



**7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL
AKIL YÜRÜTME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

Tuba ÖZ

Doktora Tezi

İlköğretim Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Prof. Dr. Ahmet IŞIK

(Her Hakkı Saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ BÖLÜMÜ
İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

**7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME
SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

(The Examination of Mathematical Reasoning Processes of The 7th Grade
Students)

DOKTORA TEZİ

Tuba ÖZ

Danışman: Prof. Dr. Ahmet IŞIK

ERZURUM

Ağustos, 2017

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Prof. Dr. Ahmet IŞIK danışmanlığında, Tuba ÖZ tarafından hazırlanan “Ortaokul 7. sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi” başlıklı çalışma 25/08/2017 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalında doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Cengiz ÇINAR

İmza:

Danışman : Prof. Dr. Ahmet IŞIK

İmza:

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Bülent GÜVEN

İmza:

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Tefvik İŞLEYEN

İmza:

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Alper ÇILTAŞ

İmza:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

26 Eylül 2017



Prof. Dr. Mustafa SÖZBİLİR

Enstitü Müdürü

ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI

Doktora Tezi olarak sunduğum “7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ” başlıklı çalışmanın tarafımdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını ve yararlandığım eserleri kaynakçada gösterdiğimi beyan ederim.

☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☒ Tezim 1 (bir) yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

25 /08 /2017



Tuba ÖZ

ÖZET

DOKTORA TEZİ

7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Tuba ÖZ

2017, 451 sayfa

Bu araştırmanın amacı, 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanı kapsamında matematiksel akıl yürütme süreçlerini incelemektir. Araştırma sürecinde nitel araştırma yaklaşımlarından bütüncül durum çalışması deseni kullanılmıştır. Katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden, ölçüt örnekleme tekniği kullanılmıştır. Bu teknikle belirlenen iki öğretmen ve bu öğretmenlerin sınıflarındaki altışar öğrencileri araştırmanın katılımcılarını oluşturmaktadır.

Veri toplama aracının geçerlik ve güvenilirliğini sağlamak için 2015-2016 güz yarısında araştırmanın örnekleminin dışında farklı bir okulda bir öğretmen ve iki öğrencisi ile pilot çalışma yürütülmüştür. Pilot çalışmadan elde edilen veriler, veri toplama araçlarının madde analizleri, uzman görüşleri birlikte değerlendirilerek asıl uygulamada kullanılacak, “eşitlik ve denklem” konusu ile ilgili beş ve “doğrusal denklemler” konusu ile ilgili dört problem olmak üzere dokuz problemten oluşan veri toplama aracı oluşturulmuştur. Araştırmanın uygulamaları 2015-2016 güz yarısında yapılmıştır. Bu uygulamalarda her bir öğrenci ile iki adet olmak üzere toplamda 24 adet yarı yapılandırılmış mülakat gerçekleştirilmiştir. Verilerin analizi sürecinde matematiksel akıl yürütme süreçlerinin analizi için kullanılan bir yöntem benimsenerek ve elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz kullanılmıştır.

Araştırmada elde edilen bulgular 7. sınıf öğrencilerinin karşılaştıkları problem durumları karşısında, benzetmeye dayalı akıl yürütme türlerinden algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü daha sık kullandıklarını göstermiştir. Ayrıca öğretmenler sınıflarında sundukları matematiksel akıl yürütme fırsatları açısından değerlendirildiğinde, öğretmenlerin zaman zaman çeşitli fırsatlar sunmalarına rağmen genel olarak matematiksel akıl yürütmeyi destekleyebilecek sınırlı fırsatlar sağladığı sonucuna varılmıştır. Öğrenme ortamında sınırlı fırsatlar sunulmasının öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerini etkileyebileceği sonucu elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Akıl Yürütme Becerisi, Matematiksel Muhakeme, Matematiksel Akıl Yürütme Türleri, Ortaokul Öğrencileri

ABSTRACT

DOCTORAL DISSERTATION

THE EXAMINATION OF MATHEMATICAL REASONING PROCESSES
OF THE 7TH GRADE STUDENTS
Tuba ÖZ
2017, 451 page

The aim of this study is to examine the mathematical reasoning processes of the 7th-grade students within the context of algebra learning domain. Integrated case study pattern from the qualitative research approaches was used in the study process. Criterion sampling technique among the purposive sampling methods was used to determine the participants. Two teachers determined with this technique and six students for each class of these teachers constitute the participants of the study.

A pilot study was conducted with a teacher and two students in a different school outside the sample of the study in the 2015-2016 fall semester to ensure the validity and reliability of the data collection tool. The data obtained from the pilot study, item analysis of the data collection tools and expert opinions were evaluated, and a data collection tool consisting of nine problems, five of which were related to “equilibrium and equation” and four of which were related to “linear equations” to be used in the actual study. The practices of the study were conducted in the 2015-2016 fall semester. In these practices, 24 semi-structured interviews, two for each student, were conducted. During the analysis of the data, a method used for the analysis of the mathematical reasoning processes was adopted, and a descriptive analysis was used in the analysis of the data obtained.

The findings obtained in the study indicated that 7th-grade students used algorithmic mathematical reasoning type among the imitative reasoning types more frequently against the problems they encountered. Moreover, when the teachers were evaluated in terms of the mathematical reasoning opportunities they provided in their classes, it was concluded that although teachers provide various opportunities from time to time, in general, they provided limited opportunities to support mathematical reasoning. It was also concluded that providing limited opportunities in the learning domain could affect the mathematical reasoning skills of the students.

Key Words: Mathematical Reasoning Skill, Mathematical Reasoning, Mathematical Reasoning Types, Elementary Students.

ÖN SÖZ

Doktora öğrenimim sürecimin her aşamasında yardımlarını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam, Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tezimin başlangıç aşamasından itibaren değerli görüş ve önerileri ile bana yol gösteren tez izleme jürisindeki saygıdeğer hocalarım Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN, Doç. Dr. Alper ÇILTAŞ'a, ayrıca bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak önüme çıkan zorlukları aşmama katkı sağlayan çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN'e teşekkürlerimi sunarım.

Jürimizde bulunarak bilgi ve tecrübeleri ile katkıda bulunan değerli hocalarım Prof. Dr. Cengiz ÇINAR ve Prof. Dr. Bülent GÜLEN'e, teşekkür ederim.

Çalışmamda yer almayı kabul ederek beni sınıflarına misafir eden ve veri toplama aşamasında ilgili ve anlayışlı yaklaşımlarıyla sürecin sağlıklı ilerlemesine katkıda bulunan öğretmenler ve öğrencilerine çok teşekkür ederim.

Sadece tez döneminde değil arkadaşlıkları ile her zaman yanımda olan desteklerini hiç esirgemeyen mesai arkadaşlarım Zeynep ÇİFTÇİ, Aysun YEŞİLYURT ÇETİN, Ferhat ÖZTÜRK ve Bilge ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde en büyük katkıyı sağlayan, maddi manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem Fatma KAPLAN, özverili olmasını ve çalışkanlığını her zaman örnek aldığım değerli babam Sebahattin KAPLAN, sevgili kardeşim Mücahit KAPLAN ve ailemize dâhil olduğu için mutluluk duyduğum Esin KAPLAN'a teşekkürlerimi borç bilirim.

Hayatıma girdiği andan itibaren sevgi ve anlayışıyla beni destekleyen, sevgili eşim Emre ÖZ, kıymetli annem ve babam Nurten ÖZ ve Nutullah ÖZ, kardeşlerim Ahmet ÖZ, Hamza ÖZ ve Hacer İŞLEYEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TUBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Erzurum- 2017

Tuba ÖZ

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI	i
TEZ ETİK VE BİLDİRİM SAYFASI	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖN SÖZ	v
TABLolar DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xvii

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	3
1.2. Problem Cümlesi.....	5
1.3. Alt Problemler.....	5
1.4. Araştırmanın Amacı ve Önemi	5
1.5. Varsayımlar.....	7
1.6. Sınırlılıklar	8

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	8
2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi	8
2.1.1. Matematiksel Düşünme ve Matematiksel Akıl Yürütme	8
2.1.2. Matematiksel Akıl Yürütme Yaklaşımları.....	14
2.1.2.1. Benzetmeye Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Imitative Reasoning). 16	
2.1.2.2. Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Creative Reasoning (CMR)).....	19
2.1.3. Matematiksel Akıl Yürütme Becerisinin Geliştirilmesi	19
2.1.4. Cebir ve Cebir Öğretimi	22
2.2. İlgili Araştırmalar.....	25

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM.....	36
3.1. Araştırmanın Modeli	36
3.2. Araştırma Grubu	37
3.3. Veri Toplama Araçları	39
3.3.1. Matematiksel Akıl Yürütme Testi	39
3.3.2. Yarı Yapılandırılmış Mülakatlar.....	44
3.3.3. Gözlem ve Video Kayıtları.....	46
3.4. Veri Toplama Araçlarının Geçerliği ve Güvenirliği	47
3.5. Araştırmacının Rolü.....	48
3.6. Pilot Uygulama	48
3.7. Araştırmanın Uygulanması	50
3.8. Verilerin Analizi	51
3.8.1. Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerin Analizi	51
3.8.2. Gözlem/ Video Kayıtlarının Analizi.....	37
3.9. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği	41

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM.....	63
4.1. Öğrencilerin Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular.....	63
4.1.1. Öğrencilerin “Eşitlik ve Denklem” Konusu Kapsamında Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular	63
4.1.1.1. Ahmet’in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	64
4.1.1.2. Barış’ın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	80
4.1.1.3. Cengiz’in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	92
4.1.1.4. Emin’in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	104
4.1.1.5. Faruk’un Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	115
4.1.1.6. Nilgün’ün Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	128
4.1.1.7. Ece’nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	140
4.1.1.8. Efe’nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	151
4.1.1.9. Hale’nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	162
4.1.1.10. Hülya’nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	172

4.1.1.11. Rabia'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	183
4.1.1.12. Seda'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	194
4.1.2. Öğrencilerin “Doğrusal Denklemler” Konusu Kapsamında Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular.....	203
4.1.2.1. Ahmet'in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	204
4.1.2.2. Barış'ın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	219
4.1.2.3. Cengiz'in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	229
4.1.2.4. Emin'in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	239
4.1.2.5. Faruk'un Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	253
4.1.2.6. Nilgün'ün Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	264
4.1.2.7. Ece'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	276
4.1.2.8. Efe'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	289
4.1.2.9. Hale'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	300
4.1.2.10. Hülya'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	312
4.1.2.11. Rabia'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci	323
4.1.2.12. Seda'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci.....	336
4.2. Öğrenme Ortamında Öğretmenlerin Öğrencilere Sundukları Matematiksel Akıl Yürütme Becerisi Fırsatları İle İlgili Bulgular	349
4.2.1. Eda Öğretmenin Sınıfındaki Öğrenme Ortamı	349
4.2.2. Eda Öğretmenin Öğrenme Ortamında Sunduğu Örneklerin Analizine Dair Bulgular	353
4.2.2.1. Eda Öğretmen tarafından sunulan birinci örnek.....	353
4.2.2.2. Eda Öğretmen tarafından sunulan ikinci örnek	355
4.2.2.3. Eda Öğretmen tarafından sunulan üçüncü örnek.....	356
4.2.2.4. Eda Öğretmen tarafından sunulan dördüncü örnek	358
4.2.2.5. Eda Öğretmen tarafından sunulan beşinci örnek.....	361
4.2.2.6. Eda Öğretmen tarafından sunulan altıncı örnek	364
4.2.2.7. Eda Öğretmen tarafından sunulan yedinci örnek	366
4.2.2.8. Eda Öğretmen tarafından sunulan sekizinci örnek	368
4.2.2.9. Eda Öğretmen tarafından sunulan dokuzuncu örnek.....	372
4.2.3. Tülay Öğretmenin Sınıfındaki Öğrenme Ortamı.....	377

4.2.4. Tülay Öğretmenin Öğrenme Ortamında Sunduğu Örneklerin Analizine Dair Bulgular	380
4.2.4.1. Tülay Öğretmen tarafından sunulan birinci örnek.....	380
4.2.4.2. Tülay Öğretmen tarafından sunulan ikinci örnek	381
4.2.4.3. Tülay Öğretmen tarafından sunulan üçüncü örnek.....	382
4.2.4.4. Tülay Öğretmen tarafından sunulan dördüncü örnek	384
4.2.4.5. Tülay Öğretmen tarafından sunulan beşinci örnek.....	386
4.2.4.6. Tülay Öğretmen tarafından sunulan altıncı örnek	387
4.2.4.7. Tülay Öğretmen tarafından sunulan yedinci örnek	389
4.2.4.8. Tülay Öğretmen tarafından sunulan sekizinci örnek.....	391
4.2.4.9. Tülay Öğretmen tarafından sunulan dokuzuncu örnek.....	393

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	398
5.1. Öğrencilerin Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Sonuç, Tartışma ve Öneriler.....	398
5.2. Öğrenme Ortamında Öğretmenlerin Öğrencilere Sundukları Matematiksel Akıl Yürütme Becerisi Fırsatları İle İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler.....	403
KAYNAKÇA	409
EKLER.....	418
EK 1. Erzurum Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden Alınan İzin Belgesi ...	418
EK 2. Uzman görüş formu.....	420
EK 3. Matematiksel Akıl Yürütme Testi.....	420
EK 4. Eda öğretmenin kullandığı çalışma kağıdı örnekleri.....	425
EK 5. Boyama Etkinliği Kâğıdı.....	426
EK 6. Denklem çözme etkinliği.....	427
EK 7. Denklem çözme etkinlik kağıdı.....	429
ÖZGEÇMİŞ.....	430

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 3.1.	Araştırmaya Katılan Öğretmen Özellikleri.....	38
Tablo 3.2.	Araştırmaya Katılan Öğrenci Özellikleri	38
Tablo 3.3.	Araştırmada Kullanılan Veri Toplama Araçlarının Kullanılma Gerekçeleri.....	39
Tablo 3.4.	“Cebirsel İfadeler”, “Eşitlik ve Denklem”, “Doğrusal Denklemler” Konuları İle İlgili Kazanımlar ve Kazanımlara Ayrılan Ders Saatleri	40
Tablo 3.5.	7. sınıf Matematiksel Akıl Yürütme Testi Madde Belirtke Tablosu	42
Tablo 3.7.	Katılımcılarla Yapılan Mülakat Tarih ve Süreleri	45
Tablo 3.8.	Araştırmanın Gözlem Süreci	46
Tablo 3.9.	Veri Toplama Araçlarının Geçerlik ve Güvenirliği İçin Yapılan Çalışmalar	47
Tablo 3.10.	Araştırmanın geçerlik ve güvenirliği için yapılan uygulamalar	41
Tablo 4.1.	Ahmet’in “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	79
Tablo 4.2.	Barış’ın “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	91
Tablo 4.3.	Cengiz’in “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	103
Tablo 4.4.	Emin’in “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	115
Tablo 4.5.	Faruk’un “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	128
Tablo 4.6.	Nilgün’ün “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	140
Tablo 4.7.	Ece’nin “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	151
Tablo 4.8.	Efe’nin “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	161
Tablo 4.9.	Hale’nin “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	172

Tablo 4.10. Hülya'nın "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	183
Tablo 4.11. Rabia'nın "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	193
Tablo 4.12. Seda'nın "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	203
Tablo 4.13. Ahmet'in "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	218
Tablo 4.14. Barış'ın "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	229
Tablo 4.15. Cengiz'in "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	239
Tablo 4.16. Emin'in "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	252
Tablo 4.17. Faruk'un "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	264
Tablo 4.18. Nilgün'ün "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	276
Tablo 4.19. Ece'nin "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	288
Tablo 4.20. Efe'nin "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	300
Tablo 4.21. Hale'nin "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	311
Tablo 4.22. Hülya'nın "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	322
Tablo 4.23. Rabia'nın "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	335
Tablo 4.24. Seda'nın "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri	347
Tablo 4.25. Öğrencilerin Problemlere Yönelik Sergiledikleri Matematiksel Akıl Yürütme Beceri Türleri.....	348

Tablo 4.26. Eda Öğretmenin “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konularının öğretim süreci	350
Tablo 4.27. Eda öğretmenin öğretim ortamında sunduğu örneklerin matematiksel akıl yürütme fırsatları açısından değerlendirilmesi	376
Tablo 4.28. Tülay öğretmenin “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konularını öğretim süreci	378
Tablo 4.29. Tülay öğretmenin öğretim ortamında sunduğu örneklerin matematiksel akıl yürütme fırsatları açısından değerlendirilmesi	396



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Akıl Yürütmenin Kaynağı	10
Şekil 2.2. Problem çözmede akıl yürütme serisi	11
Şekil 2.3. Akkuş ve Duatepe (2002)'nin matematiksel akıl yürütme sınıflandırması	15
Şekil 2.4. Lithner (2008)'in matematiksel akıl yürütme sınıflandırması	16
Şekil 2.5. Sınıf seviyelerine göre içerik standartları farklı vurgulanır	23
Şekil 4.1. Ahmet'in birinci probleme ait çözümü	65
Şekil 4.2. Ahmet'in ikinci probleme ait çözümü	68
Şekil 4.3. Ahmet'in üçüncü probleme ait çözümü	73
Şekil 4.4. Ahmet'in dördüncü probleme ait çözümü	76
Şekil 4.5. Ahmet'in beşinci probleme ait çözümü	78
Şekil 4.6. Barış'ın birinci probleme ait çözümü	80
Şekil 4.7. Barış'ın ikinci probleme ait çözümü	82
Şekil 4.8. Barış'ın üçüncü probleme ait çözümü	85
Şekil 4.9. Barış'ın dördüncü probleme ait çözümü	87
Şekil 4.10. Barış'ın beşinci probleme ait çözümü	90
Şekil 4.11. Cengiz'in birinci probleme ait çözümü	93
Şekil 4.12. Cengiz'in ikinci probleme ait çözümü	95
Şekil 4.13. Cengiz'in üçüncü probleme ait çözümü	97
Şekil 4.14. Cengiz'in dördüncü probleme ait çözümü	99
Şekil 4.15. Cengiz'in beşinci probleme ait çözümü	102
Şekil 4.16. Emin'in birinci probleme ait çözümü	104
Şekil 4.17. Emin'in ikinci probleme ait çözümü	107
Şekil 4.18. Emin'in üçüncü probleme ait çözümü	109
Şekil 4.19. Emin'in dördüncü probleme ait çözümü	112
Şekil 4.20. Emin'in beşinci probleme ait çözümü	114
Şekil 4.21. Faruk'un birinci probleme ait çözümü	116
Şekil 4.22. Faruk'un ikinci probleme ait çözümü	118
Şekil 4.23. Faruk'un üçüncü probleme ait çözümü	120
Şekil 4.24. Faruk'un dördüncü probleme ait çözümü	124
Şekil 4.25. Faruk'un beşinci probleme ait çözümü	126

Şekil 4.26. Nilgün'ün birinci probleme ait çözümü	130
Şekil 4.27. Nilgün'ün ikinci probleme ait çözümü	132
Şekil 4.28. Nilgün'ün üçüncü probleme ait çözümü.....	135
Şekil 4.29. Nilgün'ün dördüncü probleme ait çözümü	137
Şekil 4.30. Nilgün'ün beşinci probleme ait çözümü	139
Şekil 4.31. Ece'nin birinci probleme ait çözümü	141
Şekil 4.32. Ece'nin ikinci probleme ait çözümü	143
Şekil 4.33. Ece'nin üçüncü probleme ait çözümü.....	145
Şekil 4.34. Ece'nin dördüncü probleme ait çözümü	147
Şekil 4.35. Ece'nin beşinci probleme ait çözümü	149
Şekil 4.36. Efe'nin birinci probleme ait çözümü	152
Şekil 4.37. Efe'nin ikinci probleme ait çözümü.....	154
Şekil 4.38. Efe'nin üçüncü probleme ait çözümü	156
Şekil 4.39. Efe'nin dördüncü probleme ait çözümü.....	158
Şekil 4.40. Efe'nin beşinci probleme ait çözümü	160
Şekil 4.41. Hale'nin birinci probleme ait çözümü	162
Şekil 4.42. Hale'nin ikinci probleme ait çözümü.....	164
Şekil 4.43. Hale'nin üçüncü probleme ait çözümü	166
Şekil 4.44. Hale'nin dördüncü probleme ait çözümü.....	168
Şekil 4.45. Hale'nin beşinci probleme ait çözümü	171
Şekil 4.46. Hülya'nın birinci probleme ait çözümü	173
Şekil 4.47. Hülya'nın ikinci probleme ait çözümü	175
Şekil 4.48. Hülya'nın üçüncü probleme ait çözümü	177
Şekil 4.49. Hülya'nın dördüncü probleme ait çözümü	180
Şekil 4.50. Hülya'nın beşinci probleme ait çözümü	182
Şekil 4.51. Rabia'nın birinci probleme ait çözümü.....	184
Şekil 4.52. Rabia'nın ikinci probleme ait çözümü	186
Şekil 4.53. Rabia'nın üçüncü probleme ait çözümü	188
Şekil 4.54. Rabia'nın dördüncü probleme ait çözümü	190
Şekil 4.55. Rabia'nın beşinci probleme ait çözümü.....	192
Şekil 4.56. Seda'nın birinci probleme ait çözümü	194
Şekil 4.57. Seda'nın ikinci probleme ait çözümü	196

Şekil 4.58. Seda'nın üçüncü probleme ait çözümü	198
Şekil 4.59. Seda'nın dördüncü probleme ait çözümü	200
Şekil 4.60. Seda'nın beşinci probleme ait çözümü	202
Şekil 4.61. Ahmet'in birinci probleme ait çözümü	205
Şekil 4.62. Ahmet'in ikinci probleme ait çözümü	210
Şekil 4.63. Ahmet'in üçüncü probleme ait çözümü	213
Şekil 4.64. Ahmet'in dördüncü probleme ait çözümü	216
Şekil 4.65. Barış'ın birinci probleme ait çözümü	219
Şekil 4.66. Barış'ın ikinci probleme ait çözümü.....	222
Şekil 4.67. Barış'ın üçüncü probleme ait çözümü	225
Şekil 4.68. Barış'ın dördüncü probleme ait çözümü.....	227
Şekil 4.69. Cengiz'in birinci probleme ait çözümü.....	230
Şekil 4.70. Cengiz'in ikinci probleme ait çözümü	233
Şekil 4.71. Cengiz'in üçüncü probleme ait çözümü	235
Şekil 4.72. Cengiz'in dördüncü probleme ait çözümü	238
Şekil 4.73. Emin'in birinci probleme ait çözümü	241
Şekil 4.74. Emin'in ikinci probleme ait çözümü.....	244
Şekil 4.75. Emin'in üçüncü probleme ait çözümü	248
Şekil 4.76. Emin'in dördüncü probleme ait çözümü	251
Şekil 4.77. Faruk'un birinci probleme ait çözümü.....	254
Şekil 4.78. Faruk'un ikinci probleme ait çözümü	257
Şekil 4.79. Faruk'un üçüncü probleme ait çözümü	260
Şekil 4.80. Faruk'un dördüncü probleme ait çözümü	262
Şekil 4.81. Nilgün'ün birinci probleme ait çözümü	265
Şekil 4.82. Nilgün'ün ikinci probleme ait çözümü	268
Şekil 4.83. Nilgün'ün üçüncü probleme ait çözümü.....	271
Şekil 4.84. Nilgün'ün dördüncü probleme ait çözümü	274
Şekil 4.85. Ece'nin birinci probleme ait çözümü	277
Şekil 4.86. Ece'nin ikinci probleme ait çözümü	281
Şekil 4.87. Ece'nin üçüncü probleme ait çözümü.....	284
Şekil 4.88. Ece'nin dördüncü probleme ait çözümü	287
Şekil 4.89. Efe'nin birinci probleme ait çözümü	290

Şekil 4.90. Efe'nin ikinci probleme ait çözümü.....	293
Şekil 4.91. Efe'nin üçüncü probleme ait çözümü	296
Şekil 4.92. Efe'nin dördüncü probleme ait çözümü.....	298
Şekil 4.93. Hale'nin birinci probleme ait çözümü	301
Şekil 4.94. Hale'nin ikinci probleme ait çözümü.....	304
Şekil 4.95. Hale'nin üçüncü probleme ait çözümü	307
Şekil 4.96. Hale'nin dördüncü probleme ait çözümü.....	310
Şekil 4.97. Hülya'nın birinci probleme ait çözümü	313
Şekil 4.98. Hülya'nın ikinci probleme ait çözümü	316
Şekil 4.99. Hülya'nın üçüncü probleme ait çözümü	318
Şekil 4.100. Hülya'nın dördüncü probleme ait çözümü	321
Şekil 4.101. Rabia'nın birinci probleme ait çözümü.....	324
Şekil 4.102. Rabia'nın ikinci probleme ait çözümü	328
Şekil 4.103. Rabia'nın üçüncü probleme ait çözümü	331
Şekil 4.104. Rabia'nın dördüncü probleme ait çözümü	334
Şekil 4.105. Seda'nın birinci probleme ait çözümü	337
Şekil 4.106. Seda'nın ikinci probleme ait çözümü	341
Şekil 4.107. Seda'nın üçüncü probleme ait çözümü	344
Şekil 4.108. Seda'nın dördüncü probleme ait çözümü	346
Şekil 4.109. Eda Öğretmenin sınıfının oturma planı	350
Şekil 4.110. Tülay Öğretmenin sınıfının oturma planı	378

KISALTMALAR DİZİNİ

MR	: Ezbere Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Memorised Reasoning)
AR	: Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Algorithmic Reasoning)
FAR	: Bilinen Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning)
DAR	: Sınırlandırılmış Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning)
GAR	: Rehber Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Guided Algorithmic Reasoning)
Person GAR	: Kişi Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Person Guided Algorithmic Reasoning)
Text GAR	: Doküman Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Text Guided Algorithmic Reasoning)
CR	: Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Creative Reasoning)
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Bir takım bağıntı ve yorumlarıyla insan hayatına destek veren bir bilim dalı olan matematik (Altun, 2005), içinde yaşadığımız dünyayı anlamak ve onun üzerinde güç kazanmak açısından önemlidir (Baki, 2008). Matematik mantıklı düşünmeyi geliştiren bir sistem olup, yakın çevremizi ve dünyamızı anlamamızda iyi bir yardımcıdır (Baykul, 2014). Enstüstriden teknolojiye kadar birçok medeniyet harikası matematiğe borçludur (Işık ve Bekdemir, 1998). Küreselleşmeden yana olan ve bütün bilim dalları ile ilgilenen matematik, teknolojik gelişmelerde ve bilgi çağını izlemede büyük pay sahibi olarak göze çarpmaktadır (Işık, 2002). Bilgi ve teknolojinin hızla ilerlemesiyle günlük yaşamda matematiği anlayabilme ve kullanabilme gereksinimi artmakta ve matematiğin bireye kazandırdığı becerilere daha fazla ihtiyaç duyulmaktadır (Gündoğdu, Albayrak, Ozan ve Çelik, 2012). Çünkü matematik; cebiri, cebirsel işlemleri, geometriyi ve daha birçok konuyu öğretirken kendi doğası gereği özünde bulunan akıl yürütmeyi, gerekçeli düşünmeyi, keşfetmeyi, tahminde bulunmayı ve sonuçlara ulaşmayı öğretmektedir (Umay, 2003). Dolayısıyla, öğrencilerin matematiği “hissedilir, yararlı, uğraşmaya değer” görmelerine ve “özenle ve sebat ederek” çalışmalarına yardım edecek öğrenme ortamları oluşturmak önemlidir (MEB, 2013). Birçok bilim dalı tarafından da ihtiyaç duyulan, geçmişten günümüze kullanım alanları ve muhteşem doğası ile önemini hiç kaybetmemiş olan matematiğin yükselişi matematik eğitimi ve öğretimi hususunda gelişmelerin artışı da beraberinde getirmiştir. Bu gelişmelerin ışığında matematik eğitimini ve öğretimi yeniden yapılandırma sürecine girilmiştir. Baydar ve Bulut (2002)’a göre, eğitim sisteminin her aşamasında matematik eğitiminin kalitesini yükseltmek için çeşitli amaçlar belirlenmektedir. Nitekim ortaokul öğretim programının genel amaçları da; matematiği öğrenmek; temel kavram ve becerilerin kazanılmasının yanı sıra matematikle ilgili düşünmeyi, problem çözme stratejilerini kavramayı ve

matematiğin gerçek yaşamda önemli bir araç olduğunu fark etmeyi de içermektedir (MEB, 2013).

Matematik eğitiminin önemi herkes tarafından bilinmesine rağmen matematiğin öğretimi veya öğrenilmesi zor bir süreç gerektirir. Bu sürecin tamamlanabilmesi ise özellikle matematiksel düşünmeye bağlıdır (Kaya ve Keşan, 2014). Matematiksel düşünme sadece matematiksel problemleri çözmek için değil aynı zamanda matematik öğrenmek için de önemlidir (Stacey, 2006). Matematik, rakamlara ve ölçmeye dayalı bir bilim olduğundan soyut varlıkları ve bunlar arasındaki bağlantıları akıl yürütme esasına göre incelemektedir (Işık, 2002). Bu anlamda matematik ve akıl yürütmeyi birbirinden bağımsız düşünmek imkânsızdır. Matematiği tam manasıyla öğrenme ve matematikte başarılı olmanın yolu matematiksel akıl yürütme ve düşünmeden geçmektedir (Umay ve Kaf, 2005). Çünkü matematiksel akıl yürütme matematik başarısı ile ilgili bir değişkendir (Sprigler and Alsub, 2003).

İnsan zekâsının bir ürünü olan akıl yürütme, varsayımlarda bulunma ve mantıksal çıkarsama etkinlikleri matematiğe asıl kimliğini kazandırır (Baki, 2008). Matematikteki tüm kuralların ve işlemlerin temelinde akıl yürütme vardır (Umay ve Kaf, 2005). Alkan ve Altun (1998), matematiği genel kullanım, matematik ile iletişim ve muhakeme etme olmak üzere üç ana bölüme ayırmıştır. Matematiksel düşünme ve akıl yürütme, matematik yapmak ve öğrenmek için gerekli unsurlardır (Başaran, 2011). Baykul (2014)'a göre matematik yapmak; akıl yürütme, ilişkilendirme ve problem çözme demektir. Bununla birlikte akıl yürütme, ilişkilendirme ve problem çözme becerileri birbirinden bağımsız değildir. Örneğin, problem çözme becerisinde ilişkilendirme ve akıl yürütme, ilişkilendirmede de akıl yürütme becerisi kullanılır. Ball ve Bass (2003)'a göre akıl yürütme matematiğin temel becerisidir ve matematiksel kavramları anlamak, matematiksel fikirler ve prosedürlerin esnekliğini kullanmak ve unutulmuş matematiksel bilgileri tekrar düzenlemek açısından oldukça gereklidir. Matematiksel akıl yürütme, problem çözme düzeyinin daha üst düzey unsurlarının tüm yönlerini temel almaktadır. Öğrenciler matematiksel akıl yürütmeyi kullanmaksızın problemleri anlayamaz, analiz edemez veya problemlere nasıl yaklaşacaklarını planlayamazlar (Artz and Yaloz-Femina, 1999).

1.1. Problem Durumu

Matematik, çok sayıda örnek çözmek veya öğretmenin açıkladığı yöntemleri taklit etmekten daha öte bir şeydir (Van de Walle, Karp and Bay-Williams, 2012). Baki (2008)'e göre, matematik eğitiminde en önemli sorunlardan biri matematik bilgisinin doğasına bakıştan kaynaklanan çarpıklıktır. Öğrenci yapılandırarak öğrenme yerine kendine hazır olarak sunulmuş ve cilalanmış bilgiyi edinmeye yönelmektedir. Bunun sonucunda öğrenciler matematiği her yerde kullanabilecekleri bir araç olarak değil de sınavlardan geçer not alınması gereken bir ders olarak görmektedir. Işık (2007)'a göre; matematik öğrencilerin aklında hatırlamaya ve ezberlemeye yönelik karışık yöntemler ve çok zor algılanan formüller dizisi olarak bırakılmamalı; matematiğin düşünmeye, akıl yürütmeye ve sezgiye dayalı olduğu vurgulanmalıdır. Amaç, matematiksel düşünmeyi ve matematiği kullanma becerisini kazandırmak olmalıdır (Baki, 2008). Bu fikre paralel olarak Hiebert (2003)'e göre matematik eğitiminde temel bir problem, bir yandan öğrencilerin sorunlu çözücü olmaları, diğer yandan bir dizi araştırma ve reformlar sonrasında bile pek çok öğrencinin hala algoritmik düşünceleri ve ezbere dayalı öğrenme yapmalarıdır. Yani, hedef ile sonuç arasında tutarsızlık olmasıdır.

Sfard (1991)'a göre, ardışık karmaşık şemalar ile yapılanmayan sadece saklanabilen kavramsal yapılar olmaksızın, ezbere işlemler insan zihnini çalıştırmak için yetersizdir (Akt. Lithner, 2005). Öğrenciler ve bireyler, karar vermek veya günlük yaşamdaki iddiaların geçerliliğini sentezlemek için matematiksel düşünme ile birlikte akıl yürütmeyi kullanırlar (Başaran, 2011). Bu bağlamda öğrencilere bilimsel, yaratıcı, demokratik, çok boyutlu, matematiksel ve eleştirel düşünme gibi üst düzey düşünme becerileri kazandırmak tüm eğitimcilerin en önemli görevidir (Ersoy ve Başer, 2013). Matematiksel akıl yürütme odaklı matematik eğitimi ile ilköğretim eğitimini tamamlayan öğrenciler, kendi düşüncelerini ifade edebilecek ve yeni sorun durumları ile ilgili araştırmaya istekli olacaklardır (Russell, 1999). Altıparmak ve Öziş (2005)'e göre akıl yürütme sadece matematiksel değil aynı zamanda temel bir yetenek olup akıl yürütme yeteneğinin gelişimi okullardaki programa oldukça bağlıdır. İlköğretim ve ortaöğretimde okul matematiğinin amacı, öğrenciye istenilen matematik kültürünü vermek ve beklenen matematik becerileri yanında matematiksel düşünme yeteneğini de kazandırmaktır (Baki, 2008).

Matematiksel akıl yürütme süreci öğretmen gibi bir rehbera ihtiyaç duyar (Brodie, 2010). Matematiksel düşünceyi öğretmek amacıyla öğrenciler için fırsatlar yaratmak, öğretmenlerin matematiksel düşünmesini de gerektirir (Stacey, 2006). Bu anlamda eğitimciler büyük bir sorumluluk yüklenmiş olmaktadır. Öğrencilerin sundukları çeşitli yöntemleri kabul etmek veya anlamaktan ziyade kendi akıl yürütme örneklerini öğrencilere empoze etmeye çalışan öğretmenler, öğrencilerinin matematiğı öğrenmelerini sağlayacak olan zengin bir fırsatı kaçırırlar (House, 1999). Bu anlamda öğrenme durumunda bir akıl yürütme türüyle çalışmak, başarı durumunda belli bir akıl yürütme türüne yol açabilir (Lithner, 2005).

Öğretmenlerin öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme süreçleri ile ilgili bilgi sahibi olmaları, matematiksel akıl yürütme becerisinin kazandırılması ve geliştirilmesi açısından sınıf içi öğretimde sunacakları fırsatları etkileyeceğinden öğrencilerin matematiksel akıl yürütme beceri türlerinin belirlenmesi öğretmenlere yol gösterebilir. Matematiksel akıl yürütme becerisinin kazandırılabilceğı bir öğretim sürecinin planlanması öğretmenlerin matematiksel akıl yürütme becerisinin nasıl kazandırılacağı konusunda bilgi sahibi olmalarını gerektirmektedir. Bu anlamda matematiksel akıl yürütme becerisi ile ilgili öğrencilerin matematiksel akıl yürütme türlerinin ve bu beceri ile ilgili öğretim ortamından yansımalarının belirlenmesinin önemli olduğı düşünülmektedir.

Matematik başarısını elde etmede cebir öğretimi önemli bir rol üstlenmektedir. İlköğretimden başlayarak devam eden cebir öğretimi, öğrencilerin temel cebirsel kavramları anlamaları ve cebirsel düşüncelerinin gelişimi ile yakından ilişkilidir (Mert Uyangör ve Dikkartın Övez, 2012). Öğrenciler cebir çalışmalarına başladıklarında, işlemlerin özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri temsil etmenin etkili bir yolu olan yeni bir dil öğrenirler (Schifter, 1999). Sayılarla aritmetiğı, şekillerle geometriyi öğrenen öğrenciler, semboller ve harfler kullanarak da cebire giriş yaparlar. Cebirde, aritmetikte olduğı gibi sadece bir ya da birkaç sayıyı değil bütün sayıları, sayı kümelerini düşünmek gerekir. Bu nedenle cebir, aritmetiğe oranla daha soyut görünür (Palabıyık ve Okkuş İspir, 2011). Sağladığı soyut düşünce yapısıyla cebir, birçok açıdan, matematiğın alt alanları ve diğeri bilim dallarının öğeleri arasında kavramsal ve kuramsal açılardan ortak bir köprü ve dil görevi üstlenmektedir (Erbaş, Çetinkaya ve Ersoy, 2009). Cebir önemli olduğı kadar aynı zamanda öğrencilerin zorlandıkları bir

alandır (Dede ve Argün, 2003). Bu sebeple cebir öğrenme alanı birçok araştırmanın konusu olarak karşımıza çıkmaktadır.

1.2. Problem Cümlesi

7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanı kapsamında matematiksel akıl yürütme süreçleri ve öğretmenlerin öğrencilere sundukları matematiksel akıl yürütme becerisi fırsatları nasıldır?

Bu çerçevede araştırma probleminin cevaplanabilmesi için aşağıdaki alt problemlere de yanıt aranmıştır.

1.3. Alt Problemler

1. 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanı kapsamında matematiksel akıl yürütme beceri türleri nelerdir?
2. Öğretmen- öğrenci iletişim becerileri dikkate alındığında, çalışmaya dâhil olan öğretmenlerin öğrencilere sundukları matematiksel akıl yürütme becerisi fırsatları nasıldır?

1.4. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu araştırmanın amacı 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanı kapsamında matematiksel akıl yürütme süreçlerini ve öğretmenlerin öğrencilere sundukları matematiksel akıl yürütme becerisi fırsatlarını incelemektir.

Matematik öğretim programında ve matematik eğitiminde önemli bir yeri olan matematiksel akıl yürütme becerisinin istenilen düzeyde olması ve amacına ulaşması önemlidir. Ulusal ve uluslararası öğretim programları ve reform çalışmalarında akıl yürütmenin önemi vurgulanmıştır. NCTM (2010); akıl yürütme ve ispatla ilgili anaokulundan 12. sınıfa kadar eğitim programlarının;

- Matematiğin temeli olan akıl yürütme ve ispatın farkına varma
- Matematiksel varsayımları araştırma ve oluşturma
- Matematiksel argümanları ve ispatları geliştirme ve değerlendirme
- İspat metotları ve çeşitli akıl yürütme tiplerini seçme ve kullanma

imkânı verdiğini vurgulamaktadır (Ball ve Boss, 2003).

Ortaokul matematik dersi öğretim programında ise, temel beceriler arasında matematiksel süreç becerileri altında iletişim ve ilişkilendirmenin yanı sıra akıl yürütme de yer almaktadır. Ortaokul matematik dersi öğretim programında akıl yürütme (muhakeme); *eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci* olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle matematik öğretim sürecinde bu becerinin geliştirilmesi için ortamlar hazırlanmasının gerekliliği vurgulanmaktadır (MEB, 2013). Steen (1999) matematiksel akıl yürütmenin öğretim programının amaçlarını desteklemek için oldukça yeterli olduğunu vurgulamaktadır. Bu anlamda, bütün alanlarda ve matematik öğretiminin her seviyesinde merkezi bir unsur olarak akıl yürütmenin vurgulanması; matematik eğitimcilerinin, bireylerin nasıl öğrendiğini daha iyi anlayabilmeleri için kasıtlı bir tercihtir (Yackel and Hanna, 2003).

Matematiksel akıl yürütme becerisi ile ilgili çalışmalar; matematiksel akıl yürütme ile ilgili duyuşsal ve demografik etmenleri belirlemeyi temel alan (Başaran, 2011; Assaf, 2014), matematiksel akıl yürütme becerisi ve üst biliş arasındaki ilişkiyi inceleyen (Çoban, 2010; Kramarski and Mevarech, 2003; Mevarech and Fridkin, 2006; Pilten, 2008) matematiksel akıl yürütme becerisinin gelişimi için deneysel uygulamaları içeren (Erdem, 2015; Tıraşoğlu, 2013; Yankelwitz, 2009), matematiksel akıl yürütme ve ispatı inceleyen (Aslan, 2007; Bahtiyari, 2010; Gülşen, 2012), matematiksel akıl yürütme türlerini araştıran (Çiftçi, 2015; Lithner, 2008) olarak sınıflandırılabilir. Ayrıca; kesirler (Erdem, 2015; Yankelwitz, 2009), tamsayılar (Erdem, 2015) analiz konuları (Çiftçi, 2015; Lithner, 2003; Lithner, 2004), ölçme (Işıksal, Koç ve Osmanoglu, 2010; McClain, Cobb, Gravmeijer ve Estes, 1999), cebir (Greenes ve Findell, 1999; Schifter, 1999) matematiksel akıl yürütme becerisinin çalışıldığı konular arasındadır.

Susac, Bubic, Vrbanc and Planinic (2013)'e göre cebir, genellikle okul matematiğinde öğrencilerin soyut akıl yürütmelerini teşvik eden ilk matematik alanıdır. Ayrıca öğrenciler matematik ve fen alanlarında ilerlemeleri için somut aritmetikten cebirin sembolik diline geçerken, soyut matematiksel kavramalarını geliştirirler.

Literatür incelendiğinde ise, cebir öğrenme alanı ile ilgili çok sayıda çalışma olduğu görülmektedir. Bunlardan bazıları; cebir öğrenme alanında kavram yanlışlarını belirleme ve gidermeyle ilgili (Akkaya ve Durmuş, 2015; Erdem, 2013; Soylu, 2008), cebir ile ilgili (Akgün, 2006; Akgün, 2009; Akkaya ve Durmuş, 2006; Dede ve Argün, 2003; Dede, 2004; Gürbüz ve Akkan, 2008; MacGregor ve Stacey, 1997; Mert Uyangör ve Dikkartın Övez, 2012; Yenilmez ve Avcu, 2009) cebir ve akıl yürütme ile ilgili (Bergsten, 2006; De Castro, 2004; Greenes ve Findell, 1999; Nathan ve Koedinger, 2000; Schifter, 1999; Susac vd. 2013) çalışmalardır. Cebir öğrenme alanının matematik eğitimi için öneminden, öğrenciye kazandırdıklarından, soyut düşünme için bir adım olduğundan ve öğretim programlarındaki yerinden dolayı araştırmanın cebir öğrenme alanında yapılmasına karar verilmiştir.

Literatür incelemesinde ülkemizde matematiksel akıl yürütme ile ilgili yapılmış çalışmaların çoğunlukla deneysel çalışmalar (Başaran, 2011; Çoban, 2010; Erdem, 2015; Pilten, 2008; Tıraşoğlu, 2013) olduğu nitel yaklaşımı benimseyen (Çiftçi, 2015) çalışmaların sınırlı olduğu ve cebir öğrenme alanı ile ilgili çalışmaların az olduğu görülmüştür. İlköğretim düzeyinde matematiksel akıl yürütme süreçlerini bir bütün olarak ele alan ve hem akıl yürütme türlerini belirleyen hem de öğrenme ortamının akıl yürütme üzerine yansımalarını inceleyen çalışmaya rastlanmamıştır. Bu bağlamda bu araştırma, ortaokul üçüncü sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanı kapsamında matematiksel akıl yürütme beceri süreçlerini incelemesi, var olan durumu ortaya çıkarması, akıl yürütme becerisi türlerini belirlemesi ve öğretmenlerin öğrenme ortamında matematiksel akıl yürütme becerisi ile ilgili sundukları fırsatları değerlendirmesi yönüyle diğer çalışmalardan ayrılmaktadır. Araştırmamız bu yönüyle öğretmenlere rehber olma ve öğretmenleri bilgilendirme açısından da öneme sahiptir.

1.5. Varsayımlar

- Araştırmaya katılan öğrencilerin samimi cevap verdikleri ve gerçek düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.
- Araştırmaya katılan öğretmenlerin gerçek, objektif ve samimi davrandıkları varsayılmıştır.

- Araştırmanın katılımcıları arasında olumlu-olumsuz etkileşim olmadığı varsayılmıştır.

1.6. Sınırlılıklar

- Araştırmanın uygulama süresi 2015-2016 eğitim öğretim yılı ile sınırlıdır.
 - Araştırma iki farklı devlet okulunda görev yapan iki öğretmen ve her bir öğretmenin altı öğrencisi olmak üzere 12 öğrenci ile sınırlıdır.
 - Araştırmanın verileri, matematik dersi cebir öğrenme alanı ile sınırlıdır.
 - Verilerin analizi sürecinde temel alınan akıl yürütme becerisi türleri, literatürde verilen kaynaklar ile sınırlıdır.
- 

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE ve İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Bu bölümde matematiksel düşünme ve akıl yürütme, matematiksel akıl yürütme yaklaşımları, matematiksel akıl yürütme becerisinin gelişimi ile cebir ve cebir öğretimi başlıkları altında araştırmanın kuramsal çerçevesi ele alınmış ve ilgili araştırmalara yer verilmiştir.

2.1.1. Matematiksel Düşünme ve Matematiksel Akıl Yürütme

Matematiksel düşünme, önemli kavramsal gelişim konuları için fırsatlar sağladığı için matematiksel düşünme çalışmaları psikologların oldukça ilgilendikleri bir çalışma alanıdır. Örneğin, doğuştan gelen fikirler (bebekler sayı kavramına sahip midir?), pratik zekâ (insanlar günlük yaşamlarında matematiği nasıl kullanırlar?), kültürel farklılıklar (okuryazar olan veya olmayan toplumlarda matematiksel düşünmenin gelişimi farklı mıdır?), soyut düşünme gibi. (insanlar sonsuzluk kavramını nasıl anlarlar?)(Tang and Ginsburg, 1999). Matematik eğitiminin de temelini oluşturan (Şahin ve Baki, 2016) matematiksel düşünme; matematik öğretiminde önemli bir yeri, okul eğitiminin önemli bir hedefi, matematiği öğrenmenin bir yolu olması açısından önemlidir (Stacey, 2006).

Yeşildere ve Tüknüklü (2007)'ye göre bir problemin çözümü; özelleştirme, genelleme, tahmin etme, hipotez üretme, hipotezin doğruluğunu kontrol etme gibi üst düzey düşünme becerilerini gerektirdiğinde matematiksel düşünme gerçekleşir. O halde matematiksel düşünmenin sadece sayıların ve soyut matematiksel kavramların yer aldığı durumlarda değil, günlük yaşamın içinde de gerçekleştirilebilecek bir düşünme biçimi olduğu söylenebilir (Yeşildere ve Tüknüklü, 2007). Problem çözmede kullanılan,

matematiğe dayalı düşünme ve matematiksel düşünce kullanma becerisi okul eğitiminin önemli bir hedefidir. Bu bağlamda, matematiksel düşünme bilim, teknoloji, ekonomik yaşam ve kalkınmayı destekleyebilir (Stacey, 2006).

Matematiksel düşünmeyi diğer düşülmelerden ayıran belirgin özellikleri, bireyin önceden öğrenmiş olduğu matematiksel bilgi ve kavramları kullanarak, soyutlama, tahminde bulunma, genelleme, hipotez kurup test etme, usa vurma, ispatlama ve betimlemelerle yeni bir bilgiye ya da kavrama ulaşmasıdır. Bunun uzantısında da ulaştığı bilgi ya da kavramı olumlu ve olumsuz örnekleyebilmesidir (Alkan ve Güzel, 2005). Bununla birlikte, matematiksel düşünme "kesinlik" de ister. Tanımlanan gerçekler içinde doğru; "kesin ve tek" tir, esneklik kaldırmaz. Kişiyi ve konuma göre değişen, kimi zaman birbiri ile çeliştiği halde birden çok olan doğrular olamaz (Umay, 1996). Bir problemle karşılaşıldığında problemin cevabının ne olduğunu bulmaktan öte, problemin çeşitli boyutları ile birlikte ele alınarak incelenmesi matematiksel düşünmeyi gerektirmektedir (Yeşildere, 2006). Wood, Williams ve McNeal (2006), matematiksel düşünmeyi, matematiksel fikirlerin soyutlanması ve genellemesinde yer alan zihinsel faaliyet olarak tanımlamaktadır.

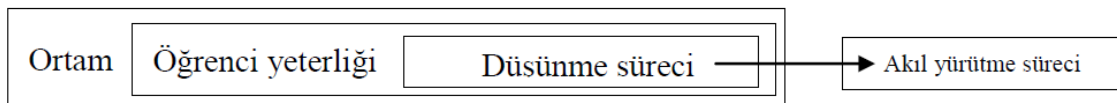
Matematiksel düşünmenin bir özelliği olan akıl yürütme (Alkan ve Güzel, 2005); bir düşünme yöntemi, düşünme yolu ve sonuçlara ulaşma ile iddialar üretmeyi benimsemektir (Lithner, 2005). Muhakeme, usa vurma ya da başka bir deyişle akıl yürütme bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma işidir (Umay, 2003). Longman (1987)'a göre akıl yürütme, gerçekleri temel alan karar veya fikir formları, anlama ve düşünme yeteneğidir (Akt. Kaur, 2009). Akıl yürütme bilgilerden sonuç çıkarma sürecidir. Örneğin, Lala'nın bir örümcek olduğu bilgisi verildiğinde, onun sekiz bacağına sahip olduğu sonucuna varmak mantıklıdır. Aynı şekilde, Sally'nin odasının dört metre eninde altı metre boyunda olduğu bilgisi verildiğinde odanın alanının 24 m^2 olduğu sonucu mantıklıdır (Kaur, 2009). Akıl yürütme; sonuç çıkarma ve varsayımda bulunma ile ilgili "eğer... ise..." söylemlerini kullanmayı öğrenmektir (Mason, 2001). Yani öğrencilerin neyi niçin yaptığının farkında olması gerekir. Mason (2001)'a göre akıl yürütmenin özü "çünkü" veya "eğer... ise..." dir. Fakat akla uygun olması açısından iddiadan ya da sonuçtan daha çok, sebebin kesinliği önemlidir. Yani, bireyin etkili akıl yürütmeler yapabilmesi için kendinden emin olması gerekir. Çünkü ne

yaptığı ve niçin yaptığı hakkında düşünen öğrenciler, düşünülen kurallar bütününe takip eden öğrencilere göre daha başarılıdırlar (Steen, 1999).

Matematiksel akıl yürütme, fikirler ve ilişkileri hakkında geçerli sonuçlara ve genellemelere ulaşmayı kapsayan matematiksel düşünmenin bir parçasıdır (Artz ve Yaloz-Femina, 1999). Matematiksel akıl yürütme matematiğin nesneleri ile ilgili ve onlar hakkında akıl yürütme (Steen, 1999) olup çeşitli düşünme tarzlarını içeren dinamik bir etkinlik olarak incelenebilir (Peresini ve Web, 1999). Russel (1999)'a göre matematiksel akıl yürütme matematiksel genellemelerin kullanımı, doğrulanması ve gelişimleri için gereklidir. Kilpatrick, Swafford ve Findell (2001)'e göre matematiksel akıl yürütme, matematiksel yeterliliğin diğer dallarıyla (kavramsal anlama, stratejik yeterlilik, akıcılık, üretken olma eğilimi) iç içe geçmiştir (Akt. Brodie, 2010).

Ball ve Bass (2003)'a göre matematiksel akıl yürütme “matematiği bilme” den “matematiği anlama” noktasında ayrılır. Matematiksel akıl yürütmenin temel bir beceri olmasının üç nedeni vardır. Birincisi, akıl yürütme üzerine ciddi bir vurgu yapılmaksızın “matematiksel anlama” kavramı anlamsızdır. İkincisi, bu tür akıl yürütmeler matematiğin kullanımı için temel teşkil eder. Üçüncüsü ise, matematiksel akıl yürütme gerektiğinde zayıflamış bilgiyi tekrar yapılandırmak için bir temeldir. Örneğin, bir zamanlar kesirlerde bölmeyi bilen fakat algoritmayı unutmuş biri, bir kesrin diğerine bölümü hakkında akıl yürütmek için, eğer kesrin ve bölmenin anlamını kullanabilirse, yeniden mantıklı bir prosedür oluşturabilir (Ball ve Bass, 2003).

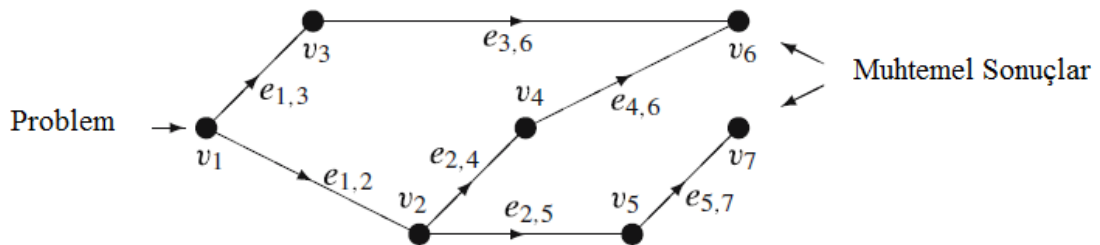
Matematiksel akıl yürütmede iki süreç önemlidir. Birincisi, adımlar ve hareketlerin diğerleriyle bağlantılı olmasıdır. İkincisi ise, bu bağlantıların bir şekilde "gerekçeli" olmasının, bir hareketin bir başkasını izlemesinin ve bir argümanın oluşturulması için bir takım hareketlerin de nasıl bir araya geldiğinin bir nedeninin olmasıdır (Ball ve Bass, 2003). Lithner (2008), farklı muhakeme türlerinin kaynağını açıklamaya çalışırken Şekil 2.1'de muhakeme serisini, onu oluşturan düşünme sürecinden ayırmıştır.



Şekil 2.1. Akıl Yürütmenin Kaynağı (Lithner (2008)'den alınmıştır)

Şekil 2.1'den anlaşılacağı üzere, bireyin akıl yürütmesi; içinde bulunduğu ortam, öğrenci yeterlilikleri ve düşünme süreci faktörlerinden etkilenmektedir. Muhakeme yeteneği geliştirilebilen bir özellik olduğundan içinde yaşanılan kültürün bireyin muhakeme yaklaşımlarını etkilemesi, zenginleştirmesi ve bu etkinin kalıcı olması beklenir (Umay, 2003).

Muhakeme etme, problem çözme stratejilerinin kullanıldığı her yerde vardır (Altun, 2008). Mantıksal akıl yürütme problem çözmede özellikle bağıntıların ve ilişkilerin ortaya çıkarılmasında çok etkilidir (Baykul, 2014). Lithner (2008), problem çözmede akıl yürütme serisini Şekil 2.2 ile özetlemiştir.



Şekil 2.2. Problem çözmede akıl yürütme serisi (Lithner (2008)'den alınmıştır)

Şekil 2.2'de köşelerde bulunan v_n 'ler problem durumunu ve anlık bilgiyi temsil etmektedir. Öğrenci v_n den yola çıkarak kenar boyunca strateji seçimi yapmaktadır. $e_{n,m}$ ler ise, stratejinin uygulanmasını ifade etmektedir. Burada, v_n 'de henüz erişilmemiş olan bilgi, hatırlanır veya oluşturulur, problemin kısmen çözüldüğü ve dolayısıyla yeni bir problem durumunun formüle edildiği v_m de şekilde yeni bilgi anlamına gelir. Yani ilgili strateji (örneğin $e_{2,5}$) uygulanmadan önceki problem durumu v_n (örneğin v_2) strateji uygulandıktan sonraki problem durumu veya olası çözüm v_m (örneğin v_5) ile temsil edilmektedir.

NCTM (2000), bütün sınıf dereceleri için ispat ve akıl yürütme üzerine önemli standartları kapsayan matematiksel akıl yürütmenin merkeziliği hakkında güçlü bir açıklama yapar (Akt. Lithner, 2005). NCTM standartlarında beş süreç standardı belirtilmiştir. Bunlar; problem çözme, iletişim, ilişkilendirme, temsil ile akıl yürütme ve ispattır. Süreç standartları öğrencilerin kazanmaları ve kullanmaları gereken matematiksel bilgiye paralel matematiksel süreçleri ifade etmektedir. Akıl yürütme ve ispat; karar vermemize ve cevaplamamıza yardım eden mantıksal düşünmeye vurgu

yapar. Öğrencilerin her bir cevabının tamamlayıcı bir parçası olarak bir mantıksal gerekçe gösterme alışkanlığını geliştirmeye ihtiyaçları vardır. Ayrıca mantıksal deliller aracılığıyla fikirlerin kanıtlanmasının değerini de öğrenmeleri önemlidir (Van de Walle, vd. 2012).

Ortaokul matematik öğretim programı (2013)'nda temel alınan becerilerin program için önemli olduğunu vurgulanmış ancak kazanım olarak belirtilmemiş olsa da bu becerilerin matematiğin her konusunda dikkate alınması gerektiği belirtilmiştir. Bu bağlamda öğretim programında somut materyallere, bilgi bilişim teknolojilerine, problem çözme etkinliklerine, öğrencilerin iletişim, ilişkilendirme ve akıl yürütme becerilerini geliştirmeye yönelik çalışmalara yer verilmesi gerektiğinden bahsedilmiştir. Programda akıl yürütme becerisinin kazandırılması için dikkate alınması gereken bazı göstergeler ise;

- Çıkarımların doğruluğunu ve gerçekliğini savunma
- Mantıklı çıkarımlarda ve genellemelerde bulunma
- Bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntüleri ve ilişkileri açıklama ve kullanma
- Yuvarlama uygun sayıları gruplandırma, ilk veya son basamakları kullanma gibi stratejileri veya kendi geliştirdikleri stratejileri kullanarak işlem ve ölçümlerin sonucuna dair tahminlerde bulunma
- Belirli bir referans noktasını dikkate alarak ölçmeye ilişkin tahminde bulunma olarak belirtilmiştir.

Ulusal ve uluslararası öğretim programlarında özellikle vurgulanan ve kazandırılması amaçlanan bir beceri olan matematiksel akıl yürütme becerisini öğrenebilmek, bir süreç gerektirmektedir (Çiftci, 2015). Bu süreç hem öğrenciler hem de öğretmenler için oldukça zorlu geçmektedir. Bu anlamda Brodie (2010) matematiksel akıl yürütme öğretiminin zorluklarını aşağıdaki gibi sıralamıştır.

- Öğrenciler matematiksel akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak için seçilen problemlere nasıl cevap verirler?
- Öğretmenler matematiksel akıl yürütmeyi kullanmaları için problemler ile ilgili öğrencilerle nasıl iletişim kurarlar?
- Öğretmenler matematiksel yeterliliği geliştirmek için nasıl öğretim yapabilirler?

- Öğrenciler ve öğretmen arasındaki işbirlikli iletişimler matematiksel akıl yürütmeyi nasıl teşvik eder?
- Öğretim uygulamaları, sorular ve davranışlar, öğrencilerin matematiksel akıl yürütmesini teşvik etmek için ne tür yardımlar sağlar?
- Spesifik yöntemlerde yardımcı olabilecek öğrencilerin katkılarını ve öğretmenlerin cevaplarını nasıl tanımlayabiliriz?
- Öğretmenler matematiksel akıl yürütmeyi öğretirken ne gibi ikilemler yaşarlar?
- Öğretmenler yeni öğretim yöntemlerine karşı ne yapabilirler?

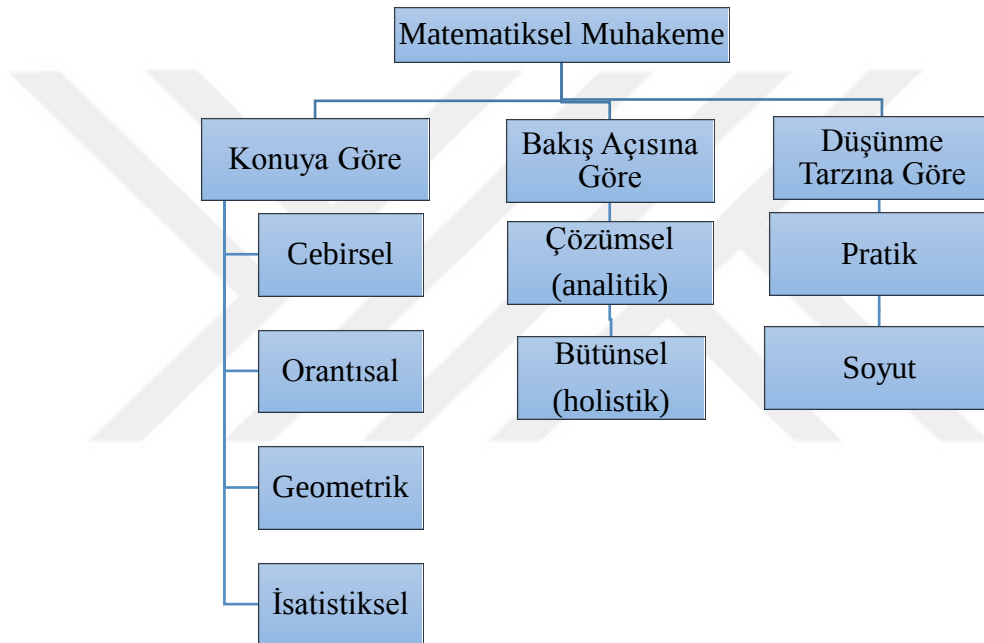
Bütün bu zorluklara rağmen araştırmacılar matematiksel akıl yürütme ile ilgili öneriler sunmaktadırlar. Öğrencilerin uyguladıkları stratejilerin incelenmesi ve uygulamaların başarısı, matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileri hakkında bilgi sağlamakla birlikte bir problemi çözme biçimlerini, matematiksel fikirlerini ve düşünme süreçlerini yansıtmaktadır (Cai, 2002). Öğrencilerin matematiksel bir problemle uğraşırken nasıl düşündüklerini ve nasıl çıkarsamada bulunduklarını anlamak, öğrenmelerinin nasıl gerçekleşiyor olabileceği hakkında ipucu verebilir (Yeşildere ve Türnüklü, 2007). Brodie (2010), matematiksel akıl yürütmede anahtar noktanın; problemlerde öğretmen ve öğrenci arasındaki etkileşim biçimi, bu problemler ile öğrencileri teşvik etme yolları ve öğrencileri teşvik etmede kullanılacak problem çeşitleri olduğunu vurgulamaktadır. Bilgi yapılarının ilişkilendirilmesinde ortaya atılan fikirlerin doğruluğunun araştırılması, akıl yürütme süreci içerisinde gerçekleşmektedir (Yeşildere, 2006). Bu anlamda düşünüldüğünde öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin nasıl olduğunu anlamak için; çözüm stratejileri, yanlış kavramalar/hatalar, matematiksel gerekçeler ve gösterimler gibi problem çözme becerilerinin kritik bilişsel yönleri incelenmelidir (Cai, 2002). “Niçin doğru olduğunu düşünüyorsun?” veya “Niçin böyle yaptın?” gibi sorular kanıtların desteklenmesinde veya çürütülmesinde ihtiyaç duyulan durumları görmeleri için öğrencilere yardımcı olabilir (Lithner, 2005). Öğrencilerin öğrenme ve başarı zorlukları araştırıldığında, problem çözümündeki akıl yürütmelerini özellikle de akıl yürütmelerini doğrulayan kesin ve açık tartışmaları çalışmak önemlidir (Lithner, 2005). Öğrencilerin fikirlerini rahatça ifade etmeleri için kendi düşüncelerini savunacakları özgür bir ortamın

sağlanması gerekir. Düşüncelerin açıkça korkusuzca tartışıldığı, farklı fikirlerin önemsendiği, birlikte düşünme için çaba harcanan ortamlar değişik muhakeme yaklaşımlarının daha yakından tanınmalarını sağlar (Umay, 2003).

2.1.2. Matematiksel Akıl Yürütme Yaklaşımları

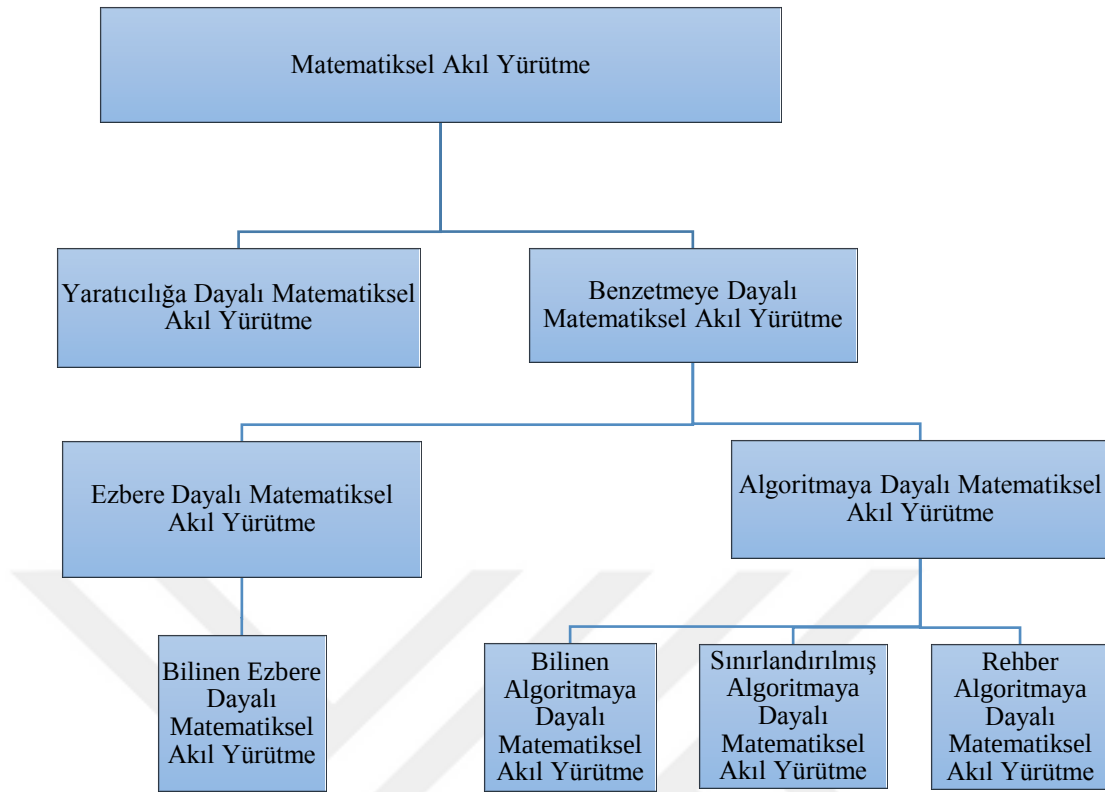
Matematiksel akıl yürütme en genel anlamıyla tümevarımsal ve tümdengelimli akıl yürütme olarak ikiye ayrılmaktadır. Mish (1991)'e göre tümevarımsal akıl yürütme, "belirli örneklerden genelleştirilmiş bir sonucun çizilmesi" anlamına gelir (Akt. Simon, 1996). Belli örneklerin incelenmesine dayanarak bir sonuç çıkaran akıl yürütme yöntemine, tümevarımsal akıl yürütme denir. Tümevarımsal akıl yürütme yöntemiyle oluşturulmuş sonucun doğru olma veya olmama durumu olabileceği için genellikle bir varsayım olarak adlandırılır (Aufmann, Lockwood, Nation, ve Clegg, 2007). Tümdengelimli akıl yürütme, her adımın zorunlu olarak birbirini takip etmesi gerektiği mantıklı bir akıl yürütme zinciri sonucunda ulaşılan sonuçlara atıfta bulunur (Enis, 1969'den akt. Simon, 1996). Tümdengelimli akıl yürütme, genel varsayımları, prosedürleri veya ilkeleri uygulayarak bir sonuca varma sürecidir (Aufmann vd. 2007). Tümdengelimli akıl yürütme, öğrenciler grafikler, şemalar, kelimeler ve tablolarla sunulan gerçeklerden bir sonuca varmak zorunda kaldıkları problemleri çözdüklerinde devreye girer. Tümevarımsal akıl yürütme, bir dizi sayı verilip sonrakinin ne olduğu sorulduğunda gerekli olabilir (Greenes ve Findell, 1999). Başka bir deyişle, tümevarıma dayalı muhakeme, özelden genele giden bir akıl yürütme türüdür. Tümdengelimli dayalı muhakeme ise, genelden özele giden bir akıl yürütme türüdür (Çoban, 2010). Tümdengelimli dayalı muhakeme ile tümevarıma dayalı muhakeme arasındaki temel farklılık, tümevarıma dayalı muhakemede varılan genellemenin kesin doğru olduğu söylenemez. Ancak tümdengelimli dayalı muhakeme ise öncüllerin doğru kabul edilmesi halinde sonucun doğruluğunun zorunlu olarak ortaya çıktığı muhakeme türüdür (Çoban, 2010). Matematikçiler için yalnızca geçerli tümdengelim argümanlarını kullanarak kabul edilen ifadelerden çıkarılan sonuçlar doğru sayılabilir (Usiskin, 1995). Tümevarım ve tümdengelimli akıl yürütme, matematiksel akıl yürütmede tamamlayıcı roller oynamaktadır. Örneğin, varsayımlar bazen tümevarım genelleme yoluyla formüle edilir ve varsayımlar daha sonra tümdengelimli bir argümanla kanıtlanır (Morris, 2002).

NCTM prensipleri ve standartları akıl yürütmenin cebirsel, geometrik, olasılıksal ve istatistiksel akıl yürütme gibi farklı türlerinden bahseder (Lithner, 2005). Peresini and Webb (1999), ise matematiksel akıl yürütmenin, tümevarım, tümdengelim, şartlı, olasılıksal, grafiksel, uzamsal ve soyut akıl yürütme gibi türlerinden bahsetmektedir. Fakat bu akıl yürütme türlerinin sınırlı olmadığını vurgulamaktadır. Akkuş ve Duatepe (2002) çalışmalarında matematiksel akıl yürütmeyi temel olarak konuya göre, bakış açısına göre ve düşünme tarzına göre ayırmış ve bu temel başlıkların altında tekrar bir ayrıma gitmiştir. Şekil 2.3'te bu akıl yürütme sınıflandırılması şematize edilmiştir.



Şekil 2.3. Akkuş ve Duatepe (2002)'nin matematiksel akıl yürütme sınıflandırması

Lithner (2008) daha ayrıntılı bir sınıflandırma gereği hissetmiştir ve deneysel çalışmaları ile desteklenen hazırladığı taslaklarla sürekli geliştirdikleri bir sınıflandırmaya imza atmıştır. Lithner (2008)'in sınıflandırmasına göre temelde iki tip akıl yürütme türü vardır. Bu iki akıl yürütme tipini de kendi içinde ayırmıştır. Lithner (2008)'in sınıflandırılması Şekil 2.4'te görülmektedir.



Şekil 2.4. Lithner (2008)'in matematiksel akıl yürütme sınıflandırması

Lithner (2000b, 2003, 2004, 2005, 2006), deneysel ve teorik çalışmalarının neticesinde matematiksel akıl yürütme becerisini daha detaylı sınıflandırmak için çabalamıştır. Bu sınıflandırmanın sürekli geliştiğini ifade etmiştir. Lithner (2008), matematiksel akıl yürütme türlerini temelde ikiye ayırmıştır. Bunlardan birisi benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme diğeri ise yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütmedir. Benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme, cevabı hatırlama ve bir çözüm prosedürü hatırlamayı içerir, yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme ise, derinlemesine düşünce yapısını içerir.

2.1.2.1. Benzetmeye Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Imitative Reasoning)

Herhangi bir orijinal girişimde bulunmadan örnekleri takip etmek veya kopyalamaktır (Lithner, 2006). Benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme türü, ikiye ayrılır. Bunlar ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme ve algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütmedir.

Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme (Memorised Reasoning (MR))

Matematiksel akıl yürütme sürecinde,

- i) Strateji seçimi, çözüm prosedürünü tam olarak hatırlamayı temel alıyorsa,
- ii) Strateji uygulanması sadece yazmayı içeriyorsa,

bu akıl yürütme türüne örnektir.

Bu akıl yürütme türü problemlerin nispeten küçük bir kısmında çözüm metodu olarak yararlıdır. Örnek olarak, bir ispatın tüm adımlarının hatırlanması verilebilir (Lithner, 2005; 2008).

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme (Algorithmic Reasoning (AR))

Algoritma, belli bir problem türünü çözerken takip edilecek kurallar bütünüdür (Lithner, 2005). Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütmenin gerçekleşebilmesi için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

- i) Strateji seçimi, bireyin bir çözüm algoritmasını hatırlamasıyla meydana gelir fakat bu türde ezber dayalı akıl yürütmede olduğu gibi tüm detaylar hatırlanmaz. Kurallar kümesi doğru bir çözüme ulaşılacağını garanti eder. Yeni bir çözüm oluşturmak gerekmez.
- ii) Strateji uygulanması, algoritma hatırlandıktan sonra uygulamak çözen kişi için sorun değildir. Kurallar bütünü verildiğinde veya hatırlandığında birey için stratejinin kalan kısmı önemsizdir. Problemin çözümüne sadece dikkatsizlik hataları engel olabilir.

AR'nin gerçekleşebilmesi için birey algoritmanın altında yatan mantığı bilmek zorunda değildir (Lithner, 2005). Bu akıl yürütme türünde sonuç tartışmaları genellikle yüzeysel ve sınırlıdır. Algoritma tamamen anlaşılabilir bile uygulama sınırlı olabilir (Lithner, 2008). Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü, Bilinen Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning), Sınırlandırılmış Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning) ve Rehber Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Guided Algorithmic Reasoning) olarak üçe ayrılmaktadır (Lithner, 2008).

Bilinen Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning (FAR)):

Bir matematiksel akıl yürütme sürecinin bilinen algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü olarak sınıflandırılması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir (Lithner, 2008).

- i) Strateji seçimi için sebep, problemin bilinen bir algoritma ile çözülebilen bir problem olduğunun fark edilmesidir.
- ii) Strateji uygulanması, algoritma uygulanır.

Bu akıl yürütme türü, bilinen bir çözüm algoritması ile ilgili ve bilinen bir tür olan problemi tanımlamak için strateji seçimi denemelerini içerir. Basit bir örnek “anahtar kelime stratejisi” dir. Yani, Lithner (2005)’in aktardığı Hegarty (1995)’nin anahtar kelime stratejileri çalışmasında olduğu gibi, bireyin “az” ,”çok” gibi ilgili anahtar kelimeler ile problemdeki sayıları seçmesi ve anahtar kelimeler vasıtasıyla aritmetik işlemleri kullanarak bir çözüm planı geliştirmeye çabalamasıdır.

Sınırlandırılmış Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning (DAR)):

Bir matematiksel akıl yürütme sürecinin sınırlandırılmış algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme olabilmesi için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir (Lithner, 2008).

- i) Algoritma, akıl yürüten için uygun olan algoritma kümesinden seçilir. Bu algoritma kümesi, problemle ilgili yüzeysel özellikleri kapsar ve akıl yürüten tarafından sınırlandırılmıştır. Sonuç tahmin edilmez. Örneğin, eğer problemde 2. dereceden bir polinom varsa, $p(x)=0$ denklemini çözmeyi seçebilir. Burada çözen kişi benzer bir problem görmek zorunda değildir.
- ii) Uygulama mantıklı bir sonuca götürmüyorsa değerlendirme yapılmaksızın basitçe bırakılır ve sınırlı algoritma kümesinden başka bir algoritma seçilir.

Rehber Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Guided Algorithmic Reasoning GAR)):

Bireyin akıl yürütmesinin harici iki kaynak tarafından yönlendirilmesi ile gerçekleşen matematiksel akıl yürütme türüdür.

- i) Kişi Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Person Guided Algorithmic Reasoning (Person-GAR)), akıl yürüten kişinin strateji seçimine müdahalesi olmadan rehber kişi tarafından bir strateji belirleniyorsa ve akıl yürüten bireyin etkili tartışmaları mevcut değilse ortaya çıkar.
- ii) Doküman Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Text Guided Algorithmic Reasoning (Text-GAR)); akıl yürüten kişi rehber olarak kitap, teorem, ... gibi dokümanlardan faydalanmış ise gerçekleşir. Stratejinin uygulanması prosedürü kopyalama ile devam eder, doğrulama tartışmalarına ihtiyaç yoktur (Lithner, 2005; 2008).

2.1.2.2. Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Creative Reasoning (CMR))

- i) *Özgünlük*: akıl yürüten için yeni bir akıl yürütme serisi oluşturulur veya unutulmuş bir prosedür yeniden yapılandırılır.
- ii) *Esneklik*: Farklı yaklaşımlar kabul edilir ve duruma uyarlanır. Süreci engelleyecek saplantılardan etkilenilmez.
- iii) *Akla yatkınlık*: Strateji seçimi ve uygulanması, sonuçların neden doğru veya akla yatkın olduğu tartışmalarla desteklenir.
- iv) *Matematiksel Temel*: Akıl yürütme sürecinde yer alan bileşenler gerçek matematiksel özellikler tartışmaların dayanak noktasıdır (Lithner, 2006, 2008).

Matematiksel akıl yürütme süreci, algoritma veya cevabın hatırlanması ile bir problemin çözümü yerine yaratıcı akıl yürütme ile yapılandırılabilir. Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme MR ve AR deki gibi cevabı veya çözümü hatırlamayı veya kopyalamayı kapsamaz (Lithner, 2005).

2.1.3. Matematiksel Akıl Yürütme Becerisinin Geliştirilmesi

Okul matematiği, “toplum için nasıl bir insan yetiştirmek istiyoruz? matematik ile ilgili ne öğretilim ve onu nasıl öğretilim” sorularıyla ilgilenir (Baki, 2008) Okul matematiğinin iki amacı vardır: birincisi, toplumu matematik yönünden eğiterek sanayi,

teknoloji ve günlük hayattaki diğer alanların ihtiyaç duyduğu elemanları yetiştirmek, ikincisi akademik matematik için bireyleri erken yaşlarda hazırlamak ve akademik hayata hazırlamaktır (Baki, 2008). Bu anlamda toplumun ihtiyaçlarına ve beklentilerine cevap verebilecek insanların özelliklerinden bir tanesi belki de en önemlisi matematiksel akıl yürütme becerisine sahip olmalarıdır. Dolayısıyla matematiksel akıl yürütme becerisinin geliştirilmesi için çaba sarf edilmesi gerekir. Matematikle ilgili davranışlar ilköğretim hatta okul öncesi eğitim programlarından yükseköğretim programlarına kadar her düzeyde ve her alanda yer aldığından (Baykul, 2014), bu temel becerinin geliştirilmesine erken yaşlardan itibaren başlanması gerekir. Günümüz matematik eğitiminde de farklı öğrenme ve düşünme biçimlerinin, çeşitli muhakeme yaklaşımlarının araştırılması oldukça önemlidir (Malloy, 1999). Bu anlamda amacı matematiği etkili öğretmek (Tang ve Ginsburg, 1999) olan öğretmenlerimize büyük görev düşmektedir. Öğretmenler sınıflarında farklı muhakemelere imkân verebilecek farklı kültürel ve sosyo ekonomik düzeye sahip öğrencilerinin aktif olmalarını sağlayacak ortamlar hazırlamalıdır. Çünkü bu tür ortamlar matematiksel akıl yürütmenin gelişimi için uygun ortamlardır (Umay, 2003). Dolayısıyla, çeşitli kültürel geçmişe sahip öğrencilerin etkili matematik eğitimi, öğrenme sürecinde bir kültürün veya tek tip akıl yürütme yönteminin hâkim olduğu fikrine karşı çıkar (Malloy, 1999). Hiçbir insanın özellikleri, geçmişi bir başkası ile birebir benzeşmediğinden zihinsel şemalarının da tamamen aynı olması beklenmez (Umay, 2003). Dolayısıyla her bireyin farklı bir düşünme yapısı olduğu gibi matematiksel akıl yürütmede bireysel bir süreçtir. Bu açıdan bakıldığında matematiksel akıl yürütme süreci geliştirilebilir özelliğe sahiptir. Destekleyici ortamlar sağlandığı zaman tüm öğrenciler, iddiaları çürütebilir ve akıl yürütmede bulunabilirler (Yackel ve Hanna, 2003).

Yankelwitz, Mueller ve Maher (2010), öğrencilerin birbirleriyle etkileşim kurarak matematiksel fikirlerini paylaştıkları bir matematik ortamının matematiksel akıl yürütme için ideal olduğunu vurgulamaktadırlar. (Erdem, 2015) ise işbirlikli gruplarda tartışma, günlük yaşamla ilişkilendirme, somut materyal kullanma, bilgisayar destekli uygulamalar, eğitsel oyunlar ve karikatürler ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının öğrencilerin matematiksel muhakeme yeteneği üzerinde olumlu bir etkiye sahip olduğunu belirtmiştir. Erdem (2015)'e benzer olarak Olson (2007) de oyunların eğlenceli ve matematiksel akıl yürütmeyi geliştirmek için bir içerik oluşturabileceğini

vurgulamıştır. Ayrıca oyunların, öğrencilere neden hızlıca cevap verdiklerini düşünmeleri için fırsatlar verdiğini ve öğrencilerin farklı stratejilerle karşılaşmaları için fırsatlar sunduğunu, öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel fikirlerini geliştirmek için onların akıl yürütmeleri ve tahminlerini yansıtacak sorular planlayarak onlara fırsatlar sunabileceğini belirtmiştir.

Ayrıca Pilten (2008) üst biliş dayalı öğretimin; uygun muhakemeyi belirleme ve kullanma, matematiksel bilgileri, örüntüleri, yapıları, genel özellikleri tanıma ve kullanma, tahmin etme, çözüme ilişkin mantıklı tartışmalar geliştirme, genelleme yapma, rutin olmayan problemleri çözme, açılarından matematiksel muhakeme becerilerini geliştirmede etkili olduğunu vurgulamaktadır. Bu düşünceye paralel olarak, matematiksel akıl yürütme için tartışmaların kullanımı matematiksel akıl yürütmeyi geliştirmek için ortam oluşturabilir. Meta bilişsel eğitim, sınıf organizasyonuna bakılmaksızın matematiksel akıl yürütmeyi arttırmak için etkili bir yöntemdir (Kramarski ve Mevarech, 2003).

Matematiksel akıl yürütmenin geliştirilmesi için bazı stratejiler kullanılabilir (Kaur, 2009). Bu stratejiler; *Sayıların anlamı nedir? Yanlış olan nedir? Farz edelim ki? Cevabı bilseydin ne sorardın?* dir. Bu stratejiler matematiksel yeterliliğe sahip öğrencilerin çözebileceği matematiksel problemleri kapsar. Açık aritmetik ve prosedürel işlemler matematiksel akıl yürütmeyi engellerken, bu stratejiler yorumlama becerisini artırır ve anlamlandırmayı vurgular. Kısaca açıklanacak olursa; sayıların anlamı nedir? stratejisinde öğrencilere nümerik verileri eksik olan problem durumları ve sayı kümesi verilerek, öğrencilerin problem durumunda sayıların yerini belirlemeleri istenir böylece anlamlandırma yapmaktadırlar. İkincisi, yanlış olan nedir? Stratejisi ile öğrencilerin kavramsal veya hesaplama hataları içeren problem ve çözümü verilerek öğrencilerin hataları belirlemeleri, hataların sebeplerini açıklamaları, doğrulamaları beklenmekte olup öğrencilerin eleştirel düşünceleri için fırsat sağlanmaktadır (Krulik ve Rudnick, 1999). Üçüncüsü, Farz edelim ki? Stratejisi, verilen problem durumundaki bilgilerde değişiklik yapılarak öğrencinin cevabın yanı sıra değişikliğin çözüm sürecindeki etkisini görmesini ve açıklamaları için fırsat verilmesini sağlar. Dördüncüsü ise, cevabı bilseydin ne sorardın? stratejisidir ve bu strateji ile problemde sorudan yoksun bir içerik mevcuttur. Öğrencilerden verilen cevaba uygun bir soru yazmaları istenmektedir. Bu

sayede öğrencilerin aynı cevaba yönelik farklı sorular yazılabileceğini fark etmeleri sağlanmış olur.

Matematiksel akıl yürütme problem çözme sürecinde gömülüdür ve zengin problem çözmenin meydana gelebileceği verimli bir ortam matematiksel akıl yürütme için de verimli bir ortamdır (Artz ve Yaloz-Femina, 1999). Bireyin kendinin veya bir başkasının keşiflerini, problemlerin uygulamalarını veya doğrulamalarını gözlemlemesi, tanımlanan matematiksel akıl yürütme yollarından biri olan gerekçelendirmeyi destekler niteliktedir (Artz ve Yaloz-Femina, 1999). Bu noktada açık uçlu problemlerden söz etmek yerinde olacaktır. Matematik derslerinde kullanılan soruların “Kenar uzunlukları dört santimetre ve sekiz santimetre olan bir dikdörtgenin alanı kaç cm^2 dir” yerine “Alanı 24cm^2 olan kaç tane dikdörtgen çizebiliriz?” şeklinde açık uçlu problemlerin sorulması öğrencilerin varsayımlar yaratmasını ve doğrulamasını gerektireceği için ispat ve muhakeme becerilerini geliştirebilir (Bahtiyari, 2010).

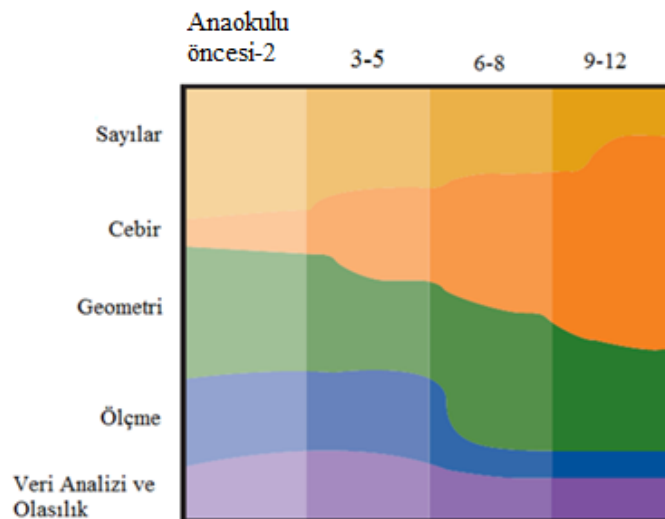
Öğretmenler sınıf içinde *neden böyle yaptın?, nasıl karar verdin?, buradan nasıl bir sonuç çıkarabiliriz?, bu bize ne söyler?, her zaman böyle midir?, problemi çözerken ne tür stratejiler kullandın?, farklı bir yol izleseydin nasıl olurdu?* gibi basit soru ve yönlendirmelerle öğrencilerin mantıksal düşünme, muhakeme ve akıl yürütme becerilerini geliştirebilirler (Bahtiyari, 2010). Bununla birlikte, öğrencilerin düşüncelerini açıkladığı ve haklı gördüğü tartışmaların önemini ve dikkatle sıralanmış öğretim faaliyetlerinin önemini açtır. Birbiriyle bağlantılı öğretim yönleri, öğrencilerin akıl yürütme yollarını geliştirmede destek olarak önemli rol oynamaktadır (McClain vd. 1999).

2.1.4. Cebir ve Cebir Öğretimi

Birçok ülkede eğitim sistemleri çoğunluğun görüşüne göre düzenlenmiştir ve matematik yapan “herkes için cebir” ihtiyaç duyulan bir kavramdır (Greenes ve Findell, 1999). Çünkü, cebir, hayatın her alanında kendisini hissettirmektedir. Bu durum ise, cebirin öğrenciler tarafından öğrenilmesinin bir ihtiyaç olduğunu gündeme getirmektedir (Dede ve Argün, 2003). Cebirsel semboller ve onlarla çalışma prosedürleri, matematik tarihinde büyük bir matematik başarısıdır ve matematiksel çalışmada kritik öneme sahiptir. Cebir, nicel ilişkilerin temsiline bağlı kavram ve

tekniklerin bir kümesi olarak ve örüntüleri formüle etme, fonksiyonlar ve genellemeler için matematiksel bir düşünce tarzı olarak öğrenilir. Birçok yetişkin matematiğin bir alanı olarak cebirin ortaokul veya lise öğrencileri için uygun olduğunu düşünmelerine rağmen daha küçük yaştaki öğrenciler de sayılar ve işlemlerle çalışmak ve sayı kümeleri arasındaki ilişkileri ve örüntüleri araştırmak gibi cebirsel akıl yürütme kullanmaya teşvik edilebilir (NCTM, 2000).

Susac vd. (2013)'e göre temel cebir kavramlarını anlamak ve cebir problemlerini çözmek için gerekli becerileri kazanmak, belli bir derecede ön bilgi ve soyut düşünce gerektirir. Cebir, genelde 12 yaş civarında genelleme olarak, aritmetik akıl yürütmenin geliştirilmesinin ardından okullarda tanıtılır (Susac vd., 2013). Ortaokul matematik dersi öğretim programında sayılar ve işlemler, cebir, geometri ve ölçme, veri işleme ve olasılık olmak üzere beş öğrenme alanı bulunmaktadır. Bazı sınıf seviyelerinde bu öğrenme alanlarından tümü yer alırken, bazılarında hepsine yer verilmemiştir. Cebir öğrenme alanı 5. sınıf hariç tüm sınıflarda yer almaktadır (MEB, 2013). Temel cebir kavramlarının edinilmesini tartışırken, okul matematiğinin geniş bir bölümünü temsil ettiğini vurgulamak önemlidir. Cebir öğrenme alanı, temel doğrusal denklem çözümünden daha soyuta uzanan geniş bir yelpazede konuları kapsamaktadır (Susac vd. 2013). NCTM (2010) öğrenme alanlarının kapsamı ile ilgili Şekil 2.5'de bu durumu vurgulamıştır.



Şekil 2.5. Sınıf seviyelerine göre içerik standartları farklı vurgulanır (NCTM, 2010).

Şekil 2.5’de görüldüğü gibi turuncu renk ile temsil edilen cebir öğrenme alanı sınıf seviyesi ilerledikçe daha kapsamlı bir hal almaktadır. Bu durum cebir öğrenme alanının okul matematiğinde ne denli önemli olduğunu göstermektedir. Koenig (2007), NCTM de anaokul öncesinden 12. sınıfa kadar eğitim programlarının öğrencilere,

- Örnekler, ilişkiler ve fonksiyonları anlama,
- Cebirsel semboller kullanarak matematiksel durumları ve yapıları temsil etme ve analiz etme;
- Niceliksel ilişkileri temsil etme ve anlamak için matematiksel modeller kullanma;
- Çeşitli durumlarda değişimi analiz edebilme,

imkânı verdiğini vurgulamaktadır.

Ortaokul matematik öğretim programı (2013)’nda ise, cebir öğrenme alanı; cebirsel ifadeler, eşitlik ve denklem, doğrusal denklemler, cebirsel ifadeler ve özdeşlikler, doğrusal denklemler, denklem sistemleri, eşitsizlikler alt öğrenme alanlarını kapsamaktadır (MEB, 2013). Cebir öğrenme alanının amacı; sembolik ve grafiksel gösterimlerin anlamalarının farkında olma, onları kullanarak sonuçlar ve ilişkiler bulma, sonuçları ve ilişkileri sembol ve grafik yardımıyla ifade etme olarak özetlenebilir (Baki, 2008). Cebirsel kavramların erken dönemlerde gayri resmi olarak giriş yapılması, öğrencilerin cebirsel akıl yürütme becerilerini geliştirmelerine ve lisedeki cebir çalışmaları için sağlam bir temel oluşturmaya başlamasına yardımcı olacaktır (Cates, 2000). Soyut matematiksel akıl yürütmenin geliştirilmesinde önemli bir rol oynayan (Susac vd. 2013) cebir, soyut düşünceye giriş kapısı olarak düşünülebilir (Witzel, Mercer ve Miller, 2003). Mukayese, sayma ve sayılarla işlem yapma eylemlerini içeren aritmetiğin soyutlanmasıyla matematiğin önemli bir alanı olan cebir doğmuştur (Karaçay, 1985). Cebirin önemi aritmetik kadar açık olmasa da cebir bizim için her açıdan oldukça faydalıdır (Usiskin, 1995). Gerçek hayatta sınırlı kullanımı olan bir konu olarak görülemeyecek olan cebirsel düşünme matematiğin tümü üzerine hâkim olan ve matematiği günlük hayatta faydalı kılan esas unsurdur (Van de Walle, vd. 2012). Cebirsel düşünme ve muhakeme edebilme becerilerinin bir ön koşulu olarak düşünüldüğünde, cebirin sadece bir ders konusundan ziyade günlük hayatta karşılaştığımız güçlüklerle karşı çözüm yolları bulmamıza yarayan bir araç olarak ele

alınması gerekmektedir (Kaya ve Keşan, 2014). Bir kez bir şey yapıyorsanız muhtemelen cebire ihtiyaç duymazsınız fakat eğer tekrar tekrar bir işlemi yapıyorsanız yaptığınız şeyi tanımlamak için cebir size basit bir dil sunmaktadır. Yani cebir genelleme dilidir (Usiskin, 1995).

