, $y(t) = E_\alpha(-2t)^{0.7}$ analitik çözümü ile, kesirli Theta metodu (6.3.13) denklemini kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümünün $\theta = 1/2$ için karşılaştırılması ve kuduratur hatasının grafiği verilmiştir:



Şekil 6.3.1. $\theta = 0.5$ için analitik ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması



Şekil 6.3.2. $\theta = 0.5$ için kuadratür hatası

7. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu tez çalışmasında, geçmişi 17. yüzyılın sonlarına dayanan ve o günden itibaren gelişmeye devam eden kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ve bunların yaklaşık çözümleri için yeni bir metot incelendi.

Yedi ana bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü olan giriş kısmında, genel itibarıyla kesirli analizin klasik analizden farkı ve kesirli analizin nasıl başladığından bahsedildi. Ayrıca kesirli analizin gelişimine katkıda bulunan matematikçiler ve onların kesirli analiz hakkında yaptıkları çalışmalardan söz edildi. Buna ek olarak kesirli analizin uygulama alanları söylendi.

İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılan bazı kaynaklar ve bu kaynakların içeriklerinden sözedildi.

Üçüncü bölümde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde büyük bir öneme sahip olan bazı temel fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özellikleri Gamma, Beta, Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonları başlıkları altında incelendi ve bu fonksiyonların bazı değerlerine ait grafikleri ve tabloları verildi.

Dördüncü bölümde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde oldukça fazla kullanılan Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türev ve kesirli integrallerinin tanımları ve özellikleri verildi. Ayrıca kesirli türev ve kesirli integral tanımlarının arasındaki farklara ve benzerliklere değinildi. Buna ek olarak kesirli türevin bazı özelliklerinden bahsedildi.

Beşinci bölümde, öncelikle lineer çok adımlı metotların, bunların karakteristik polinomlarının, tutarlılıklarının ve kararlılıklarının tanımları yapıldı. Sonra adi diferansiyel denklemler ve denklem sistemlerinin nümerik çözümlerinin bulunmasında oldukça sık kullanılan standart ve standart olmayan Theta metotları tanımlandı. Ayrıca her iki Theta metodunun hataları, yakınsaklıkları ve kararlılıklarının tanımları yapıldı ve teoremlerinin ispatları verildi. Theta'nın

$[0,1]$ kapalı aralığındaki bazı alt aralıklar için kararlılık türleri tablo halinde gösterildi. Daha sonra standart ve standart olmayan Theta metotları ile bir örnek çözülerek elde edilen çözümlerin analitik çözüm ile karşılaştırmalı grafikleri verildi. Buna ek olarak hem standart hem de standart olmayan Theta metotlarının kararlılık bölgeleri çizdirildi.

Altıncı bölümde, öncelikle konvolasyon kuadratür metodunun tutarlılık, yakınsaklık ve kararlılık tanımları verildikten sonra lineer çok adımlı metodun, konvolasyon kuadratür metoduyla birleştirilerek kesirli çok adımlı metodun nasıl elde edilebileceği gösterildi. Daha sonra kesirli Theta metodunun, klasik Theta metodu ve konvolasyon kuadratür metodu kullanarak, kesirli lineer çok adımlı metotlara benzer şekilde, nasıl elde edildiği ayrıntılı bir şekilde ifade edildi. Ayrıca bir örnek ile kesirli Theta metodu kullanılarak elde edilen çözümün, analitik çözüm ile karşılaştırmalı grafiği ve çözümün hata grafiği çizdirildi. Bütün bu işlemler ve grafiklerin çizimi için Matlab paket programından faydalanıldı.

KAYNAKLAR

- Anapalı, A., 2013. Kesirli İntegro Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 79s, Muğla.
- Arslan, D., 2013. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler Sisteminin Sayısal Çözümü, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 55s, Isparta.
- Arslan, D., Ongun, M. Y., Turhan, İ., 2011. Standart Olmayan Sonlu Fark Yönteminin Fuzzy Diferansiyel Denklemlere Uygulanması, III. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, No:1.
- Ateş, İ., 2010. Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri Üzerine, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 83s, İzmir.
- Barclay, G. J., Griffiths, D. F., Higham, D. J., 2000. Theta Method Dynamics, Journal of Computational Mathematic, 3, 27-43.
- Caputo, M., Carcione, J. M., 2013. A Memory Model of Sedimentation in Water Reservoirs, Journal of Hydrology 476, 426-432.
- Constantine, G. M., Savits, T. H., 1996. A Multivariate Faà di Bruno Formula with Applications, Transactions of the American Mathematical Society, Number 2, 503-520.
- Çavuş, M. S., 2006. Kesirli(Fractional) Diferansiyel Denklemler Teorisi ve Dielektrik Durulmanın Kesirli Master Denklemi Yöntemiyle Analizi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 73s, Adana.
- Diethelm, K., Walz, G., 1997. Numerical Solution of Fractional Order Differential Equations by Extrapolation, Numerical Algorithms 16, 231-253.
- Diethelm, K., 2002a. Analysis of Fractional Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 265, 229-248.
- Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D., 2002b. A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations, Nonlinear Dynamics 29, 3-22.
- Diethelm, K., Ford, N. J., 2003. Numerical Solution of the Bagley Torvik Equation, Numerical Analysis Report No: 378, International Standart Serial Number 1360-1725, The University of Manchester.
- Diethelm, K., 2010. The Analysis of Fractional Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, Berlin.