Cebir öğreniminde yaşanan güçlükler ve zorluklar son yıllarda yapılan çalışmalarda kendini göstermektedir. Cebir öğreniminde yaşanan zorlukların ve güçlüklerin asılması için cebirle ilgili bilgi ve becerilerin öğrencilere kazandırılması gerekir (Tekay, 2012). Öğretim programlarında bilginin birey tarafından inşa edilmesi süreci ön plana çıkarılsa da pratikte sınıflarda aktif bir öğrenme ortamı oluşturmadan doğrudan verilen bilgiler öğrencilerin cebiri günlük yaşamla ilişkisiz, soyut ve anlaşılması zor olarak algılamalarına neden olmaktadır (Zengin, 2015). Öğrencilerin aritmetikten getirdikleri işlem ve kavram yetersizlikleri cebir konularının anlaşılmasına neden olmaktadır (Akkaya ve Durmuş, 2006). Cebir öğretiminde kurala dayalı rutin işlemlerin öğretildiği, işlemlerle sembollerin anlamlarının ve kullanım yerlerinin kopuk verildiği öğretimden ziyade cebirsel işlemlerin ve cebirin bir bütün olarak verildiği, sembol, grafik, tablo, günlük yaşam durumları ve somut modeller gibi çoklu temsil yaklaşımının kullanıldığı bir cebir öğretimi cebirin anlamlı bir şekilde kazanılmasını sağlayacaktır. Bu anlamda öğretmenler tarafından, öğrencilerin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme becerilerinin gelişimine katkıda bulunabilecek öğrenme-öğretme ortamları hazırlanması gerekmektedir (Bike -Kalkan, 2014).

2.2. İlgili Araştırmalar

Bilgi felsefesine göre akıl yürütmenin matematiğin temeli ve birçok durumda oldukça faydalı bir beceri olduğunu savunan Steen (1999), matematiksel akıl yürütmenin gerçekten ne olduğunu bilmediğimiz gibi nasıl geliştirileceğini de bilmediğimizden bahsetmektedir. Umay (2003) ise, muhakemenin bireysel olduğunu; muhakeme yeteneğinin geliştirilebilen bir özellik olmasından dolayı içinde yaşanan kültürün bireyin muhakeme yaklaşımlarını etkilediğini, bireylerin kendi kişilik özelliklerini yansıtan matematiksel muhakeme yaklaşımlarını benimsedikleri belirtmiştir. Ayrıca, düşüncelerin açıklandığı, açıkça, korkusuzca tartışıldığı, farklı fikirlerin önemsendiği, birlikte düşünme için çaba harcanan ortamların değişik muhakeme yaklaşımlarının ortaya çıkmasını sağladığını ifade etmiştir. Ersoy ve Başer

(2013), matematiksel düşünme ölçeği geliştirmeye yönelik çalışmasında, üst düzey düşünme eğilimi, akıl yürütme, matematiksel düşünme becerisi, problem çözme alt boyutlarını elde etmiştir ve bu becerilerin önemini, geliştirilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Nunes, Bryant, Barros and Sylva (2012)'e göre matematiksel akıl yürütme becerisine ilkokulun ilk yıllardan ortaokul sonuna kadar hesaplama becerilerine kıyasla daha fazla vurgu yapılması gerekir. Bu yenilik, öğrencilerin gelecekteki matematiksel ve bilimsel başarılarında kazançlar sağlamalıdır. Matematiksel akıl yürütme ve aritmetik, matematik başarısının tahmini için bağımsız katkılar sağlamıştır. Okul programlarında aritmetiğin yanı sıra matematiksel akıl yürütme becerisinin geliştirilmesi de önemsenmelidir (Nunes, vd. 2012).

Matematiksel akıl yürütme, matematik eğitimi araştırmalarının merkezinde yer almasına rağmen ayrıntılı karakterizasyondan yoksundur. Örneğin, NCTM (2000) akıl yürütmeyi vurgular ve birkaç örnek verir fakat matematiksel akıl yürütmenin doğası, matematiksel akıl yürütmeyi belirleyen yönlerin neler olduğu ile ilgili derin bir tartışma veya özel bir tanımlama yapılmamıştır (Lithner, 2008). Ayrıca benzer olarak; MEB (2013)'de akıl yürütme becerisinden önemli bir süreç becerisi olarak ve akıl yürütme becerisinin göstergelerinden bahsedilmiş olsa da bu becerinin nasıl kazandırılacağı, türleri, kavramsal yapısı ile ilgili ayrıntılı bilgiye yer verilmemiştir. Bu anlamda Lithner, matematiksel akıl yürütmenin sınıflandırılması için deneysel ve nitel çalışmalara imza atmış ve sonrasında matematiksel akıl yürütme becerisini sınıflandırmak için bir taslak hazırlamıştır. Lithner (2005), matematiksel akıl yürütme becerisini sınıflandırmak için kapsamlı bir taslak olarak hazırlanmış olup, analiz için verilerin nasıl ele alınacağını, örneklerle ayrıntılı bir şekilde betimlenmiştir. Lithner (2005, 2006, 2008), matematiksel akıl yürütmeyi temelde iki akıl yürütme türü olarak sınıflandırmıştır. Bunlar; benzetmeye dayalı akıl yürütme ve yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütmedir. Lithner (2008), hazırlanan taslağın akıl yürütmenin önemli yönlerini karakterize etmek ve akıl yürütme türlerinin kökenlerini ve sonuçlarını açıklamak için yardımcı olmak açısından önemli olduğunu vurgulamaktadır. Bu analiz şemasının şimdiye kadar algoritmaya dayalı öğretimin yaygın olduğu öğrenme ve uygulama durumlarında geliştirildiğini ve algoritmaya dayalı akıl yürütme türünün baskın olduğu sonucunun öğrenme ortamındaki yetersizliklerden kaynaklandığına dair kanıtlar sağladığını savunmaktadır. Bergqvist ve Lithner (2012)'e göre sorun;

matematik öğrenimin doğal bir parçası olan benzetmeye dayalı akıl yürütmenin var olması değil; egemen olmasıdır. Benzer olarak, Umay ve Kaf (2005), kusurlu akıl yürütmelerde bulunan öğrencilerin genellikle akıl yürütme sürecini henüz tamamlamadan sona erdirdikleri ya da kavramsal eksikliklerinden dolayı alıştıkları kalıp çözümlere yöneldiklerini belirtmiştir. Bu çalışmada öğrencilerin zayıf akıl yürütme yüzdelerinin en yüksek düzeyde olduğu, bunu kusurlu akıl yürütme yüzdesinin izlediği ve doğru akıl yürütme yüzdesinin ise en düşük düzeyde kaldığı sonucuna varılmıştır. Benzer olarak Ersoy ve Bal-İncebacak (2017), 7. Sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme becerilerini araştırdığı çalışmasında, matematiksel akıl yürütme becerisini, çözüm yolu/sonucun doğruluğu, rutin olmayan problemleri çözme, çözüme ilişkin mantıklı tartışmalar geliştirme, genelleme yapma, uygun muhakemeyi belirleme ve kullanma boyutları dikkate alınarak aşamalı puanlama kullanılarak değerlendirmiştir. Çalışmanın sonuçlarına göre; öğrencilere çözmeleri için verilen problemlerde çok az bir kısmının problemin çözümü için doğru olan strateji seçtiği, bir kısmının da doğru strateji seçmiş olsa bile stratejiyi uygulama aşamasında başarılı olamadıkları ve genel olarak öğrencilerin muhakeme etme becerilerini tam kullanamadıkları belirlenmiştir.

Öğrencilerin kavramsal bilgi kazanabilmeleri için onlara matematikle mücadele etme imkânı tanıyan öğretici bir duruma girmeleri önemlidir (Jonsson, Norqvistb, Liljekviste ve Lithner, 2014). Öğrenme ortamının temel öğelerinden birisi olan öğretmenler tarafından öğrenciler için yeterli fırsatlar sunulmadığı ile ilgili, Bergqvist ve Lithner (2012), 12 dersten 23 öğretim durumunu analiz ettiği çalışmasında, öğretmenlerin sunumlarının algoritmaya dayalı akıl yürütmenin öğrenilmesi için fırsatlar sunduğunu çünkü sunulan problem çözümlerinin çoğunun algoritma olarak öğrenilebildiğini, öğretmenlerin sunularının, yansıtma, argümanlar ve matematiksel temel açısından sınırlı olduğunu ve bu nedenle kendileri tarafından yaratıcı akıl yürütmeyi öğrenme fırsatı sunmadıkları sonucunu elde etmişlerdir. Benzer olarak; İsveç ulusal değerlendirme testlerinde ve öğretmenlerin sınıfta uyguladıkları testlerde yer alan soruların analiz edildiği, Palm, Boesen ve Lithner (2011) çalışmalarında, verilen eğitim sisteminin belirli koşulları ve kısıtlamaları altında uygulanan standart ulusal sınavlarda, problemlerin büyük bir kısmının yaratıcı matematiksel akıl yürütmeyi gerektirdiğini bununla birlikte, öğretmen tarafından yapılan sınıf testlerinin ise benzetmeye dayalı akıl yürütme üzerine yoğunlaştığını belirlemişlerdir. Dolayısıyla, ulusal müfredat belgeleri

ile ulusal sınavlar arasında, matematiksel akıl yürütme türüne ilişkin öğretmen tarafından yapılan testler arasında belirgin bir boşluk olduğunu vurgulamışlardır. Boesen, Lithner ve Palm (2010) tarafından problem türleri ile öğrencilerin kullandıkları akıl yürütmeler arasındaki ilişkiyi incelemek amacıyla yapılan çalışmanın sonuçlarına göre; öğrencilerin ders kitabında yer alan sorulara benzer olan sorular da ders kitaplarında karşılaştıkları gerçekleri veya algoritmaları hatırlamaya çalışarak çoğunlukla benzetmeye dayalı akıl yürütme türünü kullandıkları, bunun aksine, ders kitabı ile benzer olmayan soruların, çoğunlukla yaratıcı matematiksel akıl yürütme becerisini ortaya çıkardığını belirtmişlerdir. Boesen, Lithner ve Palm (2010), benzetmeye dayalı akıl yürüttükleri zaman öğrencilerin yeni bir akıl yürütme kurmak zorunda kalmadıklarını ya da özünde matematiksel özellikler düşünmek zorunda kalmadıklarını ve sonuçta başarılı olsalar bile bu durumun onların kavramsal anlamalarını geliştirmelerine engel olduğunu savunmuşlardır. Bu fikri destekleyen başka bir düşünce, çözen tarafından bilinen tam bir çözüm prosedürü olan ve her şeyin kolayca ilerlediği rutin problem çözüldüğünde, strateji seçimi verilmiş olur ve uygulamalar çözen için sorun olmaz. Bu bir anlamda öğrencileri sadece tek tip akıl yürütmeye yönlendirmektir. Çözücüler çözüm prosedürünü anlasalar da anlamasalar da yaygın ve doğrudur (Lithner, 2005). Öğretmenlerin öğrencilerini matematiksel akıl yürütme için gerekli içeriği sağlamak için ilginç, kompleks ve değerli problemlerle sorgulamaları gerekmektedir (Artz ve Yaloz-Femina, 1999).

Matematik eğitimi camiasında, matematik öğretmenlerinin öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini öğrenmek için daha fazla fırsata ihtiyacı olduğu konusunda fikir birliği vardır (Francisco ve Maher, 2011). Öğretmenler öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme becerilerini geliştirebilmek için ne yapacağının bilincinde olmalıdır. Öğretmenler öğrencilerin matematiksel fikirlerini geliştirmek için onların akıl yürütmeleri ve tahminlerini yansıtacak sorular planlayarak onlara fırsatlar sunabilirler (Olson, 2007). İspat ve akıl yürütme konusunda niçin böyle düşünüyorsun? Veya niçin böyle yaptın? gibi sorular öğrencilere desteklenmeye ve kanıtların çürütülmesine ihtiyaç duyulan durumları görmesi için yardımcı olabilir (Lithner, 2005). Francisco ve Maher (2011), bir projenin parçası olarak yürüttükleri çalışmalarında öğretmen ve öğrencilerle çalışarak öğretmenlerin öğrencileri gözlemlmelerinden sonra birbirleriyle fikir paylaşımında bulundukları ve öğrencilerin akıl yürütmeleri hakkında ne düşündüklerini

paylaştıkları toplantılar düzenlemişlerdir. Araştırmacılar öğretmenlerin gözlemleri, öğrencilerin fikirlerini keşfetme ve öğrencilere matematiksel argümanların geçerliliği hakkında karar verme fırsatını vermenin güçlü ve özerk matematik düşünürleri haline gelmelerine ve öğrencileri matematiksel düşüncelerini açıklamaya teşvik etmenin, öğrencileri teşvik etmek için güçlü bir yol olduğunu fark etmelerine yardımcı olabileceğini vurgulamışlardır. Ayrıca çalışmada matematik dersindeki birkaç zengin matematiksel akıl yürütme örneğini öğretmenlerin fark etmediğinden bahsedilmiştir. Araştırmanın sonuçları, öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini öğrenmeleri için çok gerekli fırsatları sağlayabileceğini desteklemektedir. Öğretmenler, muhakemenin neler gerektirdiğini öğrenerek muhakeme becerilerini geliştirmeleri için öğrencilere yardımcı olabilirler (Pilten, 2008).

Araştırmacılar, bir taraftan akıl yürütmenin nasıl geliştirilebileceğini tartışırken bir taraftan da çeşitli değişkenlerin matematiksel akıl yürütme üzerine etkisini incelemişlerdir. Bu çalışmalardan birisi olan Başaran (2011), Ankara ve Kıbrıstaki üniversite öğrencileri ve öğretmen adayları ile yaptığı çalışmasında, çalışma alışkanlıklarını, öz yeterlik algılarını, problem çözme stratejilerini, demografik profillerini, matematiksel düşünme ve akıl yürütme yetkinliklerini ve aralarındaki ilişkiyi belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırmada kız öğretmen adaylarının erkek öğretmen adaylarına göre anlamaya daha odaklı olduğu görülmüştür. Dördüncü ve beşinci sınıf öğrencileri, temel hesaplama becerileri ve mantıksal çıkarım becerileri açısından ikinci ve üçüncü sınıf öğrencilerine göre daha yetkindir. Buna ek olarak, birinci sınıf öğrencileri, ayrıntılı matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileri üzerine notları, ikinci sınıf öğrencilerine göre daha yüksektir. Matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileri açısından Ankara bölgesinden öğrencilerin ortalama puanı, Kuzey Kıbrıs bölgesinden öğrencilerin ortalama puanlarından belirgin derecede yüksektir. Bazı öğrencilerin yüksek motivasyonel tutumlara sahip olmalarına rağmen, matematiksel düşünme ve akıl yürütme yetkinliği konusundaki gerçek yeteneklerinin farkında olmadığı görülmüştür. Öz yeterlilik ise, orta derecede bir etkiye sahiptir; ancak matematik başarısının kuvvetli yordayıcıları arasındadır. Benzer olarak Sumpter (2009) ise, çalışmasında duyguların ve cinsiyetin matematiksel akıl yürütme becerisini etkileyip etkilemediğini incelemiştir ve sonuç olarak, güven, beklenti ve motivasyon hakkındaki inançların, problem çözme sırasında alınan kararlarda önemli olduğunu

belirtmiştir. Beklentiler (örneğin “bir yanıtım var ve bu algoritmadan ikisini bekledim”), güven (örn. “İyi bilinen bir algoritma daha güvenlidir”) ve motivasyon (örn. “Çözümü kendim düşünemiyorum”), inançlarının matematiksel bilgi kullanımıyla karşılaştırıldığında oldukça baskın olduğunu ve bu inanç türlerinin öğrenciyi başka bir yol izlemeye yönelttiğini belirtmektedir. Örneğin, doğru bir cevapla sonuçlanan çözümünü birey yanlışa çevirebilir çünkü problemleri daha önce çözmüş olmasına ve aynı cevaba sahip olmasına rağmen beklentileri aksini belirttiği için başka bir yöne yönelmiştir. Ancak araştırmacı, öğrencilerin kendilerini iyi yönlendiren inançlar geliştirmeleri için daha iyi fırsatlar sağlayan öğrenme ortamları yaratmak için halen çok çalışmaya ihtiyaç duyulduğunu savunmaktadır. Ayrıca araştırmanın sonuçlarına göre; öğretmenlerin öğrencilerin cevaplarından derlenen soruları kız ve erkek öğrencilerin özelliklerine atfettiği fakat genel anlamda kız ve erkeklerin benzer çekirdek inançları paylaştıkları görülmüştür. Yine inançların nitel bir bakış açısıyla araştırıldığı Sumpter (2013) çalışmasında beklenti, güven ve motivasyon inançlarına dair temalar oluşturarak matematiksel akıl yürütme türleri ile ilişki bulmaya çalışmıştır. Dört öğrenci ile mülakatlar yapılarak veriler elde edilmiştir. Temalar ve alt temalar yardımıyla açıklamalar yapılmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre; beklentiler esas olarak stratejinin uygulanmasını etkiler, motivasyon öğrencinin bir matematiksel akıl yürütmesi, belirli bir algoritmanın bir cevap için “tek yol” olduğunu iddia etmeleridir ve bu durumda yaratıcı akıl yürütme, o zaman bir seçenek değil, yerel bir adımda bile değildir. Güven teması ise bireyin kendine yönelik ve konuya yönelik ifadelerinden, örneğin, “benim stratejim güvenli” diyebilmesidir. Bu durum bilinen algoritmaya dayalı akıl yürütme ile ilgilidir. Benzer bir sonuçta, Sprigler ve Alsup (2003)’un ilköğretim öğrencilerinin matematiksel akıl yürütmesi ve cinsiyet arasındaki ilişkiyi araştırdığı çalışmasında ortaya çıkmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre; matematik başarısı anlamında kız ve erkekler arasında fark bulunamaması erkeklerin daha başarılı olduğu kanısına yeni bir bakış getirmiştir. Fakat matematiksel akıl yürütme alt becerileri cinsiyet hassasiyetine sahiptir.

Matematik öğretmenlerinin ispat, muhakeme, akıl yürütme kavramlarının anlamından, gerekliliğinden ve öneminden emin olarak yetiştirilmeleri gereklidir (Bahtiyari, 2010). Öğretmenlerin matematiksel akıl yürütme algılarının önemli olduğu düşüncesiyle Loong, Vale, Bragg ve Herbert (2013)’in çalışmasında, bazı öğretmenlerin

akıl yürütmenin anlamını söyleyebildikleri halde bazılarının problem çözme ile akıl yürütme becerisi kavramları karıştırma gibi belirsiz ifadeler kullandıkları belirtilmiştir. Herbert (2014), ilkokul öğretmenlerinin matematiksel akıl yürütmelerinin keşfedilmesi ve geliştirilmesi amacıyla bir taslak hazırlamıştır. Araştırmada öğretmenlerin görüşmelerden elde edilen cevapları incelenerek yedi kategori oluşturulmuş ve her bir kategori dinleyici; amaç; sunum; akıl yürütme türü boyutlarında ele alınmıştır. Araştırmada öğretmenleri, öğrencilerin kullandığı akıl yürütmeleri hem de matematiksel akıl yürütmenin çeşitliliğini fark etme fırsatlarına maruz bırakmak amacıyla uygulama dersi ve ders sonrası tartışmalar yapılmıştır. Öğretmenler, beklenen öğrenci yanıtlarını ve olası öğretmen eylemlerini belgeleyen uygulama dersi için ayrıntılı planı okuma fırsatı bulmuşlardır. Araştırmanın sonuçları, öğretmenlerin matematiksel akıl yürütmenin karmaşıklığını da kapsayan boyutlarla ilgili farkındalıklarının arttığını göstermektedir. Benzer olarak; ilkokul öğretmenlerinin matematiksel akıl yürütme algıları için bir taslak hazırlamak amacıyla Herbert, Vale, Bragg, Loong ve Widjaja (2015) tarafından bir çalışma yapılmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre kategoriler, matematiksel akıl yürütme konusundaki farkındalığının sadece varsayımların oluşturulması, varsayımların haklı gösterilmesi ve doğrulanması ve matematiksel fikirler arasında bağlantı kurulması ve yapılandırılması olmak üzere düşünülmesinden kaynaklanmaktadır. Bu durum mesleki öğrenme fırsatlarının değerlendirilmesinde önemlidir ve öğretmenlerin matematiksel akıl yürütme algılarındaki değişimi en üst düzeye çıkarmak için bu gibi imkânların nasıl tasarlanabileceğine dair bilgiler sağlar. Öğretmen adaylarının ileride öğretmen olacağı ve öğrenme ortamında matematiksel akıl yürütme becerisi ile ilgili faaliyetler yapabilmesi için öncelikle matematiksel akıl yürütme algılarının belirlenmesinin önemli olduğu düşüncesi ile yaptıkları çalışmalarında Öz ve Işık (2016), benzer sonuçlara ulaşmış öğretmen adaylarının matematiksel akıl yürütme becerisinin ne anlama geldiğine dair çeşitli görüşlerinin olduğu tespit etmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının genel olarak matematiksel akıl yürütme becerisi ile ilgili bir ders ya da seminer almadıklarını söylediklerini matematiksel akıl yürütme becerisinin ortaokul matematik dersi öğretim programında yer alması gerektiğini, öğrenciler için yararlı bir beceri olduğunu düşündüklerini belirtmişlerdir.

Altıparmak ve Öziş (2005)'e göre, ispat ve muhakeme insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenektir. Bu yeteneğin gelişimi belirlenecek uygun stratejilere bağlıdır. Öyle ki bu stratejilerin amaca yönelik belirlenememesi insanda doğuştan var olan ispat ve muhakeme yeteneklerini zamanla yok edip, ezberleme yolunu tercih eden, neden sonuç ilişkisini takip edemeyen bireyler yetiştirilmesine sebep olur. İlkokul yılları boyunca tanıtılabilecek ispat ve argümantasyon yolları, matematiksel akıl yürütmenin gelişimi için yararlı stratejiler sunması açısından önemlidir (Yankelewitz, 2009). Yankelewitz (2009)'in uzun soluklu çalışmasında öğrencilerin sınıf ortamında düşüncelerini rahatça savunabilecekleri ve tartışabilecekleri ortamlar tasarlanmıştır. Öğrencilerin kesirler konusunda matematiksel akıl yürütmeyi geliştireceği düşünülen problemlerle uğraşmaları sağlanarak matematiksel akıl yürütmenin gelişimi incelenmiştir. Matematiksel akıl yürütme üzerinde çeşitli yöntemlerin etkisinin araştırıldığı diğer bir çalışma ise, kesirler ve tamsayılar konuları üzerinde Erdem (2015) tarafından yapılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre, zenginleştirilmiş (Eğitsel oyunlar, Karikatürler, Bilgisayar destekli uygulamalar, Somut materyaller) öğrenme ortamının muhakemeye olumlu etki yaptığı ve öğrencilerin derse katılımını arttırdığı ve öğrencilerin tutumlarını olumlu yönde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır. Kağıt ve kalem ortamında katılımcılar genellikle analitik matematiksel akıl yürütmenin ötesine geçemez ve yaratıcılığa veya pratik akıl yürütmeye yönelemeyeceklerini belirten Zembat (2008), buna karşılık, teknoloji ortamında, sağlanan özelliklerin yardımıyla, belirli bir akıl yürütme ile sınırlandırılmaksızın farklı matematiksel akıl yürütme türlerine yönelebileceklerini ve öğrencilerin matematiksel akıl yürütmeleri teknolojik araçların sağladığı olanaklarla desteklenebileceğini savunmaktadır.

Bireyin kendisinin ve diğerlerinin düşünme yollarının farkında olması- üst biliş becerileri bakımından gelişmiş öğrencilerin aynı zamanda muhakemelerinin de gelişmiş olacaklarını söylemek mümkündür (Piltin, 2008). Benzer olarak; Çoban (2010)'ın çeşitli branşlarda öğrenim gören üniversite öğrencileriyle yürüttüğü çalışmasında öğretmen adaylarının biliş ötesi öğrenme stratejileri ile matematiksel muhakeme becerileri arasında pozitif yönde anlamlı bir ilişki olduğu, öğrencilerin biliş ötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeylerinin ve matematiksel muhakeme becerilerinin cinsiyete, öğrenim görülen bölüme göre farklılaştığı belirtilmiştir. Üstbiliş ve muhakeme arasındaki ilişkiye dayanan bir diğer çalışma ise, Kramarski ve Mevarech

(2003) tarafından dört öğretim yöntemi: üst biliş ile kombine edilmiş işbirlikli öğrenme, işbirlikli öğrenme, üst biliş ile bireyselleştirilmiş öğrenme ve bireyselleştirilmiş öğrenme uygulanarak bu yöntemlerin matematiksel akıl yürütme üzerine etkilerinin karşılaştırıldığı araştırmadır. Araştırmanın sonuçlarına göre; karşılaştırma esasına göre üst biliş ile kombine edilmiş işbirlikli öğrenmenin üst biliş ile bireyselleştirilmiş öğrenmeye göre daha iyi performans gösterdiği ve üst biliş ile bireyselleştirilmiş öğrenmenin ise; işbirlikli ve bireyselleştirilmiş öğrenme gruplarına göre daha iyi performans gösterdiği belirtilmiştir. Üst biliş eğitime maruz bırakılmayan iki grup arasında anlamlı fark bulunmamıştır. Bu çalışma öğrencileri işbirlikli gruplarına yerleştirmenin matematiksel akıl yürütmeyi güçlendirmek için yeterli olmadığını göstermiştir.

Matematiksel akıl yürütmenin gelişimi ile ilgilenen bir diğer çalışma öğrencilerin ölçme alanında matematiksel akıl yürütmelerinin gelişimini amaçlayan McClain vd. (1999)'in çalışmalarıdır. Çalışmada öğretim deneylerinin hedeflerinden biri öğretim sıraları geliştirmek olup (1) ölçüm ve (2) zihinsel hesaplama ve sayılar için tahmin stratejileri ile birinci sınıf öğrencilerinin anlamlı anlayışlar inşa etmesini desteklemek üzere bir öğretim sırası tasarlanmıştır. Öğretim sıralarını geliştirirken birincil odak, öğrencilerin problem durumlarını çoklu yorumlamalarını desteklemektir. Bu yorumlar daha sonra öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini açıkladığı sınıf tartışmalarında temel oluşturmuştur. Öğrencilerin düşüncelerini açıkladığı ve haklı gördüğü tartışmalar, dikkatle sıralanmış öğretim ve öğretimin birbiriyle ilişkili yönleri, öğrencilerin akıl yürütmelerinin güçlü yollarını geliştirmede destek olarak önemli rol oynamaktadır. Benzer olarak Kasmer ve Kim (2011) tahmin yapmanın matematiksel akıl yürütme üzerine etkisini araştırdığı araştırmasını ortaokul öğrencileriyle cebir kavramları üzerinde yürütmüştür. Tahmin soruları önceden bilgi edinme ve önceki araştırmalardan gelen kavramları birleştirmek için fırsatlar oluşturma potansiyeline sahiptir. Öğrenciler tahmin sorularını önceden belirlenmiş doğru yanıt olmamış olarak görmelerinden dolayı, bu tür sorular öğrencilere yanlış olmasından korkmadan sınıf söyleminde bulunma fırsatı sunabilir. Araştırmanın sonuçları; tahmin yapmanın, gelişmiş kavramsal anlayış ve matematiksel akıl yürütme ile ilgili geçerli bir yapı olduğunu desteklemektedir.

7. ve 8. sınıflar ve ortaöğretim 9. ve 10. sınıflar üzerinde yapılan bir diğer çalışma cebir öğrenme alanında soyut matematiksel akıl yürütmenin gelişimini incelemiştir (Susac vd. 2014). Susac vd. (2014)'e göre; ilköğretim okulundan katılımcılar çoğunlukla somut stratejiler kullanırken, ortaöğretim katılımcıları ağırlıklı olarak kural tabanlı stratejiler kullanmaktadır. Öğrencilerin bu beceriyi hızla ele aldıkları ve fizikteki problem çözme gibi diğer bağlamlarda kolayca uygulayabileceği varsayılmamalıdır. Aksine, öğretmenler öğrencileri (hem kalıp tanıma ve hem de matematiksel kuralları ve bilinen prosedürleri etkin bir şekilde uygulama) kullanmaya teşvik etmek için her fırsatı kullanmalıdır. Aslan (2007), ilköğretim 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakemede bulunma düzeylerinin literatürde belirtilen ortalamalara göre düşük olduğu ve bu süreçte kullanılması beklenen stratejileri yeterli düzeyde kullanamadıkları, verilen ifadenin doğruluğunu göstermede tercih ettikleri ispat türünün sınıf seviyesi ile birlikte belli oranda değiştiğini (görsellik ve örneklerle doğrulamadan cebirsel ispata yönelme) ifade etmiştir. İlköğretim öğrencilerinin matematiksel düşünme ve akıl yürütme sürecini inceleyen bir diğer çalışma Yeşildere ve Tünel (2007), 0 ile 4 arasında değişen derecelendirilmiş puanlama anahtarı kullanarak ve Cai (2003) tarafından matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi için oluşturulan kategoriler (cevabın doğruluğu ve hataların belirlenmesi, çözümün gösterimi ve çözümün açıklanması) doğrultusunda analizlerini gerçekleştirmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre; öğrenciler bilgilerin direkt uygulanarak çözümün istendiği problemlerde, yorumun ve akıl yürütmenin gerekli olduğu problemlere göre daha fazla başarılı olmuşlar ve matematiksel olarak tahmin etmede güçlük çekmişlerdir. 8. Sınıf öğrencilerinin ölçme öğrenme alanında matematiksel akıl yürütme becerilerini inceleyen Işıksal, Koç ve Osmanoğlu (2010), 8. sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama gerektiren geometri problemlerini çözerken zorluk yaşadıklarını, öğrenciler bir silindirin boyutları ve hacmi arasındaki ilişkiyi akıl yürütmede güçlük çektiklerini belirtmişlerdir.

Öğretmen adaylarının bazı cebir kavramlarında matematiksel akıl yürütme seviyelerini belirlemek amacıyla yapılan çalışmada öğretmen adaylarının cevapları dört seviyeye (1. Seviye: Herhangi bir akıl yürütme yok, 2. Seviye 2: Kullanılacak modeller, bilinen gerçekler, özellikler ve ilişkiler hakkında farkındalık sahibi fakat herhangi bir argüman çıkarılamamış; Seviye 3: Tartışmalar zayıf olmasına rağmen bazı akıl yürütmeler üretebilir ve Seviye 4: akıl yürütmelerini desteklemek için güçlü

argümanlar üretebilir) göre değerlendirilmiş ve sonuçta ortalama matematiksel akıl yürütme seviyesi ortaya çıkarılmıştır (Castro, 2004). Castro (2004)'ya göre bir bütün olarak, öğretmen adaylarının, akıl yürütme yeteneği, % 73' ünün düşük, % 27' sinin orta ve yüksek akıl yürütme seviyesinde katılımcının olmadığını göstermektedir. Yine öğretmen adayları ile yürütülen ve öğretmen adaylarının akıl yürütme türlerini belirlemeyi amaçlayan başka bir araştırma Çiftci (2015) tarafından yapılmıştır. Araştırmada elde edilen bulgular, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının karşılaştıkları problem durumları karşısında, yüzeysel düşünme yapıları sergileyerek benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme türlerini öncelikli olarak tercih ettiklerini göstermiştir. Ezber ve algoritmaya dayalı olan bu matematiksel akıl yürütme türlerinde öğretmen adaylarının konu ile alakalı kavramsal alt yapılarını ve düşünme güçlerini bütüncül kullanamadıkları, yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü tercih eden öğretmen adaylarının ise matematiksel kavramlara daha hâkim oldukları dikkat çekmektedir. Öğretmen adaylarının en fazla algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü kullandıkları görülmüştür.

Matematiksel akıl yürütme becerisi yıllardır birçok araştırmaya konu olmuş araştırmacıların ilgi odağı olmayı sürdüren bir temel beceridir. Bu sebeple matematiksel akıl yürütme becerisinin yapısını, nasıl geliştirileceğini, türlerini araştırmak hem bilime hem de matematik öğretiminin amaçlarına hizmet edebilir. Bu anlamda matematiksel akıl yürütme becerisinin kazandırılması bir süreç gerektirir ve öğrencinin karşılaştığı fırsatlarla doğrudan ilişkilidir. Bu temel becerinin gelişimi için farklı strateji ve yöntemler destek sağlayabilir bu anlamda öğrencilerin düşünce yapısının çözümlenerek en etkili yöntemlerin öğretim programlarına entegrasyonu yapılabilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, araştırma grubu, veri toplama araçları, veri toplama araçlarının geçerliği ve güvenilirliği, pilot çalışma, veri analiz süreci ve araştırmanın geçerliği ve güvenilirliği açıklanmıştır.

3.1. Araştırmanın Modeli

Araştırmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Nitel araştırma sosyal ve beşeri bir probleme bireylerin veya grupların yüklediği anlamları keşfetme ve anlamaya yönelik (Creswell, 2014), insan davranışlarını içinde bulunduğu ortam içinde ve çok yönlü olarak anlamaya çalışmayı amaçlayan (Yıldırım ve Şimşek, 2008), veri toplarken ve yorumlarken anlamı ortaya çıkarmaya duyarlı olan, görüşme gözlem ve analizi temel alan (Merriam, 2013) bir araştırma yaklaşımıdır. Araştırma deseni olarak durum çalışması deseni kullanılmıştır. Araştırmacıların olaylar hakkında çok az veya hiç kontrolünün olmadığı durumlarda “neden” ve “niçin” soruları sorulduğunda tercih edilen (Yin, 2009) durum çalışması; güncel bir olgu, gerçek yaşam veya sınırlandırılmış çoklu durumlar hakkında mevcut durumun betimlendiği veya durum temalarının oluşturulduğu (Creswell, 2013), sınırlandırılmış bir sistemi veya bir durumu, zaman içerisinde, çok sayıda veri kaynağını kullanarak derinlemesine inceleyen (Mcmillan ve Schumacher, 2010) bir araştırma yöntemidir.

Bu araştırmada; Öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerisi türlerinin belirlenmesi ve öğretmenlerin öğretim ortamında sunumlarının matematiksel akıl yürütme becerisi açısından incelenerek mevcut durumun ortaya çıkarılması amaçlandığından, araştırma verilerinin yarı yapılandırılmış mülakatlar, gözlem ve video kayıtları ile elde edildiğinden, araştırmanın odağında insan olması ve nitel araştırmacıların, insanların deneyimlerini nasıl yorumladıklarını, dünyalarını nasıl

kurduklarını, deneyimlerine nasıl bir anlam yüklediklerini anlamaya çalıştıklarından (Merriam, 2013), nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması tercih edilmiştir. Araştırmada öğretmen ve öğrencilerin cebir öğrenme alanında matematiksel akıl yürütme becerisi bütüncül ele alındığından, durum çalışması desenlerinden “bütüncül çoklu durum” deseni kullanılmıştır. Yıldırım ve Şimşek (2008)’e göre; bütüncül çoklu durum deseni, her bir durumun kendi bünyesinde bütüncül olarak değerlendirilmesi ve sonrasında durumların birbirleriyle karşılaştırılmasıdır.

3.2. Araştırma Grubu

Araştırma grubunu 2015-2016 eğitim-öğretim yılı güz döneminde farklı okullarda görev yapan iki öğretmen ve öğretmenlerin 7. sınıf öğrencileri arasından altışar öğrenci oluşturmaktadır. Araştırma grubu olarak 7. sınıf öğrencilerinin belirlenmesinde, bu sınıf düzeyindeki öğrencilerin Temel Eğitimden Ortaöğretime Geçiş (TEOG) sınavı gibi kaygılarının olmaması, bu sınıf düzeyinde cebir öğrenme alanının önemli bir yere sahip olması göz önüne alınmıştır. Araştırma grubu belirlenirken; iki örnekleme yönteminden faydalanılmıştır. Öncelikli olarak yedi farklı okulda görev yapan öğretmenlerle görüşülerek çalışmaya katkı sağlayacağı düşünülen, zaman ve iş gücü kaybını minimuma indirebilme imkânı veren üç öğretmenin belirlenmesi açısından uygun örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Nitel araştırmalarda en çok kullanılan örnekleme türleri olasılıklı olmayan örnekleme yöntemleridir (Güler, Halıcıoğlu ve Tasgın, 2013). Nitel araştırmanın arkasında yatan fikir, araştırma problemlerine en iyi şekilde cevap alınabilecek katılımcıları veya çalışma yerlerini amaca yönelik seçmektir (Creswell, 2014). Bu anlamda amaçlı örnekleme tekniklerinden, ölçüt örnekleme tekniği ile önceden belirlenmiş birden fazla ölçütü taşıyan tüm durumların çalışılması sağlandığından (Yıldırım ve Şimşek, 2008) çalışmada öğrencilerin seçilmesi için bu örnekleme tekniği kullanılmıştır. Belirlenen ortaokullarda öğrenim gören öğrenciler arasından araştırmacının gözlemlerine ve öğretmen görüşüne göre kolay ulaşılabilir, iletişimi iyi olan ve kendini ifade edebileceği düşünülen öğrenciler çalışmaya dâhil edilmiştir. Öğretmenler ve öğrencilerin araştırmaya katılma gönüllülükleri esas alınmıştır. Katılımcı öğretmenlerin özellikleri Tablo 3.1’de ve katılımcı öğrencilerin özellikleri ise Tablo 3.2’de belirtilmiştir. Araştırmanın etiği açısından araştırmanın katılımcılarının gerçek isimleri kullanılmamış

araştırmacı tarafından belirlenen takma isimler kullanılmıştır. Araştırmanın uygulandığı okul adlarına ise A ve B şeklinde kodlar atanmıştır. Araştırmanın belirlenen devlet okulunda yürütülebilmesi için Erzurum İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden gerekli izinler alınmıştır (Ek 1).

Tablo 3.1.

Araştırmaya Katılan Öğretmen Özellikleri

Katılımcı Öğretmenler	Mezun Olunan Bölüm	Hizmet Süresi	Cinsiyet
Tülay	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	<10	Bayan
Eda	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	>10	Bayan

Tablo 3.2.

Araştırmaya Katılan Öğrenci Özellikleri

Katılımcı Öğrenciler	Ortaokul	Cinsiyet
Emin	A	Erkek
Ahmet	A	Erkek
Faruk	A	Erkek
Barış	A	Erkek
Nilgün	A	Kız
Cengiz	A	Erkek
Ece	B	Kız
Efe	B	Erkek
Hülya	B	Kız
Hale	B	Kız
Seda	B	Kız
Rabia	B	Kız

3.3. Veri Toplama Araçları

Araştırmada veri toplama araçları olarak, “Matematiksel Akıl Yürütme Testi”, Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler, Gözlemler ve Video Kayıtları kullanılmıştır. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları ve veri toplama araçlarının kullanılma gerekçeleri Tablo 3.3’de özetlenmiş olup sonrasında ise her bir veri toplama aracı ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Tablo 3.3.

Araştırmada Kullanılan Veri Toplama Araçlarının Kullanılma Gerekçeleri

Veri Toplama Aracı	Veri Toplama Aracının Kullanılma Gerekçesi
Matematiksel Akıl Yürütme Testi (6. sınıf)	Araştırma grubuna (7. sınıf öğrencilerine) 6. sınıf cebir kazanımlarına göre hazırlanan matematiksel akıl yürütme testi uygulanarak öğrencilerin hazırbulunuşluk seviyeleri hakkında bilgi edinilmeye çalışılmıştır.
Matematiksel Akıl Yürütme Testi (7. sınıf)	Araştırma grubundaki öğrencilerin matematiksel akıl yürütme beceri türlerini belirlemek için kullanılmıştır.
Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler	Yarı yapılandırılmış mülakatlar öğrencilerle birebir görüşülerek 7. sınıf öğrencilerinin düşüncelerini daha ayrıntılı incelemek amacıyla kullanılmıştır.
Gözlem ve Video Kayıtları	Öğrencilerin ve öğretmenlerin sınıf içi etkileşimlerini ve öğretim ortamının betimlenmesi açısından yapılmıştır. Ayrıca öğretmenlerin öğrencilere sundukları matematiksel akıl yürütme becerisi fırsatlarını belirlemek için kullanılmıştır.

3.3.1. Matematiksel Akıl Yürütme Testi

6. sınıf matematiksel akıl yürütme testi, ortaokul matematik dersi 2013 öğretim programında 6. sınıf cebir öğrenme alanında yer alan “cebirsal ifadeler” konusu ile ilgili kazanımlar dikkate alınarak hazırlanmıştır. Bu test sadece öğrencilerin

hazırlanmış olmalarıyla belirlemek amacıyla yapılmış olup bulgulara bu testin sonucuna yer verilmemiştir.

7. sınıf matematiksel akıl yürütme testi, ortaokul matematik dersi 2013 öğretim programında 7. sınıf cebir öğrenme alanında yer alan “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konuları ile ilgili kazanımlar dikkate alınarak hazırlanmıştır. Matematiksel akıl yürütme testi “eşitlik ve denklem testi” ve “doğrusal denklemler testi” olarak iki kısımdan oluşmaktadır. Testlerdeki maddelerin hazırlanması sürecinde temel alınan kazanımlar ve kazanımlara ayrılan ders saatleri Tablo 3.4’te belirtilmiştir.

Tablo 3.4.

“Cebirsel İfadeler”, “Eşitlik ve Denklem”, “Doğrusal Denklemler” Konuları İle İlgili Kazanımlar ve Kazanımlara Ayrılan Ders Saatleri

Sınıf Seviyesi	Konu	Kazanımlar	Ders Saati	Yüzde
6. sınıf	Cebirsel İfadeler	Aritmetik dizilerin kuralını harfle ifade eder; kuralı harfle ifade edilen dizinin istenilen terimini bulur	16	%9
		Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar		
		Cebirsel ifadenin değerlerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar		
		Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar		
		Cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemleri yapar		
7. sınıf	Eşitlik ve Denklem	Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar	14	%8
		Gerçek yaşam durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri kurar		
		Denklemlerde eşitliğin korunumu ilkesini anlar		
		Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer		
		Birinci dereceden bir bilinmeyenli		

		denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer		
		Koordinat sistemini özellikleriyle tanırlar ve sıralı ikilileri gösterir		
7. sınıf	Doğrusal Denklemler	Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo, grafik ve denklem ile ifade eder	10	%6
		Doğrusal denklemlerin grafiğini çizer		

Matematiksel akıl yürütme testlerinde yer alan maddeler araştırmacı tarafından MEB ortaokul ders kitapları, önceki yıllarda yayımlanan kılavuz kitaplar, kaynak kitaplar, PISA soruları ve ilgili alan yazın dikkate alınarak oluşturulmuştur. Hazırlanan maddelerin öğrencilerin seviyelerine uygun olmasına dikkat edilmiştir. 6. sınıf matematiksel akıl yürütme testi hazırlanma sürecinde 93 öğrenciye uygulanarak testteki maddeler için madde ayırıcılık indeksi ve madde güçlük indekslerine bakılmıştır. Madde indeksleri ve uzman görüşleri dikkate alınarak başlangıçta 12 soru olan testten dört soru çıkarılarak 6. sınıf matematiksel akıl yürütme testindeki soru sayısı sekiz olarak belirlenmiştir.

7. sınıf matematiksel akıl yürütme testi ise; “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” olmak üzere iki konuyu kapsamaktadır. 7. sınıf matematiksel akıl yürütme testinin “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili bölümünde toplam dört soru ve testin “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili bölümünde dört soru yer almaktadır. Testte yer alan maddelere ait belirtke tablosu Tablo 3.5’ te verilmiştir.

Tablo 3.5.

7. sınıf Matematiksel Akıl Yürütme Testi Madde Belirtke Tablosu

Kazanım	Kazanımları Hedef Alan Soru Numarası
7.2.1.Eşitlik ve Denklem	
7.2.1.1. Gerçek yaşam durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri kurar.	3
7.2.1.2. Denklemlerde eşitliğin korunumu ilkesini anlar. • $7+2 = 4+3$ gibi eşitliklerin bozulmaması için 4 yerine gelecek sayıyı bulmaya yönelik çalışmalar yapılır. • Eşitliğin her iki tarafına aynı sayının eklenmesi veya çıkarılması ya da iki tarafın aynı sayıyla çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitliğin korunması ele alınır. • Ekleme ve çıkarma durumlarında eşitliğin korunduğunu göstermek için terazi veya benzeri denge modellerine yer verilir.	5
7.2.1.3.Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer. • Bu sınıf düzeyinde denklemlerdeki katsayılar tam sayılardan seçilir.	1
7.2.1.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.	4,5
7.2.2. Doğrusal Denklemler	
7.2.2.1.Koordinat sistemini özellikleriyle tanır ve sıralı ikilileri gösterir. • Koordinat sistemi üzerinde yer belirlemeyle gerçek yaşam durumlarını ilişkilendirmeye yönelik çalışmalara yer verilir.	1
7.2.2.2. Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo, grafik, denklem ile ifade eder. • Tablo ile yapılan gösterimlerde sıralı ikililer biçiminde ifadeler de yer verilir.	2,3
7.2.2.3.Doğrusal denklemlerin grafiğini çizer.	4

Başlangıçta araştırmacı tarafından “Eşitlik ve Denklem” testi 10 soru ve bazı soruların alt maddeleri ile toplam 24 madde ve “Doğrusal Denklemler” testinde ise altı

soru ve bazı soruların alt maddeleri ile toplam 19 madde olarak oluşturulmuştur. 7. sınıf matematiksel akıl yürütme testi (eşitlik ve denklem testi ve doğrusal denklemler testi) her sorunun altına Madde uygun/ Madde uygun fakat gözden geçirilmeli/ Madde uygun değil ve madde ile ilgili önerileriniz kısımlarının olduğu Uzman Görüş Formu (Ek 2) eklenerek, matematik alan eğitiminde uzman altı araştırmacı ve matematik eğitiminde doktora öğrenimine devam eden üç araştırmacıya incelemeleri için verilmiştir. İncelemeler tamamlandıktan sonra 7. sınıf matematiksel akıl yürütme testinde yer alan her madde için kapsam geçerlik oranı ve kapsam geçerlik indeksi hesaplanmıştır. Kapsam geçerlik oranı, Lawhse tekniğine göre hesaplanmıştır. Lawhse tekniğine göre kapsam geçerlik oranı, N toplam uzman sayısı ve N_G ilgili madde için “madde uygun /gerekli” düşüncesine sahip uzman sayısını göstermek üzere, aşağıdaki formül ile hesaplanır (Yurdagül, 2005).

$$\text{Kapsam Geçerlik Oranı} = \frac{N_G}{\frac{N}{2}} - 1$$

Lawshe tekniğinde, kapsam geçerlik indeksi formun son halinde alınacak maddelerin toplam kapsam geçerlik oranlarının ortalamaları üzerinden elde edilir. Kapsam geçerlik oranları ve kapsam geçerlik indeksi $\alpha=0.05$ anlamlılık düzeyi için minimum değerler tablosu (Yurdagül, 2005) ‘ndaki değerlere göre karşılaştırılarak değerlendirilmiştir. 7. sınıf matematiksel akıl yürütme testinde yer alan her madde için kapsam geçerlik oranı testi inceleyen toplam 9 uzman olduğu için Yurdagül (2005)’in Veneziano ve Hooper (1997) den aktardığı $\alpha=0.05$ anlamlılık düzeyi için minimum değerler tablosuna göre, kapsam geçerlik ölçütü minimum 0.75 değeri kabul edilmiş ve kapsam geçerlik indeksi 0.79 bulunmuştur. Bulunan kapsam geçerlik oranlarına göre “eşitlik ve denklem” konusu ile ilgili testte yer alan 4. sorunun c maddesi (*Cevabın dokuz olduğu bilindiğine göre ne sorulmuş olabilir?*) uzmanlar tarafından uygun bulunmadığı için çıkarılmıştır. 7. ve 8. soruda ise uzmanların maddenin düzeltilmesi gerektiği düşüncesine sahip olunmasından dolayı bu soruların a ve b maddeleri (her iki soruda da a) *Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. b) Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.*) birleştirilerek (*Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.*) test toplamda 10 soru 24 madde olan test 10 soru

21 madde olarak düzenlenmiştir. Sorulardaki anlaşılmayan noktalar ve anlatım bozuklukları uzmanlardan gelen dönütler doğrultusunda düzeltilmiştir. Kapsam geçerlik oranlarına göre “doğrusal denklemler” testinde yer alan 3. sorunun e maddesi (*Ahmet Bey’in 40 TL ödediği bilindiğine göre Ahmet Bey’in işi ve evi arası uzaklık kaç kilometredir?*) çıkarılmıştır. Testin 4. Sorusunun c maddesi (*B mumu kaç saatte biter? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.*) A mumunun boy zaman ilişkisini ifade eden denklemi yazınız. olarak değiştirilmiştir. Testin 5. Sorusunun a şıkkı soru kökü ile birleştirilerek $x + y + 1 = 0$ denkleminin grafiğini çiziniz. Grafiği çizerken neler yaptığınızı açıklayınız. olarak düzenlenmiştir. Test pilot uygulamada kullanılmak üzere, altı soru 18 madde olarak düzenlenmiştir. Pilot uygulama sonrasında matematiksel akıl yürütme testinin eşitlik ve denklem bölümü beş soru sekiz madde ve doğrusal denklemler bölümü ise, dört soru 11 madde olarak düzenlenmiştir. Matematiksel akıl yürütme testinin ana uygulamada kullanılmış son hali Ek 3’te verilmiştir.

3.3.2. Yarı Yapılandırılmış Mülakatlar

Katılımcı öğrencilerin matematiksel akıl yürütme testine verdikleri cevapların ayrıntılı olarak incelenebilmesi için yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Öğrencilerin yaptıkları işlemleri açıklamalarına, düşüncelerini ifade etmelerine, kendi gerekçelerini sunmalarına fırsat tanınmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler, araştırmacı tarafından önceden belirlenmiş ya da görüşme esnasında ortaya çıkan araştırma konusu ile direkt ya da dolaylı olarak ilişkili olabilecek durumlara göre değişiklik yapabilme ve yeni sorular sorabilme imkânı veren esnek bir veri toplama yöntemidir (Güler vd. 2013). Araştırmacı görüşmeler sırasında öğrencinin çözümünü takip ederek, *Neden böyle düşünüyorsun? Yaptığın işlemin ne anlama geldiğini açıklar mısın?* gibi sorularla öğrencinin düşüncesini açığa çıkarmayı amaçlamıştır. Araştırmada katılımcıların matematiksel akıl yürütme türlerini belirlemek amaçlandığından ve yarı yapılandırılmış görüşmelerin öğrencilerin matematiksel akıl yürütme testindeki sorularla ilgili nasıl düşündüğü hakkında ayrıntılı bilgi toplama imkânı verdiğinden bu veri toplama yöntemi tercih edilmiştir.

Mülakatlar her bir öğrenci ile iki kez yapılmış olup mülakat süreleri 9 dk – 47 dk aralığında değişmektedir. Öğrencilerle yapılan mülakatlar araştırmacı ve öğrenci dışında kimsenin olmadığı sessiz bir zaman diliminde okulun kütüphanesinde yapılmış olup her

mülakat video kaydına alınmıştır. Kamera öğrencinin yüzü görünmeyecek şekilde sadece sorunun bulunduğu kağıt, öğrencinin yaptığı işlemler görünecek şekilde ve öğrenciyi rahatsız etmeyecek biçimde sabitlenmiştir. Mülakata başlamadan önce öğrencilerin rahatlamaları sağlanarak düşündüklerini sesli bir şekilde ifade etmelerinin önemli olduğu, süre bakımından sınırlama yaşamayacakları, yorulduklarında veya devam etmek istemediklerinde rahatça söyleyebilecekleri noktalarına değinilmiştir. Öğrencilerle yapılan mülakat tarih ve süreleri Tablo 3.6’da verilmiştir.

Tablo 3.6.

Katılımcılarla Yapılan Mülakat Tarih ve Süreleri

Katılımcı Öğrenciler	1. Mülakat	2. Mülakat
Emin	29.12.2015 15.58 dk.	19.01.2016 36.45 dk.
Ahmet	29.12.2015 29.47 dk.	21.01.2016 47.23 dk.
Faruk	05.01.2016 21.55 dk.	19.01.2016 26.56 dk.
Barış	30.12.2015 24.42 dk.	19.01.2016 18.53 dk.
Nilgün	30.12.2015 35.51 dk.	19.01.2016 23.22 dk.
Cengiz	30.12.2015 12.12 dk.	19.01.2016 21.28 dk.
Ece	07.01.2016 29.17 dk.	14.01.2016 21.45 dk.
Efe	08.01.2016 14.46 dk.	14.01.2016 16.13 dk.
Hülya	07.01.2016 12.57 dk.	12.01.2016 16.49 dk.
Hale	06.01.2016 18.09 dk.	11.01.2016 21.48 dk.
Seda	07.01.2016 9.34 dk.	14.01.2016 24.20 dk.
Rabia	06.01.2016 11.18 dk.	12.01.2016 20.16dk.

3.3.3. Gözlem ve Video Kayıtları

Gözlem, araştırmacının araştırmaya konu olan alanın gözlenmesi, alanda meydana gelen olayları ve süreçleri ve olaya dâhil olan kişileri gözlemlemek amacıyla yapılan bir veri toplama yöntemidir (Güler, vd. 2013). Araştırmada öğrencilerin matematiksel akıl yürütme beceri süreçleri, sınıf içi öğrenme ortamının öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerisi türleri üzerine yansımalarının araştırılması nedeniyle öğrencilerin cebir öğrenme alanında “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal İlişkiler” konularının öğretimi süresince araştırmacı tarafından gözlem yapılmıştır. Ayrıca araştırmacının gözlem yapılırken gözden kaçırılacak durumları önlemek için ve ders ortamının daha iyi betimlenebilmesi amacıyla video kayıtları yapılmıştır. Video kaydı yapılması konusunda öğretmenlerin izni alınmıştır. Araştırmanın yürütüldüğü grupların birinin tüm dersleri kayıt altına alınırken, diğerinde öğrencilerin dikkatlerinin çok dağıldığı fark edildiği için ve diğer grupla derslerin bazılarının aynı saate denk gelmesinden dolayı altı ders saati kayıt altına alınmıştır. Araştırmada gözlem ve video kayıtlarının tarihi ve süresi Tablo 3.7’de verilmiştir.

Tablo 3.7.

Araştırmanın Gözlem Süreci

Öğretmenler	Sınıf	Tarih	Süre
Eda	A	21.12.2015	1 ders saati
Eda	A	22.12.2015	2 ders saati
Eda	A	23.12.2015	2 ders saati
Eda	A	25.12.2015	2 ders saati
Eda	A	28.12.2015	1 ders saati
Eda	A	30.12.2015	1 ders saati
Eda	A	04.01.2016	1 ders saati
Eda	A	05.01.2016	2 ders saati
Eda	A	06.01.2016	1 ders saati
Eda	A	08.01.2016	2 ders saati
Eda	A	11.01.2016	1 ders saati
Eda	A	12.01.2016	2 ders saati

Eda	A	13.01.2016	1 ders saati
Eda	A	14.01.2016	1 ders saati
Tülay	B	21.12.2015	2 ders saati
Tülay	B	23.12.2015	2 ders saati
Tülay	B	30.12.2015	2 ders saati
Tülay	B	04.01.2016	2 ders saati

*1 ders saati 40 dakikadır.

3.4. Veri Toplama Araçlarının Geçerliliği ve Güvenirliği

Veri toplama araçlarının geçerlik ve güvenirliğini sağlamak için yapılan çalışmalar Tablo 3.8’de ayrıntılı olarak verilmiştir.

Tablo 3.8.

Veri Toplama Araçlarının Geçerlik ve Güvenirliği İçin Yapılan Çalışmalar

Veri Toplama Araçları	Geçerlik	Güvenirlik
Matematiksel Akıl Yürütme Testi	İlgili literatürün incelenmesi	İlgili literatürün incelenmesi
	Uzman görüşüne başvurulması	Uzman görüşüne başvurulması
	Kapsam geçerliğinin sağlanması açısından belirtke tablosu yapılması	Pilot uygulama yapılması
	Pilot uygulama yapılması	Araştırma problemine uygun hazırlanması
Görüşme	İlgili literatürün incelenmesi	İlgili literatürün incelenmesi
	Pilot uygulama yapılması	Pilot uygulama yapılması
	Soruların amaca yönelik sorulması	Görüşme sayısının birden fazla yapılması
		Araştırma problemine uygun hazırlanması
Gözlem/ Video Kaydı	İlgili literatürün incelenmesi	İlgili literatürün incelenmesi
	Pilot uygulama yapılması	Pilot uygulama yapılması
	Uzman görüşüne başvurulması	Gözlem sayısının birden fazla yapılması

3.5. Araştırmacının Rolü

7. sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme süreçlerinin araştırıldığı çalışmada araştırma sürecinin planlanması, veri toplama araçlarının hazırlanması ve uygulanması, yarı yapılandırılmış görüşmelerin yapılması, sınıf içi ortamı betimlemek için video kayıtlarının alınması ve gözlem süreci araştırmacı tarafından yapılmıştır. Araştırmacı uygulama sürecinde öğretmen ve öğrencilerle iletişim halinde bulunmuştur. Uygulama sürecine başlamadan önce öğretmenlerle görüşme yapılarak ve uygulama sürecinin öncesinde birkaç ders gözlemlenerek öğrencilerin ve öğretmenlerin araştırmacıya alışması ve rahat davranması sağlanmaya çalışılmıştır. Öğrenciler not kaygısı taşımadan kendilerini rahatça ifade etmeleri, zihinsel süreçlerini yansıtmaları için motive edilmeye çalışılmıştır. Araştırmacı, görüşmeler sırasında öğrencilerin takıldıklarında veya düşüncelerini aktarmadan sürece devam ettikleri anlarda araya girerek öğrencinin düşüncelerini söylemeleri noktasında teşvik edici rol üstlenmiştir. Ayrıca bazı öğrencilerde yaşanan yapamama, ümitsizliğe düşme ve soru çözümüne devam etmeme isteği gibi durumlarda öğrencinin devam etmesini destekleyecek şekilde davranmıştır. Ders esnasında öğretmenlerin ve öğrencilerin dikkatini dağıtmamak için sınıf içi doğal ortamı etkilemeyecek bir yerde oturmuştur. Video kayıtlarını arka sırada oturarak kameranın sabitlenmesi ile öğrenme ortamını etkilemeyecek şekilde yapmıştır. Verilerin toplanmasından sonraki süreçte görüşmelerin doküman haline getirilmesi, analiz için hazırlanması ve analiz süreci araştırmacı tarafından yapılmıştır.

3.6. Pilot Uygulama

Araştırmada araştırmacının uygulama sürecinde yaşaması muhtemel sorunların fark edilmesi ve önlem alınması, veri toplama araçlarının test edilmesi, araştırmacının deneyim kazanması açısından önemli olduğu düşüncesi ile pilot uygulama yapılmıştır. Pilot uygulama; 2015-2016 yılı güz döneminde 7. sınıf düzeyinde yapılmıştır. Araştırmanın örnekleminin dışında farklı bir okulda bir öğretmen ve iki öğrencisi ile yürütülmüştür. Öğretmenin “Eşitlik ve Denklem” konusunun anlatımının başlangıcından itibaren gözlemler yapılmış ve konu anlatımının bitmesinden sonra matematiksel akıl yürütme testinin ilgili bölümü öğrencilere çözdürülmüştür. Test maddelerinin çözülmesi için bir ders saati verilmiştir. Fakat sürenin yeterli olmadığı

görülerek öğrencilere ek süre verilmiştir. Bu testin yapılmasının üzerinden fazla vakit geçmeden bir iki gün içerisinde iki öğrencinin testleri ile ilgili yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerle görüşmeler ses kaydı ile yapılmıştır. Aynı şekilde “Doğrusal Denklemler” konusunun öğretiminin tamamlanmasından sonra matematiksel akıl yürütme testinin bu konu ile ilgili bölümü öğrencilere dağıtılmıştır. Devamında öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler okulun öğretmenler odasında yapılmıştır. Matematiksel akıl yürütme testi ve çalışma süreci ile ilgili revize edilmesi gereken noktalar belirlenmiştir.

Pilot çalışmanın yapılmasından sonra belirlenen ana uygulama için düzeltilmesi gereken noktalar şu şekildedir:

1. Matematiksel akıl yürütme testinin doğrusal denklemler konusu ile ilgili bölümünde grafik çizimi ile ilgili sorularda öğrencilerin çizim yapabilecekleri boş alan bırakılmış olmasına rağmen öğrencilerin çizimlerdeki düzensizliği engellemek adına ana uygulamada grafik çizecekleri alana kareli kâğıt yerleştirmenin gerekliliği fark edilmiştir.
2. Öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerin öğretmenler odasında yapılması oda oldukça büyük olmasına rağmen hem öğrenci açısından hem de diğer öğretmenler açısından dikkat dağınıklığına sebebiyet verdiğinden ana uygulamada görüşme ortamının daha dikkatli ve araştırmacı ve öğrenci dışında kimsenin olmayacağı sessiz bir ortam olmasına özen gösterilmiştir.
3. Öğrencilerle yapılan görüşmelerin ses kayıt cihazıyla yapılmasının öğrencinin soru kağıdı üzerinde gösterdiği bölümler olması (buradan çizersek böyle olur gibi) sebebiyle görüşmelerin öğrencinin kağıdının görülmesi açısından video ile yapılmasının daha uygun olduğuna karar verilmiştir.
4. Öğretim sürecinde gözlem yapılırken araştırmacının gözden kaçırdığı kısımlar olabileceği düşüncesiyle derslerin gözlem dışında video kayıt altına alınmasının öğrenme ortamının daha iyi betimlenmesi açısından yararlı olabileceği düşünülmektedir.
5. Görüşmeler esnasında öğrencilerin heyecanlandıkları ve rahatça cevap veremedikleri gözlemlendiğinden ana uygulamada görüşmeye başlamadan önce öğrencilerle sohbet edilmiş rahatlamaları sağlanmış sonrasında görüşmelere başlanmıştır.

6. Pilot uygulama sürecinde matematiksel akıl yürütme testinde ki sorular için öğrenciler için bir ders saatinin yetersiz geldiği fark edilmiş ve öğrencilerin soru sayısının fazla olması durumunda sıkıldıkları gözlemlenmiştir. Bu sebeple madde analizleri ve kazanımlar doğrultusunda soru sayısında azaltma işlemi yapılmıştır.

Pilot uygulama; araştırmanın uygulama sürecindeki eksikliklerin giderilmesi, veri toplama aracındaki düzeltilmesi gereken noktaların belirlenmesi, araştırmacının görüşme ve gözlem konusunda deneyim kazanması, ana uygulamanın planını yapabilmesi açılarından araştırmacıya fayda sağlamıştır.

3.7. Araştırmanın Uygulanması

Araştırma 2015-2016 güz döneminde iki farklı okulda görev yapan iki matematik öğretmeni ve her bir öğretmenin altışar tane 7. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Uygulamaya başlanmadan önce öğretmenlerle bireysel olarak araştırmanın amaçları ve araştırma sürecinin nasıl olacağı hakkında görüşülmüştür. Öğretmenlerin 7. sınıf ders programları incelenmiştir ve her iki okuldaki uygulama aynı zaman diliminde yapılacağı için uygun sınıflar belirlenmiştir. Öğretmenlere konu anlatımı ile ilgili bir müdahale yapılmamıştır. Kendi hazırladıkları düzen içerisinde öğretimleri takip edilmiştir. Araştırma grubunun içerisinde yer aldığı 7. sınıf öğrencilerine 6. Sınıf “cebirsal ifadeler” konusu kazanımlarına uygun olarak hazırlanan 6. sınıf matematiksel akıl yürütme testi uygulanarak öğrencilerin hazır bulunuşlukları hakkında bilgi edinilmeye çalışılmıştır. Sonraki süreçte öğretmenin ders anlatımları ve öğrencilerin ders içi davranışları gözlemlenmiştir. “Eşitlik ve Denklem” konusunun öğretimi süresince araştırmacı tarafından 14 ders saati gözlemlenmiş olup her ders video kayıt altına alınmıştır. Konunun bitimini takip eden bir ders saatinde matematiksel akıl yürütme testinin konu ile ilgili kısmı öğrencilere dağıtılmıştır ve öğrencilerin birbirleri ile etkileşim halinde olmamaları sağlanarak çözmeleri sağlanmıştır. Testin çözülmesinin ardından vakit kaybetmeden en kısa sürede öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşme sürecine başlanmıştır. Her öğrenci ile bireysel olarak görüşülmüştür. Bu süreçte dersler gözlemlenmeye devam edilmiştir. İkinci konu olan “Doğrusal Denklemler” konusunun 10 ders saatlik öğretimi boyunca araştırmacı tarafından tüm dersler takip edilmiş ve video kayıt altına alınmıştır. Konunun öğretiminin tamamlanmasından sonra

matematiksel akıl yürütme testinin konu ile ilgili soruları öğrencilere dağıtılmış ve görüşmelere başlanmıştır. Görüşmelerin tamamlanmasından sonra elde edilen veriler analiz edilmek üzere depolanmıştır.

3.8. Verilerin Analizi

Bu bölümde araştırmadan elde edilen verilerin analiz süreci ile ilgili bilgi verilmiştir.

3.8.1. Yarı Yapılandırılmış Görüşmelerin Analizi

Araştırmada uygulanan matematiksel akıl yürütme testinin ardından öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Betimsel analiz, doğrudan bir konunun resmedilmesi, tanımlanması ve açıklanması amacıyla (Ekiz, 2009) elde edilen verilerin daha önceden belirlenen temalara göre özetlenip yorumlaması ve neden sonuç ilişkilerinin gözetilmesi ile bir sonuca varılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Betimsel analiz, doğrudan alıntılar ile beslenir ya da desteklenir (Ekiz, 2009).

Bu çalışmada, betimsel analize başlamadan önce matematiksel akıl yürütme testindeki sorular üzerinden yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen veriler transkript edilerek bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Öğrencilerin cevapları soru soru analiz edilmiştir. Her öğrencinin testteki birinci soruya verdikleri cevaplar aşağıda ayrıntılı anlatılan taslağa göre analiz edildikten sonra diğer sorulara geçilmiştir. Bu şekilde öğrencilerin bütün soruları analiz edilerek öğrencilerin matematiksel akıl yürütme türleri belirlenmiştir. Analizlerin güvenilirliği açısından analizler başka bir uzman tarafından kontrol edilmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmelerin analizi ile araştırmaya katılan öğrencilerin matematiksel akıl yürütme beceri türlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu anlamda matematiksel akıl yürütme türlerini sistematik olarak açıklayan ve ayrıntılı olarak betimleyen Lithner (2005)'in ve Lithner (2008) 'in hazırladığı taslaklardan faydalanılmıştır. Bahsedilen taslaklarda verilerden belli sorular ışığında akıl yürütme türlerine nasıl ulaşılabileceği ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Araştırmamızda matematiksel akıl yürütme türleri ile ilgili taslağı Türkçeye uyarlayan Çiftçi (2015)'in kullandığı karşılıklar kullanılmıştır.

Lithner (2008), matematiksel akıl yürütme türlerini temel olarak benzetmeye dayalı akıl yürütme ve yaratıcılığa dayalı akıl yürütme olarak ikiye ayırmıştır. Benzetmeye dayalı akıl yürütme; ezbere dayalı akıl yürütme ve algoritmaya dayalı akıl yürütme olarak ikiye ayrılmaktadır. Ezbere dayalı akıl yürütme ve algoritmaya dayalı akıl yürütme de belirli özellikler açısından farklılık gösterme durumları açısından kendi içinde farklı akıl yürütme türlerine ayrılmıştır. Bu akıl yürütme türlerinin genel özellikleri kuramsal çerçevede ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Bireyin sorularda kullandığı matematiksel akıl yürütme türünü belirlemek için genel hatlarıyla anlatılan matematiksel akıl yürütme türleri kullanılmıştır. Bu akıl yürütme türlerine ek olarak analiz için gerekli dört araştırma sorusu, analiz sürecinde kullanılan kavramlar ve alt sınıflamalar Lithner (2005)'de aşağıdaki şekilde betimlenmiştir.

Araştırma soruları:

Soru 1) Matematiksel akıl yürütme sürecinin içerdiği farklı bileşen türleri nelerdir?

Bir şeyler hakkında akıl yürütme farklı yollarla tanımlanabilir. Bu soru, matematiksel nesneleri sınırlandırmak ve kapsamını açıklamak gerekirse, örneğin çözüm prosedürleri, ispat tekniklerini, sezgileri vb kapsar.

Soru 2) Bileşenlerin sahip olduğu matematiksel olan veya olmayan özellikler nelerdir?

Bu soru matematiksel akıl yürütme sürecinde kapsanan bileşenlerin özellikleri hakkındadır. Örneğin, " $1+2=3$ " işlemi sayıların ve toplama işleminin özellikleri ile ilgilidir.

Soru 3) Süreçte yer alan düşük ve yüksek nitelikli akıl yürütme türleri nelerdir?

Bu sorunun analizi matematiksel olarak iyi temelli olan veya olmayan çözüm yollarını geliştirecek, esasen akıl yürütme sınıflandırmasını açıklamak için kullanılacaktır.

Soru 4) Çalışılan akıl yürütme durumlarında yer alan zorluklar veya gelişimler arkasında yatan ana sebepler nelerdir?

Çözüm durumunda zorluklar veya gelişimleri anlamak için lokal veya global bütün durumlar göz önüne alınarak çalışmak önemlidir. Aksi halde çalışmanın odağı ile ilgili olayların az veya çok öneme sahip olmalarını belirlemek zor olacaktır. Yukarıda belirtilen dört soru sayesinde bireyin akıl yürütme türünün şekillendirilmesi amaçlanmıştır. Sorularda geçen bileşen, bileşenlerin özellikleri Lithner (2005) tarafından şöyle tanımlanmıştır.

Bileşen: Akıl yürütme yapısının temel ögesi olarak görülebilir. Analiz şemasında ilgilenilen temel bileşenler nesne, dönüşüm ve kavram bileşenleridir.

Nesne: Nesne temel birimdir ve bireyin yaptığı bir şeyler veya yapılan bir şeyin sonucu olarak tanımlanabilir. Örneğin, sayılar, değişkenler, fonksiyonlar, grafikler, diyagramlar, matrisler vb.

Dönüşüm: Dönüşüm bir nesneye yapılan şeydir ve sonuç yine bir nesneyi verir. Elmaları sayma gerçek dünya nesnelere uygulanan bir dönüşümdür ve bir sayıya denk gelir. Temel aritmetik işlemler reel sayılara uygulanan bir dönüşümdür. Determinantı hesaplamak matrisler üzerinde bir dönüşümdür.

Kavram: Matematik toplumu için, nesneler, dönüşümler ve onların özellikleri ile ilgili yapılandırılan matematiksel iddiaların merkezi olarak görülür. Örneğin, fonksiyon kavramı ve sonsuzluk kavramı vb.

Yukarıda belirtilen bileşenlerin dışında ayrı bileşenler (teoremler, teoriler, deneyler vb...) tanımlanabilir fakat yukarıda belirtilen üç bileşen ve özellikleri üzerine temellendirildiği için ayrı bileşenler olarak analize dâhil edilmemiştir. Bir bileşenin kabul edilebilir bileşen olması için matematik toplumu tarafından matematikle ilgili ve doğru olarak görülen nesne, dönüşüm veya kavram olması gerekir. Ayrıca gerçek yaşamla ilgili ifadeler gerçek yaşam bileşeni olarak adlandırılır.

Bileşenlerin Özellikleri: Bileşenlerin sahip olduğu özelliklere göre aşağıdaki şekilde isimlendirilmişlerdir.

Kabul edilebilir özellik: Bir bileşenin kabul edilebilir özelliği, bileşenin nesnel özelliği demektir. Kabul edilebilir bileşen tümdengelimli akıl yürütme ile doğrulanabilir. Örneğin “bir tamsayının son iki basamağı 4 ile bölünüyorsa sayı 4 ile bölünür.”

Modelleme Özelliği: Bir problemin çözümünün matematiksel modelleme ile üç aşamada çözülebileceği bilinmektedir. Bu aşamalardan birincisi, gerçek yaşam durumu matematiksel probleme dönüştürülür. İkinci aşamada, problem matematiksel yöntemlerle çözülür ve sonuncu aşamada ise, sonuç tekrar gerçek yaşam durumuna dönüştürülür ve yorumlanır. Birinci ve üçüncü aşamada yapılan işlem dönüşümdür. Birinci aşamada girdi ve üçüncü aşamada ise çıktı kabul edilebilir bileşen değil gerçek yaşam bileşenidir.

Matematiksel Özellik: Bir bileşenin matematiksel özellik olabilmesi için, kabul edilebilir veya modelleme özelliği olması gerekir.

Yüzeysel ve Derinlemesine Özellik: Problem çözme durumunda yüzeysel ve derinlemesine özellik ayrımını yapmak gerekir. Derinlemesine özellik, özel bir kavramda ve problem çözüm durumunda bir bileşen için temeldir. Yüzeysel özellik özel bir durumla ilgili az doğrudur veya hiç doğru değildir.

Yukarıda belirtilen araştırma soruları bileşenler ve bileşenlerin özellikleri irdelenerek bireyin temel akıl yürütme türü belirlenir. Sonrasında akıl yürütme türünün daha ayrıntılı sınıflanabilmesi için ek sınıflama kodlarına ihtiyaç duyulmuştur. Yine Lithner (2005) tarafından betimlenen sınıflama kodları aşağıda anlatılmıştır. Temel olarak AR, MR, CR,... akıl yürütme türleri belirlendikten sonra akıl yürütme yapısını daha iyi betimlemek için ek olarak üç sınıflama kodu açıklanmıştır. Bunlar; doğruluk, çeşitlilik ve matematiksel esaslardır.

Doğruluk: Akıl yürütme ile ulaşılan sonucun doğruluğu ile ilgili bilgi veren sınıflama kategorisidir. Akıl yürütme süreci doğru, muhtemel doğru veya yanlış olarak açıkça sınıflandırılabilir. Muhtemel doğrudan kasıt, doğru ama tamamlanmamış matematik toplumu tarafından kabul edilebilir muhtemel çözümlerdir. Çözümün doğru olmamasının sebepleri arasında, çözümün kusurlu durumları içermesi, akıl yürütmenin mantıksal olmaması, çözümün tam olmaması ve akıl yürütmenin çözümün tam olarak gerektirdiklerini karşılamaksızın muhtemel sonuç vermesi olabilir. Bu açıdan yapılan analizlerde yürütülen akıl yürütme doğru ise (d), yanlış ise (y), muhtemel doğru yani olası doğru ise (o) ve bu üç durumun herhangi birisi mevcut değilse belirsiz (b) kodu kullanılmıştır.

Çeşitlilik: Akıl yürütme sürecinde birkaç akıl yürütme türü meydana gelebilir. Bu durumda Global ve lokal olmak üzere iki tip sınıflama kullanılır. Tek tip akıl yürütme yapan bireyler için Global (g) ve birden fazla akıl yürütme tipi kullananlar için ise lokal (l) terimi kullanılır. Bu iki sınıflamadan herhangi birinin olmadığı durumlarda belirsiz (x) kodlaması yapılır. Birden fazla akıl yürütme türünün kullanılması durumunda AR ve MR'nin özelliklerini sağlayan bir akıl yürütme süreci hâkimse AR olarak sınıflandırılır, AR, MR ve CR'nin üçünün de bulunduğu bir akıl yürütme süreci ise, CR olarak sınıflandırılır.

Matematiksel Esaslar: Çözümün yüzeysel veya derinlemesine matematiksel özellikleri kapsamıyla ilgilidir. Birey yüzeysel bir akıl yürütme sergilemişse yüzeysel (y) kodu ile derinlikli bir akıl yürütme sergilemişse (d) kodu kullanılır. Yüzeysel ve derinlikli özelliklerin herhangi birinin olmaması durumunda veya olması fakat problem durumuyla ilgisiz olması durumunda belirsiz (x) kodlaması yapılır.

Temel akıl yürütme türleri ve ek sınıflama kodları kullanılarak her bir problem için öğrencilerin akıl yürütme türleri belirlenebilir. Akıl yürütme türü kodlar sayesinde kısa ve daha net bir şekilde ifade edilebilir. Her bir sınıflama kodu XX_{xxx} olarak yapılır. Bu sınıflamada “XX” temel akıl yürütme türünü yani (MR, AR, CR, FAR, DAR, GAR ...) belirtir. Sınıflama kodunda alt indis olarak belirtilen birinci “x” akıl yürütme türünün doğruluğunu, ikinci “x” akıl yürütme türünün çeşitliliğini ve üçüncü “x” ise, akıl yürütme türünün matematik temellerini göstermektedir. Örneklendirilecek olursa; bir öğrencinin 1. problem çözümü analiz edilerek akıl yürütme sınıflama kodu MR_{dgx} olarak belirlenmiş olsun. Bu kodlamanın anlamı; öğrencinin temel akıl yürütme türü MR yani ezbere dayalı akıl yürütmedir. Alt indislerin anlamına bakılacak olursa, “d” akıl yürütmenin doğru olduğunu, “g” akıl yürütmenin tek tip akıl yürütme türünü yani sadece MR'nin özelliklerini taşıdığını, “x” ise, bireyin yüzeysel veya derinlikli bir düşünce yapısına sahip olduğunun kesin ayrımının yapılamadığını gösterir. Örnek teşkil etmesi açısından Ahmet'in dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti ve analizi aşağıda sunulmuştur.

Ahmet: Çok kolaydı bu soru.

Mülakatçı: Çok mu kolaydı ne anlatıyor soru?

Ahmet: Şimdi bir üyesiymiş ama geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dâhil 65 TL o zaman. 65 TL yi yazdık. 65 TL

harcamış. Eğer Turgay aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı $65-15 \text{ TL} = 50 \text{ TL}$. Üye olunca $50/2=25$. Demek ki 25 tane DVD almış. Üyelik ücreti de toplamda 65 TL imiş. Üye olmasaymış 3 TL imiş. Aynı şeyi $25.3=75$.

Mülakatçı: Güzel. Peki, niye böyle düşündün? Doğru yaptığını nasıl anladın?

Ahmet: Şimdi 65-15 TL 65 TL den 15 TL çıkartıyoruz üye... aaa yok. 15 TL yi çıkartacağız ama neden çıkartacağız?

Mülakatçı: Neden çıkartacağız?

Ahmet: ... Üyelik ücretini çıkartırsak kaç DVD aldığının ücretini öğreniriz. Demek ki üye olmasaymış, 50 TL ye DVD almış. $50/2=25$. 25 tane DVD almış.

Mülakatçı: Güzel.

Ahmet: Üye olmasaymış 3 TL ödeyecekmiş.

$$25.3 = 75$$

b şıkında ise,

Ahmet: (Soruyu okudu)

Mülakatçı: Ne düşündün bu soru için?

Ahmet: Yapmıştım ama yanlış yaptım herhâlde.

Mülakatçı: Ne düşündün burada? Tekrar düşün istersen.

Ahmet: Üye olan birini üye olmayan birine göre daha avantajlı...

Mülakatçı: Ne demek o sence?

Ahmet: Ama yine Turgay mı?

Mülakatçı: Turgay değil.

Ahmet: O zaman örnek verelim. 10 tane DVD aldı 20 TL. Birde üyelik ücreti $20 + 15 = 35$. Üye olan 35 TL. Üye olmayan ise 20 tane DVD aldı mı eee.

Mülakatçı: 10 tane almıştı ama.

Ahmet: Ha evet. O zaman 30 TL. Bunda üyelik ücreti yok. Olmadı.

Mülakatçı: Ne oldu, ne olmadı?

Ahmet: $20 + 15 = 35 \text{ TL}$

Mülakatçı: Tamam o üye olan

Ahmet: Üye olmazsa 10 tane aldığı zaman 30 TL ödemiş oluyor ama bu da 35 TL ama daha zararlı çıkacak.

Mülakatçı: Evet ama biz kara geçmesini istiyoruz.

Ahmet: Ya üye olmayacak ya da üye olup az DVD alacak

Mülakatçı: Az mı?

Ahmet: Fazla

Mülakatçı: Fazla mı?

Ahmet: Fazla. 10 tane aldığında $10.2 = 20 + 15 = 35 \text{ TL}$ tamam. Şimdi burada da 10 tane aldığında $10.3 = 30 \text{ TL}$ üye olan daha zararlı çıkıyor ama burada niye karlı çıktı?...

Mülakatçı: Niye? Üstteki soruda 25 tane almıştı altta sen 10 tane aldırıyorsun zararlı çıkıyor.

Ahmet: O zaman 25 tane aldırılım birde öyle deneyelim

Mülakatçı: 25 taneyi zaten yukarda buldun. 25 tane de karlı çıkıyor ama bize diyor ki en az kaç tane alırsam kara geçerim şimdi 25 yukarı

Ahmet: birde 5 deneyelim.

Mülakatçı: Ama 5 10 dan büyük

Ahmet: Ama en az almam lazım

Mülakatçı: Ama 10 da kara geçemedi.

Ahmet: 10 da kara geçemedi eee ama en az kaç DVD demiş 10 olmadığına göre 5 deneyelim.

Mülakatçı: Tamam deneyelim.

Ahmet: Üye olmazsa 15 TL üye olursa 10+ yine 15 TL. Olmadı 2 de deneyelim o zaman üye olmayan 6 TL üye olan $4 + 15 = 19$ yine zararda çıkıyor niye burada karlı çıktı o zaman.

Mülakatçı: Niye sence?

Ahmet: Az DVD aldığım için olmasın,

Mülakatçı: olabilir. Çünkü sen sayıyı düşürdükçe fark açılıyor.

Ahmet: O zaman 15 deneyelim.

Mülakatçı: Dene bakalım.

Ahmet: Üye olmayan kişi 45 TL üye olmayan

$$30 + 15 = 45 \text{ TL}$$

Mülakatçı: Ne oldu şimdi?

Ahmet: Eşit oldular ya 20 de deneyeceğiz ya da 16 da 20 de deneyelim.

Mülakatçı: En az diyor ama

Ahmet: 16 o zaman. $16.3 = 48$ üye olmayanın. Bir de $16.2 = 38$ yok 38 değil 22

Mülakatçı: Bir daha düşün işlem hatası mı yaptın?

Ahmet: 48 birde eee 2 ile çarpacağız.

Mülakatçı: Üye olan mı bu?

Ahmet: üye olmayan 48. Üye olmayan 26, 32 TL $32 + 15 = 47$ 1 TL fark var demek ki 16 DVD kiralarsa daha karlı olmuş olur.

Mülakatçı: Güzel.

Ahmet'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme analizi:

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci, i) üyelik ücreti ii) dvd sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Ahmet sorunun a şıkkında zorlanmadan aritmetik işlemleri takip ederek sonuca ulaşmıştır. b şıkkında ise DVD sayısına değerler vererek işlem yapmayı seçmiştir. Bu deneme işlemi sistematik bir şekilde ilerlememiştir. “Deneme yanılma yoluyla” sonuca ulaşmış olması matematiksel gibi görünse de her zaman uygulanabilecek matematiksel olarak kabul edilen bir özellik değildir.

➤ Ahmet sorunun çok kolay olduğunu ifade ederek çözüme başlamıştır. Ahmet'in a şıkkı ile ilgili çözümü doğrudur ve açıklamalar yaptığı için ne yaptığının farkında olduğu söylenebilir. Bu anlamda soruyu anlamada sıkıntısının olmadığını söylemek mümkündür. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR nin özelliklerini göstermektedir. b şıkkı için ise çözüm yöntemi olarak deneme yanılma yöntemini seçmiştir. Aklına gelen sayıları deneyerek sonuca ulaşmak istemiştir. İşlemlerinde dikkatsizlik hataları mevcut olduğundan bu aşamada birden fazla aritmetik işlem yapmak zorunda kalmıştır.

Alternatif çözüm yöntemlerini kullanmak aklına bile gelmemiştir. Görüşmecinin yönlendirmelerine karşılık cevaplarına bakılacak olursa sistematik bir düşünce yapısına girmeden ilk aklına gelen sayıyı deneme eğilimindedir. “o zaman 25 tane aldırırım birde öyle deneyelim” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Sonrasında yine deneme yaparken “10 da kara geçemedi eee ama en az kaç DVD demiş 10 olmadığına göre 5 deneyelim” sözleri düşünme sürecini etkili yapmadan direk sonuca odaklanarak bir işlem süreci geçirdiğini göstermektedir. Sonucu gördükten sonra DVD sayısını az vermesinin bu durumun sebebi olabileceğini fark edip 15 DVD denemeye çalışmıştır. 15 DVD aldıklarında aynı ücreti ödediklerini fark edince direk denemeye 20 DVD ile devam etmek istemiştir. Bu durum yukarıda bahsedilen sistematik olmayan ve rastgele yapılmış bir süreci kapsamaktadır. Görüşmecinin sorusuyla doğru cevaba ulaşmış fakat kavramsal olarak zayıf ve ne yaptığının farkında olmadığı bir düşünme süreci yönetmiştir. Bu açıdan düşünüldüğünde tamamen bilinçsizce sayılar seçerek sonuca ulaşmaya çalıştığı bir süreç olduğundan MR ye yakın olduğunu söylenebilir.

➤ Genel olarak aritmetik işlemleri yapmada sıkıntı yaşamamıştır bu durum Ahmet’in belli bilgi birikimine sahip olduğunu göstermektedir fakat düşünce olarak yüzeysel bir düşünme tarzı olduğundan birçok işlem yaparak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Ahmet’in zorlanmasının sebebi, birden fazla aritmetik işlem yapması ve hepsini yorumlamak zorunda kalmasıdır. Ahmet’in matematiksel akıl yürütme türü, doğru bir sonuca ulaşıldığından, iki tip akıl yürütme kullanıldığından ve yüzeysel bir düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{diy} olarak sınıflandırılmıştır.

3.8.2. Gözlem/ Video Kayıtlarının Analizi

Araştırma süresince yapılan gözlem ve video kayıtlarının analizi betimsel analiz kullanılarak analiz edilmiştir. Öğretmenlerin sunumlarında gözlenen, öğrencilere matematiksel akıl yürütmenin farklı türleri hakkında fırsat veren durumları belirlemek amacıyla, Bergqvist ve Lithner (2012) tarafından yapılandırılan taslak kullanılmıştır. Bu taslağa göre öğretmen sunumlarındaki bir sorunun analizi altı bakış açısı dikkate alınarak değerlendirilir. Bu bakış açıları;

- 1) Problem tipini tanımlama
- 2) Çözüm metodu tanımlama

- 3) Yaratıcı düşünme
- 4) Tartışma-kanıtlama
- 5) Matematiksel temel
- 6) Bağlantılar

olarak belirtilmiştir.

- 1) *Problem Tipini Tanımlama*: Bu bakış açısı, problemin türü veya yapısının öğretmen tarafından açıkça tanımlanmış olup olmadığı ile ilgilidir. Bu açık tanımlama, belirli problemin ait olduğu problem ailesinin karakteristik olan genel özelliklerini tanımlamakla ilgilidir.
- 2) *Çözüm Metodu Tanımlama*: Bu adımın, stratejinin seçimi ve uygulanmasıyla ilişkili olan iki alt boyutu vardır: Öğretmenin, (a) problem türünü ve strateji seçimi arasındaki bağlantıyı ve (b) çözüm yönteminin ana öğelerini sağladığı ilkeleri açıklayıp açıklamadığıdır. 'İlkeleri tanımlamak', yalnızca seçimden bahsetmenin ötesindedir (örneğin, 'bu problem bölme ile çözülür') veya çözüm üretilirken sadece her adımı açıklanması gibi. Herhangi bir argüman içermesine gerek yoktur, ancak yalnızca belirli bir görev için değil, görev türü için geçerli olan bazı ilkeleri tanımlamak gerekir. 1 ve 2 bakış açıları 'nin rutin görev çözme özelliklerinden kaynaklanmasına rağmen, AR'den farklı formlarda görünebilecek CMR için de geçerlidir.
- 3) *Yaratıcı Düşünme*: AR ile CMR arasında önemli bir ayrım, strateji seçiminin ve uygulamasının başlangıçtan beri açıkça olmadığı ve saplantılardan kaçınmak ve akıl yürütmenin akıcılığını ve esnekliğini yönlendirmek için üst bilişin gerekli olabileceğidir. Üst biliş kullanımı, sorular, analizler, işlemeyen strateji seçimleri ya da hataların düzeltilmesi, doğrulamalar, alternatif çözüm stratejilerinin değerlendirilmesi olarak görülebilir. Bu yansımalar, örneğin, açık strateji seçimi soruları şeklinde oluşabilir. Yaratıcı düşünme, yerel görüldüğünde fark edilemeyebilir.
- 4) *Tartışma-kanıtlama*: Seçimlerin ve sonuçların inandırıcılığı iki şekilde yapılabilir. Bunlar; a) kestirimci (tahmini) tartışma b) doğrulayıcı tartışmadır. Kestirimci tartışmalar sonuçlardan önce açıkça ifade edilir akıl yürütme sonuç ile başlıyorsa kestirimci tartışmalar oluşmaz. Çünkü birey, akıl yürütmeden önce sonucu bildiği için CMR akıl yürütmesi oluşmaz. Doğrulayıcı tartışmada ise, tahminleri

doğrulamak için, öğretmen sunumları sırasında benzer şekillerde ortaya çıkabilecek, sonuçların ardından sunulan açıklamalar olarak ortaya çıkar. Verimli tartışmalar öğrencilerin CMR ve AR / MR çözümlerini anlamalarına yardımcı olabilir.

- 5) *Matematiksel Temel:* Akıl yürütme CMR de olduğu gibi bileşenlerin gerçek matematiksel özelliklerine bağlıdır. Bu bakış açısı, sonuç ilgili özellikleri temel alıyorsa ortaya çıkar. Örneğin, sonuç doğru çünkü bileşenler matematiksel özelliklere sahiptir.
- 6) *Bağlantı:* Öğretmenlerin problem çözümlerinin öğrencilerinkine benzer olup olmaması durumunda dikkate alınır. Bağlantısızlığın sebebi, öğretmenlerin akıl yürütmesinin öğrenciler için zor ve ulaşılmaz olması olabilir.

Bergqvist ve Lithner (2012) tarafından yapılan örnek ders sunumu analizi:

Lineer denklemlerin çözümü üzerine bir derste öğretmen “*x’i bulacağız ama ders daha çok kurallar ile ilgili*” diye giriş yaptı. üç farklı denklem çözümü ile devam etti ve $x - 11 = 32$, $2x + 12 = 28$, $3x - 14 = 2 - x$ denklemlerinin çözümleriyle ilgilendi. $3x - 14 = 2 - x$ denklemini yazarak, “*şimdi daha karmaşık bir şeylerle ilgileneceğiz. Bu hemen hemen müfredat dışında.*” diyerek devam etti. Öğretmen, “*sayılar sağ tarafa ve bütün x lerin sol tarafta olması gerekir. Çünkü biz onların pozitif olduğu ve çoğunlukla olduğu tarafta olmasını istiyoruz. Burada biz x’i sol tarafa 14 ü sağ tarafa geçireceğiz.*” Öğretmen her iki tarafa $+x$ ve $+14$ yazdı. Öğrencilerden biri, “*x nereden geldi?*” diye sordu. Öğretmen cevaplamadı. Fakat bazı öğrenciler başarılı olmasa da açıklama yapmayı denediler. Bir diğer öğrenci “*genellikle işaret değişir mi?*” Diye sordu. Öğretmen evet dedi ve yeni bir işlemle devam etti.

$$4x = 16$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{16}{4}$$

$$x = 4$$

Sonrasında sunumunu bitirdi ve devamında benzer problemler çözüldü.

Problem durumunun tanımlanması ve uygulanması: Kuralları kullanarak

$$3x - 14 = 2 - x$$

problem durumunun nasıl çözüleceği analiz edildi. Bu örnek öğrenciler için yenidir ve akıl yürütme iki kuralla bağlantılıdır.

A: Biz x 'in pozitif olduğu ve çok olduğu tarafa geçmesini istiyoruz.

B: Her iki tarafa aynı sayının ters işaretlisini eklemek gerekiyor.

Kurallar öğretmen tarafından açıklanmamış ve önceki iki denklemde de kullanılmıştır.

Sunumun karakterizasyonu:

- 1) *Problem tipinin tanımlanması*: Problem bir denklem problemidir fakat öğretmen özel bir problem türü olarak tanımlama yapmadı ve problem türünün karakteristik özelliklerinden bahsetmedi.
- 2) *Çözüm metodu tanımlama*: Problem tipi ve çözüm metodu arasındaki bağlantı tartışılmamıştır. Fakat problemde kullanılan kuralların olduğu çözüm yönteminin tanımını vermiştir.
- 3) *Yaratıcı düşünme*: Yaratıcılığa dair bir durum gözlenmemiştir. Durumunda bazı belirsizlikler vardır. Öğrencinin her iki tarafa x eklenmesi ile ilgili sorusuna öğretmen cevap vermemiş ve herhangi bir iletişim yaşanmamıştır. Öğrencinin düşünmesi sağlanabilirdi. Örneğin; *kuralları burada kullanabilir miyiz? Bu kural işe yarıyor mu?* Gibi.
- 4) *Tartışma*: Hiç tartışma yapılmadı öğretmen sadece denklemin çözümünü tamamlamıştır. Eğer öğretmen, denklemin çözüm prensiplerini ve amaçları ile başlasaydı ve sonra iki kuralın uygun olduğu ile sonuçlara destek sağlasaydı tartışma olurdu.
- 5) *Matematiksel temel*: Akıl yürütmede kapsanan bileşenlerin herhangi gerçek özelliklerine değinilmedi. A kuralı, matematiksel gereklilik değildir fakat genel kabul görmüş pratik bir kuraldır. Dahası öğretmen x 'in sola 14 'ün sağa geçireceğini söyledi fakat işaret değişikliği ile her iki yöne de hareket edebilirler. Bu durum ilk öğrencinin sorusu gibi karışıklığa sebebiyet verebilir. B kuralı, matematiksel olarak doğrudur fakat

altındaki özelliklerin hiçbiri açıklanmamıştır. Örneğin, denklemin sağına ve soluna farklı sayıların neden eklenemeyeceği açıklanmamıştır.

6) *Bağlantı*: Problem durumu denklem çözümü için kuralların nasıl kullanılacağı ile ilgiliydi öğretmenlerin ve öğrencilerin farklı problem durumları ve çözüm amaçlarına ait göstergeye rastlanmamıştır.

Genel olarak düşünüldüğünde, kurallar söylenmiş fakat eksiktir ve problem tipi ve yöntem arasında bağlantı yoktur o yüzden öğrenciler metod için uygun olan problem tipini öğrenmekte zorlanabilirler. Öğretmen yöntemin neden uygulandığı ile ilgili açıklamaları ve tartışmaları temel alan matematiksel özelliklere değinmemiştir. Bu yüzden öğrencilere öğrenme fırsatının verilmediği birkaç temel özelliği vardır. Eğer, öğrenciler kendi kendilerine bu özelliklerin analizini yapamazlarsa sorun olabilir. Bu durumda öğrenci için ezbere öğrenme için fırsatlar verildiğini söylemek mümkündür.

3.9. Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Araştırmanın geçerlik ve güvenirliliği için yapılan işlemler Tablo 3.9’da verilmiştir.

Tablo 3.9.

Araştırmanın geçerlik ve güvenirliliği için yapılan uygulamalar

Geçerlik/Güvenirlik	Yöntem	Uygulama
İnandırıcılık	Uzun süreli etkileşim	Katılımcılarla araştırma süresince etkileşim de bulunulması
	Uzman görüşü	Veri toplama araçları ve araştırmanın uygulanması ile ilgili uzman değerlendirmeleri
	Çeşitleme	Matematiksel akıl yürütme testi, görüşme ve gözlemin kullanılması
Aktarılabirlik	Ayrıntılı betimleme	Araştırmanın aşamalarının ayrıntılı anlatılması Öğrenme ortamının ayrıntılı betimlenmesi
	Amaçlı örnekleme	Araştırmanın amacına yönelik katılımcıların seçilmesi

Tutarlılık	Tutarlılığın incelenmesi	Doğrudan alıntı yapılması
		Verilerin birbiriyle karşılaştırılarak analiz edilmesi
Teyit edilebilirlik	Teyit incelemesi	Uzun süreli gözlem yapılması
		Analiz yönteminin ayrıntılı açıklanması
		Katılımcıların ayrıntılı betimlenmesi
	Araştırmacının Rolü	Veri toplama araçları, ses ve video kayıtları dâhil tüm verilerin depolanması
		Araştırmacının rolünün açıklanması

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde, alt problemlerin sırası gözetilerek, öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerine ait bulgulara, öğrenme ortamında öğretmenlerin öğrencilere sundukları matematiksel akıl yürütme becerisi fırsatları ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen transkriptler ve araştırmacı tarafından yapılan analizler, gözlem ve video kaydı analizleri doğrudan alıntılara yer verilerek ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

4.1. Öğrencilerin Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular

Her bir öğrencinin “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” testinde yer alan toplam dokuz soruya verdikleri cevaplar,

- Matematiksel akıl yürütme sürecinin içerdiği farklı bileşen türleri nelerdir?
- Bileşenlerin sahip olduğu matematiksel olan veya olmayan özellikler nelerdir?
- Süreçte yer alan düşük ve yüksek nitelikli akıl yürütme türleri nelerdir?
- Çalışılan akıl yürütme durumlarında yer alan zorluklar veya gelişimler arkasında yatan ana sebepler nelerdir?

sorularına cevap verilerek yorumlanmış ve öğrencilerin matematiksel akıl yürütme türleri belirlenmiştir.

4.1.1. Öğrencilerin “Eşitlik ve Denklem” Konusu Kapsamında Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular

Bu bölümde her bir öğrencinin “eşitlik ve denklem” konusu ile ilgili problemlere verdikleri cevaplardan ve yarı yapılandırılmış görüşmelerin analizinden elde edilen

bulgular sunulmuştur. Her bir öğrencinin “eşitlik ve denklem” konusu ile ilgili analizleri bittikten sonra bu problemlerle ilgili genel değerlendirmesi sunulmuştur.

4.1.1.1. Ahmet’in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

- Ahmet’in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet’in birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ahmet: Ben burada Ayşe ve Dursun’u seçerek yaptım. Ayşe ve Dursun’un yaşları toplamı 31 dir. Ayşe’nin yaşı Dursun’un yaşının 3 katının 10 fazlasıdır. Buna göre Dursun’un yaşı kaçtır? Çözeyim mi?

Mülakatçı: Peki problemle ilgili ne düşünüyorsun sence doğru bir problem kurabildin mi?

Ahmet: ... Yanlış mı acaba?

Mülakatçı: Düşün bakalım

Ahmet: Ben Dursun’un yaşını 7 buldum $k = 7$.

Mülakatçı: Peki kurduğun probleme uygun denklem yazabilir misin?

Ahmet: Probleme uygun denklem Ayşe ile Dursun’un yaşlarının toplamı 31 miş. $A + D = 31$. Ayşe’nin yaşı ama iki tane bilinmeyen var.

Mülakatçı: Tamam devam et.

Ahmet: Ayşe’nin yaşı Dursun’un yaşının 3 katının 10 fazlasıdır.

$$D > 3k + 10$$

O zaman eee...

Mülakatçı: Dursun’a k mı demiş oldun k hangisine ne dedin?

Ahmet: k Dursun’a dedim ama burada (yukarıda) Ayşe’ye dedim. Yanlış mı yaptım?

Mülakatçı: Bilmem

Ahmet: ...

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun? Düşündüklerini sesli söyle.

Ahmet: Ben yanlış yaptığımı düşünüyorum Ayşe ve Dursun burada Dursun’un yaşı değilde Ayşe’nin yaşı kaçtır? demem lazımdı. Dursun’un yaşı $3k + 10$ ise Ayşe’nin yaşı da burada 31 demişim eee bu soruda biraz zorlandım ama...

Mülakatçı: Tekrar düşün düzenleme yapabilirsin çözümünü değiştirebilirsin.

Ahmet: $A + D = 31$ miş Ayşe’nin yaşı Dursun’un yaşının 3 katının 10 fazlasıymış o zaman Ayşe’nin yaşı Dursun’un yaşının demiş o zaman burada

$$D > 3k + 10$$

$$A > 3k + 10.$$

yaptık.

Mülakatçı: Dursun’un yaşına ne dedin yaz istersen Dursun’u da yaz.

Ahmet: Dursun’un yaşına da k dedim ikisinin toplamı 31.

$$3k + 10 + k = 31$$

$$4k + 10 = 31$$

olur. Burada $3k$ demiş. O zaman yanlış yaptık.

Mülakatçı: Peki düzenlemek ister misin?

Ahmet: Yapamayacağım bu soruyu.

Mülakatçı: Bence yapabilirsin.

Ahmet: Ayşe'nin yaşını mı demeliydim işte hangisinin yaşını soracağımı karıştırdım Ayşe mi Dursun mu?

Mülakatçı: Şimdi ne sorabilirsin Ayşe'yi sorduğun zaman bunu Dursun'u sorduğun zaman bu mu?

Ahmet: $4k + 10 = 31$ demiş ama $3k$ eee...

Mülakatçı: Evet denklem aslında sen $4k + 10 = 31$ denklemi için problem kurmuşsun.

Ahmet: O zaman $3k + 10$ yapmak için ya burayı (denklemi gösteriyor) 2 yapacağız ya da buraya k koymayacağız.

Mülakatçı: Güzel. Problem ne hale gelir o zaman?

Ahmet: Problemde bozulur.

Mülakatçı: Problemi düzelt o zaman istersen denkleme göre.

Ahmet: Dursun'un yaşları toplamı 31. Ayşe'nin yaşı Dursun'un yaşının 3 katının 10 fazlasıdır. İki katının 10 fazlası yaparsak ya da buradan k yı çıkartacağız. İki katının 10 fazlasıdır. Buna göre Dursun'un yaşı kaçtır? Yine aynı şekilde A ve D Ayşe Dursun. Ayşe'nin yaşı Dursun'un yaşının 2 katının 10 fazlasıymış,

$A > 2k + 10$. O zaman Dursun'u k yaparsak $> k$. O zaman $3k + 10 = 31$. Denklemi çözersek,

$$3k - 10 = 21$$

$$3k = 21$$

$$k = 7$$

Mülakatçı: Güzel tamam. Devam edelim. Peki, bu soru için zor mu kolay mı? Ne düşündün? Zorlandın mı?

Ahmet: Zorlandım.

Mülakatçı: Hangi açıdan zorlandın.

Ahmet: 2 katı 3 katı bölümünde çok zorlandım.

Mülakatçı: Tamam devam edelim.

3k + 10 = 31 denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Ayşe ile Dursun'un yaşları toplamı 31'dir
 Ayşe'nin yaşı, Dursun'un yaşının 2 katının 10 fazlasıdır
 Buna göre Dursun'un yaşı kaçtır?

$3k + 10 = 31 - 10$
 $3k = 21$
 $k = 7$

$A + D = 31$

$3k + 10 = 31 - 10$
 $3k = 21$
 $k = 7$

A
 $2k + 10 + k = 31$

Şekil 4.1. Ahmet'in birinci probleme ait çözümü

Ahmet'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) problem ile gerçek hayat problemi arasındaki dönüşüm ii) denklem, bilinmeyen, sayılar iii) aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ahmet, gerçek hayatla ilgili yaş problemi kurmayı seçmiştir. Bu açıdan bakıldığında bu dönüşüm gerçek dünya bileşenidir. Çünkü Ahmet verilen bir denkleme karşılık gerçek yaşamdan bir problem seçmiştir. Denklem çözümünü sayıları eşitliğin karşısına işaret değiştirmek suretiyle geçirerek yapmıştır. Matematiksel özelliklerine değinmeden hatırladığı algoritmanın basamaklarını uygulamıştır. Ahmet'in kullandığı çözüm yöntemi matematiksel olarak kabul edilir değildir fakat genel olarak kullanılan pratik bir yoldur.

➤ Ahmet soruda zorlandığını söylemiştir. Denkleme uygun problem kurduktan sonra kurduğu problemde emin olmadığı ve kendi kurduğu probleme uygun denklem yazması gerektiğinde denklemi iki bilinmeyenli olarak oluşturduğu görülmüştür. Ahmet değişkeni hangi gerçek dünya bileşenine eşleştirdiği konusunda tereddüt yaşamıştır. Fakat hatasını da anlayamadığı için sessiz kalmayı tercih etmiş ve çözümü bırakmak istediğini söylemiştir. Görüşmecinin yönlendirmeleriyle kendi problemine uygun denklemi tekrar yazmaya çalışmıştır. Denklemi yazdıktan sonra sorudaki denklemin farklı olduğunu fark etmiş ve çözümü bırakmıştır. Ahmet yapamayacağını düşünmüş görüşmecinin cesaretlendirmesiyle problemini tekrar kurmuştur. Fakat hatanın problemin soru cümlesinde olduğunu düşünmüş ve ne sorması gerektiği konusunda tereddüt yaşamıştır, görüşmecinin “*sen $4k + 10 = 31$ denklemini yönelik problem kurmuşsun*” demesiyle Ahmet problemini düzeltme girişiminde bulunmuştur. Kendi probleminin bozulacağını düşündüğü problemle ilgili sadece işlem boyutunda “*üç katı değil iki katı yaparsak veya katı hiç olmayacak*” diye düşünmüş sonrasında ise doğru bir problem kurmuştur. Ahmet'in desteğe ihtiyaç duyduğu ve görüşmecinin yönlendirmeleri ile çözümü devam ettirdiği için P -GAR düşünce yapısına sahip olduğu düşünülmektedir.

➤ Ahmet'in problem kurarken zorlanmasının sebebi, yaptığı işlemlerin altında yatan matematiksel temelleri anlamlandıramama ve kavramsal bilgi eksikliği olabilir. Ahmet yönlendirmeler neticesinde doğru ve denklemi karşılayacak bir problem kurmuştur fakat ne yaptığının farkında olmadan çözümler yapmıştır. Ahmet'in zorlanmasının sebebi kendine güvensizliği ve kavramsal anlamasının yetersizliği

olabilir. Sonuç olarak Ahmet doğru bir problem kurmasına rağmen tek tip düşünce yapısıyla ve görüşmecinin desteğiyle yüzeysel bir bakış açısı sergileyerek sonuca ulaşmıştır. Bu sebeple Ahmet'in matematiksel akıl yürütme türü; P-GAR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ahmet'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet'in ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ahmet: Bu soruda çok zorlandım.

$$x = \frac{8}{7}$$

Mülakatçı: Neden?

Ahmet: Birinci adımda $\frac{1}{7}$ nereden geldi onu bulamadım. Çözümdeki $\frac{1}{7}$ ben bunun yanlış olduğunu düşündüm. İlk adımdan yanlış yaptıysa, diğerleri de yanlış olur.

Mülakatçı: Güzel.

Ahmet: Hatalı olduğunu açıklayınız demiş.

Mülakatçı: Peki niye yanlış olduğunu düşündün?

Ahmet: Burada soru $7x - 1$ demiş ama burada (birinci adımı gösteriyor) $\frac{1}{7} \cdot 7x$ demiş. $\frac{1}{7}$ nin nereden geldiğini anlamadım.

Mülakatçı: Nereden gelmiş olabilir $\frac{1}{7}$ sence? Bir fikrin var mı?

Ahmet: Yok fikrim yok.

Mülakatçı: Sen olsan nasıl yapardın?

Ahmet: Ben olsan önce $7x - 1 = 7$ demiş. Buraya çözeyim hemen.

$$7x - 1 = 7$$

$$7x = 7 + 1$$

$$7x = 8$$

Mülakatçı: Doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Ahmet: Şurada aynısını yapmışım. $x = \frac{8}{7}$

Mülakatçı: Hangisi doğru?

Ahmet: $x = \frac{8}{7}$. Niye olduğunu bilmiyorum. Çünkü Eda hoca söyledi bana. Ben ilk anlamadım önce. Eee.

Mülakatçı: Burada amacımız ne? x 'i bulmak mı?

Ahmet: Denklemini nasıl çözersiniz demiş. Evet, $x = 8$ yazdım. $x = 8$ olmuyor. Hayır,

$$7x = 8$$

$$x = \frac{8}{7}$$

Mülakatçı: Yani burada $x=8/7$ mi? Sonucu doğru bulduğundan nasıl emin olursun bu soru için?

Ahmet: $7 \cdot \frac{8}{7}$

Mülakatçı: çarptın, ne oldu?

Ahmet:

$$\frac{7}{1} \cdot \frac{8}{7} = \frac{56}{7}$$

çıktı. 56'yı 7'ye bölersek $\frac{8}{7}$ çıkar. Yani $\frac{8}{7}$ ile $\frac{7}{1}$ 'i çarpınca $\frac{56}{7}$ çıktı ama...

Mülakatçı: Yani $\frac{56}{7}$ neye eşit?

Ahmet: $7x$ e eşittir. Yani 8. Zaten 56'yı 7'ye bölünce 8 çıkar.

Mülakatçı: Yani o zaman?

Ahmet: Doğru yapmış oldum.

Mülakatçı: Tamam devam edelim. Bu soru için ne düşündün? Zor mu kolay mı?

Ahmet: Bu soru ilkte çok kafa karıştırıcı oldu benim için. Zor geldi bana.

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

	$7x - 1 = 7$
1. Adım	$\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7$
2. Adım	$x - 1 = 1$
3. Adım	$x - 1 + 1 = 1 + 1$
4. Adım	$x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

$$4x + 29 = 6x - 6$$

b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

$$\begin{aligned}
 7x - 1 &= 7 + 4 \\
 7x &= 8 \\
 x &= \frac{8}{7} \\
 x &= \frac{8}{7}
 \end{aligned}$$

$$\frac{7 \cdot 8}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

Şekil 4.2. Ahmet'in ikinci probleme ait çözümü

Ahmet'in ikinci probleme Ait Matematiksel Akıl Yürütme Türü Analizi

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci, i) sayılar, denklem ii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ahmet'in "eşitliğin sol tarafındaki sayıların sağ tarafına işaret değiştirilerek geçirilmesi" çözüm prosedürü matematiksel olarak kabul edilebilir değildir fakat

genellikle kullanılan pratik bir yoldur. Ahmet kendi çözümünün doğruluğunu göstermek için bulduğu cevabı denklemde yerine yazmayı deneyerek sağlama yapmış olduğu için yapmış olduğu işlem matematiksel olarak kabul edilebilirdir.

➤ Problemde yapılan çözümün hatalı olduğunu düşünmektedir fakat hatanın ne olduğu konusunda bir fikri yoktur bu anlamda "*birinci adımda şu $\frac{1}{7}$ nereden geldi onu anlamadım buradan ben bunun yanlış olduğunu düşündüm*" ifadeleri bu durumu destekleyici niteliktedir. Bu durum denklem çözümü ile ilgili kavramsal anlamalarının yüzeysel ve zayıf olduğunu göstermektedir. Ahmet sonrasında denklem çözümü için sınıfta öğrendiği algoritmayı kullanarak çözüm yapmıştır. Fakat işlemlerde hata yapmıştır ve ilk cevabı ve sonrakinin farklı olduğunu görmüştür. Hangisinin doğru olduğu sorulduğunda ise, ilk ders öğretmeninden yardım alarak yaptığı cevabın yani $\frac{8}{7}$ nin doğru olduğunu fakat neden doğru olduğunu bilmediğini "*niye olduğunu bilmiyorum çünkü eda hoca söyledi bana ben ilk anlamadım önce*" cümleleriyle ifade etmiştir. Bu anlamda bakıldığında hatırladığı bir algoritmayı kullanmıştır sonrasında görüşmecinin soruları ile tekrar çözümü yaparak doğru yapıtığını görmüştür. Ahmet'in akıl yürütme türü, öğretmeninden yardım aldığı için, PGAR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Ahmet hatanın ne olduğunun farkındadır bu durum belli bir bilgi birikiminin olduğunu göstermektedir fakat hatanın sebebini açıklayamamıştır. Bu durum kavramsal anlamaları zayıf ve yaptığı işlemlerde kendinden emin olmayan tavrından kaynaklanmış olabilir. Genel olarak yüzeysel bir bakış açısı ile çözüme ulaşmıştır. Sonuç olarak; Ahmet muhtemel doğru bir cevaba ulaştığından, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce tarzı olduğundan Ahmet'in matematiksel akıl yürütme türü P-GAR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

- Ahmet'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet'in üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ahmet: Bunu yapamadım zaten.

Mülakatçı: Neden yapamadın?

Ahmet: Yapamadım. Çok zor

Mülakatçı: Tekrar düşün. Bir soruyu oku bakalım ne diyor? Anlamaya çalış.

Ahmet: ...(Soruyu okuyor) Nasıl yazacağız ama? Çözemedim.

Mülakatçı: Başka türlü çözebilir miyiz? Denklem kurmakta zorlandıysan denklem kurmadan yapmayı dene.

Ahmet: Ben önce 8 masa ya da 5 masa yapayım. $5 \cdot 4 = 20$. 20 kişide ayakta kalıyor. Artı 20 demekki 40 kişi varmış. Benim yaptığıma göre.

Mülakatçı: Tamam.

Ahmet: Burada yaparsak 6 kişi oturursa 1 masa boş kalır. $5 \cdot 6 = 30$. 1 masa boş kalır. 6 kişilik masa boş kalır o zaman. Demek ki burada bulduğumuz 40 yanlış, ya da 30 yanlış.

Mülakatçı: Demek ki ya da masa sayısı yanlış.

Ahmet: Evet.

Mülakatçı: Tamam devam edelim.

Ahmet: Birde 6 masayı deneyelim. $6 \cdot 4 = 24$. Burada 6 şar kişi oturursa 1 masa boş kalır o zaman. $6 \cdot 6 = 36$. Ama burada 20 kişi ayakta kalır. $24 + 20 = 44$. Burada 36 demiş. Bir masada boş kalır. O zaman yine olmadı. 7 yi deneyeyim. $7 \cdot 4 = 28$. $7 \cdot 6 = 42$ $28 + 20 = 48$. Yine yanlış. 8 i deneyelim. $8 \cdot 4 = 32$ eee

Mülakatçı: Peki bu yaptığın işlemleri denkleme dökemez misin? Hep masa sayısıyla 4 veya 6 yı çarpıyorsun. Ona göre bir şeyler yapıyorsun.

Ahmet: Ama 4 er kişi oturduğu için 4 le, 6 şar kişi oturduğu için 6 ile çarpıyorum.

Mülakatçı: güzel

Ahmet: $8 \cdot 4 = 32$ $8 \cdot 6 = 48$, $32 + 20 = 52$ yine yanlış.

Mülakatçı: Demek ki daha fazla masa

Ahmet: Birde 10 masa denersek. $4 \cdot 10 = 40$, $40 + 20 = 60$, $10 \cdot 6 = 60$

Evet, doğru oldu.

Mülakatçı: o doğru mu kontrol edelim.

Ahmet:

$$10 \cdot 4 = 40$$

$$40 + 20 = 60$$

Mülakatçı: 6 şar kişi oturursa

Ahmet: 1 masa boş kalıyor. $10 \cdot 6 = 60$ demek ki 60 misafir varmış.

Mülakatçı: Ama orada bir masa boş kalmadı.

Ahmet: ... (Önceki işlemlerini göstererek). Burada da boş masa kalmadı. Normalde de yaptığımız işlemlerde 1 masa boş kalıyor.

Mülakatçı: Ama sen 10 masanın 10 una da oturturdun. 1 masa boş kalmadı.

Ahmet: ... O bir masayı nasıl yapacağız?

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun? Aklındakini söyle?

Ahmet: Hiç yapmadım ya.

Mülakatçı: Aslında yapıyorsun.

Ahmet: Ama boş masayı nasıl bulacağız?

Mülakatçı: Düşün ki boş masaya oturacak insan yok. Yani kaç kişi yok?

Ahmet: Bir masa boş. O zaman her masaya 6 kişi oturursa demek ki 6 kişi yok.

Mülakatçı: O zaman 60 kişi değil.

$$\text{Ahmet: } 60 - 6 = 54$$

Mülakatçı: Ne oldu?

Ahmet: Demek ki 54 misafirleri varmış.

Mülakatçı: Yani buna göre 54 kişi çıktı. Buna göre 60 kişi çıktı. O zaman yine mi eşit olmadı.

Ahmet: hı hı eşit olmadı.

Mülakatçı: devam edelim.

Ahmet: bunlardan bakalım

Mülakatçı: yok onlar doğru.

Ahmet: Olmuyor değil mi?

Mülakatçı: onlarla da olmadı.

Ahmet: 7 masa. $48 - 6 = 42$.

Mülakatçı: Ama 7 masa için

Ahmet: Ama bundan (birinci durum) çıkarmayacağız. Bundan (ikinci durum) çıkartacağız.

Mülakatçı: Hı hı.

Ahmet: 11 için. $11.4 = 44$, $44 + 20 = 64$, $11.6 = 66$. Bu da yanlış.

Mülakatçı: Bu da mı yanlış.

Ahmet: 64 ama burada 6 kişi oturunca 66 kişi çıkıyor. Ama olmuyor. Çok zor.

Mülakatçı: zor değil devam edelim. 11 de olmadı.

Ahmet: $12.12.4 = 48$, $12.6 = 72$. $48 + 20 = 68$. Bu da olmadı.

Mülakatçı: Yok olmadı. Üstten çıkarmaya çalışıyorsun.

Ahmet: Ya bu bundan fazla olacak, ya da bu bundan eksik olacak.

Mülakatçı: evet

Ahmet: $13.4=52$, $52+20=72$, $13.5=78$, $78-6=72$. Evet 13.

Mülakatçı: Neymiş? 13 masa varmış. Misafir sayısı?

Ahmet: 72

Mülakatçı: Hep bir sürü işlem yaptın. Aslında hep aynı işlemi yapıyorsun de mi? Birinde 4 ile çarpıyorsun. Ne yapıyorsun?

Ahmet: Birinde 6 ile çarpıyorum.

Mülakatçı: Acaba denkleme dönüştüremez miyiz? Denklem olarak

ifade edemez miyiz? Hangisini değiştiriyorsun hep?

Ahmet: Hep masa sayısını.

Mülakatçı: o zaman masa sayısını bilmiyoruz demek ki. Sürekli farklı değer verip değiştiriyorsun.

Ahmet: O zaman $x.4=$

Mülakatçı: Ama o 4 er kişiyi oturturdun. Sonra...

Ahmet: 20 kişi ayakta kalır. O zaman $+20. x. 4 + +20 =$.

Mülakatçı: güzel.

Ahmet: Bilinmiyor ama kaç kişi oturduğu. 6 şar kişi. $X.6$. bunda da 1 masa boş kalıyor ama 1 olmaz ama de mi?

Mülakatçı: Bir masa boş kalıyor. O masaya kaç kişi oturamıyor yani? Kaç kişi gelmemişte oturamamış.

Ahmet: O zaman $6x - 6 =$ bununda sonucunu bilmiyoruz ama.

Mülakatçı: İşte aslında onlar ne? Neyi buluyorsun. Şurada neyi buluyorsun?

Ahmet: Kişi sayısını

Mülakatçı: Altta neyi buldun.

Ahmet: Bunda da kişi sayısını.

Mülakatçı: eee kişi sayısı.

Ahmet: o zaman bilinmiyor ama kişi sayısı

Mülakatçı: Kişi sayısı farklı mı? Yani şurada (birinci denklem) farklı şurada (ikinci denklem) farklı mı?

Ahmet: $x.6$ değilde $6x - 6 =$ kişi sayısı.

Mülakatçı: kişi sayısını bilmiyoruz ama aslında kişi sayısını bir böyle tarif etmiş bir böyle tarif etmiş değil mi?

Ahmet: 1 masa boş kalıyor. 1 masada 6 kişi oturuyor.

Mülakatçı: Oraya kadar doğru.

Ahmet: $4x + 20 =$ bununda sonucunu bilmiyoruz.

Mülakatçı: Ama ikiside aynı şey aslında. İkiside kişi sayısı değil mi?

Ahmet: Hı hı.

Mülakatçı: o zaman ne yapılabilir? Oluyor oluyor. Sonuca çok yaklaştın. Düşün ki birincide neyi buldun sen? Kişi sayısı. İkincide neyi buldun?

Ahmet: Kişi sayısı.

Mülakatçı: Yani ikiside aynı şeyi ifade ediyor öyle değil mi? İkisine eşit dersek oradan masa sayısını bulamaz mıydık acaba?

Ahmet: $4x + 20 = 6x - 6$ değil mi?

Mülakatçı: Değil mi?

Ahmet: Evet

$$4x - 6x = -20 - 6$$

$$2x = -14$$

Mülakatçı: Ama bak -20, -6.

Ahmet: +14

Mülakatçı: İkiside eksi.

Ahmet: İkisi de eksiye çarpınca artı etmiyor mu?

Mülakatçı: Çarpma mı o?

Ahmet: Çıkartma. Büyükten küçük çıkarılır, büyüğün işareti konulur.

Mülakatçı: İkise de aynı işaretli.

Ahmet: O zaman ortak işaret konulur. -14

Mülakatçı: 20 lira borcun vardı 6 lira daha borcun oldu.

Ahmet: -26

Mülakatçı: Birinci kısımdaki nasıl? $4x - 6x$. 4 lira param var. 6 lira borcum var.

Ahmet: o zaman -2x.

Mülakatçı: Güzel

Ahmet: eksiler çok kafamı karıştırıyor. -26; -2x

Mülakatçı: yok x i bulmaya çakişiyorsun şuan x i yalnız bıraktın değil mi?

Ahmet: evet. $x=13$

Mülakatçı: ne yapmış oldun şimdi sen?

Ahmet: x kişi sayısı o zaman burada $4.13 + 20 =$ kişi sayısı

Mülakatçı: evet güzel aferin

Ahmet: işlemler çok fazla oldu

Mülakatçı: Aslında denklem kurarak o işlemleri azaltmış oluyoruz değil mi?

Ahmet: o zaman

$$4.13 = 52$$

$$52 + 20 = 72$$

kişi sayısı 72 imiş baya zor geldi

Mülakatçı: tamam devam edelim.

Handwritten mathematical solutions for a problem involving a party at a cafe. The solutions show various equations and calculations for finding the number of guests and tables.

Top left: $4x + 20 = 20$, $6x - 6 =$, $4.6 - 6 =$, $x.4 = 20 =$

Top right: $4x - 6x = 20 + 6$, $-2x = 26$, $x = 13$, -26 , $-2x$

Middle left: $13.4 = 52 + 20 = 72$, $13.6 = 78 - 6$, $11.4 = 44 + 20 = 64$, $11.6 = 66$, $12.4 = 48 + 20 = 68$, $12.6 = 72$

Middle right: $4.13 + 20 = 72$

Bottom left: 60 , $60 - 6 = 54$, $10.4 = 40 + 20$, $10.6 = 60$

Bottom right: $3.4 = 12 + 20 = 32$, $3.6 = 18$, $7.4 = 28 + 20 = 48$, $7.6 = 42$, $6.4 = 24 + 20 = 44$, $6.6 = 36$, $8.4 = 32 + 20 = 52$, $8.6 = 48$

Text on the right: Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir: Eğer misafirleriniz masalara 4'er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır. Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş kalır.

Şekil 4.3. Ahmet'in üçüncü probleme ait çözümü

Ahmet'in üçüncü probleme Ait Matematiksel Akıl Yürütme Türü Analizi

- Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı ii) denklem, sayılar bileşenlerinden oluşmaktadır.
- "Masa sayısı" matematiksel kabul edilir bir özellik değildir. Fakat gerçek yaşam bileşenidir. Ahmet masa sayısına değer vererek sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Her verdiği değer için her iki durumu deneyerek masa sayısını bulmaya çalışmıştır. "Deneme yanılma yoluyla" sonuca ulaşılabilir olması matematiksel gibi görünse de her durumda uygulanabilen bir yöntem değildir.
- Ahmet sorunun zor olduğunu düşünmektedir. Görüşmecinin de teşvik etmesiyle soruyla ilgili düşünmeye başlamıştır. Ahmet'e soruda geçen denklem kurunuz ifadesi zor gelmiş olmalı ki, farklı bir yöntemle çözebilir miyiz? sorusundan sonra deneme yanılma yöntemini tercih etmiştir ve masa sayısına değer vererek sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Ahmet ara ara çözümünden vazgeçme eğilimi göstererek zorlandığını belirtmiştir. Görüşmecinin sorularıyla ve desteğiyle sonuca ulaşmak için çaba harcamaktadır. Deneme yanılma yolu ile masa sayısına ve kişi sayısına ulaşmasının

ardından görüşmecinin müdahalesiyle denklem kurmaya başlamıştır. Denklem kurma aşamasında da sürekli görüşmecinin müdahaleleri bulunmaktadır. Bu anlamda düşünüldüğünde strateji seçimi ve uygulanmasında katılımcının rolü bulunmamaktadır. Bu yönüyle P-GAR akıl yürütme türünün etkisi görülmektedir.

➤ Ahmet temelde 6. Sınıf kazanımı olan “sözel ifadelerle karşılık gelen cebirsel ifade yazma” olmak üzere gerçek dünya dan matematiksel ifadelerle dönüşüm yapmakta zorlandığı için soruda zorlanmıştır. Bu durumun sebebi katılımcının kavramsal anlamasının yetersiz olması ve etkili tartışmalar yapamaması olabilir. Genel olarak akıl yürütme süreci düşünüldüğünde katılımcının kendine güveninin zayıf olduğunu, zorlandığı soruları yapmama eğiliminde olduğunu söylemek mümkündür. Dolayısıyla Ahmet’in yüzeysel bir düşünce yapısı sürdürdüğünü söylemek mümkündür. Ahmet’in matematiksel akıl yürütme türü ise, muhtemel doğru sonuca ulaştığı, tek tip akıl yürütme türü sergilediği ve yüzeysel bir düşünce tarzına sahip olduğu için P-GAR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ahmet’in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet’in dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ahmet: Çok kolaydı bu soru.

Mülakatçı: Çok mu kolaydı ne anlatıyor soru?

Ahmet: Şimdi bir üyesiymiş ama geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dâhil 65 TL o zaman. 65 TL yi yazdık. 65 TL harcamış. Eğer Turgay aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı 65-15 TL = 50 TL. Üye olunca $50/2=25$. Demek ki 25 tane DVD almış. Üyelik ücreti de toplamda 65 TL imiş. Üye olmasaymış 3 TL imiş. Aynı şeyi $25.3=75$.

Mülakatçı: Güzel. Peki, niye böyle düşündün? Doğru yaptığını nasıl anladın?

Ahmet: Şimdi 65-15 TL 65 TL den 15 TL çıkartıyoruz üye... aaa yok. 15 TL yi çıkartacağız ama neden çıkartacağız?

Mülakatçı: Neden çıkartacağız?

Ahmet: ... Üyelik ücretini çıkartırsak kaç DVD aldığının ücretini öğreniriz. Demek ki üye olmasaymış, 50 TL ye DVD almış. $50/2=25$. 25 tane DVD almış.

Mülakatçı: Güzel.

Ahmet: Üye olmasaymış 3 TL ödeyecekmiş.

$$25.3 = 75$$

b şıkkında ise,

Ahmet: (Soruyu okudu)

Mülakatçı: Ne düşündün bu soru için?

Ahmet: Yapmıştım ama yanlış yaptım herhâlde.

Mülakatçı: Ne düşündün burada? Tekrar düşün istersen.

Ahmet: Üye olan birini üye olmayan birine göre daha avantajlı...

Mülakatçı: Ne demek o sence?

Ahmet: Ama yine Turgay mı?

Mülakatçı: Turgay değil.

Ahmet: O zaman örnek verelim. 10 tane DVD aldı 20 TL. Birde üyelik ücreti $20 + 15 = 35$. Üye olan 35 TL. Üye olmayan ise 20 tane DVD aldı mı eee.

Mülakatçı: 10 tane almıştı ama.

Ahmet: Ha evet. O zaman 30 TL. Bunda üyelik ücreti yok. Olmadı.

Mülakatçı: Ne oldu, ne olmadı?

Ahmet: $20 + 15 = 35$ TL

Mülakatçı: Tamam o üye olan

Ahmet: Üye olmazsa 10 tane aldığı zaman 30 TL ödemiş oluyor ama bu da 35 TL ama daha zararlı çıkacak.

Mülakatçı: Evet ama biz kara geçmesini istiyoruz.

Ahmet: Ya üye olmayacak ya da üye olup az DVD alacak

Mülakatçı: Az mı?

Ahmet: Fazla

Mülakatçı: Fazla mı?

Ahmet: Fazla. 10 tane aldığında $10.2 = 20 + 15 = 35$ TL tamam. Şimdi burada da 10 tane aldığında $10.3 = 30$ TL üye olan daha zararlı çıkıyor ama burada niye karlı çıktı?...

Mülakatçı: Niye? Üstteki soruda 25 tane almıştı altta sen 10 tane aldırıyorsun zararlı çıkıyor.

Ahmet: O zaman 25 tane aldıralım birde öyle deneyelim

Mülakatçı: 25 taneyi zaten yukarda buldun. 25 tane de karlı çıkıyor ama

bize diyor ki en az kaç tane alırsam kara geçerim şimdi 25 yukarı

Ahmet: birde 5 deneyelim.

Mülakatçı: Ama 5 10 dan büyük

Ahmet: Ama en az almam lazım

Mülakatçı: Ama 10 da kara geçemedi.

Ahmet: 10 da kara geçemedi eee ama en az kaç DVD demiş 10 olmadığına göre 5 deneyelim.

Mülakatçı: Tamam deneyelim.

Ahmet: Üye olmazsa 15 TL üye olursa $10 +$ yine 15 TL. Olmadı 2 de deneyelim o zaman üye olmayan 6 TL üye olan $4 + 15 = 19$ yine zararda çıkıyor niye burada karlı çıktı o zaman.

Mülakatçı: Niye sence?

Ahmet: Az DVD aldığım için olmasın,

Mülakatçı: olabilir. Çünkü sen sayıyı düşürdükçe fark açılıyor.

Ahmet: O zaman 15 deneyelim.

Mülakatçı: Dene bakalım.

Ahmet: Üye olmayan kişi 45 TL üye olmayan

$$30 + 15 = 45 \text{ TL}$$

Mülakatçı: Ne oldu şimdi?

Ahmet: Eşit oldular ya 20 de deneyeceğiz ya da 16 da 20 de deneyelim.

Mülakatçı: En az diyor ama

Ahmet: 16 o zaman. $16.3 = 48$ üye olmayanın. Bir de $16.2 = 38$ yok 38 değil 22

Mülakatçı: Bir daha düşün işlem hatası mı yaptın?

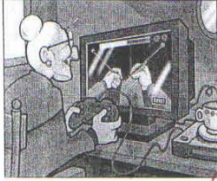
Ahmet: 48 birde eee 2 ile çarpacağız.

Mülakatçı: Üye olan mı bu?

Ahmet: üye olmayan 48. Üye olmayan 26, 32 TL $32 + 15 = 47$ 1 TL fark var demek ki 16 DVD kiralarsa daha karlı olmuş olur.

Mülakatçı:

güzel



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL'dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye	olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL	

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcayacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

Handwritten calculations for problem a):

$$16 \cdot 2 = 32 + 15 = 47$$

$$65 \text{ TL} - 15 + 4 = 50 \text{ TL}$$

$$50 : 2 = 25$$

$$25 \cdot 3 = 75$$

$$16 \cdot 3 = 48$$

$$15 \cdot 3 = 45 \text{ TL}$$

$$15 \cdot 2 = 30$$

$$30 + 15 = 45$$

b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

Handwritten calculations for problem b):

$$20 + 12 = 32 \text{ TL}$$

$$30$$

$$10 \cdot 2 = 20 \text{ TL}$$

$$5 \cdot 2 = 10$$

$$10 \cdot 2 = 20 + 15 = 35 \text{ TL}$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$2 \cdot 24 + 15 = 19$$

$$5 \cdot 2 = 10 + 15 = 25$$

Şekil 4.4. Ahmet'in dördüncü probleme ait çözümü

Ahmet'in dördüncü probleme Ait Matematiksel Akıl Yürütme Türü Analizi

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci, i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Ahmet sorunun a şıkkında zorlanmadan aritmetik işlemleri takip ederek sonuca ulaşmıştır. b şıkkında ise DVD sayısına değerler vererek işlem yapmayı seçmiştir. Bu deneme işlemi sistematik bir şekilde ilerlememiştir. “Deneme yanılma yoluyla” sonuca ulaşmış olması matematiksel gibi görünse de her zaman uygulanabilecek matematiksel olarak kabul edilen bir özellik değildir.

➤ Ahmet sorunun çok kolay olduğunu ifade ederek çözüme başlamıştır. Ahmet'in a şıkkı ile ilgili çözümü doğrudur ve açıklamalar yaptığı için ne yaptığının farkında olduğu söylenebilir. Bu anlamda soruyu anlamada sıkıntısının olmadığını söylemek

mümkündür. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR nin özelliklerini göstermektedir. b şıkkı için ise çözüm yöntemi olarak deneme yanılma yöntemini seçmiştir. Aklına gelen sayıları deneyerek sonuca ulaşmak istemiştir. İşlemlerinde dikkatsizlik hataları mevcut olduğundan bu aşamada birden fazla aritmetik işlem yapmak zorunda kalmıştır. Alternatif çözüm yöntemlerini kullanmak aklına bile gelmemiştir. Görüşmecinin yönlendirmelerine karşılık cevaplarına bakılacak olursa sistematik bir düşünce yapısına girmeden ilk aklına gelen sayıyı deneme eğilimindedir. “o zaman 25 tane aldırırım birde öyle deneyelim” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Sonrasında yine deneme yaparken “10 da kara geçemedi eee ama en az kaç DVD demiş 10 olmadığına göre 5 deneyelim” sözleri düşünme sürecini etkili yapmadan direk sonuca odaklanarak bir işlem süreci geçirdiğini göstermektedir. Sonucu gördükten sonra DVD sayısını az vermesinin bu durumun sebebi olabileceğini fark edip 15 DVD denemeye çalışmıştır. 15 DVD aldıklarında aynı ücreti ödediklerini fark edince direk denemeye 20 DVD ile devam etmek istemiştir. Bu durum yukarıda bahsedilen sistematik olmayan ve rastgele yapılmış bir süreci kapsamaktadır. Görüşmecinin sorusuyla doğru cevaba ulaşmış fakat kavramsal olarak zayıf ve ne yaptığının farkında olmadığı bir düşünme süreci yönetmiştir. Bu açıdan düşünüldüğünde tamamen bilinçsizce sayılar seçerek sonuca ulaşmaya çalıştığı bir süreç olduğundan MR ye yakın olduğu söylenebilir.

➤ Genel olarak aritmetik işlemleri yapmada sıkıntı yaşamamıştır bu durum Ahmet’in belli bilgi birikimine sahip olduğunu göstermektedir fakat düşünce olarak yüzeysel bir düşünme tarzı olduğundan birçok işlem yaparak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Ahmet’in zorlanmasının sebebi, birden fazla aritmetik işlem yapması ve hepsini yorumlamak zorunda kalmasıdır. Doğru sonuca ulaşan Ahmet’in matematiksel akıl yürütme türü iki farklı akıl yürütme türü kullandığından ve yüzeysel bir düşünce sürecine sahip olduğundan AR_{diy} olarak belirlenmiştir.

-Ahmet’in beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet’in beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ahmet: 13 kibrit çöpü eee önce 4 kibrit çöpü sonra 3 kullanmış 3 ve 3 kullanmış yine 3 yapacağız herhâlde ben derste 24 tane mi yapmıştım.

Mülakatçı: nasıl yaptın?

Ahmet: önce 24 le 3 ü çarptım ama ben bastaki karedeki 3 ü de kattım. Burada 1 tane kaldı

$$24 \cdot 3 = 72$$

$$72 + 1 = 73$$

oldu. Şimdi yapalım. Ama önce bunu katmadım 3,3,3 hep sonra 24 le çarptım 1 ekledim 73 oldu.

Mülakatçı: doğru yaptığını nasıl anladın?

Ahmet: 73 den 1 çıkarırız 72.

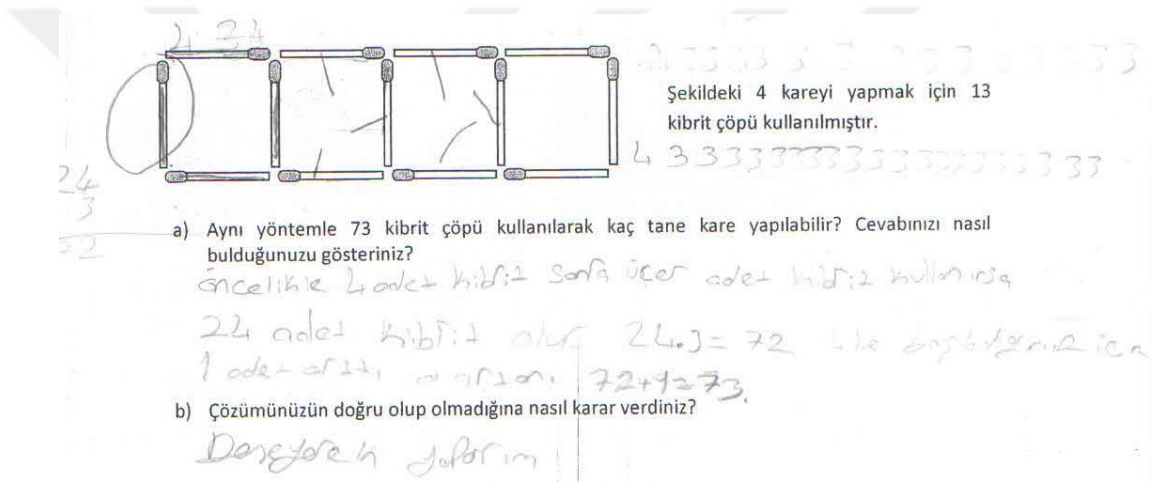
$$72 : 3 = 24 \text{ olur.}$$

Mülakatçı: yani 24 kareyi doğru bulduğumuzu? İşlemimiz doğru ama

Ahmet: ama zaten böyle yapmıştım 3,3,3, denedim en yakın sonuç 72 buldum 72 bulunca 4 yazmıştım 4 i çıkardım 24 tane koydum 72 yi bulunca 1 i ekledim.

Mülakatçı: Önce denedin sonra bu yolu buldum öyle mi?

Ahmet: Evet. Öncelikle böyle 3,3,3, yapmıştım.



Şekil 4.5. Ahmet'in beşinci probleme ait çözümü

Ahmet'in beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci, i) kibrit çöpü sayısı ii) kare sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ahmet'in belirttiği "kibrit çöpü sayısı" ve "kare sayısı" matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmamasına rağmen gerçek dünya bileşenidir. Ahmet çözüm prosedürü olarak aritmetik işlemleri takip etmiştir. "Sayarak yapma" çözüm yöntemi olarak kabul edilebilir değildir. Çünkü doğru cevaba ulaştırma ihtimali sınırlıdır. Fakat Ahmet'in sonrasında yaptığı işlemler problemi çözmek için uygun aritmetik işlemlerdir. Bu açıdan kabul edilebilirdir.

➤ Ahmet ilk olarak soruda verilen şekildeki örüntüyü anlamaya çalışmıştır. Kibrit çöplerinin 4 ile başlayıp 3 er 3 er arttığını fark etmiştir. Ahmet teker teker sayarak çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Sonrasında ise aritmetik işlemlerle çözümünü desteklemiştir. Bu durumu “*ama zaten böyle yapmıştım 3,3,3, denedim en yakın sonuç 72 buldum 72 bulunca 4 yazmıştım 4 i çıkardım 24 tane koydum 72 yi bulunca 1 i ekledim*” cümleleri açıklamaktadır. Bu anlamda düşünüldüğünde Ahmet, sonucun az çok tahmin edildiği ve sonrasında aritmetik işlemlerin yapıldığı bir çözüm prosedürü izlemiştir. Bu anlamda AR nin özelliklerini taşıdığı söylenebilir.

➤ Ahmet’in düşünce yapısının başlangıçta yüzeysel olduğu fakat sonlara doğru aritmetik işlemleri nasıl yapacağına kendinin karar vermesi açısından düşünüldüğünde derin düşünceye yaklaştığı söylenebilir. Bu sebeple matematiksel özellik açısından ayırım yapılamadığından belirsiz olarak sınıflandırılmıştır. Çözüm prosedürünü belirlerken, soruyla ilgili bir prosedür hatırlamaması veya ilk olarak sayarak yapmanın kolay olmasını dikkate almış olabilir. Doğru sonucu elde eden Ahmet’in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yer yer yüzeysel yer yer derin bir düşünce yapısına sahip olduğundan AR_{dgx} olarak belirlenmiştir.

Ahmet’in “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.1’de gösterilmiştir.

Tablo 4.1.

Ahmet’in “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Ahmet	P-GAR _{dgy}	P-GAR _{ogy}	P-GAR _{ogy}	AR _{dly}	AR _{dgx}

Tablo 4.1 incelendiğinde, Ahmet’in incelenen beş problemde de algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu özellikle ilk üç problemde ise, kişi rehberliğinde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne yani P-GAR akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Ahmet problemlere muhtemel doğru veya doğru cevap verirken, sadece dördüncü problemde yerel bir akıl yürütme türü sergilemiş diğer

problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Ahmet akıl yürütme sürecinde yüzeysel bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.2. Barış'ın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Barış'ın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Barış'ın birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: eee problem kurun diyor. Ben şey dedim bir sınıfta sınıfta sıralarda 3 er kişi oturuyorlardı eee 10 kişide artıyordu sınıfta 31 kişi varsa sıra sayısını bulalım dedim.

Mülakatçı: sence doğru bir problem mi kurdun nasıl kontrol ettin?

Barış: soruyu okuyup bir daha çözdüm. Bence doğru.

Mülakatçı: peki çözebilir misin?

Barış: tabi. Şimdi 3 erli oturuyorlardı sıra sayısına k demiş 3 erli oturunca 3 k olur 10 kişide artıyor $3k+10$ olur. $3k + 10 = 31$ Sonra 10 u diğer tarafa attım -10 $3k = 21$ oldu sonra buda(3) burda çarpım durumunda bunu da karşıya gönderiyoruz bölüm durumuna geçiyor $k = 7$

Mülakatçı: neyi bulmuş oldun sen 7 neyi ifade ediyor.

Barış: sıra sayısını

Mülakatçı: doğru yaptığını nasıl kontrol edebilirsin?

Barış: $3k + 10 = 31$

Buraya (k yerine) 7 yazacağız.

$$3 \cdot 7 + 10 = 31$$

$$21 + 10 = 31$$

$$31 = 31$$

olur.

Mülakatçı: bu soruyla ilgili ne düşündün?

Barış: kolay geldi

Mülakatçı: neden kolay geldi daha önce gördüğün için mi?

Barış: evet bu tip sorular çok çözdük.

Mülakatçı: tamam devam edelim.

$3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Bir sınıfta sıralara 3'erli oturduğunda 10 kişi artıyor. Sınıfta 31 kişi olduğuna göre kaç sıra vardır?

$$\begin{array}{r} 3k \\ 3k + 10 = 31 \\ 3k = 21 \\ k = 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \cdot 7 + 10 \\ = 21 + 10 \\ = 31 \end{array}$$

Şekil 4.6. Barış'ın birinci probleme ait çözümü

Bariş'ın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Barış'ın akıl yürütme süreci; i) bir soru ile gerçek hayat arasındaki dönüşüm ii) sayılar, denklem iii) aritmetik işlem iv) problem durumu bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Barış, denkleme uygun günlük hayata ilişkin bir problem kurmuştur. Bu açıdan kurulan problem gerçek dünya bileşenidir. Denklem çözümünde eşitliğin solundaki sayıları sağına işaret değiştirerek ve çarpımında bölüm olarak geçirdiğini ifade etmiştir. Bu çözüm algoritması matematiksel özellik olarak kabul edilemez fakat genel olarak kullanan pratik bir yoldur. Barış, denklemi çözdükten sonra cevabın gerçek hayatta ilgili problemde ne anlama geldiğini söylemiştir bu anlamda modelleme özelliğinin tüm sayıları tamamlanmıştır.

➤ Problem kurarken ve çözerken kendinden emin bir şekilde kolayca işlemleri takip ederek işlemlerinin doğru olup olmadığını kontrol etmek için sağlama işimi yapmıştır. Barış ne yaptığının farkında olarak işlemini devam ettirmiştir. Önceden bu tip sorularla çok karşılaştığını söyleyerek kafasında bu sorularla ilgili bir şema olduğunu göstermiştir bu yönüyle AR özelliklerini gösteren bir akıl yürütme türüne sahiptir.

➤ Matematiksel açıdan denklemi taşımayan bir problem kurmuştur bu tip soruları çok çözmesinden kaynaklı olarak hiç zorlanmadan kolayca cevap vermiş olabilir genel olarak ne yaptığının farkında bir süreç ilerletmiştir. Doğru bir problem kuran Barış'ın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve derin bir düşünce yapısı olduğundan AR_{gd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Barış'ın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Bariş'ın ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: hatalı mı diyor eee hatalı çünkü -1 i önce x den uzak olanı sonra x in yanındakini yok edeceğiz eee doğrusunu göster demiş buda

$7x - 1 = 7$ buna $(-1$ i gösteriyor) $+1$ ekleyeceğiz buna da $+1$ ekleyeceğiz.

$$7x - 1 + 1 = 7 + 1$$

$7x = 8$ bunu da (7) buraya gönderiyoruz eee bölüm durumunda o zaman $x = \frac{8}{7}$ çıktı. Yerine koyuyorum.

Mülakatçı: neden yerine koyuyorsun?

Barış: eee denemek için oluyor mu diye.

$$7 \cdot \frac{8}{7} - 1 = 7$$

Bunlar $(7$ ler) yok olur $8 - 1 = 7$ olur doğru o zaman.

Mülakatçı: güzel doğru yaptığını anladın. Peki, sen bu yöntemle mi çözüyorsun yoksa başka bir yöntemle çözer misin?

Barış: ben normalde +1 eklemiyorum direk bunu (-1 i) bu tarafa

gönderiyorum. -1 olarak geliyor. +1 olarak geliyor. Bu da yine aynı şeye geliyor.

Mülakatçı: tamam güzel.

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

	$7x - 1 = 7$	$\frac{1}{7} \cdot 7x = 8$
1. Adım	$\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7$	$x = 8$
2. Adım	$x - 1 = 1$	
3. Adım	$x - 1 + 1 = 1 + 1$	
4. Adım	$x = 2$	

- a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

Hatalı çünkü önce x'den uzak olan sonra yakın olan yok edilecek.

- b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

$$7x - 1 = 7 + 1$$

$$\frac{1}{7} 7x = 8 \cdot \frac{1}{7}$$

$$x = \frac{8}{7}$$

$$x = \frac{8}{7}$$

$$7 \cdot \frac{8}{7} - 1 = 7$$

$$8 - 1 = 7$$

Şekil 4.7. Barış'ın ikinci probleme ait çözümü

Barış'ın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Barış'ın akıl yürütme süreci; i) denklem, sayılar ii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Barış, problemde verilen çözümün hatalı olmasının sebebini “önce x den uzak olanı sonra x 'in yanındakini yok edeceğiz” ifadeleriyle açıklamıştır. Bu ifadenin matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmadığı açıktır. Kendisi doğru çözümü yaparken her iki tarafa $7x - 1 + 1 = 7 + 1$ $7x = 8$ yaparak matematiksel olarak

eşitliğin korunumuna gönderi yaparak matematiksel kabul edilebilir çözüm yapmıştır. Fakat normalde yaparken kullandığı yöntemi “ben normalde +1 eklemiyorum direk -1'i sağa tarafa gönderiyorum -1 olarak geliyor. Buda yine aynı şeye geliyor.” diyerek açıklamıştır. Bu yöntem matematiksel kabul edilebilir bir yöntem değildir. Barış, doğru cevabı bulduğunu denklemde x i bulduğu cevabı yazarak denemiştir. Bu anlamda yaptığı işlem matematiksel olarak kabul edilebilir bir işlemdir.

➤ Barış, soruda verilen denklem çözümündeki hatayı fark etmiştir fakat açıklama olarak matematiksel özelliklerden faydalananarak açıklama yapmamıştır. Kendisi çözüm yaparken yaptığı işlemlerin farkında ve kavramsal anlamasının kuvvetli olduğunu göstermiştir. Bu anlamda bildiği algoritmadan faydalandığı anlaşılmaktadır. Bu sebeple AR' nin özelliklerini taşımaktadır.

➤ Barış yer yer mantıksal açıklamalar yer yer daha az kavramsal açıklamalar yapmıştır. Bu durumun sebebi temle bilgi birikimine sahip olması fakat bazı noktalarda kavramsal bilgi eksikliğinin olması olabilir. Genel olarak ne yaptığının farkında bir süreç ilerletmiştir bu açıdan derinlikli bir akıl yürütmeye sahip olduğu söylenebilir. Barış'ın matematiksel akıl yürütme türü ise, doğru bir işlem yapması tek tip akıl yürütme kullanması ve derin bir düşünce yapısı ile süreci ilerletmesinden dolayı AR_{dgd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Barış'ın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Barış'ın üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: (soruyu okudu) ben şey yaptım eee bir 4 er kişi oturursa var bir de 6 şar kişi oturursa var. 4 er kişi oturursa kişi sayısını bilmiyorum eee $4x$ eee ayakta kalıyor 20 kişi +20,

$$4x + 20$$

Mülakatçı: neden öyle yazdın x kişi sayısı mı?

Barış: 1 dk. eee yok masa sayısı. 1 dk. buradan ne buluyorduk. (soruyu tekrar okudu) şeydi bu masa sayısı yoksa değil miydi?

Mülakatçı: kafan mı karıştı hatırlamaya mı çalışıyorsun?

Barış: evet hangisiydi diye düşünüyorum.

Mülakatçı: sence hangisinin olması daha mantıklı olur?

Barış: ben kişi sayısı diye hatırlıyorum kişi sayısıydı çünkü 20 kişi ayakta kaldığından...

Mülakatçı: tamam devam edelim bakalım.

Barış: şimdi $6x$ bir masa boş kalıyor masalar 6 sar kişilik olduğuna göre -6

Mülakatçı: -1 deseydik olmaz mıydı?

Barış: hayır çünkü bir masada 6 kişi oturduğuna göre - 6 oluyor. Ve bunlar $(4x + 20)$ ile $6x - 6$ yı gösteriyor) birbirine eşit yine kişi sayısı bunlar kişi sayısı.

Mülakatçı: yani x mi kişi sayısı onların hepsi mi kişi sayısı anlayamadım?

Barış: bunların hepsi kişi sayısı galiba. Çünkü bu $(4x + 20)$ kişi sayısını buda $(6x - 6)$ kişi sayısını veriyordu. Bunlar birbirine eşit.

$$4x + 20 = 6x - 6$$

Mülakatçı: neden eşitledik?

Barış: çünkü 4er kişi oturursa $4x + 20$ oluyor 20 kişi artıyor. 6 sar otururlarsa 1 masa boş kalıyor yani yine aynı kişiler kimse gidip gelmiyor. Ondan sonra bunu yaptım işte. $4x$ buraya (eşitliğin sağ tarafı) 6 buraya (eşitliğin sol tarafı)

$26 =$ eee yok de mi evet eee bura 10 yok x yanlış mı yaptım?

Mülakatçı: kontrol et istersen

Barış: bu tarafa bu da bu tarafa gidiyor gelirken -6 gelirken artı oluyor. Buda gelirken eksi oluyordu o zaman $26 = 2x$ olacak. $x = 13$ oluyor. Eee 13 ne oluyor. Buraya (x in yerine) koyalım 13 ü.

$$4 \cdot 13 = 52$$

$$52 + 20 = 72$$

Mülakatçı: neyi buldun sen?

Barış: kişi sayısı

Mülakatçı: 13 neydi?

Barış: sıra sayısıydı.

Mülakatçı: sanki x e en basta kişi sayısı demiştin?

Barış: şaşırtmışım galiba. Çünkü bunun toplamı 72 kişi sayısı. 4 erli masalara otururlarsa 20 kişi artınca da bu (x) masa sayısı oluyor zaten.

Mülakatçı: o zaman ne buldun sonuç olarak

Barış: ne istiyordu kaç misafirinin olduğunu bulmak için 72.

Mülakatçı: doğru yapıp yapmadığınızı nasıl anlarız?

Barış: 72 yi 4 e bölüp 20 ile toplarsak

Mülakatçı: yap bakalım.

Barış: 72 yi 4 e bölersek $72 : 4 = 13$ eee 20 kişi de ayakta kalıyor eee yoo önce 20 yi çıkaracaktık.

Mülakatçı: neden

Barış: çünkü 20 kişi ayakta kalıyor. Diğerleri 4 er kişilik masalara oturuyor. Ee 52 yi 4 e böleceğiz 13 çıkar. Yanlış mı yaptım?

Mülakatçı: neyi buldun şimdi sen?

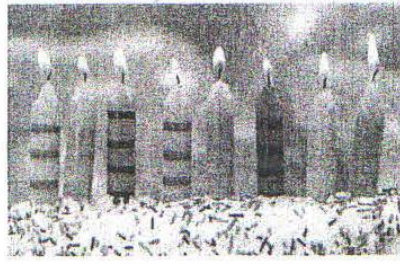
Barış: 13 şey masa sayısını buldum. Buda (x) masa sayısı 13 çıkmıştı zaten doğru.

Mülakatçı: o zaman ne yapmış olduk doğru bulduk.

Barış: evet doğru bulduk.

Mülakatçı: bu soru ile ilgili ne düşündün?

Barış: çok zorlanmadım ama işte biraz



Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4' er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş

kalır.

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

$$\begin{array}{r}
 \text{4'er} \quad \quad \text{6'şar} \\
 \hline
 4x + 20 = 6x - 6 \\
 26 = 2x \\
 13 = x
 \end{array}$$

Şekil 4.8. Barış'ın üçüncü probleme ait çözümü

Barış'ın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Barış'ın matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı ii) kişi sayısı bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Masa sayısı” ve “kişi sayısı” matematiksel kabul edilir bir özellik değildir. Fakat gerçek yaşam bileşenidir. Barış, problemde geçen “kişi sayısı” bileşenine x değişkenini atayarak problem durumunda yer alan iki sözel duruma karşılık gelecek cebirsel ifadeleri doğru bir şekilde yazamamıştır. Eğer değişken olarak masa sayısını x değişkenine atamış olsaydı, bu ifadeler $4x + 20$ ve $6x - 6$ olup problemde belirtilen durumları karşılayacaktı fakat katılımcının değişkeni kişi sayısı ile eşleştirmesi durumunda böyle bir durum matematiksel görünse dahi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamaktadır.

➤ Barış ilk olarak problemde ki durumlara karşılık gelebilecek cebirsel ifadeleri yazarak başlamıştır. Her iki durum için de doğru cebirsel ifadeler yazmıştır. Fakat cebirsel ifadeleri yazarken x değişkenini kişi sayısı için mi yoksa masa sayısı için mi kullanacağı konusunda tereddüt yaşamıştır. “1 dk. eee yok masa sayısı. 1dk buradan ne

buluyorduk (soruyu tekrar okudu) şeydi bu masa sayısı yoksa değil miydi? ben kişi sayısı diye hatırlıyorum kişi sayısıydı çünkü 20 kişi ayakta kaldığından” cümleleri bu durumu destekler niteliktedir. x değişkenine ne anlam yükleyeceği konusunda bir türlü karar verememiştir. Bu anlamda düşünüldüğünde hatırlamaya çalıştığı bir algoritmayı takip etme eğiliminde olduğu görülmektedir. Bu anlamda AR akıl yürütme türünü sağlamaktadır. Soruyla ilgili çözümüne devam ederken soruda yer alan iki duruma karşılık gelen cebirsel ifadeleri eşitlemesi gerektiğini söylemiştir. Neden eşitlemesi gerektiğini “*çünkü 4 er kişi oturursa $4x + 20$ oluyor 20 kişi artıyor. 6 sar otururlarsa 1 masa boş kalıyor yani yine aynı kişiler kimse gidip gelmiyor.*” cümleleriyle açıklamıştır. Denklemi çözdükten sonra $x = 13$ değerini bulduktan sonra neyi bulduğunun farkında değildir “*eee 13 ne oluyor*” cümlesi bu durumu desteklemektedir. Fakat 13 ü denklemde yerine yazarak, kişi sayısını bulduğunu söylemiştir. Bu sonuca dayanarak 13 ün sıra sayısı olduğunu söylemiştir. Görüşmecinin “*başlangıçta x için kişi sayısı demiştin?*” sorusu ile katılımcı şaşırdığını söylemiştir. Bu durumdan anlaşıldığı üzere Barış yaptığı işlemlerin farkında olmadan bir süreç sürdürmüştür.

➤ Barış’ın problemde verilen durumlara uygun cebirsel ifade yazabilmesinin sebebi önceki deneyimlerinden sözel ifadelere karşılık cebirsel ifade yazma kazanımını anlamlandırdığı için olabilir. Barış, değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmıştır bu durumun sebebi önceki deneyimlerinden hatırladığı bir şeyler vardır tam olarak hatırlamadığı için ikilemde kalmıştır. Genel olarak yaptığı işlemlerin farkında olmadan mantıksal açıklamalar ve tartışmalar yapamadan aklına gelen aritmetik işlemleri uygulayarak sonuca ulaşmaya çalışan yüzeysel bir bakış açısı vardır. Bunun sebebi kavramsal anlamasının zayıf olması olabilir. Doğru bir denklem kuran Barış’ın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce yapısı sürdürdüğünden dolayı AR_{diy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Barış’ın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Barış’ın dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: *(soruyu okudu).şimdi 65 üyelikle birlikte o yüzden üye olmasaydı diye sorduğu için 65 den 15 i çıkarıyoruz.*

$$65 - 15 = 50$$

olur. 50 TL DVD lerin parası kaç DVD olduğunu bilmiyoruz. Eee üye olduğunda 2 TL almış o zaman 25 tane DVD almış.

Mülakatçı: güzel nasıl buldun 25 i.

Barış: bir DVD yi üye iken 2 TL ye almış o zaman bölelim ki kaç tane DVD aldığını bulalım 25 olur. Diyor ki üye olmasaydı ne kadar öderdi o zaman 25 ile 3 ü çarparsak $25 \cdot 3 = 75$ olur.

b şıkkı

Barış: (soruyu okudu) bunun cevabı 15 dide ben deneyerek bulmuştum. Bir bir yazmıştım sonra artırdım bu 3 bu 2 bu 2 bu 2 bu 6 bu 5 yok 4 olurdu 3 3 9 buda 2 şey 6 oluyor böyle böyle gittim. Sonra 15 e geldim sonra 15 de aaa yok birde şey vardı 1 dk. bunlar yok eee üye olanın bir de 15 TL si vardı öyle yaptım.

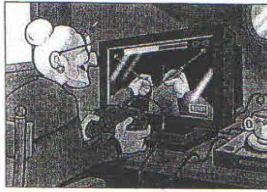
Ben üye olan 15 eee 17 diğeri 3; ikinci DVD lerinde bu 19 buda 6; üçüncüde bu 21 buda 9; sonra 23 12, 5 de 25, 15; 6 da 27, 18; 7 de 29, 21, 8 de 31, 24; 9 da 33, 27; 10 da 35, 30; 11 de 37, 33; 12 de 39, 36; 13 de 41, 39; 14 de 43, 42; 15 de 45, 45.

Mülakatçı: ne oldu şimdi?

Barış: 15 DVD alınca şey oluyor ikisi de aynı parayı vermiş oluyor 16 dada şey oluyor üye olan 47 ödüyor üye olmayan ise 48 TL ödüyor o zaman avantajlı oluyor üye olan.

Mülakatçı: yani cevap?

Barış: cevap 16.



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

25

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcayacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

$$2 \times 45 = 90 \quad 90 - 15 = 75$$

$$x = 25$$

- b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{17} & \frac{1}{3} & \frac{2}{17} & \frac{2}{6} & \frac{3}{21} & \frac{3}{9} & \frac{4}{27} & \frac{4}{12} & \frac{5}{25} & \frac{5}{15} & \frac{6}{27} & \frac{6}{18} & \frac{7}{27} & \frac{7}{21} \\ \frac{8}{51} & \frac{7}{27} & \frac{9}{53} & \frac{7}{27} & \frac{10}{35} & \frac{10}{30} & \frac{11}{37} & \frac{11}{33} & \frac{12}{39} & \frac{12}{36} & \frac{13}{41} & \frac{13}{39} \\ \frac{14}{43} & \frac{14}{42} & \frac{15}{45} & \frac{15}{45} & & & & & & & & & \end{array}$$

Şekil 4.9. Barış'ın dördüncü probleme ait çözümü

Barış'ın dördüncü probleme Ait Matematiksel Akıl Yürütme Türü Analizi

➤ Barış'ın matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Barış sorunun a şıkında zorlanmadan aritmetik işlemleri takip ederek sonuca ulaşmıştır. Yapılan işlemler problem durumuna uygun matematiksel açıdan kabul edilebilir işlemlerdir. Fakat b şıkında “sayarak yapma” yöntemini tercih etmiştir. Bu yöntem matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir. Birkaç sınırlı durumda etkili olabilir fakat bu durum çözüm yönteminin matematiksel olduğunu göstermez.

➤ Barış, soruyu okuduktan sonra üyelik ücreti olan 15 TL yi çıkararak çözüme başlamıştır. Aritmetik işlemler yaparak ilk olarak DVD sayısını bulmuş sonrasında ise üye olmayan birinin ödemesi gereken ücreti bulmuştur. Barış, sorunun a şıkkı için kolaylıkla sonucu bulmuştur. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini göstermektedir. b şıkında ise, sayarak yapmıştır. Bu çözümünü “*Bir bir yazmıştım sonra artırdım bu 3 bu 2 bu 2 bu 2 bu 6 bu 5 yok 4 olurdu 3 3 9 buda 2 şey 6 oluyor böyle böyle gittim sonra 15 e geldim sonra 15 de aaa yok birde şey vardı 1 dk. bunlar yok eee üye olanın bir de 15 TL si vardı öyle yaptım be n üye olan 15 eee 17 diğeri 3;ikinci DVD lerinde bu 19 buda 6; üçüncüde bu 21 buda 9;sonra 23 12, 5 de 25,15;6 da 27,18;7 de29,21,8 de 31,24;9 da 33,27;10 da 35,30;11 de 37,33;12 de 39,36;13 de 41,39;14 de 43,42; 15 de 45,45*” cümleleriyle ifade etmiştir. Sonrasında ise “*15 DVD alınca şey oluyor ikisi de aynı parayı vermiş oluyor 16 da şey oluyor üye olan 47 ödüyor üye olmayan ise 48 TL ödüyor o zaman avantajlı oluyor üye olan.*” olarak işlemini tamamlamıştır. Bu yönüyle düşünüldüğünde sayarak yapma ilk akla gelen her zaman doğru sonuca ulaştıramayabilen bir yöntem olarak sayılabilir. Bu yüzden, akıl yürütme türünün MR akıl yürütme türüne yakın olduğu söylenebilir.

➤ Barış'ın alternatif çözüm yollarını düşünmeksizin ilk aklına gelen sayarak yapma yöntemini kullandığı görülmektedir. Bu durumun sebebi farklı çözüm yöntemi bilmemesi, düşünememesi veya bu yöntemi kolay bulması olabilir. Genel olarak aritmetik işlemleri yapmada sıkıntı yaşamamıştır bu durum belli bilgi birikimine sahip olduğunu gösterir fakat düşünce olarak yüzeysel bir düşünme tarzı vardır. Doğru sonuca ulaşan Barış'ın matematiksel akıl yürütme türü, iki tip akıl yürütme kullandığından ve yüzeysel düşünme tarzına sahip olduğundan AR_{diy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Barış'ın beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Barış'ın beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: Eee burada diyor ki aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılır. eee birincisi için 4 tane istemiş o zaman 73 den 4 ü çıkarıyoruz eee

$$73 - 4 = 69$$

69 taneyi de birinci gittikten sonra 3 erli olarak kare oluşturmuş o zaman 3 e böleceğiz $69:3 = 21$ değil eee $69:23 = 3$ 23 tane kare oluşturuyor bir de bu kareyi çıkarmıştık ilk olarak basta o zaman $23 + 1 = 24$

Mülakatçı: güzel yani 24 kare mi oluşturulur?

Barış: evet.

Mülakatçı: peki doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

Barış: eee 24 kare var eee 24 kare şimdi bundan 73 bulacağız demi? Eee çarparız yine 24 den 4 ü çıkarırız 20 eee 3 le çarparız 60 olmadı eee bilmiyorum

Mülakatçı: acaba denklemlerle falan da yapılır mıydı bu soru sence? Ya da bu soru sana bir şeyler hatırlattı mı?

Barış: bilmiyorum. Hatırlatmadı

Mülakatçı: geçen sene örüntü falan işleştiniz onlara benziyor mu genel kural yazma n li

Barış: örüntülerle kural yapmayı unuttum.

Mülakatçı: denesen mi?

Barış: hatırlamıyorum

Mülakatçı: denklem yazmaya çalışalım istersen 3 er 3 er artıyor

Barış: eee 3 er 3 er artıyor bilinmeyen ne diyeceğiz?

Mülakatçı: kareler var

Barış: kare sayısı mı eee 3 er 3 er artmıştı $x + 3$ eee nasıldı?

Mülakatçı: her seferinde 3 tane artıyor

Barış: 3 er 3 er artıyor eee

Mülakatçı: 1. kare de 3 tane artıyor 2. de 3 tane 3. de 3 tane

Barış: o zaman 1 tane burada var sonra 3 er 3 er artmış eee $1 +$ eee $x + 3$ yok şöyle eee

Mülakatçı: $(1 + x)3$ mü olur acaba

Barış: galiba

Mülakatçı: dene istersen

Barış: o zaman $3+3$ oluyor olmuyor

Mülakatçı: 1 kare yapmak için

$$3.1 = 3 + 3 = 6$$

Barış: eee

Mülakatçı: bir yerde ufak bir hatan oldu

Barış: eee

Mülakatçı: 1 kare için kaç tane lazım 4 tane 2 kare için 7

Barış: 3 kare için 10 4 kare için 13 5 kare için 16 6 kare için 19

Mülakatçı: evet hep böyle gidiyor.

Barış: evet $+1$ çarptık mı 4

Mülakatçı: artış miktarının kare sayısı ile bir ilgisi mi var acaba?

Barış: 4 kare için 13 tane şey olacak eee $4 + x + 3$ olacak

Mülakatçı: olur mu deneyelim

Barış: eee

Mülakatçı: yoksa x le artış ı çarpmak mı lazım

Barış: 4 kare eee kare sayısı x di artış miktarı 3 dü $3x + eee 3$

Mülakatçı: Ne demek lazım

Barış: 1 mi?

Mülakatçı: 1 kare için 4 tane 2 kare için 7 tane x kare sayısı 1 kere 3 3 4 olması için 1 ekleyeceğim 2 kare için $2.3 = 6 + 1 = 7$ 3 kare için $3.3 = 9 + 1 = 10$ oldu mu?

Barış: oldu örüntü bu

Mülakatçı: 73 kibrit çöpü ile kaç kare yapıldığını nasıl buluruz?

Barış: o zaman buraya 73 kibrit çöpü eee 73 ü bulana kadar

Mülakatçı: yani $3x + 1$ in sonucunu bulduğumuz zaman neyi bulmuş oluyoruz biz?

Barış: 73 ü.

$$3x + 1 = 73$$

$$3x = 72$$

$$x = 24$$

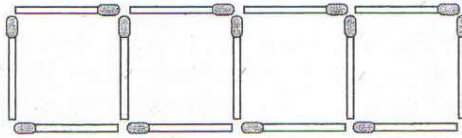
Mülakatçı: güzel. Ne oldu şimdi üstte de 24 altta da 24 bulmuş olduk?

Barış: doğru yapmış olduk.

Mülakatçı: anladın mı yaptığın işlemi bu soru zor mu geldi

Barış: anladım evet x 'i kullanarak yapmak zor geldi biraz.

Mülakatçı: tamam teşekkür ederim.



Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

- a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?

$$73 - 4 = 69$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ 3 \overline{) 69} \\ 69 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 3 \overline{) 69} \\ 69 \\ \hline 0 \end{array}$$

- b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?

ilk dört kibrit çöpü ile 1 kare yapıldı. her kare için 3 artış 3'e bölün
ilk 4 dört kibritle 1 kare yapıldı. onu geri aldım.

Şekil 4.10. Barış'ın beşinci probleme ait çözümü

Barış'ın beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Barış'ın matematiksel akıl yürütme süreci; i) kibrit çöpü sayısı ii) kare sayısı iii) çözüm prosedürü iv) denklem, sayılar bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Barış'ın belirttiği “kibrit çöpü sayısı” ve “kare sayısı” matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmamasına rağmen gerçek dünya bileşenidir. Barış, çözüm prosedürü olarak aritmetik işlemleri takip etmiştir. Yapılan aritmetik işlemler problemin çözümü için doğru ve matematiksel olarak kabul edilebilirdir.

➤ Barış ilk olarak soruda verilen şekli anlamaya çalışmıştır. Şekilde kare yapmak için kullanılan kibrit çöpü sayısını dikkate alarak işlem yapmıştır. Barış'ın çözümü “*eee birincisi için 4 tane istemiş o zaman 73 den 4 ü çıkarıyoruz eee $73 - 4 = 69$. 69 taneyi de birinci gittikten sonra 3 erli olarak kare oluşturmuş o zaman 3 e böleceğiz $69:3=21$ değil eee $69:23 = 23$ 23 tane kare oluşturuyor bir de bu kareyi çıkarmıştık ilk olarak basta o zaman $23 + 1 = 24$* ” şeklindedir. Barış'ın çözümü doğrudur ve açıklamaları çözümünü desteklemektedir. Barış'ın düşünce yapısını AR olarak sınıflandırmak mümkündür. Katılımcının yaptığı çözümü doğrulayamamasını takiben görüşmeci *alternatif bir çözüm olabilecek denklem kurma ile çözülebilir mi?* sorusunu yöneltmiştir ve devamında katılımcı farklı bir çözüm prosedürü denemeye başlamıştır. Katılımcı denklem kurmaya çalışırken zorlanmış olsa da görüşmecinin de ara ara sorularıyla destek sağlaması neticesinde katılımcı doğru bir şekilde denklemi oluşturabilmiştir. Katılımcı denklem kurarak çözüm yaparken zorlandığını ifade etmiştir. Bu anlamda düşünüldüğünde görüşmecinin de desteğiyle strateji seçilip uygulandığı için P-GAR olarak sınıflama yapılabilir.

➤ Barış'ın denklem kurarken zorlanmasının sebebi, kavramsal anlamasının zayıf olması veya bu tarz sorularla az karşılaşmış olması olabilir. Genel olarak bakıldığında katılımcının zaman zaman yüzeysel zaman zaman derinlikli düşünme tarzını sergilediği söylenebilir. Barış'ın matematiksel akıl yürütme türü, doğru bir sonuca ulaştığından, iki farklı akıl yürütme türü kullandığından ve yer yer yüzeysel yer yer derin düşünme tarzına sahip olduğundan AR_{dlx} olarak sınıflandırılmıştır.

Barış'ın “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.2’de gösterilmiştir.

Tablo 4.2.

Barış'ın “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Barış	AR _{dgd}	AR _{dgd}	AR _{dgy}	AR _{dly}	AR _{dlx}

Tablo 4.2 incelendiğinde, Barış'ın incelenen beş problemde de algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Barış problemlerin hepsine doğru cevap verirken, sadece dördüncü ve beşinci problemlerde yerel bir akıl yürütme türü sergilemiş diğer problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Barış akıl yürütme sürecinde bazı sorularda yüzeysel bir düşünce yapısına bazı sorularda ise derin bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.3. Cengiz'in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Cengiz'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: Hocam şimdi problem mi kuracağım?

Mülakatçı: Evet.

Cengiz: Ben şöyle dedim. 1 kasa elmanın 3 katının 10 fazlası 31 ise 1 kasa elma kaç kg'dır?

Mülakatçı: Niye öyle bir problem kurdun? Nerden aklına geldi?

Cengiz: Hocam burada $3k + 10 = 31$ k 'nin 3 katından fazlası diyor. Bende k ya 1 kasa elma dedim. Bunun 3 katının 10 fazlası 31 ise denklemi çözdüm.

Mülakatçı: Güzel denklemi nasıl çözdün?

Cengiz: Hocam yazayım mı?

Mülakatçı: Yaz.

Cengiz: $2k + 10 = 31$. $+10$ u karşı tarafa attım. -10 olarak geçti. $3k = 21$, $3k$ yı yalnız bırakmak için her iki tarafı 3'e böleriz. $k = 7$

Mülakatçı: Yani $k=7$. Neyi bulduk problemine göre?

Cengiz: 1 kasa elmayı.

Mülakatçı: elmayı bulmuş olduk. Peki, bu problem sana zor mu geldi, kolay mı geldi?

Cengiz: Kolay geldi.

Mülakatçı: Daha önce böyle çok mu yaptınız?

Cengiz: Evet hocam

Mülakatçı: Güzel. Devam edelim.

$3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Bir kasa elmanın 3 katının 10 fazlası
31 kg ediyorsa bir kasa elma kaç
kg'dır?

$$3k + 10 = 31$$

$$3k = 21$$

$$k = 7$$

Şekil 4.11. Cengiz'in birinci probleme ait çözümü

Cengiz'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) Soru ve günlük hayat dönüşümü ii) aritmetik işlemler iii) denklem sayılar iv) problem durumu bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Cengiz denkleme uygun günlük hayat ile ilişkili bir problem kurmuştur. Bu yönüyle gerçek dünya özelliği sağlanmış olur. Denklem çözümünde eşitliğin sol tarafındaki sayıları sağa tarafa işaretini değiştirerek geçirmiştir bu çözüm yolu matematiksel değildir fakat pratik bir yoldur. Daha sonra $3k = 21$ denklemini çözmek için k yı yalnız bırakarak her iki tarafı üçe böleriz ifadesini kullanmıştır. Bu özellik matematiksel kabul edilebilir bir özelliktir. Cengiz, denklemi çözdükten sonra gerçek hayata dönüş yaptığından modelleme özelliğinin sayfalarını gerçekleştirmiştir.

➤ Cengiz, sorunu daha önceden benzerlerinin yapılmasından ötürü kolay olduğunu düşünmüştür. Bu yönüyle AR akıl yürütme türünü andırırsa da problemi kurarken ve denklem çözümünü yaparken kendinden emin bir şekilde çözüm yapmıştır. Cengiz yaptığı işlemlerin farkındadır yaptığı işlemlerin açıklamalarını ve kavramsal alt yapısının farkındadır. Bu yönüyle CR akıl yürütme türünün özelliklerini göstermektedir.

➤ Cengiz denkleme uygun ve doğru bir problem kurmuştur genel anlamda ne yaptığıнын farkında ve matematiksel anlamlandırmasını oturtmuş bir çözüm sergilemiştir. Cengiz'in zorlanmadan cevap vermesinin sebebi sınıf içinde benzer örneklerin üzerinde durulması ve bu konu ile ilgili belli birikimine ve kavramsal anlamaya sahip olmasıdır. Cengiz'in matematiksel akıl yürütme türü, doğru bir problem

kurduğundan, iki farklı tür akıl yürütme sergilediğinden ve derin bir düşünce tarzına sahip olduğundan CR_{gd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Cengiz'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: Hocam hangi adım hatalı diyor. Hocam burada $7x$ 'i $\frac{1}{7}$ ile çarpması yanlış çünkü 7 yi yalnız bırakmak için 1 in yanına +1 gelmeliydi.

Mülakatçı: yani nasıl yapması lazımды? Gösterebilir misin?

Cengiz:

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= 7 \\ 7x - 1 + 1 &= 7 + 1 \\ 7x &= 8 \\ x &= \frac{8}{7} \end{aligned}$$

olur. O zaman.

Mülakatçı: tamam. Yani $\frac{1}{7}$ ile çarpmaması gerekiyordu diye düşünüyorsun değil mi?

Cengiz: $\frac{1}{7}$ ile sonradan da çarpabilirdi.

Mülakatçı: evet. Önce çarpması mı yanlış olmuş?

Cengiz: Evet. Önce çarpması yanlış. $7x = 8$ deyip burayı $\frac{1}{7}$ ile burayıda $\frac{1}{7}$ ile çarpsaydı olurdu.

Mülakatçı: evet. Sen bu denklemi nasıl çözersin? Terazi mantığıyla mı yoksa farklı bir yöntemin var mı çözmek için?

Cengiz: Hocam farlı yöntem ben karşı tarafa atma olarak düşündüm de terazi mantığını kullanarak yazdım. Hocam karşı tarafa atmayı da yazayım mı?

Mülakatçı: yaz.

Cengiz:

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= 7 \\ 7x &= 8 \\ x &= \frac{8}{7} \end{aligned}$$

Mülakatçı: Güzel o zaman yukarıda soruyu yanlış bulmuş öyle değil mi?

Cengiz: Hocam birinci adımda hata.

Mülakatçı: Peki sen doğru yaptığını nasıl anladın? Doğru mu yaptın acaba?

Cengiz: Hocam doğru yaptığının sağlamasını yaptım. $\frac{8}{7}$ nin 7 katıymış. 7 nin altında 1 vardır. 7 kere 8 56. $\frac{56}{7} = 8$ eder. 8 den 1 çıkarsak 7 olur.

Mülakatçı: Tamam devam edelim.

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

	$7x - 1 = 7$
1. Adım	$\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7$
2. Adım	$x - 1 = 1$
3. Adım	$x - 1 + 1 = 1 + 1$
4. Adım	$x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

Çözüm hatalıdır ve 1. adımda hata yapılmıştır. Çünkü $7x$ 'i yalnız bırakmak için eşitliğin sol tarafına $+1$ eklenmelidir.

b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

$$\begin{aligned}
 7x - 1 &= 7 \\
 7x - 1 + 1 &= 7 + 1 \\
 7x &= 8 \\
 x &= \frac{8}{7}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.12. Cengiz'in ikinci probleme ait çözümü

Cengiz'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem, sayılar ii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Cengiz, denklem çözümünün "Terazi mantığı" ile yapıldığının farkındadır yani eşitliğin korunumu ilkesi kullanarak yapılmak istenmiş olduğunu fark etmiştir. Bu anlamda eşitliğin korunumu mantığını taşıyan yöntem matematiksel olarak kabul edilebilir fakat "*karşı yatma*" diye ifade ettiği eşitliğin sol tarafındaki sayıların sağa tarafına geçirilmesini amaçlayan yöntem matematiksel kabul edilebilir değildir. Fakat genellikle kullanım pratik bir yöntemdir. Cengiz, yaptığı işlemin doğruluğunu "*sağlama*" yaparak göstermiştir bu yöntem matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir.

➤ Cengiz, sorudaki denklem çözümünün hatalı olduğunu fark etmiştir ve sebebini " *$7x$ 'i yalnız bırakmak için 1 'in yanına $+1$ gelmeliydi*" cümleleri ile açıklamıştır. Devamında nasıl yapılması gerektiğini yazarak gösterdiği ifadelerinde terazi mantığını kullanarak cevabı ulaşmıştır yaptığı işlemlerin mantıksal açıklamalarını söyleyebilen ve ne yaptığından emin tavırları dikkat çekmiştir bu açıdan bakıldığında akıl yürütme

süreci CR'nin özelliklerini taşımaktadır derste öğrendiği bilinen bir aritmetik prosedürü kullanmış olması açısından AR özelliği göstermiş olsa da açıklamaları ve yaptığı işlemlerin farkında olması nedeniyle CR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Cengiz işlemlerini zorlanmadan sürdürmüştür. Bu durumun sebebi denklem çözümü için her iki yöntemi de kavramış olmasından kaynaklanmaktadır. Genel olarak kavramsal anlamasından kuvvetli olduğu ve derinlemesine anlamının gerçekleştiği cevaplarından ve etkili tartışmalar yapmasından anlaşılmaktadır. Doğru cevaba ulaşan Cengiz'in matematiksel akıl yürütme türü, iki tür akıl yürütme kullandığından ve derin bir düşünce sergilediğinden CR_{gd} olarak sınıflandırılmıştır.

- Cengiz'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: Ben buna kaç masa olduğunu bilmediğim için x dedim. $4x + 20$. Hocam masalara eğer 6 şar kişi oturursa 1 masa boş kalır. Bunun sonucuyla bu eşit. $6x - 6$. Hocam bunlarda birbirine eşit.

$$4x + 20 = 6x - 6$$

Mülakatçı: Niye eşit onlar birbirine?

Cengiz: Hocam zaten 4 er kişi otursa 20 kişi ayakta kalır. Eğer masalara 6 şar kişi otursa 1 masa boş kalır. Hocam ikisinin de sonuçları birbirine eşitse...

Mülakatçı: 1 çıkarsaydın, niye 6 çıkardın?

Cengiz: Hocam bir masa boş kaldığı için 6 şar kişi oturduğu için 1 masada 6 kişi olur. Onu da çıkarırız.

Mülakatçı: Güzel.

Cengiz:

$$4x + 20 = 6x - 6$$

$$26 = 2x$$

$$13 = x.$$

Hocam masa sayısı 13. Kaç misafir olacağını bulmak için iki taraftan da yapsak yine aynı sonuç çıkar.

$$13 \cdot 4 + 20 = 72$$

$$13 \cdot 6 - 6 = 72$$

yine aynı sonuç.

Mülakatçı: Güzel. 72 ne yani?

Cengiz: Doğum günü için kaç misafir geldiğini.

Mülakatçı: peki bu soruyu nasıl yapacağını nasıl düşündün?

Cengiz: Hocam masa sayısını bilmediğimden x dedim. Bir masaya 4 er kişi oturuyorsa $4x$ dedim. 20 kişi ayakta kalacağı için onlar fazlalıktır. $+20$ eğer masalara 6 şar kişi oturursa $6x$. Bir masa boş kalır onu da çıkarmamız gerekir. Bir masaya da 6 kişi oturduğu için -6 .

Sıralara 4'er kişi oturduğunda 20 kişi ayakta kalır. 6'şar kişi oturduğunda 1 masa boş kalır. göre denklemin

4x + 20 = 6x - 6

26 = 2x

13 = x

13. 4 + 20 = 72

13. 6 - 6 = 72

a) Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemin yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

Şekil 4.13. Cengiz'in üçüncü probleme ait çözümü

Cengiz'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı ii) misafir sayısı iii) denklem, sayılar bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Masa sayısı” ve “kişi sayısı” matematiksel kabul edilir bir özellik değildir. Fakat gerçek yaşam bileşenidir. Cengiz, problemin çözümü için masa sayısı bileşenine x değişkenini eşleştirmiştir. Sonrasında problemde verilen sözel ifadelerin karşılığı olacak cebirsel ifadeleri yazmıştır. Yazdığı her bir cebirsel ifade doğrudur. Bu açıdan her bir cebirsel ifade gerçek dünyadan sayılara yapılan bir dönüşümdür ve matematiksel özellik olarak kabul edilebilir. İlk olarak gerçek dünya bileşenini matematiksel olarak ifade ederek çözüm yaptıktan sonra tekrar gerçek hayata dönerek masa sayısına x değişkenine atadığı için çözüm sonrasında $x = 13$ bulunduğunu ve bulunduğu sonucun masa sayısını ifade ettiğini belirterek modelleme özelliğinin üç safhasını da gerçeklemiştir. Bu anlamda kabul edilebilir bir özellik kullanmış olmaktadır.

➤ Cengiz ilk olarak problemde ki durumlara karşılık gelebilecek cebirsel ifadeleri yazarak başlamıştır. Her iki durum için de doğru cebirsel ifadeler yazmıştır. Sonrasında yazdığı cebirsel ifadeleri birbirine eşitlemiş ve eşitlemesinin sebebini “Hocam zaten 4'er kişi otursa 20 kişi ayakta kalır. Eğer masalara 6'şar kişi otursa 1 masa boş kalır.”

Hocam ikisinin de sonuçları birbirine eşitse...” olarak açıklamıştır. Probleme yönelik kurduğu denklemin çözümü yaptıktan sonra bulduğu cevabın masa sayısı olduğunun farkındadır ve işlemine misafir sayısını bulmak için devam etmiştir. Cengiz, yaptığı işlemlerin açıklamalarını yaparak kavramsal açıdan sıkıntısız bir düşünme süreci geçirmiştir. Bu yönüyle düşünüldüğünde akıl yürütme serisinin CR'nin özelliklerini gösterdiği söylenebilir.

➤ Cengiz denklem kurarken ve değişkenlere anlam yüklerken zorlanmamıştır. Bunun sebebi önceki deneyimlerinden sözel ifadelere karşılık cebirsel ifade yazma kazanımını anlamlandırıdığı için olabilir. Ayrıca etkili tartışmalar yapabilmesi ve konuyu anlamlandırmış olması da etkili bir faktördür. Genel olarak düşünüldüğünde Cengiz'in ne yaptığının farkında kendinden emin bir şekilde işlemlerini sürdürdüğü ve etkili tartışmalar ve açıklamalar yaparak süreci yönettiği dikkat çekmektedir. Doğru cevabı elde eden Cengiz'in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü sergilediğinden ve derin bir düşünce tarzına sahip olduğundan CR_{gd} olarak belirlenmiştir.

- Cengiz'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: Hocam bu soruda biraz zorlanmıştım.

Mülakatçı: Neden zorlandın acaba?

Cengiz: Hocam soru bana biraz uzun geldi.

Mülakatçı: Ha soru uzun geldi. Sonradan ama yaptın. Nasıl düşündün?

Cengiz: Hocam 1 DVD (soruyu okudu) üyelik ücreti de dâhil olduğu için $15 + x$ (kaç DVD olduğunu bilmiyoruz ona x dedim) üye olduğu içinde üye olanın 1 DVD kiralama ücreti 2,

$$15 + x \cdot 2 = 2x + 15$$

$$2x + 15 = 65$$

$$2x = 50$$

$$x = 25.$$

Mülakatçı: 25 ne oradaki?

Cengiz: Hocam DVD sayısı. Hocam Turgay üye olmasaydı.

Mülakatçı: Ne farkı var üye olmasıyla olmamasının?

Cengiz: Üye olmasaydı DVD kiralama ücreti 3 olacaktı. Ben başta bilmediğim için x demiştim. Ama şimdi bildiğim için $3 \cdot x = 3 \cdot 25 = 75$. Hocam o da 75

Mülakatçı: Güzel. Neyi bulduk biz?

Cengiz: Hocam 75 eğer Turgay üye olmasaydı ama aynı sayıda DVD kiralsaydı kaç lira harcardı?

b Şıkkı:

Cengiz: ...(Soruyu okudu) Hocam üye olma ücreti 15 TL. Kaç DVD

kiraladığını bilmiyoruz. $x.2$ dedim.
 $2x + 15$. Üye olmayan biride $3.x$ olur.
 Hocam bunlar birbirine eşittir.

Mülakatçı: Neden eşittir?

Cengiz: Hocam yıllık üyelik ücreti 15 imiş. DVD yi kaç kiraladığını bilmediğimiz için $2x + 15$ bu da üye olmadığı için $3x$. Avantajlı olabilmesi için ikiside eşit olacak.

$$2x + 15 = 3x$$

$$x = 15.$$

Hocam 15 DVD kiralaması gerekir.

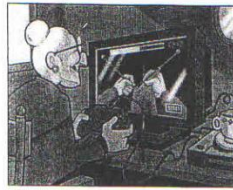
Mülakatçı: Doğru mu yaptık acaba? Nasıl emin olabiliriz?

Cengiz: Hocam,

$$15 + x.2 = 15 + 15.2 = 45$$

$$3.15 = 45.$$

Birbirine eşit oldu. Demek ki 15 tane kiralaması gerekir.



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

75 TL harcıyacaktı.

a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcıyacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

15 TL üyelik ücreti
 DVD kiralama ücreti 2 TL
 ise $2x + 15 = 65$
 $2x = 50$
 $x = 25$

b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

$15 + x.2 = 3x$
 $15 = x$
 $x.3 = 3x$

$x.3 = 25.3 = 75 \text{ TL}$

Eğer üye olmasaydı $3x \text{ TL}$ ödeyecekti.

Şekil 4.14. Cengiz'in dördüncü probleme ait çözümü

Cengiz'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) sorunun uzunluğu ii) üyelik ücreti, DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Cengiz, sorunun uzun olduğunu ve bu yüzden zorlandığını ifade etmiştir. Sorunun uzun olması matematiksel bir özellik değildir. "Üyelik ücreti" ve "DVD sayısı" matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Cengiz, sorunun a ve b şıklarında probleme durumuna yönelik denklem

kurarak çözüme gitmeye çalışmıştır. Her iki şıkta da kurduğu denklemler problem durumunu karşılar niteliktedir ve doğrudur. Bu yönüyle gerçek hayat durumundan matematiksel karşılık yazma ve sonrasında yine gerçek hayata dönüş yapma basamaklarını içeren modelleme özelliği sağlanmış olur. Modelleme özelliği kabul edilebilir bir özelliktir.