- Farago, I., 2013. Convergence and Stability Constants of the Theta Method, Conference Applications of Mathematics, 42-51.
- Galeone, L., Garrappa, R., 2006. On Multistep Methods for Differential Equations Fractional Order. Mediterranean Journal of Mathematics, 3(3-4), 565-580.
- Galeone, L., Garrappa, R., 2007. Second Order Multistep Methods for Fractional Differential Equations, Technical Report 20/2007, Department of Mathematics, University of Bari.
- Galeone, L., Garrappa, R., 2008. Fractional Adams-Moulton Methods, Mathematics and Computers in Simulation, 79, 1358-1367.
- Galeone, L., Garrappa, R., 2009. Explicit Methods for Fractional Differential Equations and Their Stability Properties, Journal of Computational and Applied Mathematics, 228, 58-560.
- Garrappa, R., 2009. On Some Explicit Adams Multistep Methods for Fractional differential Equations, Journal of computational and Applied Mathematics, 229, 392-399.
- Garrappa, R., 2010. On Linear Stability of Predictor-Corrector Algorithms for Fractional Differential Equations, International Journal of computer Mathematics, 87, 10, 2281-2290.
- Garrappa, R., 2012. On Some Generalizations of the Implicit Euler Method for Discontinuous Fractional Differential Equations, Mathematics and Computers in Simulation.
- Garrappa, R., 2013. Trapezoidal Methods for Fractional Diffrential Equations: Theoretical and Computational Aspects, Mathematics and Computers in Simulation, 110, 96-112.
- Higham, D. J., 2000. Mean Square and Asymptotic Stability of the Stochastic Theta Method, SIAM J. Numer. Anal., No 3, 753-769.
- Higham, D. J., Kloeden, P. E., 2004. Convergence and Stability of Implicit Methods for Jump-Diffusion Systems, International Journal of Numerical Analysis and Modelling,, No 2, 125-140.
- Kama, P., 2009. Nonstandart Finite Difference Models in Dynamical Systems, University of Pretoria, Pretoria.
- Karadem, Z. G., 2016. Kesirli Mertebeden Lojistik Diferansiyel Denklemler için Açık ve Kapalı Yöntemler, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 69s, Isparta.

- Karadeniz, D., 2008. Kesirli Yayılım-Dalga Denklemlerinin Silindirik Koordinatlarda İncelenmesi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 76s, Balıkesir.
- Khodadhighondhar, E., 2014. Fuzzy Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 108s, Erzurum.
- Kilbas, A. A., Trujillo, J. J., 2002. Differential Equations of Fractional Order: Methods, Results and Problems II, Applicable Analysis, 435-493.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2006. Theory and Applications of Differential Equations, North Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B. V., 204, Amsterdam.
- Kiriş, M. E., 2007. Kesirli Türeve Sahip Diferansiyel Denklemler ve Pantograf Denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Çözümlerinin İncelenmesi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, 97s, Konya.
- Köse, Z. S., 2007. Methods for Solving Fractional Differential Equations, Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 88s, İstanbul.
- Lambert, J. D., 1991. Numerical Methods for Ordinary Differential Systems, John Wiley & Sons, New York.
- Lubich, C. , 1986. Discretized Fractional Calculus. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 17(3), 704-719.
- Lubich, C., 1988. Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus I, Numerische Mathematik, 52, 129-145.
- Lubuma, J. M-S., Roux, A., 2003. An Improved Theta Method for Systems of Ordinary Differential Equations, Journal of Difference Equations and Applications, 1023-1035.
- Mazandarani, M., Kamyad, A. V., 2013. Modified Fractional Euler Method for Solving Fuzzy Fractional Initial Value Problem, Elsevier, 12-21.
- Mickens, R. E., 1990. Difference Equations Theory and Applications, New York.
- Mickens, R. E., 1993. Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations, Atlanta.
- Mickens, R. E., 1994. Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations, World Scientific Publishing Company Inc. River Edge New Jersey.