➤ Cengiz soruda zorlandığını ifade ederek çözüme başlamıştır. Fakat zorlanmasının sebebini sorunun uzun gelmesi olarak ifade etmiştir. Sonrasında soruyu zorlanmadan çözmüştür. Katılımcı a şıkkı için, soruda verilen durumu cebirsel olarak ifade ederek denklem kurarak çözüme gitmiştir. DVD sayısının bilinmediğini bu yüzden x diyerek ilk olarak DVD sayısını bularak sonrasında üye olmayan birinin ödeyeceği ücreti bulmuştur. Bu anlamda ne yaptığının farkında olarak yaptığı işlemleri açıklamıştır. Sorunun b şıkkı için ise yine denklem kurmayı seçmiş ve yaptığı işlemi “*Hocam üye olma ücreti 15 TL. Kaç DVD kiraladığını bilmiyoruz. $x.2$ dedim. $2x + 15$. Üye olmayan biride $3.x$ olur. Hocam bunlar birbirine eşittir.*” ifadeleriyle açıklamıştır. Cengiz eşitlersem avantajlı olur diye düşünmüştür. Fakat avantajlı olabilmesi için eşitlikten elde edeceği değerin fazlası olması gerektiği ile ilgili düşünememiştir. Yanlış sonuca ulaşmış olsa da Cengiz’in gerçek bir duruma yönelik denklem kurarak çözüm yapması sonrasında çözümü yine gerçek hayata uyarlaması etkili tartışmalar yapması düşünüldüğünde CR akıl yürütme türüne sahip olduğu söylenebilir. Kavramsal altyapısı kuvvetli olduğu söylenebilir.

➤ Cengiz’in zorlandığı nokta, sorunun uzun olduğunu düşünmesidir. Bu düşüncesinin sebebi karşılaştığı soru tarzları olabilir. Cengiz başarılı bir çözüm süreci geçirmiştir. Cengiz, b şıkkında soyut düşünerek denklem kurmayı düşünmesi açısından farklı bir çözüm yolu seçmiştir. Sonucu yanlış bulmasının sebebi, dikkatsiz davranması olabilir. Cengiz’in kendinden emin tavrı ve etkili tartışmalar yaparak derinlemesine bir düşünce yapısı sergilediği dikkat çekmektedir. Cengiz, yaptığı işlemleri neden yaptığının farkındadır ve gerekli açıklamalar yapmaktadır. Cengiz’in matematiksel akıl yürütme türü, yanlış cevap elde ettiğinden, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve derin bir düşünce yapısına sahip olduğundan CR_{yg}d olarak sınıflandırılmıştır.

-Cengiz'in beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: $73 - 13 = 60$ olur. 3 er 3 er arttığı için $\frac{60}{3} = 20$ kare buldum. Ve 4 tane kare eklemem gerekiyor. $20 + 4 = 24$ olur. 24 kare yapılabilir.

Mülakatçı: Kontrol etmen gerekirse nasıl edersin?

Cengiz: Hocam kontrol ederiz. Ama $73 - 13 = 60$ olur. 3 er 3 er arttığı için $\frac{60}{3} = 20$ kare buldum. Ve 4 tane kare eklemem gerekiyor. $20 + 4 = 24$ olur. 24 kare yapılabilir.

Mülakatçı: Başka bir şekilde yapamaz mıyız denklem kurarak?

Cengiz: Hocam kuramayacağımı düşünüyorum. Hatırlamıyorum.

Mülakatçı: Tamam. Peki, bu soruyla ilgili ne düşünüyorsun? Önceki konulara benziyor mu?

Cengiz: Örüntülere benziyor. Ama o konuları unuttum hocam.

Mülakatçı: Peki denklemle olmaz mı?

Cengiz: Hocam $3n$ olur mu acaba? ... (Denedi)

Mülakatçı: Olmuyor mu?

Cengiz: Olmadı. $3n$ olmuyor. Aralarındaki ilişkiyi bulmak için tablo yapalım hocam. 4, 7, 10, 13 eee.

Mülakatçı: Aralarındaki fark bir şey ifade ediyor mu?

Cengiz: 4 ü bulmak için $4n$ yaparım ama ikinci karede 7 olmuyor hocam. O zaman eee $3n+1$ olur mu bakayım. $3n+1$ birinci kare için 4, ikinci kare için 7, üçüncü kare için 10, dördüncü kare için 13 olur. O zaman hocam evet $3n+1$ olmalı. $3n + 1$ i 73 e eşitlersek kare sayısını buluruz.

$$3n + 1 = 73$$

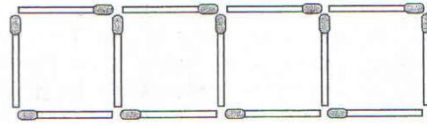
$$3n = 72$$

$$n = 24.$$

olur.

Mülakatçı: Bu tarz sorularla karşılaştın mı daha önce?

Cengiz: Az karşılaştım. O yüzden biraz zorlandım.



Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

- a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?

$$73 - 13 = 60$$

$$60 : 3 = 20$$

$$20 + 4 = 24$$

$$3n + 1 = 73$$

- b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{4}{13}$$

$$3n + 1$$

$$\frac{3n = 72}{3} \quad n = 24$$

Şekil 4.15. Cengiz'in beşinci probleme ait çözümü

Cengiz'in beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) kare sayısı ii) denklem iii) sayılar iv) örüntü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Cengiz'in belirttiği "kare sayısı" matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmamasına rağmen gerçek dünya bileşenidir. Cengiz çözüm prosedürü olarak aritmetik işlemleri takip etmiştir. Yapılan aritmetik işlemler problemin çözümü için doğru ve matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Çözümün devamında denklem kurmuştur ve kurduğu denklem problemi karşılamaktadır. Bu anlamda kabul edilebilir bir özelliktir. Katılımcının bahsettiği örüntü kavramı matematiksel olarak kabul edilebilir. Çünkü soruda bir şekil örüntüsü bulunmaktadır.

➤ Cengiz ilk olarak soruda verilen durumu anlamaya çalışmıştır. Soruda verilen şekil örüntüsünde kibrit çöpü sayısının 4 le başlayıp sonrasında 3 er 3 er arttığını fark etmiştir. Çözüm için ilk olarak verilen kareleri hiç düşünmeden işlem yapmıştır. Sonrasında soruda verilen kare sayısını bulduğu kare sayısına ekleyerek sonuca ulaşmıştır. Cengiz çözümünü "73 - 13 = 60 olur. 3 er 3 er arttığı için 60/3 = 20 kare buldum. Ve 4 tane kare eklemem gerekiyor. 20 + 4 = 24 olur. 24 kare yapılabilir." şeklinde yapmıştır. Cengiz görüşmecinin denklem kurulabilir mi? sorusuna "denklemleri kurabileceğimi düşünmüyorum. Örüntülere benziyor. Ama o konuları unuttum hocam. "diyerek yapamayacağını ve kendine güvensizliğini ifade etmiş olsa da

sonrasında önceki deneyimlerinden de faydalanarak unuttuğu bir prosedürü tekrar hatırlayarak problemle ilgili doğru bir denklem kurmuştur. Cengiz ilk olarak kare sayısı ve kibrit sayısı arasındaki ilişkiyi bulmak için tablo yapmayı denemiştir. Sonrasında ise ilişkiyi ifade etmeyi denemiştir. “4 ü bulmak için $4n$ yaparım ama ikinci karede 7 olmuyor hocam. O zaman eee $3n + 1$ olur mu bakayım. $3n+1$ birinci kare için 4, ikinci kare için 7, üçüncü kare için 10, dördüncü kare için 13 olur. O zaman hocam evet $3n + 1$ olmalı. $3n + 1$ i 73 e eşitlersek kare sayısını buluruz.” İfadeleri bu durumu desteklemektedir. Bu anlamda Cengiz’in akıl yürütme türünün CR akıl yürütme türü olduğu söylenebilir.

➤ Cengiz zorlanmadan çözüm yapmıştır. Bu durumun sebebi Cengiz’in kavramsal anlamasının kuvvetli olması ve ne yaptığının farkında olması olabilir. Cengiz prosedürü unutmuş dahi olsa kendisi bir çözüm geliştirebilmiştir. Cengiz’in ne yaptığının farkında olması etkili tartışmalar geliştirerek işlemlerini sürdürdüğü görülmektedir. Cengiz’in genel olarak derinlemesine işleyen bir düşünce yapısı bulunmaktadır. Doğru bir çözüm yapan Cengiz’in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve derin bir düşünce tarzına sahip olduğundan CR_{dgd} olarak sınıflandırılmıştır.

Cengiz’in “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.3’te gösterilmiştir.

Tablo 4.3.

Cengiz’in “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Cengiz	CR _{dgd}	CR _{dld}	CR _{dgd}	CR _{ygd}	CR _{dgd}

Tablo 4.3 incelendiğinde, Cengiz’in incelenen beş problemde de yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Cengiz dördüncü problem dışındaki problemlerin hepsine doğru cevap verirken, sadece ikinci problemde yerel bir akıl yürütme türü sergilemiş diğer problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Cengiz akıl yürütme sürecinde tüm sorularda derin bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.4. Emin'in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Emin'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin'in birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin:(soruyu okudu ve direk çözüme geçti)

$$3k + 10 = 31$$

$$3k = 31 - 10$$

$$3k = 21$$

$$k = 7$$

Mülakatçı: peki bununla ilgili bir problem nasıl kurarsın?

Emin: bununla ilgili hangi sayının bir sayının 3 katının 10 fazlası 31 dir. Bu sayı kaçtır?

Mülakatçı: güzel neden öyle bir problem kurdun?

Emin: k bilinmeyen olduğu için bir sayı deriz herhangi bir değer vermeyiz yani bir sayının 3 katının 10 fazlası 31 eder. $3k$ yı nasıl bulmuş 3 ile k yı çarpmış o şekilde bulmuş. 3 katı o yüzden dedim 10 ile de topladık mı 33.

Mülakatçı: güzel.

$3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

bir sayının 3 katının 10 fazlası 31 ise bu sayı kaçtır?

$$3k + 10 = 31$$

$$3k = 31 - 10$$

$$3k = 21$$

$$k = 7$$

Şekil 4.16. Emin'in birinci probleme ait çözümü

Emin'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) aritmetik işlemler ii) bilinmeyen iii) denklem iv) problem durumu bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Emin çözüm yaparken eşitliğin sol tarafındaki değerleri işaret değişikliği yaparak eşitliğin sağ tarafına geçirmiştir. Sonrasında $3k = 21$ denkleminde 21 i 3 bölüp sonuca ulaşmıştır. Bu çözüm yöntemi ile ilgili matematiksel özelliklere değinmemiştir.

Bu yöntem matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Emin k 'nın bilinmeyen olduğunu söylemiştir. Bu matematiksel bir özelliktir k “değişken” veya “bilinmeyen” adını alır. “ $3k$ ”nın çarpılmış olduğunu bu sebeple 3 katı demek gerektiğini ve +10 toplamak demek olduğunu ve toplamak gerektiğini söylemiştir. Bu özellikler matematiksel olarak kabul edilebilir özelliklerdir.

➤ Emin sayılarla ilgili bir problem kurmuştur. Problemi kurarken ve denklemi çözerken kendinden emin bir şekilde çözüm yapmıştır. Yaptığı işlemlerin açıklamalarını yapmıştır. “ k ” bilinmeyen olduğu için bir sayı deriz “ ifadesi bu denkleme ait farklı bir problem düşünemediğini, sınırlı bir akıl yürütmeye sahip olduğunu göstermiştir. Bu yönüyle AR nin özelliklerini taşımaktadır.

➤ Emin'in kurduğu problem doğru ve denklemi karşılayan bir problemidir. Neden böyle bir problem kurdun sorusuna “bilinmeyen olduğu için bir sayı deriz” demiştir. Bu durum problemin sayılar üzerinden olacağı kanaatinde olduğunu göstermektedir. Fakat Emin zorlanmadan çözüm yapmıştır. Bu durumun sebebi sınıfta çözdükleri problemlere benzer olması ve konu ile ilgili belli bir bilgi birikimine sahip olması olabilir. Doğru bir problem kuran Emin'in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yer yer yüzeysel ve yer yer derin bir düşünme tarzı olduğundan AR_{dgx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Emin'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin'in ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin:(soruyu okudu): eee burada $\frac{1}{7}$ ile çarpmış çarpmamız gerekmiyordu -1 i direk atacaktık. Onun için bu işlem yanlış. Yanlış yapılmış. 2. Adımda da -1 çıkarmış. Buda yanlıştır. $x - 1 + 1 = 1 + 1$ e böyle bir işlem de yok ben bunun hepsine yanlış dedim çünkü eee $7x - 1 = 7$ ye demiş. -1 i 7 nin oraya atacaktık eee 8 olurdu. $7x = 8$ e her iki tarafı da 7 ye bölecektik. $x = \frac{8}{7}$.

Mülakatçı: yani orda $\frac{1}{7}$ ile çarpması mı yanlış.

Emin: evet.

Mülakatçı: tamam peki bu soru sence zor muydu kolay mıydı ne düşündün soruyu görünce

Emin: kolaydı bence

Mülakatçı: niye kolaydı.

Emin: basta emin değildim de yani tüm adımların yanlış olduğuna ama sonra işlemin baktım dikkatli bakınca öyle düşündüm.

Mülakatçı: peki siz bu tarz sorular çözdünüz mü derste?

Emin: eee hatırlamıyorum

Mülakatçı: tamam.

Emin: daha önce testlerde çözmüştüm ama

Mülakatçı: önceki çözdüklerinle bağlantı kurdun mu?

Emin: evet.

b. şıkkı:

Emin:

$$7x - 1 = 7$$

$$7x = 7 + 1$$

$$7x = 8$$

$$x = \frac{8}{7}$$

Mülakatçı: tamam güzel peki doğru yapıp yapmadığımızı nasıl anladın?

Emin: Doğru yaptık

Mülakatçı: nereden anladın?

Emin: eee $\frac{7x}{7} = \frac{8}{7}$ ye eşitse $\frac{8}{7}$ yi buraya (x) koyduk mu $\frac{8}{7} - 1 = 7$ demiş. Bunu genişleteceğiz çıkartmak için

Mülakatçı: yani soruda mı yerine koydun onu?

Emin: yani yok soruda koymadım da

Mülakatçı: ne yaptın

Emin: Doğru olup olmadığını onun hakkında düşünmedim ama emindim.

Mülakatçı: tamam o zaman şimdi kontrol edelim doğru mu değil mi diye?

Emin: o zaman $\frac{7}{7}$ olur birşeyler yazdı... $\frac{1}{7}$ yanlış çıktı.

Mülakatçı: ne oldu ne düşünüyorsun

Emin: yanlış çıktı.

Mülakatçı: neden acaba

Emin: eee

Mülakatçı: şimdi sen doğruluğunu kontrol etmek için ne yapman lazım

Emin: x i bulmam lazım

Mülakatçı: x i buldun evet. Ama x i doğru mu buldun yanlış mı buldun diye sordum ben sana

Emin: yanlış o zaman

Mülakatçı: yani

Emin: Doğru çıkması lazımdı

Mülakatçı: evet doğru çıkması lazımdı acaba denklemde mi yerine yazdın şurada ne yaptın bende anlamadım orayı?

Emin: $\frac{8}{7}$ idi eee

Mülakatçı: x in yerine $\frac{8}{7}$ mi yazdın?

Emin: evet

Mülakatçı: nerde yazdın?

Emin: eee

Mülakatçı: yani su denklemde mi yazman gerektiğini düşündün

Emin: hıhı

Mülakatçı: tamam tekrar yazalım o zaman. Belki işlem hatası yapmışsındır.

Emin: $7x - 1 = 7$

Mülakatçı: evet bu işlemi yaptın şimdi sana bu işlemin doğru mu yanlış mı olduğunu soruyorum sana ben

Emin: bastan çözeyim o zaman $7x = 8$ e her iki taraf 7 ye bölünecek o zaman $x = \frac{8}{7}$ imiş o zaman yani x in yerine koyduk mu? Haa 7 ile çarpmayı unutmuşum ben.

Mülakatçı: evet yapalım o zaman

Emin: 7 ile çarptık mı 7 kere 7 49 ya da söyle 7 kere 7 49 8 ekledik mi 57 yok

Mülakatçı: çarpma işlemini nasıl yapıyoruz

Emin: $\frac{49}{7}$ olur. Altında gizli 1 vardı

Mülakatçı: evet

Emin: 7 ile çarptık mı?

Mülakatçı: 7 ile neyi çarpıyorsun

Emin: $\frac{7}{1}$ i genişleteceğiz paydayı birbirlerine eşit olması için paydayı 7 ye genişleteceğiz.

Mülakatçı: ama biz şuan çarpma işlemi yapıyoruz toplama işlemi değil

Emin: ha çarpacağız 7 ile 8 çarptık mı $\frac{56}{7}$

Mülakatçı: evet

Emin: $\frac{56}{7}$ ee -1 demiş $\frac{56}{7} - 1 = \frac{7}{7}$ olur 56 dan 7 çıktı mı $\frac{49}{7}$ oda 7 olur. Evet.

Mülakatçı: ne oldu şimdi neyi bulduk

Emin: sonucu. Baktık ki yani doğru yapmışıyız. $\frac{49}{7} = 7$ Çünkü 7 ye böldük mü $\frac{7}{1}$ olur.

Mülakatçı: tamam devam edelim.

7x - 1 = 7 denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

1. Adım	$7x - 1 = 7$
2. Adım	$\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7$
3. Adım	$x - 1 = 1$
4. Adım	$x - 1 + 1 = 1 + 1$
	$x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

hepsi yanlış. -1 7nin yanına gönderince 7nin yanına 8 olucaktı her iki tarafıda 7ye bölüştü. O ise bu işlemi kullanmamış

b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

$7x - 1 = 7$
 $7x = 8$
 $\frac{7x}{7} = \frac{8}{7}$
 $x = \frac{8}{7}$

$\frac{56}{7} - \frac{7}{7} = \frac{49}{7}$
 $\frac{8}{7} - 1 = 1$
 $\frac{8}{7} - \frac{7}{7} = 1$
 $\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$
 $\frac{56}{7}$

Şekil 4.17. Emin'in ikinci probleme ait çözümü

Emin'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem, sayılar ii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Emin soruda verilen denklem çözümünün yanlış olduğunu düşünmüştür. Çözüm olarak “eşitliğin sol tarafındaki sayıların eşitliğin sağ tarafında geçirilmesi” ni temel alan çözüm yöntemi kullanılmıştır. Fakat bu yöntem ve matematiksel olarak kabul edilebilir bir yöntem değildir. Çözümün doğru olup olmadığını bulmak için bulduğu $x = \frac{8}{7}$ değerini denklemde yerine yazmayı denemiştir. Yaptığı işlem sağlama işlemi olup cevabın doğru olup olmadığını anlamak için matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir.

➤ Emin soruda verilen denklem çözümünün hatalı olduğunu düşünmüştür fakat kendi çözüm yöntemine uygun olmadığı için böyle bir düşünceye sahiptir. Emin'in “-1 i 7'nin oraya atacaktı” ifadesi de bu durumu destekler niteliktedir. Sonrasında doğrulama işlemi yaparken anlamsız işlemler yaparak yanlış cevaba ulaşmıştır görüşmecinin de yönlendirmesiyle çözümünü tamamlayıp çözüm de yaptığı dikkatsizlik hatalarını fark etmiştir. Toplama ve çıkarma işlemini karıştırması, karamsar altyapısının eksik olduğunu düşündürmektedir. Bu anlamda sadece hatırladığı algoritmaları uygulayarak bir çözüm prosedürü devam ettirdiği için Emin'in akıl yürütme türü AR akıl yürütme türü olarak sınıflandırılabilir.

➤ Emin problem çözümünün hatalı olmasının sebebini doğru açıklayamamıştır. Bu anlamda kavramsal olarak sınırlı bilgi birikimine sahip olduğu söylenebilir. Genel olarak yaptığı işlemlerin açıklamalarını yapamamıştır. Etkili tartışmalar yapmadan yüzeysel bir bakış açısı sergilemiştir. Emin'in matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru cevaba ulaştığından, tek tip akıl yürütme türü sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce yapısı sergilediğinden AR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Emin'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin'in üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin:(soruyu okudu).

Mülakatçı: nasıl yaparsın ne düşündün soruyu okuduğunda?

Emin: ben masalara x dedim çünkü masalar bilinmiyor masa sayısını

vermemiş zaten verseydi direk bulurduk cevabı. Masalara 4 er kişi oturduğunda hani o zaman $4x$ olur $4x + 20$ olur 20 kişi ayakta kalıyor demiş. Eee maslara 6 sar kişi oturursa 1 masa boş kalıyor. Buda $6x - 6$ ya.

Mülakatçı: neden -6 yaptın orayı?

$$26 = 2x$$

Emin: çünkü 1 masada 6 kişi oturuyordu 1 masa boş kaldığı için -6 oluyor.

$$x = 13$$

Mülakatçı: peki bize neyi soruyordu.

Emin: misafir sayısını

Mülakatçı: sen neyi buldun?

-6 yı 20 ye götürdük mü 14 x i de karşıya attık mı 2x olur. Yok, işlem hatası yaptım. eee

Emin: x i buldum. Masayı buldum yani. 13 tane masa varmış 13 ile 4 ü çarpıp 52 topladık mı 20 ile 72 olur.

Mülakatçı: -6 yı diğer tarafa götürdün

Mülakatçı: güzel devam edelim.

Emin: evet 6 olarak gider 26,



kalır.

Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4' er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemini yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

$$4x + 20 = 6 + (-6)$$

$$26 = 2x$$

$$x = 13$$

$$52 + 20 = 72$$

Şekil 4.18. Emin'in üçüncü probleme ait çözümü

Emin'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı ii) bilinmeyen bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ "Masa sayısı" matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmasa da gerçek yaşam bileşenidir. Emin problem durumunda geçen masa sayısı ifadesini x değişkeniyle

eşitleyerek çözüme gitmeye çalışmıştır. Bu dönüşüm gerçek dünyadan sayılara yapılan bir dönüşümdür ve kabul edilebilirdir. Emin'in problemde yer alan her iki durum içinde bu durumlara karşılık gelen yazdığı cebirsel ifadeler doğrudur. İlk olarak gerçek dünya bileşenini matematiksel olarak ifade ederek çözüm yaptıktan sonra tekrar gerçek hayata dönerek çözüm sonrasında $x=13$ bulunduğunu ve bulunduğu sonucun masa sayısını ifade ettiğini belirterek modelleme özelliğinin 3 safhasını da gerçeklemiştir. Bu anlamda kabul edilebilir bir özelliktir.

➤ Emin ilk olarak problemde ki durumlara karşılık gelebilecek cebirsel ifadeleri yazarak başlamıştır. Her iki durum için de doğru cebirsel ifadeler yazmıştır. Emin yazdığı cebirsel ifadeleri eşitleyerek denklem çözümünü yaparak masa sayısını 13 olarak bulmuştur. Emin'in ne yaptığının farkında olduğu ve denklem çözümü neticesinde asıl istenen veriye yani misafir sayısına ulaşamayacağını farkında olduğu görülmektedir. Nitekim işlemlerine devam ederek, misafir sayısını birinci cebirsel ifadede yerine yazarak çözüm yapmıştır. Bu anlamda soruyu anladığını ve ne yapacağını farkında olduğunu söylemek mümkündür. Emin'in belirli bir algoritma takip etmesi açısından AR'nin özelliklerini gösteren bir akıl yürütme yapısı vardır.

➤ Emin, değişkenlere anlam yüklemekte ve denklem kurmada zorlanmamıştır. Bunun sebebi önceki deneyimlerinden sözel ifadelere karşılık cebirsel ifade yazma kazanımını anlamlandığı için olabilir. Genel olarak çok fazla açıklama yapmadan belirli işlemler bütününi takip ederek bir akıl yürütme süreci yönettiği söylenebilir. Yer yer açıklamalar yapsa da genel olarak yüzeysel bir bakış açısı hâkimdir. Doğru bir sonuca ulaşan Emin'in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce tarzına sahip olduğundan AR_{dl} olarak sınıflandırılmıştır.

-Emin'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin'in dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin:(soruyu okudu).eee 65 açılış ücretini çıkaracağız 50 yi de 2 ye böleceğiz çünkü üye olduğu için 2 TL veriyormuş 2 ye böldük mü kaç tane kiraladığını bulacağız 25 tane kiralamış. 25 le de 3 ü çarpacağız

çünkü üye olmayanların 1 DVD kiralama ücreti 3 müş. Çarptık mı 75 TL eder.

Mülakatçı: güzel şimdi biz neyi bulduk

Emin: kaç TL harcadığını 75 TL

b. şıkkı:

Emin: (soruyu okudu).

Mülakatçı: ne demek istiyor?

Emin: üye olan birinin üye olmayan birine göre bir kişi olmuş bir kişi üye olmamış olan birinin daha avantajlı olabilmesi için kaç tane DVD kiralaması gerekir.

Mülakatçı: evet nasıl yaparsın

Emin: ben bunu açılış ücreti 15 TL demiş

Mülakatçı: üyelik ücreti

Emin: evet üyelik ücreti. $15 + 2 = 17$
 $17 + \text{eee}$ yani kaç tane alacağını bilmiyoruz en az $17 + x$ eee

Mülakatçı: çözümüne bakmak istersen vereyim

Emin: $15 + 2x$ olacakmış haaa acılı ücreti 15 TL idi yani biz kaç tane DVD alacağını bilmediğimiz için $15 + 2x$ olacak $15 + 2x$ olduğu için eee yani bu eşittir olmayan için de $3x$ olur bu da.

$$15 + 2x = 3x$$

Mülakatçı: güzel.

Emin: eşittir. $2x$ i karşıya gönderdik mi $x = 15$ olur.

Mülakatçı: neyi bulduk şimdi biz

Emin: x i bulduk 15

Mülakatçı: x ne yani?

Emin: x yani sayıyı bulduk. En az kaç sayı olacağını?

Mülakatçı: peki 15. Eee doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın

Emin: 15 i yerine koysak. $15.2 = 30$ 15 le toplarsa 45 eee $15.3 = 45$ olur. $45 = 45$ oldu.

Mülakatçı: eee yani kara geçmiş oldu mu?

Emin: hayır

Mülakatçı: bize diyor ki avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD alması gerekir.

Emin: 15,30,45

Mülakatçı: yani 15 tane alırlarsa ikisi de eşit oluyor

Emin: o zaman 15 daha ekledik mi 45 e

Mülakatçı: niye 15 ekliyoruz

Emin: bundan sonrası eşit olmuş

Mülakatçı: eşit mi olur değişir mi yoksa

Emin: 45 e 15 ekledik mi 60 buraya da 15 ekledik mi 60 olur. yoo, buraya 3 TL ekleyeceğiz. Buraya 15 buraya 3 ekledik mi?

Mülakatçı: yani 15 tane aldıklarında eşitler değil mi?

Emin: evet. 16 tane aldıklarında eşit olmaz.

Mülakatçı: o zaman en az kaç tane aldıklarında avantajlı olur.

Emin: 16tane.



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcayacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

$$65 - 15 = 50 \div 2 = 25$$

$$25 \cdot 3 = 75$$

- b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

$$75 - 15 = 60$$

$$60 \div 2 = 30$$

$$30 \cdot 3 = 90$$

$$90 - 15 = 75$$

$$x = 25$$

Şekil 4.19. Emin'in dördüncü probleme ait çözümü

Emin'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti, ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Emin sorunun a şıkkı için aritmetik işlemleri kullanarak çözüm yapmıştır. Yapılan işlemler problemi karşılayacak doğru işlemlerdir. Bu anlamda matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Emin, B şıkkı için ise denklem kurmayı seçmiştir. Kurduğu denklem problemi ifade eden doğru sonuca götürebilecek bir denklemdir. Gerçek hayat durumundan matematiksel karşılık yazma ve sonrasında yine gerçek hayata dönüş yapma basamaklarını içeren modelleme özelliği sağlanmış olur. Modelleme özelliği kabul edilebilir bir özelliktir.

➤ Emin'in a şıkkı ile ilgili çözümü doğrudur ve açıklamalar yaptığı için ne yaptığının farkında olduğu söylenebilir. Bu anlamda soruyu anlamada sıkıntısının olmadığını söylemek mümkündür. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini göstermektedir. Sorunun b şıkkı için ise yine denklem kurmayı seçmiştir ilk olarak biraz takılmış sonrasında işlemlerini devam ettirmiştir. Ve yaptığı işlemi “15 + 2x olacakmış haaa acılı ücreti 15 TL idi yani biz kaç tane DVD alacağımızı bilmediğimiz için 15 + 2x

olacak $15 + 2x$ olduğu için eee yani bu eşittir olmayan için de $3x$ olur bu da. $15 + 2x = 3x$ olur.” olarak ifade etmiştir. Emin eşitlenmesi avantajlı olması için yeterlidir diye düşünmüştür. Fakat avantajlı olabilmesi için eşitlikten elde edeceği değerin fazlası olması gerektiği ile ilgili düşünememiştir. Emin bulduğu sayıdan sonrasının hep eşit olacağı yanlış düşüncesine sahiptir. Görüşmecinin sorularıyla düşünerek doğru cevaba ulaşmıştır. Emin’in gerçek bir duruma yönelik denklem kurarak çözüm yapması sonrasında çözümü yine gerçek hayata uyarlaması düşünüldüğünde CR akıl yürütme türüne sahip olduğu söylenebilir. Kavramsal altyapısında eksiklikler olduğu söylenebilir. Emin ne yaptığını tam olarak anlayamadan işlemler yapmıştır.

➤ Genel olarak aritmetik işlemleri yapmada sıkıntı yaşamamıştır. Sıkıntı yaşamamasının sebebi belli bilgi birikimine sahip olması ve okuduğunu anlayabilmesi ve yorumlayabilmesi olabilir. Zaman zaman takılmasına rağmen düşündüklerini açıklayabilmiştir. Bu anlamda yer yer yüzeysel yer yer derinlikli düşünce yapısını gördüğümüzden bu anlamda sınıflama yapılamamıştır. Doğru cevaba ulaşan Emin’in matematiksel akıl yürütme türü, iki tip akıl yürütme türü sergilediğinden ve yer yer yüzeysel yer yer derin düşünme tarzı olduğundan CR_{dlx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Emin’in beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin’in beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin:(soruyu okudu). eee burada ilk basta 4 tane sonra hep 3 3 gitmiş o yüzden $4 + 3x$ olur $4 + 3x = 73$ müş. 4 ü burda attık mı $3x = 59$ yok 69 böldük mü $x = 23$ olur.

Mülakatçı: yani 23 mü cevap.

Emin: evet.

Mülakatçı: peki bastaki kareyi saymamış mı acaba?

Emin: ha 4 ü de çıkaracaktım 69 dan 4 çıktı mı 65. eee

Mülakatçı: ne oldu

Emin:1 dk. hocam bastan yapayım 73 den 4 çıktı mı 69, 69 u 3 e böldük mü 23.

Mülakatçı: yani 23 kare mi lazım.

Emin: evet

Mülakatçı: peki. Çözümün doğru olup olmadığına nasıl karar verdin.

Emin:23 ü x in yerine koydum.

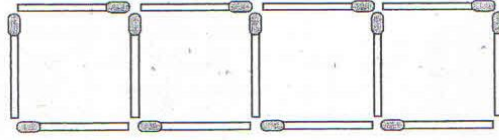
$$23.3 = 69$$

$$69 + 4 = 73$$

demekki doğru yaptım.

Mülakatçı:

tamam



Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?

$$4 + 3x = 73$$

$$3x = 69$$

$$x = 23$$

b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?

İlk başta 4 tane kullandım sonra her 3 denklemin yaptığında 4+3x olur 73 esittir. Sonuçta 23 tane kare yapmıştır.

Şekil 4.20. Emin'in beşinci probleme ait çözümü

Emin'in beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) çözüm prosedürü ii) denklem iii) sayılar bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Emin soru çözümü için denklem kurmayı seçmiştir. Fakat kurduğu denklem problemi karşılayacak bir denklem değildir. Bu açıdan matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Emin ilk olarak soruda verilen durumu anlamaya çalışmış ve sonrasında bu duruma yönelik denklem kurmak istemiştir. Soruda verilen örüntüde ilk başta 4 kibrit çöpü ve sonrasında 3'er 3'er kibrit çöpü kullanıldığını söylemiştir. Bu yüzden denklemini $4 + 3x = 73$ olarak kurmuştur. Ve denklemi çözerek 23 kare olduğunu söylemiştir. Fakat Emin bu denklemin sonucuna göre 1 kare eksik bulacağını düşünememiştir. Bu yüzden hatalı sonuca ulaşmıştır. Sonucunun doğruluğunu anlamak için sadece x değerini doğru bulup bulmadığını kontrol ettiği için hata olduğunu fark edememiştir. Hâlbuki etkili tartışmalar yaparak bu durumu düzeltebilirdi. Bu anlamda düşünüldüğünde bir problemin matematiksel karşılığını düşünebilmesi açısından ve sonucu hatalı dahi olsa düşünme yapısı olarak derin bir düşünce yapısına sahip olduğundan akıl yürütme türü CR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Emin'in zorlanmasının sebebi dikkatsizlik, soruyu kavrayamama olabilir. Emin belli birikimine sahiptir fakat çözümünü devam ettirememiştir. Emin genel olarak ne

yaptığının farkındadır. Yanlış sonuca ulaşan Emin'in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü sergilediğinden ve derin bir düşünce tarzı olduğundan CR_{ygd} olarak sınıflandırılmıştır.

Emin'in "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.4'te gösterilmiştir.

Tablo 4.4.

Emin'in "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Emin	AR _{dgx}	AR _{ogy}	AR _{dly}	CR _{dlx}	CR _{ygd}

Tablo 4.4 incelendiğinde, Emin'in incelenen beş problemin ilk üçünde yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türüne ve dördüncü ve beşinci problemlerde ise algoritmaya dayalı akıl yürütmeye sahip olduğu görülmektedir. Emin beşinci problem dışındaki problemlerin hepsine doğru cevap verirken, sadece üçüncü ve dördüncü problemlerde yerel akıl yürütme türü sergilemiş diğer problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Emin akıl yürütme sürecinde bazı sorularda yüzeysel bazı sorularda derin bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.5. Faruk'un Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Faruk'un birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk'un birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Faruk: hocam burada problem bir sayının k sayısı almış burada bilinmeyen 3 katının 31 fazlası 31 dir bu sayı kaçtır? Bu problemi kurdum ve çözümünü su anda eee

$$3k + 10 = 31$$

miş biz bu bilinmeyeni yalnız bırakmak için küçüğü büyüğün ayağına götürüyoruz bu +10 buraya (eşitliğin

sağ tarafı) -10 olarak geçer. eee bunun cevabı da $3k = 21$ çıkar bu çarpım durumundadır bunu bölüm durumuna çevirirsek burda bu birbirini nötrler burdanda 7 çıkar.

Mülakatçı: güzel peki niye böyle bir problem kurduk?

Faruk: neden?

Mülakatçı: neden böyle bir problem kurduk acaba başka bir problem kurulabilir miydi?

Faruk: tabi

Mülakatçı: ilk aklına gelen bu muydu?

Faruk: evet ilk aklıma gelen buydu daha şey problemler kurabilirdik.

Mülakatçı: peki bu soru kolay mıydı zor muydu san göre soruyu görünce ne düşündün?

Faruk: soruyu görünce ee en basta işlediklerimiz olduğu için biraz daha diğerlerine göre basit diye düşündüm.

Mülakatçı: yani derslerde bunun gibi sorular çözdüğün için mi?

Faruk: evet.

Mülakatçı: tamam güzel diğer soruya bakalım.

3k + 10 = 31 denklemini ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Bir sayının 3 katının 10 fazlası 31'dir. Bu sayı kaçtır?

$$3k + 10 = 31$$

$$3k = 21$$

$$k = 7$$

Şekil 4.21. Faruk'un birinci probleme ait çözümü

Faruk'un birinci probleme Ait Matematiksel Akıl Yürütme Türü Analizi

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) bilinmeyen, denklem ii) aritmetik işlem iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Faruk denklemde bilinmeyen olduğunu fark etmiştir denklem bir bilinmeyenli bir denklemdir. Bu açıdan matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Faruk sayılarla ilgili bir problem kurmuştur ve kurduğu problem denklemi karşılayan bir problemidir. Faruk denklem çözümünde "bilinmeyi yalnız bırakmak için küçüğü büyüğün ayağına götürüyoruz" ifadesini kullanarak çözüm prosedürünü belirtmiştir. Bu ifadenin matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmadığı açıktır fakat genelde doğru sonuca ulaştıran bir prosedürdür. Faruk eşitliğin bir tarafından diğerine sayıları geçirirken işaret değişikliği ve işlem değişikliği yapmıştır. Bu çözüm matematiksel bir özellik değildir fakat doğru cevaba götürebilecek genel olarak kullanılan bir çözüm

yöntemidir. $3k = 21$ den sonra bölüm durumuna geçerse bunlar birbirini nötrler ifadesi matematiksel değildir.

➤ Faruk'un akıl yürütmesi, sorunun basit geldiğini daha önce derslerde bu tip sorular çözüldüğünü ifade etmesinin ve çözüm prosedürünün sınıf içinde gösterilen çözüm yöntemi olması açısından AR yi işaret etmektedir. Faruk daha başka problemler kurulabileceğinin farkındadır. Fakat yaptığı işlemlerin anlamı ve açıklamaları ile ilgili yüzeysel bilgilere sahiptir.

➤ Faruk doğru ve denklemi karşılayacak nitelikte bir problem kurmuştur. Faruk öğrenme deneyimlerinden hareketle düşünmeksizin işlemleri uygulamayı tercih etmiştir. Genel olarak sadece işlem prosedürü odaklı bir çözüm yapmıştır fakat anlamlandırabilme açısından zayıflıklar vardır. Doğru bir problem kuran Faruk'un matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğundan AR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Faruk'un ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk'un ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Faruk: (soruyu okudu) ilk önce 1. adıma bakalım $7x - 1 = 7$ eee burda $\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} 7$ hocam burada yanlış yapmış 1. adımda yanlış yapmış.

Mülakatçı: neden

Faruk: çünkü 7 yi nötrleyecekti eee -1 bir saniye $\frac{1}{7}$ yerine 7 yi nötrleyecekti. Evet, ben öyle düşünüyorum mesela surda

Mülakatçı: yazabilirsin

Faruk: mesela ben bu soruyu yanlış yaptığımı düşünüyorum

Mülakatçı: neden

Faruk: o zaman biraz heyecanlıydım

Mülakatçı: tekrar yazabilirsin sıkıntı yok

Faruk: $7x - 1 = 7$ hocam bu -1 i eee bilinmeyi yalnız bırakmak için buraya (eşitliğin sağ tarafı) götürüyoruz. Buraya +1 olarak geçer o zaman $7x = 8$ olur. Hocam bu çarpım durumundadır bunu nötrleyeceğiz bu 7 ler birbirini götürür bu da birbirine nötrlenmez eee $\frac{8}{7}$ olduğunu düşünüyorum.

Mülakatçı: güzel peki burada çözümdeki hata neyden kaynaklandı?

Faruk: burada bilinmeyi yalnız bırakmamış yani

Mülakatçı: ne yapmış

Faruk: eee ya su 7 nerden gelmiş hocam ya ben onu düşünüyorum hocam ya $\frac{1}{7}$ nin orda olmaması gerek diye düşünüyorum onun yerine -1 yan tarafa

atacaktı ondan sonra da 7 yi nötrleyecekti diye düşünüyorum.

Mülakatçı: peki senin çözdiğün yöntemin dışında farklı şekilde de çözülebilir mi bu soru başka bir yöntemle?

Faruk: bence hayır.

Mülakatçı: tamam. Peki, sen sonucu doğru bulduğuna nasıl emin oldun?

Faruk: eee

Mülakatçı: hani $\frac{8}{7}$ dedin ya doğru mu bulduk yani nasıl anladın

Faruk: hocam bunda hiçbir fikrim yok yani soruyu yapıp gidiyoruz. Gerçekten o kadarını hiç düşünmüyorum.

Mülakatçı: tamam devam edelim.

7x - 1 = 7 denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

1. Adım	$7x - 1 = 7$
2. Adım	$\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7$
3. Adım	$x - 1 = 1$
4. Adım	$x - 1 + 1 = 1 + 1$
	$x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

Hatalı çıkar. Çünkü birinci basamakta hata yapılmış.

b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

$7x - 1 = 7$

$x = 1$

$7x = 8$

$x = \frac{8}{7}$

Şekil 4.22. Faruk'un ikinci probleme ait çözümü

Faruk'un ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem, sayılar, bilinmeyen ii) çözüm prosedürü iii) nötrlemek bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Faruk soruda denklem çözümünde hata yapıldığını fark etmiştir. Fakat yaptığı açıklamalar matematiksel özellik taşımamaktadır. "1/7 yerine 7 yi nötrleyecekti" ifadesi denklem çözümü ile ilgisiz ve matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Faruk

denklem çözümü için, kendi çözüm yöntemi üzerinden açıklama yapmıştır “-1 i bilinmeyeniyi yalnız bırakmak için buraya (sağa) götürüyoruz.” şeklinde yöntemini açıklamıştır. Bu özellik matematiksel olarak kabul edilebilir özellik değildir fakat genellikle pratik bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Faruk’un bahsettiği x in bilinmeyen olduğu ifadesi matematiksel olarak kabul edilebilirdir.

➤ Faruk soruda denklem çözümünde bir hata olduğunun farkındadır fakat kendi çözüm yönteminden farklı olduğu için hata olduğunu düşünmektedir. Çözümdeki $\frac{1}{7}$ nin olmaması gerektiğini “ya şu $\frac{1}{7}$ ’nerden gelmiş ben onu düşünüyorum” ifadesiyle açıklamıştır. Yapılması gerekenin -1 i karşıya +1 olarak atmak olduğunu söylemektedir. Faruk denklemin başka bir yöntemle çözülemeyeceğini söyleyerek sınırlı bilgi birikime sahip olduğunu göstermiştir. Faruk’un doğru yapıp yapmadığı ile ilgili ve ne yapacağı ile ilgili fikri yoktur. Bu durumu “bunda hiç bir fikrim yok soruyu yapıp gidiyoruz” ifadeleri desteklemiştir. Bu anlamda Faruk’un yüzeysel bir düşünme tarzına sahip olduğu anlaşılmaktadır. Faruk sadece hatırladığı veya öğrenme ortamında gördüğü aritmetik işlemlere bağlı kalarak ezbere bir akıl yürütme sergilediği için MR akıl yürütme türünün özelliklerini göstermektedir.

➤ Faruk’un zorlanmasının sebebi kafasında belli bir şema olması ve onun dışına çıkmakta zorlanmasıdır. Bu durumun sebebi kavramsal anlamasının zayıf olması olabilir. Genel olarak, yaptığı işlemlerin farkında olmadan kavramsal altyapıdan yoksun sadece yüzeysel bilgilerle yetinen bir akıl yürütmeye sahiptir. Derinlikli olmayan bir düşünce yapısına sahiptir. Sadece test mantığına yatkın olarak öğrenmeye yatkın olması bu durum için sebep gösterilebilir. Faruk’un matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru cevap verdiği için, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce tarzı olduğundan MR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Faruk’un üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk’un üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Faruk: (soruyu okudu). Şimdi ben burada 4 erli olarak 6 şarlı olarak oturursa diye yazdım. $4x$ artı 20 kişi

ayakta kalıyor ya +20 kişi var burada bilinmeyen masa sayısı x

Mülakatçı: neden masa sayısına x dedin?

Faruk: ya masalara 4'er kişi oturduğu için. Hani burada diyor ya her misafirin masalara 4'er kişi oturursa diye düşündüm

Mülakatçı: tamam

Faruk: hocam 6 sar kişi oturursa 1 masa boş kalıyor 6 sar kişi oturursa $6x$ bir masa da 6 kişi oturduğünü düşünürsek bir masada boş kalıyor o zaman $-6, 6x - 6$

Mülakatçı: niye- 1 demedik

Faruk: çünkü 1 masada 6 kişi oturuyor. Bir masa boş kalıyor diyor ya 6 sar kişi oturursa 1 masa boş kalıyor o zaman 6 şar kişi bir masada oturursa 1 masa boş kalır.

Mülakatçı: tamam.

Faruk: sonrada

$$4x + 20 = 6x - 6$$

Bunu eee büyüğü küçüğün ayağına götürdüm burada(eşitliğin sol tarafı) 26 kaldı burada(sağ taraf) $2x$ kaldı. $26 =$

$2x$ burda çarpım durumunu bölüm durumuna cevirdim. $x = 13$ buldum. X de masa sayısı. 4'er kişi oturuyorsa mesela 13 le 4 ü çarparız daha sonrada 20 ile toplarız doğum günü için kaç misafirin olduğunu buluruz.

Mülakatçı: güzel peki şurada niye 2 denklemi birbirine eşitledik.

Faruk: çünkü eee bu sorumuzda diyor ki eğer misafirlerimiz masalarda 4'er kişi oturursa 20 kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır 6 sar kişi oturursa bir masa boş kalır eee burada demek istediği o doğum günü eee kafenin ee dolu olup olmadı yani misafir sayısı yine aynı kalıyor.

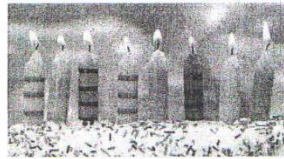
Mülakatçı: güzel peki bu soruyu okuyunca ne düşündün? Kolay mı zor mu?

Faruk: bu soruda bayağı takıldım

Mülakatçı: neden takıldın acaba?

Faruk: sizin dediğiniz gibi bir masaya önce - 1 dedim sonra 6 sar kişi otursa diye - 6 dedim o biraz zorladı.

Mülakatçı: hımm. Tamam



kalır.

Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4'er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'sar kişi oturursa 1 masa boş

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

$$\begin{array}{l}
 4x + 20 = 6x - 6 \\
 +26 = +26 \\
 2x = 26 \\
 x = 13
 \end{array}$$

Şekil 4.23. Faruk'un üçüncü probleme ait çözümü

Faruk'un üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı ii) bilinmeyen iii) sayılar, denklem bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Masa sayısı” matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmasa da gerçek yaşam bileşenidir. Faruk problem durumunda geçen masa sayısı ifadesini x değişkeniyle eşitleyerek çözüme gitmeye çalışmıştır. Bu dönüşüm gerçek dünyadan sayılara yapılan bir dönüşümdür ve matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Faruk'un problemde yer alan her iki durum içinde bu durumlara karşılık gelen cebirsel ifadeleri doğrudur. İlk olarak gerçek dünya bileşenini matematiksel olarak ifade ederek çözüm yaptıktan sonra tekrar gerçek hayata dönerek masa sayısına x değişkenini atadığı için çözüm sonrasında $x = 13$ bulunduğunu ve bulduğu sonucun masa sayısını ifade ettiğini belirterek modelleme özelliğinin üç safhasını da gerçeklemiştir. Bu anlamda kabul edilebilir bir özelliktir.

➤ Faruk ilk olarak problemde durumlara karşılık gelebilecek cebirsel ifadeleri yazarak başlamıştır. Her iki durum için de doğru cebirsel ifadeler yazmıştır. Sonrasında yazdığı cebirsel ifadeleri birbirine eşitlemiş ve eşitlemesinin sebebini “*çünkü ee bu sorumuzda diyor ki eğer misafirlerimiz masalarda 4 er kişi oturursa 20 kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır 6 sar kişi oturursa bir masa boş kalır. ee burada demek istediği o doğum günü ee kafenin ee dolu olup olmadığı yani misafir sayısı yine aynı kalıyor*” olarak açıklamıştır. Faruk probleme yönelik kurduğu denklemin çözümünü yaptıktan sonra bulduğu cevabın masa sayısı olduğunun farkındadır ve işlemine misafir sayısını bulmak için devam etmiştir. Faruk soruda zorlandığını ifade etmiştir ve zorlandığı noktanın ikinci durum olan eğer masada 4 er kişi oturursa 1 masa boş kalıyor sözel ifadesinin cebirsel karşılığını yazma olduğunu *sizin dediğiniz gibi bir masaya önce – 1 dedim sonra 6 sar kişi otursa diye – 6 dedim o biraz zorladı.*” sözleriyle belirtmiştir. Bu açıdan bakıldığında bilinen bir algoritmayla çözümüne başladığı (AR) fakat takıldığı noktalar olmasına rağmen başarılı bir şekilde o noktaları geçerek doğru bir sonuca ulaşmayı başardığı görülmektedir. Bu açıdan düşünüldüğünde kavramsal anlamlandırma ve etkili açıklamalar yapabilme açısından başarılı olduğu söylenebilir. Bu yönüyle düşünüldüğünde akıl yürütme türünün CR'nin özelliklerini taşıdığı söylenebilir.

➤ Faruk değişkenlere anlam yüklenmekte zorlanmamıştır ve probleme uygun denklemi başarılı bir şekilde yazmıştır. Bunun sebebi önceki deneyimlerinden sözel ifadelerle karşılık cebirsel ifade yazma kazanımını anlamlandırdığı için olabilir. Genel olarak bakıldığında belli bilgi birikimine sahip, ne yaptığının farkında ve yaptığı işlemlerin açıklamalarını yapabilecek donanıma sahiptir. Doğru sonuca ulaşan Faruk'un matematiksel akıl yürütme türü, iki tip akıl yürütme türü sergilediğinden ve derin bir düşünce yapısına sahip olduğundan CR_{dl} olarak sınıflandırılmıştır.

-Faruk'un dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk'un dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Faruk: Bu soruyu yapamamıştım (soruyu okudu). Hocam 65 TL, üye olduğumuzda 15 TL ödeyeceğiz zaten kaç DVD kiralamış olduğuna bakmak için 65 den 15 i çıkardım yıllık üyelik ücretini 50 çıktı.

Mülakatçı: Neyi bulmuş oldun yani?

Faruk: eee DVD lere verdiği para üye olanların 1 DVD kiralama ücreti 2 TL dir. O zaman 50 yi 2 ye böldüm ki kaç tane DVD aldığını bulayım. 25 çıktı cevap. Hocam 25 tane DVD almış biz üye olmayanların 1 DVD kiralama ücreti 3 TL zaten üye olmadığı için de yıllık üyelik ücreti ödemeyeceği için de 25 ile 3 çarptım 75 TL çıktı.

Mülakatçı: tamam

b. şıkkı

Faruk: (soruyu okudu) bu soruyu ben çözememişim gerçekten.

Mülakatçı: tekrar düşünebilirsin

Faruk: eee

Mülakatçı: sesli düşün

Faruk: nasıl yapsak ki bunu ya

Mülakatçı: önce istersen soruyu anlamaya çalışalım.

Faruk: diyor ki üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç tane DVD alması gerekir. İkisine de aynı sayıda DVD vereceğiz bunu da çarpacağız. Ee hocam ben nasıl yaptığımı yazayım. Mesela diyelim 25 tane aldı. Üye olanlar $25 \cdot 2 = 50$ çıkar pardon 50 çıkar $50 + 15 = 65$ çıkar. Üye olanlar. Daha sonra üye olmayanlar $25 \cdot 3 = 75$ çıkar buda üye olmayanlar. eee

Mülakatçı: Şuan hangisi avantajlı?

Faruk: üye olmayan

Mülakatçı: üye olmayan daha çok para ödüyor 25 DVD aldığında

Faruk: evet üye olan 65 TL ödüyor yani üye olanlar daha avantajlı

Mülakatçı: peki ama en az 25 tane mi alması gerekir acaba

Faruk: eee en az

Mülakatçı: yani kaç DVD aldıktan sonra kara geçmeye başlıyor üye olanlar

Faruk: üye olanlar eee hocam bu soru biraz şey ya zor. Eee 11 mi acaba

Mülakatçı: nasıl düşündün

Faruk: biraz saçmada yaa yok hocam olmaz ya

Mülakatçı: söyle bakalım nasıl düşündün

Faruk: matematiksel yoldan değilde bakkal hesabı yaptım da

Mülakatçı: tamam yap olsun

Faruk: hocam üyelik ücretini almadım. DVD kiralaması gerekmektedir diyor ya 11 tane kiralarsa 30 olur. eee oradan da 45 olur eee yok hocam ben bu soruyu yapamayacağım.

Mülakatçı: yapabilirsin. Yapmaya başladın hatta.

Faruk: eee

Mülakatçı: 15 i deneyeyim diye düşündün herhâlde

Faruk: tamam deneyelim eee üyelik ücreti 15 TL dir. Hani 75 çıktıya hocam. eee nasıl desem ki

Mülakatçı: a şıkkı ile b sikkini bağımsız düşünebilirsin.

Faruk: tamam hocam (tekrar soruyu okudu) bağımsız olduğu için yanlış çıktı soru

Mülakatçı: sen bağımlı gibi mi düşündün

Faruk: evet

Mülakatçı: şimdi bağımsız düşünelim.

Faruk: işte eee

Mülakatçı: aslında buradan sunu anlayabilir miyiz acaba üye olan biri başlangıçta o zaman avantajlı değil

Faruk: evet

Mülakatçı: çünkü başlangıçta 15 TL yi veriyor üye olan biri.

Faruk: evet. Mesela ben yıllık üyelik ücreti 15 TL yi çıkardım onu hiç saymadım. Ondan sonrada 65 TL harcadı eee. Hocam eee bağımsız olarak 65 TL ödedi ya

Mülakatçı: onu unuttum

Faruk: tamam. eee

Mülakatçı: genel bir şey konuşuyoruz. Bir dükkân var oraya üye olanlar var bir de üye olmayanlar var diyor ki acaba üye olanlar ne zaman üye olmayanlardan kara geçer

Faruk: nasıl yani.

Mülakatçı: üye olan ilk basta 15 TL veriyor zaten verdiği için ilk durumda zaten zararda.1 DVD alsa üye olmayan 3 TL ödeyecek üye olan 15+2 den 17 TL ödeyecek şuan karda değil ne zaman kaç DVD alırsa o aradaki farkı kaparmış olur kara geçmiş olur.

Faruk: eee...

Mülakatçı: mesela ben üye oldum 15 TL ödedim dükkâna sende üye değilsin ikimizde arkadaşız konuşuyoruz diyoruz ki gidelim DVD kiralayalım ben üye olduğum için 2 TL ye kiralayacağım 15 TL vermiştim 2 TL daha verdim 17 TL ye 1 DVD kiraladım. Sen kaç liraya kiraladın?

Faruk: 3 TL

Mülakatçı: şuan kim karda?

Faruk: ben

Mülakatçı: sonra ben 2 tane kiralamaya gittim. 2 tane kiralayınca 15+4=19 TL ödedim sen 2 taneye kiralayınca 6 TL ödedin. Yine sen kardasın ama önemli olan benim kara geçmem bastan niye üye oluyorum ben

çok DVD kiraladığım zaman daha çok karlı olayım diye geçiyorum değilmiş

Faruk: mesela eee

Mülakatçı: onu nasıl bulabiliriz

Faruk: 17 den eee deneyerek yapabilir miyiz?

Mülakatçı: yapabiliriz.

Faruk: eee 10 dan deneyelim. Ama yıllık üyelik ücretini de eee katacağыз değil mi?

Mülakatçı: evet.

Faruk: 10 tane kiralamış olsun $20 + 15 = 35$ çıkar. Birde üye olmayan

var $10.3 = 30$ o zaman yine üye olmayan karlı oluyor. 15 i denersek $15.2 = 30 + 15 = 45$, üye olmayan $15.3 = 45$ oluyor. O zaman en az kaç DVD kiralanır 15 tane.

Mülakatçı: 15 tane de eşit oldu.

Faruk: evet.

Mülakatçı: yani 15 tanede kara geçmiş oldu mu olmadı mı?

Faruk: olmadı daha kara geçmiş olmadı. O zaman 16 deneyebilir miyiz? $16.2 = 32 + 15 = 47$ olur. $16.3 = 48$ olur. O zaman 16 da kara geçmiş olur.

Mülakatçı: güzel devam edelim.



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye	olmayanların	bir	DVD	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
	kiralama ücreti			
	3 TL			2 TL

a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcıyacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

DVD 50 x 0.2 = 10 tane 65 - 15 = 50
 25.3 = 45 25 = 2
 65' Yukarıda yaptık, Bana göre 15 ten
 çıkardık 10 x avantajı olur, 20
 25.2 = 50 + 15 = 65 = üye
 25.3 = 45 üye olmayanlar
 10.2 = 20 + 15 = 35
 10.3 = 30
 15.2 = 30 + 15 = 45
 15.3 = 45
 16.2 = 32 + 15 = 47
 16.3 = 48

Şekil 4.24. Faruk'un dördüncü probleme ait çözümü

Faruk'un dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi:

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Faruk sorunun a şikkında zorlanmadan aritmetik işlemleri takip ederek sonuca ulaşmıştır. Faruk'un yaptığı işlemler problem durumuna uygun matematiksel açıdan kabul edilebilir işlemlerdir. b şikkında ise Faruk aklına gelen sayıları deneyerek çözüm yapmaya çalışmıştır. Belli bir sistematik deneme söz konusu değildir. “Deneme yanılma yoluyla” sonuca ulaşılabilir olması matematiksel gibi görünse de matematiksel olarak kabul edilen bir özellik değildir çünkü sınırlı durumda doğru cevaba götürür.

➤ Faruk sorunun a şikkını kolayca aritmetik işlemler takip ederek yapmıştır. Yaptığı işlemlerle ilgili açıklamaları doğrudur. Fakat sorunun b şikkı ile ilgili zorlanmıştır ve yapmak istememiştir. Görüşmecinin sorularıyla ve cesaretlendirmesiyle soruya çözüm bulmak için çabalamıştır. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini göstermektedir. Sorunun b şikkı ile ilgili aklına gelen sayıları deneyerek sonuca ulaşmak istemiştir. Alternatif çözüm yöntemlerini kullanmak aklına bile gelmemiştir. Görüşmecinin yönlendirmelerine karşılık cevaplarına bakılacak olursa sistematik bir düşünce yapısına girmeden ilk aklına gelen sayıyı deneme eğilimindedir. Faruk'un “*Mesela diyelim 25 tane aldı.*” ve “*Eee 11 mi acaba*” cümleleri bu durumu destekler niteliktedir. Faruk deneme ile çözüme ulaşmaya çalışmıştır fakat soruyu anlamamış ve önceki şıkla birlikte değerlendirmeye çalışmıştır. Görüşmecinin yönlendirmesiyle b şikkını bağımsız düşünmeye çalışmış ve sonuca ulaşmayı denemiştir. Birkaç değer denedikten sonra 15 değerinin denediğinde iki durumunda 45 olduğunu görmüştür fakat kara geçme durumunu düşünmeden direk cevabın 15 olduğunu söylemiştir. Görüşmecinin müdahalesiyle kara geçmesi için 16 DVD olması gerektiğini söylemiştir. Genel olarak bakıldığında görüşmecinin yönlendirmeleriyle sonuca ulaşmıştır. Bu anlamda Faruk'un akıl yürütme türü P-GAR olacak sınıflandırılabilir.

➤ Faruk a şikkı için zorlanmamıştır ve aritmetik işlemleri devam ettirerek sonuca ulaşmıştır. Bu durumun sebebi Faruk'un belli bilgi birikimine sahip olmasıdır. b şikkında ise zorlanmıştır. Bu durum için soruyu anlamaması veya bu tip bir soruyla ilk

defa karşılaşması sebep olarak gösterilebilir. Genel olarak aritmetik işlemleri yapmada sıkıntı yaşamamıştır fakat düşünce olarak yüzeysel bir düşünme tarzı olduğundan birçok işlem yaparak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Faruk'un matematiksel akıl yürütme türü, doğru sonuca ulaşmasından, iki tip akıl yürütme türü sergilemesinden ve yüzeysel bir bakış açısına sahip olmasından dolayı P-GAR_{diy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Faruk'un beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk'un beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Faruk: ilk yani zorlandım da kavrayınca buldum. (soruyu okudu). Eee biz burada dedik ki 4 e hep 3 er 3 er artmış 73 den önce 4 çıkarırız ki 3 er 3 er artıyor ya 69 kalır. Sonra da 69 u 3 e böleriz ki kaç tane yapmışlar diye bulalım. 23 çıktı. 23 e de hani şurada ki şeyi de ekledim 4 tane vardı 3 er 3 er gidiyor 1 kibrit çöpü daha ekledim hani 3 er 3 er yaptık biz. 1 ekleyince $23 + 1 = 24$ yapar.

Mülakatçı: yani oradaki 1 kibrit çöpünü saymadığını düşünüün.

Sonradan 1 kibrit çöpünü mü ekledin 24 e.

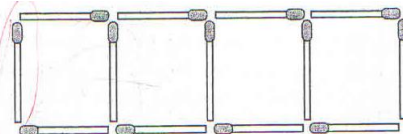
Faruk: evet

Mülakatçı: peki doğru olup olmadığına nasıl karar verdin?

Faruk: 24 le 3 ü çarparız 72 çıkar 1 de fazlaydı eklersek 74 çıkar.

Mülakatçı: peki genel olarak sorularla ilgili ne düşündün?

Faruk: sorular gerçekten zordu.



Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

24
a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?
b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?
4'e her arttığında üç ekler. 73'ten önce 4 çıkarırız 69 kalır. Sonra üçe böleriz 23 çıkar. 23'e de 4 ekleriz 27 olur. Mantık yürüterek tensten gittim. Sağlamasını yaptığımızda doğru çıkar.

Şekil 4.25. Faruk'un beşinci probleme ait çözümü

Faruk'un beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) kibrit çöpü sayısı ii)çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Faruk'un belirttiği "kibrit çöpü sayısı" matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmamasına rağmen gerçek dünya bileşenidir. Faruk çözüm prosedürü olarak aritmetik işlemleri takip etmiştir. Yapılan aritmetik işlemler problemin çözümü için doğru sonucu vermektedir. Fakat matematiksel olarak kabul edilebilir görünmesine karşın matematiksel değildir.

➤ Faruk ilk olarak soruda verilen durumu anlamaya çalışmıştır sonrasında işlemlerini devam ettirmiştir. Faruk çözümü "*ilk yani zorlandım da kavrayınca buldum .(soruyu okudu). Eee biz burada dedik ki 4 e hep 3 er 3 er artmış 73 den önce 4 çıkarırız ki 3 er 3er artıyor ya 69 kalır. Sonra da 69 u 3 e böleriz ki kaç tane yapmışlar diye bulalım. 23 çıktı.23 e de hani şurada ki şeyi de ekledim 4 tane vardı ya 3 er 3 er gidiyor ya 1 kibrit çöpü daha ekledim hani 3 er 3 er yaptık biz. 1 ekleyince $23+1=24$ yapar.*" şeklinde yapmıştır. Normalde bu aritmetik işlemlerle doğru cevaba ulaşılabilir. Fakat açıklamalarına bakılacak olursa; katılımcı 23 kareyi ilk başta 4 kibrit çöpünden oluşan ilk kareyi saymadan bulmuştur. Fakat sonrasında bu kare sayısına başlangıçta saymadığını düşündüğü 1 kibrit çöpünü eklediğini ifade etmiştir. Hâlbuki katılımcı başlangıçta 4 kibrit çöpü çıkarmıştı yani aslında 1 kibrit çöpünü değil 1 kareyi saymadan işlem yapmıştı bu yüzden matematiksel olarak hatalı bir dayanağı olan işlem sürdürmüştür. Bu açıdan düşünüldüğünde katılımcının düşünce yapısı AR akıl yürütme türünü sağlamaktadır. Faruk'un çözümün doğruluğunu "*24 ile 3 ü çarparsınız 72 çıkar 1 de fazlaydı eklersek 73 çıkar.*" şeklinde göstermesine karşın bu doğrulama işleminden hatasını anlayamamıştır.

➤ Faruk hatalı işlemler sürdürmüştür. Aslında Faruk belli bilgi birikimine sahiptir fakat hatalarını fark edememiştir. Bu durumun sebebi, tam olarak yaptığı işlemi anlayamamış olması veya dikkatsizlik hataları olabilir. Faruk'un yaptığı işlemlerin açıklamalarını yaptığı fakat etkili tartışmalar yapmadığı için hatalarını görmekte zorlandığı görülmektedir. Faruk'un matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru sonuca ulaştığından, tek tip akıl yürütme türü sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce tarzı olduğundan AR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

Faruk'un "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.5'te gösterilmiştir.

Tablo 4.5.

Faruk'un "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Faruk	AR _{dgy}	MR _{ogy}	CR _{dld}	P-GAR _{dly}	AR _{ogy}

Tablo 4.5 incelendiğinde, Faruk'un incelenen beş problemin üçünde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne, bir problemde ezber dayalı akıl yürütme türüne ve bir problemde de yaratıcılığa dayalı akıl yürütmeye sahip olduğu görülmektedir. Faruk tüm problemlere doğru cevap verirken, sadece üçüncü ve dördüncü problemlerde yerel akıl yürütme türü sergilemiş diğer problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Faruk akıl yürütme sürecinde bazı sorularda yüzeysel bazı sorularda derin bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.6. Nilgün'ün Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Nilgün'ün birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün'ün birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: bu soruda problem kurmamız isteniyordu. Ben yaş problemi yaptım. Alinin ve Ayşe'nin yaşları toplamı 31'dir. Alinin yaşının 3 katının 10 fazlası Ayşe'nin yaşına eşittir. Ali kaç yaşındadır. Yok, Ayşe kaç yaşındadır?

Mülakatçı: Peki probleme uygun denklemleri yazar mısın? Yaz istersen problemi?

Nilgün: (Yazdı, sonra emin olamadı ve değişiklik yapmaya başladı) Ali ve Ayşe'nin yaşları toplamı 31 dir. Ayşe'nin yaşı 10 dur. Alinin yaşının 3 katına eşittir desem Ali'nin yaşı buna göre;

Ali Ayşe

3 1

Nasıl oluyor. Problemi nasıl kurayım ya. Alinin yaşı kaçtır mı desem? Ayşe'nin yaşı kaçtır mı desem? Ayşe'nin yaşı 10 desek ya da x desek Alinin ve Ayşe'nin 10 fazlası 31 desek. Şimdi Ayşe bilmeseydi x desek. Alinin 3 katının 10 fazlasının toplamına eşittir. Şimdi 31'i eşitleyemiyoruz. Ayşe bulunmuyor. Ali Ayşe'nin 3 katının 10 fazlasının toplamı 31 dir. Evet, öyle olsun.

Ali: $3x + 10$

Ayşe: x

Şimdi toplayıp Ayşe ve Alinin yaşını öğreneceğiz.

$$3x + 10 + x = 30.$$

Yok, yine hata oldu.

Mülakatçı: Ne oldu?

Nilgün: Şimdi bunları eşitleyemiyoruz. Haa yapalım.

$$10 - 31 = -2x$$

$$2x = -21$$

Eee buradan kendi çıkıyor.

Mülakatçı: Peki kurduğun denklem yukarıdaki ile aynı olmadı. Ne yapmış oldun sen?

Nilgün: Yanlış yapmış oldum.

Mülakatçı: Yani başka bir problem kurmuş olduk. Ama yukarıdaki denklemlerle çözülecek problem değil.

Nilgün: İlk çözssem olur mu?

Mülakatçı: Olur. Tamam, çöz önce.

Nilgün:

$$3k + 10 = 31$$

$$3k = 31 - 10$$

$$3k = 21$$

$$k = 7$$

olur.

Mülakatçı: Güzel

Nilgün: Şimdi problem kuracağız. Yaş kurmayalım başka kuralım.

Mülakatçı: Tamam

Nilgün: Eee. (sessiz kaldı)

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Nilgün: Yaşı kuramadım. Başka problem düşünüyorum. Eee nasıl olabilir?

Mülakatçı: Sayılarla ilgili olabilir.

Nilgün: Nasıl yani?

Mülakatçı: Hani büyük sayı, küçük sayı, bir sayının, hangi sayının... gibi

Nilgün: Haa olabilir evet. Hangi sayının 3 katının 10 fazlası 31 e eşittir? Türkçe matematiksel olarak ifadesi öyle oluyor. Şimdi bunu probleme çevireceğiz. Sınıf olarak düşünsek.

Mülakatçı: Yani söylediğin şey sadece matematiksel karşılık mı? Problem olamaz mı?

Nilgün: Problem olabilir. Hangi sayının 3 katının 10 fazlası 31 e eşittir. Oluyor. Evet.

Mülakatçı: Peki doğru yaptığını nasıl anlarsın?

Nilgün: Değer vererek.

Mülakatçı: Yapalım.

Nilgün: Hangi sayının, 7 oluyor bilinmeyen sayı, 3 katı $7 \cdot 3 = 21$, 10 fazlası 31 oluyor.

Mülakatçı: Tamam.

3k + 10 = 31 denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Ali ve Ayşe'nin yaşları toplamı 31'dir. Ali, Ayşe'nin yaşının 3 katının 10 fazlasına eşittir. Buna göre Ali kaç yaşındadır?

$$\begin{aligned}
 3k + 10 &= 31 \\
 -31 + 10 &= 3k \\
 -21 &= 3k \\
 \underline{-7} &= k
 \end{aligned}$$

Şekil 4.26. Nilgün'ün birinci probleme ait çözümü

Nilgün'ün birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) değişkenler, sayılar, denklem ii) soru ile gerçek hayat arasındaki dönüşüm iii) aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Nilgün, yaş problemi kurmaya karar vermiştir. Bu bir matematiksel özellik değildir fakat gerçek dünya özelliğidir. Bu yönüyle katılımcı modelleme özelliğini karşılamaktadır fakat modelleme özelliğini tamamlayamadan problemine devam etmemiş, başka problem kurmayı denemiştir. Nilgün çözüm prosedürü olarak “*eşitliğin solundaki sayıları sağına geçirme*” prosedürünü uygulamıştır. Bu prosedür matematiksel olarak kabul edilebilir değildir fakat genellikle kullanılan pratik bir yoldur. Nilgün çözüm için aritmetik işlemler yapmayı denemiştir fakat ne yaptığının farkında değildir.

➤ Nilgün günlük hayatla ilgili yaş problemi kurmaya karar vermiştir fakat tereddütleri vardır.”*Ali'nin yaşı kaçtır mı? desem Ayşe'nin yaşı kaçtır mı? desem*“ ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Nilgün kendi kendine tartışarak denklemi kurmayı denemiştir ve sonuç olarak kurduğu problem cümlesi anlamsız ve denklemi karşılamayacak bir problemdir. Kendi kurduğu problemin karşılayan denklemi yazarak “ $3x + 10 + x = 31$ ” yine hata yaptığını fark etmiştir eşitlik sağlayamadığını düşünüp çözüme geçerek problem kurmaktan vazgeçmiştir. Çözüm yaparken yaptığı anlamsız aritmetik işlemler yanlış sonuç bulmasına sebep olmuştur. Görüşmecinin sorusuyla yanlış yaptığının farkında olduğunu farklı denklemle çözülebilecek bir problem kurduğunu ifade etmiştir ve ilk olarak soruda verilen denklemi çözerek cevap üzerinden

problem kurmayı denemek istemiştir. Denklem çözümünde sol taraftaki sayıya eşitliğin sağ tarafına atarak bilinen bir algoritma ile çözüme rahatça ulaşmıştır sonrasında yaş problemi dışında problem kurmayı denemiştir ve sayılarla ilgili bir problem kurmuştur.” *Hangi sayının üç katının 13 fazlası 31 e eşittir?*” ifadesinin denkleme karşılık gelen kendi deyimiyle türkçe bir matematiksel ifade olduğunu düşünüp bu ifadeyi probleme çevirmek için çabalamıştır. Görüşmecinin müdahalesi ile problem olabileceğini düşünüp ifadesini tamamlamıştır. İşlemlerini doğru yapıp yapmadığını işlemlerin sağlamasını yaparak test etmiştir. Nilgün etkili tartışmalar yapmamış aklına gelenleri uygulayarak, bilinen algoritma ile çözüme ulaşmıştır. Bu anlamda AR’nin özelliklerini taşımaktadır. Görüşmeci tarafından yapılan müdahalelerin etkisi olduğundan akıl yürütme türü P-GAR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Nilgün problem kurarken yaş problemi seçerek günlük hayatta bağlantı kurmuş fakat hata olduğunu fark ettiği halde düzeltme eğiliminde olmadan tereddütler yaşadığı için yaş problemi kurmaktan vazgeçmiştir ilk kurduğu yaş problemi doğru ve denklemi karşılayan bir problem değildir ikinci kurduğu problemin problem olup olmadığı konusunda kararsızdır. Bu durumun sebebi sınıf ortamında bu şekilde yanlış bir kanıya sahip olması olabilir. Katılımcının zorlanmasının ana sebebi prosedürleri uygularken altında yatan anlamları anlamamış olmasıdır. Nilgün’ün matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru sonuca ulaştığından, iki tür akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce tarzı olduğundan P-GAR_{oly} olarak sınıflandırılmıştır.

-Nilgün’ün ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün’ün ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: Terazi mantığı ile düşünmüş. Bu taraf ne ile çarparsa karşıda öyle olmalı. Solda $\frac{1}{7}$ ile çarpmış. Ama sağ tarafı 7 ile çarpmış. Yanlış olmuş.

Mülakatçı: Peki doğrusunu yapar mısın?

$$\text{Nilgün: } \frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = 7 \cdot \frac{1}{7}$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

olur.

Mülakatçı: Yani doğru mu yapmış işlemi?

Nilgün: Evet doğru yapmış ama işte 1. Adımda hata var.

Mülakatçı: Tamam. Peki, sen nasıl çözersin soruyu?

$$\text{Nilgün: } 7x - 1 = 7 + 1$$

$$7x = 8 \cdot \frac{1}{7}$$

olmadı.

Mülakatçı: ne olmadı?

Nilgün: Kesirli çıktı. Böyle olmadı. Yukarıda 2 çıktı. Olmadı.

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun peki? Neden olmadı?

Nilgün: Küçüğü büyüğünün ayağına getirdik.

$7x - 1 = 7 + 1$ oldu. Terazi mantığıyla düşünürsek 2 çıkıyor.

Mülakatçı: Peki x ondalıklı çıkamaz mı?

Nilgün: Çıkabilir ama üstte 2 oldu.

Mülakatçı: Yani tezatlık mı var? Tek değer mi olması lazım.

Nilgün: Evet. Bu soru için 2 çıkması lazım.

Mülakatçı: Sence hangisi doğru.

Nilgün: Terazi mantığı.

Mülakatçı: Yani alttaki yanlış mı?

Nilgün: Evet yanlışlık vardı...

$$7x - 1 = 7 + 1$$

$$7x = 8$$

Oluyor. Bu da olmuyor.

Mülakatçı: tamam devam edelim.

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

	$7x - 1 = 7$
1. Adım	$\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7$
2. Adım	$x - 1 = 1$
3. Adım	$x - 1 + 1 = 1 + 1$
4. Adım	$x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} \cdot 7x - 1 &= 7 \cdot \frac{1}{7} \\ x - 1 &= 1 + 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b) Siz bu denklemini nasıl çözersiniz?

$$\begin{aligned} 7x - 1 &= 7 + 1 \\ 7x &= 8 \cdot \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Şekil 4.27. Nilgün'ün ikinci probleme ait çözümü

Nilgün'ün ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem, sayı ii) terazi mantığı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Nilgün sorunun çözümünün “terazi mantığı” ile düşünüldüğünü söylemiştir. Bu düşüncesini “*Sol taraf ne ile çarpılırsa karşı taraf öyle olmalı*” diyerek ifade etmiştir. Bu düşünce öğrenme ortamında “eşitliğin korunumu” ile kazanımlar kazandırılırken ifade edilen matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Nilgün çözüm yöntemi olarak eşitliğin sol tarafındaki sayıları sağ tarafına işaret ve işlem değiştirerek geçirmeyi temel alan yöntemi ve kendi ifadeleri ile “*küçüğü büyüğün ayağına getirmek*” kuralını kullanmıştır. Bu yöntem ve kural matematiksel olarak kabul edilir değildir fakat genel olarak kullanılan pratik bir yöntemdir.

➤ Nilgün ilk olarak çözümde hata olduğunu ve hatanın sol tarafın $\frac{1}{7}$ ile çarpılırken sağ tarafın 7 ile çarpılmasından kaynaklandığını söylemiştir. Bu ifade doğru olmamakla birlikte Nilgün doğru çözümü yapması istendiğinde çözümün aynısını yapıp doğru yaptığını söylemiştir ama aynı zamanda birinci adımda hata olduğunu da savunmaktadır. Bu açıdan Nilgün’ün tezat konuştuğu ve kafa karışıklığı mevcuttur. Nilgün çözümü yaptıktan sonra cevabı bulmasına karşın kendi cevabına güvenmemekle ve yine sorudaki çözümün doğru olduğunu söylemektedir ve bununla ilgili “*terazi mantığı ile yapınca iki çıkıyor ama büyük düğün ayağına götürünce farklı çıkıyor*” ifadeleriyle bu durumu desteklemiştir ve terazi mantığının doğru olduğunu söylemiştir. Nilgün kendi çözümünü tekrar yaparak yanlışlık olduğunu düşünmüş ama bir türlü hatasını bulamamıştır. Öğrenme ortamından hatırladığı algoritmayı uygulayarak cevaba ulaşmaya çalışmıştır. Bu yönüyle Nilgün MR’nin özelliklerini sahip bir akıl yürütmeye sahiptir.

➤ Nilgün’ün kafa karışıklığının sebebi kavramsal anlamasındaki eksiklikten kaynaklanıyor olabilir. Genel hatlarıyla bakılacak olursa Nilgün bir şeyler hatırlamaktadır fakat tam olarak değil ve kendisine güvensizlikle beraber ne yaptığının farkında değildir. Etkili tartışmalar ve kavramsal anlamalardan uzak yüzeysel bir düşünme tarzına sahiptir. Yanlış bir çözüm yapan Nilgün’ün matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediği ve yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğu için MR_{gy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Nilgün'ün üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün'ün üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: 1. Durum 2. Durum

Kişi sayısı $4x + 20$ $6x - 6$
oluyor.

Kaç misafiri bulacağız?

Mülakatçı: Sen burada x 'e ne dedin?

Nilgün: x kişi sayısı. Çözersek.

$$4x + 20 = 6x - 6$$

$$-2x = -26$$

$$x = 13$$

çıkar.

Mülakatçı: Neyi bulduk burada.

Nilgün: Kişi sayısını

Mülakatçı: Yani Ayşe'nin misafirleri 13 kişi miymiş?

Nilgün: Ama 13 kişi olamaz. 4 erli oturunca 20 kişi ayakta kalıyor. Mantıksız. O yüzden x i bulup çarpacağız.

$$4.13 = 32 + 20 = 52$$

$$6x = 6.13 = 78 - 6 = 72$$

olur.

Mülakatçı: Ne oldu? Ya da ne olmadı?

Nilgün: Farklı çıktı. Eşit çıkması gerekirdi. Kişi sayısının eşit olması.

Mülakatçı: 1. Durumda kişi sayısını yazdın. x kişi sayısı ise denklemde mi kişi sayısı mı? Nasıl oldu?

Nilgün: x i 13 bulduk. 4 ile çarptık.

Mülakatçı: Neden?

Nilgün: 4 er kişi oturuyorlar. 20 ile topladık. Sonra 6 ile çarptık. 6 çıkardık.

Mülakatçı: x kişi sayısı yani?

Nilgün: Evet ama olmadı ya.

Mülakatçı: Neden?

Nilgün: Eşit çıkması gerekiyordu.

Mülakatçı: Kontrol et. İşlemi mi yanlış yaptın acaba.

Nilgün: (işlemi kontrol etti) 1. Durumda 72 buldu.

Mülakatçı: Yani neyi buldun?

Nilgün: 72 kişi sayısı.

Mülakatçı: 13 te kişi sayıydı.

Nilgün: 13 de kişi sayısı demiştik ama 13 olmuyor mantık olarak. x başka bir şey. Haa masa sayısı.

Mülakatçı: nasıl hatırladın?

Nilgün: Çünkü masa sayısı da bilinmiyor. x masa sayısı

Mülakatçı: Tamam. Toparlarsak.

Nilgün: (Anlattı)

Mülakatçı: Doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

Nilgün: Sağlama yaparız. x 'e 13 dersek,

$$13.4 = 52 + 20 = 72$$

$$6.13 - 6 = 72$$

oluyor.



Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4'er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş

kalır.

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

Handwritten solution:

Masa sayısı = x
 Masa sayısı = 13
 Kişi sayısı = 72

II. durum $4x + 20 = 72$
 $4x = 72 - 20$
 $4x = 52$
 $x = 13$

III. durum $6x - 6 = 72$
 $6x = 72 + 6$
 $6x = 78$
 $x = 13$

Şekil 4.28. Nilgün'ün üçüncü probleme ait çözümü

Nilgün'ün üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi:

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) kişi sayısı ii) denklem, sayılar iii) masa sayısı bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Masa sayısı” ve “kişi sayısı” matematiksel olarak kabul edilir bir özellik değildir. Fakat birer gerçek yaşam bileşenidir. Nilgün problemde geçen “kişi sayısı” bileşenine x değişkenini atayarak problem durumunda yer alan iki sözel duruma karşılık gelecek cebirsel ifadeleri doğru bir şekilde yazamamıştır. Eğer değişken olarak masa sayısını x değişkenine atamış olsaydı, bu ifadeler $4x + 20$ ve $6x - 6$ olup problemde belirtilen durumları karşılayacaktı fakat katılımcının değişkeni kişi sayısı ile eşleştirmesi durumunda böyle bir durum matematiksel görünse dahi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamaktadır. Nilgün yaptığı işlemin doğru olup olmadığı ile ilgili sağlama yaparak emin olmuştur. “sağlama” işlemi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir.

➤ Nilgün ilk olarak problemde yer alan iki duruma karşılık gelebilecek cebirsel ifadeleri yazmıştır ve birbirine eşitlemiştir. x değişkeni için kişi sayısı dediği için denklemi çözdükten sonra çıkan sonuç ($x = 13$) karşısında görüşmecinin sorusuyla kişi sayısı olmadığını fark etmiştir ve bu düşüncesini “Ama 13 kişi olamaz. 4'erli oturunca 20 kişi ayakta kalıyor. Mantıksız. O yüzden x i bulup çarpacağız.” sözleriyle ifade etmiştir. Sonrasında neden çarptığını bilmeden çarpmıştır ve iki cebirsel ifadenin sonuçlarını işlem hatası yapması nedeniyle eşit bulamamıştır. Nilgün görüşmecinin ek

sorularına verdiği cevaplardan anlaşıldığı üzere hala x değişkeninin kişi sayısı olduğunu düşünmektedir fakat mantıksız geldiği için tereddütte kalmıştır. İşlemlerini kontrol etmesinin ardından kişi sayısını 72 bulmuştur görüşmecinin araya girmesiyle “13 de kişi sayısı demiştik ama 13 olmuyor mantık olarak. x başka bir şey. Haa masa sayısı.” sözleriyle x değişkeninin belirttiği durumu netleştirmektedir. Bu durumda katılımcının yaptığı işlemleri anlamlandıramadığı dikkat çekmektedir. x değişkenine ne anlam yükleyeceği konusunda bir türlü karar verememiştir. Bu anlamda düşünüldüğünde tipik bir AR örneği oluşturmaktadır.

➤ Nilgün değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmıştır dolayısıyla kurduğu denklemlerde problemi karşılamamaktadır. Bu durumun sebebi belli bir bilgi düzeyine sahip olması fakat kavramsal anlamasının zayıf olmasından kaynaklanmaktadır. Nilgün genel olarak yaptığı işlemlerin farkında olmadan mantıksal açıklamalar ve tartışmalar yapamadan aklına gelen aritmetik işlemleri uygulayarak sonuca ulaşmaya çalışan yüzeysel bir bakış açısına sahiptir. Bunun sebebi kavramsal anlamasının zayıf olması olabilir. Nilgün’ün matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru sonuca ulaştığından, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce tarzına sahip olduğundan AR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Nilgün’ün dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün’ün dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: 15 TL ödemiş. 65 ile 15 i topladım. 80 TL harcamış. Kaç tane kiraladığı bilinmiyor. $\frac{80}{2} = 40$ tane kiralamış. 40 dan 15 i çıkardım.

Mülakatçı: 40 DVD sayısı dedin.

Nilgün: 40 la 3 ü çarparım o zaman.

$40 \cdot 3 = 120$ oluyor.

Mülakatçı: Ne buldun?

Nilgün: Üyelik ücreti dâhil ödenen para. 15 i çıkardım 105.

Mülakatçı: Cevap 105 mi?

Nilgün: Evet. Nasıl yaptığıma bakabilir miyim?

Mülakatçı: Bak.

Nilgün: 65 den 15 i çıkarmışım. Ooo evet çıkarmak gerekli dâhil dediği için. Eee $65 - 15 = 50$ TL ödemiş. $\frac{50}{2} = 25$ oluyor. 25 kiralamış şimdi üye olmayanlar. O yüzden 50 yi 3 le çarpacağız. Yok, 50 yi 3 e bölssek eee... 25 bulduk 25 DVD sayısı. 50 ile toplayacağım.

Mülakatçı: 50 ile işlem yaptın. Ne yapmaya çalışıyorsun?

Nilgün: Kaç TL ödediğini. 25 ile 3 ü çarpacağız 75 TL oluyor.

Mülakatçı: Tamam

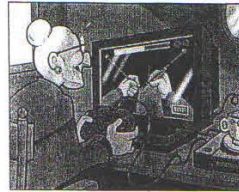
b Şıkkı:

Nilgün: Üye olan 15 TL ödüyor. Üye olmayan 5 DVD alması üyelik ücretine denk. Avantajlı olması için en az 5 DVD alması gerekir.

Mülakatçı: Doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

Nilgün: Üye olan 15 ödüyor. Üye olmayan 5 DVD alınca 15 TL ye ulaşır. En az 5 DVD o yüzden.

Mülakatçı: Tamam



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcayacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

Önce üyelik ücretini çıkardım. $65 - 15 = 50$
 daha sonra üye olmayan ücreti 2 tl olduğu için 2'ye böldüm. $50 \div 2 = 25$
 25 tane DVD almış üye olmayı 25 tane DVD alması için 3 ile çarpım. $25 \cdot 3 = 75$ tl oldu.

- b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

Üye olan kişinin 15 tl ödemesi gerekir. Üye olmayan ise ödemek gibi bir zorunluluğu yok. Bu yüzden üye olan kişinin üye olmayan kişiye eşit olması için $15 \div 3 = 5$ olur. Yani 5 tane DVD'ye eşit.
 $15 \div 3 = 5$

Şekil 4.29. Nilgün'ün dördüncü probleme ait çözümü

Nilgün'ün dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Çözüm prosedürü aritmetik işlemlerden ibaret olup problem durumunu karşılamayan işlemlerdir. Yapılan işlemler matematiksel olarak görünseler de kabul edilebilir değildirler.

➤ Nilgün a şikkını yaparken problemi karşılamayacak aritmetik işlemler yapmıştır. Yaptığı işlemlerde hangi işlemi neden yaptığının farkında değildir. Yaptığı çözümün doğruluğundan emin olamadığı için görüşmeden önceki çözümünü görmek istemiştir. Fakat ne yaptığını hatırlayamamıştır önceki çözümü üzerinden yaptığı açıklamalara bakılırsa rastgele aritmetik işlemleri sıralamaktadır. “65 den 15 i çıkarmışım. Ooo evet çıkarmak gerekli dâhil dediği için. Eee 65-15=50 TL ödemiş. 50/2=25 oluyor. 25 kiralamış şimdi üye olmayanlar. O yüzden 50 yi 3 le çarpacağız. Yok, 50 yi 3 e bölsek eee... 25 bulduk 25 DVD sayısı. 50 ile toplayacağım.” cümleleri bu durumu desteklemektedir. B şikkı için ise Nilgün soruyu yanlış anladığı için yanlış cevap vermiştir. Nilgün üye olan birinin avantajlı olabilmesi için gerekli DVD sayısına yönelik bir yorum yapmıştır. Hâlbuki Nilgün etkili tartışmalar ve açıklamalar yapmış olsaydı hatasını fark edip düzeltebilirdi. Bu anlamda düşünüldüğünde aklına gelen işlemleri anlamını bilmeden ne yaptığının farkında olmadan sürdürdüğü için MR’ye daha yakın bir düşünce yapısı vardır.

➤ Nilgün’ün zorlanmasının sebebi, soruyu anlayamaması ve rastgele işlemler deneme eğiliminde olmasıdır. Nilgün’ün soruyu anlayamaması ve yüzeysel düşünce yapısına sahip olması kavramsal eksikliklerinin sonucudur. Genel olarak etkili açıklamalar yapmaksızın aritmetik işlemler yapma eğilimindedir. Yanlış sonuca ulaşan Nilgün’ün matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme kullandığından ve yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden MR_{gy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Nilgün’ün beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün’ün beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: Ben bunu bulamadım, çizdim

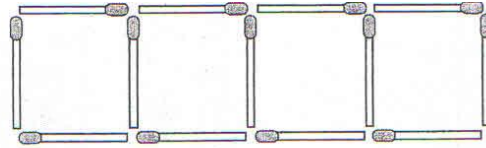
Mülakatçı: Çizerek yaptın?

Nilgün: 25 buldum.

Mülakatçı: peki doğru olup olmadığını nasıl anladın?

Nilgün: Bir kere 4 diğeri 3. 4 le 3 ü çarp. Yok çarpıyoruz. Ben saydım tek tek.

Mülakatçı: Tamam.



Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

- a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?



- b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?

Normal şekilde yaparken bulamadım ben de
Şekil yaparak buldum tek tek saydım 25 oldu.

Şekil 4.30. Nilgün'ün beşinci probleme ait çözümü

Nilgün'ün beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) çözüm prosedürü ii) sayılar bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Nilgün'ün “çizerek yapma” yöntemini kullandığı görülmektedir. Bu yöntem çözüm prosedürü olarak sınırlı durumlarda doğru cevaba götürebilir bu yüzden matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Nilgün çözüm olarak çizerek yaptığını belirtmiştir. Sayıların büyük olduğu durumlarda bu çözüm yöntemi hükmünü kaybetmektedir. Nilgün alternatif çözüm yöntemlerini düşünememiştir. Nilgün'ün soruda zorlandığı ve çizerek yaptığını “Ben bunu bulamadım, çizdim” cümleleri desteklemektedir. Sonuç olarak ise Nilgün doğru cevaba ulaşamamıştır. Çözümünün doğruluğu ile ilgili ise “Bir kere 4 diğeri 3. 4 le 3 ü çarp. Yok çarpıyoruz. Ben saydım tek tek.” İfadeleri katılımcının kararsız ne yaptığının farkında olmayan tavrını göstermektedir. Bu anlamda düşünüldüğünde herhangi bir tartışma ortamı oluşturmadan cevap verme eğilimindedir. Bu anlamda düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini gösterdiği söylenebilir.

➤ Nilgün'ün zorlanmasının sebebi bilgi eksikliği, bu tarz sorularla az karşılaşması veya kolay çözüm yöntemini tercih etmesi olabilir. Nilgün'ün kavramsal alt yapısının eksik olması ve yaptığı işlemlerin farkında olmadığı genel anlamda yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğu söylenebilir. Yanlış bir cevaba ulaşan Nilgün'ün

matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme kullandığından ve yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden AR_{ygy} olarak sınıflandırılmıştır.

Nilgün'ün "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.6'da gösterilmiştir.

Tablo 4.6.

Nilgün'ün "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Nilgün	P-GAR _{oly}	MR _{ygy}	AR _{ogy}	MR _{ygy}	AR _{ygy}

Tablo 4.6 incelendiğinde, Nilgün'ün incelenen beş problemin üçünde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne, iki problemde ezbere dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Nilgün sadece iki probleme doğru cevap verirken, birinci problem hariç diğer problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Nilgün akıl yürütme sürecinde tüm sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.7. Ece'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Ece'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: $3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Ece: 4. Sınıfta hocamız bu tarz sorular çözdürüyordu. O aklıma geldi. Ters işlem problemleriydi hatırladığım kadarıyla. Hangi sayının 3'e bölümünün 10 eksiği 31 yapar? Nasıl düşündüm eee hangi sayının k 'ya bir sayı verdim 3'e bölümünün 10 eksiği 31 yapar? Burada sadece k ya hangi sayının dedim çözüm olarak da;

$$31 - 10 = 21$$

$$\frac{21}{3} = 7$$

olur.

Mülakatçı: Peki üstteki denklem için daha farklı bir problem kurulabilir miydi?

Ece: tabiki. Hangi sayının yerine bir sayının denebilirdi. Mesela 31'in 10 eksiği hangi sayının 3'e bölümü olur? gibi

Mülakatçı: peki neden bu problemi kurdun?

Ece: ilk aklıma bu geldi 4. Sınıfta böyle yapıyorduk.

$31 + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.
 Hangi sayının 3'e bölümü 10 çıkısının 31 yapar?
 $31 - 10 = 21$
 $21 : 3 = 7$
sağlam a.
 $7 \cdot 3 = 21 + 10 = 31$

Şekil 4.31. Ece'nin birinci probleme ait çözümü

Ece'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) Ters işlem problemleri ii) Sayılar, Değişkenler iii) Problem durumu iv) Aritmetik işlemler v) Denklem bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ece 4. sınıfta öğrendiğini ifade ettiği ters işlem problemleri olarak hatırladıklarından yola çıkarak problem kurmaya çalışmıştır. Hatırladığı şekilde problem kurmuştur. Problem durumu verilen denklemi karşılamayacak bir problem olup kabul edilebilir değildir. Kurduğu probleme yönelik çözüm yapmıştır ve hatalı anlamalarından dolayı problem çözümü ile kurduğu problem uyumlu değildir ve kabul edilemez.

➤ Ece böyle bir denklem için kurulabilecek problemlerin sadece sayılarla ilgili olabileceğini düşünmüştür. Kurduğu ikinci problemde sadece ifade değişikliği yaparak farklı problem kurduğu algısına sahiptir. Öğrenme ortamındaki deneyimlerinden yola çıkarak hareket ettiğini ifade etmiştir. Ece'nin "4. Sınıfta hocamız bu tarz sorular çözdürüyordu. O aklıma geldi. Ters işlem problemleriydi hatırladığım kadarıyla." İfadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Ece çözüm yaparken kurduğu problemde geçen 'eksiği' ve 'bölümü' ifadelerine bakarak işlemde direk çıkarma ve bölme işlemlerini yapmıştır. Oldukça yüzeysel bir şekilde işlemlerini ilerletmiştir. Ece'nin akıl yürütme türü tamamen hatırladıklarıyla işlem yaptığı için MR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Ece'nin zorlanması sebebi hatırlamalarının doğru olmaması, ne yaptığının çok fazla farkında olmaması ve sadece tek tip problem kurabileceği inancına sahip olmasıdır. Düşünme eğiliminde olmayıp direk hatırladıklarına odaklanarak işlemlerin tersi olduğunu düşündüğü işlem türlerini problemde kullanarak doğru yaptığını düşünmesidir. Ayrıca herhangi bir doğrulama veya kontrol yapmamasıdır. Ece kontrol yapmış olsaydı kendi kurduğu probleme uygun denklemi oluşturmaya çalışmış olsaydı belki de probleminin hatalı olduğunu fark edebilirdi. Ece, öğrenme ortamında karşılaştığı tarz bir problem kurduğu için doğru yaptığını düşünmektedir. Yanlış bir problem kuran Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme kullandığından ve yüzeysel bir düşünme tarzı sergilediğinden MR_{yyg} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ece'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ece: Terazî yöntemine göre yapılmış ama ben onu anlamamıştım. Kafama göre bir şeyler yaptım. Yok, ben şelale miydi ona öre yaptım. Mesela 3x karşıya bölü geçmesi lazımdı yanlış yapmış. -1 ide karşıya +1 olarak atması gerekirdi.

Mülakatçı: peki sen çözümünü nasıl yaptın?

$$7x - 1 = 7 \quad (-1 + 1 \text{ gecer})$$

$$7x = 1 + 7$$

$$7x = 8$$

Kafam çok karıştı. Zaten anlamamıştım ben bunu.

Mülakatçı: tekrar yapmak ister misin?

Ece:

$$7x - 1 = 7$$

$$-1 - 7 =: 7$$

$$-8 =: 7$$

$$\frac{8}{7}$$

Mülakatçı: işleminde x i göremedim.

Ece: sonuçta şelale yönteminde - ise + +ise - . : olarak geçti

Mülakatçı: peki.

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

$$\begin{array}{l}
 7x - 1 = 7 \\
 1. \text{ Adım} \quad \frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7 + 1 \\
 2. \text{ Adım} \quad x - 1 = 1 \\
 3. \text{ Adım} \quad x - 1 + 1 = 1 + 1 \\
 4. \text{ Adım} \quad x = 2
 \end{array}$$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

1. adım, terazi yöntemi ile yapılmış
 $\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7 + 1$ olarak
 atılır.

b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

$$\begin{array}{l}
 7x - 1 = 7 \\
 7x = 7 + 1 \\
 7x = 8 \\
 x = \frac{8}{7}
 \end{array}$$

$$7x - 1 = 7$$

$$-1$$

$$-9 = 7$$

$$-8 = 7$$

$$\frac{8}{7}$$

Şekil 4.32. Ece'nin ikinci probleme ait çözümü

Ece'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) terazi yöntemi ii) Şelale yöntemi iii) aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ece'nin bahsettiği “terazi yöntemi” eşitliğin korunumu ilkesini temel alan bir yöntem olarak sınıf içerisinde öğrencilere öğretilmiştir. İsim olarak matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Fakat eşitliğin korunumu ilkesine dayandığı için matematiksel olarak kabul edilen bir yöntemdir.” Şelale yöntemi” ise, matematiksel olarak kabul edilemez fakat genel olarak cevaba ulaştıran pratik bir yöntemdir.

➤ Ece, sorudaki çözümün doğru olup olmadığını araştırma çabasına girmemiştir. Ece'nin “*Kafam çok karıştı. Zaten anlamamıştım ben bunu.*” ifadesinden kavramsal anlamasının zayıf olduğu anlaşılmaktadır. Ece, sadece sınıf ortamında gördüğü aritmetik işlemleri uygulamaya çalışmış, işlemlerini açıklama yapmadan ve ne yaptığını bilmeden devam ettirmiştir. Ece sorudaki denklemi kendisi çözmeyi denemiştir fakat matematiksel olarak anlamsız aritmetik işlemler yapmıştır. Bu yönüyle kendi

düşüncelerinden hiç faydalanmadan bir akıl yürütme serisi sergilemiştir. Ece'nin akıl yürütme türü MR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Ece'nin zorlanmasının sebebi, kavramsal anlamasının zayıf olmasından kaynaklanmaktadır. Ece soruda verilen denklemin çözümünü dahi yapamamıştır. Aslında ilk teşebbüsünde cevabı yaklaşmış olsa da kendinden emin olmayan tavırla sadece” *sonuçta şelale yönteminde eksi ise artı artı ise eksi*” olarak geçmişti ifadesiyle aklında bir algoritmanın olduğunu göstermiştir. Fakat algoritmanın altında yatan matematik özelliklerden haberdar olmadığı için çözümüne devam edememiştir. Ece'nin genel anlamıyla yüzeysel bir düşünce tarzı vardır. Yanlış bir çözüm yapan Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme kullandığından ve yüzeysel bir bakış açısı sergilediğinden MR_{ygy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ece'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ece: Denklem kuruyoruz. 4 er kişi 20 ayakta kalıyor. $4x + 20$ yazıyoruz.

Mülakatçı: yani x derken x i ne için kullandın?

Ece: x kişi ben yok x sıra oluyor.

Mülakatçı: tamam.

Ece: eee 4. $4=16$ eee ne olacak şimdi neyse 6 sar oturunca 1 masa boş kalmış önce -1 i yazıyoruz

Mülakatçı: neden

Ece: boş kalmış o yüzden

$$6. (x - 1)$$

$$6x - 6$$

Olur. Kaç yapar nasıl buldum hatırlamıyorum.

Mülakatçı: burada neden denklemi eşitledin?

Ece: sonuçta bir şey bulacağız. İkisinden aynı denklemi kurup ikisinden bir şey bulacağız.

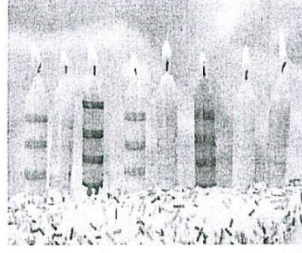
Mülakatçı: tamam.

Ece: sonra nasıl yaptığımı gerçekten hatırlamıyorum.

Mülakatçı: Biraz düşün istersen

Ece: gerçekten hatırlamıyorum devam edemeyeceğim.

Mülakatçı: tamam geçelim o zaman.



Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4'er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş kalır.

kalır.

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

$$\begin{array}{lcl}
 \text{4'erli otursa} & = & \text{6'erli otursa} \\
 4x + 20 & = & 6(8-1) \\
 = 4x + 20 & = & 6x - 6 \\
 14 & = & 14 : 2 = 7
 \end{array}$$

Şekil 4.33. Ece'nin üçüncü probleme ait çözümü

Ece'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem ii) kişi sayısı iii) sıra sayısı bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Kişi sayısı” ve “masa sayısı” matematiksel açıdan kabul edilebilir bir özellik değildir. Fakat gerçek yaşam bileşeni olarak sayılabilir. Ece problemde yer alan sözel ifadelere karşılık gelecek cebirsel ifade yazarken denklem kurduğunu ifade etmiştir. Fakat her bir duruma karşılık gelen ifadelerin her biri cebirsel ifadelerdir. Bu anlamda matematiksel bir özellik değildir. Ayrıca Ece denklem kurarken x değişkenine ne anlam yüklediği ile ilgili tereddüt yaşamıştır. Dolayısıyla x değişkenine yüklediği anlama göre denklemin doğruluğu da tartışılır hale gelmiştir.

➤ Ece ilk olarak problemde ki durumlara karşılık gelebilecek cebirsel ifadeleri yazarak başlamıştır. Fakat sonrasında iki cebirsel ifadenin birbirine eşitlenmesi ile oluşturduğu denklemi neden oluşturduğunu mantıklı açıklamalarla destekleyememiştir. “Sonuçta bir şey bulacağız. İkisinden aynı denklemi kurup ikisinden bir şey bulacağız.” İfadeleri bu durumu etkili açıklamalar yapmadan açıkladığını desteklemektedir. Sonrasında ise Ece cevabı hatırlamadığını söyleyerek devam etmek istememiştir.

Buradan anladığımız kadarıyla takip ettiği prosedürü devam ettiremediği için karamsarlığa kapılıp çözümü bırakmış olmasıdır. Bu yönüyle hatırladığı prosedürleri kullanarak bir süreç yönettiğinden MR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Ece, değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmış. Ece'nin zorlanmasının sebebi bu konu ile ilgili belli bir bilgi birikimine sahip olmasına karşın kavramsal olarak anlamlandıramamış olmasıdır. Ece'nin kavramsal altyapısının zayıf olmasından ve etkili tartışmalar ve açıklamalar yapmamasından yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğu anlaşılmaktadır. Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru bir denklem kurduğundan, tek tip akıl yürütme kullandığından ve yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden MR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

-Ece'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ece: eee önce $65 - 15 = 50$

yi buldum.

Mülakatçı: 50 neyi bulmuş oldun?

Ece: şimdi yıllık üyelik ücretini ödemiş

Mülakatçı: güzel

Ece: bir de 50 yi de 2 ye böldüm 25 buldum.

Mülakatçı: 25 nedir? Neyi bulmuş oldun?

Ece: 25 eee nasıl diyeyim ki ne kadar harcaması gerektiğini buldum. Ama şu şekilde buldum yani üye olmayan DVD kiralama ücretini çıkarıp buldum. Yani bu üye olmayan birinin DVD kiralama parası.

Mülakatçı: Yani üye olmayan birisi 25 TL mi ödemeli?

Ece: evet. Ama şu şekilde yıllık üyelik ücretini çıkarıyoruz. Ondan sonra üye olmayan DVD ücretini de çıkarıyoruz bu bir DVD nin fiyatı

Mülakatçı: Bir DVD nin fiyatı mı?

Ece: bir DVD nin değil yani evet 1 DVD oluyor.

Mülakatçı: kafan mı karıştı?

Ece: evet

Mülakatçı: istersen çözümünden bağımsız tekrar düşün soruyu

K. tamam.(soruyu okudu)

Üye olanlar daha az ödüyor üye olmayanlar daha fazla ödüyor eee öncelikle üyelik ücretini çıkarıyoruz. $65 - 15 = 50$ TL buluyoruz. 50 TL üye olmayanların DVD kiralama ücreti yerine üye olanın DVD kiralama ücretine bölüyoruz normal bir insanın DVD kiralamasını buluyoruz. Turgay'ın ne kadar DVD kiraladığını biliyoruz

Mülakatçı: kaç tane kiraladığını bilmiyoruz ama 25 TL ödediğini mi biliyoruz?

Ece: evet ama onu da bulabiliriz. Bu (soruyu göstererek) bir DVD ücreti mi?

Mülakatçı: evet üye olan biri 1 tane kiralarsa 2 TL üye olmayan 3 TL ödüyor. Turgay da DVD alıyor toplam 65 TL ödüyor.

Ece: ben böyle buldum. 25 buldum bu üye olmasaydı kiralayacağı fiyat eee yok bu üye olmasaydı harcaması gereken fiyat.

Mülakatçı: peki devam edelim.

B şıkkı:

Ben önce 20 yi düşündüm üye olmayan
 $20 \cdot 3 = 60$

$$60 + 15 = 75$$

buldum sonra üye olan

$$20 \cdot 2 = 40$$

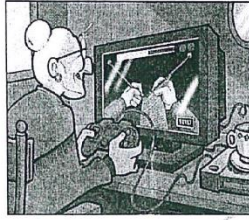
$$40 + 15 = 55$$

aradaki fark

$$75 - 55 = 20$$

oldu. Yani üye olanlarla olmayanları çıkardığımda ne kadar avantajlı olduğunu buldum.

Mülakatçı: peki tamam.



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL'dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcayacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

$65 - 15 = 50$
 $50 : 2 = 25$
 Öncelikle yıllık üyelik ücretini çıkarınız
 Üye olan bir DVD kiralama ücretine bölünüz. Ne kadar DVD kiralamış olur.

- b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

$20 \cdot 3 = 60 + 15 = 75$ üye olmayan
 $20 \cdot 2 = 40 + 15 = 55$
 $75 - 55 = 20$

Şekil 4.34. Ece'nin dördüncü probleme ait çözümü

Ece'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Ece a şıkkı için aritmetik işlemler yaparak çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Yaptığı işlemler problem durumu için çözüm niteliği taşımamaktadır. Matematiksel olarak görünse de kabul edilebilir değildir. Ece B şıkkı için “değer vererek yapma” yöntemini tercih etmiştir. Bu yöntem sınırlı durumlarda doğru cevaba götürebilecek bir yöntem olmasına karşın matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir.

➤ Ece a şıkkını yaparken problemi karşılamayacak aritmetik işlemler yapmıştır. Yaptığı işlemde hangi işlemi neden yaptığının farkında değildir. Yaptığı işlemleri açıklarken tereddütlü cevapları dikkat çekmiştir. Ece görüşmecinin sorularına verdiği cevaplarla bu durumu desteklemiştir. Ece’nin “25 eee nasıl diyeyim ki ne kadar harcaması gerektiğini buldum. Ama şu şekilde buldum yani üye olmayan DVD kiralama ücretini çıkarıp buldum. Yani bu üye olmayan birinin DVD kiralama parası.” cümleleri ne yaptığının farkında olmadığını rastgele işlemler yaptığını destekler niteliktedir. Görüşmecinin tekrar düşün demesinden sonra soruyu okuyup tekrar düşünen Ece ikinci çözüm denemesinde de benzer yüzeysel düşünce yapısı ile cevap vermiştir. Ece’nin “üye olanlar daha az ödüyor üye olmayanlar daha fazla ödüyor eee... Öncelikle üyelik ücretini çıkarıyoruz. $65-15=50$ TL buluyoruz. 50 TL üye olmayanların DVD kiralama ücreti yerine üye olanın DVD kiralama ücretine bölüyoruz normal bir insanın DVD kiralamasını buluyoruz. Turgay’ın ne kadar DVD kiraladığını biliyoruz. Ben böyle buldum. 25 buldum bu üye olmasaydı kiralayacağı fiyat eee yok bu üye olmasaydı harcaması gereken fiyat.” İfadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Bu anlamda düşünüldüğünde aklına gelen işlemleri anlamını bilmeden ne yaptığının farkında olmadan sürdürdüğü için MR ye yakın bir düşünce yapısı vardır. Ece b şıkkı için direk aklına gelen 20 sayısını herhangi bir sebep ve açıklama bildirmeden deneyerek sonuca ulaşmıştır. Soruda istenen durumu dikkate almaksızın sadece üye olanın avantajlı olacağı bir durumu göz önüne almıştır.

➤ Ece’nin zorlanmasının sebebi, kavramsal alt yapısının zayıf olması ve etkili tartışmalar yapamaması olabilir. Bir diğer sebep ise, soruyu anlamaması veya b şıkkında deneme yanılma yöntemini kullanmanın kolay olması gösterilebilir. Ece’nin yüzeysel düşünce yapısına sahip olması ve kavramsal eksikliklere sahip olduğu dikkat çekmektedir. Ece genel olarak etkili açıklamalar yapmaksızın aritmetik işlemler yapma

eğilimindedir. Yanlış bir çözüm yapan Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel düşünme tarzına sahip olduğundan MR_{yyg} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ece'nin beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ece: tek anladığım soru. Burada 13 tane kibrit çöpü var şekle baktım 4 tane 3 tane 3 tane var. 13 kibrit çöpü var. Eğer hepsinde 4 er tane olsaydı 14 tane olurdu. Ama burada sadece birinde en bastakinde 4 tane var diğerlerinde 3 tane var. 73 tane kibritten 4 ü çıkardım 69 oldu 69 u da 3 e böldüm. 23 oldu. Ben bunu saydığım da 23 bulmadım da 24 buldum. O yüzden 1 ekledim 24 oldu.

Mülakatçı: yani 1 i neden eklediğini şekle göre mi yaptın?

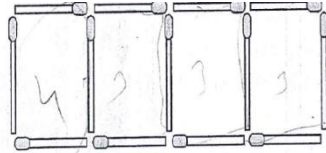
Ece: evet

Mülakatçı: peki sorularla ilgili ne düşündün?

Ece: yani bazıları zordu. Çok anlamadan yaptım.

Mülakatçı: bu tür sorularla daha önceden karşılaştın mı?

Ece: daha önce karşılaşmadım.

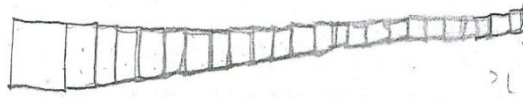


Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?

Sadccc bastakine 4 kibrit dusuyo digerlerine
3 kibrit ozaman $73 - 4 = 69$ $69 : 3 = 23$
 $23 + 1 = 24$

b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?



şekil çizdim.

Şekil 4.35. Ece'nin beşinci probleme ait çözümü

Ece'nin beşinci probleme Ait Matematiksel Akıl Yürütme Türü Analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) kibrit çöpü sayısı ii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ece'nin bahsettiği “kibrit çöpü sayısı” matematiksel kabul edilebilir bir özellik değildir fakat gerçek hayat bileşenidir. Ece çözüm prosedürü olarak aritmetik işlemlerden faydalanmıştır fakat sayarak yapma yöntemi ile destekleyerek kullanmıştır. Bu anlamda düşünüldüğünde matematiksel görünse dahi sınırlı durumda uygulanabileceğinden kabul edilebilir değildir.

➤ Ece çözüm prosedürü olarak aritmetik işlemleri takip etmiştir. Çözümünü ise *“Burada 13 tane kibrit çöpü var şekle baktım 4 tane 3 tane 3 tane var. 13 kibrit çöpü var. Eğer hepsinde 4 er tane olsaydı 14 tane olurdu. Ama burada sadece birinde en bastakinde 4 tane var diğerlerinde 3 tane var. 73 tane kibritten 4 ü çıkardım 69 oldu 69 u da 3 e böldüm. 23 oldu. Ben bunu saydığımda 23 bulmadı da 24 buldum. O yüzden 1 ekledim 24 oldu.”* şeklinde yapmıştır. İfadelerinden de görüldüğü gibi sayarak yaptığında farklı aritmetik işlemlerle yaptığında farklı sonuç bulmuştur. Bu sebeple cevabını ona göre düzenlemiştir. Bu anlamda düşünüldüğünde katılımcının akıl yürütme türünün AR olduğunu söylemek mümkündür. Çünkü katılımcı bir dizi aritmetik işlemler yapmıştır fakat ne yaptığına farkında değildir.

➤ Ece'nin zorlanmasının sebebi, ne yaptığına farkında olmadan işlem yapması veya kavramsal zayıf anlamaları olabilir. Ece etkili tartışmalar ve açıklamalar yapmaksızın direk çözüme odaklanmıştır. Ece'nin belli bilgi birikimine sahip olduğu fakat yüzeysel bir düşünce yapısı benimsediği görülmektedir. Doğru cevaba ulaşan Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğundan AR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

Ece'nin “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.7’de gösterilmiştir.

Tablo 4.7.

Ece'nin "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Ece	MR _{ygy}	MR _{ygy}	MR _{ogy}	MR _{ygy}	AR _{dgy}

Tablo 4.7 incelendiğinde, Ece'nin incelenen beş problemin beşinci problem dışındaki tüm problemlerde ezberle dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Ece sadece bir probleme tesadüfen doğru cevap verirken, diğer problemlere doğru cevap verememiştir. Ece problemlerin tamamında global akıl yürütme sergilemiştir. Ece akıl yürütme sürecinde tüm sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.8. Efe'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Efe'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Efe: Hocam hangi sayının 3 katının 10 fazlası 31 eder? Burada 3k demiş. 31'den 21 k'yı 7 buluruz.

Mülakatçı: Neden öyle bir problem kurdun?

Efe: Hocam 4. Sınıfta mı öğrenmiştik. Eee ters işlem problemi yaptım öyle yazdım.

Mülakatçı: $3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Efe: hocam hangi sayıyı 3 katının 10 fazlası 31 eder? 31 den 21 k yı 7 buluruz.

Mülakatçı: Neden öyle bir problem kurdun?

Efe: Hocam 4. Sınıfta mı öğrenmiştik eee ters işlem problemi yaptım öyle yazdım.

Mülakatçı: Peki bu denklemle çözülebilecek başka problemde kurabilir miyiz?

Efe: kurulurdu. Mesela şunun tam tersi de olabilirdi mesela şimdi bir tane yapayım o zaman.

Mülakatçı: tamam

Efe: [...] (katılımcı düşünüyor)

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun? Düşündüğünü sesli ifade eder misin?

Efe: Ters düşünüyorum 31 den 10 u çıkarınca 21 yazmışım oraya da işte

Şu an eee...

Mülakatçı: Yani yine sayılarla alakalı başka bir şey mi düşünüyorsun?

Efe: Evet hocam yine aynı.

Mülakatçı: Tamam. Peki, sonrasında ne yaptın?

Efe: Problemi çözdüm hocam. Sayılar bir tarafa toplanır.

$$3k + 10 = 31$$

$$3k = 21$$

$$\frac{21}{3} = 7$$

$$k = 7$$

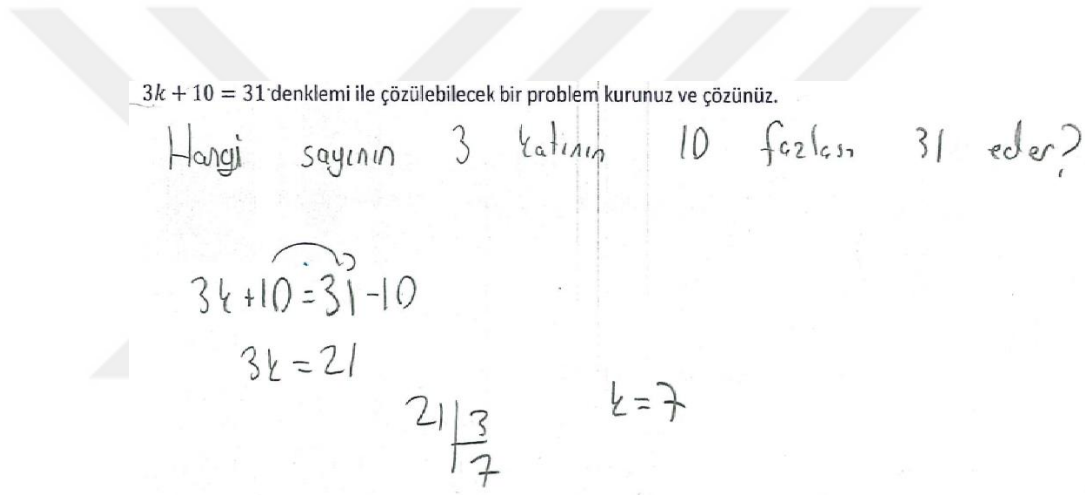
Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

Efe: Hocam tam tersini yaparız.

$$7 \cdot 3 = 21$$

21 le kaç tane toplarsa 31 eder 10 u. O zaman doğru yaptım.

Mülakatçı: Tamam. Teşekkür ederim.



Şekil 4.36. Efe'nin birinci probleme ait çözümü

Efe'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) Problem durumu ii) Aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Efe daha önceki deneyimlerinden öğrendiğini ifade ettiği “ters işlem problemleri” olarak hatırladıklarından yola çıkarak problem kurmaya çalışmıştır. Hatırladığı şekilde problem kurmuştur. Efe, neden böyle bir problem kurduğu ile ilgili matematiksel özelliklere değinmemiştir.

➤ Efe verilen denklem için kurulabilecek problemlerin sadece sayılarla ilgili olabileceğini düşünmektedir. Efe'nin “Ters düşünüyorum 31 den 10 u çıkarınca 21 yazmışım oraya da işte” ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Öğrenme ortamındaki

deneyimlerinden yola çıkarak hareket etmektedir. Efe'nin hatırladığı şekilde problem kurduğu “Hocam 4. Sınıfta mı öğrenmiştik. Eee ters işlem problemi yaptım öyle yazdım.” İfadelerinden anlaşılmaktadır. Efe öğrenme ortamında karşılaştığı tarz bir problem kurduğu için doğru yaptığını düşünmektedir. Alternatif düşüncelere kapalıdır. Efe'nin akıl yürütme türü MR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Efe'nin zorlanmasının sebebi doğru bir problem kurmasına karşın ne yaptığının çok fazla farkında olmaması ve sadece tek tip problem kurabileceği saplantısına sahip olmasıdır. Bu durumun sebebi, belli bir bilgi birikimine sahip olması fakat kavramsal olarak altyapısının zayıf olması olabilir. Efe'nin düşünme süreci yüzeysel olarak ilerlemiştir. Doğru bir problem kuran Efe'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme kullandığından ve yüzeysel bir düşünme tarzı sergilediğinden MR_{dy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Efe'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Efe: Burada $7x - 1 = 7$. Burada 7'yi karşıya artı olarak yollarız. Artı 1 olarak olur. Karşı 8 olur.

$7x = 8$ eşit çıkmaz. Yani burada 2 çıkmış. Yanlış. 8 7'ye bölününce 1'li bir şey çıkar. O yüzden yanlış yapmış. Birinci adımda yanlış gittiği için devamı da yanlış çıkmış hocam.

Mülakatçı: Peki sen bu denklemini nasıl çözdün?

Efe: Aynı şekilde hocam.

$$7x - 1 = 7$$

-1, +1 8 oldu. Sonra da bölecektim. Tuba hoca bakmıştı. Bölmene gerek yok dedi. Öyle bıraktım hocam.

Mülakatçı: Peki x 'i nasıl yazarsın? Rasyonel olarak $7x = 8$ ise x kaçtır?

Efe: $8:7 = 1$, eee virgüllü olur hocam. Hesaplayamadım!

Mülakatçı: $7x - 1 = 7$ de eksi 1 i karşıya artı 1 olarak neden geçiriyoruz?

Efe: Hocam eşitliği sağlamak için. Yani bu taraf küçük olan büyüğün yanına gider. Bu (x) burada tek kalır. Tuba hocanın öğrettiği yöntemle arada göl var. Atarak buldum.

Mülakatçı: Peki sonucu doğru bulup bulmadığını nasıl anlarsın?

Efe: Bu adımlarla giderek buldum. Ama burada kestirip atmadım hocam.

Mülakatçı: Yani sen doğrumu yaptın yanlış mı?

Efe: Bence doğru çünkü öğrendiğim yöntemden yaptığım için doğru yaptım.

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

1. Adım $7x - 1 = 7 + 1$
 2. Adım $7x - 1 = 8$
 3. Adım $7x = 8 + 1$
 4. Adım $x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

1. adım hatalı. Çünkü -1 yerine +1 diye gider.

b) Siz bu denklemini nasıl çözersiniz?

$7x - 1 = 7$
 $7x = 7 + 1$
 $7x = 8$

Şekil 4.37. Efe'nin ikinci probleme ait çözümü

Efe'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem, sayı ii) çözüm prosedürü iii) aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Efe çözüm prosedürü olarak eşitliğin sol tarafındaki sayıyı sağ tarafa işaret değiştirerek geçirmiştir. Bu çözüm prosedürü matematiksel olarak kabul edilebilir değildir fakat sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Efe'nin çözümünde “*küçük küçük olan büyük olanın yanına geçer... arada göl var*” ifadesi de matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir.

➤ Efe soruda yanlış yapılan adımların bulunması istenmesine rağmen sadece cevap odaklı yaklaşım sergilemiş kendisi denklemini çözdüğün de ulaştığı cevap ile soruda verilen cevap eşleşmediği için birinci adımda hata olduğunu söylemiştir. Efe derste öğrendiği çözüm prosedürünü direk tartışmadan ve açıklama gereği duymadan uygulamayı tercih etmiştir. Çözümü doğru yapıp yapmadığı ile ilgili herhangi bir doğrulamaya gitmeden “*öğrendiğim yöntemden yaptığım için doğru*” diyerek herhangi bir tartışma ortamı sağlamamıştır. Bu anlamda Efe'nin akıl yürütmesinin MR akıl yürütme türünün özelliklerini taşıdığı söylenebilir.

➤ Efe'nin zorlanması'nın nedeni, sorudaki hatanın ne olduğunu belirlemekten ziyade cevap odaklı bir yaklaşım sergilemesidir. Efe belli bilgi birikimine sahip olmasına karşın kavramsal anlaması zayıftır. Çözüm prosedürü ile ilgili yüzeysel bilgi sahibi olmasından dolayı hangi işlemi neden yaptığının farkında olmadığından yorum yapma gereği duymamıştır. Efe'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru bir çözüm yaptığından, tek tip akıl yürütme kullandığından ve yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden MR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

-Efe'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Efe: Hocam bir soruda öğrenmiştim. Masaya x deriz.

Mülakatçı: Neden?

Efe: Çünkü bilinmiyor. Oraya oturuyorlar. 4 er oturursa $4x + 20$ olur. 6 şar oturursa $6x - 6$ olur.

Mülakatçı: Peki neden $6 \cdot (x - 1)$ dedin?

Efe: Bir dakika hocam. Bir masa boş kalıyor hocam. x masa x ten 1 çıkarınca $x - 1$. Sonra işlemi kendime göre çözdüm. Karşıya attım. Öylece 7 buldum.

Mülakatçı: Peki $4x + 20 = 6x - 6$ yazmışsın ya. İki denklemi neden birbirine eşitledin?

Efe: Sonucu bulmak için. Çünkü ikisi aynı olması gerekir.

Mülakatçı: Neden?

Efe: Misafirleri bulmak için hocam. Yoksa kaç misafir olduğunu bulamayız. Pardon hocam masayı bulmak için bir masa 7 ise ters işlemle sonucu buluruz.

Mülakatçı: Bulabilir misin?

Efe: Hocam $4x + 20 \cdot 4 = 28, 28 + 20 = 48$ bu heralde misafir sayısı. $6 \cdot 7 = 42$, 42 bir masaya da 6 kişi gelir. $42 + 6 = 48$ olur. Eşit olur. Yani misafir sayısı 48 olur. Böyle buldum hocam.

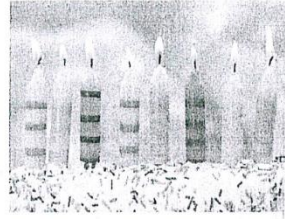
Mülakatçı: yani misafir sayısının 48 olduğunu mu düşünüyorsun?

Efe: Evet.

Mülakatçı: Doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Efe: Yani hocam böyle giderek bulduğum için doğru yaptığımı düşünüyorum.

Mülakatçı: Peki



Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4' er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş kalır.

kalır.

a) Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

Masa = X $\Rightarrow 4x + 20$ $6'şar = 6 \cdot (x - 1)$

4'er oturursa

Masaya, x dedim. Sonra işlemi $4x + 20 = 6 \cdot (x - 1)$ $20 - 6 = 6x - 4x$

Kendime göre şöyledim.

$4x + 20 = 6x - 6$ $14 = 2x$

$14 \div 2 = 7$ $x = 7$

Şekil 4.38. Efe'nin üçüncü probleme ait çözümü

Efe'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı ii) denklem, sayılar bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Masa sayısı” matematiksel bir özellik olmamasına rağmen gerçek yaşam bileşenidir. Efe problemin çözümü için masa sayısı bileşeni ile x değişkenini eşleştirmiştir. Sonrasında problemde verilen sözel ifadelerin karşılığı olacak cebirsel ifadeleri yazmıştır. Yazdığı her bir cebirsel ifade doğru ve matematiksel özellik olarak kabul edilebilirdir.

➤ Efe ilk olarak problemde verilen durumların karşılığı olacak cebirsel ifadeleri yazmıştır. Sonrasında bu ifadeleri birbirine eşitleyerek bir denklem kurmuştur. Fakat Efe denklemi neden kurduğu ile ilgili mantıklı açıklamalar yapamamıştır. Efe'nin “sonucu bulmak için. Çünkü ikisi aynı olması gerekir. Misafirleri bulmak için hocam. Yoksa kaç misafir olduğunu bulamayız. Pardon hocam masayı bulmak için bir masa 7 ise ters işlemle sonucu buluruz.” ifadesi bu durumu destekler niteliktedir. Sonrasında denklem çözümünde işlem hatası yaparak masa sayısını 7 bulmuştur. Problemin çözümünün masa sayısını bulmakla sınırlı olmadığını farkında olup denklemde yerine yazarak 48 cevabını bulmuştur. Yine dikkatsizlik hataları yaparak yanlış sonuç bulduğu için masa sayısını bulurken yaptığı hatasını da fark etme imkânı olmamıştır. Kendince

işlemlerini kontrol ederek yaptığı için doğruluğu konusunda tereddüt yaşamamıştır. Efe'nin akıl yürütme türünün önceden gördüğünü “*hocam bir soruda öğrenmiştim*” cümleleriyle ifade ettiği düşünüldüğünde bilinen bir algoritmayı kullanarak çözüme ulaştığı için AR akıl yürütme türünün özelliklerini taşıdığı söylenebilir.

➤ Efe değişkenlere anlam yüklemekte ve denklem kurmakta zorlanmamıştır. Bu ifadeleri zorlanmadan ve doğru yazmasının nedeni önceki deneyimlerinden “*bir sözel ifadeye karşılık gelen cebirsel ifade*” kazanımını edinmesinden kaynaklanmış olabilir. Fakat Efe genel olarak mantıksal tartışmalardan yoksun, etkili açıklamaları olmayan yüzeysel bir akıl yürütme yapısı sergilemiştir. Doğru bir problem kuran Efe'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütmeye sahip olduğundan ve yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden AR_{dgy} olarak belirlenmiştir.

-Efe'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Efe: *hocam burada üye iken direk 15 TL veririz. Ama bu (üye olan) daha karlıdır. Ama üye olan 15 TL fazla verir. (Soruyu okuyor)*

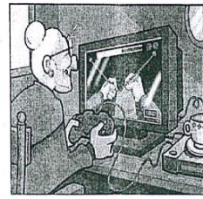
Mülakatçı: *evet.*

Efe: *Hocam burada üye olmasaydı diyor. O zaman 15'i çıkarırız. Çünkü üyelik parası. 50 kalır. 50'yi 2'ye böldüm 25 DVD buldum. Hocam üye olmayanların bir DVD kiralama parası 3 TL olduğu için*

$25.3 = 75$ t l öder. Yani 15 t l zarar eder.

B Şıkkı:

Efe: *Burada yazarak buldum hocam. 15 TL yi direk başa yazdım. Üye olan biri ve üye olmayan biri için giderek 15, 3, 17, 6 diye en sonunda 48 de ikisi de eşit oldu. Yani en az 16 DVD olur.*



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcayacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

$$\begin{array}{r} 65 \\ -15 \\ \hline 50 \end{array}$$

- b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

16 DVD = 32 TL

47

15 TL

2 TL 2 TL 2 TL

2 TL 2 TL 2 TL

2 TL 2 TL 2 TL

2 TL 2 TL 2 TL

2 TL 2 TL 2 TL

3 TL 3 TL 3 TL

3 TL 3 TL 3 TL

3 TL 3 TL 3 TL

3 TL 3 TL 3 TL

3 TL 3 TL 3 TL

3 TL 3 TL 3 TL

16 = 48

16 DVD

Günlük 3.16 = 48 'dir. Ama

Üye ücreti 15 TL 16.2 = 32 + 15 (ücreti) = 47 TL 16 gün

Şekil 4.39. Efe'nin dördüncü probleme ait çözümü

Efe'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Efe sorunun a şıkkında zorlanmadan aritmetik işlemleri takip ederek sonuca ulaşmıştır. Yaptığı işlemler problemin çözümüne yönelik kabul edilebilirdir. b şıkkı için “sayarak” sonucu bulmuştur. “sayarak yapma” cevaba ulaştırabilecek bir yöntem olmasına karşın matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Çünkü bu yöntem büyük sayılarla uğraşmak gerektiğinde cevap veremeyebilir.

➤ Efe soruyu okuduktan sonra üyelik ücreti olan 15 TL yi çıkararak çözüme başlamıştır. Aritmetik işlemler yaparak ilk olarak DVD sayısını bulmuş sonrasında ise üye olmayan birinin ödemesi gereken ücreti bulmuştur. Efe sorunun a şıkkı için kolaylıkla sonucu bulmuştur. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini göstermektedir. B şıkkında ise, sayarak yapmıştır. Bu çözümünü” Burada yazarak

buldum hocam. 15 TL yi direk başa yazdım. Üye olan biri ve üye olmayan biri için giderek 15, 3, 17, 6 diye en sonunda 48 de ikisinde eşit oldu. Yani en az 16 DVD olur.” cümleleriyle ifade etmiştir. Yani Efe DVD sayısını aynı tutup sayarak kar ettiği zamanki DVD sayısını bulmuştur. Yaptığı işlem anlamında bakıldığında alternatif çözüm yollarını düşünmeksizin ilk aklına gelen sayarak yapma yöntemini kullanmıştır.

➤ Efe sorunun a şıkında zorlanmadan çözümü yapmıştır. Bu durum Efe'nin soruyu anlamada bir sıkıntısının olmadığını ve belli bilgi birikimine sahip olduğunu göstermektedir. Fakat b şıkında çözüm için sayarak yapmayı seçmiştir. Bu durumun sebebi farklı çözüm yöntemi bilmemesi veya düşünememesi olabilir. Efe'nin a şıkkı için yaptığı işlemlerin farkında olduğu b şıkında ise kolay yapabileceği bir işlemi yapmayı seçtiği görülmüştür. Efe'nin genel olarak aritmetik işlemleri yapmada sıkıntı yaşamamıştır fakat düşünce olarak yüzeysel bir düşünme tarzı vardır. Doğru çözüm yapan Efe'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürüttüğünden ve yüzeysel düşünme tarzı sergilediğinden AR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Efe'nin beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Efe: Hocam 4 kare için 13. Ben içindekileri saymadan gittim. İşte her birine 3 kullanılıyor. 16 üçer üçer ine ine her bir kare fazlalaştırırsak giderek buldum.

Mülakatçı: Aralardakileri saymadın. Üçer üçer artırdın öyle mi?

Efe: Evet hocam. Aradakiler hocam bunları üçer üçer gittim. 16 kibrit çöpü ile 5 kare öyle buldum hocam.

Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

Efe: Çünkü teker teker gittiğim için daha anlaşılır olduğunu düşünüyorum.

Mülakatçı: Peki başka bir yöntemle yapılabilir miydi?

Efe: eee. $4x =$ hocam denklemle yapılır mı? Eee. Hocam istediğiniz yöntemle yapabilirsiniz demiştiniz.

Mülakatçı: Evet doğru. Sadece merak ediyorum. O yüzden sordum

Efe: Hocam yok yani düşünmem lazım. Yok, yani yapamıyorum.

Mülakatçı: Genel olarak ne düşündün sorularla ilgili?

Efe: Bazılarının kolay, bazılarının zor olduğunu düşündüm?

Mülakatçı: hangi sorular zor geldi?

Efe: 3. Soru problem kurma, birde 5. Soru karşıya atarken zorlandım.

Mülakatçı: Peki daha önce böyle bu tip sorular görmüş müydün?

Efe: görmüştüm ama çözmemiştim.

Mülakatçı: Bazılarını görmüştüm ama o zaman bilmiyordum.

Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?

16 = 5 kare	25 = 6 kare	34 = 11 kare	46 = 15 kare	58 = 19 kare
19 = 6 kare	28 = 7 kare	37 = 12 kare	49 = 16 kare	61 = 20 kare
22 = 7 kare	31 = 10 kare	40 = 13 kare	52 = 17 kare	64 = 21 kare
		43 = 14 kare	55 = 18 kare	67 = 22 kare
				70 = 23 kare
				73 = 24 kare

b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?

Zaten yetersiz yöntemle yaparsak doğru olduğu anlaşılır.

Cevabımı yetersiz yönt. ile buldum.

Şekil 4.40. Efe'nin beşinci probleme ait çözümü

Efe'nin beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) kibrit çöpü sayısı ii) kare sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Efe'nin belirttiği “kibrit çöpü sayısı” ve “kare sayısı” matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmamasına rağmen gerçek dünya bileşenidir. Efe çözüm prosedürü olarak “sayarak yapma” yı seçmiştir. Bu çözüm yöntemi sınırlı durumlarda doğru cevaba götürebilir fakat matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir.

➤ Efe soruyu çözmek için soruda verilen örüntüyü devam ettirmiştir. Yani teker teker çizerek çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Bulduğu sonuç doğrudur fakat Efe daha büyük sayılarla karşılaştığı zaman bu çözüm yöntemini kullanamayacağı için geçerli bir yöntem olarak düşünülemez. Efe çözümünü “Hocam 4 kare için 13. Ben içindekileri saymadan gittim. İşte her birine 3 kullanılıyor. 16 üçer üçer ine ine her bir kare fazlalaştırırsak giderek buldum.” şeklinde ifade etmiştir. Ayrıca Efe alternatif çözüm yöntemlerini düşünmeden direk bu yöntemi seçmiştir. Bu anlamda düşünüldüğünde Efe herhangi bir tartışma ortamı oluşturmadan cevap verme eğilimindedir. Bu anlamda

düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini gösterdiği söylenebilir. Efe çözümünün doğruluğu hakkında yorum yapamazken, alternatif çözüm yöntemi olarak denklem ile yapılabileceğini fark etmiştir fakat emin olmamakla birlikte yapma cesaretini gösterememiştir. Bu durumu katılımcının “*eee. $4x=$ hocam denklemle yapılır mı? Eee. Hocam istediğiniz yöntemle yapabilirsiniz demiştiniz. Hocam yok yani düşünmem lazım. Yok, yani yapamıyorum.*” cümleleri destekler niteliktedir.

➤ Efe soruyu çözmek için sayarak yapma yöntemini tercih etmiştir. Bunun sebebi bilgi eksikliği, örüntüleri hatırlamama veya sadece bu çözüm yönteminin kolay olması olabilir. Efe belli bilgi birikimine sahiptir fakat Efe'nin sorunun denklemle çözülebileceğini fakat düşünmesi gerektiğini düşünmesi bu konudaki güvensizliği Efe'nin kavramsal anlamasının yetersiz olmasından kaynaklanıyor olabilir. Efe'nin etkili tartışmalar oluşturmada ve açıklamalar yapmada kolay bulduğu yöntemle çözüm yaptığı ve yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğu görülmektedir. Doğru cevaba ulaşan Efe'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel bir bakış açısına sahip olduğundan AR_{dgy} olarak belirlenmiştir.

Efe'nin “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.8’de gösterilmiştir.

Tablo 4.8.

Efe'nin “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Efe	MR _{dgy}	MR _{ogy}	AR _{dgy}	AR _{dgy}	AR _{dgy}

Tablo 4.8 incelendiğinde, Efe'nin incelenen beş problemin ilk iki problemde ezbere dayalı akıl yürütme türüne ve diğer üç tanesinde algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Efe tüm sorulara doğru cevap verirken problemlerin tamamında global akıl yürütme sergilemiştir. Efe akıl yürütme sürecinde tüm sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.9. Hale'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Hale'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hale: Hilal'in $3k$ mesela Hilal'in parası olsun. Hilal'in parasının 3 katının 10 fazlası 31 ise Hilal'in ne kadar parası vardır? Yani

$$3k + 10 = 31$$

$$3k = 31 - 10$$

$$3k = 21$$

$$k = 7$$

buldum.

Mülakatçı: Güzel peki yaptığın çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne düşünüyorsun?

Hale: Sağlama yaparız. k yerine 7 yazarız.

$$3 \cdot 7 = 21$$

$$21 + 10 = 31$$

olur. Doğru olur.

Mülakatçı: Peki problemi kurarken ne düşündün?

Hale: İlk aklıma bu geldi.

Mülakatçı: Peki başka problemler yazılabilir mi?

Hale: Evet.

Mülakatçı: Yazılabilir?

Hale: Nasıl yani?

Mülakatçı: Yani bende farklı bir problem kurabilir miyim?

Hale: Evet.

$3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Hilal'in parasının 3 katının 10 fazlası 31 olduğuna göre Hilal'in ne kadar parası vardır?

Hilal'in parası = k ise

3 katının 10 fazlası = $3k + 10 = 31$ ise

$$3k = 31 - 10 =$$

$$3k = 21$$

$$k = 21 : 3 = 7$$

Hilal'in parası

7 TL'dir.

Şekil 4.41. Hale'nin birinci probleme ait çözümü

Hale'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) Denklem, sayılar, değişken ii) Soru ve gerçek hayat arasındaki dönüşüm bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hale matematiksel özelliklere değinmemiştir. Hale, gerçek hayat ile ilgili modelleme özelliğini tam olarak sağlamamıştır. Çünkü çözümü bulduktan sonra tekrar gerçek hayatla bağdaştırma olan son aşamayı yapmamıştır. Hale'nin denklem çözümü için “eşitliğin sol tarafındaki sayıları işaret değişikliği ve işlem değişikliği yaparak eşitliğin sağ tarafına geçirmesi” bir çözüm prosedürü olarak matematiksel kabul edilir bir özellik değildir. Fakat genel olarak kullanılan sonuca ulaşmak için pratik bir yöntemdir. Çözümün doğruluğu için “sağlama” yapma matematikte kullanılan kabul görmüş doğrulama işlemidir. Bu açıdan matematiksel bir özelliktir.

➤ Hale problem kurarken günlük hayatla ilişkili bir problem kurmuştur. Hale verilen denkleme karşılık başka problemler kurulabileceğinin farkındadır. Fakat kurduğu probleme ve çözümüne dair açıklama yapmadan tartışma ortamı oluşturmadan çözüme varmaya çalışmıştır. Bu yönüyle AR'nin özelliklerini taşımaktadır.

➤ Hale zorlanmadan çözüm yapmıştır. Problem kurarken zorlanmaması ve çözümü rahatça yapmasının sebebi Hale'nin belli bilgi birikimine sahip olmasıdır. Hale doğru ve denkleme karşılık gelebilecek bir problem kurmuştur. Hale denklem çözümünün doğruluğunu bulmak için sağlama yapması gerektiğinin farkındadır. Hale matematiksel özelliklere değinmeden açıklama yapmadan yüzeysel bir düşünme tarzı sergilemiştir. Doğru bir problem kuran Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme sergilediğinden ve yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğundan AR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Hale'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hale: *birinci adımda hata yapmıştır. Çünkü 7 'yi 1/7'ye bölmüş ama -1'i 1/7'ye bölmemiş. Hepsini bölmemiş. Bu yüzden hepsini bölmesi gerekirdi.*

Mülakatçı: *Neden hepsini bölmesi gerekiyor?*

Hale: *Çünkü terazi yöntemiyle yapmış. O yüzden hepsini bölmesi gerekirdi.*

Mülakatçı: *Peki verilen denklemi sen nasıl çözersin?*

Hale: $\frac{1}{7} \cdot 7 = \frac{7}{7}$

$$-1 \cdot \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$$

$$x = \frac{8}{7}$$

$$\frac{1}{7} \cdot 7 = \frac{1}{7}$$

Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

yani, $\frac{6}{7} = \frac{7}{7}$ (yazdı, sonra vazgeçti sildi)

Hale: x yerine $\frac{8}{7}$ koyarım.

Mülakatçı: Neden sildin?

$$7 \cdot \frac{8}{7} - 1 = 8 - 1 = 7$$

Hale: eşit çıkmadı. $6 \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ (yine yazdı sildi)

olur. Böyle doğru yaptım.

Mülakatçı: $7x - 1 = 7$ denklemini çözmemiz isteniyor.

Mülakatçı: Peki bu işlemi yaparken neden -1'i karşıya attın?

Hale: Ben dere yöntemiyle çözeyim.

Hale: Dere yönteminde en son yapılacak işlem diğer tarafa gönderilir. Bu yöntemde böyle.

$$7x - 1 = 7$$

$$7x = 8$$

Mülakatçı: Tamam devam edelim.

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

$$\begin{array}{l}
 7x - 1 = 7 \\
 \text{1. Adım} \quad \left(\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7 \right) \Rightarrow -1 \text{ i de } \frac{1}{7} \text{ ile çarpalım} \\
 \text{2. Adım} \quad x - 1 = 1 \\
 \text{3. Adım} \quad x - 1 + 1 = 1 + 1 \\
 \text{4. Adım} \quad x = 2
 \end{array}$$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

1. adım hatalıdır. Çonko-1'i 7'ye bölmüdüğü için hatalı.

b) Siz bu denklemini nasıl çözersiniz?

Aynı şekilde teras: yöntemi ile çözerdim.

$$\begin{array}{l}
 7x - 1 = 7 \\
 7x = 8 \\
 x = \frac{8}{7}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 7x - 1 = 7 \\
 7x = 8 \\
 x = \frac{8}{7}
 \end{array}$$

Şekil 4.42. Hale'nin ikinci probleme ait çözümü

Hale'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) terazi yöntemi ii) denklem, sayılar ii) aritmetik işlem iv) dere yöntemi bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hale soruda verilen denklem çözümünde hatayı belirlemiştir hatayı “*her terimin $\frac{1}{7}$ ile bölünmemesi*” olarak ifade etmiştir. Fakat $\frac{1}{7}$ ile çarpıldığını söylemesi gerekirdi. Bu ifade anlam açısından matematiksel olarak kabul edilebilir fakat Hale ifade olarak doğru olmayan bir açıklama yapmıştır. Hale'nin bahsettiği “dere yöntemi” matematiksel olarak kabul edilebilir bir yöntem değildir fakat genellikle pratik bir yol olarak öğrencilere anlatılır. Hale'nin ifade ettiği “*Dere yönteminde en son işlem karşıya gönderilir*” ifadesi matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Hale hatayı belirlemiştir fakat hatanın sebebini yanlış ifade etmiştir. Eşitliğin korunumunun ne anlama geldiğinin farkındadır fakat açıklamalarında yer vermemiştir. Hale denklemin doğru çözümünü yapmaya çalışırken gereksiz ve anlamsız aritmetik işlemler yapmıştır sonrasında yapamadığını fark edip strateji değişikliğine gitmiştir. Hale denklem çözümünde ilk olarak eşitliğin korunumundan hareketle denklemi çözmeyi denemiştir yapamayınca hızlıca strateji değiştirerek dere yöntemi ile yapmaya karar vermiştir ve katılımcı bilinen algoritmaları eksiksiz uygulayarak cevaba ulaşmıştır. Bu açıdan değerlendirildiğinde iki farklı algoritma denendiğinden Hale'nin akıl yürütme türü DAR akıl yürütme türü olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Hale'nin zorlanmasının nedeni eşitliğin korunumunu temel alan çözüm yöntemini tam anlamıyla anlamamış olmasından kaynaklanmaktadır. Çözümdeki hatanın sebebini açıklarken yanlış ifade etmesi dikkatsizlik hatası yapmasından kaynaklanmış olabilir. Hale yer yer tartışma ortamında kavramsal açıklamalar yapıp yer yer yüzeysel bilgi vermiştir. Doğru sonuca ulaşan Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürüttüğünden ve yer yer yüzeysel yer yer derin düşünme tarzı sergilediğinden DAR_{dgx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Hale'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hale: *x masa sayısı verdim. 4 er kişi $4x + 20$ bu ilk durumun denklemi. Diğeri $6x$, bir masa boş kalıyorsa bir*

masada 6 kişi oturabilir. $6x - 6$ yazarız. $4x + 20 = 6x - 6$ olur.

Mülakatçı: Peki iki denklemi birbirine neden eşitledin?

Hale: ...

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Hale: Çünkü eşit ikiside.

Mülakatçı: Yani eşit olma sebebi nedir?

Hale: Çünkü diyor ki kafede 20 kişi fazla kalıyor. Haa eşit değil.

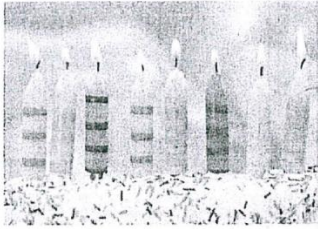
Mülakatçı: 20 kişi fazla

Hale: Eşit olmuyor. Burada 20 kişi fazla. Burada 6 kişi eksik. Eee ama eşit değil.

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun? Yanlış yaptığını mı düşünüyorsun? Kafan mı karıştı?

Hale: Eşit olmuyor. Masa sayısı x ya 20 kişi fazla oluyor. Sonra da 6 kişi az geliyor. Bence eşit olmuyor.

Mülakatçı: tamam devam edelim.



Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4' er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş kalır.

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

$$4x + 20 = 6x - 6$$

x = masa sayısı olarak yazdım.

Şekil 4.43. Hale'nin üçüncü probleme ait çözümü

Hale'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı, ii) denklem, sayılar bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hale'nin bahsettiği “masa sayısı” bir matematiksel kabul edilir bileşen olmasa da gerçek dünya bileşenidir. Hale problemde yer alan her bir duruma karşılık gelebilecek cebirsel ifadeyi yazmıştır. İlk duruma uygun cebirsel ifadeyi $4x + 20$ ve ikinci durum için de $6x - 6$ yazmıştır. Sonrasında iki ifadeyi birbirine eşitlemek istemiştir. Fakat bu ifadelerin her biri denklem değil birer cebirsel ifadedir denklem

olabilmesi için eşitliğin olması gerekir o açıdan halenin ifadesi kabul edilebilir bir özellik değildir. Modelleme özelliğinin ilk iki safhası tamamlandığı halde 3. Safhanın tamamlanmaması nedeniyle modelleme süreci tamamlanamamıştır. Dolayısıyla modelleme özelliği kabul edilebilir bir özellik olmamıştır.

➤ Hale ilk olarak problemde yer alan durumlar için cebirsel ifadeler yazmayı denemiştir. Her bir cebirsel ifadeyi açıklayarak ve doğru bir şekilde yazmıştır. Sonrasında görüşmecinin *iki cebirsel ifadeyi birbirine neden eşitledin?* sorusu ile Hale ne yaptığını açıklayamamış ve ifadelerin eşit olup olmadığı konusunda tereddütte kalmıştır. Bu durumu Hale'nin *“Çünkü diyor ki kafede 20 kişi fazla kalıyor. Haa eşit değil. Eşit olmuyor. Burada 20 kişi fazla. Burada 6 kişi eksik. Eee ama eşit değil.”* ifadeleri destekler niteliktedir. Hale tereddüte düştükten sonra ifadelerin eşit olmayacağını düşünerek çözümüne devam etmeme yolunu seçmiştir. Hale sadece hatırladığı kadarıyla işlemler yapmıştır. Bu yönüyle MR'nin özelliklerini taşımaktadır.

➤ Hale problem durumuna uygun cebirsel ifade yazabilmiştir. Bunun sebebi olarak 6. sınıf kazanımı olan “bir sözel ifadeye karşılık gelen cebirsel ifadeyi yazma” kazanımını başarıyla öğrenmiş olduğu söylenebilir. Fakat değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmıştır. Soruda verilen problemin denklemini yazmak için yapması gereken ilk durumlara ait cebirsel ifadeleri yazma noktasında problem yaşamamış olsa da bir bütün olarak problemi çözebilecek denklemi yazmıştır fakat anlamlandıramadığı için yazdığı denklemden emin olmayıp düşüncesinden vazgeçmiştir. Bu durumun sebebi yaptığı işlemlere dair kavramsal anlamalarının zayıf olması ve kendine olan güvensizliği olabilir. Hâlbuki Hale etkili ve mantıklı tartışmalar yapmış olsaydı daha doğru bir düşünceye sahip olabilirdi. Hale genel hatlarıyla yüzeysel bir düşünme süreci geçirmiştir. Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru sonuca ulaştığından, tek tip akıl yürütme ve yüzeysel düşünme tarzı sergilediğinden MR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Hale'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hale: Üyelik ücreti 15 TL imiş. 65 TL harcamış. O yüzden $65 - 15 = 50$ TL

oluyor. (Düşünüyor) Üye olanlar 2 TL eee.

Mülakatçı: Ne oldu ne düşünüyorsun?

Hale: 50'yi 2 ye bölersek 25 DVD kiralamış. 3 TL üye olmayanlar, $25 \cdot 3 = 75$ TL öderdi.

B Şıkkı:

Hale: Üye olan 2 TL, üye olmayan 3 TL.

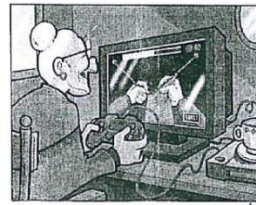
Mülakatçı: Evet.

Hale: ... En az bir DVD kiralaması gerekir. Biri 2 TL diğeri 3 TL. Zaten avantajlı.

Mülakatçı: Nereden anladın bir DVD olduğunu?

Hale: Üye olan 2 TL. Üye olmayan 3 TL oluyor. Bir DVD kiraladığında daha avantajlı oluyor üye olmayan birine göre (Üyelik ücretini hiç düşünmedi)

Mülakatçı: Tamam



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcıyacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

15 = üyelik ücreti

$$65 - 15 = 50 \text{ TL}$$

$$50 : 2 = 25 \text{ tane DVD kiralamış}$$

- b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

$$\text{Üye olan biri} = 1 \text{ DVD} - 2 \text{ TL}$$

$$\text{Üye olmayan biri} = 1 \text{ DVD} - 3 \text{ TL}$$

En az 1 DVD kiralaması gerekir.

Şekil 4.44. Hale'nin dördüncü probleme ait çözümü

Hale'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik parası ii) çözüm prosedürü iii) DVD parası bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik parası” ve “DVD parası” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Hale sorunun a şıkkında zorlanmadan aritmetik işlemleri takip ederek sonuca ulaşmıştır fakat b şıkkında ise DVD ücretleri arasındaki fiyat farkını düşünerek cevap vermiştir. Bu yöntem

matematiksel olarak kabul edilebilir çünkü bu düşünceden hareketle doğru sonuca ulaşabilirdi fakat katılımcı ulaşamamıştır.

➤ Hale'nin a şıkkı ile ilgili çözümü doğrudur ve açıklamalar yaptığı için ne yaptığına farkında olduğu söylenebilir. Bu anlamda soruyu anlamada sıkıntısının olmadığını söylemek mümkündür. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini göstermektedir. b şıkkı için üyelik ücretini düşünmeden direk DVD ücretleri arasındaki fiyat farkının 1 TL olduğunu 1 DVD alsalar dahi karlı olacağını söylemiştir. Bu durumu Hale'nin " *En az bir DVD kiralaması gerekir. Biri 2 TL diğeri 3 TL zaten avantajlı.*" ifadeleri destekler niteliktedir. Hale'nin soruda geçen üyelik ücretini hiç düşünmeden çözüm yaptığı görülmüştür.

➤ Hale'nin zorlanmasının sebebi sorunun b şıkkını anlamaması veya yanlış anlaması olabilir. Etkili tartışmalar yapamaması kavramsal eksikliklerinin olabileceğini akla getirmektedir. Hale'nin a şıkkı için sıkıntı yaşamadan yaptığı işlemleri açıklayarak çözüm yaptığı görülse de b şıkkı için yüzeysel bir bakış açısı hâkimdir. Bu açıdan sınıflama olarak belirsiz olarak kodlanmıştır. Yanlış sonuca ulaşan Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme ve yüzeysel bir bakış açısı sergilediğinden AR_{gy} olarak belirlenmiştir.

-Hale'nin beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hale: Burada 4, 4 sonra 3, 3 gitmiş. Burada 4'ün bir fazlalığını çıkardım. $73 - 1 = 72$ oldu. Onu da $72 : 3 = 24$ oldu. O yüzden 24 kare olur.

Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığını nasıl anladın?

Hale: ... (Düşünüyor) Bence 25 tane kare.

Mülakatçı: Neden öyle düşündün? Neden karar değiştin?

Hale: Çünkü $13 - 1 = 12$, $12 : 4 = 3$ tane. Burada 4 tane kare var. Burada da $24 + 1$ yapınca 25 kare olur.

Mülakatçı: burada 1'i çıkardın 3'e böldün.

Hale: Hani burada çıkardık ya...

Mülakatçı: Evet.

Hale: Hayır çıkarmayacağız. 73'ü 13'e böleceğiz. 26,3 çıkıyor.

Mülakatçı: neden kafan karıştı?

Hale: İşlemi burada deniyorum doğru çıkmıyor.

Mülakatçı: İşlem hatası da yapıyor olabilirsin.

Hale: Şimdi 4, 3, 3, 3 $73 - 1 = 72$ olur. $72:3 = 24$ olur. Çıkardığımız 1'i tekrar eklersek $24+1=25$ olur.

Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

Hale:

$$13 - 1 = 12$$

$$12:4 = 3$$

$$3 + 1 = 4$$

kare olur.

Mülakatçı: tamam peki. Sorularla ilgili ne düşündün?

Hale: Biraz zor geldi.

Mülakatçı: neden?

Hale: çünkü burada 4, 3, 3 gidiyor. Karıştırıyor çözümü.

Mülakatçı: daha önce bu tarz sorular çözdün mü?

Hale: Hayır.

Mülakatçı: acaba ilk defa karşılaştığın için mi zor geldi?

Hale: Olabilir.

Mülakatçı: hala tereddütün mü var soruyla ilgili?

Hale: Ayy. Önceki doğruydu.

Mülakatçı: Ne oldu?

Hale:

$$73 - 1 = 72$$

$$72:3 = 24$$

tane.

Burada da

$$13 - 1 = 12$$

$$12:3 = 4$$

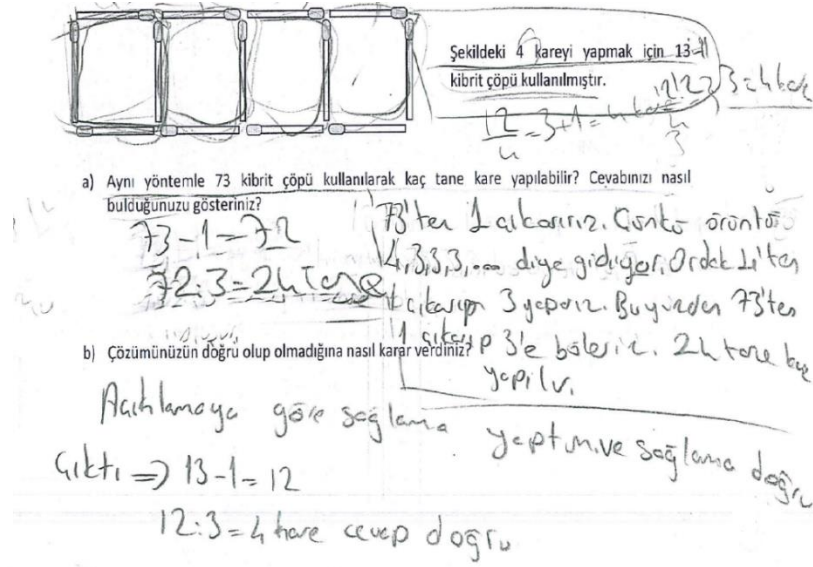
olur.

Mülakatçı: şimdi cevabından emin misin?

Hale: evet 24.

Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığını üstteki ifade de mi deneyerek buldun?

Hale: evet. 13 tane ile 4 tane olacak. (yapığı işlemi onda denedi ve doğru yaptığını söyledi)



Şekil 4.45. Hale'nin beşinci probleme ait çözümü

Hale'nin beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) kare sayısı ii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hale'nin belirttiği "kare sayısı" matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmamasına rağmen gerçek dünya bileşenidir. Hale çözüm prosedürü olarak aritmetik işlemleri takip etmiştir. Yapılan aritmetik işlemler problemin çözümü için doğru ve matematiksel olarak kabul edilebilirdir.

➤ Hale aritmetik işlemler takip ederek çözüme ulaşmıştır. Çözümünü "Burada 4, 4 sonra 3, 3 gitmiş. Burada 4'ün bir fazlalığını çıkardım. $73-1=72$ oldu. Onu da $72:3=24$ oldu. O yüzden 24 kare olur." şeklinde yapmıştır. Fakat doğru yapıp yapmadığı ile ilgili düşünürken karar değiştirmiş ve hatalı bir sonuca ulaşmıştır. Hale soruda verilen şekle göre kendi işlemlerini karşılaştırmak istemiş fakat işlem hatası yaptığı için çözümünün de hatalı olduğunu düşünmüştür. "Çünkü $13-1=12$, $12:4=3$ tane. Burada 4 tane kare var. Burada da $24+1$ yapınca 25 kare olur." cümleleriyle çözümünü tekrar yapmıştır. Fakat çözümü ile ilgili bir türlü emin olamamıştır ve düşünmeye devam etmiştir. En sonunda Hale işlem hatasını fark edip ilk yaptığı çözümün doğru olduğunu söylemiştir. Fakat Hale'nin etkili tartışmalar yapmadığı bir dizi işlemleri peş peşe yaparak sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. Bu anlamda Hale'nin düşünce yapısının AR ye yakın olduğu söylenebilir.

➤ Hale'nin zorlanmasının sebebi belli bilgi birikimine sahip olmasına rağmen kavramsal anlamasındaki eksiklik veya bu tip sorularla ilk defa karşılaşması olabilir. Hale'nin kendine güvensiz bir şekilde işlem yaptığı ve genel olarak yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğu görülmektedir. Doğru sonuca ulaşan Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme ve yüzeysel düşünme tarzı sergilediğinden AR_{dgy} olarak belirlenmiştir.

Hale'nin "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.9'da gösterilmiştir.

Tablo 4.9.

Hale'nin "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Hale	AR_{dgy}	DAR_{dgy}	MR_{ogy}	AR_{ygy}	AR_{dgy}

Tablo 4.9 incelendiğinde, Hale'nin incelenen beş problemin üçünde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne, bir tanesinde sınırlandırılmış algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne ve bir tanesinde de ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Hale dördüncü problem dışındaki tüm sorulara doğru veya muhtemel doğru cevap verirken problemlerin tamamında global akıl yürütme sergilemiştir. Hale akıl yürütme sürecinde genellikle yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.10. Hülya'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Hülya'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya'nın birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hülya: Ali Ayşe'nin yaşının 2 katından 10 fazladır desek $2x + 10$ oluyor. Ayşe'de x oluyor. İkisini toplayınca $x + 2x + 10 = 31$ 'e eşit olunca oluyordu.

Mülakatçı: Peki neden böyle bir problem kurdun?

Hülya: Kolaydı.

Mülakatçı: Başka problem kurulabilir miydi?

Hülya: Evet.

Mülakatçı: Peki kurduğun denklemi nasıl çözdün?

Hülya: Şimdi, $3x + 10 = 31$. İlk önce bilinmeyenle sayılar bir tarafa geldi.

$$3x + 10 = 31$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

olur.

Mülakatçı: Artı 10'u neden karşı tarafa eksi 10 olarak geçirdin?

Hülya: Çünkü eşittirin karşı tarafına her sayı artı ise eksi, eksi ise artı, çarpı ise bölü, bölü ise çarpı olurdu.

Mülakatçı: Peki sebebini biliyor musun?

Hülya: Bilmiyorum.

Mülakatçı: Peki, $k = 7$ buldun. Çözümün doğru olup olmadığını nasıl anlarsın?

Hülya: Şimdi Ali Ayşe'nin iki katından 10 fazla. 7 Ayşe'nin yaşı. $2 \cdot 7 = 14$, $14 + 10 = 24$ Ali olur. $24 + 7 = 31$ olur. Yani doğru olduğunu kanıtlıyor.

3k + 10 = 31 denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Ali Ayşe'nin 2 katından 10 fazladır
Yaşları toplamı 31. PSP Ayşe kaç yaşındadır?

$2k + 10 = 31$

$3k + 10 = 31$

$3k = 21$ $k = 7$

Ayşe 7
Ali = 24

Şekil 4.46. Hülya'nın birinci probleme ait çözümü

Hülya'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hülya'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) Sayılar, değişkenler, bilinmeyen, denklem ii) Soru ile gerçek hayat arasında dönüşüm iii) Aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hülya denklemle gerçek hayat arasında ilişki kurarak yaş problemi oluşturmuştur. Modelleme özelliği kabul edilebilir bir özelliktir. Hülya denklem çözümünde “sayıları karşı tarafa geçirme” ve “karşı tarafa geçirirken işaret değiştirme” kurallarını kullanmıştır. Bu kuralların matematiksel kabul edilebilir özelliği yoktur fakat doğru sonuca ulaştırabilecek pratik bir yol olarak kullanılmaktadır.

➤ Hülya bu denkleme ait sadece bir problem değil birden fazla problem kurulabileceğinin farkındadır. Problemi rahatlıkla ve zorluk yaşamadan kurmuştur. Problemin çözümünde ise hiç düşünmeden sayıları bir tarafa, bilinmeyenleri bir tarafa toplayarak işlem yapmıştır. Hülya problemi oluştururken kontrol ederek kendinden emin bir şekilde problem kurmuştur ve kurduğu problemin denklemi karşılayıp karşılamadığını kontrol etmiştir. Problemin doğruluğunu denklemi çözdükten sonra tekrar gerçek hayatla ilgili problemine dönüş yaparak sağlamasını yapmıştır. Fakat denklem çözümünde kullandığı algoritmanın matematiksel temelini bilmeden, bu kuralları kullanarak yaptığı için bilinen bir algoritma kullandığı söylenebilir. Bu yönüyle Hülya'nın akıl yürütme süreci AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Hülya problemi doğru kurmuştur. Doğru kurup kurmadığını yaptığı işlemlerle kanıtlamıştır. Hülya'nın zorlanmamasının nedeni, önceden bu tarz problemlerle karşılaşmış olması ve belli bilgi birikimine sahip olmasıdır. Kullandığı aritmetik işlemlerin mantığı olmadan direk prosedürü uygulayarak doğru problem çözümüne ulaşmıştır. Önceden kullandığı çözüm prosedürün mantığını kavramadan direk algoritmayı uygulamayı seçmiştir. Doğru bir problem kuran Hülya'nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme ve yüzeysel düşünme tarzı sergilediğinden AR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Hülya'nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya'nın ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hülya: Ben denklemi kendim çözdüğümde farklı sonuç buldum. Yukarıda farklı sonuç var. Ben dere yöntemiyle yaptım. Burada terazi yöntemiyle yapılmış. Terazi yönteminde iki tarafa da yapmış ama bir yeri unutmuş. O yüzden denklem yanlış olmuş. O yüzden eksi 1 ile çarpılmamış. Yanlış olmuş. Ben farklı yöntemle yaptım. Ama iki yöntemde de aynı sonuç çıkması gerekiyordu. Ama burada yanlış.

Mülakatçı: Sen doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın.

Hülya: Denklemi yaparım. x 'i bulurum. Bu denkleme eşit olup olmadığını kontrol ederim olur.

Mülakatçı: Kontrol edebilir misin?

Hülya:

$$7x - 1 = 7$$

$$7x = 8$$

$$x = \frac{8}{7}$$

Dere yöntemiyle yaptığımız gibi $\frac{8}{7}$ $7 = 7$
 oluyor. Bunu yaparsak $7 \cdot \frac{8}{7} = 8$. *doğru yaptım.*

$$8 - 1 = 7,$$

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

$$7x - 1 = 7$$

1. Adım $\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7$

2. Adım $x - 1 = 1$

3. Adım $x - 1 + 1 = 1 + 1$

4. Adım $x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

Yanıt: J. ADIM
 $\frac{1}{7}$ ile bütün sayıları çarpması gerektirir.
 Ama -1'ı çarpmamış.

b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

-1'ı karşıya +1 olarak gönderirim.
 $7x = 8$ burada $\frac{8}{7}$ 'e eşit olur.

Şekil 4.47. Hülya'nın ikinci probleme ait çözümü

Hülya'nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hülya'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) terazi yöntemi ii) dere yöntemi iii) Denklem, sayılar iv) aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hülya soruda verilen denklem çözümünün hatalı olduğunu fark etmiştir. Hülya'nın "terazi yöntemi" diye bahsettiği yöntem öğrenme ortamında verilen eşitliğin korunumu ile ilgili bir yöntemdir. Dere yöntemi öğrenme ortamında gösterilen eşitliğin sol tarafındaki sayıların eşitliği sağ tarafına geçirilmesi ile ilgili bir yöntemdir fakat matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Hülya verilen denklem çözümünde ki hatayı denklemi çözüp kendi cevabı ve sorudaki cevabı karşılaştırarak bulmuştur. Hülya denklem çözümündeki hatanın sebebini terazi yöntemi yani eşitliğin korunumu ilkesine dayandırarak anlatmıştır. Bu anlamda Hülya'nın akıl yürütme türü CR akıl yürütme türüne girmektedir. Hülya'nın ne

yaptığının farkında olduğu ve işlemlerini açıklayabildiği görülmüştür. Sadece Hülya denklem çözümünde bilinen algoritmaları kullanarak çözüm yapmıştır bu yönüyle Hülya'nın akıl yürütme türü AR akıl yürütme türü olarak sınıflandırılabilir.

➤ Hülya zorlanmadan denklem çözümündeki hatayı belirlemiştir. Hülyanın zorlanmamasının sebebi belli bilgi birikimine sahip olması ve terazi yöntemi yani eşitliğin korunumu ilkesini temel alan çözüm yöntemini bilmesinden kaynaklanmaktadır. Hülya'nın genel hatlarıyla açıklamaları ile uyumlu doğru sonuçlar elde ettiği, kendinden emin ve kesin tavrıyla ne yaptığının farkında olduğu görülmektedir. Doğru bir çözüm yapan Hülya'nın matematiksel akıl yürütme türü, iki farklı tip akıl yürütme ve derin bir düşünme tarzı sergilediğinden CR_{ald} olarak sınıflandırılmıştır.

-Hülya'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya'nın üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hülya: Şimdi ilk durumda 4 er kişi oturunca 20 kişi $4x - 20$ olur.

Mülakatçı: Neden öyle yazdın?

Hülya: 4 er masa sayısını bilmediğimiz için x dedim. 20 kişi ayakta kaldığı için $4x - 20$ olur. 6 şar lı oturduklarında 1 masa boş kalıyormuş. 6. $(x - 1)$ yaptım. Çünkü masayı söylemiş. Denklemi bulunca $4x - 20 = 6(x - 1)$

Mülakatçı: İki denklemi neden eşitledin?

Hülya: Çünkü ikiside eşit. İkisi de aynı kişi. Mesela $10=11-1$ ikisi de aynı farklı şeylerde olsa da ikisinin cevabı da aynı olmak zorunda.

Mülakatçı: Neden?

Hülya: Çünkü ikisi de aynı ama farklı şekilde söylemiş.

Mülakatçı: Peki sonucu ne buldun?

Hülya: -7.

Mülakatçı: Soruya uyarladığında ne demek istiyor?

Hülya: -7 olursa misafir sayısı -48 olur. Bence ben yanlış yaptım.

Mülakatçı: Neden?

Hülya: -48 misafir olamaz. Artı olması gerekir. -20'yi +20 yapsam farklı olurdu.

Mülakatçı: Doğrusunu yapmak ister misin?

Hülya: $4x + 20$

Mülakatçı: neden artı 20 dedin?

Hülya: 20 kişi ayakta kalmış. Fazladan var o yüzden.

Mülakatçı: Güzel.

Hülya:

$$4x + 20 = 6. (x - 1)$$

$$4x + 20 = 6x - 6$$

$$2x = 26$$

$$x = 13$$

$$4 \cdot 13 + 20 = 6 \cdot (13 - 1)$$

$$52 + 20 = 77$$

$$72 = 72$$

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Hülya: Denklemi eşitlemeye çalışıyorum. Eşitliği sağlamaya çalışıyorum.

$4x + 20 = 6 \cdot (x - 1)$ Burayı artı yaptım (20'yi gösteriyor), burayı eksi yaptım (x-1 i gösteriyor) ... eee.

Mülakatçı: Yani o zaman kurduğun denklemden emin değil misin?

Hülya: Değilim. Şimdi hocam ben bu tür soruları hemen yapamıyorum. Biraz düşününce yapıyorum. Burada şık olmadığı için deneme şansında olmuyor. Eee bu denklemi ikisi de eksi olunca olmadı. İkisini de artı yapınca uyabilir.

$$4x + 20 = 6 \cdot (x + 1)$$

$$4x + 20 = 6x + 6$$

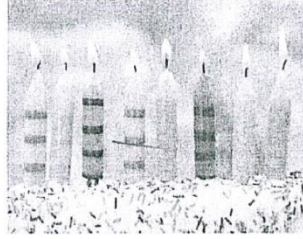
$$14 = 2x$$

$$x = 7$$

7 olacak.

Mülakatçı: Şimdi doğru yaptığına emin misin?

Hülya: Evet eminim.



Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4' er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş

kalır.

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

Handwritten solution:

$$4x - 20 = 6(x - 1)$$

$$4x - 20 = 6x - 6$$

$$2x = -14$$

$$x = -7$$

Handwritten explanation:

x masa sayısı olur
Her masaya 4 kişi oturursa
Her masaya 6 kişi oturursa 20 kişi
oturursa 1 masa artarsa
yaptığımız denklemle sonucu
bulabiliriz.

Şekil 4.48. Hülya'nın üçüncü probleme ait çözümü

Hülya'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hülya'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem, sayılar ii) eşitlik iii) kişi sayısı iv) masa sayısı bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Masa sayısı” ve “kişi sayısı” matematiksel kabul edilir bir özellik değildir. Fakat gerçek yaşam bileşenidir. Hülya problemde geçen “kişi sayısı” bileşenine x değişkenini atamıştır. Sonrasında Hülya soruda geçen ilk gerçek duruma karşılık gelen cebirsel ifadeyi hatalı yazmıştır. “4 er kişi oturduğunda 20 kişi ayakta kalıyor” sözel ifadesine karşılık gelen cebirsel ifade $4x - 20$ değildir. Bu ifade matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Sonrasında ise “6 şar kişi oturduğunda 1 masa boş kalıyor” sözel ifadesine karşılık olarak $6(x - 1)$ yapmış ve açıklamasını yapmıştır. Bu cebirsel ifade ikinci sözel ifadenin karşılığıdır ve matematiksel özellik olarak kabul edilebilir.

➤ Hülya problemi okur okumaz sözel ifadeleri cebirsel olarak yazmaya başlamıştır. Yazdığı ifadenin ilki yanlıştır bu yüzden yazdığı denklemde yanlış olmuştur. $4x - 20 = 6(x - 1)$ yazmıştır. Hülya denklem hakkında iki cebirsel ifadenin eşitlenmesinin sebebini “Çünkü ikisi de eşit. İkisi de aynı kişi. Mesela $10=11-1$ ikisi de aynı farklı şeylerde olsa da ikisinin cevabı da aynı olmak zorunda.” ifadeleriyle açıklamıştır. Bu açıklaması yaptığı işlemi anlatır niteliktedir. Sonrasında Hülya denklem çözümünü yaparak -7 cevabına ulaşmıştır. Görüşmecinin sorduğu sorudan sonra “-7 olursa misafir sayısı -48 olur. Bence ben yanlış yaptım.” diyerek yaptığı hatayı düzeltmek için mantıksal bir açıklama yapmadan “-20’yi +20 yapsam farklı olurdu.” demiştir. Yani, Hülya'nın yanlış yaptığı noktayı fark etmesi bir tesadüftür ve mantıksal dayanaktan yoksundur. Sonrasında Hülya işlemlerini tekrarlamış ve denklemi doğru bir şekilde çözmüştür fakat yaptığı işlemde emin olamamıştır. Bu durumu “emin değilim. Şimdi hocam ben bu tür soruları hemen yapamıyorum. Biraz düşününce yapıyorum. Burada şık olmadığı için deneme şansında olmuyor. Eee bu denklemi ikisi de eksi olunca olmadı. İkisini de artı yapınca uyabilir.” sözleri destekler niteliktedir. Hülya emin olamadığı için yine bir değişiklik yoluna giderek “Eee bu denklemi ikisi de eksi olunca olmadı. İkisini de artı yapınca uyabilir.” düşüncesiyle tekrar çözüm yapmıştır. Tüm bu durumlar incelendiğinde Hülya'nın ne yaptığının farkında olmadan işlemler yaptığı belirli bir prosedürü takip ettiği fakat kavramsal anlamada problem yaşadığı söylenebilir. Bu açıdan akıl yürütme yapısı AR'nin özelliklerini taşımaktadır.

➤ Hülya'nın zorlanması'nın nedeni, cebirsel ifadeleri yazıp denklemi kurduktan sonra hata yaptığını far etmesi fakat hatasının nedenini düşünmek yerine rastgele işlemler deneyerek doğru sonuca ulaşmak için çabalamasıdır. Hülya mantıksal tartışmalar yapmadan belirli aritmetik işlemleri yaparak kendinden emin olmadan bir süreç ilerletmiştir. Genel olarak açıklama yaparak devam etmesine karşın bu açıklamaların çoğu matematiksel karşılığı olmayan yüzeysel açıklamalardır. Yanlış çözüm yapan Hülya'nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme ve yüzeysel düşünme tarzı sergilediğinden AR_{yyg} olarak belirlenmiştir.

-Hülya'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya'nın dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hülya: Şimdi hocam. Yıllık üyelik ücreti 15 TL eee.

Mülakatçı: sesli düşün

Hülya: Yıl 12 ay dedim. 65 TL ödemiş. $60 - 15 = 50$ oluyor.

Mülakatçı: 50 nedir?

Hülya: üyelik ücreti olmadan fiyatı bulduk. 50'yi 2 ye bölersek 25 buluruz. 25 bunun (üye olanı gösteriyor) ödeyeceği fiyat. 25 ile 3'ü çarparsak da üye olan birinin ödeyeceği fiyatı buluruz.

Mülakatçı: yani bulduğun 25 ne oldu?

Hülya: Üye olanların DVD kiralaması yılda 25 TL ye kiralaması. 50 TL'si eee. Neyse hocam.

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun? Emin olamadın mı?

Hülya: Olamadım. Soruya bakınca kafam karıştı. İkiye bölünce ne buldum, onu bulamadım.

Mülakatçı: Tekrar düşün istersen

Hülya: Üye olan birinin bir DVD kiralaması 2 TL. 25 DVD almış. Üye olmayan biri 25 DVD alsaydı $25.3 = 75$ TL ödemesi gerekiyordu. Üye olan 65 TL ödemiş. 10 TL karı olmuş.

B Şıkkı:

Hülya: Hocam ben burada deneyerek buldum. 16 koydum mesela.

$$16.2 = 32 + 15 = 47$$

$$16.3 = 48$$

çıktı. Yani en az 1 TL kar buluyorum. O yüzden 16.

Mülakatçı: yani tahmin yoluyla 16 olur diye düşündün herhâlde.

Hülya: Evet hocam.



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL'dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiraladı olsaydı kaç TL harcıyacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

Yıl 12 ay
65 - 15 = 50

50 25 DVD
25.3 = 75
10 TL kar

- b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

16 Sonuç olarak deneyerek buldum. 16'yla 2'ye çarptım 32 ederim 47 oluyor. 16'yla 3 çarptım ca 48 oluyor.

Şekil 4.49. Hülya'nın dördüncü probleme ait çözümü

Hülya'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hülya'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Hülya sorunun a şıkında zorlanmadan aritmetik işlemleri takip ederek sonuca ulaşmıştır. b şıkında ise DVD sayısına değerler vererek işlem yapmayı seçmiştir. “Deneme yanılma yoluyla” sonuca ulaşılabilir olması matematiksel gibi görünse de matematiksel olarak kabul edilen bir özellik değildir.

➤ Hülya a şıkkını yaparken problemi karşılamayacak aritmetik işlemler yapmıştır. Yaptığı işlemde hangi işlemi neden yaptığının farkında değildir. Bu durumu Hülya'nın “*üyelik ücreti olmadan fiyatı bulduk. 50'yi 2 ye bölersek 25 buluruz. 25 bunun (üye olanı gösteriyor) ödeyeceği fiyat. 25 ile 3'ü çarparsak da üye olan birinin ödeyeceği fiyatı buluruz. Soruya bakınca kafam karıştı. İkiye bölünce ne buldum, onu bulamadım.*” ifadeleri destekler niteliktedir. Hülya bir süre sessiz kaldıktan sonra tekrar

düşünmeye başlamıştır ve aritmetik işlemlerini tekrar yaparak doğru sonuca ulaşmıştır. Bu anlamda Hülya'nın hata yapması fakat sonrasında bu hatayı düzeltmesi dikkate alındığında AR'nin özelliklerini taşıdığı söylenebilir. Sorunun b şikkını ise deneyerek yapmıştır. DVD sayısı için 16 değerini vererek çözümünü yapmıştır. Üye olan ve olmayan kişilerin ödeyecekleri fiyat arasında 1 TL kar bulunduğu için cevaba ulaşmıştır. Bu durumu “Hocam ben burada deneyerek buldum. 16 koydum mesela. $16.2=32+15=47$, $16.3=48$ çıktı. Yani en az 1 TL kar buluyorum. O yüzden 16.” cümleleriyle ifade etmiştir.

➤ Hülya'nın zorlanmasının nedeni, etkili tartışmalar ve açıklamalar yapmadan aritmetik işlemleri takip etmesi ve ne yaptığının farkında olmamasıdır. Hülya belli bilgi birikimine sahiptir fakat kavramsal olarak eksiklikleri olabilir. Hülya b şikkında her durumda cevaba götüremeyecek, tahminen sayı değeri vererek sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Bu anlamda düşünüldüğünde Hülya'nın genel olarak yüzeysel bir düşünce sergilediği görülmektedir. Doğru cevaba ulaşan Hülya'nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme ve yüzeysel düşünme tarzı sergilendiğinden AR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Hülya'nın beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya'nın beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Hülya: Hocam burada bir denklem var.

$4 + 3 + 3 + 3$ diye gidiyor.

Şöyle yaptım. 4 öbürlerinden bir fazla olduğu için 1 i çıkardım.

$$73 - 1 = 72,$$

$72:3 = 24$ oldu.

24 kare olur. Bunu açıklarsam 4 öbürlerinden 1 çıkardım ki eşit olsun. Bölünce 24 oluyor.

Mülakatçı: Doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın

Hülya: 23 olsa, $23.3 = 69$ olur.

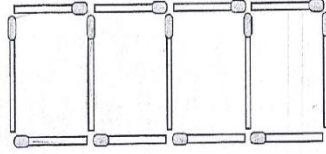
$69 + 4 = 73$ kibrit çöpü olur. Yani doğru.

Mülakatçı: peki sorularla ilgili ne düşündün?

Hülya: Biraz düşündürücü. Yoruldum yaparken. Geri dönünce kolay olduğunu gördüm.

Mülakatçı: daha önce karşılaştığın sorular gibi mi?

Hülya: Bazıları ile ama çoğuyla karşılaşmadım.



Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?

$4 + 3 + 3 + 3$
 $73 - 1 = 72$ $72 : 3 = 24$ kibrit çöpü
 24 kare
 13'ten 1 eksilince 12 kalır. 12'yi 3'e böleriz cevabı buluruz.

b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?

Saglama yaparken
 $4 - 1 = 3$
 $23 - 73$
 $23.3 = 69$ $69 + 4 = 73$

Şekil 4.50. Hülya'nın beşinci probleme ait çözümü

Hülya'nın beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hülya'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) örüntü ii) kare sayısı iii) kibrit çöpü sayısı iv) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hülya'nın belirttiği “kibrit çöpü sayısı” ve “kare sayısı” matematiksel kabul edilebilir bir özellik olmamasına rağmen gerçek dünya bileşenidir. Hülya örüntüden bahsetmektedir. Bu ifade kabul edilebilir bir özelliktir. Çünkü soruda verilen bir şekil örüntüsüdür. Hülya'nın çözüm prosedürü aritmetik işlemlerin takip edildiği bir çözümdür. Bu çözüm kabul edilebilirdir ve doğrudur.

➤ Hülya ilk olarak örüntünün kuralını anlamaya çalışmıştır. Soruda verilen örüntünün kuralının $4 + 3 + 3 + 3 + \dots$ olarak belirledikten sonra işlem yapmıştır. Hülya çözümünü “Şöyle yaptım. 4 öbürlerinden bir fazla olduğu için 1 i çıkardım. $73 - 1 = 72$, $72 : 3 = 24$ oldu. 24 kare olur. Bunu açıklarsam 4 öbürlerinden 1 çıkardım ki eşit olsun. Bölünce 24 oluyor.” şeklinde yapmıştır. Çözümünün doğruluğu hakkında ise kare sayısından yola çıkarak yine örüntünün kuralına bağlı kalarak kibrit çöpü sayısına yani 73 sayısına ulaşmış ve doğru olduğunu belirtmiştir. Hülya'nın “23 olsa, $23.3 = 69$ olur. $69 + 4 = 73$ kibrit çöpü olur. Yani doğru.” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Hülya önceki deneyimlerinden faydalananarak soruyu rahatlıkla çözmüştür. Hülyanın düşünce yapısının AR olduğu söylenebilir.

➤ Hülya soruyu kolayca çözmüştür. Bu durumun sebebi bu konuyla ilgili kavramsal anlamasının kuvvetli olması ve ne yaptığının farkında olması olabilir. Hülya'nın yaptığı işlemlerin açıklamalarını yapması derin düşünme yapısına sahip olduğunu gösterir. Doğru cevaba ulaşan Hülya'nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme ve derin bir düşünce tarzı sergilendiğinden AR_{dgd} olarak sınıflandırılmıştır.

Hülya'nın "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.10'da gösterilmiştir.

Tablo 4.10.

Hülya'nın "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Hülya	AR _{dgy}	CR _{dld}	AR _{ygy}	AR _{dgy}	AR _{dgd}

Tablo 4.10 incelendiğinde, Hülya'nın incelenen beş problemin dördünde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne, bir tanesinde yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Hülya üçüncü problem dışındaki tüm sorulara doğru cevap verirken problemlerin bir tanesi dışındaki problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Hülya akıl yürütme sürecinde bazı sorularda derinlikli bazı sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.11. Rabia'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Rabia'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia'nın birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: $3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Rabia: [soruyu sesli okudu ve hemen çözüme geçti] önce denkleme baktım.

Burada 1 bilinmeyen var onun 3 katının 10 fazlası 31 dir. Bunu ters işlem kurarak çözebiliriz. Problemimi kurdum.

Ela'nın yaşının üç katının on fazlası annesinin yaşını verir. Annesi 31 yaşında ise Ela kaç yaşındadır?

Sonrasında problemi çözdüm. Bu problem ters işlem ile veya denklem ile çözülebilir. Dere yöntemini kullanarak,

$$31 = 3x + 10$$

$$31 - 10 = 3x$$

$$21 = 3x$$

$$= 7$$

Olur.

Mülakatçı: Peki neden bu problemi kurdun? Başka problem kurulabilir miydi?

Rabia: Başka problem mutlaka kurulur. Çünkü birçok problemin aynı

sonucu olabilir. Bu normal. Bu problemi basit herkesin çözebileceği bir problem olduğu için kurdum.

Mülakatçı: Tamam. Peki, doğruluğunu nasıl anladın?

Rabia: sağlama. Matematik problemlerinde bir işlemin geçerliliğini sağlama yaparak bulabiliriz. Mesela bölme işleminin sağlaması çarpmadır veya burada yerine koyarak da bulabiliriz.

$$3 \cdot 7 = 21$$

$$21 + 10 = 31$$

Olur.

Mülakatçı: tamam.

$3x + 10 = 31$ denklemini ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Ela'nın yaşının 3 katının 10 fazlası annesinin yaşını verir. Annesi 31 yaşında ise Ela kaç yaşındadır?

$$31 = 3x + 10 \text{ ise}$$

$$31 - 10 = 3x$$

$$21 = 3x$$

$$7 = x$$

Şekil 4.51. Rabia'nın birinci probleme ait çözümü

Rabia'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) Ters işlem yöntemi ii) Sayılar, Değişkenler, Denklem iii) Soru ile gerçek hayat arasındaki dönüşüm iv) Aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Rabia soruyu okuduktan sonra denklemde bir bilinmeyen olduğunu ifade etmiştir. Bu matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Çünkü soruda verilen denklem bir bilinmeyenli denklemdir. Rabia matematiksel bileşenler ile gerçek hayatı bağdaştırarak bir problem oluşturmuştur. Rabia kurduğu problemin çözümünü yaparken derste öğrendiği “dere yöntemi” ile aritmetik işlemleri rahatlıkla yapmıştır. Öğrenme ortamında dere yöntemi diye adlandırılan yöntem matematiksel bir özellik değildir fakat genel olarak kullanılan pratik bir yöntemdir.

➤ Rabia verilen denklemi anlayarak işe başlamıştır sonrasında ise gerçek hayatla ilişkili yaş problemi kurmuştur. Rabia böyle bir denklem için kurulabilecek başka problemlerin olabileceğini “*birçok problemin aynı sonucu olabilir*” düşüncesiyle desteklemiştir. Rabia problemi oluştururken benzetme veya taklit etme gibi bir durum yaşamamıştır. Bu yönüyle akıl yürütme süreci CR olarak sınıflanabilir. Fakat Rabia problemi çözerken iki farklı yöntemle çözebileceğini vurgulamasına karşın bilinen bir algoritmaya başvuruyor. Bu yönüyle bilinen bir algoritmayı kullanarak yaptığı için AR sınıflamasına girdiği düşünülebilir.

➤ Rabia matematiksel olarak doğru bir problem kurmuştur ve genel anlamıyla bakıldığında ne yaptığının farkında ve her yaptığının açıklamasını yaparak sağlam adımlarla ilerlemeye çalışmaktadır. Bunun altında yatan neden, okuduğu şeyi yorumlayabiliyor olması, belli bilgi birikimine sahip olması ve kavramsal altyapısının kuvvetli olmasıdır. Doğru bir problem kuran Rabia’nın matematiksel akıl yürütme türü, iki farklı tür akıl yürütme türü ve derin bir düşünme tarzı sergilendiğinden CR_{dl} olarak sınıflandırılmıştır.