- Mickens, R. E., 1999. Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes, Atlanta.
- Mickens, R. E., 2002. Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations, Journal of Difference Equations and Applications, 8, 823-847.
- Mickens, R. E., 2006. Calculation of Denominator Functions for Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Schemes for Differential Equations Satisfying a Positivity Condition, Wiley Inter Science, 672-691.
- Mohamed, D. A., Mahmoud, R. A., 2013. An Algorithm for the Numerical Solutions of System of Fractional Differential Equations, International Journal of Computer Applications(0975-8887), Vol 65, No 11.
- Mutlu, İ., 2010. Kesirli Mertebeden Kontrolörler ve Uygulamaları, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 70s, İstanbul.
- Odibat, Z., 2006. Approximations of Fractional Integrals and Caputo Fractional Derivatives, Applied Mathematics and Computation 178, 527-533.
- Odibat, Z. M., Shawagfeh, N. T., 2007. Generalized Taylor's Formula, Applied Mathematics and Computation, 186, 286-293.
- Odibat, Z., Momani, S., 2008. An algorithm for the Numerical Solution of Differential Equations of Fractional Order, Journal of Applied Mathematics and Informatics, No 1-2, 15-27.
- Ongun, M. Y., Arslan, D., Garrappa, R., 2013. Nonstandart Finite Difference Schemes for Fractional Order Brusselator System, Advances in Difference Equations, 10, 1186, 1687-1847-2013-102.
- Oturanç, G., Kurnaz, A., Kiriş, M. E., Keskin, Y., 2012. Sayısal Analiz, ISBN 975-28856-8-3, 384s, Konya.
- Özkara, F., 2013. Kesirli Analizde Laplace Dönüşümleri ve Bazı Biyofiziksel Uygulamaları, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 94s, Ankara.
- Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press Inc., 198, San Diego, CA.
- Roux, A., 2002. Fourier Series and Spectral-Finite Difference Methods for the General Linear Diffusion Equation, Pretoria.
- Soytaş, C., 2006. Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 53s, Konya.

- Stuart, A. M., Peplow, A. T., 1991. The Dynamics of Theta Method, SIAM J. SCI. STAT. COMPUT., No 9, 1351-1372.
- Suli, E., 2010. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, 21-53.
- Şimşek, Y., 2011. Kesirli Hesaplar ve Uygulamaları, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 116s, İstanbul.
- Taşbozan, O., 2011. Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Türevli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Çözümü, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 80s, Malatya.
- Tong, P., Feng, Y., Lv, H., 2013. Euler Method for Fractional Differential Equations, WSEAS Transactions on Mathematics.
- Usero, D., 2008. Fractional Taylor Series for Caputo Fractional Derivatives Construction of Numerical Schemes, Elsevier.
- Van Der Houven, P. J., Sommeijer, B. P., 1992. Fractional Runge-Kutta Methods with Application to Convection-Diffusion Equations, Impact of Computing in Science and Engineering 4, 195-216.
- Weilbeer, M., 2005. Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and Their Analytical Background, US.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatih ER

Doğum Yeri ve Yılı : Aydın, 1990

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : fther_09@hotmail.com

Taranmış
Fotoğraf
(3.5cm x 3cm)

Eğitim Durumu

Lise : Süleyman Demirel Anadolu Lisesi, 2008

Lisans : SDÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yayınları

Er, F., Ongun, M. Y., 2016. Standart ve Standart Olmayan Theta Metotlarının Bazı Uygulamaları ve Sonuçları, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Dergisi, Isparta, Basımda.

Projeleri

Lineer Olmayan Yüksek Mertebeden Başlangıç Değer Problemlerinin Laplace Dönüşümü ile Çözümüne Yeni Bir Yaklaşım, 2012, TÜBİTAK-2209 Üniversite Öğrencileri Yurt İçi/Yurt Dışı Araştırma Projeleri Destekleme Programı, Isparta, Yardımcı Araştırmacı.

Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Standart Olmayan Theta Metodu, 2016, Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi, Proje No: 4070-YL1-14, Isparta, Yardımcı Araştırmacı.

Konferansları

Er,F., Ongun,M.Y., Standart ve Standart Olmayan Theta metodu, 13. Matematik sempozyumu, 15-17 Mayıs 2014, Özet Kitabı, p.529-531, Karabük, Türkiye.

Er F., Ongun M.Y., Some Results and Applications of Nonstandad Theta Methods,The 14th International Conference on Mathematics and its Applications, Abstract Book, pp.25 - ICMA 2015,5-7 November 2015, Timişoara, Romania.