-Rabia’nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia’nın ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Rabia: Denkleme bakınca $7x$ ’i $\frac{1}{7}$ ile çarpmış ama eşitliğin ana 1. adımında -1’i çarpmamış. Sağ taraftakini çarpmamış.

Mülakatçı: Yani bu yüzden mi hatalı?

Rabia: evet

Mülakatçı: Peki doğrusunu yapabilir misin?

Rabia: Doğru işlemi yine değer vererek yapabiliriz. Ya da denklem olarak zaten basit bir denklem.

$$7x - 1 = 7$$

$$7x = 7 + 1$$

$$7x = 8$$

$$x = \frac{8}{7}$$

Mülakatçı: peki çözümde -1 i neden karşıya atıyoruz?

Rabia: Çünkü burada dere gibi düşünürsek karşıya öyle geçer.

Mülakatçı: Bu işlemi doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

Rabia: sağlama yaparız. x yerine $\frac{8}{7}$ koyarız, doğru olup olmadığını buluruz.

$7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor,

1. Adım $\frac{1}{7} \cdot (7x - 1) = \frac{1}{7} \cdot 7$

2. Adım $x - 1 = 1 - x$

3. Adım $x - 1 + 1 = 1 + 1$

4. Adım $x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

1. adımda, hata yapılmıştır. Çünkü $7x$ 'i $\frac{1}{7}$ ile çarpmış ama -1'i çarpmamış. Eğer $\frac{1}{7} \cdot (7x - 1)$ şeklinde veya $(\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 \cdot \frac{1}{7})$ yazsaydı doğru olurdu.

b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?

5 ile çarparsak:

$$5 \cdot (7x - 1) = 5 \cdot 7$$

$$35x - 5 = 35$$

$$35x = 35 + 5$$

$$35x = 40$$

$$x = \frac{40}{35} = \frac{8}{7}$$

Sade haliyle:

$$7x - 1 = 7$$

$$7x = 7 + 1$$

$$7x = 8$$

$$x = \frac{8}{7}$$

Şekil 4.52. Rabia'nın ikinci probleme ait çözümü

Rabia'nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem ii) eşitlik ii) dere yöntemi iv) aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Rabia sorudaki denklem çözümünde denklemin sol tarafındaki sadece değişken olan ifadenin $\frac{1}{7}$ ile çarpıldığını ama aslında tüm ifadenin çarpılması gerektiğini fark

etmiştir. Bu açıdan matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellikten bahsetmektedir. Doğru çözümü yapılması istendiğinde ise kendi bildiği yöntemle yapmayı tercih etmiştir. “dere yöntemi” diye adlandırdığı öğrenme ortamından öğrendiği “*eşitliğin solundaki sayıların sağına işaret değiştirerek geçmesi*” yöntemi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir fakat genellikle kabul edilen pratik bir yoldur. Doğrulama işlemi “sağlama” yaparak yapılabileceğinin farkındadır ve sağlama işlemi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir.

➤ Rabia sorudaki denklem çözümünde yapılan hatayı fark etmiştir. Rabia hatanın nedenini doğru bir şekilde açıklamıştır. Bu yönüyle CR işaret eden bir akıl yürütme türü vardır. Fakat çözümün doğruluğunu gösterirken sınıfta kullandığı algoritmayı kullanarak sonuca ulaşmıştır çözüm algoritmasının altında yatan kavramsal anlamaya sahip olmadığını “*dere gibi düşünürsek karşıya öyle geçer*” yüzeysel ifadesinden anlaşılmaktadır. Rabia eşitliğin korunumu ilkesine dayanan çözüm yöntemini kullanarak da çözüm yapmıştır. Fakat yaptığı çözümde her iki tarafı 5 ile çarpmayı denemiştir. Yapılan işlem doğrudur fakat işlem kalabalığı yapmanın ötesine geçmez.

➤ Rabia zorlanmadan çözüm yapmıştır. Bu durumun sebebi Rabia’nın her iki çözüm yöntemini de anlaması ve belli bilgi birikimine sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Rabia soru ile ilgili genel olarak doğru sonuca götürebilecek işlemleri yapmıştır. Rabia çözümün bir kısmında yüzeysel bir kısmında derin düşünce yapısına sahiptir. Doğru sonuca ulaşan Rabia’nın matematiksel akıl yürütme türü, iki tip akıl yürütme türü ve yer yer derin yer yer yüzeysel düşünme tarzı sergilendiğinden CR_{dlx} olarak belirlenmiştir.

-Rabia’nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia’nın üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Rabia: ... (Soruyu okuyarak denklem kuruyor) Burada x masayı belirtiyor. $4x + 20$ yazarız. Eğer 6 şar kişi oturursa 1 masa boş kalıyor. O zaman $6x - 6$ olur. Çözünce de çıkar.

Mülakatçı: Peki iki ifadeyi neden eşitledin.

Rabia: Masa sayısını bulmak için iki denklem arasında eşitlik varsa daha kolay buluruz. Çözersek

$$4x + 20 = 6x - 6$$

$$2x = 26$$

$$x = 13$$

olur.

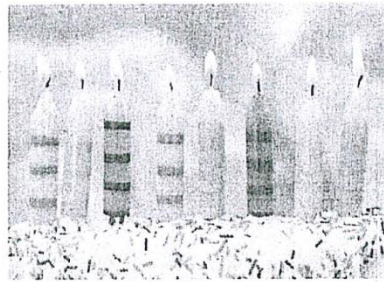
Mülakatçı: Peki iki denklemin eşit olduğunu söyleyebilmen için elimizde veri var mı?

Rabia: Var.

Mülakatçı: Nasıl bir veri var?

Rabia: Burada birazda aklımızı kullanmamız gerekiyor. Şimdi, ya ayakta kalanları ya da boş masayı bulmak için masa sayısının veya kişi sayısını almak lazımdı. Ben kişi sayısını aldım.

Mülakatçı: Tamam.



kalır.

Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4'er kişi oturursa 20 kişi ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız

$$4x + 20 = 6x - 6$$

↓
4'erli otururlarsa 20 kişi fazla

Bunlar Esit

6'şarlı oturunca 1 masa, 6 kişilik yani 6 kişilik daha olması.

Şekil 4.53. Rabia'nın üçüncü probleme ait çözümü

Rabia'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı ii) denklem, sayılar bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Masa sayısı” matematiksel bir özellik olmamasına rağmen gerçek hayat bileşenidir. Rabia masa sayısı ve x değişkenini eşleştirerek problemde yer alan her bir duruma karşılık gelen cebirsel ifadeleri doğru bir şekilde yazmıştır. Rabia cebirsel ifadeleri eşitlemesinin sebebini “Masa sayısını bulmak için iki denklem arasında eşitlik varsa daha kolay buluruz” ifadeleriyle açıklamıştır. Bu ifade kabul edilebilir bir özellik

değildir. Çünkü daha kolay işlem yapabilmek için yapılan bir prosedür değildir. Ek olarak birbirine eşitlediği ifadeler durumlara karşılık gelen birer cebirsel ifadedir. Fakat katılımcı denklem diyerek aslında denklem ve cebirsel ifadeyi de birbirinden ayıramadığını göstermiş olmaktadır.

➤ Rabia problemi okur okumaz problemde geçen masa sayısı ifadesine karşılık olarak x değişkenini kullanmayı seçmiştir. Problemde geçen durumlara karşılık gelecek cebirsel ifadeleri doğru bir şekilde yazmıştır. Fakat iki cebirsel ifadeyi eşitlemesine rağmen neden eşitlediğine dair mantıksal açıklamalarda bulunamaması bir problem durumu ile ilgili denklem yazma noktasında kavramsal eksikliklere sahip olduğunu gösterir. *“Burada birazda aklımızı kullanmamız gerekiyor. Şimdi, ya ayakta kalanları ya da boş masayı bulmak için masa sayısının veya kişi sayısını almak lazımdı. Ben kişi sayısını aldım.”* ifadeleri de bu durumu destekler niteliktedir. Çünkü bu açıklamalar iki cebirsel ifadenin neden eşitlendiği ile ilgili değildir. Rabia sonrasında yazdığı denklemi zorlanmadan çözdükten sonra cevaba ulaşmış ve $x = 13$ yazmıştır. Çözümünü bitirdikten sonra ve aslında soruda masa sayısını değil kişi sayısına dair bir ifade olduğunu dikkate almamıştır. Genel olarak aklında olan bir aritmetik prosedürler dizisini takip ederek işlemlerini yürüttüğü için akıl yürütme türü AR'nin özelliklerine uymaktadır.

➤ Rabia değişkenlere anlam yüklemekte ve cebirsel ifade yazmakta zorlanmamıştır. Bunun nedeni önceki deneyimlerinden bir sözel ifadeye karşılık gelecek cebirsel ifadeyi yazma konusunda problem yaşamaması olabilir. Fakat problemin çözümünü tamamlamadığının farkında olmadığı görülmektedir. Genel olarak bakıldığında katılımcının yaptığı işlemlerden emin görüldüğü ve açıklamalar yaptığı fakat açıklamalarının bazılarının kavramsal eksikliklere dayandığı ve yüzeysel bir düşünce yapısını dikkate aldığı görülmektedir. Rabia'nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru cevaba ulaştığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme tarzı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

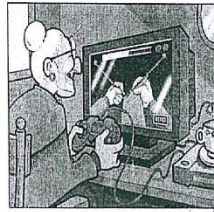
-Rabia'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia'nın dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Rabia: ... (Soruyu okuyarak yorumladı). Üye olan 15 TL veriyor ama 1 TL daha karlı oluyor. 65 TL harcamış, bunun içinde 15 TL üyelik ücreti var, DVD de var. $65 - 15 = 50$ olur. 50 kiraladığı DVD'ye verdiği para. $50 : 2 = 25$ DVD. Ama bizden bunu istemiyor. $25 \cdot 3 = 75$ TL olur.

b şıkkı:

Rabia: ... (Deneyerek yapmış). Önce 15 TL dâhil mi değil mi diye düşündüm. Dâhil olduğuna karar verdim. İlk olarak 15 ile çarptım. İlk başta da 15 TL vermek zorunda. $15 \cdot 3 = 45$, $15 \cdot 2 = 30$, $30 + 15 = 45$. 15'te eşit oldu. Bir sonrakinde daha avantajlı olacağı 16 buldum.



Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL'dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

- a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcıyacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

$$65 - 15 = 50 \quad \frac{50}{2} = 25 \text{ DVD almış.}$$

- b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

$$15 + 16 \cdot 2 = 15 + 32 = 47 \text{ TL}$$

$$3 \cdot 16 = 48 \text{ TL}$$

65'ten hem DVD parasını hem de üyelik ücretini çıkarırsak 65'ten üyelik ücretini yani 15'ti çıkarırız. DVD parasını bulduk. Üye olduğumuz için 2'ye almıştık. Çıkan sonucu 2'ye böler DVD sayısını bulmuşuz. Sonrada alınan DVD sayısını üye olmayanların verdiği parayla yani 3'e ile çarpıp üye olmayanların alacağı DVD'lerin parasını bulmuşuz.

Şekil 4.54. Rabia'nın dördüncü probleme ait çözümü

Rabia'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir fakat gerçek hayat bileşenidir. Rabia zorlanmadan aritmetik işlemler yaparak sorunun a şıkkını cevaplamıştır. Yaptığı işlemler problemi karşılayacak şekilde ve doğrudur. Bu anlamda a şıkkı için çözüm prosedürü kabul edilebilirdir. Rabia b şıkkı

için, deneme yöntemini kullanmıştır. Bu yöntem matematiksel olarak kabul edilebilir olmasa da zaman zaman doğru sonuca götürülebilir.

➤ Rabia'nın a şıkkı ile ilgili çözümü doğrudur ve açıklamalar yaptığı için ne yaptığına farkında olduğu söylenebilir. Bu anlamda soruyu anlamada sıkıntısının olmadığını söylemek mümkündür. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini göstermektedir. Rabia b şıkkı için ise çözüm yöntemi olarak deneme yöntemini seçmiştir. Fakat bu çözümü sistematik bir şekilde değil rastgele seçtiği bir sayıyı deneyerek yapmıştır. Bu değeri denediğinde eşit olduğunu fark etmiştir. Bu durumu *“Önce 15 TL dâhil mi değil mi diye düşündüm. Dâhil olduğuna karar verdim. İlk olarak 15 ile çarptım. İlk başta da 15 TL vermek zorunda. $15.3 = 45$, $15.2 = 30$, $30 + 15 = 45$. 15'te eşit oldu. Bir sonrakinde daha avantajlı olacağı için 16 buldum.”* cümleleriyle açıklamıştır. a ve b şıkları için alternatif çözüm yöntemlerini kullanmak aklına bile gelmemiştir.

➤ Rabia a şıkkında zorlanmadan aritmetik işlemler yaparak sonuca ulaşmıştır. Rabia'nın zorlanmamasının nedeni belli bilgi birikimine sahip olması ve soruyu anlamada sıkıntı yaşamamasından kaynaklanıyor olabilir. b şıkkında ise Rabia alternatif çözüm yollarını denemeden direk deneme yoluyla çözüm yapmıştır. Bu durumun sebebi farklı bir yöntem düşünememesi veya bu tarz bir soruyla nadir karşılaşılıyor olması olabilir. Rabia ne yaptığına farkında olarak işlemler yaparak çözüm yapmıştır. Yaptığı işlemlerin açıklamalarını yapabilmektedir. Doğru cevaba ulaşan Rabia'nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme ve derin bir düşünme tarzı sergilendiğinden AR_{dgd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Rabia'nın beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia'nın beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

a şıkkı:

$n = 24$

Rabia: Deneyerek yapsam vakit kaybı olacaktı. Kural aradım. 4, 7, 10, 13 oldu. Genel terimini bulmaya çalıştım. $n.3 + 1$ olur.

$$n.3 + 1 = 73$$

$$3n = 72$$

olur.

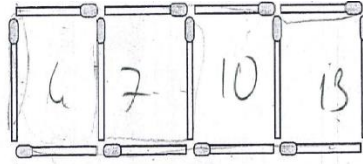
b şıkkı:

Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığına nasıl karar verdin?

Rabia: Sağlamasını yaparak karar verdim. n yerine 24 koydum.

$$24 \cdot 3 = 72$$

$72 + 1 = 73$
oldu.



Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

a) Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?

$$n \cdot 3 + 1 = 73$$

$$73 - 1 = 3n$$

$$72 = 3n$$

$$n = 24$$

b) Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?

Sağlamasını yaparak karar verdim.

Örüntünün genel terimini bularak yaptım.

Şekil 4.55. Rabia'nın beşinci probleme ait çözümü

Rabia'nın beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) genel terim ii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Rabia'nın bahsettiği “genel terim” ifadesi örüntü konusu ile ilgili olup soruda verilen bir şekil örüntüsü olduğundan matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Rabia çözüm prosedürü olarak örüntünün genel terimini kullanarak denklem kurmuştur. Bu çözüm yöntemi matematiksel olarak kabul edilebilir bir yöntemdir.

➤ Rabia çözüm stratejisi olarak genel terimi bularak denklem kurmayı seçmiştir. Çözümünü “Deneyerek yapsam vakit kaybı olacaktı. Kural aradım. 4, 7, 10, 13 oldu. Genel terimini bulmaya çalıştım. $n \cdot 3 + 1$ olur.

$$n \cdot 3 + 1 = 73$$

$$3n = 72$$

$$n = 24$$

olur.” şeklinde ifade etmiştir. Rabia’nın çözümü doğru bir çözümdür. Rabia’nın önceki deneyimlerinden faydalanarak genel terimi bularak çözüm yapması bu konu ile ilgili kavramsal anlamalarının kuvvetli olduğunu göstermektedir. Rabia’nın doğru yapıp yapmadığı ile ilgili sağlama yapması ne yaptığının farkında olduğunu gösterir. Bu anlamda düşünüldüğünde Rabia’nın akıl yürütme türünün önceki bilgilerini kullanarak gerçek hayattaki bir duruma karşılık denklem kurarak çözüm yapması açısından CR akıl yürütme yapısına yakın olduğu söylenebilir.

➤ Rabia’nın zorlanmamasının nedeni önceki deneyimlerinden faydalanarak örüntü ile ilgili bir kural arayışına girmesidir. Bu durum Rabia’nın soyut düşünme sürecine adapte olmaya başladığının bir göstergesidir. Rabia’nın kendinden emin tavrı ve açıklamaları dikkat çekmektedir. Rabia’nın kavramsal anlamasının kuvvetli olduğu ve derin bir düşünme yapısına sahip olduğu söylenebilir. Doğru bir çözüm yapan Rabia’nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin bir düşünme tarzı sergilendiğinden CR_{dgd} olarak belirlenmiştir.

Rabia’nın “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.11’de gösterilmiştir.

Tablo 4.11.

Rabia’nın “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Rabia	CR _{dld}	CR _{dlx}	AR _{ogy}	AR _{dgd}	CR _{dgd}

Tablo 4.11 incelendiğinde, Rabia’nın incelenen beş problemin üçünde yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türüne, iki tanesinde algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Rabia tüm sorulara doğru veya muhtemel doğru cevap verirken problemlerin iki tanesinde lokal (yerel) akıl yürütme üç tanesinde global akıl yürütme sergilemiştir. Rabia akıl yürütme sürecinde bazı sorularda derinlikli bazı sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.1.12. Seda'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Seda'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda'nın birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Seda: Bu çok basitti.

Mülakatçı: Neden basit geldi?

Seda: Çünkü bunları kolay yapıyorum. Birde yanlışmış. Ayşe'nin 3 katıdır. $3k$ demiş. Zaten bu k , x de olabilir. Farketmez. Eee burada çarpı vardır. 3 katı olur. Sonrada +10 olduğu için, toplamı yani 10 fazlası 31 olur. demek ki k ya Ayşe desek Ayşe'nin 3 katından fazlası 31 oluyor. Ayşe'nin yaşı oluyor. Ayşe'nin yaşını da denklem kurarak dere yöntemiyle buldum.

Mülakatçı: Peki bulduğun sonucu doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın?

Seda: k yerine 7 koyarız. Çarparız 21. 10 ile toplarız 31. İki tarafında eşit olması gerekiyor. Bu taraf 31 idi. Diğer tarafta 31 olması gerekiyor.

Mülakatçı: Peki bu denklemle çözülebilecek farklı problemde yazılabilir miydi?

Seda: Evet sayı olarak yazılabilirdi. Mesela 3 katının 10 fazlası 31 ediyorsa o sayı nedir diye?

Mülakatçı: Peki devam edelim.

$3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.

Ayşe'nin 3 katının 10 fazlası annesinin yaşıdır.
Annesinin yaşı 31 ise Ayşe kaçtır?
 $3k + 10 = 31$
 $3k = 21$
 $k = 7$

Şekil 4.56. Seda'nın birinci probleme ait çözümü

Seda'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) sayılar değişkenler, denklem ii) Dere yöntemi iii) Soru ile gerçek hayat arasındaki dönüşüm iv) aritmetik işlemler bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Seda soruyu okuduktan sonra verilen denklemde k 'nın değişken olduğunun farkına varmıştır ve farklı bir harfle temsil edebileceğini de vurgulamıştır. Soruda verilen denklemdeki değişkenin farklı şekilde ifade edilebileceği matematiksel kabul edilebilir bir özelliktir. Seda matematiksel bileşenler ile gerçek hayatı ilişkilendirerek modelleme özelliğini sağlamıştır. Yaş problemi kurmuştur toplama ve çarpma işleminden bahsederken “ $3k$ var çarpma var üç katı demek $+10$ var toplama demek”. diyerek matematiksel olarak kabul edilen bir özelliği vurgulamıştır. Seda kurulan problemin çözümünü yaparken derste bahsedilen dere yöntemini kullandığını belirtmiştir ve zorlanmadan işlemini tamamlamıştır. Bahsedilen bu yöntem matematiksel kabul edilebilir bir yöntem değildir. Fakat pratik bir yol olarak kullanılmaktadır.

➤ Seda soruyu okur okumaz çok kolay olduğunu rahatlıkla yapabileceğinin farkındadır. Problemi oluştururken günlük hayata atıfta bulunarak bir problem kurmuştur, farklı bir problem kurabileceğinin farkında olup hemen ikinci bir problem kurarak bu düşüncesini kanıtlamıştır. Seda yaptığı işlemlerin nedenlerini ve açıklamalarını tartışma ortamı yaratarak ifade etmiştir. Bu yönüyle Seda'nın akıl yürütmesinin CR ye yakın olduğu söylenebilir. Fakat Seda denklem çözümünde bilinen bir algoritmayı kullanarak yaptığı için Seda'nın akıl yürütmesinin AR sınıflamasına girdiği düşünülebilir.

➤ Seda kurduğu her iki problemi de matematiksel olarak doğru kurmuştur. Kurulan problemler verilen denklemi karşılar niteliktedir. Seda'nın zorlanmamasının nedeni, belli bilgi birikimine sahip olması, cebirsel ifadelerle ilgili kazanımlara ulaşmış olması olabilir. Seda ne yaptığının farkında ve emin olarak işlemini sonlandırmıştır. İşlemin doğruluğunu sağlama yaparak açıkladı. Süreç genel olarak derinlemesine bir düşünce yapısını kapsamaktadır. Doğru bir problem kuran Seda'nın matematiksel akıl yürütme türü, iki tip akıl yürütme ve derin bir düşünme tarzı sergilendiğinden CR_{dld} olarak belirlenmiştir.

-Seda'nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda'nın ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Seda: Bu terazi yöntemiymi sanırım. Evet eee. Burada kendim denklemi çözdüm. Kendi denklemimle karşılaştırdım. -1 i kullanmamış. Kendi denklemimde x'i yerine koydum, baktım

oluyor. Demek ki dedim burada (soruyu göstererek) bir hata var. Sonra -1 i buldum.

Mülakatçı: Tamam.

7x - 1 = 7 denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

1. Adım $7x - 1 = 7 + 8$
 2. Adım $x - 1 = 1$
 3. Adım $x - 1 + 1 = 1 + 1$
 4. Adım $x = 2$

a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız.

1. adım yanlış önce $7x \cdot \frac{1}{7}$ ye çarpılır -1 ile çarpılmış -1 i eşitlemiş. Sonra atmamış. Atması gerekiyor. Terazi yöntemi.

b) Sız bu denklemi nasıl çözersiniz?

$7x - 1 = 7$ x'in yerine $\frac{8}{7}$ koydum
 $7 \cdot \frac{8}{7} - 1 = 7$ oluyor. $\frac{8}{7}$

Şekil 4.57. Seda'nın ikinci probleme ait çözümü

Seda'nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) Terazi yöntemi ii) denklem, sayılar iii) aritmetik işlemler iv) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Seda soruda verilen denklem çözümünün "terazi yöntemi" olduğunu söylemiştir. Sınıf ortamında terazi yönteminden eşitliğin korunumu anlatılırken bahsedilmiştir. Bu yöntem anlamı olarak matematiksel kabul edilebilir değil fakat isim olarak matematiksel karşılığı olmayan bir yöntemdir. Seda kendi çözümünü "eşitliğin karşı tarafına

sayıların işaretini değiştirerek geçirerek” yapmıştır bu yöntem matematiksel olarak kabul edilebilir değildir fakat genellikle pratik bir yöntem olarak öğrencilere öğretilir.

➤ Seda verilen denklemi çözümünün doğru olup olmadığını denklemi çözerek bulma yolunu tercih etmiştir kendi cevabı ve sorudaki cevabını uyumsuzluğundan dolayı hata olduğunu düşünmüştür ve çözüm de hata arayışına girmiştir ve çabaları sonucu -1’in $1/7$ ile çarpılmadığını fark etmiştir. Bu hatayı fark etmesi açısından Seda’nın akıl yürütme türü CR olarak çözüm yöntemi için bilinen bir prosedür takip ettiği için ise AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Seda’nın zorlanmamasının sebebi alternatif çözüm yöntemi bildiği için kendi bildiği yöntemle ulaştığı sonuçla karşılaştırma yapabilmesinden kaynaklanmaktadır. Seda genel olarak etkili açıklamalar ve tartışmalar yapmadan işlemini sonlandırılmıştır. Bu yüzden kavramsal altyapısının çok iyi anlaşılmadığı görülmüştür. Doğru bir sonuca ulaşan Seda’nın matematiksel akıl yürütme türü, iki tip akıl yürütme türü sergilendiğinden ve çok fazla açıklama yapmadığından düşünme tarzının belirlenememesinden dolayı CR_{dlx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Seda’nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda’nın üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

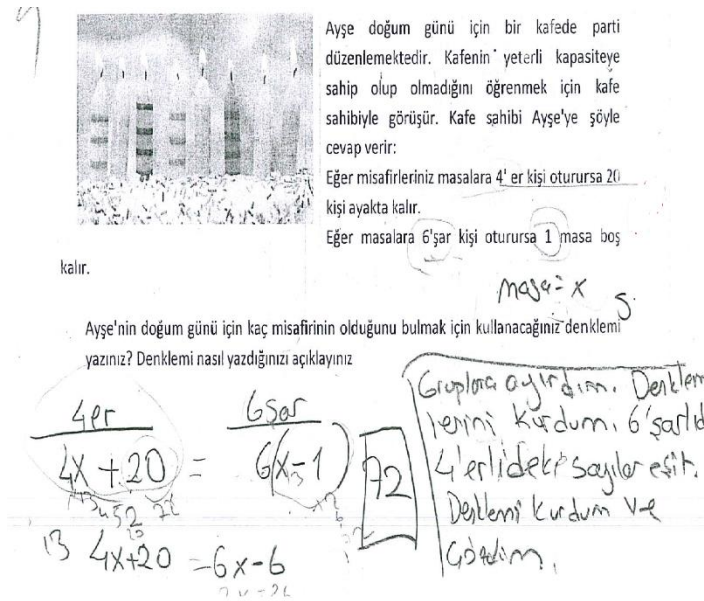
Seda: *Bunu zaten öğretmenimiz hatırlatmıştı. Masaya x demişim. Yok, kişiye x demişim. Yok, evet masaya x demişim. $4x$, 20 kişide ayakta kalıyor. Demek ki 4 er kişi oturursa böyle olur. Denklem demek ki $4x + 20$ oldu. 6 şar kişi oturursa 1 masa boşta kalıyor. Boş dediği için paranteze alıyorum. Burada da çarpı durumu vardı. Sonra direk problemi çözdüm.*

Mülakatçı: *Peki iki denklemi neden birbirine eşitledin.*

Seda: *Çünkü zaten kişiler aynı. Mesela, ayrı ayrı partileri vermemiş. Bir partide aynı kişi vardır. 4 er de otursa 6 şar da otursa aynıdır. Sayıları değişmez ikisi de bir birine eşittir.*

Mülakatçı: *peki bu denklemi çözdüğünde neyi bulacağız biz.*

Seda: *Kaç misafirin olduğunu bulacağız. Yani kaç kişi olduğunu.*



Şekil 4.58. Seda'nın üçüncü probleme ait çözümü

Seda'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

- Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) masa sayısı ii) kişi sayısı iii) çözüm prosedürü iv) sayılar, denklem bileşenlerinden oluşmaktadır.
- “Masa sayısı” ve “kişi sayısı” bileşenleri matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir fakat her biri gerçek dünya özelliğidir. Seda'nın problemi ifade etmek için kurduğu denklem doğrudur ve matematiksel olarak kabul edilebilirdir.
- Seda denklem kurarken değişken ile hangi gerçek dünya bileşenini eşleyeceğine emin olamamıştır. Denklem kurmaya başlamadan önce “*bunu zaten öğretmenimiz hatırlatmıştı.*” ifadesi daha önceden benzer bir prosedür gördüğünü göstermektedir. Sonrasında ise “*Masaya x demişim. Yok, kişiye x demişim. Yok, evet masaya x demişim*” ifadeleri” ile çözüm prosedürünü direk uyguladığını anlamlandıramadığını destekler niteliktedir. Bu yönüyle Seda'nın MR akıl yürütme türünün özelliklerini taşıyan bir akıl yürütme sürecine sahip olduğu söylenebilir. Seda sonraki işlemlerinde her bir gerçek durum için yazdığı cebirsel ifadeler doğru olmakla birlikte ikinci ifade için, “*masa boş dediği için paranteze alıyorum.*” ifadesi doğru bir ifade değildir. İki cebirsel ifadenin eşitlenmesi ile ilgili “*Çünkü zaten kişiler aynı. Mesela, ayrı ayrı partileri vermemiş. Bir partide aynı kişi vardır. 4'er de otursa 6'şar da otursa aynıdır. Sayıları değişmez ikisi de bir birine eşittir.*” açıklamasını yapmıştır. Bu anlamda cebirsel ifadelerle ilgili etkili açıklamalar yapmış olsa da strateji seçimi ve uygulaması açısından kendinden emin

olmayan ve kararsız tavırları dikkat çekmektedir. Ayrıca Seda denklem çözümünü yaptıktan sonra cevaba dair ifadesinde “Kaç misafirin olduğunu bulacağız. Yani kaç kişi olduğunu.” söylemiştir. Hâlbuki denklem çözüldüğünde masa sayısı ve ardından cebirsel ifadelerin herhangi bir tanesini kullanarak kişi sayısına ulaşılabilir.

➤ Seda’nın zorlanmasının sebebi önceki deneyimlerinden bir prosedür hatırlaması fakat bu çözümü anlamlandıramadığı için değişkenlere anlam yüklemekte zorlanması veya yaptığı işlemi açıklayamaması olabilir. Seda’nın genel olarak etkili tartışmalar yapamadığı ve yaptığı işlemlerin kavramsal altyapısının eksik olduğu görülmektedir. Yer yer yüzeysel düşünme yapısına yer yer derin düşünme yapısına sahip olduğu söylenebilir. Seda’nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yaptığından, tek tip akıl yürütme türü ve yer yer yüzeysel yer yer derin bir düşünme tarzı sergilendiğinden MR_{ogx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Seda’nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda’nın dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Seda: İlk deneyerek yaptım sanırım. Sonra vaktim kalınca baktım. Yok deneyerek yapmadım. (soruyu okuyor) 65 ten 15 i çıkardım. Üyelik ücretini 50 buldum. Sonra üye olanların bir DVD kiralama ücreti 2 TL, sonra 2 ye böldüm 25 25 DVD sayısını bulmuş olduk. Sonrasında üye olmayan birinin

kiralama ücreti 3 TL olduğu için çarpmamız gerekir. Sonuç 75 TL olur.

b. şıkkı:

Ben bu soruyu deneyerek yaptım. Teker teker kaç DVD alırsalar kaç TL öderler onu hesapladım kara geçtiğinde DVD sayısı 16 olmuştu o yüzden cevap 16 dır.

Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada yıllık üyelik ücreti 15 TL dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	3 TL	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti	2 TL

a) Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dahil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcayacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.

b) Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en az kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

Handwritten solution for (a):
 $65 - 15 = 50$
 $50 \div 2 = 25$
 $25 + 15 = 40$ TL

Handwritten solution for (b):
 $15 \div (3 - 2) = 15$
 15 DVD

Handwritten notes:
 Tabbya Sabarak yaptım üyelik ücretini çıkardım. Tabbya göre 2'ye böldüm. İşlemi deneyerek buldum.

Şekil 4.59. Seda'nın dördüncü probleme ait çözümü

Seda'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) üyelik ücreti ii) DVD sayısı iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Üyelik ücreti” ve “DVD sayısı” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik olmamasına karşın gerçek hayat bileşenidir. Seda sorunun a şıkında zorlanmadan aritmetik işlemleri takip ederek sonuca ulaşmıştır. Seda'nın yaptığı işlemler problem durumuna uygun matematiksel açıdan kabul edilebilir işlemlerdir. Fakat Seda b şıkında “sayarak yapma” yöntemini tercih etmiştir. Bu yöntem matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir. Birkaç sınırlı durumda etkili olabilir fakat bu durum yöntemin matematiksel olduğunu göstermez.

➤ Seda soruyu okuduktan sonra üyelik ücreti olan 15 TL yi çıkararak çözüme başlamıştır. Aritmetik işlemler yaparak ilk olarak DVD sayısını bulmuş sonrasında ise üye olmayan birinin ödemesi gereken ücreti bulmuştur. Seda sorunun a şıkkı için kolaylıkla sonucu bulmuştur. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini göstermektedir. b şıkında ise, sayarak yapmıştır. Çözümünü, “ben bu soruyu deneyerek yaptım. Teker teker kaç DVD alırsalar kaç TL öderler onu hesapladım kara geçtiğinde DVD sayısı 16 olmuştu o yüzden cevap 16 dır.” cümleleriyle ifade etmiştir.

Yaptığı işlem anlamında bakıldığında alternatif çözüm yollarını düşünmeksizin ilk aklına gelen sayarak yapma yöntemini kullanmıştır.

➤ Seda a şıkında zorlanmadan cevaba ulaşmıştır. Bu durumun sebebi Seda'nın soruyu anlamakta sıkıntısının olmaması veya belli bilgi birikimine sahip olmasıdır. B şıkında ise Seda ilk akla gelecek sayarak yapma yöntemini tercih etmiştir. Bu durumun sebebi Seda'nın farklı çözüm yöntemi bilmemesi veya düşünememesi olabilir. Seda genel olarak aritmetik işlemleri yapmada sıkıntı yaşamamıştır fakat düşünce olarak yüzeysel bir düşünme tarzı vardır. Doğru cevaba ulaşan Seda'nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel bir düşünme tarzı sergilendiğinden AR_{diy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Seda'nın beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda'nın beşinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

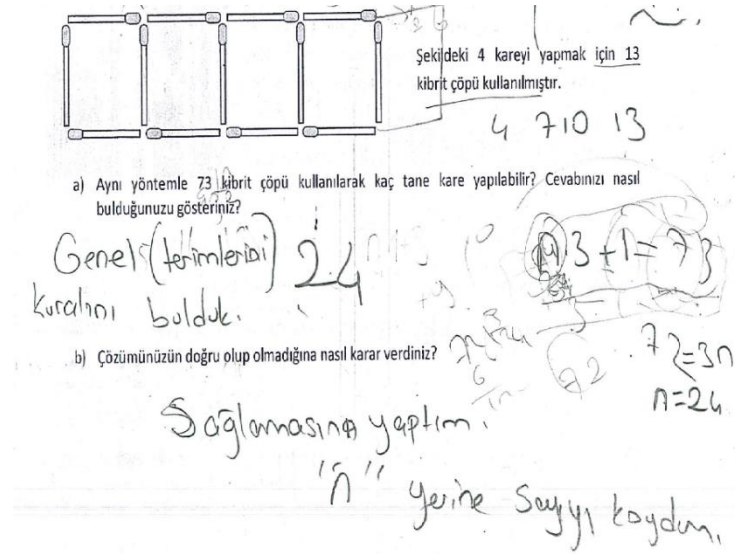
Ben bu soruyu sanırım önceden görmüştüm genel terim bulmam gerekiyor. Ama hatırlamakta zorlandım. Birkaç deneme sonunda $n.3 + 1 = 73$ olduğunu düşündüm. Çünkü 1 kare yapmak için n in yerine koyarsak 4 kibrit çöpü gerekir bu da gösteriyor ki doğru bir formül oluşturdum.

Mülakatçı: peki nasıl devam ettin

Seda: sonra bizden kaç kare olduğunu soruyor o yüzden yazdığım formülü denklem olarak düşünüp çözdüm. $+1$ i karşıya eksi geçer $n.3 = 72$ olur o zaman cevap 24 olur.

Mülakatçı: peki doğru yapıp yapmadığına nasıl karar verdin?

Seda: söylediğim gibi n in yerine sayı koydum baktım ki kibrit çöpü sayısı doğru mu doğru çıktığı için emin oldum.



Şekil 4.60. Seda'nın beşinci probleme ait çözümü

Seda'nın beşinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) genel terim ii) denklem iii) çözüm prosedürü bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Seda "genel terim" ifadesini kullanmıştır. Sorunun bir şekil örüntüsü olmasından dolayı genel terimi ifadesi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Seda çözüm prosedürü olarak denklem kurmayı seçmiştir. Bu yöntem problem için doğru sonucu veren ve matematiksel olarak kabul edilebilir bir yöntemdir.

➤ Seda sorunun çözümü için önceki bilgilerinden hatırladığı bilgilerini kullanmıştır. Seda 6. Sınıf konularından olan örüntüler konusunda genel terim bulma prosedürünü kullanarak işlem yapmıştır. Genel terimi bulurken zorlanmış olsa da sonuç olarak genel terimi bulmayı başarmıştır. Genel terimi bulduktan sonra ise denklemi kurup istenen cevabı bulmuştur. Çözümünü "Birkaç deneme sonunda $n.3 + 1 = 73$ olduğunu düşündüm. Çünkü 1 kare yapmak için n in yerine koyarsak 4 kibrit çöpü gerekir bu da gösteriyor ki doğru bir formül oluşturdum." şeklinde ifade etmiştir. Seda'nın yaptığı işlemin doğruluğu hakkında sadece bulduğu sonucun doğruluğunu kontrol ettiği çözüm prosedürü ile ilgili düşünmediği görülmüştür. Seda'nın düşünce yapısının önceden gördüğü bilgileri kullanarak denklem kurması ve gerçek hayata vurgu yapan bir problemin matematiksel karşılığını düşünebilmesi açısından CR ye yakın olduğu söylenebilir. Bu durumun sebebi kavramsal anlamasının güçlü olması olabilir.

➤ Seda'nın zorlanması sebebi önceki deneyimlerinden tam olarak hatırlamadığı bir prosedürü tekrar yapılandırmasından olabilir. Seda belli bilgi düzeyine sahiptir. Fakat yaptığı işlemlerle ilgili çok fazla açıklama yapmamıştır fakat kavramsal altyapısının kuvvetli olduğu söylenebilir. Çünkü soyut düşünerek denklem kurma yöntemini seçmiştir. Doğru bir çözüm yapan Seda'nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin bir düşünme yapısı sergilendiğinden CR_{dgd} olarak belirlenmiştir.

Seda'nın “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.12’de gösterilmiştir.

Tablo 4.12.

Seda'nın “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5
Seda	CR_{dld}	CR_{dlx}	MR_{ogx}	AR_{dgy}	CR_{dgd}

Tablo 4.12 incelendiğinde, Seda'nın incelenen beş problemin üçünde yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türüne, bir tanesinde algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne ve bir tanesinde de ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Seda tüm sorulara doğru veya muhtemel doğru cevap verirken problemlerin iki tanesinde lokal (yerel) akıl yürütme üç tanesinde global akıl yürütme sergilemiştir. Seda akıl yürütme sürecinde bazı sorularda derinlikli bazı sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2. Öğrencilerin “Doğrusal Denklemler” Konusu Kapsamında Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular

Bu bölümde her bir öğrencinin doğrusal denklemler konusu ile ilgili problemlere verdikleri cevaplardan, yarı yapılandırılmış görüşmelerin analizinden elde edilen bulgular sunulmuştur.

4.1.2.1. Ahmet'in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Ahmet'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet'in birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: bu soruyla ilgili ne düşündün

Ahmet: soruyu okudu.

Ahmet: (Hepsini teker teker yazdı). Düşey ekseninde değerleri yazdı ve devam ederek tüm tarihi mekânların koordinatlarını yazdı.

Mülakatçı: Bir noktanın koordinatı ne anlam geliyor?

Ahmet: Noktaların bulunduğu yer.

Mülakatçı: Koordinat sistemi deyince ne aklına geliyor?

Ahmet: Noktaların bir araya gelerek bütün olarak yer belirtmesi. Olmadı. İlk hiçbir şey gelmedi ama kitaplara ve öğretmene bakınca o geldi. En zoru grafik

Mülakatçı: Öğrendikten sonra ne düşündün peki?

Ahmet: Yer belirtme düşünüyorum. Tabi resim üzerinde bu kadar adım diyemeyiz. Çok zor olur. Bir de koordinat sistemindeki sayıları eşit parçaya bölerek ortaya çıktı. Bir de negatif, pozitifler var. Orijinde sağ pozitif sol negatif.

Mülakatçı: Peki sıralı ikili duydun mu?

Ahmet: Duydum ama bir fikrim yok. Hatırlamıyorum. Bir de parantez neden geliyor hiç sormadım.

Mülakatçı: neden peki olmazsa olmaz mı?

Ahmet: bence olur. Sonuçta anlıyoruz ama matematiksel olarak anlamı var tabi olmazsa olmaz.

Mülakatçı: Orijin değişseydi?

Ahmet: Olurdu tabi. X ekseninde y ekseninde yerleri değişirdi. Mesela ev 0 olurdu. Mesela, Atlama Kulelerine bakarsak x'i 7, y si 0 yani (7, 0) oldu. Eee yok bir dakika, x ekseninde 7 ama -7 olurdu. (-7, 0) olurdu.

Mülakatçı: Tamam güzel. Diğerleri değişir miydi?

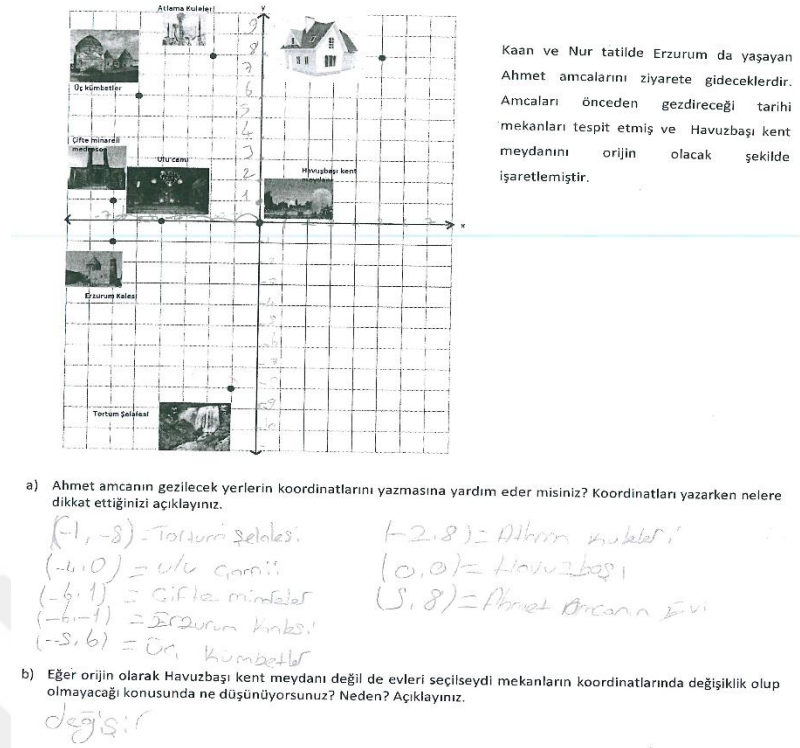
Ahmet: Evet ama Atlama Kulelerindeki farka göre yok ama aynı olmazdı. Değişirdi. Yani (-2, 8), (-7, 0) açısındaki farka göre aynı olmazdı. Orijine göre (-7, 0) (-2, 8). xler arasında 5 fark var. O zaman Üç Kümbetlerde -10 mu olur. Yok, ama olabilir. Deneyelim. Evet deneyince oluyor.

(Diğerlerine de baktı ve farkın aynı olduğunu gördü)

Mülakatçı: Peki hep 5 fark mı var? Ylerin arasında da mı 5 fark var?

Ahmet: Yok onlar farklı onun 8 fark var. Evet, (-5, 8) oluyor. Yani farkları hep aynı gidiyor. Yerleri değişiyor. Yani koordinat yerleri değişiyor.

Mülakatçı: Tamam.



Şekil 4.61. Ahmet'in birinci probleme ait çözümü

Ahmet'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) koordinat ii) tarihi mekânlar iii) orijin bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ahmet tarihi mekânların koordinatlarını yazabilmiştir. Koordinat ile ilgili "Noktaların bulunduğu yer" düşüncesi doğrudur. Koordinatlar, bir noktanın düzlemdeki ya da uzaydaki yerini belirtmeye yarar. Bu açıdan düşünüldüğünde matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Ahmet (0,0) noktasının orijin olduğu ifade etmiştir. Bu özellik matematik toplumu tarafından kabul edilmiş bir durumdur.

➤ Ahmet tarihi mekânların koordinatlarını zorlanmadan yazmıştır. Araştırmacının bir noktanın koordinatı ne demektir sorusuna "Noktaların bulunduğu yer." olarak cevap vermiştir. Araştırmacının Koordinat sistemi deyince ne aklına geliyor? Sorusundan sonra ise, "Noktaların bir bütün haline gelerek yerlerini belirtmesi. Olmadı. İlk hiçbir şey gelmedi ama kitaplara ve öğretmene bakınca o geldi. En zoru grafik" sözleriyle aslında tam anlamıyla içselleştiremediği veya düşündüğünü ifade edemediği söylenebilir. Koordinat sistemi ile ilgili grafik çiziminde zorlandığını ifade etmiştir.

Koordinat sisteminin yer belirttiğini ifade etmiştir. Koordinatların yazılmasında sayıların sayı doğrusunu eşit parçalara bölünerek yazıldığını ifade etmiştir. *“Bir de negatif, pozitifler var. Orijinden sol tarafı negatif sağ tarafı pozitif.”* yani koordinat sistemini çevirdiğimizde yine aynı şey oluyor “ diyerek koordinat sisteminde eksenler üzerindeki sayıların pozitif ve negatif olma durumlarını açıklamıştır. Ahmet koordinat noktalarının paranteze alınması gerektiğini söylemiştir fakat parantezin olup olmamasının çok gerekli olduğunun farkında değildir. b şıkkında ise orijinin soruya göre farklı seçilmesi ile ilgili *“yerleri değiştirdi x ekseninde y ekseninde yerleri değiştirdi. Mesela ev 0 olurdu.”* Evet, ama Atlama Kulelerindeki farka göre yok ama aynı olmazdı. Değiştirdi. Yani $(-2, 8)$, $(-7, 0)$ açısındaki farka göre aynı olmazdı. Orijine göre $(-7, 0)$ $(-2, 8)$. x ler arasında 5 fark var. O zaman Üç Kümbetlerde -10 mu olur? Yok, ama olabilir. Deneyelim. Evet deneyince oluyor.” Sözleriyle ifade ettiği gibi koordinatların değişeceğinin farkındadır. Fakat denemeden noktaların koordinatları arasındaki farkın sabit olduğunu fark edememiştir teker teker noktalardaki değişime bakarak farkın sabit olduğunu *“yani farkları hep aynı gidiyor. Yerleri değişiyor. Yani koordinat yerleri değişiyor.”* ifadeleriyle açıklamıştır. Kendi içinde tartışmalarla sesli düşünerek tereddütlerini ortadan kaldırmıştır. Ahmet’in bir noktanın koordinatlarını yazabildiği ve zorlanmadığı görülmüştür. Bu anlamda katılımcının konuyu anladığı söylenebilir. Ahmet’in akıl yürütme türü sınıfta gördüğü algoritma ile çözülmesi ve açıklamalarının derin olamaması yönünden algoritmaya dayalı akıl yürütme olarak sınıflandırılabilir.

➤ Ahmet’in noktaları bulurken ve koordinat kavramının ne anlama geldiği konusunda kendinden emin olduğu ve işlemlerini rahatlıkla devam ettirdiği görülmektedir. Bu durumun sebebi Ahmet’in bu konu ile ilgili bilgi eksiği olamamasından kaynaklanabilir. Fakat Ahmet neden paranteze alıyoruz sordum sözlerinden de anlaşılacağı gibi yaptığı işlemleri sorgulamadan direk algoritma ne ise uygulanır mantığı ile hareket etmektedir. Bu açıdan genel olarak yüzeysel bir bakış açısına sahip olduğu söylenebilir. Doğru bir çözüm yapan Ahmet’in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel bir düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{dgy} olarak belirlenmiştir.

-Ahmet'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet'in ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ahmet: Öncelikle 3 TL, $3x$ sonra her km 1 TL. $3x + 1$ denklemini kurdum

Mülakatçı: Neden öyle kurdun?

Ahmet: Önce 3 TL yi ödeyeceksin. 1 km gitsen de gitmesen de ödeyeceksin.

Mülakatçı: x neyi ifade ediyor?

Ahmet: x kat. 4 km gitse $3x + 4 = 7$ TL ödemiş olacak.

Mülakatçı: x ne yani. Hangi değişkeni belirtiyor?

Ahmet: x yerine n de yazılabilir. Nasıl yani?

Mülakatçı: Yani x yol mu ücret mi?

Ahmet: x ücreti belirtiyor. İlk bindiğimizde ödediğimiz ücret.

Mülakatçı: x mi?

Ahmet: evet x .

Mülakatçı: Peki yol-ücret tablosunu nasıl oluşturursun?

Ahmet: y ye herhangi bir sayı vereceğiz. 4 versek 13 olur.

Mülakatçı: Yani tablodaki x ve cebirsel ifadede x aynı mı?

Ahmet: Hayır değil.

Mülakatçı: farklı mı? Tablodaki x neyi ifade ediyor.

Ahmet: Aynı galiba. x i 13 buldum. Yerine koysak olmaz. Aynı değil farklı.

Mülakatçı: Peki farklı olduğunu düşünüyorsan x ve y nin ne olduğunu düşünüyorsun?

Ahmet: yani bu x , a da olur n de olur.

Mülakatçı: Peki x , y ne belirtiyor?

Ahmet: y gidilen kilometre, x ücret.

Mülakatçı: Yani 4 ü 3 le çarpıp 1 ekledin.

Ahmet: Evet.

Mülakatçı: Neden?

Ahmet: İlk başta 3 TL veriyoruz. O yüzden 8 km gitsek de +3 ekleyeceğiz. Bir de $3x + 1$ de verdik mi $24 + 1 = 25$ olur.

Mülakatçı: Yani bu şekilde mi?

Ahmet: Evet.

Mülakatçı: Peki cebirsel olarak nasıl ifade edersin?

Ahmet: yol y , x ücret, $3a + 1$ 3 katının 1 fazlası.

Mülakatçı: Yani o neye eşit oluyor? $3a+1$?

Ahmet: $3a + 1$ verilen ücrete eşit.

Mülakatçı: Cebirsel olarak yazarsak? Tamamlarsak.

Ahmet: $3x + 1 = eee...$

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Ahmet: Evet şu an karıştı. Eşittire ne yazacağız? Eşittir olmasa $3x+1$ yani eee. $3x + 4$ olsa olmuyor. Aaa biz yanlış yaptık. 4 km giderse $4 + 3 = 7$ TL oluyor. Ama biz 13 bulmuştuk. Ama aynı değil. Hepsi doğru? Mantıken 7 doğru, denklem olarak 13 doğru. Kurala uyarsak 13 çıkıyor.

Mülakatçı: Neden farklı çıkıyor. İkiside aynı çıkması gerekmez mi?

Ahmet: Bence bir hata var. Birisi yanlış.

Mülakatçı: Hangisinin yanlış olduğunu düşünüyorsun?

Ahmet: Bence denklem olan.

Mülakatçı: Neden yanlış? Fark edebildin mi?

Ahmet: Fark edemedim. Bulamadım. $3x + 1$ doğru. Eee denklem doğru 3 TL 3x, 1 TL 3x. Birde 1 TL olduğu için $3x + 4$ yapalım. Bu da yanlış.

Mülakatçı: Peki 2 km giderse kaç TL öder?

Ahmet: 5 TL öder ama denkleme göre 7 TL öder.

Hepsi doğru?

5 TL doğru ama denklem eee...

Mülakatçı: Peki sen mantiken yaptığın işleme göre tablo oluşturabilir misin?

Ahmet: km x, ücret y olsun.

Olur.

Mülakatçı: Peki tabloda değerler arasında bir ilişki var mı?

Ahmet: $2x - 1$. Yok olmuyor.

Mülakatçı: Yani tablodan denkleme gitmeye çalışsak.

Ahmet: $x + 3, x + 3, x + 3$ evet $x + 3$ olur.

X e hangi sayı yazarsak +3 yazmamız lazım.

$$3 \text{ olsa } 3 + 3 = 6$$

$$5 \text{ olsa } 5 + 3 = 8$$

$$9 \text{ olsa } 9 + 3 = 12$$

Kural bu $x+3$ olur

$$x + 3 =$$

Mülakatçı: Neye eşit olacak?

Ahmet: bulduğumuz şey $x + 3 = y$, o zaman yukarıda da aynı şey var. Yani, $3x + 1 = y$ olur.

Mülakatçı: Peki aynı sorudan bahsediyoruz ya hangi denklem doğru. $x + 3$ mü $3x + 1$ mi?

Ahmet: ikiside eşit.

Mülakatçı: Nasıl anladın?

Ahmet: Ya şuan 3 e x i haaa. Yok değil mesela yer değiştirsek de olmuyor. Eşit ama nasıl buldum.

Mülakatçı: Neden eşit olduğunu düşünüyorsun?

Ahmet: Şimdi burada $(3x + 1)$ 3 katının 1 fazlası, diğerinde direk 3 fazlası. 2 denklem. Bence eşit ama nasıl buldum. Denklemi çözelim.

$$3x + 1 = x + 3$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Olur. Eşit çıktı mı? x e 1 yazarsam çıkar mı?

Mülakatçı: x e 1 yazarsan çıkması gerekir. Ama 2, 3 yazarsan çıkar mı?

Ahmet: Çıkamaz çünkü x i 1 bulduk. Denklemi eşit kanıtladık.

Mülakatçı: 2 koysak. Yani sadece 1 le sınırlı olmaz mı?

Ahmet: Ama bu denklemin 1 olduğunu buldum. Bu denklemin eşit olduğunu öğrenmek için bu işlemi yaptık.

Mülakatçı: Denklemın eşit olması için bütün değerlerin eşit olması gerekmez mi? Ya da eşit olması için ne gerekir?

Ahmet: x yerine herhangi bir sayı gelmesi gerekir. x yerine 2 yazsak biri

5, diğeri 6 ediyor olmuyor. x yerine 1 yazarsak ikisinde de 4 ediyor.

Mülakatçı: Cebirsel ifade hepsi o zaman?

Ahmet: İkisi de olabilir. Hangisi olsun? $y = 3x + 1$ olur. Yanlış değil ama $y = x + 3$ de yanlış değil.

Mülakatçı: Peki bu ilişkiyi grafikte göstermek istersek nasıl gösteririz?

Ahmet: Grafiğimizi yapalım.

$3x + 1$, 3 den başlayalım.

Mülakatçı: Hangisine göre yapacaksın?

Ahmet: İkisinde eşit. Hangisine göre yapsak olur.

Mülakatçı: Bu grafikte x neyi belirtiyor? Y neyi belirtiyor?

Ahmet: x gidilen yol, y açılış ücreti. Yok, açılış ücreti 3 zaten. Bence yanlış yaptık.

Mülakatçı: Neden yanlış yaptığını düşündün?

Ahmet: Kat kat gidiyor. Ben +1 yapmışım, +3, +3 gitmesi lazım. 3, 6, 9, 12 olmuyor ya. Yok, çok zorlandım.

Mülakatçı: Devam etmek istemiyorsan sonra devam edebiliriz.

Mülakatçı: Peki yol ve ücret arasındaki ilişki hakkında ne söylersin?

Ahmet: eee ücret yani kaç km gideceğiz. 5 km gidersek 3 TL artı ödeyeceğiz. Ama 4 km gittik mi $4+3=7$, 5 km $5+3=8$ TL. Yani 3 katının 1 fazlası ediyor. Yani km göre değişir. 4 km için $3x + 4$ 8 km için $3x + 8$.

Mülakatçı: x neyi ifade ediyor?

Ahmet: x açılış ücretini, y yok burada. $Y=3x+1$, $3x+8$, $3x+4$ değil.

Mülakatçı: Tamam. Peki, taksi tarifesinde açılış ücreti olmasa...

Ahmet: Olurdu. Benim yaptığım açılış ücreti grafik.

Mülakatçı: Yani senin üstte çizdiğin grafik bu tarife için mi?

Ahmet: Herhalde. Herhalde değil. Kesin cevap vermek istiyorum. Hayır ya bunlar aynı değil. Farklı tarifeler.

Mülakatçı: Peki açılış yok. Her km 1 TL. Bunun grafiği nasıl olurdu?

Ahmet: Bilmiyorum ki. Kaç km gidersek 1 ile çarpacağız, sonucu bulacağız. Mesela 8 km gidersek 8 TL çıkar. Mesela 4 km 4 TL. 1 ile çarpımı TL yi veriyor.

Mülakatçı: Grafikte nasıl ifade edersin?

Ahmet: (Çizmeye çalıştı ama zorlandı) .Yani böyle ama nasıl olacak. Eee. Mesela 1 km 1 TL. 2 km yi ama işte 2 ile çarpmayacağız. 1 ile çarpacağız.

Mülakatçı: Çarp o zaman.

Ahmet: Ama olmaz ki. Her seferinde 1 ile çarpılmaz ki?

Ama 2 ile 1 i çarpacaksın. Birincide 1 ile 1 i. İkincide 2 ile 1 i.

Mesela 1 km de 1, 2 km de eee...

Mülakatçı: 2 km giderse ne kadar öder?

Ahmet: 2 TL.

Mülakatçı: Tamam o zaman 2 ile devam etsene.

Mülakatçı: 3 km giderse.

Ahmet: 3 TL, 4 giderse 4. Yani 0 a 0, 1 e 1, 2 ye 2 ama nasıl işte.

Mülakatçı: Tamam birleştir. (1, 1) (2, 2) (3, 3)

Ahmet: Şöyle yaptım.

Mülakatçı: Orijinden geçecek mi?

Ahmet: Geçecek. Tekrar yapayım. Aralıklar eşit olursa karşılıklı olmaz. Bunun bir sınırı var. Ama bayağı gider yani.

Mülakatçı: Açılış 3, her km 2 olsaydı?

K. $3x+2$ oluyor bu. 4 m gittik mi. Yoo... eee.

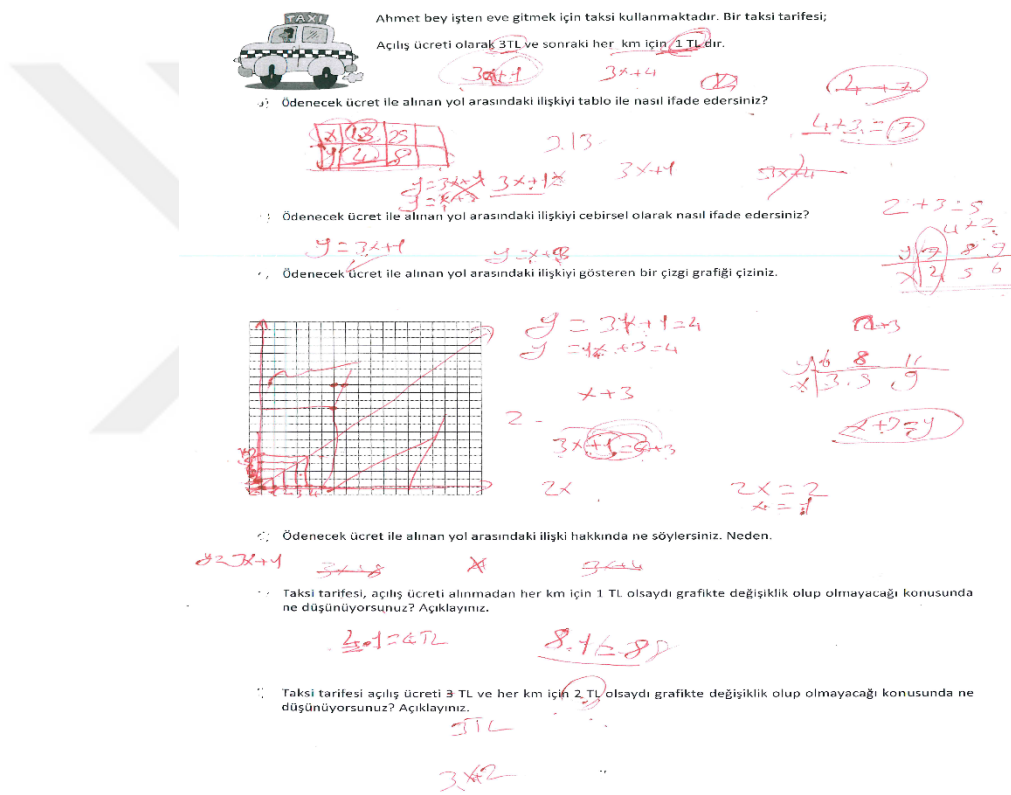
Mülakatçı: Neden?

Ahmet: 3 TL ödüyoruz. Bu $3x$ ediyor. Her km içinde 2 TL artacak 2 olacak.

Üstte 4 km de 7. Burada 11 TL ödüyoruz.

Mülakatçı: Yani ücretin artmasına mı sebep oldu?

Ahmet: Evet öyle.



Şekil 4.62. Ahmet'in ikinci probleme ait çözümü

Ahmet'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem ii) yol, ücret iii) grafik, tablo bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ahmet'in denklem kavramı ile ilgili anlamasında sıkıntı vardır. $3x + 1$ cebirsel ifadesinin denklem olduğunu düşünmektedir. Bu anlamda bu cebirsel ifade hem

problem durumunu karşılamamaktadır hem de matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Yol ve ücret birer gerçek yaşam nesnesidir. Ahmet'in çizdiği tablo ve grafikler de yine matematiksel olarak problem durumunu karşılamamaktadır.

➤ Ahmet, soruyu okuduktan sonra denklem kurarak işleme başlamıştır. Soruyu okuyarak adım adım denklem kurmuştur 3 TL açılış ücretini $3x$ olarak ifade etmiş ve 1 ekleyerek $3x + 1$ cebirsel ifadesini yazmıştır. Değişkenin (x), kat olduğunu ifade etmiştir. Fakat değişkene anlam yüklemeye sıkıntı yaşamıştır. Mülakatçının sorusuyla x değişkenine ücreti tanımlamıştır fakat doğru olmayan bir cebirsel ifade yazmıştır. Yazılan cebirsel ifade problem durumunu karşılamamaktadır. Devamında yol ücret ilişkisine dair tablo oluştururken, y değişkenine sayı vermeye başlamıştır fakat yazdığı cebirsel ifade ile uyumsuz rastgele işlemler yapmaktadır. Ahmet'in "Aynı galiba. x i 13 buldum. Yerine koysak olmaz. Aynı değil farklı" ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Tablodaki değerleri bulurken y değişkenine değer vermiştir ve bu değeri 3 ile çarpıp 1 eklemiştir. Ahmet 'in ifadesi "İlk başta 3 TL veriyoruz. O yüzden 8 km gitsek de +3 ekleyeceğiz. Bir de $3x+1$ de verdik mi $24+1=25$ olur." yanlış bir yol izlediğini göstermektedir. Ahmet yol ücret arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak yazmaya çalışırken zorlanmıştır. Sadece değişkeni x değil a seçmiştir. Denklem kurmaya çalışırken sadece $3a + 1$ yazmıştır görüşmecinin bu ifade neye eşittir sorusuyla kafası iyice karışmıştır. Ahmet'in "Evet şu an karıştı. Eşittire ne yazacağız? Eşittir olmasa $3x + 1$ yani eee. $3x + 4$ olsa olmuyor." İfadeleri bu durumu desteklemektedir. Sonrasında ise, deneme yaptığında denklem ve kuralın aynı sonuçlar vermediğini fark etmiştir. "Aaa biz yanlış yaptık. 4 km giderse $4+3=7$ TL oluyor. Ama biz 13 bulmuştuk. Ama aynı değil. Hepsi doğru? Mantiken 7 doğru, denklem olarak 13 doğru. Kurala uyarsak 13 çıkıyor." ifadeleri bu durumu göstermektedir. Ahmet bir yanlışlık olduğunu fark etmesine rağmen kurduğunu cebirsel ifadeyi kontrol etmiştir fakat hatasını bulamamıştır bulamadığı için denklem üzerinde amaçsızca değişiklik yapmıştır. Sonraki süreçte görüşmecinin de desteği ile ilk önce tabloyu oluşturup sonra denklemi oluşturmaya geçmiştir ve tablodaki değerlerin birbiri ile ilişkisini incelemiştir. Ahmet'in " x e hangi sayı yazarsak +3 yazmamız lazım. 3 olsa $3+3=6$; 5 olsa $5+3=8$; 9 olsa $9+3=12$ kural bu $x+3$ olur." ifadeleri bu durumu göstermektedir. Fakat Ahmet'in kafa karışıklığı hala geçmemiştir ve önceki yazdığı denklemle yeni kurduğu denklemin eşit olduğunu savunmaktadır. Ve denklemlerin birbirine eşitleyerek $x = 1$ değerini bulmuştur. Fakat yorum

yapamamıştır. Ahmet'in "*Çıkmaz çünkü x i 1 bulduk. Denklemini eşit kanıtladık. İkisi de olabilir. Hangisi olsun? $y = 3x + 1$ olur. Yanlış değil ama $y = x + 3$ de yanlış değil.*" ifadeleri bu durumu kanıtlamaktadır. Ahmet saplantıdan kurtulamamıştır ve hata yapmaya devam etmektedir ezbere işlemler bütünü ile çözüm için çabalamaktadır. " *x açılış ücretini, y yok burada. $y = 3x + 1, 3x + 8, 3x + 4$ değil.*" İfadelerinden hem değişkene anlam yükleyememe hem de denklem kavramı ile ilgili kavramsal bilgi eksikliği göze çarpmaktadır. Boy zaman ilişkisini, grafik ile göstermek için, yine kendi kurduğu yanlış olan $3x + 1$ i kullanmaya karar vermiştir. Fakat yine kafa karışıklığı devam etmektedir. " *x gidilen yol, y açılış ücreti. Yok açılış ücreti 3 zaten. Bence yanlış yaptık. Kat kat gidiyor. Ben +1 yapmışım, +3, +3 gitmesi lazım. 3, 6, 9, 12 olmuyor ya. Yok, çok zorlandım*" ifadeleri bu durumu açıklamaktadır. Grafik çizerken ise 3 den başlaması gerektiğini söylemektedir fakat nedenini ifade etmeden grafik çizimine devam etmektedir. x eksenine 1 den başlayarak y eksenine ise 3 den başlayarak değerler yerleştirmiştir. Ve devamında orijinden geçen bir grafik çizmiştir. Ahmet'in ne işlem yaptığının farkında olmadığı " *x gidilen yol, y açılış ücreti. Yok, açılış ücreti 3 zaten.*" ifadelerinden belli olmaktadır. Grafikte denkleme göre değişiklik olup olmadığı ile ilgili sorularda ise, problemde verilen kuralın değişmesinin değişikliğe sebep olacağını farkındadır ama nasıl bir değişiklik olacağı konusunda bir fikri yoktur. Sadece yeni durumu açıklamıştır fakat grafiğe aktarmakta zorlanmaktadır. Ahmet'in "*Ama olmaz ki. Her seferinde 1 ile çarpılmaz ki?*" ifadesi bu durumu açıklamaktadır. Görüşmecinin desteği ile grafiği tamamlamıştır. Açılış ücretinin sabit olduğu fakat dakika başına 2 TL alınması durumunda ise sadece ücretin artacağını düşünmektedir. Ahmet'in akıl yürütme türü, ara ara görüşmecinin desteği ile devam etmiştir bu yüzden P-GAR fakat işlemleri ezbere aklına gelen işlemi yapmak suretiyle gerçekleştirdiği için ise MR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Ahmet'in zorlanmasının sebebi, denklem kurarken hatalı düşüncelere saplanması ve geniş düşünememesi, ayrıca etkili tartışmalar yapmadan emin olmayan bir tavırla işlemlerine devam etmesidir. Ahmet herhangi bir değer için eşit olan iki denklemin birbirine eşit olduğu düşüncesine sahiptir. Ahmet'in temel bilgilere sahip olması yorum yapacak kadar kavramsal bilgiye sahip olmaması Ahmet'i engellemektedir. Hatasını fark etse bile yüzeysel düşünme tarzı ile bununla başa çıkamamaktadır. Hatalı işlemler yapan Ahmet'in matematiksel akıl yürütme türü, iki

farklı akıl yürütme türü ve yüzeysel bir düşünce tarzı sergilendiğinden PGAR_{ylly} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ahmet'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet'in üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ahmet: Bir A mumu bir B yapalım. Yani demek ki ya kalın ya da farklı

Mülakatçı: Evet artık onu bilmiyoruz.

Ahmet: Saatte 5 cm azalacak. -5 olur. Mesela 1 saat geçince 5 cm azalacak. 4 cm olmaz tabi bata 30 cm miş.

Mülakatçı: Başlangıçta 30 cm.

Ahmet: 1 saatte 25 ediyor.

Mülakatçı: x ve y neyi belirtiyor?

Ahmet: x boyunu, y ne kadar kaldığını gösteriyor.

Mülakatçı: Bize zaman ve boy ilişkisini soruyor. Biz orada zamanla ilgili bir şey görebiliyor muyuz?

Ahmet: Hayır göremiyoruz.

Mülakatçı: Nasıl bir ilişki var ki tabloya dökelim.

Ahmet: $x-5$ ama işte saatte -5. B mumu $3x-5$, A $x-5$.

Mülakatçı: x ne orada?

Ahmet: boyu.

Mülakatçı: Boy belli değil mi? Niye x dedik?

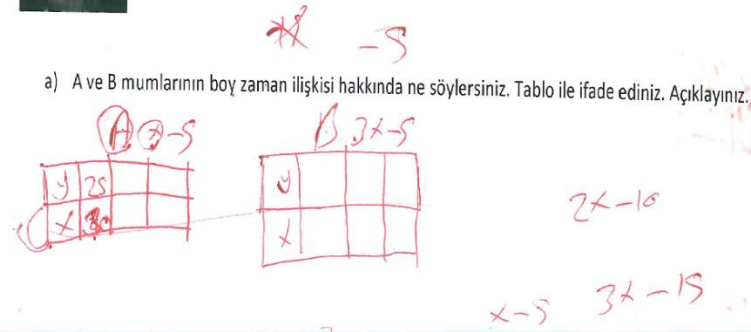
Ahmet: Yanlış dedik. x zaman. Ama x yani 1 saatte 5 cm. 2 saatte $2x-10$. 3 saatte $3x-15$ olur. eee ama işte nasıl yapacağım bilmiyorum.

Ahmet: Bu soru zor geldi yapamadım. Yapamayacağım herhalde.



Boy 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.



Şekil 4.63. Ahmet'in üçüncü probleme ait çözümü

Ahmet'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi:

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) mumlar ii) değişken iii) mumun kalınlığı bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ahmet soruda verilen mumların kalın olabileceği ihtimalini de düşünerek başlamıştır. Bu durum matematiksel olarak bir anlam ifade etmemektedir. Ahmet soruda geçen “azalma” kelimesini referans alarak işleme başlamıştır. Bu soru için doğru bir bakış açısı olsa bile bu strateji genel anlamda doğru bir sonuca ulaştıramayabilir. Bu açıdan düşünüldüğünde matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Ahmet soruyu okuyarak mumlar arasındaki kalınlık yönünden bir fark olabileceğini söylemiştir fakat sorunun çözümü ile ilgili matematiksel olarak katkısı olmayan bir yorum yapmıştır. Sonrasında her iki mum için ayrı ayrı tablo yapmayı seçmiştir. Mumun 1 saatte 5 cm azaldığı için +5 değil – 5 demek gerektiğini düşünmüştür. Ahmet tabloda x ve y değişkenlerini yazarak işe başlamış fakat değişkenleri seçerken boy zaman ilişkisini ifade edebilecek şekilde seçmemiştir. Ahmet'in “ x boyunu, y ne kadar kaldığını gösteriyor.” ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Araştırmacının zamanla ilişkisini görebiliyor muyuz? Sorusuyla hata yaptığını fark etmiş ve zamanla ilgili bir şey göremediğini söylemiştir. Sonrasında ise boy zaman ilişkisini yazmak için denklem yazma çabasına girmiştir. -5 dediği için $x-5$ yazması gerektiğini B mumu için de $3x-5$ yazması gerektiğini söylemiştir. Fakat katılımcı x 'in boy olduğunu söylemiştir. Araştırmacının müdahalesiyle yanlış yaptığını söylemiş ve x in zaman olduğunu söylemiştir. Fakat işlemlerine devam ederken 1 saatte $x-5$ 2 saatte ise $2x-10$ olur diyerek aslında katılımcının değişkene anlam yükleyemediği görülmektedir. “Yanlış dedik. x zaman. Ama x yani 1 saatte 5 cm. 2 saatte $2x-10$. 3 saatte $3x-15$ olur.” ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Ahmet soruda zorlandığını “eee ama işte nasıl yapacağım bilmiyorum. Bu soru zor geldi yapamadım. Yapamayacağım herhalde.” Cümlelerini kullanarak ifade etmiş ve çözümü bırakmıştır. Ahmet'in soruda verilen “azalma” anahtar kelimesini dikkate alarak çıkarma yapacağını düşünmesi yönüyle FAR akıl yürütme türüne sahip olduğu söylenebilir.

➤ Ahmet'in zorlanmasının ilk sebebi anahtar kelime stratejisinin her zaman doğru sonuçlar vermeyeceği ile ilgilidir. İkinci durum ise, katılımcının yüzeysel bir bakış açısıyla düşünmesi kavramsal altyapısının yetersiz olması veya anladığını uygulayamaması olabilir. Ahmet'in “ değişkenlere anlam yükleyememesi” bu konu ile

ilgili eksikliklerinin olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla katılımcı yapamadığını hissetmiş ve karamsarlığa kapılarak çözümüne devam etmemiştir. Ahmet'i matematiksel akıl yürütme türü, çözüme ulaşamadığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel bir düşünce tarzı sergilendiğinden FAR_{xgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ahmet'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ahmet'in dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Ahmet: $y = \frac{x}{2} + 110$. Şimdi x e herhangi bir sayı verirsek, Önce b yi yapalım.

Mülakatçı: Tamam.

Ahmet: 145 kan basıncı yaşını nasıl bulacağız?

Ahmet: Şimdi $145 = \frac{x}{2} + 110$ nasıl bulacağız.

Şimdi bu bölüm durumu eee.

Mülakatçı: Normalde yapmışsın. 145 den 110 u çıkarmışsın.

Ahmet: Evet ama hatalı yapmışım. İlişki yok ki. Kan basıncıyla 110 eee çok zorlandım.

Şimdi eee $145 = \frac{x}{2} + 110$ burası 145 e eşitmiş. Denklem yaparsak,

$$-110 + 145 = \frac{x}{2}$$

$$145 - 110 = \frac{x}{2}$$

$$35 = \frac{x}{2}$$

Şimdi x eee 35. Ters işlem yaparsak 34 i 2 ile çarparsak x i 70 bulurum.

Mülakatçı: Yani ne oldu?

Ahmet: x yaştı. Demek ki yaşı 70 olan birinin kan basıncı 145 miş. x yerine 70

yazarsam, $\frac{70}{2} + 110 = 145$ buldum. Nasıl buldum, ters işlem yaptım. Yok denkleme çözdüm.

Ahmet: Şimdi grafiği yapalım. Bi x e sıfır verelim. Birde y ye 0 verelim. y ye 0 verirsek, x 112 buluruz. Yok hayır. Şimdi $y=0$, $\frac{x}{2} = -110$ olur. Şimdi yapalım bunu. Aynı şekilde 110'u 2 ile çarparsak -220 ediyor. Yaşı 220 miş. eee nasıl yani. eee

Mülakatçı: Ne yapmak gerekir x e değer verirsek?

Ahmet: 0 yaşında olan birin kan basıncı olmaz ki formüle göre,

Şimdi $0/2 + 110$. Eee yanlış yaptım. Ya da yapamıyorum.

0 ı 2 ye böldük. Ne çıktı? 0

Mülakatçı: $0 + 110$

Ahmet: 110. y 110

Mülakatçı: Tamam bir değer daha ver x e.

Ahmet: x e nasıl yani eee

Mülakatçı: Grafiği çizmek için ihtiyacın var ya.

Ahmet: eee 8 verelim. $\frac{8}{2} + 110 = 114$ olur.

Ahmet: Pozitif değerler olduğundan sadece üstü alayım.

$$x=0, y=110$$

Grafik böyle olur.

Mülakatçı: Emin misin?

Ahmet: Evet eminim.

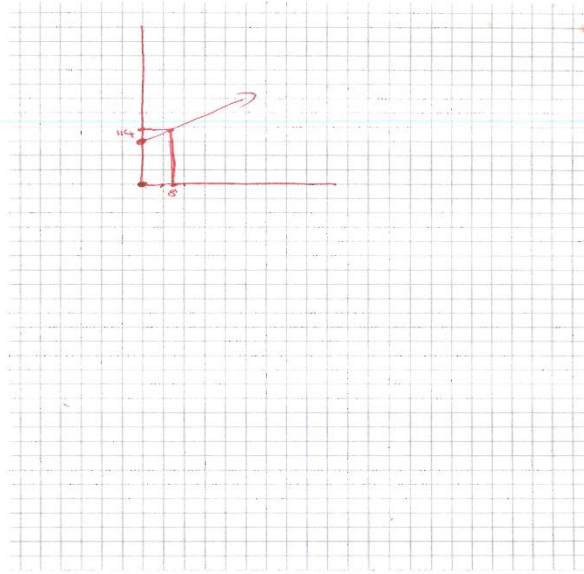


Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

$$\frac{x}{2} + 110 = y \Rightarrow \frac{x}{2} = y - 110 \Rightarrow x = 2(y - 110)$$

$$\frac{x}{2} = 110$$

a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



$$\frac{x}{2} = 110$$

b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

$$110 - 145 = \frac{x}{2} \Rightarrow 110$$

$$145 = \frac{x}{2} + 110$$

$$145 - 110 = \frac{x}{2}$$

$$35 = \frac{x}{2}$$

$$35 \cdot 2 = 70$$

Şekil 4.64. Ahmet'in dördüncü probleme ait çözümü

Ahmet'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ahmet'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) kan basıncı, yaş ii) denklem bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ahmet'in belirttiği "kan basıncı" ve "yaş" gerçek dünya bileşenidir. Ahmet b şikkında denklemi çözdükten sonra bulduğu değerin yaş olduğunu ifade etmiştir. Bu şekilde modelleme özelliğinin üç safhasını da gerçekleştirmiş olmaktadır. Ahmet'in çizdiği grafikte eksiklikler vardır.

➤ Ahmet ilk olarak b şikkını yaparak başlamak istemiştir. Kan basıncı verilen birinin yaşını bulurken soruda verilen denklemi kullanmayı tercih etmiştir. Denklemden 145 değerini yerine yazdıktan sonra nasıl bulacağı konusunda tereddüt yaşamıştır. Denklemden $x/2$ olması kafasını karıştırmıştır. Önceki çözümüne bakarak ters işlem yaptığını ama hatalı yaptığını düşünmüştür. Sorasında tekrar yapmaya çalışmıştır. “Evet, ama hatalı yapmışım. İlişki yok ki. Kan basıncıyla 110 eee çok zorlandım. Şimdi eee $145 = x/2 + 110$, burası 145 e eşitmiş. Denklem yaparsak,

$$-110 + 145 = x/2$$

$$145 - 110 = x/2$$

$$35 = x/2$$

Şimdi x eee 35. Ters işlem yaparsak 34 i 2 ile çarparsak x i 70 bulurum. x yaştı. Demek ki yaşı 70 olan birinin kan basıncı 145 miş. x yerine 70 yazarsam, $70/2 + 110 = 145$ buldum. Nasıl buldum, ters işlem yaptım. Yok denklemi çözdüm.” ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Ahmet’in doğru sonuca vardığı fakat ne yaptığının farkında olmadan işlem yaptığı görülmektedir. a şikkında ise, katılımcılardan grafik çizmeleri beklenmektedir. Grafiği çizmek için tablo yapmaya başlamış ve önce y ye 0 vererek x değerini bulmuştur. Ahmet’in ” Şimdi grafiği yapalım. Bi x e sıfır verelim. Birde y ye 0 verelim. y ye 0 verirsek, x 112 buluruz. Yok hayır. Şimdi $y=0$, $x/2 = -110$ olur. Şimdi yapalım bunu. Aynı şekilde 110’u 2 ile çarparsak -220 ediyor.” ifadeleri çözümünü göstermektedir. Ahmet negatif bir değer bulunca “yaşı -220 eee nasıl yani?” Diyerek kafasının karıştığını belirtmiştir. Ahmet takıldığı için araştırmacı müdahale etmiştir. Araştırmacının müdahalesiyle Ahmet x e değer vererek işlemine devam etmiştir. Fakat yine kafa karışıklığı devam etmektedir. “0 yaşında olan birin kan basıncı olmaz ki formüle göre, Şimdi $0/2 + 110$. Eee yanlış yaptım. Ya da yapamıyorum.” İfadeleri bu durumu desteklemektedir. Sonrasında araştırmacının yönlendirmesiyle x e ikinci bir değer vermiştir. Bu durumda araştırmacının müdahalesiyle strateji seçimi yapılmış olur. Değerler bulunduktan sonra geriye grafiği çizmek kalmıştır tablodaki değerleri bularak birleştirmiş ve grafiği çizmiştir. Ahmet’in akıl yürütme türü P- GAR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Ahmet denklemi kullanarak kan basıncı 145 olan birinin yaşını bulma işlemini daha basit gördüğü için bu şekilde başlamayı seçmiş olabilir. Denklem çözümü ile ilgili sıkıntılar yaşamaktadır. Ahmet'in denklemde gördüğü $x/2$ terimi katılımcıya farklı gelmiş olabilir. Ahmet'in denklemi çözerek sonuca vardığı görülmektedir. Ahmet grafik çizimi ile ilgili kafasında bir şemaya sahiptir. x e ve y ye sıfır vererek değerler bulunacağı bilgisine sahiptir fakat katılımcı problem durumu ile bağlantı kuramamıştır. Bu durumun sebebi konuyu içselleştirememesi veya problemin farklı gelmesi olabilir. Ahmet'in belli bilgi birikimi olmasına karşın kavramsal anlamasının zayıflığından kaynaklı yüzeysel bir düşünme tarzı vardır. Ahmet'in matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru sonuca ulaşıldığından, iki tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme tarzı sergilendiğinden P- GAR_{oly} olarak sınıflandırılmıştır.

Ahmet'in "Eşitlik ve Denklem" konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.13'te gösterilmiştir.

Tablo 4.13.

Ahmet'in "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Ahmet	AR _{dgy}	P-GAR _{ly}	FAR _{xgy}	P- GAR _{oly}

Tablo 4.13 incelendiğinde, Ahmet'in incelenen dört problemde de algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu özellikle iki ve dördüncü problemlerde kişi rehberliğinde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne yani P-GAR akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Ahmet problemlerin iki tanesine muhtemel doğru veya doğru cevap verirken bir tanesine yanlış cevap vermiş ve bir tanesinde de çözümü bırakmıştır. Ahmet ikinci ve dördüncü problemlerde yerel bir akıl yürütme türü sergilemiş diğer problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Ahmet akıl yürütme sürecinde yüzeysel bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.2. Barış'ın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Barış'ın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Barış'ın birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: havuzbaşı orijin ise (0,0) dır. Hepsinin koordinatlarını buldum mesela. Ev (5, 8) olur.

Mülakatçı: Koordinatı yazarken neye dikkat ettin?

Barış: Önce alttan x i sonra y yi yazmaya.

Mülakatçı: Peki orijin değişseydi değişiklik olup olmayacağı hakkında ne düşünüyorsun?

Barış: Değişirdi. Atlama kulelerinin yeri değişirdi. Önceden (-2, 8) iken şimdi (-7, 0) olur.

Mülakatçı: Yani sayısal olarak koordinatı mı değişirdi.

Barış: Evet.

Mülakatçı: Peki bir noktanın koordinatı deyince ne aklına geliyor?

Barış: Bulunduğu konum, yer.

Mülakatçı: Koordinat sistemi... ?

Barış: Artı şeklindeki doğrular olur.

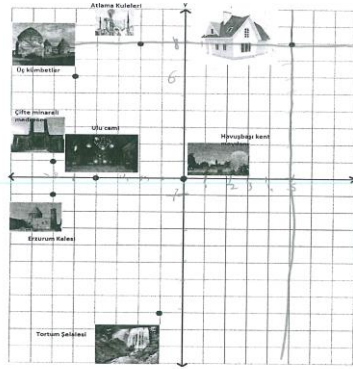
Mülakatçı: Peki sıralı ikili ne demek?

Barış: Sıralı ikili (5, 8) mesela sıralı ikilidir.

Mülakatçı: Sıralı ikili neyi belirtir?

Barış: Konumu belirtir.

Mülakatçı: Peki.



Kaan ve Nur tatilde Erzurum da yaşayan Ahmet amcalarını ziyaret edileceklerdir. Amcaları önceden gezdireceği tarihi mekanları tespit etmiş ve Havuzbaşı kent meydanını orijin olacak şekilde işaretlemiştir.

- a) Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.

Ev = (5, 8)
Atlama kuleleri (-2, 8)
Uş kumbetleri (-5, 6)
Çift minareli medrese (-6, 1)
Ulu camii (-4, 0)
Havuzbaşı (0, 0)
Erzurum kalesi (-1, -1)
Tartım Seloğlu (-1, -1)

- b) Eğer orijin olarak Havuzbaşı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekanların koordinatlarında değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Neden? Açıklayınız.

Değişir çünkü orijin ev olsaydı koordinat sisteminin her şeyi değişir. Mesela Ulu camii (-4, 0) iken (-9, -8) olur.

Şekil 4.65. Barış'ın birinci probleme ait çözümü

Barış'ın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Barış'ın matematiksel akıl yürütme süreci; i) koordinat ii) tarihi mekânlar iii) orijin iv) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Barış orijinin (0,0) noktası olduğu düşüncesine sahiptir. Bu bilgi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Barış bir noktanın koordinatları yazılırken önce x sonra y değerinin yazılması gerektiğini söylemiştir bu durum matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Bir noktanın koordinatının bulunduğu konum olması matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Fakat koordinat sisteminin artı şeklinde doğrular ifadesi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir. (5,8) 'ın bir sıralı ikili olması matematiksel olarak kabul edilebilir özelliktir.

➤ Barış koordinat sisteminin koordinat sistemi üzerindeki sayıların nasıl yerleştiği hakkında bilgiye sahiptir. Orijinin (0,0) noktası olduğunu bilmektedir. Tarihi mekânların koordinatlarını zorlanmadan bulmuştur. Koordinatları bulurken önce x sonra y yi yazması gerektiğinin farkındadır. B şikkında ise, orijinin değişikliği durumunda koordinatlarda ne gibi değişiklik olurdu sorusuna yönelik “*Değişirdi. Atlama kulelerinin yeri değişirdi. Önceden (-2, 8) iken şimdi (-7, 0) olur*” ifadelerini kullanmıştır. Barış doğru bir şekilde koordinatları söyleyebilmiştir fakat açıklama ve tartışma yapma gereği duymamıştır. Barış'ın akıl yürütme türünün algoritmaya dayalı akıl yürütme olduğu söylenebilir.

➤ Barış genel olarak hiç zorlanmadan işlemlerini tamamlamıştır. Bu durumun sebebi koordinat sistemiyle ilgili bilgi eksikliğinin olmaması olabilir. Etkili tartışmalar ve açıklamalar geliştirmede için yüzeysel bir bakış açısına sahip olduğu söylenebilir. Doğru çözüm yapan Barış'ın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme tarzı sergilendiğinden AR_{dgy} olarak belirlenmiştir.

-Barış'ın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Barış'ın ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: şimdi ödenecek ücret ve yol tablosu.

Bunun denklemi şöyle, her km de 1 TL alıyor gidilen yola x dersek birde açılış

ücreti var $1x + 3$ oluyor. Bu y ye eşit oluyor yani toplam aldığı fiyat. Tabloyu yaparsak, x e değer verelim.

Mülakatçı: Tablo ile ilgili bir şey dikkatini çekti mi?

Barış: Evet 3 fazlası.

Mülakatçı: Peki bu ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersin?

Barış: $y = x + 3$

Mülakatçı: Niye böyle yazdın?

Barış: y toplam miktar. Gittiğin yol + açılış ücreti y yi verir.

Mülakatçı: Bu ilişkiyi grafikte nasıl ifade edebiliriz peki?

Barış: (önce tablodan sıralı ikililer yazdı) (1, 4) (3, 6) (5, 8) (7, 10) (9, 12) olarak. Ve grafiği yazmaya başladı. Değerleri yanlış oldu. 2 den başlaması lazım. Ama 3 den başlamaz lazım ve tekrar çizelim.

Mülakatçı: Peki grafikte ilgili doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Barış: Doğru oldu yani. Düz hem de.

Mülakatçı: Peki aşağıya doğru devam eder mi?

Barış: Keser. Eksenleri devam eder.

Mülakatçı: Peki yol ile ücret arasında nasıl bir ilişki var?

Barış: Ne kadar yol gidersek o kadar para veririz. 3 km 3 TL, 20 km 20 TL vereceğiz.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti olmasaydı 2 TL alınsaydı? Grafikte değişiklik olup olmayacağı hakkında ne söylersin?

Barış: Evet değişirdi. 0 dan başlardı.

Mülakatçı: Neden?

Barış: 3 TL alınmadığı için 0 da 0, 1 de 1, 2 de 2 diye giderdi.

Mülakatçı: Peki açılış 3, tarife 2 TL olsaydı nasıl olurdu?

Barış: 3 den başlardı. 1 km de 5, 2 km de 7, 3 de 9 olurdu ve giderdi.

Mülakatçı: Peki sence bu grafikler doğrusal mı?

Barış: Çünkü noktaları birleştirtince doğru düz olursa grafik doğrusal olur.

Mülakatçı: Tamam.



Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesi; Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

$$01x+3=y$$

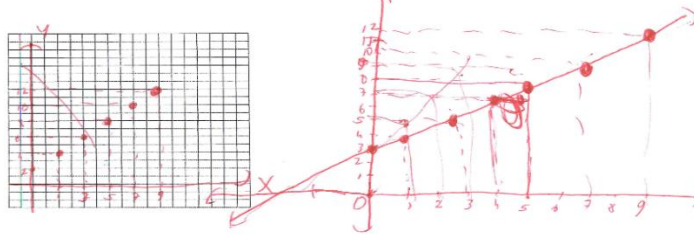
Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

x	1	3	5	7	9
y	4	6	8	10	12

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$y = x + 3$$

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çiziniz.



Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersiniz. Neden.

3 37 20 2076

Taksi tarifesi, açılış ücreti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

Taksi tarifesi açılış ücreti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

Şekil 4.66. Barış'ın ikinci probleme ait çözümü

Barış'ın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Barış'ın matematiksel akıl yürütme süreci; i) sıralı ikili ii) denklem iii) grafik, tablo iv) yol, ücret bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Barış'ın belirttiği sıralı ikililer doğrudur ve Barış, problem uygun bir denklem kurmuştur. Bu yönüyle denklem matematiksel bir özelliktir. Barış'ın oluşturduğu tablo problem durumunu karşılayan kabul edilebilir bir dönüşümdür. Grafik de ise bazı eksiklikler vardır. Barış'ın belirttiği problemde de geçen “yol” ve “ücret” ise birer gerçek hayat bileşenidir.

➤ Barış soruyu okuduktan sonra denklem kurmaya başlamıştır. Denklemi nasıl kurduğunu “Bunun denklemi şöyle, her km de 1 TL alıyor gidilen yola x dersek birde açılış ücreti var $1x+3$ oluyor. Bu y ye eşit oluyor yani toplam aldığı fiyat” olarak açıklamıştır. Sonrasında ise kurduğu denklemden faydalanarak yol ücret ilişkisini gösteren tabloyu oluşturmuştur. Barış, ne yaptığının farkında olarak açıklamalarla işlemlerini destekleyerek ilerlemektedir. Değişkenleri belirleme ve anlam yükleme noktasında problem yaşamamıştır. Grafik çiziminde ise, tabloda yazdığı değerleri

eksenlerde yerleştirdikten sonra, tablodan sıralı ikililer yazmıştır ve grafikte noktaları belirlemiştir. Fakat eksenlere değerleri yazarken aralıkların eşit olup olmadığına dikkat etmediği için grafik y eksenini 2 noktasında kesmiştir o yüzden Barış'ın kafası karışmıştır. Barış "3 den başlaması gerekiyordu" diyerek yanlış olduğunu ifade etmiştir ve tekrar grafik çizmeye başlamıştır. Grafiği doğru yaptığını düşünmektedir. Fakat Barış, x ekseninin negatif bölümünde grafiğin değer alıp almayacağını dikkate almamıştır. Problem durumunda değişiklik olması durumunda grafikteki değişimle ilgili ise Barış grafiğin değişeceğini açılış ücretinin olmaması durumunda grafiğin 0 noktasından başlayacağını söylemiştir. Açılış ücreti 3 TL fakat her km de 2 TL alınması durumunda ise değerler de değişiklik olacağını fakat grafiğin yine 3 den başlayacağını söylemiştir. Bu durumda Barış farklı durumlara yönelik yorum yapabilmektedir ve değişikliklerin ne olduğunu ifade edebilmektedir. Barış'ın akıl yürütme süreci, AR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Barış bir gerçek yaşam durumuna yönelik denklem kurmakta zorlanmamıştır ve değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmamıştır. Barış'ın bu konu ile ilgili kazanımlarda başarılı olduğu söylenebilir. Barış'ın belli bir bilgi birikimine sahip olduğu genellikle yaptığı işlemlerin açıklamalarını yaptığı görülmektedir. Barış'ın kavramsal anlamasında eksiklikler olsa da farklı durumlarda kullanabildiği bir düşünce tarzına sahiptir. Barış'ın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru cevap verildiğinden, tek tip akıl yürütme türü ve derin bir düşünme tarzı sergilendiğinden AR_{ogd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Barış'ın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Barış'ın üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: mum sorusunda tablo istiyor. A için yapalım. Boy ilk 30, 1 saatte 5 azalıyor. $30 - 5x$ olur. x e değerler verip yerine koyalım. Buna göre tabloyu dolduralım. 1 olursa 25,2 olursa, 20,3 olursa 15, 4 olursa 10,5 olursa 5, 6 saatte 0, 6 saatte erir yani. B mumu ise, Değer vereceğiz ama ilk önce denklemini yazayım. 3 saatte 5 azalıyor.

20- diyeceğiz. Eee 3 saatte 5 o zaman Ama olmadı.

Mülakatçı: ne olmadı?

Barış: denklemini yazamadım

Mülakatçı: Denklemini bulmadan yapabilirsin?

Barış: 3 saatte 5, 6 saatte 10, 9 da 15, 12 de 20 olur. O zaman tabloya yazalım.

Mülakatçı: Peki tabloda bir ilişki var mı? Değerler arasında bir ilişki var mı?

Barış: eee değerler arasında gittikçe azalıyor.

Mülakatçı: yani zamana göre

Barış: zaman geçtikçe azalıyorlar.

Mülakatçı: Peki grafik çizersek?

Barış:

Şeklinde grafiği oluşturdu.

Mülakatçı: Peki grafik bu şekilde yukarı – aşağı devam eder mi?

Barış: Evet.

Mülakatçı: Peki mum 6. saatte bitti!

Barış: O zaman devam etmez.

Mülakatçı: Neden?

Barış: Çünkü mum bitiyor. Daha erimediği için eksilere inmez.

Mülakatçı: A mumunun boy-zaman ilişkisini gösteren denklemi nasıl yazarsın?

Barış: 1 saatte 5 cm azalıyor. X saat yani zaman, 5 le çarpacağız ve 30 dan çıkaracağız. Bu da y kalan boy.

$y = 30 - 5x$ olur.

Mülakatçı: Tamam.



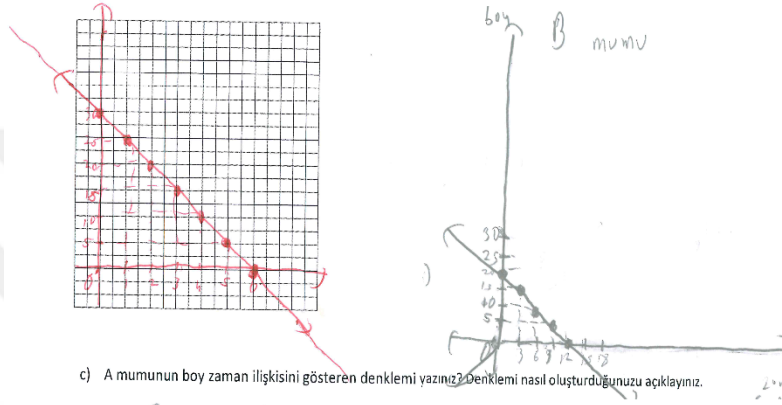
Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

X	1	2	3	4	5	6
Y	25	20	15	10	5	0

X	3	6	9	12	15	18
Y	15	10	5	0		

b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çizin.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

$$Zaman = X$$

$$A = 30 - 5x$$

Şekil 4.67. Barış'ın üçüncü probleme ait çözümü

Barış'ın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Barış'ın matematiksel akıl yürütme süreci; i) denklem ii) grafik iii) tablo bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Barış'ın ilk kurduğu denklem doğrudur ve matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Barış'ın oluşturduğu tablolar ve grafikler sorudaki verileri karşılayacak niteliktedir. Matematiksel olarak anlamlıdır.

➤ Barış soruyu okuyarak soruda ne istendiğini fark etmiştir. Çözüm için ilk olarak denklem kurmayı seçmiştir. Tablo yaparak genelleme ulaşma mantığından ziyade direk probleme uygun denklem kurup denklemde değerleri yerine yazmayı seçmiştir. A mumu için hiç zorlanmadan denklemi ve tabloyu oluşturmuştur. Fakat B mumu için denklem kurarken zorlanmıştır. Barış'ın “B mumu ise, Değer vereceğiz ama ilk önce

denklemini yazayım. 3 saatte 5 azalıyor. 20- diyeceğiz. Eee 3 saatte 5 o zaman Ama olmadı.” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Denklem kuramayacağını anlayan katılımcı araştırmacının da denklem kurmadan yapılabilir mi demesiyle tablodan faydalanmaya başlamıştır. B mumu için boy zaman tablosunu oluşturmuştur. Tablo ile ilgili ise,” eee değerler arasında gittikçe azalıyor.” İfadesini kullanmıştır. Boy ve zaman arasındaki ilişkiye değinmiş olmaktadır. b şikkında ise, katılımcının aynı grafik üzerinde a ve b mumlarının grafiklerini çizmesi beklenmekte olmasına rağmen katılımcı ayrı ayrı grafik çizmeyi tercih etmiştir. Grafikleri çizerken, tabloda verilen değerlerden faydalanmıştır. Grafik üzerinde x ve y değerlerini bularak grafik çizmiştir. Çizdiği grafik ile ilgili araştırmacının grafiğin devam edip etmesi ile ilgili sorusunda grafiğin devam ettiğini söylemiştir. Fakat mumun bittiğini hesaba katmadan cevap vermiştir. Soruda c şikkında verilen a mumunun denklemi kurma sorusunda ise, “1 saatte 5 cm azalıyor. X saat yani zaman, 5 le çarpacağız ve 30 dan çıkaracağız. Bu da y kalan boy.” Şeklinde doğru bir şekilde denklemi kurmuştur. Barış’ın akıl yürütme türünün AR ye yakın olduğu söylenebilir.

➤ Barış’ın genel olarak bilgi birikimi ve kavramsal anlamasının kuvvetli olması soruyu kolaylıkla yapmasında etkili olmuştur. B mumu için denklem kurmakta zorlanmasının nedeni matematiksel olarak karşılık yazarken daha basit cebirsel ifade karşılıkları yazmakla ilgilenmesinden kaynaklanabilir. Barış’ın grafik ile ilgili grafiğin a mumu için $x=6$ da ve b mumu için $x=12$ noktasında bitmesi gerektiği ile ilgili devam etmesi gerektiğini düşünmesi böyle bir durumla karşılaşmamış olması ile ilgili olabilir. Barış’ın tek grafik üzerinde iki mumun durumunu göstermesi istenmesine rağmen iki ayrı grafik çizmesi zorlanacağını düşünmesinden kaynaklanabilir. Doğru çözüm yapan Barış’ın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin bir düşünce yapısı sergilendiğinden AR_{dgd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Barış’ın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Barış’ın dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Barış: $y=x/2+110$ demek. Yaşı 2 ye bölüp 110 ile toplayınca kan basıncı buluyorsun demek. Şimdi bir tablo çizelim.

Mülakatçı: Peki grafik orijinden geçen bir grafik oldu.

Barış: Aslında olmaması lazım. Artılı kısım var denklemde.

Mülakatçı: Hımm. Neden öyle oldu. Peki, ne düşünüyorsun?

Barış: O yaştı 110 olması lazım. 110 dan başlamak lazım. Tekrar çizeyim. Olmadı.

Mülakatçı: Neden olmadı?

Barış: Bence bilmiyorum.

Mülakatçı: Şurada boşluklardan dolayı denklem gelmedi.

Barış: 110 u biraz daha uzak olmak gerekirdi. Yani doğrusal olurdu.

Mülakatçı: Peki grafik aşağı doğru devam edecek miydi?

Barış: Devam ederdi. Daha küçük yaşlar var. 1 e kadar devam ederdi.

Mülakatçı: Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursun?

Barış: 110 la topladığımıza göre çıkaracağız.

$$145 - 110 = 35$$

2 ile çarparız. Çünkü burada bölmüşler 70 olur.

Mülakatçı: peki sorular genel olarak nasıldı?

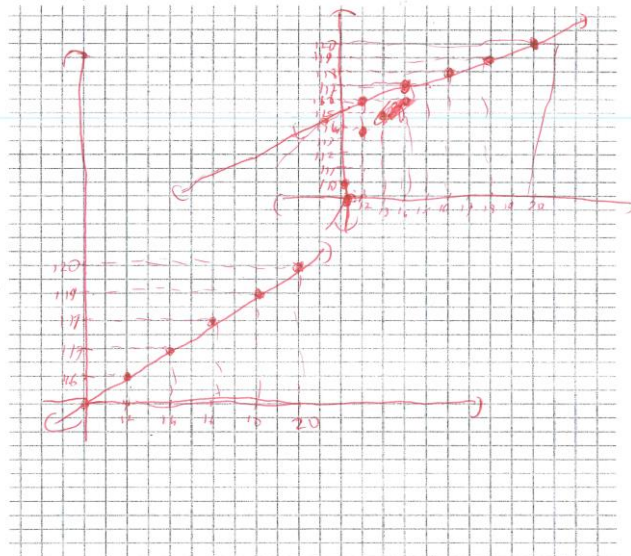
Barış: Kolaydı. Çünkü koordinatlar daha kolay konu olarak. En çok mumlu soruda zorlandım.



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{2}{5}x + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

12	14	16	18	20
116	117	118	119	120

a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

$$\begin{array}{r} 145 \\ - 110 \\ \hline 35 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \\ \times 2 \\ \hline 70 \end{array}$$

Şekil 4.68. Barış'ın dördüncü probleme ait çözümü

Bariş'ın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Barış'ın matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) grafik, tablo bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Barış'ın belirttiği “kan basıncı” ve “yaş” gerçek dünya bileşenidir. Barış'ın oluşturduğu tablo bir dönüşümdür problem ile ilgi verileri içerir. Barış'ın çizdiği grafik de bir dönüşümdür fakat grafikte eksiklikler mevcuttur.

➤ Barış soruyu okuduktan sonra sorudan ne anladığını ifade etmiştir. Ve grafiği çizmek için öncelikle tablo oluşturmaya başlamıştır. x ve y değerlerini tabloya yerleştirmiştir. Barış x için 12,14,16,18,20 değerlerini denemiştir. Soruda her birim kare 5 birim kareyi ifade ettiği belirtilmesine rağmen bu durumu dikkate almadan x değeri için çift sayıları denemiştir ve grafikte her birim kare için değerler yazmıştır. y ekseninde ise, 116 dan başlayarak yine değerleri eksene yerleştirmiştir. Sonrasında ise, tabloda buldukları değerleri grafikte belirlemiştir ve birleştirerek grafiği oluşturmuştur. Fakat Barış grafiğin orijinden geçip geçmediğini düşünmeden bir grafik çizmiş görüşmecinin sorusuyla orijinden geçmediğini fark etmiştir ve tekrar yapmaya çalışmıştır. Barış'ın “*Aslında olmaması lazım. Artılı kısım var denklemde. O yaşta 110 olması lazım. 110 dan başlamak lazım. Tekrar çizeyim.*” ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Barış denkleme bakarak grafiğin orijinden geçip geçmeyeceğini belirleme ile ilgili kavramsal altyapıya sahiptir. Barış grafiği çizerken değerler arasındaki farkı ve orijinin hemen üstünden 110 değerini aldığı için ve her birim kareyi 5 birim kare düşünmediği için grafikte bulduğu değerleri birleştirdiğinde grafik doğrusal bir grafik olmamıştır. Fakat neden doğru çıkmadığına dair bir düşüncesi yoktur. Buradan grafik çizimde eksenlerdeki değerlerin aralıklarını eşit dahi almış olsa x ve y ekseninde bir uyumsuzluk olduğunu fark etmemiştir. Grafiğin devam edip etmeyeceği ile ilgili ise daha küçük yaşlar olduğunu o yüzden devam edeceğini söylese de çizerek gösterdiği yer x ekseninin negatif bölümü olduğu için doğru bir açıklama yapamamıştır. Barış'ın ifadesi “*Devam ederdi. Daha küçük yaşlar var. 1 e kadar devam ederdi.*” Bu durumu açıklamaktadır. B şıkında ise, katılımcı denklemde yer alan işlemlerin terini yaparak çözüm yapmıştır.” *110 la topladığımıza göre çıkaracağız. 145-110=35 2 ile çarparsınız. Çünkü burada bölmüşler 70 olur.*” ifadeleri ile çözümünü açıklamıştır. Barış'ın akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Barış'ın grafik çizimi ile ilgili bilgi birikiminin olduğu fakat dikkatsizlik hataları yaptığı için sonuca ulaşmakta zorlandığı görülmektedir. Barış'ın b şıkında zorlanmadığı kolaylıkla sonuca ulaştığı görülmektedir. Bu durum Barış'ın temel bilgi birikimine sahip olmasından kaynaklanabilir. Barış genel olarak yüzeysel bir bakış açısına sahiptir ve kavramsal anlamasında eksiklikler olduğu için hatalı işlemler yapmıştır. Muhtemel doğru çözüme ulaşan Barış'ın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

Barış'ın “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.14'te gösterilmiştir.

Tablo 4.14.

Barış'ın “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Barış	AR _{dgy}	AR _{ogd}	AR _{dgd}	AR _{ogy}

Tablo 4.14 incelendiğinde, Barış'ın incelenen dört problemde de algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Barış problemlerin hepsine doğru veya muhtemel doğru cevap verirken, tüm problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Barış akıl yürütme sürecinde bazı sorularda yüzeysel bir düşünce yapısına bazı sorularda ise derin bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.3. Cengiz'in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Cengiz'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: Koordinatları teker teker yazdım.

Mesela atlama kuleleri $(-2, 8)$ olur. Önce x yazılır.

Mülakatçı: Peki orijin Havuzbaşı değil ev olsaydı nasıl olurdu?

Cengiz: Çizerek göstereyim hocam. Havuzbaşı 3. Bölgeye gidiyor. Atlama

kuleleri 2 de. Çifte Minare, Ulu Cami 2 den 3 e kayıyor.

Mülakatçı: Mesela birinin koordinatlarındaki değişimi söyley misin?

Cengiz: Havuzbaşı mesela $(-5, 8)$ olur.

Mülakatçı: Peki bir noktanın koordinatı denilince aklına ne geliyor?

Cengiz: Bunla yerini belirtemeye yarayan şey. Önce x sonra y de bulacağız. Kesiştiği yer önemli. Yani ilk nokta x eksenı üzerindeki noktadır ikincisi de y eksenı üzerindeki noktadır.

Mülakatçı: Peki Kartezyen sistemi?

Cengiz: x ve y ekseninin dik kesişmesi ile oluşan sistem.

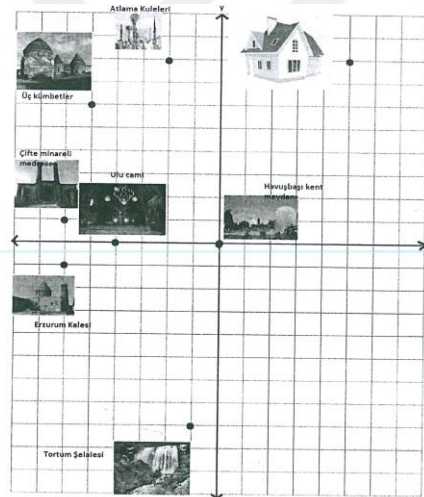
Mülakatçı: Peki sıralı ikili ne demek?

Cengiz: $(-2, 3)$ olsun. Bu bir sıralı ikilidir.

Mülakatçı: Peki yerini değiştirsek ne olur? $(-8, -5)$ aynı mı olur?

Cengiz: Hocam farklı nokta olur. (-5) diğer tarafa giderse yeri değişir.

Mülakatçı: Tamam.



Kaan ve Nur tatilde Erzurum da yaşayan Ahmet amcalarını ziyarete gideceklerdir. Amcaları önceden gezdireceği tarihi mekanları tespit etmiş ve Havuzbaşı kent meydanını orijin olacak şekilde işaretlemiştir.

- Mekanın kesiştiği yere, apsisine, ordinatına dikkat etti
- a) Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.
- Tortum Şelalesi : $(-1, -8)$ Üç kumbetler : $(-5, 6)$
 Erzurum Kalesi : $(-6, -1)$ Atlama Kuleleri : $(-2, 8)$
 Ulu Cami : $(-4, 0)$ Ahmet Amcasının Evi : $(5, 8)$
 Çifte Minareli Medrese : $(-6, 1)$ Havuzbaşı kent Meydanı : $(0, 0)$
- b) Eğer orijin olarak Havuzbaşı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekanların koordinatlarında değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Neden? Açıklayınız.
- Mekanların koordinatlarında değişiklik olur. Çünkü eğer ev orijin dıysa, Atlama kuleleri x eksenı üzerinde olurdu.

Şekil 4.69. Cengiz'in birinci probleme ait çözümü

Cengiz'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) koordinat ii) koordinat sistemi iii) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Cengiz'in koordinat ile ilgili “*Bunların yerini belirtemeye yarayan şey. Önce x ekseninde sonra y ekseninde de bulacağız. Kesiştiği yer önemli. Yani ilk nokta x eksenindeki noktadır ikincisi de y eksenindeki noktadır.*” ifadeleri doğru ve matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Koordinat sisteminin ise “*x ve y nin dik kesişmesi ile oluşan sistem*” olarak tanımlaması yine matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. $(-2,3)$ 'in bir sıralı ikili olması matematiksel olarak kabul edilebilir özelliktir.

➤ Cengiz koordinat sisteminde bir noktanın yerini belirleme ile ilgili problem yaşamamıştır. Her bir tarihi mekânın koordinatlarını doğru bir şekilde belirlemiştir. Koordinatların belirlenirken önce x eksenindeki nokta ve sonra y eksenindeki noktanın yazıldığının farkındadır. Cengiz'in b şıkında orijinin yerinin değiştirilmesi sorusunda hiç zorlanmadan cevap verdiği görülmüştür. “*Çizerek göstereyim hocam. Havuz başı 3. Bölgeye gidiyor. Atlama kuleleri 2 de. Çifte Minare, Ulu Cami 2 den 3 e kayıyor. Havuz başı mesela $(-5, 8)$ olur*” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Cengiz koordinat sistemindeki bölgelerden bahsetmiş ve yaptığı işlemleri açıklayarak yapmıştır. Bu yönüyle Cengiz'in CR akıl yürütme türüne yakın olduğu söylenebilir.

➤ Cengiz zorlanmadan cevap vermiştir. Bu durum Cengiz'in bilgi eksiğinin olmaması ve derin matematiksel kavramasından kaynaklanabilir. Cengiz'in ne yaptığının farkında olması, koordinat sistemi ile ilgili kavramları biliyor olması ve kavramsal altyapısının kuvvetli olması dikkat çekmektedir. Katılımcı genel olarak derin bir düşünce tarzı geliştirmiştir. Doğru çözüm yapan Cengiz'in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin bir düşünme yapısı sergilendiğinden CR_{dgd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Cengiz'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: Burada alınan yola x , ücrete y dedim. Cebirsel olarak da yazayım mı?

Mülakatçı: Evet. Ne düşünüyorsun?

Cengiz: Aralarında kat olarak gidiyor mu diye bakıyorum.

Mülakatçı: Yaptığın tabloya mı bakıyorsun?

Cengiz: Evet hocam. $y = x + 3$

Mülakatçı: Nasıl anladın?

Cengiz: Hocam aralarındaki kaçar kaçar arttığına baktım. Burada (üst) 1, 2, 5 artmış. Kat ilişkisi yok. Burada (alt) 0 yüzden ekledim zaten 3 açılış ücreti zaten.

Mülakatçı: Peki bu ilişkiyi grafikte nasıl gösterebiliriz?

Cengiz: Hocam, 1 e 4, 2 ye 5, 3 e 6 diye yazarız.

Mülakatçı: Ne yapıyorsun tabloda mı yapıyorsun?

Cengiz: Evet hocam.

Mülakatçı: Hocam grafik aşağı doğru gider mi? Negatife doğru?

Cengiz: Tam ben sana soracaktım. Sen ne düşünüyorsun?

Cengiz: Hocam her km 1 TL ödeniyor. (-1) km olmaz.

Mülakatçı: tamam.

Cengiz: Düz çizemedim ama.

Mülakatçı: Olsun. Peki, grafik y eksenini hangi noktada kesti.

Cengiz: Hocam şurada (0, 3) olur.

Mülakatçı: Neden?

Cengiz: Hocam y üzerinde olduğu için.

x i 0, y si 3 (0, 3) olur.

Mülakatçı: Peki grafiği doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Cengiz: Hocam, x ve y yi kestiği noktaları bularak da yapabiliydik.

Oluyor.

Hocam yanlış mı olmuş?

Mülakatçı: Bilmem. Y ye 0 verince ne oluyor? 3 mü?

Cengiz: Evet hocam. Pardon. Haa -3 olur. Doğru olur o zaman. Tamam.

Mülakatçı: Ücret ile yol arasında nasıl bir ilişki var?

Cengiz: Her km için 1 TL toplam ücret için açılış ücreti ile de topluyoruz.

Mesela 5 km için 8 TL olur.

Mülakatçı: Tamam.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti olmasaydı her km için 1 TL alınsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı?

Cengiz: Olurdu herhâlde hocam.

Mülakatçı: Nasıl?

Cengiz: Her km için 1 TL ödeniyor açılış olmadığı için ikisi birbirine eşit olur.

Mülakatçı: bu değişim grafiğine nasıl yansır?

Cengiz: (çizdi)

Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığını nasıl anlarsın? Yani bu sefer 1 den mi başladı.

Cengiz: Çünkü açılış ücreti olmadığı için 3 eksik olacaktı.

Mülakatçı: 3 eksik olacaktı...

Cengiz: Hocam y ile x arasındaki ilişkide $y = x$ olur.

Mülakatçı: Peki.

Mülakatçı: Açılış ücreti 3 TL, her km 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı ile ilgili ne düşünüyorsun?

Cengiz: Tablo yapayım önce.

Cengiz: Grafikte değişiklik olup olmadığını çizmeden de anlayabiliriz.

Mülakatçı: Nasıl anlarız?

Cengiz: ... (düşünüyor)

Mülakatçı: ne düşünüyorsun?

Cengiz: x ile y arasında kat var mı diye. $y = 2x + 3$ olurdu.

Mülakatçı: Neden?

Cengiz: Burada, 2, 4, 2 artmış. Düzensiz. 1, 2, 1 diye artmış. Kat ilişkisine baktım $2x+3$ oldu. Yani değerler değişti hocam grafikte değişti o yüzden.

Mülakatçı: Peki tamam.



Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesine;
Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

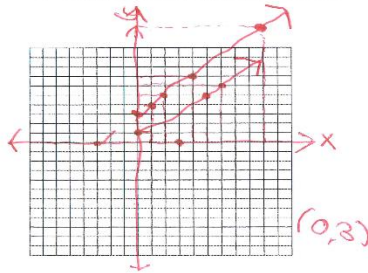
Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

x	1	2	4	9
y	4	5	7	12

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$y = x + 3$$

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çizersiniz.



x	0	-3
y	3	0

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersiniz. Neden.

Taksi tarifesine, açılış ücreti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

x	1	5	6
y	4	6	7

$$y = x$$

Taksi tarifesine açılış ücreti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

x	2	3	5	6
y	7	9	13	15

$$y = 2x + 3$$

7

Şekil 4.70. Cengiz'in ikinci probleme ait çözümü

Cengiz'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) açılış ücreti ii) yol iii) denklem iv) grafik, tablo bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Cengiz'in bahsettiği “açılış ücreti” ve “yol” birer gerçek dünya bileşenidir. Cengiz denklem kavramını anlamış ve probleme uygun bir denklem kurmuştur. Bu anlamda kurduğu denklem matematiksel olarak kabul edilebilir bir özeliştir. Cengiz'in oluşturduğu tablo ve grafikte matematiksel olarak kabul edilebilir dönüşümlerdir.

➤ Cengiz, tablo yaparak başlamıştır. İlk olarak değişkenlere anlam yüklemiştir. Alınan yola x ve ücrete y demiştir. x ve y için denediği değerlerle tabloyu oluşturmuştur. Sonrasında ise, ilişkinin olup olmadığını tablodan incelemiştir. Sonrasında ise cebirsel olarak, kat ilişkisi olmadığını görmüştür ve cebirsel olarak $y = x + 3$ olarak ifade etmiştir. Grafik çiziminde ise, tabloda bulduğu değerleri grafikte belirleyerek grafiği çizmiştir. Grafiği çizerken grafiğin eksenlerin negatif olduğu bölüme gidip gitmeyeceğini düşünmüştür. Cengiz “*Hocam her km 1 TL ödeniyor. (-1) km olmaz.*” İfadeleriyle açıklamıştır. Grafiğin y eksenini kesip kesmediğini ise “*Hocam burada (0, 3) olur. Hocam y üzerinde olduğu için. x i 0, y si 3 (0, 3) olur.* İfadeleriyle desteklemiştir. Cengiz, grafiğin doğru olup olmadığını grafik çiziminde direk eksenlerin kestiği noktaların bulunduğu x 'e ve y 'ye 0 verme işlemini yaparak sağlama yapmıştır. Ne yaptığının farkında ve kendi içinde tartışarak çözüme ulaşmaktadır. Cengiz, problem durumunda değişiklik olması durumunda, ne gibi değişiklik olacağını yine tekrar tablo yaparak açıklamıştır. Fakat dikkatsizlik hatası yapmıştır. Açılış ücretinin olmamasında dolayı 3 fark olacağını söylemiştir fakat çıkarırken hata yaptığı için grafiği 1 den başlatmıştır. Sonraki durumda ise yine tekrar tablo yaparak değerleri belirleyerek açıklamıştır. Oluşturularak grafiği yorumlamıştır. Cengiz'in akıl yürütme türü, yaptığı işlemlerin farkında olması açıklamalara dayandırması açısından CR akıl yürütme türü olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Cengiz 'in değişkenlerin seçiminde, tablo yaparken, değişkenlere anlam yüklem konularında zorlanmamasının sebebi bu konuda bilgi eksiğinin olmaması ve kavramsal anlamasının kuvvetli olmasıdır. Cengiz genel olarak derin bir düşünce yapısına sahip olduğundan rahatlıkla işlemlerini yürütebilmiştir. Cengiz'in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünme yapısı sergilendiğinden CR_{dgd} olarak belirlenmiştir.

-Cengiz'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: Önce A, B ile tablo yaptım. Kalan boya y, geçen süreye x dedim. A mumunun boyu 30 cm ve bir saatte 5cm azalıyor 1 saatte 25 kalır 3 saat geçse 15 kalır. 5 saat geçerse 5 ve 6 saatte 0 kalır yani biterdi. (B mumunun boyunu da 30 aldı.) B mumu 3 saate 5cm azalırsa 25 kalır 6 saat geçtiğinde 10 cm azalır 20 kalır 9 saatte 15 12 saatte 10 kalır.

Mülakatçı: Peki. Grafikte göstermek istersek nasıl gösteririz?

Cengiz: (grafiği çizdi.) Bu şekilde bir azalma gösterdi. (Grafik istediği gibi olmadı. Aralıkları eşit olmadığı için sebebinin farkında.) hocam $x = 6$ dan geçmedi herhâlde aralıkları farklı aldığım için olmadı x ekseninde bir kare

y ekseninde iki kare aldım o yüzden olamadı.

Cengiz: B mumunu da göstereyim mi?

Mülakatçı: evet.

Cengiz: (Çizerken) B mumunun boyunu 30 cm almışım. Tekrar yapayım. b mumunun boyu 20 cm. 3saatte 15,6 saatte 10 ve 9 saatte 5 kalır hocam. (tekrar tablo yaptı) Ve grafiği çizdi.

Mülakatçı: Tamam.

Mülakatçı: peki A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren cebirsel ifadeyi nasıl yazabiliriz?

Cengiz: Saatte 5 cm azaldığı için, kalan boya y dersek. $y=30-5x$ olur. Geçen sürede x olur.



Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

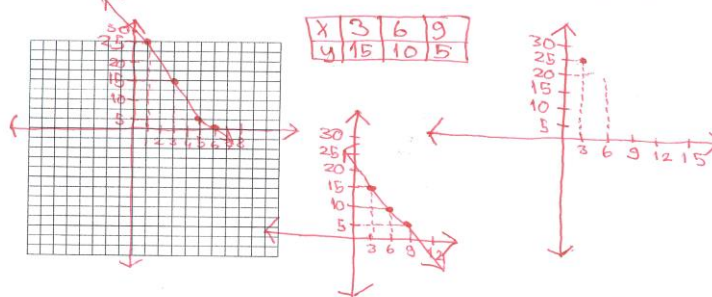
x	1	3	5	6
y	25	15	5	0

A

x	3	6	9	12
y	25	20	15	10

B

b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çizin.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

$$y = 30 - 5x$$

Şekil 4.71. Cengiz'in üçüncü probleme ait çözümü

Cengiz'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) boy, zaman ii) denklem iii) tablo iv) grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Cengiz doğru bir şekilde değişken seçme ve değişkenlere anlam yükleme işlemini yapmıştır. Yapılan bu işlemler matematiksel olarak anlamlıdır. Cengiz'in oluşturduğu tablolar ve grafikler verileri destekler niteliktedir fakat grafikte aralıkların eşit olmaması gibi eksikliklere sahiptir. Cengiz'in bahsettiği "boy" ve "zaman" birer gerçek hayat bileşenidir.

➤ Cengiz x ve y değişkenlerine boy ve zaman olarak anlam yükleyerek işlemlerine başlamıştır. Cengiz A ve B mumları için tablo yaparken, zaman için her saatte mumun ne kadar azaldığını bularak tablodaki değerleri doldurmuştur mumu için dikkatsizlik hatasından ötürü b mumunun boyunu da A mumu gibi 30 cm düşündüğü için tablodaki değerleri hatalı yapmıştır. Fakat bu durumu grafik çizerken fark ettiği için tekrar tablo yaparak düzeltmiştir. Bu durum Cengiz'in "*B mumunun boyunu 30 cm almışım. Tekrar yapayım. b mumunun boyu 20 cm.3saatte 15,6 saatte 10 ve 9 saatte 5 kalır hocam.*" ifadelerinden anlaşılmaktadır. b şikkında ise, grafiği çizmiş fakat grafikte ilgili bir sıkıntı olduğunu düşünmüştür ve grafiğin neden belirlenen noktaları kesmediğini yine kendisi açıklamıştır. Cengiz'in "*hocam $x=6$ dan geçmedi herhâlde aralıkları farklı aldığım için olmadı x ekseninde bir kare y ekseninde iki kare aldım o yüzden olmadı.*" ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Fakat grafiğin eksenlerin negatif değerler aldığı bölgelerde değer alıp almayacağına değinmemiştir. Soruda c şikkında ise, A mumunun boy zaman ilişkisine karşılık cebirsel ifadeyi doğru bir şekilde kurmuştur. Değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmamıştır. Cengiz'in mantıklı açıklamalar yapması kendi hatalarının sebebinin kendisinin açıklaması yönünden CR akıl yürütme türünü kapsadığı düşünülmektedir.

➤ Cengiz'in zorlanmadan çözüme ulaşması kavramsal anlamasının kuvvetli olmasından ve bilgi birikiminin olmasından kaynaklanmaktadır. Cengiz genel hatlarıyla derin bir düşünme yapısına sahip olmasından dolayı kolay bir şekilde işlemlerini yürütebilmektedir. Doğru çözüm yapan Cengiz'in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünme yapısı sergilendiğinden CR_{dgd} olarak belirlenmiştir.

-Cengiz'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Cengiz'in dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Cengiz: Hocam önce tablo çizdim ben.

Diye yazdı sonra grafiğe geçti.

Cengiz: Hocam biraz uzun sürecektir.

Mülakatçı: evet. Değerler büyük biraz ama her birim kareyi 5 birim kare olarak alınız denilmiş.

Cengiz: Evet. Böyle olurdu.

Mülakatçı: Peki grafikte y yi nereden kesti?

Cengiz: 110.

Mülakatçı: Neden?

Cengiz: Zaten yaşına 110 eklediğimiz için 110 keser.

Mülakatçı: Peki bu grafiğin doğrusal olup olmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?

Cengiz: Aralarında düzenli bir denklem olursa olur.

Mülakatçı: Var mı peki düzenli bir şey.

Cengiz: Zaten aralarındaki denklem burada verilmiş.

$$y = x/2 + 110.$$

Hocam zaten denkleme göre çizdik doğrusal ilişki var.

Mülakatçı: Peki kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl buldun?

Cengiz: Denklemden yerine yazarız.

$$145 = x/2 + 110$$

$$x/2 = 35$$

$$x = 70$$

olur.

Mülakatçı: Peki sorularla ilgili ne düşündün?

Cengiz: Bazıları kolay bazıları orta. Koordinatlar kolay taksit orta, 6 da zorlandım.

Mülakatçı: Neden?

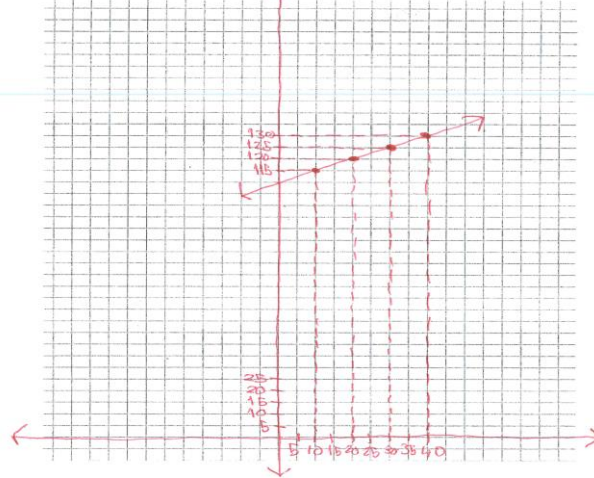
Cengiz: Önce değer verdim sonra ama buldum.



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

x	10	20	30	40
y	115	120	125	130

a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

$$145 = \frac{x}{2} + 110$$

$$35 = \frac{x}{2}$$

$$70 = x$$

Şekil 4.72. Cengiz'in dördüncü probleme ait çözümü

Cengiz'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Cengiz'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) tablo ii) grafik iii) yaş, kan basıncı bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Cengiz'in oluşturduğu tablo bir dönüşümdür problem ile ilgi verileri içerir. Cengiz'in çizdiği grafik de bir dönüşümdür fakat grafikte eksiklikler mevcuttur. Cengiz'in belirttiği “kan basıncı” ve “yaş” birer gerçek dünya bileşenidir.

➤ Cengiz grafiği çizmek için öncelikle tablo oluşturmaya başlamıştır. x ve y değerlerini tabloya yerleştirmiştir. x değerlerini 10, 20, 30, 40 olarak almıştır ve bu değerlere göre y değerlerini tabloda yerine yazmıştır. Sonrasında grafik çizimine geçmiştir. Grafiğin çiziminin uzun süreceğini düşünmüştür. Fakat sonrasında çizmeye başlamıştır. Koordinat sisteminde eksenlerin üzerine değerleri soruda verildiği gibi her birim kare 5 birim kareyi ifade edecek şekilde yerleştirmiştir. Sonrasında ise, tabloda bulduğu değerleri grafikte işaretlemiştir. Fakat y eksenini kestiği noktayı belirtmemiştir ve x eksenini negatif kısmında değerler aldığı 3. Bölgeye de grafiği devam ettirmiştir. Görüşmecinin y eksenini kesip kesmediğini sorması ile y eksenini 110 da kestiğini

belirtmiştir. Fakat kestiği noktadan sonrası için bir yorum yapmamıştır. B şıkında ise, katılımcı denklemde kan basıncı değerini yerine yazarak çözüm yapmıştır. Cengiz'in akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Cengiz grafik çizimi ile ilgi bilgi birikimine sahiptir ve zorlanmadan grafiği çizebilmiştir. Cengiz'in genel olarak derin bir düşünce yapısına sahip olduğu söylenebilir. Cengiz'in matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığı, tek tip akıl yürütme türü ve derin bir düşünce yapısı sergilendiğinden AR_{ogd} olarak sınıflandırılmıştır.

Cengiz'in "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.15'de gösterilmiştir.

Tablo 4.15.

Cengiz'in "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Cengiz	CR _{dgd}	CR _{dgd}	CR _{dgd}	AR _{ogd}

Tablo 4.15 incelendiğinde, Cengiz'in incelenen dört problemin üç tanesinde yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türüne ve bir tanesinde algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Cengiz problemlerin hepsine doğru veya muhtemel doğru cevap verirken, tüm problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Cengiz akıl yürütme sürecinde tüm sorularda derin bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.4. Emin'in Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Emin'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin'in birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin: Orijin (0, 0) dır. Atlama kuleleri x i 2 y si 8 olacak (2, 8) dir. eee üç kümbetler x i 5 y si 6 olacak (5,6) ee çifte minareli medreseye bakalım x i 6 y

si 1 (6,1) olur. Ulu cami x i 0 olacak y si de 0 olacak yok 4 olacak (0,4) Havuzbaşı orijin olduğu için (0,0) dı. Erzurum kalesi x i eksi 6 ayy ben

eksilerde hata yaptım atlama kuleleri -2 olacak çünkü x ekseninin sol tarafında kalıyor. (Bu şekilde diğer yerlerinde koordinatlarını belirledi.)

Mülakatçı: Peki noktaları yazarken neye dikkat ettin?

Emin: Negatif tarafta mı pozitif tarata mı olduğuna.

Mülakatçı: Bir noktanın koordinatı deyince ne aklına geliyor?

Emin: Bir noktanın bulunduğu yer.

Mülakatçı: Peki koordinat sistemi deyince ne aklına geliyor?

Emin: Koordinat düzlemi geliyor. Cisimlerin bulunduğu noktaları rahatlıkla tarif edebiliriz.

Mülakatçı: Sıralı ikili deyince ne aklına geliyor?

Emin: Bir noktanın y si ve x i nedir. y si ve x i kaçtır Noktaları ona göre tarif ediyoruz.

Mülakatçı: Orijin ev seçilseydi değişiklik olup olmaması hakkında ne söylersin?

Emin: Olurdu. Çünkü ev $(-5, 8)$ noktasında orijin olunca $(0, 0)$ oluyor. Sayısal aslında değişim oluyor. Havuz başı da $(0, 0)$ ken $(5, 8)$ oluyor.

Mülakatçı: Ev ile havuz başında kendi arasında mı değiştirdin?

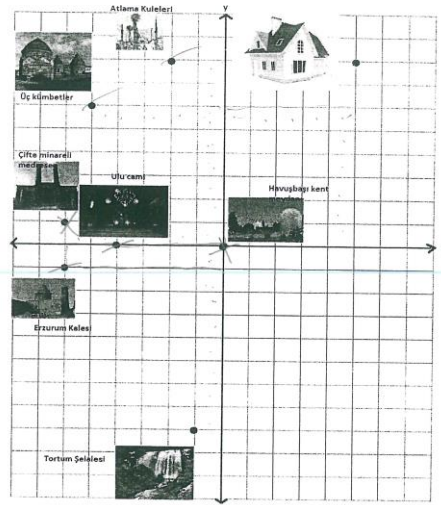
Emin: Evet.

Mülakatçı: Yok öyle değil de orijini ev seçiyoruz. Mekânları taşıyamayız değil mi?

Emin: Olurdu da Havuz başı $(0, 0)$ a olmazdı da negatif olurdu.

Mülakatçı: Bir örnek gösterebilir misin? Şöyleydi şöyle oldu.

Emin: Evden koordinat orijin çizersek, Havuz başı y si -8 , x i -5 olurdu. $(-5, -8)$ olurdu.



Kaan ve Nur tatilde Erzurum'da yaşayan Ahmet amcalarını ziyarete gideceklerdir. Amcaları önceden gezdireceği tarihi mekanları tespit etmiş ve Havuzbaşı kent meydanını orijin olacak şekilde işaretlemiştir.

- a) Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.

$(9,0) - (-7,0) - (-6,1) - (-6,-1) - (-1,8) - (-6,5) - (-7,8)$
Noktalara

- b) Eğer orijin olarak Havuzbaşı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekanların koordinatlarında değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Neden? Açıklayınız.

olacaktı çünkü evlerinin koordinatı $(5,6)$ olur
orijin olması içinde $(0,0)$ olması gerekir

Şekil 4.73. Emin'in birinci probleme ait çözümü

Emin'in birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) orijin ii) koordinat iii) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Orijinin koordinatının $(0,0)$ olması matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Bir noktanın koordinatını "*noktanın bulunduğu yer*" olarak ifade etmiştir. Koordinat noktaların konumunu belirlemek için kullanılır bu açıdan kabul edilebilir bir özelliktir. Koordinat sistemini "*cisimlerin bulunduğu noktaları rahatlıkla tarif edebiliriz*" olarak tanımlaması matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Sıralı ikiliyi "*Bir noktanın y si ve x i nedir. y si ve x i kaçtır? Noktaları ona göre tarif ediyoruz*" olarak tanımlamıştır fakat bu tanımda eksiklikler söz konusudur bu açıdan matematiksel özellik olarak kabul edilemez.

➤ Emin her bir tarihi mekânın koordinatlarını bulmuştur. Yaparken her değeri pozitif düşünmüştür fakat son tarihi mekânın koordinatını yazarken yanlış yaptığını fark edip önceki yaptıklarını düzelterek tekrar koordinatları doğru bir şekilde yazmıştır. Koordinatları bulurken “*Negatif tarafta mı pozitif tarata mı olduğuna*” dikkat ettiğini ifade etmiştir. Emin’in koordinat sisteminde eksenlerin pozitif ve negatif değerler aldığı farkında olduğu bu konuda bilgi eksiği olmadığı görülmektedir. Koordinat sistemini “*cisimlerin bulunduğu noktaları rahatlıkla tarif edebiliriz*” olarak doğru bir şekilde tanımlamıştır. Sıralı ikiliyi “*Bir noktanın y si ve x i nedir. y si ve x i kaçtır? Noktaları ona göre tarif ediyoruz.*” İfadeleriyle açıklamıştır fakat sıralı ikilide bileşenlerin sıralarının önemli olduğunu vurgulamamıştır. b şikkında ise, Emin orijinin değişmesi durumunda değişiklik olacağını söylemiştir fakat evin orijinin yerine geçmesi gerektiğini söylemiştir. Emin’in “*Olurdu. Çünkü ev (-5, 8) noktasında orijin olunca (0, 0) oluyor. Sayısal aslında değişim oluyor. havuz basıda (0, 0) ken (5, 8) oluyor.*” cümleleri destekler niteliktedir. Araştırmacının müdahalesiyle “*Olurdu da Havuz başı (0, 0) a olmazdı da negatif olurdu.*” ifadeleriyle orijinin değişmesiyle koordinatlarda değişiklik olacağını söylemiştir. Emin doğru bir şekilde koordinatları söyleyebilmiştir. Emin’in akıl yürütme türünün AR akıl yürütme olduğu söylenebilir. Fakat katılımcının hataya düştükten sonra hatasını düzelterek doğru bir sonuca yönelmesi ve yaptığı işlemlerin açıklamalarını yapması açısından düşünüldüğünde CR akıl yürütme türünü de kullandığı söylenebilir.

➤ Emin’in koordinat sistemi ile ilgili bilgi eksiğinin olmadığı fakat ara ara dikkatsizlik hataları yaptığı görülmüştür. Bu sebeple Emin zorlanmadan çözüm yapabilmıştır. Emin genel olarak ne yaptığının farkındadır ve açıklamalarıyla bu durumu göstermiştir. Doğru bir çözüm yapan Emin’in matematiksel akıl yürütme türü, iki farklı tip akıl yürütme türü ve derin bir düşünce yapısı sergilendiğinden CR_{dld} olarak sınıflandırılmıştır.

-Emin’in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin’in ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin: Hocam ödenecek ücrete x alınan yola y dersek tablo oluşturalım. Cebirsel ifadesi $3 + 1x$ olurdu. Ücrete y yola x diyelim.

$x = 0$ verirse $y = 3$ olur. $y = 0$ verirse $x = -3$ olur.

Mülakatçı: Yani $x = -3$ olacaktı x neyi belirtiyor.

Emin: Alınan yol.

Mülakatçı: Alınan yol -3 mü çıktı.

Emin: Evet.

Mülakatçı: Peki bu tablo ile ilgili dikkatini çeken bir şey var mı?

Emin: Yok.

Mülakatçı: Cebirsel olarak nasıl gösteririz?

Emin: $3 + 1x$ olur.

Mülakatçı: Bu neye eşittir?

Emin: Ödenecek ücrete eşit. Yani $y = 1x + 3$ olur.

Mülakatçı: neden böyle oluşturduk?

E: İlk başta açılış 3 TL, her km 1 TL. ne kadar km gittiğini bilmiyoruz o yüzden ödenecek ücret (y) ye eşittir. O yüzden $y = 1x + 3$ olur.

Mülakatçı: Peki grafiği nasıl çizeriz?

Emin: Önce düzlemimiz çizelim. Sıralı ikililerimizi yerleştirelim.

$x = 0, y = 3$

$x = -3, y = 0$

Emin: Çizdiğimizde doğrusal.

Mülakatçı: Grafiği doğru çizip çizmediğin konusunda ne düşünüyorsun?

Emin: Doğrudur çünkü sıralı ikililerini oluşturdum önce. Doğrudur

Mülakatçı: Peki ücret ile yol arasında nasıl bir ilişki var?

Emin: Ödenen ücret. Eee.

Mülakatçı: Tabloya göre mi yorum yapıyorsun?

Emin: Haa orijinden geçmedi.

Mülakatçı: Neden?

Emin: Çünkü grafiğe bakarsak geçmiyor. Doğruları kesiyor. $x = 3$ verdik, $y = -3$ geçmesi için 0 olması gerekirdi.

Mülakatçı: Peki açılış tarifi olmasıydı fakat 1 TL olsaydı değişiklik olur muydu?

Emin: Değişiklik olurdu. Açılış yok, cebirsel ifadesi $1x$ olurdu. Ödenen ücret azalır.

Mülakatçı: Grafikteki değişiklik ne olurdu?

Emin: Burada değil de (grafikte göstererek) kat olduğu orijini kesiyordu, fazlalık olduğundan geçmiyordu.

Mülakatçı: Yani ne olması gerekir?

Emin: Orijini keser.

Mülakatçı: Tamam.

Mülakatçı: Peki açılış 3 TL, dakika 2 TL olsaydı grafikte değişim olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsun?

Emin: Olmazdı. Çünkü yine doğruları keserdi.

Mülakatçı: Bu çizdiğinin aynısı mı çıkardı.

Emin: Bakayım, aynısı çıkardı. Evet aynısı. Yani aynısı değil de yani yine. Bakalım.

Emin: $y = 3 + 2x$ den.

$x = 0$ verirse $y = 3$ olurdu.

y ye 0 verirse, 2 ile neyi çarparsak 3 ile toplarsak 0 eder. Eee.

x e 1 versek $y = 5$ olur.

x e 2 versek $y = 7$ olur.

x e 3 versek $y = 9$ olurdu.

Yine aynı tek sayılarda geçerdi. Doğrunun yönü yine aynı olurdu ama farklı yerlerden geçerdi.

Mülakatçı: Tamam.



Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesı; Açılış creti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

Ödenecek cret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

x y

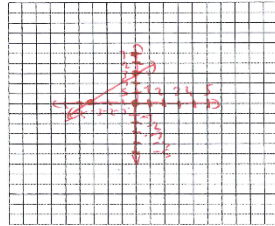
$$y = 3 + 1x$$

x	y
0	3
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8
6	9

Ödenecek cret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$3 + 1x = y$$

Ödenecek cret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği ziniz.



Ödenecek cret ile alınan yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersiniz. Neden.

Taksi tarifesı, açılış creti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

Taksi tarifesı açılış creti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

$$y = 3 + 2x$$

7

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15
7	17
8	19
9	21

şekil 4.74. Emin'in ikinci probleme ait zm

Emin'in ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) cebirsel ifade, denklem ii) grafik, tablo iii) yol, ücret bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Emin, problem durumuna yönelik yazdığı cebirsel ifade ve denklemlerde zorluk yaşamamıştır ve matematiksel olarak kabul edilebilir ifadeler yazmıştır. Emin'in oluşturduğu tablo probleme uygun olmayan değerler içerdiğinden matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Grafikte aynı şekilde matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Emin'in bahsettiği yol ve ücret ise birer gerçek dünya bileşenidir.

➤ Emin soruyu okuduktan sonra, değişkenleri seçerek değişkenlere anlam yüklemiştir ve tablo oluşturmaya başlamıştır. Tabloyu oluşturmadan önce cebirsel ifade yazmayı denemiştir ve yol ve ücret ile ilgili $3 + 1x$ cebirsel ifadesini yazmıştır. x e 0 verip y yi 3 bulmuştur sonrasında ise y ye 0 verdiğinde ise x , -3 olmuştur. Fakat bulduğu değerlerle problem durumunu bağdaştıramadığı için alınan yolun negatif değer alamayacağını fark edememiştir. Sonrasında ise cebirsel olarak, zorlanmadan rahatlıkla $y = 3 + 1x$ olarak yazmıştır. Emin'in *“İlk başta açılış 3 TL, her km 1 TL. Ne kadar km gittiğini bilmiyoruz o yüzden ödenecek ücret (y) ye eşittir. O yüzden $y=1x+3$ olur.”* ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Grafik çiziminde ise, önce koordinat sistemini çizmiştir. Sonrasında ise, tablodaki değerleri kullanarak grafiği çizmiştir. Fakat km değerinin negatif olamayacağını düşünmemiştir. Grafiğin orijinden geçmediğinin farkındadır fakat sebebini açıklamamıştır. Problem durumundaki değişiklikler neticesinde grafikte değişiklik olacağını söylemiştir. Cebirsel ifadesinin $1x$ olacağını ödenecek ücretin azalacağını söylemiştir grafikte ilgili ise *“Burada değil de (grafikte göstererek) kat olduğu orijini kesiyordu, fazlalık olduğundan geçmiyordu.”* açıklamasını yapmıştır. Açılış ücretinin sabit kalması fakat km başına 2 TL olsaydı değişikliğin ne olduğu konusunda ilk çizdiği grafiğe benzer bir grafik çıkacağını *“Yine aynı tek sayılarda geçerdi. Doğrunun yönü yine aynı olurdu ama farklı yerlerden geçerdi.”* ifadeleriyle açıklamıştır. Orijinden geçen ve eksenleri kesen doğrular arasındaki farkı bilmesi bu durumu problem durumu ile ilişkilendirmesi bakımından CR akıl yürütme türü olsa da strateji seçimi noktasında AR akıl yürütme türü olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Emin, cebirsel ifade yazmada ve değişkenlere anlam yüklemeye zorlanmamıştır. Emin, yaptığı işlemleri açıklayarak sürdürmüştür. Bu durumun sebebi bu konu ile ilgili kazanımları öğrenmesinden kaynaklanıyor olabilir. Emin'in bilgi birikiminin olduğu fakat bazı noktalarda hatalar yaptığı görülmektedir. Grafik çizerken yaptığı işlemlerden emin olduğu için farklı bir düşünceye kendisini kapatmıştır fakat problemle grafik

arasında bağlantı kuramamıştır. Emin'in matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru cevap verildiğinden, iki tip akıl yürütme türü ve yer yer yüzeysel yer yer derin bir düşünce yapısı sergilendiğinden CR_{olx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Emin'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin'in üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin: (soruyu okudu). *A ve B için tablo yapacağız. A mumunun boyuna x , süreye y diyelim. A mumu 1 saatte 5 cm azalıyor. 1 saat geçti mi boyu 5 cm 2 saat geçti mi boyu 10 cm olur 3 saat geçti mi boyu 15 cm olur.*

Mülakatçı: *Yani A mumu 30 cm di. 1 saat geçince boyu 5 cm mi olur?*

Emin: *Evet. Yok, 1 saat geçti mi 5 cm azalır. A 25 oluyor. 2 saat geçince 20 olur.*

Mülakatçı: *Yani sen tabloya boylarını yazmadın o zaman?*

Emin: *Evet ben tabloya mumun ne kadar azaldığını yazdım.*

Mülakatçı: *Tamam.*

Emin: *B mumu ise, y zaman, x boydu.*

(10/6 olur dedi. Sonra düzeltti.)Bunu 1 saate çevirdiğimizde, yapacağız. Saatte ne kadar olduğunu bulmak için devirli çıkıyor. Yani $5/3$ azalıyor. B mumunun da boy zaman ilişkisi böyle olur.

Mülakatçı: *Böyle olur. Peki, grafiklerini nasıl gösteririz?*

Emin: *A ve B nin sıralı ikilileri (1, 5) değerinde (1, $5/3$) olur. Grafiği çizdiğimizde, $5/3$ 1 tam $2/3$ olur.*

Mülakatçı: *Ne düşünüyorsun?*

Emin: *$5/3$ ü grafiğe nasıl yerleştireceğiz grafiğe.*

Mülakatçı: *Tam olacak şekilde değer verseydin olmaz mıydı b mumu için*

Emin: *B mumu 20 cm idi. 20 yi 5 bölsek yok 3 e bölüp eee.*

Mülakatçı: *20 cm her 3 saatte bir 5 cm düşüyor.*

Emin: *O zaman A mumuna da 3 saat verirse 3 saatte 15 azalır. A mumunun boyu 3 saat sonra 15 kalır. B nin 5 kalır. 3 e bölünce olmaz. O zaman grafiği nasıl çizeceğiz.*

Mülakatçı: *Kafan karıştıysa tekrar tablo yapabilirsin?*

Emin: *eee tekrar yaptık mı eee ayrı yapayım.*

Emin: *Koordinatı yazmasak iki doğru arasında göstererek olur mu?*

Mülakatçı: *Nasıl yani?*

Emin: *Şöyle (eksenlerin negatif kısımlarını çizmeden) yapsak olur mu?*

Mülakatçı: *Nasıl istersen.*

Emin: *Tamam. (Değerleri yazdı. Sonra tekrar grafik çizmek için başka kâğıda geçti.) x ne kadar azaldığı y ne kadar zamanda.*

Mülakatçı: *x ne? x kalan boy mu, eriyen boy mu?*

Emin: Eriyen boy. A mumu için 1 saatte 30 dan 5 çıkarsa 25 olur. Yani, değerler böyle olur.

Mülakatçı: Yani yukarı doğru azalarak mı gidiyor?

Emin: Yok hocam. Bir kere 0 iken 30 du. 30 25 20 15 eee 1 ken 25 2 iken 20 3 ken 15 çizdik mi böyle olur.

Mülakatçı: Peki grafiği doğru yapıp yapmadığından emin misin?

Emin: Eminim.

Mülakatçı: Nasıl emin oldun?

Emin: Yani 1 de 25, 2 de 20, 3 de 15 di.

Mülakatçı: Peki 4 iken?

Emin: 4 iken 10 olacak.

Mülakatçı: Yani grafikte nerede olacak?

Emin: 5 er 5 er azaldığını mı?

Mülakatçı: 4 iken 10 muş ya nerede olacak. Grafik üzerinde mi olması gerekir?

Emin: 0 a kadar inmeyeceğiz. Ben kolay olsun diye 15 den başladım. 15, 10, 5, 0 diye gidecek.

Mülakatçı: Peki yukarı doğru gidecek mi?

Emin: Yok aşağı doğru. Çünkü boyu kısalıyor.

Mülakatçı: Peki B mumunu çizersek.

Emin: B mumu için, zamanı 3, 6, 9 diye yapacağız. x zamandı, (grafiği çiziyor)

Mülakatçı: Burada ekseni x ekseni mi düşüneceğiz?

Emin: Yok ad verebiliriz.

Mülakatçı: Verelim o zaman.

Bu grafikte de yanlış yazmışım.

Mülakatçı: Fark eder mi?

Emin: Fark eder o zaman. Tersine boy-zaman olacak. (Noktaları işaretledi. Her 3 saatte 5 er 5 er azalttı ve çizdi)

Mülakatçı: Grafiğin doğru olup olmadığından emin misin?

Emin: Eminim.

Mülakatçı: Peki A mumunun boy-zaman cebirsel ifadesi?

Emin: y zamandı, x boydu. O zaman $x = 20 - 5x$

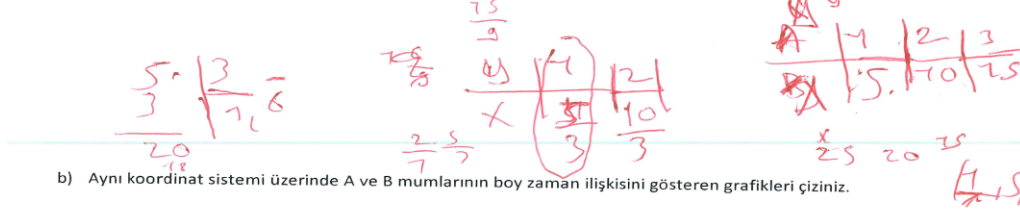
Mülakatçı: A mumunu soruyor. Sen B yi kullandın sanırım.

Emin: o zaman $x = 30 - 5y$ olur.

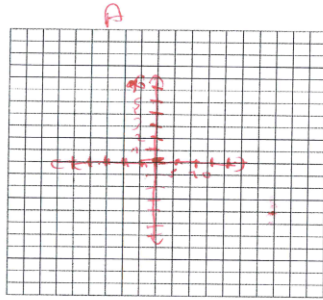


Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.



b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çiniz.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

$$x = 30 - 5y$$

Şekil 4.75. Emin'in üçüncü probleme ait çözümü

Emin'in üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) sıralı ikili ii) koordinat iii) grafik iv) tablo bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Emin'in "A ve B nin sıralı ikilileri (1, 5) değerinde (1, 5/3) olur." ifadesi bu noktaların birer sıralı ikili olması anlamında matematiksel özelliktir. Emin'in koordinat sistemini ve çizdiği grafiğin farklı olduğu algısına sahip olması matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Emin ilk olarak soruyu okuyarak ne yapması gerektiğine karar vermiştir. İlk olarak iki mum için tablo yapmaya başlamıştır. Tabloyu yaparken ilk olarak iki değişken seçerek bu değişkenlere anlam yüklemiştir. a mumunun boyuna x ve zamanına y diyerek başlamıştır. Fakat değer verirken değişiklik yaparak mumun boyuna y zamanına x değişkenini atamaya karar vermiştir. Tabloyu yaparken mumun kalan boyu

ve zaman arasındaki ilişkiden ziyade mumun eriyen kısmı ve zaman arasındaki ilişkiye dair bir tablo yapmıştır. Soruda isteneni karşılamayan bir tablo yapmıştır. Emin'in "A mumu 1 saatte 5 cm azalıyor. 1 saat geçti mi boyu 5 cm 2 saat geçti mi boyu 10 cm olur 3 saat geçti mi boyu 15 cm olur. Evet, ben tabloya mumun ne kadar azaldığını yazdım." ifadesi bu durumu desteklemektedir. B mumu için ise, tabloyu yaparken değişkenleri seçtiğinden farklı adlandırmış, fakat 3 saatte 5 cm azalan mumun 1 saatte ne kadar azaldığını bulmak için işlem yapmıştır. Emin "Bunu 1 saate çevirdiğimizde, Kopyala yapacağız. Saatte ne kadar olduğunu bulmak için devirli çıkıyor. Yani $5/3$ azalıyor. B mumunun da boy zaman ilişkisi böyle olur." ifadeleriyle açıklamıştır. B şıkkı için grafik çizerken, tabloda yararlanarak sıralı ikililer yazmaya çalışmıştır. Emin yaptığı tabloya göre sıralı ikilileri yazmıştır fakat grafiğe nasıl yerleştireceğini bilememiştir. Bu durumu Emin'in "A ve B nin sıralı ikilileri (1, 5) değerinde (1, $5/3$) olur. Grafiği çizdiğimizde, $5/3$ 1 tam $2/3$ olur. $5/3$ ü grafiğe nasıl yerleştireceğiz grafiğe." ifadeleri desteklemektedir. Emin'in $5/3$ ü yerleştirememesi engel olduğundan araştırmacının müdahalesiyle tam değerler verilemez mi sorusuyla tekrar bir düşünce sürecine girmiştir. "O zaman A mumuna da 3 saat verirse 3 saatte 15 azalır. A mumunun boyu 3 saat sonra 15 kalır. B nin 5 kalır. 3 e bölünce olmaz. O zaman grafiği nasıl çizeceğiz." Cümleleri katılımcının tekrar düşünme sürecini göstermektedir. Emin'in "Koordinatı yazmasak iki doğru arasında göstererek şeklinde yapsak olur mu? " sorusu koordinat sistemi ile yaptığı grafiğin farklı olduğunu düşündüğünü akla getirmektedir. Bu durumun sebebi önceki deneyimlerinde hep aynı tip negatif eksenlerin olmadığı grafiklerle çalışmasından kaynaklanabilir. Emin bu süreçten sonra grafikleri ayrı ayrı çizmeye başlamıştır. Fakat eksenlerin isimlerini yine düşey eksene x ve yatay eksene x diyerek başlamış ve eksenlere değerleri yerleştirirken değerlerin eşit aralıklarda olmasına dikkat etmeden yerleştirme işlemi yapmıştır. Ve değerleri yazarken düşey eksene 15 den başlayarak değerler yazmıştır. Fakat eksende yukarı doğru 25 20 25 diye azalan değerler yazmıştır fakat araştırmacının müdahalesiyle düzeltmiştir. Sonrasında ise, grafiği tamamlamıştır fakat grafiğin eksenleri hangi noktada kesmesi gerektiği ile ilgili herhangi bir kontrol etme durumu yaşamamıştır. Fakat yaptığı işlemlerin doğruluğundan emindir çünkü sadece 1 iken 25 2 iken 20 ve 3 iken 15 olduğunu teyit ederek işlem yapmıştır. Bu durum ise grafiğin doğruluğunu göstermekte yeterli olmamıştır. Araştırmacının 4 iken ne olur sorusu ile 4 olursa 10 olur demiştir 5 er 5 er

azalmıştır. Demiştir. Fakat hala grafikte hata yaptığıının farkına varmamıştır. Sadece düşey ekseninde 15 den başladığını fakat alt tarafta değerlerin olduğunu ifade etmiştir. Bu durumu Emin'in " 0 a kadar inmeyeceğiz. Ben kolay olsun diye 15 den başladım. 15, 10, 5, 0 diye gidecek." düşüncesi desteklemektedir. Koordinat sistemini çizerken x ve y eksenlerinin yerlerine dikkat etmeden çizim yapmıştır. Hangi eksen için hangi değişkeni yazacağını sürekli değiştirme eğiliminde bir çözüm sürdürmüştür. Sonuç olarak y eksenine boy ve x eksenine zaman diyerek grafik çizmiştir. Yine a mumunun grafiğinde olduğu gibi grafiğin eksenleri kestiği noktalara dikkat etmeden direk değerlerin birleştirilmesiyle bir grafik oluşturmuştur. C sikkında a mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi "*y zamandı x boydu o zaman $x=30-5y$* " olarak yazmıştır. Emin'in akıl yürütme sürecine bakılacak olursa, genel olarak bildiği ve kolaylıkla yapabileceği prosedürleri takip etmesi açısından algoritmaya dayalı akıl yürütme sergilemiş olsa da yerel olarak, 3 saatte 5cm azalan mumun saatte ne kadar eridiğini bulmayı düşünmesi açısından CR ye yakındır.

➤ Emin değişkenlere anlam yüklemekte kararsızlık yaşamıştır. Muhtemelen önceki deneyimleri seçimlerinde baskın olduğu için tereddüt yaşamıştır ve sonuçta önceden gördüğü şekliyle yapmaya karar vermiştir. Mumların boy zaman grafiklerinin aynı grafikte gösterilmesi istenmesine rağmen ayrı yapma eğiliminde bulunması zorlanacağından ve b mumunda değerleri yerleştirmede zorlanmasından kaynaklanabilir. Koordinat sisteminde eksenlerin yazılması ve değişkenlerin seçilmesi ile ilgili problem yaşayan Emin'in bilgi birikimi olmasına rağmen zaman zaman tereddütler yaşadığı tam olarak kavramsal anlamasının gerçekleşmediği söylenebilir. Emin'in ara ara derin düşünceler ara ara yüzeysel düşünceler sergilemesinden hareketle matematiksel temel kategorisi belirsiz olarak kodlanmıştır. Emin'in matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru bir çözüm yapıldığından, iki tip akıl yürütme türü ve yer yer derin yer yer yüzeysel düşünce yapısı sergilendiğinden CR_{olx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Emin'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Emin'in dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Emin: x e 5 desek, y ye... eee o zaman alta yaşını diyeceğiz. (Değerleri yerleştirdi) Her birim kare 5 birim olacak şekilde, x e 5 desek, eee. Yani mesela 20 yaşında biri $20/2 = 10$, 110 la toplayınca 120 olur. Grafikte yazarsak 25 iken 125, 30 iken 130 dur. Böyle devam ediyor.

Mülakatçı: Grafiğin nereden başlaması lazım.

Emin: 5 den, yani 0 dan başlaması lazım. 0 iken 110 dur.

Mülakatçı: Tamam.

Emin:

$$145 = x/2 + 110$$

$$35 = x/2$$

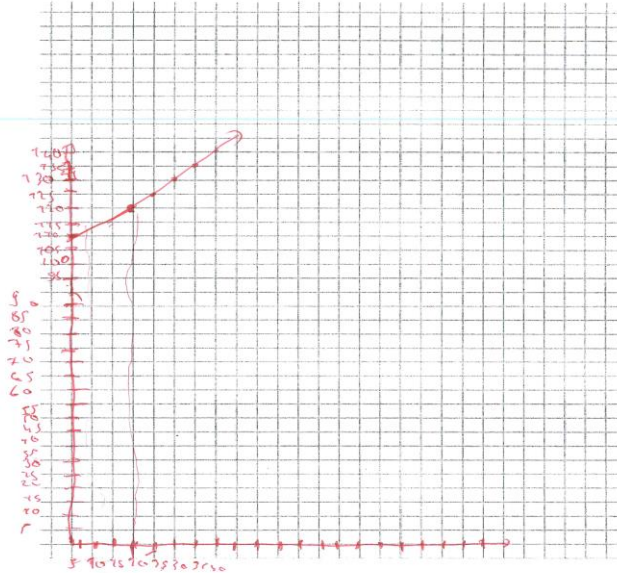
$$x = 70$$

olur.



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

- a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



- b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

$$145 = \frac{x}{2} + 110$$

$$35 = \frac{x}{2}$$

$$70 = x$$

Şekil 4.76. Emin'in dördüncü probleme ait çözümü

Emin'in dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Emin'in matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Emin'in çizdiği grafik bir dönüşümdür ve doğrudur. Emin'in bahsettiği “kan basıncı” ve “yaş” gerçek dünya bileşenidir.

➤ Emin ilk olarak soruyu okumuştur ve değer vermeye çalışmıştır. Sonrasında ise grafikte x eksenine yaşını yazacağını söylemiştir. *”Her birim kare 5 birim olacak şekilde, x e 5 desek, eee. Yani mesela 20 yaşında biri $20/2=10$, 110 la toplayınca 120 olur. Grafikte yazarsak 25 iken 125, 30 iken 130 dur.”* İfadeleri çözümünü açıklamaktadır. Emin bulduğu değerleri koordinat sisteminde işaretleyerek sonrasında birleştirip grafiği oluşturmuştur. Grafiğin 5 den başlaması gerektiğini söyleyip sonrasında düzeltip 0 iken 110 olur demiştir. Ve grafiğini çizmiştir. Emin grafiği çizerken her birim karenin 5 birim kare ifade ettiğini dikkate alarak ve grafiğin eksenleri kesme durumuna dikkat ederek işlem yapmıştır. B şıkında ise, denklemi kullanarak çözüm yapmaya çalışmıştır. Denklemden verilen değerleri yerine yazarak isteneni bulmuştur. Emin'in akıl yürütme türü, CR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Emin grafiği çizerken zorlanmamıştır. Bu durumun sebebi, bilgi birikiminin olması ve kavramsal anlamasının kuvvetli olmasından kaynaklanmaktadır. Emin'in genel olarak çok fazla açıklama yapmadan ne yaptığının farkında olarak işlem yapması dikkat çekmektedir. Doğru çözüm yapan Emin'in matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünce yapısı sergilendiğinden CR_{dgd} olarak belirlenmiştir.

Emin'in “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.16’da gösterilmiştir.

Tablo 4.16.

Emin'in “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Emin	CR _{dld}	CR _{olx}	CR _{olx}	CR _{dgd}

Tablo 4.16 incelendiğinde, Emin'in incelenen dört problemin hepsinde yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Emin tüm problemlere doğru veya muhtemel doğru cevap verirken, dördüncü problem dışındaki

problemlerde yerel akıl yürütme türü sergilemiştir. Emin akıl yürütme sürecinde bazı sorularda yüzeysel bazı sorularda derin bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.5. Faruk'un Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Faruk'un birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk'un birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Faruk: orijin $(0,0)$ kabul ederiz. Mesela Evi yapalım mesela, $(5, 8)$ olur.

Mülakatçı: Güzel.

Faruk: Daha sonra da Tortum Şelalesi mesela $(-1, -8)$ noktası olur.

Mülakatçı: Peki bu noktaları yazarken nelere dikkat ettin?

Faruk: Noktaları yazarken kesiştikleri noktalara dikkat etmemiz lazım.

Mülakatçı: peki bir noktanın koordinatı denilince ne aklına geliyor?

Faruk: ilk önce x noktası eee x eksenini sonra y eksenini yani ikisinin kesiştiği nokta. Yani hani bir x eksenin de sayılar vardır birde y noktasında ilk önce biz x leri ele alıyoruz daha sonrada y noktasında ki sayıları ele alıyoruz bunların kesiştiği noktaları bulup işte orası bizim koordinatımız oluyor.

Mülakatçı: peki koordinat sistemi deyince ne aklına geliyor?

Faruk: eee şu (koordinat eksenini gösteriyor) iki doğrudan oluşan doğru parçası mı yok iki doğrudan oluşan sistem.

Mülakatçı: peki sıralı ikili ne demek?

Faruk: hocam duymuştum ama aklıma gelmiyor hiç.

Mülakatçı: Tamam. Peki, orijin olarak ev seçilseydi?

Faruk: Kesin değişiklik olurdu.

Mülakatçı: Neden?

Faruk: Orijin değişirse koordinatlarda değişirdi. Orijin değişince eksen yani koordinatlarda değişirdi. Mesela orijin yukarıda olsaydı mesela atıyorum Tortum şelalesi $(-4, -8)$ noktasında olurdu.

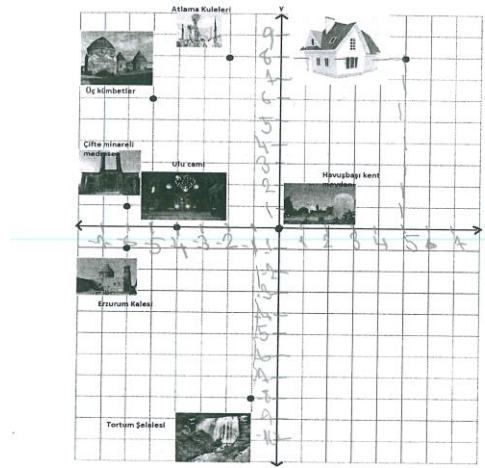
Mülakatçı: Bir tane örnek verebilir misin? Nasıl değişir?

Faruk: Evi orijin seçelim. Yaa Allah Allah.

Mülakatçı: Ne oldu?

Faruk: Evi orijin seçersek $(-10, -2)$ Üç kümbetleri yazdım.

Mülakatçı: Tamam.



Kaan ve Nur tatilde Erzurum da yaşayan Ahmet amcalarını ziyarete gideceklerdir. Amcaları önceden gezdireceği tarihi mekanları tespit etmiş ve Havuzbaşı kent meydanını orijin olacak şekilde işaretlemiştir.

- a) Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.

Noktaların kesiştiği yerlere dikkat etmeliyiz
 $E.v = (5, 8)$ $T.S = (-1, -8)$ $U.C = (0, -4)$ $C.M.M = (-6, 1)$
 $Ö.k = (-5, 6)$ $C.Ş = (-2, 8)$

- b) Eğer orijin olarak Havuzbaşı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekanların koordinatlarında değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Neden? Açıklayınız.

Değişiklik olurdu. Çünkü orijin değişirse koordinat düzleminde kesişen noktalar da değişir.

Şekil 4.77. Faruk'un birinci probleme ait çözümü

Faruk'un birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) orijin ii) koordinat iii) koordinat sistemi iv) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Faruk orijinin (0,0) noktası olduğu düşüncesine sahiptir. Bu bilgi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Faruk koordinatı "ilk önce x noktası eee x eksenini sonra y eksenini yani ikisinin kesiştiği nokta" olarak ifade etmiştir. Bu ifadesi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Koordinat sistemini ise, "iki doğrudan oluşan sistem." olarak tanımlamıştır fakat bu tanım koordinat sistemini tam olarak karşılamamaktadır matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Faruk sıralı ikili kavramını ise duyduğunu fakat hatırlamadığını ifade etmiştir.

➤ Faruk koordinat sisteminde bir noktanın yerini belirlemek ile ilgili problem yaşamamıştır. Her bir tarihi mekânın koordinatlarını doğru bir şekilde belirlemiştir.

Koordinatların belirlenirken önce x eksenindeki nokta ve sonra y eksenindeki noktanın yazıldığına farkındadır. Faruk koordinatları bulurken “*noktaları yazarken kesiştikleri noktalara dikkat etmemiz lazım.*” diyerek dikkatli bir şekilde işlem yaptığını göstermiştir. “*ilk önce x noktası eee x eksenini sonra y eksenini yani ikisinin kesiştiği nokta. Yani hani bir x eksenin de sayılar vardır birde y noktasında ilk önce biz x leri ele alıyoruz daha sonrada y noktasında ki sayıları ele alıyoruz bunların kesiştiği noktaları bulup işte orası bizim koordinatımız oluyor.*” cümleleriyle ise koordinat denilince ne anladığını açıklamıştır. Faruk koordinat sistemini açıklamakta zorlanmıştır ve ifadelerinde tereddüt yaşamıştır nihayetinde eksik bir tanımlama kullanarak ifade etmiştir. “*eee şu (koordinat eksenini gösteriyor) iki doğrudan oluşan doğru parçası mı yok iki doğrudan oluşan sistem.*” cümleleri bu durumu destekler niteliktedir. B şıkında katılımcının orijinin değişmesi durumunu “*kesinlikle değişiklik olurdu. Orijin değişirse koordinatlarda değişirdi. Orijin değişince eksen yani koordinatlarda değişirdi. Mesela orijin yukarıda olsaydı mesela atıyorum Tortum şelalesi (-4, -8) noktasında olurdu. Koordinatlarda değişirdi*” Cümleleriyle ifade etmiştir. Bu durum Faruk’un bilgi anlamında eksikliğinin olmamasından kaynaklanmış olabilir. Bu anlamda Faruk’un akıl yürütme türünün AR ye yakın olduğu söylenebilir.

➤ Faruk koordinat sisteminde noktaları göstermekte zorlanmamıştır. Bu durumun sebebi bu konu ile ilgili bilgi birikiminin olmasıdır. Faruk genel olarak ne yaptığının farkındadır ve açıklamalarıyla bu durumu göstermiştir. Bu anlamda yer yer derin açıklamalarla işlemelerini açıklamış yer yer ise yüzeysel eksik ifadelerle devam etmiştir. Bu sebeple matematiksel özellik olarak belirsiz olarak sınıflandırılmıştır. Doğru çözüm yapan Faruk’un matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve yer yer derin yer yer yüzeysel düşünce yapısı sergilenmesinden AR_{dgx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Faruk’un ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk’un ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Ne düşündün bu soru ile ilgili?

Faruk: Bizim iki bilinmeyene ihtiyacımız var. Ödenecek ücrete x,

alınan yola da y diyelim. Eee tam tersi olacak galiba.(Tablo yapıyor bir yandan da)

Mülakatçı: Neden değiştirdin?

Faruk: Bizim ücretimiz km e göre değişecek. Mesela x e alınan yol dedik ya. 1 km giderse ödenecek ücret 3 TL olur. Böyle düşündüm.

Mülakatçı: Tablodaki verilere baktığın zaman doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Faruk: Eee.

Mülakatçı: Tablodaki veriler açısından ilişki var mı?

Faruk: Yani biri birine bağlı. Birini bulmak için 1 km giderse 3, 2 de 5, 3 de 6 öder.

Mülakatçı: Nasıl buluyorsun?

Faruk: 3 artıyor. 3 km gitmiş ya 3 TL öder. 6 olur.

Mülakatçı: 1 km giderse?

Faruk: 3 TL olur.

Mülakatçı: Tamam. Devam edelim.

Mülakatçı: Ücret ve yolun cebirsel ifadesi?

Faruk: Hani demiştik ya arasında bir ilişki var mı? İşte $y = 3x + 1$

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun? Nasıl yazdın onu? Ne düşünerek?

Faruk: Açılış ücreti 3 TL. Sonra her km 1+1. Tam tersi galiba. Burada bilinmeyen, açılış ücreti belli 3 TL olacak. Burada bizim bilinmeyenimiz alınan yol. O yüzden $y=1x+3$ olur.

Mülakatçı: Peki bu ilişkiyi grafikte ifade etmek istersen nasıl bil yol izlersin?

Faruk: Bakayım hemen.

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Faruk: Hocam açılış ücreti olarak 3 TL diyor ya. 1 km daha giderse 4 TL olur değil mi?

Mülakatçı: Evet. Peki, grafiği doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Faruk: Evet doğru.

Mülakatçı: Peki grafik aşağı doğru devam eder mi?

Faruk: Hayır çünkü değerler hep pozitif.

Mülakatçı: Tamam.

Faruk: Peki ücret ile yol arasında nasıl bir ilişki var?

Faruk: Ödenecek ücretimiz alınan yol. Eee x alınan yol. Eğer alınan yolu bulursak diğer ücretleri vermiş. Ödenecek ücreti de buluruz.

Mülakatçı: Tamam. Peki, aralarından acaba biri artarsa diğeri artar mı azalır mı? Böyle bir ilişki var mı acaba?

Faruk: Açılış ücreti olarak hani ben derim ya ilk km de yani açılış ücreti olarak tabi artar. Açılış yok. Her km de 1 TL.

Faruk: Değişiklik olur. Bir bilinmeyen var. Toplanmıyor yani. Toplanmazsa katsayı olur. Orijinden geçer. Değişiklik orijinden geçmesi.

Mülakatçı: Tamam. Peki, açılış ücreti 3 TL ve her km 2 TL olsaydı?

Faruk: Tabi ki artışı olur. Mesela 1 km de 10 km giderse 13, bunda 23 olur. 2 katı neredeyse 10 fazlası değişiklik olur.

Mülakatçı: Grafiğe nasıl yansır?

Faruk: Buda orijinden geçmez. Onda bir değişiklik olmaz. Sadece değerleri artar.

Mülakatçı: Tamam.

Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifi;
Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

13

Ödenecek Ücret

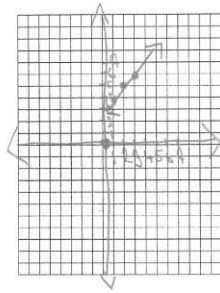
a) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

X	1	2	3
Y	4	5	6

b) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

~~$y = 3x + 1$~~ $y = x + 3$

c) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çizin.



Şekil 4.78. Faruk'un ikinci probleme ait çözümü

Faruk'un ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) bilinmeyen ii) denklem iii) yol, ücret iv) grafik, tablo bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Faruk değişkenleri kullanmaktadır. Bilinmeyen kavramının farkındadır. Faruk'un bahsettiği "yol" ve "ücret" birer gerçek dünya bileşenidir. Faruk'un ilk kurduğu denklem matematiksel olarak problem durumunu karşılamaz. Fakat sonradan kurduğu denklem matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Faruk'un oluşturduğu tablo ve grafik birer dönüşümdür ve matematiksel olarak kabul edilebilirdir.

➤ Faruk, soruyu okuduktan sonra değişken seçme ve değişkenlere anlam yükleme işlemlerini yapmıştır. Ama tablo yaparken değişkenlerin anlamları hakkında tereddütte kalmıştır. Faruk'un "Ödenecek ücrete x , alınan yola da y diyelim. Eee tam tersi olacak galiba." ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Sonuç olarak Faruk, değişkenlere anlam yükleyerek yol ücret ilişkisini ifade eden tablo oluşturmuştur. Tablodaki veriler arasındaki ilişkinin farkında olarak tablodaki değerleri doldurmuştur. Yol ve ücret

arasındaki ilişkiyi ifade eden cebirsel ifadesini yazarken tereddüt yaşamıştır. Faruk'un *"Hani demiştik ya arasında bir ilişki var mı? İşte $y=3x+1$. Açılış ücreti 3 TL. Sonra her km 1+1. Tam tersi galiba. Burada bilinmeyen, açılış ücreti belli 3 TL olacak. Burada bizim bilinmeyenimiz alınan yol. O yüzden $y=1x+3$ olur."* ifadelerinden cebirsel ifade yazarken tereddüt yaşadığı anlaşılmaktadır. Grafik çiziminde, tabloda yazdığı değerleri koordinat sisteminde bularak grafik çizmiştir. Faruk grafiğin doğru olduğundan emindir ve grafiğin yaptığı şekilde olacağının farkındadır grafiğin pozitif değerler alacağının farkındadır. Faruk'un *"Hayır çünkü değerler hep pozitif."* ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Fakat Faruk grafiğin eksenleri kesme durumu ile ilgili özel olarak ilgilenmemiştir. Problem durumunda değişiklik olması durumunda grafikteki değişimle ilgili ise; değişimi *"Değişiklik olur. Bir bilinmeyen var. Toplanmıyor yani. Toplanmazsa katsayı olur. Orijinden geçer. Değişiklik orijinden geçmesi."* ifadeleriyle açıklamıştır. Faruk'un başlangıçta değişken ve denklem kurma konusunda önceki deneyimlerine paralel hareket etme eğilimi AR akıl yürütme türünü akla getirmektedir. Fakat sonrasında problem durumu ve grafik arasında bağlantı kurması, grafikte meydana gelen değişiklikleri rahatlıkla yorumlaması açısından CR akıl yürütme türü de görülmektedir.

➤ Faruk genel olarak problem çözümünde zorlanmamıştır fakat zaman zaman tereddütler yaşamıştır. Bu durum Faruk'un belli bir bilgi birikimine sahip olduğunu gösterir. Faruk'un denklem kurma ve değişkenlere anlam yükleme noktasında kafasındaki şemaya uygun bir işlem yapma eğiliminde olması tereddüt yaşamasına sebep olmuştur. Grafik çizimiyle ilgili ise Faruk'un problem durumu ile grafik arasında bağlantı kurması dikkat çekmektedir. Faruk'un denklemde oluşan değişikliğin grafiğe nasıl yansıtacağı konusunda rahatlıkla yorum yaptığı görülmektedir. Faruk'un grafik çizimi ile ilgili kavramsal anlamasının kuvvetli olduğu söylenebilir. Doğru çözüm yapan Faruk'un matematiksel akıl yürütme türü, iki tip akıl yürütme türü ve derin düşünce yapısı sergilendiğinden CR_{dd} olarak belirlenmiştir.

-Faruk'un üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk'un üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Faruk: Bunu hemen tablo yaparak bulabiliriz. Kalan boya ve geçen süre bilinmeyenimiz. Şimdi eee geçen süreye x diyeceğiz yok. x diyelim, kalan boya x eee.

Mülakatçı: Neden kafa karıştı?

Faruk: (soruyu tekrar okudu) Bizim burada kalan boyu bulmamız için geçen süreyi de bulmamız lazım. Hocam ben burada biraz takıldım. Geçen süreye x dedim kalan boya y dedim. 1 saatte 5 cm azalıyorsa 25 olur. 2 de 20, 3 de 15 olur. Başka tablo çizelim B için, Doğru dedim. Hatırladım. 3 saatte 5 cm azalıyorsa 3 de 15, 6 da 10, 9 da 5 cm olur.

Mülakatçı: Tamam. Güzel. Peki, grafiği soruluyor?

Faruk: Ayır ayrı çizelim. Bunlar giderek azalıyor. (Grafikteki sayıları yerleştirmeye çalışıyor) Böyle olur.

Mülakatçı: Grafik 5 e geldiğinde x eksenini kesiyor mu? Grafik aşağı ve yukarı devam edecek mi?

Faruk: 3 de 10, 4. Saatte 5, 5. Saatte 5 olacak. Ondan sonra sıfırlanıyor, bitiyor.

Mülakatçı: Yani 5 dk. mı bitiyor?

Faruk: 6 dk. da bitiyor.

Mülakatçı: Tamam.

Faruk: Peki B mumu için çizelim.

Mülakatçı: Peki grafik y ekseninde bir yeri kesiyor mu?

Faruk: 20 yi

Mülakatçı: Neden?

Faruk: Çünkü ilk başta boya 20, o yüzden 20.

Mülakatçı: Güzel. A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi nasıl yazarsın?

Faruk: y kalan boy,

$y = 30 - 5x$ olur.

Mülakatçı: Her saatte azaldığı için eee.

Faruk: Burada mesela 1 saatte kaç cm boy kaldığını bulabiliriz burada.



Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

Kalan Boy: y
Geçen Süre: x

a) A ve B mumlarının boy-zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

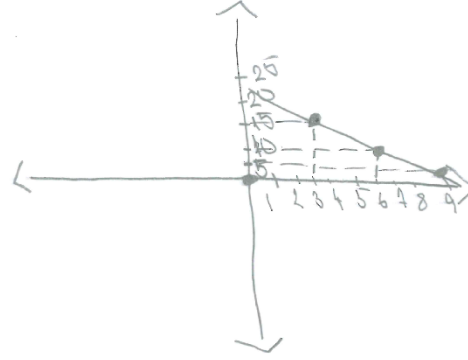
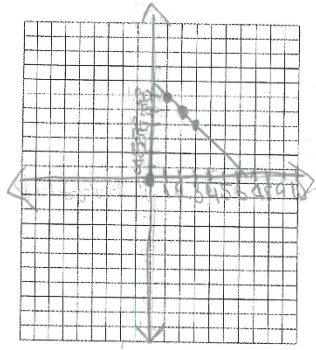
x	1	2	3
y	25	20	15

A

x	3	6	9
y	15	10	5

B

b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çiziniz.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuz açıklayınız.

$$y = 30 - 5x$$

Şekil 4.79. Faruk'un üçüncü probleme ait çözümü

Faruk'un üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) bilinmeyen ii) değişken iii) kalan boy, geçen süre bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ x ve y değişkenlerinin bilinmeyen olması matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Değişkenler olarak x ve y için kalan boy ve geçen süre anlamlarını yükleyebilmiştir. "Geçen süre" ve "kalan boy" birer gerçek dünya bileşenidir.

➤ Faruk tablo yaparken öncelikle değişkenleri belirlemeyi seçmiştir fakat değişkenleri belirlerken zorlanmış ve takıldığını ifade etmiştir. Bu durumu Faruk'un "Kalan boy ve geçen süre bilinmeyenimiz. Şimdi eee geçen süreye x diyeceğiz yok. x diyelim, kalan boy x eee." ifadeleri desteklemektedir. Faruk "Hocam ben burada biraz takıldım. Geçen süreye x dedim kalan boy y dedim... Doğru dedim. Hatırladım. 3

saatte 5 cm azalıyorsa 3 de 15, 6 da 10, 9 da 5 cm olur.” ifadeleri Faruk’un önceden bir prosedür hatırladığını göstermektedir. Bu yönüyle Faruk AR akıl yürütme türünü sağlayan bir akıl yürütme sürecine sahiptir. Grafik çizerken a ve b mumlarının boy zaman ilişkisi aynı grafikte istenmesine rağmen ayrı ayrı grafikler çizmiştir, grafikleri çizerken tabloda yazdığı değerleri dikkate alarak grafiği çizmiştir. Fakat Faruk grafiğin eksenleri kesip kesmediğine dikkat etmemiştir. Aslında Faruk mumun 6 saate bittiğinin farkında olmasına rağmen bu bilgiyi grafikte göstermemiştir. Dolayısıyla katılımcının grafiğinde x eksenini 5 de kesen ve y eksenini kesmeyen bir grafik vardır. B mumunun grafiği içinde yine benzer olarak Faruk’un y eksenini 20 de kestiğini bildiği fakat bu durumu grafikte göstermediğini ve x eksenini de kesip kesmediği ile ilgili grafikte 9 değerinden sonra kesiyor görünse de tam olarak kestiği yer gösterilmemiştir. Faruk’un mumların bittiği andan sonrası için grafiğin devam etmeyeceği ile ilgili bir düşünce oluşturamadığı görülmektedir.

➤ Faruk değişken belirlerken zorlanmış ama nihayetinde değişkenlere anlam yükleyebilmiştir. Fakat sonrasında hatırladığı için doğru bir şekilde anlamlandırabilmiştir. Faruk hatırlamaya çalıştığı için zorlanmış olabilir. Faruk’un ayrı grafik çizmesi aynı grafikte göstermekte zorlanacağını düşünmesi olabilir. Faruk’un grafikleri çizerken eksenlerle ilgili grafiğin eksenleri kesip kesmediğini kontrol etmediği cevaba yönelik hareket ettiği görülmektedir. Faruk’un grafiklerle ilgili genelde gördüğü grafiklere benzediği için hata yapmadığını düşünerek önceki deneyimlerine dayalı bir düşünce yapısına sahip olduğu söylenebilir. Genel olarak ne yaptığının farkında ve bilgi birikime sahip olmasına karşın hatalı sonuçlara ulaşmıştır. Faruk’un matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru cevap verildiğinden, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünce yapısı sergilendiğinden AR_{ogd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Faruk’un dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Faruk’un dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Faruk: Hocam değer verdim. x e 10 verelim. $x=115$ olur. 115 den başlayacağım. Bize burada her bir birim kare 5 olduğundan 5 er 5 er gittiği için. Önce tablo yapalım. x yaş y kan basıncını gösteriyor. Kan basıncı 5

er 5 er artıyor. Eee yaş 10 olacak. $10/2+110=115$. Daha sonra 20, 30... gidiyor. Ben burada takıldım. Yaş 10 ar 10 ar gidiyor ya hocam. Nasıl yazacağım diye Ama birim karede 5. Burada takıldım biraz. Ama beşer beşer

yazacağız. Ama şimdi 10 da 115, 20 de 120, 30 da 135 olacak. (Grafiği çizdi)

Mülakatçı: Peki grafik y yi kesiyor mu? Grafik aşağı devam ediyor mu?

Faruk: Devam etmez.

Mülakatçı: Neden?

Faruk: Hepsi pozitif.

Faruk: Neden?

Faruk: Çünkü kan basıncı artılarda olur. O yüzden grafik devam etmez.

Mülakatçı: tamam. Peki, kan basıncı 145 olan birinin yaşı?

Faruk: 70 hocam. Ama yine de yapayım.

$145 = x/2 + 110$. Buradan $35 = x/2$. O da $x = 70$ dir.

Mülakatçı: Yani denklemde yerine koydun.

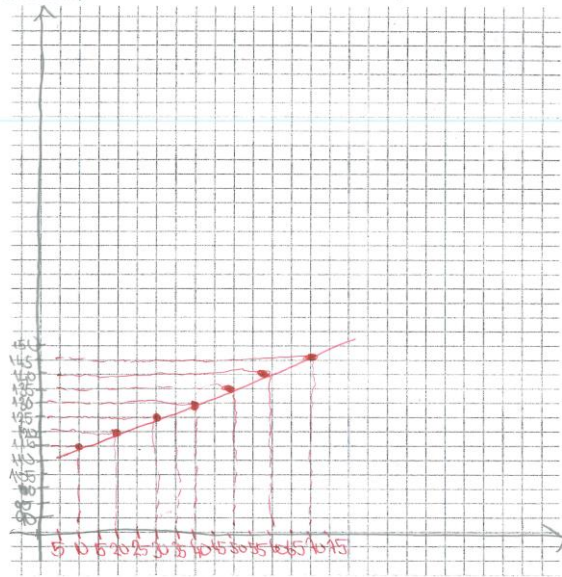
Faruk: Evet.



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

x	10	20	30	40	50	60	70
y	115	120	125	130	135	140	145

a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

$$145 = \frac{x}{2} + 110 \quad 35 = \frac{x}{2} \quad 70 = x$$

Şekil 4.80. Faruk'un dördüncü probleme ait çözümü

Faruk'un dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Faruk'un matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) tablo, grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Faruk'un oluşturduğu tablo bir dönüşümdür problem ile ilgi verileri içerir. Faruk'un çizdiği grafik de bir dönüşümdür ve doğru çizilmiştir. Faruk'un belirttiği "kan basıncı" ve "yaş" birer gerçek dünya bileşenidir.

➤ Faruk x ve y eksenlerine 5'er 5'er değerler yazarak başlamıştır. x eksenine 5 den başlayarak y ekseninde ise 100 den başlayarak değerler yazmıştır. Sonrasında ise grafik çizmek için öncelikle tablo çizme gereği duymuştur. Tabloyu oluştururken önce y değerlerini yazmıştır. Sonrasında ise x değerlerini yazmıştır. Grafiği çizerken ise, x eksenindeki değerleri yazarken takıldığını ifade etmiştir. Ama sonuçta nasıl yazması gerektiğine karar vermiştir. Faruk'un "*Ben burada takıldım. Yaş 10 ar 10 ar gidiyor ya hocam. Nasıl yazacağım diye Ama birim karede 5. Burada takıldım biraz. Ama beşer beşer yazacağız.*" ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Tabloda yazdığı değerleri koordinat sisteminde bularak noktaları belirlemiştir. Sonrasında ise, bulduğu noktaları birleştirip grafiği çizmiştir. Grafiğin negatif değerler alıp almayacağı ile ilgili "*Hepsi pozitif. Çünkü kan basıncı artılarda olur. O yüzden grafik devam etmez*" ifadeleriyle açıklama yapmıştır. B şikkında ise, kan basıncı 145 olan birinin yaşını çizdiği tablodan direk bakarak söylemiştir. Ayrıca denklemde yerine yazarak tekrar cevabı bulmuştur. Faruk'un yaptığı işlemlerin farkında olduğu, kafasının karışıklığını kendisinin giderdiği görülmüştür. Faruk'un akıl yürütme türü CR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Faruk ara ara takılmasına rağmen işlemelerini bilinçli bir şekilde ve açıklayarak sürdürmüştür. Faruk'un bilgi birikiminin olduğu ve kavramsal anlamasının bu soruyu çözmeye yeterli olduğu söylenebilir. Faruk'un genel olarak derin bir düşünce yapısına sahip olduğu görülmektedir. Doğru bir çözüm yapan Faruk'un matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünme yapısı sergilendiğinden CR_{dgd} olarak sınıflandırılmıştır.

Faruk'un "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.17'de gösterilmiştir.

Tablo 4.17.

Faruk'un "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Faruk	AR _{dgx}	CR _{dld}	AR _{ogd}	CR _{dgd}

Tablo 4.17 incelendiğinde, Faruk'un incelenen beş problemin üçünde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne, bir problemde ezbere dayalı akıl yürütme türüne ve bir problemde de yaratıcılığa dayalı akıl yürütmeye sahip olduğu görülmektedir. Faruk tüm problemlere doğru cevap verirken, sadece üçüncü ve dördüncü problemlerde yerel akıl yürütme türü sergilemiş diğer problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Faruk akıl yürütme sürecinde bazı sorularda yüzeysel bazı sorularda derin bir düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.6. Nilgün'ün Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Nilgün'ün birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün'ün birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: (Tarihi yerlerin koordinatlarını yazdı) Tortum şelalesi (-1, -8) olur.

Mülakatçı: Peki koordinatları yazarken neye dikkat ediyorsun?

Nilgün: Noktaların nerede olduğuna veya sayılara dikkat ediyorum.

Mülakatçı: Bir noktanın koordinatı deyince ne aklına geliyor?

Nilgün: Nerede olduğu.

Mülakatçı: Ne demek, ne anlıyorsun?

Nilgün: Orijine olan uzaklığını.

Mülakatçı: Yani yerini mi?

Nilgün: Evet öyle.

Mülakatçı: Koordinat sistemi ne demek?

Nilgün: Koordinat sistemi mesela bir noktanın orijine uzaklığını hesaplarken yararlanıyoruz.

Mülakatçı: Koordinat sistemi nasıl oluşturulmuştur?

Nilgün: Doğrularla kesişmiştir. Tam kesiştiği nokta orijin oluyor.

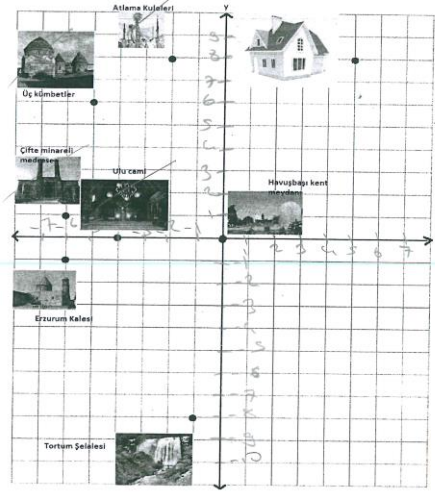
Mülakatçı: Peki sıralı ikili ne demek?

Nilgün: Duydum ama hatırlamıyorum.

Mülakatçı: Peki. Orijin ev seçilseydi...

Nilgün: Olur. Ev orijin olursa 0 olur. Her birinin uzaklığı değişir. Mesela

Atlama Kuleleri (7, 1) yok (0, -1). Yok, 1 dk. (-7, 0) olur. Önceden (-2, 8) di.



Kaan ve Nur tatilde Erzurum'da yaşayan Ahmet amcalarını ziyarete gideceklerdir. Amcaları önceden gezdireceği tarihi mekanları tespit etmiş ve Havuzbaşı kent meydanını orijin olacak şekilde işaretlemiştir.

a) Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.

Atlama Kuleleri = (-2, 8) Erzurum Kalesi = (-1, -8)
 Üç Kumbetler = (-5, 6) Tortum Şelalesi = (-1, -8)
 Çifte minareli medrese = (-6, 1) Ahmet'in evi = (5, 8)
 Ulu Camii = (-4, 0)
 Havuzbaşı kent meydanı = (0, 0)

b) Eğer orijin olarak Havuzbaşı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekanların koordinatlarında değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Neden? Açıklayınız.

Eğer orijin evin önünde olsaydı koordinatları değişirdi. Çünkü noktalar aynı yerlere denk gelecekti bu yüzden koordinatlar başka şekilde yazarlardı.

Şekil 4.81. Nilgün'ün birinci probleme ait çözümü

Nilgün'ün birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) orijine uzaklık ii) koordinat iii) koordinat sistemi iv) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Nilgün bir noktanın koordinatını “noktanın nerede olduğu” olarak ifade etmiştir. Koordinat noktaların konumunu belirlemek için kullanılır bu açıdan matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Fakat sonrasında kullandığı bir noktanın koordinatından ne anlıyorsun sorusuna “orijine olan uzaklığı” ifadesi farklı bir kavramı ifade eder. Bu açıdan matematiksel açıdan kabul edilebilir değildir. “Koordinat sistemi

mesela bir noktanın orijine uzaklığını hesaplarken yararlanıyoruz.” İfadeleri de bu düşüncesine paralel şekillenmiştir.

➤ Nilgün zorlanmadan tarihi mekânların koordinatlarını bulmuştur. Nilgün eksenlerin pozitif veya negatif olduğu durumlara dikkat ederek koordinatları yazmıştır. “Noktaların nerede olduğuna veya sayılara dikkat ediyorum” ifadesi bu durumu desteklemektedir. Fakat Nilgün’ün koordinatın ne demek olduğu ile ilgili kafası karışık “nerede olduğunu” ve “Orijine olan uzaklığını”. İfadelerinden de anlaşılacağı gibi orijine uzaklık olarak algıladığı koordinat kavramı gerçeği karşılamamaktadır. Bunun devamı olarak “koordinat sisteminde orijine uzaklığı açıklamak için yararlı bir sistem olarak düşünmektedir” ve “doğrularla kesişmiştir. Tam kesiştiği nokta orijin oluyor” ifadelerini kullanmıştır. Bu anlamda Nilgün’ün bilgi eksikliği ve kavramsal anlamasının zayıflığı görülmektedir. Nilgün’ün sıralı ikili kavramını duyduğunu ve hatırlamadığını ifade etmesi koordinat sistemi konusu ile ilgili bilgi eksikliğini göstermektedir. b şikkında ise, orijinin değişikliğinde koordinatlarda değişiklik olduğunu söylemiştir. Örnek olarak Nilgün atlama kulelerini örnek vererek değişimi göstermiştir. Dikkatsizlik hataları yapsa da sonuçta doğru sonuca ulaşmıştır. Bu anlamda Nilgün’ün akıl yürütme türü algoritmaya dayalı akıl yürütme olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Nilgün’ün direk işlem yapma eğiliminde olduğu açıklama ve tartışmalara gerek duymadığı görülmektedir. Genel olarak yüzeysel bir bakış açısıyla işlemlerini sürdürmüştür. Bu durumun kavramsal anlamasının zayıflığından kaynaklandığı düşünülebilir. Çünkü Nilgün kavramların anlamları hakkında hatalara düşmüştür. Doğru çözüm yapan Nilgün’ün matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünce yapısı sergilendiğinden AR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Nilgün’ün ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün’ün ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: Şimdi tablo çizeceğiz. Her km için 1 TL, $1x + 3$ oluyor.

Mülakatçı: Neye eşit oluyor?

Nilgün: y ye eşit. y ye 0 verip x ’i. x ’e 0 verip y yi bulacağız.

Mülakatçı: Neden öyle bir işlem yapıyoruz.

Nilgün: eee nasıl yani? Gittiği km ve ödenen parayı bulmak için.

x e 0 verince $y = 3$

y ye 0 verince $x = -3$ olur.

Mülakatçı: Tablo bu şekilde mi? Emin misin?

Nilgün: Evet. Eminim.

Mülakatçı: Peki. Ücret ile yol arasında cebirsel ifade?

Nilgün: $y = x + 3$ olur.

Mülakatçı: Neden öyle yazdın?

Nilgün: Her km 1 TL alıyor. $1x$, x e eşit oluyor. $+3$, $x+3$ de y ye eşit oluyor.

Mülakatçı: Güzel. Peki, bu ilişkiyi grafikte nasıl gösteririz?

Nilgün: (Grafiği tablodan faydalanarak çizmeye çalıştı.) Şimdi $(0, 3)$ dü. Ama gösterirken $(0, -3)$ ü gösterdi.

Mülakatçı: Emin misin grafikten?

Nilgün: Yok değilim. Yanlış aldım değerleri. İlkinde y değeri $+3$ dü ben -3 yaptım.

Mülakatçı: Tekrar çizebilirsin?

Mülakatçı: Şimdi emin misin?

Nilgün: Evet.

Mülakatçı: Grafikte dikkatini çeken bir şey var mı?

Nilgün: Orijinden geçmedi.

Mülakatçı: Neden?

Nilgün: Sadece kat değil. Toplama çıkarma var. O yüzden geçmedi.

Mülakatçı: Tamam. Peki ücret ile yol arasında bir ilişki var mı?

Nilgün: İlişki yok. Olmuyor yok. $x + 3$ eee.

Mülakatçı: Yani $x + 3$ mü? Ne demek o?

Nilgün: $y = x + 3$. Alınan yol ile açılış ücretinin fiyatı y ye ödenen paraya eşit.

Mülakatçı: tamam. Peki, taksi tarifesinde açılış ücreti olmasaydı, km si 1 km olsaydı değişiklik olur muydu?

Nilgün: olurdu.

Mülakatçı: Ne olurdu?

Nilgün: Orijinden geçerd. Sadece kat Olduğu için yani orijinden geçer doğruları kesmezdi.

Mülakatçı: Peki tamam. Açılış ücreti 3 olsaydı her km 2 TL olsaydı ne olurdu?

Nilgün: olurdu.

Mülakatçı: Nasıl?

Nilgün: $2x + 3$. Yani doğrunun yeri değişirdi. Yine keserdi. Orijinden geçmezdi ama yeri değişirdi. Mesela -3 değil de -6 mesela. Başka yerde keserdi. Noktalar değişirdi.

Mülakatçı: Tamam.



Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesini;
Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

a) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

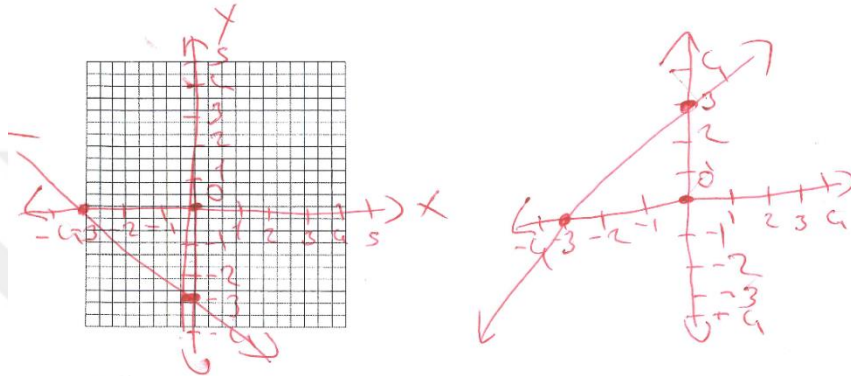
x	0	-3
y	+3	0

$$\begin{aligned} x+3 &= y \\ 0+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

b) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$x + 3 = y$$

c) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çiziniz.



Şekil 4.82. Nilgün'ün ikinci probleme ait çözümü

Nilgün'ün ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) ücret, yol ii) tablo, grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Nilgün 'ün bahsettiği “ücret” ve “yol” birer gerçek dünya bileşenidir. Nilgün'ün oluşturduğu tablo ve grafikler ise dönüşümdür. Fakat her ikisi de problem durumunu karşılamamaktadır.

➤ Nilgün, problemi okuduktan sonra tablo oluşturmadan önce yol ücret arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmeye çalışmıştır. Fakat değişkenlere hangi anlamları yüklediği ile ilgili bir açıklama yapmamıştır. Denklemi doğru bir şekilde kurduktan sonra, x ve y değerlerine 0 vermesi gerektiğini söylemiştir. Fakat bu işlemi neden yaptığının farkında değildir. Nilgün “eee nasıl yani? Gittiği km ve ödenen parayı bulmak için.” İfadeleri sadece stratejiyi uygulama eğiliminde olduğunu göstermektedir. Nilgün problem durumuna uymayan negatif değerleri düşünmeden işlemlerine devam etmektedir. Grafik çiziminde, tablodaki değerlere göre noktaları belirleyerek grafiğin

eksenleri kestiği noktaları birleştirmek suretiyle grafiği çizmiştir. Fakat problem durumuyla uygunluğunu kontrol etmemiştir. Nilgün araştırmacının ödenek ücret ve yol arasındaki ilişki ile ilgili sorusuna verdiği cevapla yaptığı işlemleri ezbere yaptığını da kanıtlamıştır. Nilgün'ün “İlişki yok. Olmuyor yok. $x+3$ eee” ifadesi bu durumu desteklemektedir. Problem durumunda değişiklik olması durumunda grafikte nasıl değişiklik olacağı konusunda ise “Orijinden geçerdi. Sadece kat olduğu için yani orijinden geçer doğruları kesmezdi” ifadelerini kullanmıştır. Bu yorumu Nilgün'ün denklem ve grafik arasındaki ilişkiyi rahatlıkla yorumladığını göstermektedir. Nilgün'ün akıl yürütme türü ise, AR akıl yürütme türü ile başlamış fakat problem durumundaki değişikliği yorumlayabilmesi açısından CR ile son bulmuştur.

➤ Nilgün, grafik çizimi ile ilgili “ x ve y ye 0 vererek çözüme gitme” prosedürünü bilmektedir. Bu yüzden zorlanmadan strateji seçimini yapmıştır. Çözüm stratejisini de rahatlıkla uygulamıştır. Nilgün'ün zorlanma sebebi belli bilgi birikimine sahip olmasına rağmen kavramsal eksikliklerinin olmasıdır. Yanlış çözüm yapan Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme türü, iki tip akıl yürütme türü ve yer yer yüzeysel yer yer derinlikli düşünce yapısının sergilenmesinden CR_{ylx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Nilgün'ün üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün'ün üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: (soruyu okudu. A ve B mumunu aynı tabloda göstermeye çalıştı.)

Mülakatçı: ayrı ayrı yapabilirsin

Nilgün: ayrı yapayım

Saatte 5 azalıyor, çıkaracağız.

Mülakatçı: Yani ne yaptın burada.

Nilgün: Azaldığını ifade ettik.

Mülakatçı: Peki her seferinde denklem değişti mi?

Nilgün: Sayılar değişti. Bir saatte 5 cm ise, 2 saatte 10 cm oluyor. 3 saatte 15 cm

Mülakatçı: Peki burada x neyi belirtiyor?

Nilgün: x saatte ne kadar azaldığı yok saati, evet saati.

Mülakatçı: Peki o zaman x in yerine herhangi bir saat verirse. Eee bu denklemlerin hangisini kullanarak buluruz boyunu.

Nilgün: İlkini.

Mülakatçı: Neden? İkinci, üçüncü olamaz mı?

Nilgün: Olabilir tabi. Fark etmez.

Mülakatçı: Yani bir durumla ilgili birden fazla denklem yazabilir miyiz?

Nilgün: eee farklı oldu. Değer versek, mesela 2 desek.

$30 - 5.2 = 20$ oluyor.

$30 - 10.2 = 10$ oluyor.

$30 - 15.2 = 0$ oluyor.

Evet öyle.

Mülakatçı: Hepsi sağlıyor mu?

Nilgün: Yani 20, 10, 0 kalıyor.

Mülakatçı: Yani 2 saat geçince her birimde farklı boylarda kaldı.

Nilgün: Evet.

Mülakatçı: Neden?

Nilgün: Azalıyor çünkü.

Mülakatçı: Ama hepsinde saat hep aynı. 2 saat.

Nilgün: Aaa olmadı o zaman. Eee 5, 10, 15 demiştik. Saatte 5 azalıyor. 1 desek, sonra altta 2 desek böyle 5 er azalıyor.

$$30 - 5x = 25$$

$$30 - 10x = 20$$

$$30 - 15x = 15$$

oluyor.

Mülakatçı: Yani böyle mi? (Henüz tamamlamadı tabloyu)

Nilgün: Evet. Nasıl yapacağız. A böyle oluyor. B yi yapayım.

Mülakatçı: A'nın tabloda sadece neyini görüyoruz?

Nilgün: A'nın ne kadar azaldığı.

Mülakatçı: Saatte ilgili ne görüyoruz. Yani A'nın tablosu bu mu?

Nilgün: Evet bu. B yi yapayım.

Mülakatçı: Tamam.

Nilgün: 20 var. 3 saatte 5 azalıyorsa 3 kere 5 15, -15 olur.

Mülakatçı: 3 saat geçiyor. 5 azalıyor. Bir 3 saat geçince tekrar 5 cm azalıyor.

Nilgün: 3 saatte demiş. Böleceğiz herhâlde. 3 saati 5 e bölssek. Eee 20-15

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Nilgün: Nasıl yapacağımı düşünüyorum. 3 saatte 5 cm ise $20 - 5x$ olur heralde. $20 - 5.3x$ oluyor evet. Eee yine aynı şey oluyor. 20-15x oluyor. eee şimdi 3 saatte 5 cm demiş. Saatte kaç olur? $20 - 15x$ dersek, $20 - 30x$ böyle gider.

Mülakatçı: Tablo böyle mi olmalı.

Nilgün: Emin değilim.

Mülakatçı: Neden?

Nilgün: Burada 1 desek, 20-30 eksi çıkıyor. Eee şöyle yapsak mesela, saate 5cm demiş saatte 5 cm azalsa artı birde 30 var $5x + 30$ oluyor. Eee saatte 5 cm ise, 2 saatte 20, sonra 15 oluyor. Evet öyle. A tamamda B 3 saatte 5 cm demiş. Eee tek saatini bulsak 180'i bölssek.

Mülakatçı: 180 ne?

Nilgün: 3 saat 180 dakika olur. $180/5=36$. 36 desek, saatte 36 cm olmaz.

Mülakatçı: 3 saatte 5 cm azalıyor. 6 saatte ne kadar azalır?

Nilgün: 30

Mülakatçı: 3 saatte 5, sonra 3 saat daha geçti.

Nilgün: 10 cm.

Mülakatçı: Bir 3 saat daha.

Nilgün: 15 cm. eee 20 cm vardı. $20-5x$, sonra $20=10x$ de işte. 3 saatte demiş. 3 desek $20-15=5$ kalıyor. 20-10.3, 20-30 oluyorsa eksili olur. ee o zaman 30 dan

20 çıkaralım. O zaman biter. 1 saat azaldı. 2 saat desek 2 saatte ne kadar azalıyor bilinmiyor. Eee... Yapamayacağım galiba.

Mülakatçı: Takıldın mı? İstersen devam edebiliriz. Geçelim istersen.

Nilgün: geçelim.



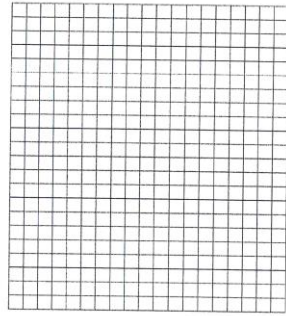
Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

A	B
saatte 5	30 00

A	B
30-5x	20-5x
30-10x	20-10x
30-15x	20-15x

b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çizin.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

Şekil 4.83. Nilgün'ün üçüncü probleme ait çözümü

Nilgün'ün üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) tablo ii) denklem iii) değişken bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Nilgün'ün problem durumuna uygun bir denkleme kuramadığı görülmüştür. Kurulan denklemler işlemi karşılamamakta ve matematiksel olarak anlamlı olmamaktadır. Nilgün'ün oluşturmaya çalıştığı tablolarda verilere uygun olarak hazırlanmamış matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Nilgün soruyu çözmek için tablo yaparak başlamıştır ve A ve B mumunu aynı tabloda göstermeye çalışmıştır. A mumu için, Nilgün soruda verilen “azalma” anahtar kelimesini dikkate alarak çıkarma yapacağını düşünmüştür. Fakat bu strateji her zaman doğru çözüme götüren bir strateji değildir. Nilgün’ün “*Saatte 5 azalıyor, çıkaracağız.*” cümleleri desteklemektedir. Nilgün tabloyu oluştururken denklem kurmaya çalışmıştır. Ve ilk olarak tabloya $30 - 5x$ yazmıştır. Ve herhangi bir açıklama yapmadan işlemlerini $30 - 10x$ sonrasında da $30 - 15x$ olarak devam ettirmiştir. Araştırmacının denklemlerin hepsinin farklı olduğu ile ilgili farkındalık yaratmak için müdahale etmiş olsa da Nilgün hatasının farkına varamamıştır. Nilgün’ün değişkene anlam yüklerken tereddüt yaşadığı “*x saatte ne kadar azaldığı yok saati, evet saati.*” ifadelerinden görülmektedir. Denklem yazarken problem yaşamıştır her bir denklemin de kullanılabileceğini ifade etmiştir. Nilgün’ün ne yaptığının farkında olmadan rastgele anlamsız işlemler yaptığı görülmektedir. Nilgün denklemleri doğru yazdığını düşünerek değer vererek doğrulamaya çalışmıştır fakat yaptığı hatanın farkına varamamıştır. Nilgün’ün “*eee farklı oldu. Değer versek, mesela 2 desek. $30-5 \cdot 2=20$ oluyor. $30-10 \cdot 2=10$ oluyor. $30-15 \cdot 2=0$ oluyor. Evet, öyle*” ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Nilgün’ün her bir denklemde aynı zamanı denemesine rağmen değerlerin azaldığını görmesi doğru yaptığını düşünmesine sebep olmuştur. Araştırmanın müdahalesiyle hepsinde 2 değerini kullanmış oldun demesi ile Nilgün yanlış yaptığını düşünerek yeni bir yanlışla devam etmiştir. Nilgün “*Aaa olmadı o zaman. Eee 5, 10, 15 demiştik. Saatte 5 azalıyor. 1 desek, sonra altta 2 desek böyle 5 er azalıyor. A böyle oluyor. B yi yapayım*” ifadeleriyle A mumunun tablosunu belirtmiştir. B mumu için ise, Nilgün düşüncesini “*20 var. 3 saatte 5 azalıyorsa 3 kere 5 15, -15 olur.*” şeklinde ifade etmiş. Araştırmacının soruyu tekrar okumasıyla Nilgün düşünmeye başlamıştır. Fakat nasıl yapacağından emin olmayan bir tavırla yine bir dizi matematiksel anlam ifade etmeyen işlemler yapmıştır. “*3 saatte demiş. Böleceğiz herhâlde. 3 saati 5 e bölsek. Eee 20-15. Nasıl yapacağımı düşünüyorum 3 saatte 5 cm ise $20-5x$ olur herhâlde. $20-5 \cdot 3x$ oluyor evet. Eee yine aynı şey oluyor. $20-15x$ oluyor. eee şimdi 3 saatte 5 cm demiş. Saatte kaç olur? $20-15x$ desek, böyle gider*” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Nilgün yaptığı işlemde emin değildir bir problem olduğunu deneme yaparak fark etmiştir. “*Burada $(20-30x)$ 1 desek, $20-30$ eksi çıkıyor. Eee şöyle yapsak mesela, saate 5cm demiş saatte 5 cm azalsa artı birde 30 var $5x+30$ oluyor. Eee 2 saatte 20, sonra 15*

oluyor. Evet öyle. A tamamda B 3 saatte 5 cm demiş. Eee tek saatini bulsak 180'i bölsek. 3 saat 180 dakika olur. $180/5=36$. 36 desek, saatte 36 cm olmaz" cümleleri Nilgün'ün aklına gelen her işlemi denediğini göstermektedir. Nilgün çözüm için denemelerine devam etmiş sonrasında ise devam edemeyeceğini anladığı için çözümü bırakmıştır. Nilgün'ün algoritmalar deneyerek bir dizi işlemleri yapması açısından AR akıl yürütme türüne sahip olduğu özelde ise, Nilgün'ün soruda verilen "azalma" anahtar kelimesini dikkate alarak çıkarma yapacağını düşünmesi yönüyle FAR akıl yürütme türüne sahip olduğu söylenebilir.

➤ Nilgün "azalma" kelimesine takılmıştır. Nilgün'ün denklem kurarken zorlanması ve değişkenlere anlam yükleyememesi Nilgün'ün kavramsal anlamasının zayıflığından kaynaklanmaktadır. Bu durum Nilgün'ün etkili tartışmalar gerçekleştirmeden sadece işlemler yığını olarak görülen bir çözümü yapmasına zemin hazırlamıştır. Nilgün'ün işlem denemeleri sonuç vermediği için Nilgün devam edemeyeceğini anlayarak karamsarlığa kapılmıştır ve çözümü yapamamıştır. Nilgün'ün bilgi birikiminin eksikliği ve yüzeysel bir bakış açısı sergilediği dikkat çekmektedir. Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme türü, çözüme ulaşamadığından, tek tip akıl yürütme ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden FAR_{xgy} olarak belirlenmiştir.

-Nilgün'ün dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Nilgün'ün dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Nilgün: Bu soruda çok zorlandım. Yaş verilmediği için. Ben yine 0 vererek yaptım.

Mülakatçı: Yani kan basıncı 0 olsun.

Nilgün: Evet.

$$0 = x/2 + 110$$

$$-110 = x/2$$

$$x = -55$$

oldu.

Mülakatçı: Yani x yaştı. Yaş -55 mi?

Nilgün: Yaş -55 olamaz. Eee -110, +110 olmalı. 55 desek. Eee işlem hatası

da yok. Eee. Aaa eksi diye gidiyor. -110 diye gidiyor. -110, -2 ye bölünce +55 oluyor. (Bölüm durumundaki 2 yi -2 diye karşıya geçirdi)

x e 0 verirse,

$$0/2 + 110 = y$$

$$y = 110$$

olur.

Çizelim. 5 erli gidecek. Küçük küçük yazıyorum.

Mülakatçı: Belli yerden sonrasında çizsen olur.

Nilgün: Şimdi 55 di. $x=55, y=110$ oldu. Birleştirtince nokta belli olur. Grafikte böyle olur. Orijinden geçiyor.

Mülakatçı: peki doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Nilgün: Doğru çizdim. Noktası burası. Doğru çizdim.

Mülakatçı: Kan basıncı 145 olan birimin yaşı nedir?

Nilgün: 110 yaşındaki birinin 55 ise, $110/55 = 2$ oldu. Yani tek birinin 1

yaşındaki birinin kan basıncı 2 oluyor. 145 le de 2 yi çarpınca 290 olur.

Mülakatçı: Yani kan basıncı 145 olan birinin yaşı 290 mı?

Nilgün: Evet yani 145 i 2 ye bölemiyorum. Toplasam olmaz yani 290.

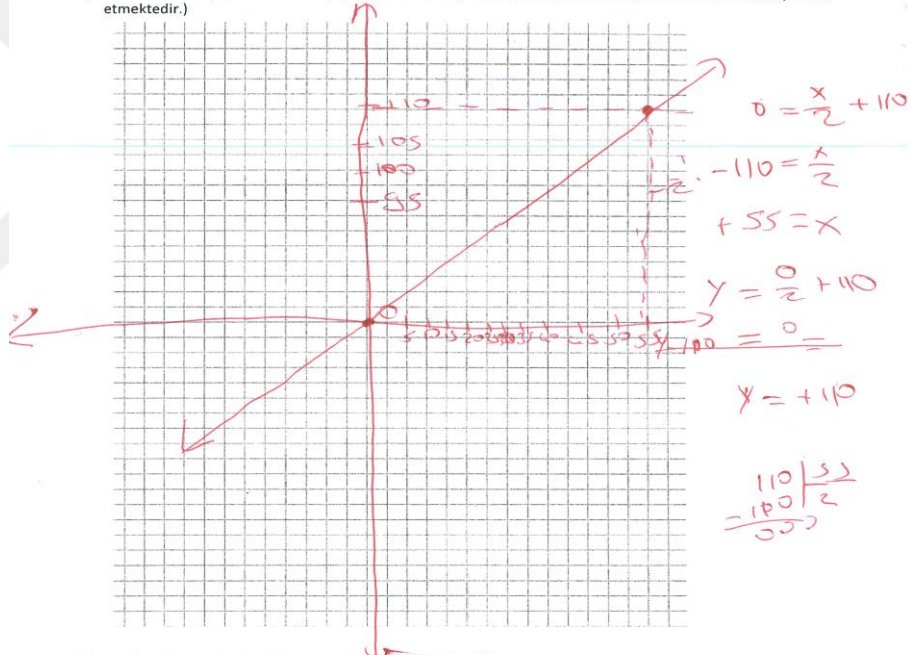
Mülakatçı: Emin misin?

Nilgün: Evet.



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

- a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



- b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

$$\begin{array}{r} 145 \\ \times 2 \\ \hline 290 \end{array}$$

Şekil 4.84. Nilgün'ün dördüncü probleme ait çözümü

Nilgün'ün dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Nilgün'ün bahsettiği “kan basıncı” ve “yaş” gerçek dünya bileşenidir. Nilgün'ün çizdiği grafik bir dönüşümdür fakat problemi karşılamayan hatalı çizilmiş bir grafik.

➤ Nilgün soruyu okuduktan sonra, zorlandığını ifade etmiştir ve x ve y değişkenlerine 0 değeri vererek yapmaya çalışmıştır. Nilgün'ün aklında grafik çizimi ile ilgili bir algoritma mevcuttur. Bu durumu Nilgün'ün “*Bu soruda çok zorlandım. Yaş verilmediği için. Ben yine 0 vererek yaptım*” ifadeleri desteklemiştir. Araştırmacının yani kan basıncına mı 0 değerini veriyorsun sorusu hatasını anlamasına yetmemiştir. Nilgün işlemini sürdürmüştür. x değerini bulduktan sonra araştırmacının sorusuyla olmadığını fark etmiştir. Fakat Nilgün ne yaptığının farkında değildir. İşlem hatası yapmadığını düşünmektedir. Hatasının sebebini araması farklı işlem hatalarını da beraberinde getirmiştir. Bu durumu Nilgün'ün “*Yaş -55 olamaz. Eee -110, +110 olmalı. 55 desek. Eee işlem hatası da yok. Eee. Aaa eksi diye gidiyor. -110 diye gidiyor. -110, -2 ye bölünce +55 oluyor. (Bölüm durumundaki 2 yi -2 diye karşıya geçirdi)*” ifadesi desteklemektedir. Nilgün matematiksel olarak anlamlı olmayan işlemleri birbirini izlemektedir. İşlemlerine x e 0 vererek devam etmiştir. y nin 110 değerini aldığını bulmuştur. Sonrasında grafik çizimine geçmiştir. Grafik çiziminde, eksenlere değerleri 5 er 5 er yazmıştır x ekseninde 5 den başlamıştır ve y ekseninde de 95 den başlayarak yine 5 er 5 er artırmıştır. Sonrasında ise, $x=55$ ve $y=110$ değerlerini birleştirmiştir. Nilgün x e ve y ye 0 vererek bulduğu değerleri birleştirerek tek nokta gibi düşünmüştür ve tek bir noktaya dayanarak bir grafik çizmiştir. Grafiğin orijinden geçtiğini ve doğru çizdiğini belirtmiştir. B şıkkında ise, Nilgün 55 ve 110 arasındaki kurduğu ilişkiyi 145 içinde denemiştir. 55 110 un yarısı olduğu için 145 i de 2 ile çarpmıştır. Araştırmacının “*Yani kan basıncı 145 olan birinin yaşı 290 mı?*” sorusu ile hala hata yaptığının farkına varmamış üstelik ifadeleriyle amaçsız rastgele işlemler yaptığını kanıtlamıştır. Bu durumu Nilgün'ün “*Evet yani 145 i 2 ye bölemezim. Toplasam olmaz yani 290.*” ifadeleri desteklemektedir. Nilgün'ün akıl yürütme türü MR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Nilgün'ün zorlanmasının nedeni Nilgün grafik çizerken x ve y ye 0 değerinin verileceği bilgisine sahiptir fakat bu durumu problem durumu ile bağdaştırmadan direk

ezbere uygulama eğilimindedir. Etkili tartışmalar ve açıklamalar yapmaktansa, rastgele işlemler bütünü ile sonuca ulaşmaya çalışmaktadır. Nilgün'ün ne yaptığının farkında olmadığı ve genel olarak yüzeysel bir düşünce yapısı olduğu görülmektedir. Yanlış çözüm yapan Nilgün'ün matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden MR_{ygy} olarak belirlenmiştir.

Nilgün'ün “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.18’de gösterilmiştir.

Tablo 4.18.

Nilgün'ün “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Nilgün	AR_{dgy}	CR_{ylx}	FAR_{xgy}	MR_{ygy}

Tablo 4.18 incelendiğinde, Nilgün'ün incelenen beş problemin birinde algoritmaya dayalı, birinde yaratıcılığa dayalı, birinde bilinen algoritmaya dayalı ve sonucunda ise ezbere dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Nilgün sadece birinci probleme doğru cevap verirken, ikinci problem hariç diğer problemlerde global akıl yürütme sergilemiştir. Nilgün akıl yürütme sürecinde tüm sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.7. Ece'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Ece'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Soru ile ilgili ne düşündün?

Ece: (soruyu okudu). Ya ben aslında çok dikkat etmem de genelde tek dikkat ettiğim ilk önce x i yazıp sonra y yi yazmak yani bunları (koordinatları) buldum ondan sonra ve bitirdim.

Mülakatçı: sıralı ikili ne demek?

Ece: burada var mı ki. Bilmiyorum ona dikkat etmedim.

Mülakatçı: peki bir noktanın koordinatı ne demek?

Ece: koordinatı eee yeri mi? evet yeri galiba.

Mülakatçı: peki koordinat sistemi deyince ne aklına geliyor ne demek?

Ece: şu şekil (sorudaki koordinat sistemini göstererek) aklıma geliyor. Değer vermek aklıma geliyor. x ve y geliyor sonra eee bu kadar.

Mülakatçı: peki orijin eğer havuz bası değil de ev seçilseydi koordinatlarda değişiklik olup olmayacağı konusunda ne söylersin?

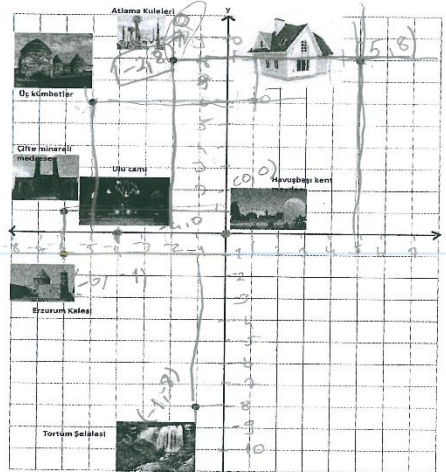
Ece: ya bence zaten havuz başındansa evi seçmelilerdi. Sonuçta başlangıç noktası orası. Evet değiştirdi koordinat eksenini ya işte bence su şekilde

sunu(havuz basını) kaldırıp şuraya(ev) getirdiğimizde sonuçlar tabiki değişiyor.

Mülakatçı: bir tane örnek olarak birindeki değişimi gösterebilir misin?

Ece: tabiki. (Evin olduğu bölüme eksen çizdi) (x ekseninin sol tarafına doğru saydı) x , 9 ve şurada 0. yok burası (x) 0 eee (0,0) olurdu yok ya orijin olamaz ki.(tekrar baktı) 9 değil 7 buralar (x eksenini sol tarafını göstererek) 0 bence (9,0) dır.

Mülakatçı: tamam



Kaan ve Nur tatilde Erzurum'da yaşayan Ahmet amcalarını ziyarete gideceklerdir. Amcaları önceden gezdireceği tarihi mekanları tespit etmiş ve Havuzbaşı kent meydanını orijin olacak şekilde işaretlemiştir.

- a) Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.

Bölmeleri esit yapmalıyız

x 'i önce y 'yi sonra yazmamız gerektiriyor

Atılma kulesi = (2,8) ulu camii = (-4,0) Havuzbaşı
Öz kumbetler = (-5,6) Erzurum Kalesi = (-6,-1) (0,0)
Çift minareli mescitler = (-6,4) Tortum Selsisi = (-7,8) Ev (6,8)

- b) Eğer orijin olarak Havuzbaşı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekanların koordinatlarında değişiklik olur muydu? Neden? Açıklayınız.

Evet. Koordinat eksenini taşıyıp getirdiğimizde sonuç; tarihi mekanların koordinatları değişir.

Şekil 4.85. Ece'nin birinci probleme ait çözümü

Ece'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) koordinat ii) koordinat sistemi iii) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ece sıralı ikili kavramını duymadığını belirtmiştir. Koordinat ile ilgili “*koordinatı eee yeri mi? evet yeri galiba*” ifadeleri matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Koordinat sistemi ile ilgili “*,” şu şekil (sorudaki koordinat sistemini göstererek) aklıma geliyor. Değer vermek aklıma geliyor. x ve y geliyor sonra eee bu kadar.*” ifadeleri tam anlamıyla açıklayıcı değildir o yüzden matematiksel kabul edilebilir değildir.

➤ Ece koordinatları yazarken zorlanmamıştır. Koordinatları yazarken nelere dikkat ediyorsun sorusuna cevap olarak “*ya ben aslında çok dikkat etmem de genelde tek dikkat ettiğim ilk önce x i yazıp sonra y yi yazmak yani bunları (koordinatları) buldum ondan sonra ve bitirdim*” ifadelerini kullanmıştır. Ece, koordinat sistemi ile ilgili sıralı ikili kavramını bilmediğini “*burada var mı ki. Bilmiyorum ona dikkat etmedim*” cümleleriyle ifade etmiştir. Ece'nin sıralı ikililerle işlem yaptığının farkında olmadığı görülmüştür. Koordinat sorulduğunda ise emin olmayan bir tavırla araştırmadan destek bekler tavrıyla “*koordinatı eee yeri mi? evet yeri galiba*” cümlelerini söylemiştir. Bu durum Ece'nin kavramsal anlamasının eksikliğinden kaynaklanabilir. Ece koordinat ekseninin ise, “*şu şekil (sorudaki koordinat sistemini göstererek) aklıma geliyor. Değer vermek aklıma geliyor. x ve y geliyor sonra eee bu kadar*” olarak tanımlamıştır. b şikkında ise, orijinin değişmesi ile ilgili “*ya bence zaten havuz başındansa evi seçmelilerdi. Sonuçta başlangıç noktası orası. Evet değişirdi koordinat eksenini ya işte bence su şekilde sunu(havuz basını) kaldırıp şuraya (ev) getirdiğimizde sonuçlar tabiki değişiyor.*” olarak fikrini açıklamıştır. Fakat orijinin yerinin değişmesini mekânların taşınması olarak algılamıştır. Sonrasında atlama küllerinin koordinatlarındaki değişimi bulmaya çalışmıştır. Bulurken tereddüt yaşamıştır. “*tabiki. (Evin olduğu bölüme eksen çizdi) (x ekseninin sol tarafına doğru saydı) x, 9 ve şurada 0 .yok burası (x) 0 eee (0,0) olurdu yok ya orijin olamaz ki.(tekrar baktı) 9 değil 7 buralar (x eksenini sol tarafını göstererek) 0 bence (9,0) dır.*” Bu durumu destekler niteliktedir. Ece'nin koordinat sistemi ile ilgili kavramsal açıdan bilgi eksikliğinin olduğu ve yaptığı işlemlerin mantıklı açıklamalarını yapamadığı görülmüştür. Bu açıdan düşünüldüğünde, AR akıl yürütme türüne yakın olduğu söylenebilir.

➤ Ece koordinatları yazarken zorlanmamıştır. Bu durumun sebebi Ece'nin belli bilgi birikimine sahip olmasıdır. Fakat Ece'nin genel olarak yüzeysel bir düşünce yapısına sahip olduğu ve kavramsal alt yapısının zayıf olduğu görülmektedir. Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ece'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soruyla ilgili ne düşündün?

Ece: Ben bunu şeye benzetim. Bir tarife sorusu vardı ona benzettim. İlişki eee şimdi mesela x ödenecek ücret diye alınan yol ise y yaptım. Eee ödenecek ücret şey x e 3 verdim mesela. Şimdi birde ücret olarak 3 TL. eee nasıl yapmıştım ki.

Mülakatçı: Tekrar yapabilirsin. Bağımsızda yapabilirsin.

Ece: Haa evet. Şimdi x e pardon x e yol bunlarda (tabloda sağ sütunu gösteriyor) açılış ücreti ile ödenecek fiyat mesela 3 km gitseydi 3 km x zaten. Birde açılış ücretini ekledim. 3+3 şeklinde eğer 12 km gitseydi 12+3 olurdu. 11 km gitseydi 11+3 olurdu. Bu şekilde yaptım bu soruyu.

Mülakatçı: Peki tablodaki veriler arasında bir ilişki fark edebildin mi?

Ece: Evet.

Mülakatçı: Nasıl bir ilişki?

Ece: +3 yani $3x + 3$

Mülakatçı: Hı Hı. Peki, ücret ile yolun cebirsel ilişkisini nasıl ifade edersin?

Ece: Bence bu yanlış bana göre şuan. (kâğıtta $3x + 1$) yazıyor.

Mülakatçı: Nasıl olmalıydı?

Ece: Km ye bence x açılış ücreti olarak +3, $x + 3$ bence bu şekilde olmalıydı. Sonuçta km x , açılış ücreti de 3 onu eklememiz gerekirdi.

Mülakatçı: Peki $x + 3$ ü bulunca neyi elde etmiş olacaksın?

Ece: Bunun cebirselini yani eee eve gitmek için taksi kullanmanın fiyatı.

Mülakatçı: Peki. Bu ilişkiyi grafik olarak gösterme istersen nasıl bir grafik çizersin?

Ece: Ben böyle çizdim. Bu tablo olarak bu grafik olarak. 1+3 de 1 olurdu. 2+3 de 2, 3+3 de 3, 4+3 de 4 olurdu. Böyle bir şey çıktı.

Mülakatçı: Peki bu grafikte x eksenini neyi belirtiyor. Ye eksenini neyi belirtiyor.

Ece: Burada (ekseni gösteriyor) x , bura (y eksenini gösteriyor) bura (x) toplam fiyat, bura (y) km başına düşen fiyat.

Mülakatçı: peki grafiği doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Ece: Bence yanlış. Bence böyle değişiklik oluştu. Başka bir fikrimde yok. Ne yalan söyleyeyim bende öyle yaptım.

Mülakatçı: Hangi açıdan yanlış olduğunu düşünüyorsun? Neyi yanlış olmuş olabilir?

Ece: 1+3 1, 2+3 2 o biraz mantıksız olmuş

Mülakatçı: Nasıl yapabilirsin peki doğrusunu?

Ece: İşte onu da bilmediğim için böyle yaptım.

Mülakatçı: Peki. Ödenecek ücretle yol arasında nasıl bir ilişki var?

Ece: Bence aynı gibidir. Ama tek fark açılış ücreti olarak 3 TL ekleyeceğiz. Yani mesela benim evimle aram 1 km, 1 km ne kadar oluyor. 1 TL bir de açılış ücreti olarak da 3+1 öderiz. +3. 4 TL eder. Aynı değil aslında farklı.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti olmasaydı fakat 1 km başına 1+1 alınsaydı grafikte değişiklik olur muydu?

Ece: Evet olurdu. Mesela bu grafikte (c şikkındaki) 1+3 3 leri hep iptal ettim. 1, 2, 3 şeklinde oldu.

Mülakatçı: Peki grafik yine aynı şekilde mi olurdu? Çizersek.

Ece: Evet doğrusu aynı şekilde olurdu.

Ama 3 TL fark olurdu. Toplam fiyatta.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti 3 TL ama km başına 2 TL alınsaydı?

Ece: Bence daha pahalı olurdu. Yani sonuçta açılış ücreti değişmiyor ama 2 TL değişiyor. 1 km gidiyoruz. 2+1 olurdu toplam 5 TL olurdu.

Mülakatçı: Evet bu fark grafikte nasıl bir değişikliğe sebep olurdu?

Ece: Bu (y yi gösteriyor) km yine bu da (x i gösteriyor) 2, 4, 6 şeklinde olurdu bu sefer.



Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesini;

Açılış ücreti olarak 3 TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

	X	Y
$x=3$	3	$3+3$
$x=12$	12	$12+3$
$x=11$	11	$11+3$
$x=4$	4	$4+3$
$x=1$	1	$1+3$

3 km

$y = 3 + 1 \cdot x$ ücreti de

$x = 7$ alı, 3 ücreti

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$3x + 1$$

$$x + 3$$

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çiziniz.



Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersiniz. Neden.

Aynı tkt fark ücrette 3+4 eklenir. Farklı

Taksi tarifesini, açılış ücreti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

Evet

Aynı gibi ama aynı değil. açılış ücreti 3 TL olur. 3 TL ücret sadece km başına 1 TL

Taksi tarifesini açılış ücreti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

Evet daha pahalı olurdu.

Şekil 4.86. Ece'nin ikinci probleme ait çözümü

Ece'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) grafik, tablo ii) yol, ücret bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ece'nin oluşturduğu tablo ve grafikler problem durumunu karşılamayan matematiksel olarak kabul edilemez birer dönüşümdür. Problemden geçen ve Ece'nin de değişkenlere anlam yüklerken bahsettiği “yol” ve “ücret” ise birer gerçek hayat bileşenidir.

➤ Ece soruyu okur okumaz benzer tarzda bir soru hatırladığını ifade etmiştir. Sonrasında ise, değişkenlere anlam yükleyerek işlemlerine başlamıştır. Tabloyu x e rastgele değerler vererek oluşturmuştur. Belirli bir düzen oluşturarak gitmemiştir. Yol

ve ücret arasındaki ilişki ile ilgili cebirsel ifadeyi $3x + 1$ olarak ifade eden Ece bu cevabını yanlış olduğunu fark ederek tekrar bir cebirsel ifade yazmıştır. Grafik çiziminde ise, koordinat sisteminde x eksenine 1+3, 2+3, değerlerini yazmıştır y ekseninde ise 1,2,3,4 değerlerini yazmıştır. Ece ne yaptığının farkında olmadan ve etkili tartışmalar gerçekleştirmeden işlemler yapmaktadır. Hâlbuki değişkenlere anlam yüklerken x için gidilen yol ve y değişkeni için ise ödenecek ücret anlamını kullanmıştır. Fakat grafik çiziminde bu duruma dikkat etmemiştir. Sonrasında ise, tablodaki değerleri grafikte birleştirerek grafiği çizmiştir. Grafiğin eksenleri kesip kesmediği ile ilgili durumları göz ardı etmiştir. Ece'nin “ *Burada (ekseni gösteriyor) x, bura (y eksenini gösteriyor) bura (x) toplam fiyat, bura (y) km başına düşen fiyat.*” ifadelerinden grafik çizerken eksenlerin hangi boyutu göstereceği ile ilgili sıkıntı yaşadığı görülmektedir. Çizdiği grafikte orijinden geçen bir grafik çizmiştir. Ece çizdiği grafiğin doğrulundan emin değildir. Ece'nin “*Bence yanlış. Bence böyle değişiklik oluştu. Başka bir fikrimde yok. Ne yalan söyleyeyim bende öyle yaptım.*” ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Grafikte x eksenine üzerine yazdığı değerlerde yanlışlık olduğunu fark etmiştir fakat düzeltmemiştir. Yol ve ücret arasında ilişki olup olmadığı ile ilgili sadece nicelik olarak değerlendirme yapmıştır ve farklı olduklarını söylemiştir. Problem durumu ile ilgili değişiklik olması durumunda ise, değişiklik olacağını düşünmektedir fakat grafikte sadece değerlerin değişeceğini doğrunun aynı kalacağını ifade etmiştir. Ece etkili tartışmalar yapmadan hatırladığı bir soruyu baz alarak işlemler yapmıştır. Ece'nin akıl yürütme türü, MR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Ece tablo oluştururken zorlanmadan işlemlerini yapmıştır. Fakat notasyonlara dikkat etmemiştir. Ece'nin zorlanmamasının sebebi belli bilgi düzeyine sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Fakat Ece kavramsal olarak zayıf bilgiye sahip olduğundan kendinden emin olamamaktadır. Ece'nin grafikte hata yaptığını düşünse bile doğrusunu gösterecek kadar bilgi sahibi değildir. Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, hatalı işlemler yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden MR_{yy} olarak belirlenmiştir.

-Ece'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: peki mum sorusuyla iliği ne düşündün?

Ece: Normal bir soru gibi. Zor muydu zor değildi. Hocamızın verdiği gibi mum vermişti. Resim vermişti. Zekâ testiydi.

Mülakatçı: Nasıl yaptın? A şıkkında boy-zaman ilişkisin tabloyla ifade edin demiştik.

Ece: Ben önce A yi yaptım Sonra B yi yaptım. (soruyu okudu) dakikaya x, boya y dedim. A da boy 30 cm diyor. Eğer 10 dk. yazsa 20 cm, 11 yazsa 19 cm, 12 dk. yazsa 18 cm. B de 20 cm, 10 dk. yazsa 10 cm, 11 dk. yazsa 9 cm, 9 dk. yazsa 11 cm boyu kalırdı.

Mülakatçı: Birer birer mi azalıyor?

Ece: Eee 5 cm azalıyor ama nasıl diyeyim ki 5, 10, 15 (dk. gösteriyor) yapsaydım grafik çizerken zor olurdu diye o kadar büyük değer vermek istemedim mi. Ya aynı azalıyor ama ben mantığı söyleyeyim. Tek fark bunun boyunun 30 bunun boyunun 20 cm olması. Grafiği de farklı olurdu.

Mülakatçı: Nasıl olurdu?

Ece: Nasıl olurdu eee düşüneyim. Dk 5 olsaydı 25 kalırdı. 10 olsaydı 20 kalırdı. 15 olsa 15 kalırdı bu A.

A	5	25
	10	20
	15	15

B yi de yapayım. 5 olsa 15. 10 olsa 10. 15 olsaydı 5.

5	15
10	10
15	5

Ama iste bunu grafikte nasıl göstereceğiz o konuda bir fikrim yok.

Mülakatçı: Eee yani kafanı karıştıran şey ne? Grafikte nereye hangi değeri yazman gerektiğini mi anlamadın?

Ece: Ya şimdi dk. ya x verdim. Buna y verdim 5 i buda (x eksenini gösteriyor) bulurdum. O zaman 25 i de buradan (y yi gösteriyor) bulurdum. Bu şekilde bu sonuç çıkardı.

Mülakatçı: Peki yine grafik bunun benzeri mi olacaktı, aşağı doğru mu olacaktı?

Ece: Evet.

Mülakatçı: Neden?

Ece: eee mesela deneyeyim. Burası 10 olsa (x i gösteriyor) yine şuralarda (y de gösteriyor) bir sonuç çıkacaktı. Evet, neden azalıyor. Başka eee.

Mülakatçı: Peki güzel. Yandaki grafiği anlayamadım. O B mumunun grafiği mi?

Ece: Evet. Bu A, bu B. Ama olmamış sanırım. Bu (x eksenini üzerinde 5 er 5 er saydı. 45, 55 e geldi. Duraksadı sonra 1, 2, 3 diye saydı) Haa 1 er 1 er artırmışım. Mesela 11 olsaydı buradan (y den) 9 buldum. Yok buradan (x) 11 i. Mesela şunu önce yapmışım. 11 olsa 9 ü bulurdum ama yanlış bulmuşum. X ile y yi karıştırmışım ben. Evet karıştırmışım. Yine bu doğru aynı çıkardı da şuralardaki (noktaları gösteriyor) farklı çıkardı. Mesela 9 böyle uzardı. Burada (daha yukarıyı gösteriyor) gelirdi. Bu şekilde buna göre mi (eski tablo) buna göre (yeni değerler) mi yapayım ben.

Mülakatçı: Hangisine göre yapmak daha doğru senin için?

Ece: Bence bu (yani değerler) bu kâğıda yapayım mı?

Mülakatçı: O zaman.

Ece: B yi yapayım.

Mülakatçı: Tamam B nin grafiğini çiziyoruz.

Ece: (grafik çizdi değerler yazıyor)

Eee x de 5 i bulurdum. 25 e çıkardım. X de 10 bulurdum. 20 ye çıkardım. 15 e 15 çizince bu B

Mülakatçı: Peki A nın boy-zaman ilişkisini gösteren denklemi sorduk?

Ece: $x-5$

Mülakatçı: x neyi ifade ediyor orada?

Ece: x mumun boyunu. Yok, mumu yok. Mumun boyunu 5 de azalmasını.

Mülakatçı: Bu haliyle bir denklem olur mu?

Ece: Olur. Bu bir denklemdir. Mesela x e 30 veririz. $30-5=25$, mesela burada da (yukarıda) bulmuştuk. 5, 25 öyle.

Mülakatçı: Tamam.



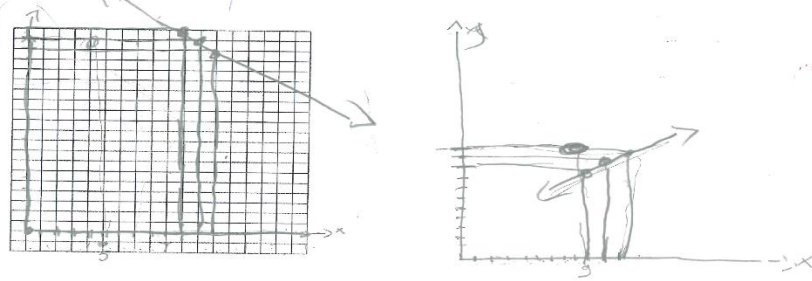
Boy 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

dh x	boyu
10	20
11	19
12	18

dh x	boyu
5	25
10	20
15	15

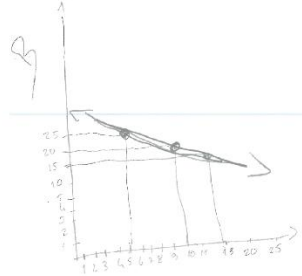
b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çiziniz.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

$x-5$

$x-5$



Şekil 4.87. Ece'nin üçüncü probleme ait çözümü

Ece'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) boy, zaman ii) tablo iii) grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ece'nin belirttiği “boy” ve “zaman” gerçek hayat bileşenidir. Ece'nin oluşturduğu tablo ve grafikler problem durumunu karşılamamaktadır. Bu işlemler matematiksel olarak kabul edilebilir değildirler. Ece'nin kurduğu cebirsel ifade bir denklem değildir bu yüzden kabul edilebilir bir özellik değildir.

➤ Ece ilk olarak değişkenleri belirleyerek ve değişkenlere anlam yükleyerek işleme başlamıştır. Sonrasında ise rastgele değerler vererek mumların boyundaki değişimi yazmıştır. Fakat Ece'nin “*Hocamızın verdiği gibi mum vermişti*” ifadesi sorudan daha önceden haberdar olduğu benzeri ile karşılaştığını göstermektedir. Ece'yi tabloyu oluştururken “*Dakikaya x , boya y dedim boy 30 cm diyor. Eğer 10 dk. yazsa 20 cm, 11 yazsa 19 cm, 12 dk. yazsa 18 cm. B de 20 cm, 10 dk. yazsa 10 cm, 11 dk. yazsa 9 cm, 9 dk. yazsa 11 cm boyu kalırdı.*” çözümünü yapmıştır. Fakat Ece problemde verilen bilgileri göz önüne almadan ilk iki dakikada mumun boyunda 5 er cm azaltma yapmıştır fakat sonrasında dakikada 1cm azaltmaya başlamıştır. Araştırmacının 1 er 1 er mi azalıyor sorusuna ise “*Eee 5 cm azalıyor ama nasıl diyeyim ki 5, 10, 15 (dk. gösteriyor) yapsaydım grafik çizerken zor olurdu diye o kadar büyük değer vermek istemedim*” ifadelerini kullanmıştır. Ece'nin mumun bitme ihtimalini düşünmeden sanki çok büyük değerlerle işlem yapması gerekiyormuş gibi kendisinin problemde bağımsız işlemler yaptığı görülmüştür. Ece'nin oluşturduğu tablo problemi karşılamaktadır. B şıkında grafik çiziminde ise, yazdığı değerleri grafikte nasıl göstereceği konusunda tereddüt yaşamıştır. A ve B mumunun grafiklerini ayrı ayrı çizmiştir. A mumunun grafiğinde azalan bir grafik çizmiştir fakat grafikte eksenlere herhangi bir değer yazmamıştır “*Ya şimdi dk. ya x verdim. Buna y verdim 5 i buda (x eksenini gösteriyor) bulurdum. O zaman 25 i de buradan (y yi gösteriyor) bulurdum. Bu şekilde bu sonuç çıkardı*” ifadelerini kullanmıştır. Fakat Ece'nin çizdiği grafik problem durumunu ifade eden bir grafik değildir. B grafiğinde ise, yine rastgele değerlere göre işlem yapmıştır fakat yanlış yaptığı düşüncesiyle hangi değerlere göre (ilk çizdiği tablo ve ikinci kez yazdığı değerler) yapacağını bilememiştir. Sonrasında çözüm için, bir seçim yapmıştır ve tekrar grafik çizmeye başlamıştır. Yine azalan bir grafik çizmiştir fakat B mumunun boyunun 20 olduğunu ve her 3 saatte bir 5 cm azaldığını dikkate almamıştır grafiğin eksenleri

hangi noktalarda kestiğini de göstermemiştir. Ece c şıkında ise, bir denklem kuramamıştır. Ve $x - 5$ cevabını vermiştir. Ece'nin değişkenle ilgili ifadeleri değişkene anlam yüklemeye sıkıntıları olduğunu göstermektedir. Ece'nin “*x mumun boyunu. Yok. Mumu yok. Mumun boyunu 5 de azalmasını*” İfadeleri bu durumu desteklemektedir. Ece'nin denklemin ne demek olduğu ile ilgili bilgi eksikliğine sahip olduğu görülmektedir. Ece'nin “*Olur. Bu bir denklemdir. Mesela x e 30 veririz. $30-5=25$, mesela burada da (yukarıda) bulmuştuk. 5, 25 öyle*” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Ece'nin etkili tartışmalar ve açıklamalar geliştirmeden işlemler yaparak ilerlemesi yönüyle MR akıl yürütme türüne sahip olduğu söylenebilir.

➤ Ece değişkenleri seçme ve değişkenlere anlam yükleme konusunda zorlanmıştır ve problemten bağımsız düşünerek işlemlerini ilerletmiştir. Bu durumun sebebi Ece'nin kavramsal anlamasındaki eksiklikten kaynaklanmaktadır. Ece'nin b şıkında grafiklerin aynı koordinat sistemi üzerinde çizilmesi istenmesine rağmen, Ece zorlanacağı düşüncesiyle ayrı ayrı grafik çizmiş olabilir. Ece'nin A mumu için azalan bir grafik çizdiği fakat üstünkörü rastgele değerler ile çizim yaptığı görülmüştür. Herhangi bir tartışma ve açıklama yapmadığı için hata yaptığını da düşünmemiştir. Ece'nin ezbere rastgele işlemler yaptığı, ne yaptığının farkında olmadığı, problemten bağımsız düşünme süreci geliştirdiği ve genel olarak yüzeysel bir bakış açısına sahip olduğu söylenebilir. Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru sonuca ulaşıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme tarzı sergilendiğinden MR_{yyg} olarak sınıflandırılmıştır.

-Ece'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Ece'nin dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Kan basıncı sorusu ile ilgili nasıl düşündün?

Ece: Denklemleri anladım da grafiğinde sıkıntı oldu.

Mülakatçı: Değer vermişsin gördüğüm kadarıyla.

Ece: Evet değer verdim. X dediğim yaş oldu. 10 yaşında biri için 10 ü 2 ye

böldüm 5. Bir kere bunu ($x=10$, 130) yanlış bulmuştum. $10/2=5$, $110+5$ eklersek 115 şeklinde. 5 yaşında biri için $5.2=2.5$, $110+2.5$, 112,5 ($x=5$ 120) bura da yanlış 15 yaşında biri için 15 i 2 ye bölerdim.7,5

$$110 + 7,5 = 117,5$$

Mülakatçı: Peki grafiği nasıl çizerdin.

K. Buradan x , buradan 10 u bulurdum. Buradan da (y den) 112 ile 113 arasını işaretlerdim. Birleştirdim. Buradan (x den) 5 bulurdum. Y den 112,5 bulurdum. Böyle bir (çizdiğini gösteriyor) doğru çıkacak ama sonuçlar burada değişecek. Burayı yanlış yapmışım.

Mülakatçı: Tamam, Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl buldun?

Ece: 145 den 110 u çıkardım 35. Mesela ters işlem problemleri gibi 35 i de 2 yi çarptım 70. Sonrada sağlamasını yaptım.

$$70/2 = 35$$

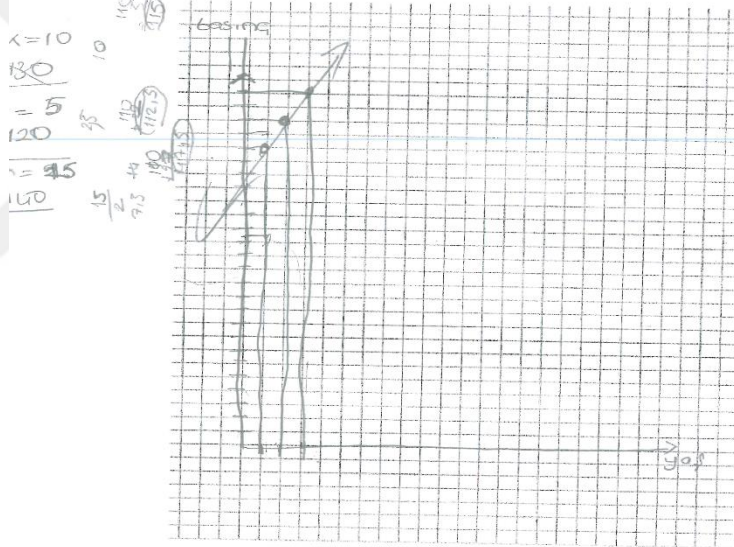
$$35 + 110 = 145$$

olur.



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

145
110

35

145-110=35
35*2=70

145 önce 110 çıkarılır
35
x/2 ters orantılı
gibi düşünülürse
35*2=70

35
2

70

Şekil 4.88. Ece'nin dördüncü probleme ait çözümü

Ece'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Ece'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) grafik iii) ters işlem problemleri bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Ece'nin “yaş” ve “kan basıncı” diye adlandırdığı ifadeler birer gerçek yaşam bileşenidir. Ece'nin çözüm yaptıktan sonra bulduğu 70 in yaş olduğunu söylememesi modelleme özelliğinin tamamlanmamasına sebep olmuştur. Ece'nin çizdiği grafik ise, bir dönüşümdür ve bazı eksikliklere sahiptir. Ece'nin bahsettiği ters işlem problemleri ise matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. Fakat geriye doğru yapma diye problem çözme yaklaşımı vardır.

➤ Ece değer vererek çözüm yapmaya başlamıştır. x için 5,10,15 değerlerini denemiştir. Sonrasında ise bulduğu değerlere göre grafiği çizmeye başlamıştır. Fakat grafikte eksenler üzerinde herhangi bir değer yazmamıştır ve grafiğin eksenleri kesip kesmediği ile ilgili yorum yapmamıştır ve grafiğin eksenlerin negatif kısmında değer alıp almayacağını dikkate almamıştır. B şikkında ise, ters işlem problemlerine benzettiğini ve bu şekilde çözüm yaptığını belirtmiştir. Bu durumu Ece'nin “145 den 110 u çıkardım 35. Mesela ters işlem problemleri gibi 35 i de 2 yi çarptım 70. Sonrada sağlamasını yaptım” ifadeleri desteklemektedir. Ece'nin akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Ece belli bilgi birikimine sahip olduğu fakat kavramsal anlamasında eksiklik olduğundan bazı önemli noktaları kaçırmıştır. Ece'nin etkili tartışmalar ve açıklamalar yapmadan direk işlem odaklı bir yaklaşım sergilemesi yüzeysel düşünce tarzına sahip olduğunu göstermektedir. Ece'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

Ece'nin “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.19'da gösterilmiştir.

Tablo 4.19.

Ece'nin “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Ece	AR _{ogy}	MR _{ygy}	MR _{ygy}	AR _{ogy}

Tablo 4.19 incelendiğinde, Ece'nin incelenen dört problemin iki tanesinde ezberle dayalı akıl yürütme türüne, iki tanesinde de algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Ece sadece iki problemde muhtemel doğru cevap verirken, diğer iki probleme ise doğru cevap verememiştir. Ece problemlerin tamamında global akıl yürütme sergilemiştir. Ece akıl yürütme sürecinde tüm sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.8. Efe'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Efe'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soru için ne düşündün?

Efe: Hocam burada gösterdim zaten. (koordinatları teker teker yazdı)

Mülakatçı: Neye dikkat ettin gösterirken?

Efe: x 'i önce yazmaya ve birimler arasındaki farka dikkat ettim.

Mülakatçı: Tamam sıralı ikili ne demek?

Efe: Nerde?

Mülakatçı: şöyle sorayım koordinat sistemi ne demek?

Efe: İki doğrunun kesişmesi, ne demiştiniz hocam tekrar eder misiniz?

Mülakatçı: Koordinat sistemi ne demek? Ne anlıyorsun?

Efe: 2 doğrunun kesiştiği yer orijin. Eee Koordinat sistemi eee.

Mülakatçı: Peki sıralı ikili ne demek? Duydun mu?

Efe: Duydum da unuttum.

Mülakatçı: Tamam. Peki, orijin ev seçilseydi değişiklik olup olmadığı hakkında ne düşünüyorsun?

Efe: Ev burada (havuz başı) olsaydı koordinat sistemi değişirdi. Her şey eve göre değişeceği için mesela Ulu Cami ile ev arasında fark var. Ona burada eee ev buraya (Havuz başı) gelseydi daha koordinat sistemi yakın olurdu. Hepsini değiştirdi.

Mülakatçı: Peki. Birini seçip değişimi gösterebilir misin?

Efe: Üç kümbetler mesela (-5, 6) ev buraya gelirse... eee.

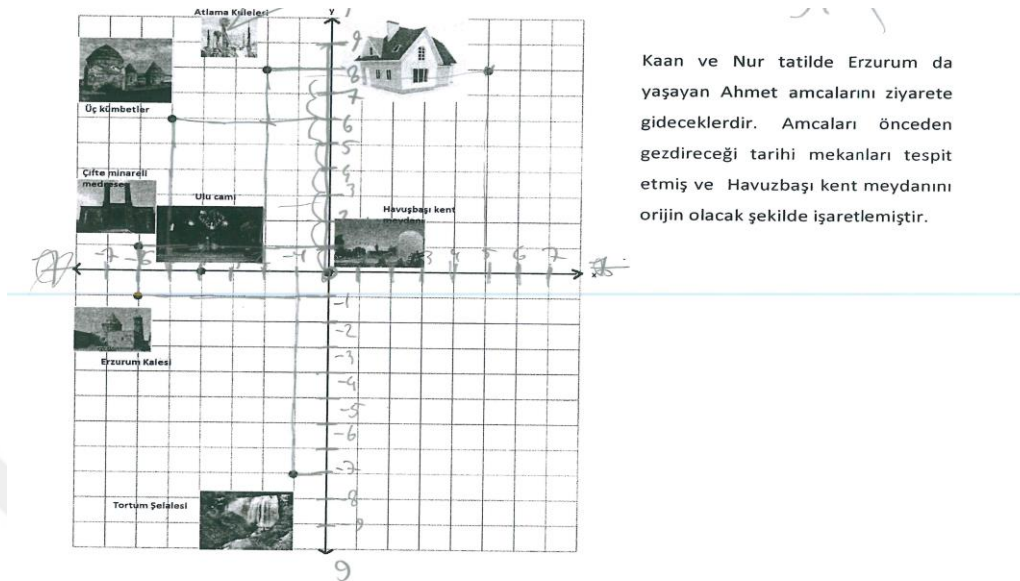
Mülakatçı: Evin oraya gelmesinden ziyade orijinin ev olduğunu düşünmemiz gerekiyor.

Efe: Ev olursa -5 olur hocam. Diğer de yani 1 cm bile hareket ekse değişir ama bunu (evi) buna (havuz başına) alırsak bu orijinde olduğu için 6'yı bulmamıza gerek kalmaz, -5 olur. Böyle işte değişir.

Mülakatçı: -5'i nasıl buldun?

Efe: Hocam Üç Kümbetlerin hızı -5

$(-5, 6)$ 'ydı. Ev buraya (orijin) geldiği için $(-5, 0)$ olur.



- a) Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.

Tortum Şelalesi: $(-1, -7)$

Erzurum Kalesi: $(-6, -1)$

Ulu Camii: $(-4, 0)$

Çifte minareli: $(-6, 1)$

Öğ kömbetler: $(-5, 6)$

Atılma Kuleleri: $(-2, 8)$

Havuzbaşı kent M.: $(0, 0)$

- b) Eğer orijin olarak Havuzbaşı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekanların koordinatlarında değişiklik olur muydu? Neden? Açıklayınız.

Tabii ki koordinat değişirdi. Çünkü 1 cm bile hareket etse koordinat değişir.

X'i önce yazmaya dikkat ettim, Birimler arasındaki farka dikkat ettim.

Şekil 4.89. Efe'nin birinci probleme ait çözümü

Efe'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) koordinat sistemi ii) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Efe koordinat sistemini “İki doğrunun kesişmesi” olarak tanımlamıştır. Fakat bu tanımlama matematiksel olarak eksiktir o yüzden matematiksel özellik olarak kabul edilemez. Efe sıralı ikili kavramını ise bilmemektedir açıklama yapmamıştır.

➤ Efe zorlanmadan tarihi mekânların koordinatlarını belirlemiştir. Efe koordinatları belilerken x ve y değerlerinden önce x değerini yazmaya dikkat ettiğini “x'i önce yazmaya ve birimler arasındaki farka dikkat ettim” cümleleriyle belirtmiştir.

Koordinat sistemini ise eksik ve emin olmayan bir ifadeyle “2 doğrunun kesiştiği yer orijin. Eee Koordinat sistemi eee”olarak söylemiştir. Bu durum katılımcının bilgi eksikliğinden kaynaklanabilir. Çünkü katılımcı koordinat sistemiyle alakalı sıralı ikili kavramını da duyduğunu fakat ne anlama geldiğini bilmediğini belirtmiştir. b şikkında ise, orijinin değişmesi durumunda değişiklik olacağını ifade etmiştir. Fakat evin havuz başının olduğu yere taşınması gerektiğini söylemiştir. Bu durumu Efe’nin “*Ev burada (havuz başı) olsaydı koordinat sistemi değişirdi. Her şey eve göre değişeceği için mesela Ulu Cami ile ev arasında fark var. Ona burada eee ev buraya (Havuz başı) gelseydi daha koordinat sistemi yakın olurdu. Hepsi değişirdi*” ifadeleri destekler niteliktedir. Araştırmacı katılımcıya müdahale ederek evin taşınamayacağını sadece orijin olarak seçildiğini ifade etmiş olsa da katılımcı bu durumu dikkate almadan işlemlerini devam ettirmiştir. Ve sonuç olarak koordinatlarda bir değişimin farkındadır fakat nasıl bir değişim olacağından emin değildir. Efe’nin “*Ev olursa -5 olur hocam. Diğeri de yani 1 cm bile hareket ekse değişir ama bunu (evi) buna (havuz başına) alırsak bu orijinde olduğu için 6’yı bulmamıza gerek kalmaz, -5 olur. Böyle işte değişir*” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Efe koordinatları doğru belirleyebilse de b şikkında orijinin değişmesi durumunda doğru bir akıl yürütme süreci sergileyememiştir. Efe’nin etkili tartışmalar gerçekleştirmeden ve açıklamalar yapmadan sadece işlem yapma eğiliminde olduğu görülmektedir. Bu yönüyle düşünüldüğünde AR’nin özelliklerini taşıyan bir akıl yürütme sürecine sahiptir.

➤ Efe zorlanmadan koordinatları yazabilmiştir. Efe’nin zorlanmamasının nedeni koordinatları yazarken kullanması gereken kuralları bilmesidir. Fakat Efe koordinat sistemi ile ilgili kavramları bilmemektedir. Genel olarak kavramsal altyapısının zayıf olduğu ve bu sebeple yüzeysel bir bakış açısıyla çözüm yaptığı, yaptığı işlemleri açıklamakta zorlandığı görülmektedir. Efe’nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme tarzı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

-Efe'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Taksi sorusu için nasıl düşündün?

Efe: Hocam ben buraya, km'leri yazdım. Açılış ücret 3 ve her km 1 TL öyle gittim.

Mülakatçı: Peki ücretle yol arasındaki ikilemin cebirsel olarak nasıl ifade edersin?

Efe: Hocam x 'i km olarak düşündüm. $3 + x = x$ kilometre, $3 +$ kilometre kaç kilometre gidersek x kilometre.

Mülakatçı: Yani hem x km nasıl anlayamadım. Orayı tekrar açıklar mısın?

Efe: Hocam mesela $3 + 1$ hepsinde 3'dü ya hocam bu x ne olduğunu bilmiyoruz. O yüzden mesela 4 verdik. 7 olur ama bunu (x) bilmediğimiz için bunu da (eşitliğin sol tarafını gösteriyor)...bilemeyiz. Arasında ilişki var. O yüzden ikisini de x yaptım.

Efe: Tamam. Peki, ücret-yol arasındaki ilişkinin grafiğini nasıl yaparsın?

Hocam $3 + 1, 4, 5, 6, 7$ TL yani böyle hizaladım, böyle çıktı.

Mülakatçı: Peki grafiği doğru yapıp yapmadığından emin misin?

Efe: Eminim.

Mülakatçı: Nasıl emin oldun?

Efe: Hocam ücreti buraya doğru yazdım. Kilometreleri de doğru yazdım. 1 km için $3 + 1 + 1$, 2 km için $3 + 2$ 3, 3 + 3 4, 4 + 4. Bir dakika hocam 4 km hocam sadece şurayı değiştireceğiz. 4 km $4 + 4$,

Mülakatçı: $3+4$ mü yazman gerekiyordu?

Efe: Evet hocam $3 + 4$ yazacaktım.

Mülakatçı: Bir farkı var mı?

Efe: Yok hocam toplamın değişme özelliği vardı. O yüzden yerleri değişseydi sonuç aynı olurdu hocam.

Mülakatçı: peki bu grafik $(0,0)$ noktasından geçiyor mu?

Efe: geçiyor hocam.

Mülakatçı: Peki sen yolla ücret arasındaki nasıl bir ilişki olduğunu düşünüyorsun?

Efe: Her km arasında 1 TL fark var. Km ne kadar arsada para birim olarak o kadar artar.

Mülakatçı: Güzel. Peki, açılış ücreti alınmasaydı ama her km başına 1 TL alınsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsun?

Efe: Yine değişiklik olmazdı hocam.

Mülakatçı: Neden öyle düşündün?

Efe: Yapabilir miyim?

Mülakatçı: Tabi ki. Ne yapıyorsun?

Efe: Tablo yapıyorum hocam.

Kaç km ise o kadar TL eder hocam. Burada da $4 + 3, 3 + 3$ doğrudan bir değişiklik olmadı hocam. O yüzden grafikte de değişiklik olmadı.

Mülakatçı: Peki. Açılış ücreti 9 TL fakat her km için 2 TL alınsaydı nasıl değişiklik olurdu?

Efe: Olmazdı hocam. Yine aralarında 1'er 1'er fark var. Bunda da 1'er 1'er fark vardı (üstteki) yine aynı doğru çıktı. Bunda da (bir alttaki) 1'er 1'er fark vardı. Yine aynı doğru çıktı. İsterseniz yapayım.

Mülakatçı: Olur.

Efe: 1 km 5tl 2 km 7 TL yine arasındaki fark olduğu için hepsi yine direk sayı yani böyle.



Ahmet Bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesini; Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

a) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

KM	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km
ÜCR	3+1 TL	3+2 TL	3+3 TL	3+4 TL	3+5 TL

b) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$3 + x = X \text{ kilometre}$$

$$X \text{ kilometre} = 3 + x$$

c) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çizin.



d) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersiniz. Neden?

Her 1 km arısında 1 TL var. Kilometre ne kadar artarsa parada birim olarak aynı şekilde artar.

e) Taksi tarifesini, açılış ücreti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.



f) Taksi tarifesini açılış ücreti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

$$1 \text{ km} = 3 + 2 = 5$$

$$2 \text{ km} = 3 + 3 = 6$$

$$3 \text{ km} = 3 + 4 = 7$$

Olmazdı. Şimdi yine 4'er lira var aralarında.

Şekil 4.90. Efe'nin ikinci probleme ait çözümünü

Efe'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) km ve ücret ii) tablo, grafik iii) cebirsel ifade bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Efe'nin belirttiği "km" ve "ücret" birer gerçek dünya bileşenidir. Efe'nin problem çözümünde oluşturduğu tablo ve çizdiği grafik ise, matematiksel olarak kabul edilebilir olmayan ve problem durumunu karşılamayan birer dönüşümdür. Efe'nin yol ve ücret arasındaki ilişkiyi ifade etmek için kullandığı cebirsel ifade ise yine problem durumunu karşılamayan ve matematiksel olarak kabul edilmeyen bir bileşendir.

➤ Efe, soruyu okuduktan sonra tablo yapmaya başlamıştır. Tablo oluştururken km ve ücreti baz almıştır. Tablodaki değerleri km için farklı değerler vererek tabloyu oluşturmuştur. Ücret ile yol arasındaki ilişkinin cebirsel ifadesi için ise, problem

durumunu karşılamayan bir cebirsel ifade yazmıştır. Efe, yol ve ücreti birbirine bağlı olduğunun farkındadır fakat cebirsel olarak ifade ederken her iki ifade için de aynı değişkeni yani x değişkenini kullanmıştır. Efe'nin "*Hocam mesela $3 + 1$ hepsinde 3 'dü ya hocam bu x ne olduğunu bilmiyoruz. O yüzden mesela 4 verdik. 7 olur ama bunu (x) bilmediğimiz için bunu da (eşitliğin sol tarafını gösteriyor)...bilemeyiz. Arasında ilişki var. O yüzden ikisini de x yaptım.*" İfadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Grafik çiziminde ise, koordinat sisteminde x eksenine $3+1, 3+2$, Değerlerini yazmıştır y ekseninde ise $1, 2, 3, 4$ değerlerini yazmıştır. Sonrasında ise, tablodaki değerlere göre noktaları birleştirerek grafiği çizmiştir. Fakat grafiğin eksenleri kesme durumunu veya orijinden geçme durumunu göz önüne almamıştır. Grafiğin doğruluğundan ise sadece değerleri doğru bulup bulmadığını kontrol ederek emin olmuştur. Efe etkili tartışmalar yapmadan işlemlerini devam ettirmektedir. Efe yol ve ücret arasında yolun artması durumunda ücretin artacağını düşündüğünü belirtmiştir. Problem durumunda değişiklik olduğunda, bu değişikliğin grafiğe nasıl yansıtacağı konusunda Efe, tekrar tablo yaparak, doğrudan bir değişiklik olmayacağını düşünmüştür. Efe'nin "*Olmazdı hocam. Yine aralarında 1 'er 1 'er fark var. Bunda da 1 'er 1 'er fark vardı (üstteki) yine aynı doğru çıktı. Bunda da (bir alttaki) 1 'er 1 'er fark vardı. Yine aynı doğru çıktı.*" İfadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Hâlbuki grafiğin orijinden geçip geçmeme durumu ile ilgili değişiklik olması gerektiğini düşünememiştir. Efe'nin akıl yürütme türünün, etkili tartışmalardan yoksun, kavramsal altyapısı zayıf olan işlemler bütünü olması nedeniyle AR olarak sınıflandırılması mümkündür.

➤ Efe, değişkenlere anlam yükleme noktasında sıkıntı yaşamıştır. Efe'nin bu konu ile ilgili bilgi eksiği olabilir. Efe, açılış ücretinin olması durumunda ücreti yazarken açılış ücreti ve her km için ödeyeceği ücreti toplamadan yazmayı düşünmüştür. Bu durumun sebebi, değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmasından kaynaklanmaktadır. Efe, aritmetik işlemleri yapabilecek bilgi düzeyine sahip olmasına karşın, yaptığı işlemleri anlamlandıracak kavramsal bilgiye sahip değildir. Bu durum yüzeysel bir düşünce tarzını beraberinde getirmiştir. Efe'nin matematiksel akıl yürütme türü, hatalı işlemler yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme tarzı sergilendiğinden AR_{gy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Efe'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Mum sorusuyla ilgili ne düşünüyorsun?

Efe: (Soruyu okudu) A mumu 1 saatte 5 cm azalıyor. Bu(B mumu) 3 saatte bir 20, 20, 15 olur. 3 saatte bir 10 olur. 6 saatte 10'a düştü. Bu (A ise) ise 6 saatte sona ulaştı. B mumu yani boyu kısa olan mum daha uzun ömürlüdür.

Mülakatçı: Güzel. Grafikleri nasıl çizdin?

Efe: Hocam A mumu 1 saatte 25, 2 saatte 20, böyle grafikte de böyle olur. B de aynı 3 er saatte bir 20 yok 15 e düşmesi için 3 saat 6 saatte 10 a düşer. 3 saatte 5 e düşer. 15 de de sıfırlanır.

Mülakatçı: 15 de mi sıfırlanır? Senin grafiğine gör 12 gibi görünüyor?

Efe: Hocam eee. (Kontrol ediyor) 15, 3, 10, 6, 15, 9, 12 herhâlde hocam doğru.

Mülakatçı: Peki grafikler y eksenini nerden kesiyor?

Efe: y eksenini 20 ile 15 in arasında kesiyor hocam.

Mülakatçı: Neden?

Efe: Çünkü doğru böyle çıktı. Bu da buradan geçti.

Mülakatçı: Peki A mumunun boy-zaman denklemini nasıl yazarsın?

Efe: En başta 30 da x saat yapmışım. 30 da eksi 1 saat yok hocam. 1 dk., x hocam bu ne kadar azalıyor. 5 cm azalmış. 30 eksi 5 = 25 o zaman. 1 saat eşittir öyle buldum hocam. $(30-x)=x$ saat yazdı)

Mülakatçı: Yani bir tane deneyebilirsin. Tam olarak anlayamıyorum. Denklem oldu mu?

Efe: Hocam mesela 5

$$30 - 5 = x \text{ saat.}$$

$$25 = 1 \text{ saat}$$

$$\text{Ya da } 20 = 2 \text{ saat da olur.}$$

Mülakatçı: Böyle mi?

Efe: Evet.



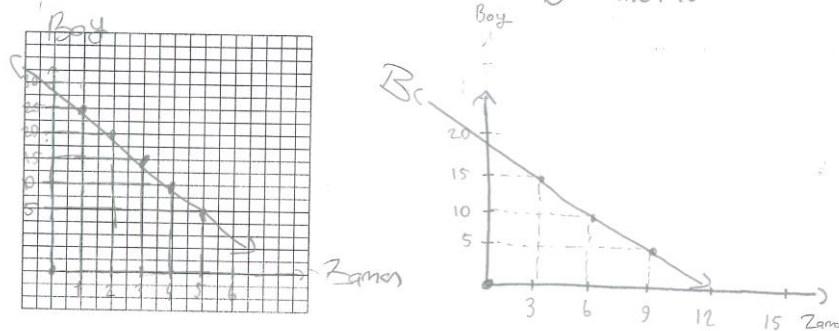
Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

- a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

Saat	1 saat	2 saat	3 saat	4 saat	5 saat	6 saat
A Mumu	25 cm	20 cm	15 cm	10 cm	5 cm	0 cm
B Mumu	20 cm	20 cm	15 cm	15 cm	15 cm	10 cm

Protez: Boyu kısa olan mum, uzun ömürlüdür.

- b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çiziniz.



- c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

$$30 - x = x \text{ saat}$$

Şekil 4.91. Efe'nin üçüncü probleme ait çözümü

Efe'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) tablo ii) mumun ömrü iii) denklem bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Efe problem durumunu açıklayan bir tablo oluşturamamıştır. Efe'nin belirttiği "mumun ömrü" ifadesi matematiksel bir özellik değildir fakat gerçek hayat bileşenidir. Efe'nin tablo sonucu "kısa olan mumun ömrü uzun olur" hipotezi doğrudur ve modelleme özelliğini sağlamış olur. Efe'nin A mumu için yazdığı denklem matematiksel bir özellik değildir. Çünkü problem durumunu karşılamamaktadır.

➤ Efe soruyu okuduktan sonra tablo yapmaya başlamıştır. Her iki mum için aynı tablo üzerinde değerler yazmıştır. Fakat bu değerler A mumu için doğru olsa da B mumu için katılımcı B mumunun 3 saatte 5 cm azaldığını söyleyerek 1 saat geçtiğinde ve 2 saat geçtiğinde mumun boyunda değişiklik olmadığını ve direk 3. saatte 5 cm

azaldığını ifade eden değerler yazmıştır. Matematiksel olarak problemi karşılayan bir tablo oluşturamamıştır. Efe tablodaki değerleri kullanarak b şıkında ise grafikleri ayrı ayrı çizmiştir. Efe'nin çizdiği A mumuna ait grafikte, grafiğin x eksenini kestiği nokta belli değil ve 6 saatte bitmesi gereken mumun 6. Saatte bitmediği görülmektedir. Efe grafikte eksenleri kesen noktalara dikkat etmeden sadece bulduğu birkaç noktayı birleştirerek grafiği çizmiştir. Efe'nin “y eksenini 20 ile 15 in arasında kesiyor hocam” ifadesi bu durumu destekler niteliktedir. Oysaki mumun boyu 20 cm olduğu için grafiğin y eksenini 20 de kesmesi gerekmektedir. Efe'nin c şıkında a mumuna ait boy zaman ilişkisini gösteren denklemi kurmakta zorlandığı sonuçta matematiksel olarak anlamlı olmayan bir ifade yazdığı görülmüştür. Efe'nin “1 dk., x hocam bu ne kadar azalıyor. 5 cm azalmış. 30 eksi 5 = 25 o zaman. 1 saat eşittir öyle buldum hocam. (30-x=x saat yazdı)” ifadesi bu durumu desteklemektedir. Efe'nin değişkene anlam yükleme ve denklem yazmada sıkıntı yaşadığı ve hatasını fark edemediği görülmüştür. Efe'nin etkili tartışmalar ve açıklamalar gerçekleştirmeden direk belli işlemler yaparak doğru yapıp yapmadığını kontrol etmeksizin işlemlerine devam etmesinden dolayı katılımcının akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Efe'nin tabloda b mumu için yazdığı değerlerde yanlışlık yapmıştır. Hatasını fark edememiştir. Bu durumun sebebi katılımcının iki muma ait verileri aynı tabloda yazmaya çalıştığı için zorlanmış olabileceği veya dikkatinden kaçmış olabileceğidir. Efe'nin grafiklerin aynı koordinat sisteminde istenmiş olmasına rağmen ayrı çizmesi aynı koordinat sisteminde zorluk yaşayacağını düşünmesinden kaynaklanabilir. Efe'nin belli bir seviyede bilgi birikimi olmasına rağmen kavramsal altyapısının zayıf olmasından kaynaklanan hatalar yaptığı ve yüzeysel bir bakış açısına sahip olduğu görülmüştür. Efe'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Efe'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Efe'nin dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Efe: Böyle yaptım hocam.

Mülakatçı: Peki kan basıncı sorusu ile ilgili ne düşündün?

Efe: Burada bir insanın kan basıncı y , x insan yaşı, eee hocam kan basıncı 145 olan birinin yaşını soruyor. y kan basıncı hocam. $145 = x/2 + 110$. Hocam 110 la neyi toplarsak 145 eder. 35 i. Bu da hangi sayıyı 2 ye bölersek 35 eder. 70 i. O zaman x eşittir 70 dir.

Mülakatçı: Güzel. Grafiği nasıl oluşturdu?

Efe: Hocam burası (y eksen) yaş 20 için burası basınç 120 olur. Burası da 30 yaş basınç 125 olur hocam. Mesela bu adamın yaşı 70 hocam. Adamın yaşı 70 ise $70/2 + 110$ hocam burada da $x = 20/2 + 110 = 120$ adamın yaşı

20, kan basıncı 120 imiş. $x = 30/2 + 110$, $x = 110 + 15 = 125$ olur. Yani herhalde yaşta her 10 yaş arttıkça basınç 5 artar. Çünkü hocam 70 yaşta 145 e gelir. O zaman 40 yaş 130 a gelse 50 yaş 135. 60 yaş 140, 70 145 hocam her 10 yaşta bir basınç 5 artar.

Mülakatçı: Peki bu grafiği doğru yapıp yapmadığından emin misin?

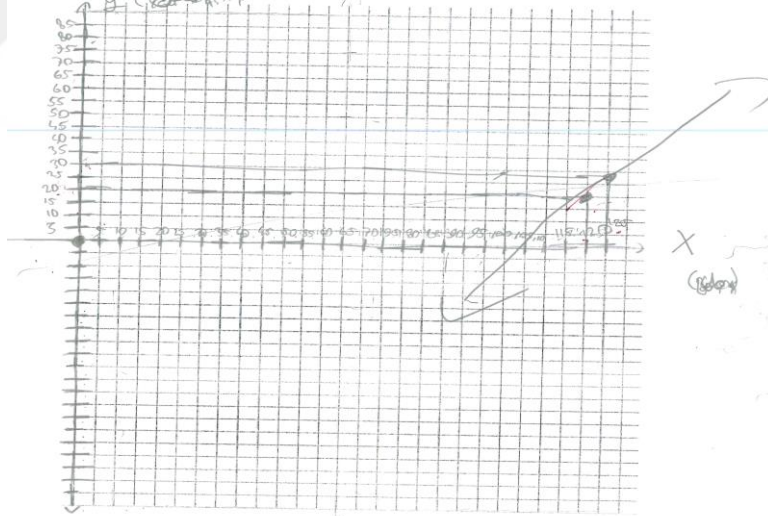
Efe: Eminim hocam. Çünkü burada zaten yaptım. (B şikkını) bu yolla gittim buldum direk.

Mülakatçı: Peki.



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

$$145 = \frac{x}{2} + 110$$

$$x = 70$$

Şekil 4.92. Efe'nin dördüncü probleme ait çözümü

Efe'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Efe'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) kan basıncı, yaş ii) grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Efe'nin bahsettiği “kan basıncı” ve “yaş” ifadeleri gerçek hayat bileşenidir. Efe'nin çizdiği grafikte eksiklikler vardır fakat muhtemel doğru olarak sınıflandırılabilir. Grafik bir dönüşümdür.

➤ Efe ilk olarak b şikkını yapmak istemiştir. Denklemden y yerine 145 yazarak denklemi çözmüştür. Efe çözümünü “ $145 = x/2 + 110$. Hocam 110 la neyi toplarsak 145 eder. 35 i. Bu da hangi sayıyı 2 ye bölersek 35 eder. 70 i. O zaman x eşittir 70 dir.” şeklinde yapmıştır. Çözüm yaparken zorlanmamıştır. B şikkında ise, koordinat sisteminde y eksenini yaş olarak ve x eksenini kan basıncı olarak seçmiştir. Efe'nin çözümü “burada da $x = 20/2 + 110 = 120$ adamın yaşı 20, kan basıncı 120 imiş. $X = 30/2 + 110$, $x = 110 + 15 = 125$ olur. Yani herhalde yaşta her 10 yaş arttıkça basınç 5 artar. Çünkü hocam 70 yaşta 145 e gelir. O zaman 40 yaş 130 a gelse 50 yaş 135. 60 yaş 140, 70 145 hocam her 10 yaşta bir basınç 5 artar” şeklindedir. Fakat Efe eksenleri grafiğin kesip kesmediği ile ilgili ve grafiğin negatif değerleri kapsayacak şekilde devam edip etmeyeceği ile ilgili yorum veya açıklama yapmamıştır. Efe sadece yazdığı değerlerin denklemi sağlayıp sağlamama durumlarını dikkat alarak grafik çizmiştir. Efe'nin grafik çizimi için noktalar bulması gerektiğinin farkında olduğu fakat probleme uygunluğunu değerlendirmeden etkili tartışmalar yapmadan sonuca ulaşma eğiliminde olduğu görülmüştür. Bu yönüyle katılımcının akıl yürütme türü, AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Efe'nin denklemden verilenleri yazarak işlem yapmayı tercih etmesi daha kolay yapacağını düşündüğünden kaynaklanmaktadır. Efe'nin belli bir bilgi birikiminin olduğu çoğu grafiği bu bilgi düzeyinde yapabileceği fakat bazı durumlarda zorluk yaşayabileceği düşünülmektedir. Efe genel olarak yüzeysel bir düşünce tarzına sahiptir. Efe'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

Efe'nin “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.20’de gösterilmiştir.

Tablo 4.20.

Efe'nin "Doğrusal Denklemler" konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Efe	AR _{ogy}	AR _{ygy}	AR _{ogy}	AR _{ogy}

Tablo 4.20 incelendiğinde, Efe'nin incelenen dört problemin tamamında algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Efe ikinci problem dışındaki tüm sorulara doğru cevap verirken problemlerin tamamında global akıl yürütme sergilemiştir. Efe akıl yürütme sürecinde tüm sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.9. Hale'nin Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Hale'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soru için nasıl düşündün?

Hale: Ulu camiden başladım. Burada x ekseninde 4 ü göstermiş. Zaten noktayı gösterirken önce x eksinini yazarız.

Mülakatçı: neden?

Hale: Neden? Kuralı öyle.

Mülakatçı: tamam.

Hale: y noktası da 0 mış. (4, 0) noktası. Ulu Cami, Çifte Minareli Medrese (-6, 1). Üç kümbetler eee.

Mülakatçı: Yani bu şekilde hepsini orijine göre sıraladın?

Hale: Evet. Orijin (0,0) noktasıdır ona göre yazarız.

Mülakatçı: peki koordinat ne demek?

Hale: koordinat eee bir noktanın yeri

Mülakatçı: peki koordinat sistemi ne demek?

Hale: eee işte bu şekilde çizilen şey. eee noktaların olduğu eee.

Mülakatçı: peki sıralı ikili ne demek?

Hale: bilmiyorum.

Mülakatçı: Peki herhangi birinin hangi bölgede olduğunu söyleyebilir miyiz?

Hale: Hı hı. Ulu Cami 2. Bölgede, çifte minareli 2. Bölgede. Erzurum kalesi 3. Bölgede. İşte öyle.

Mülakatçı: Tamam. Peki, B şıkkı için nasıl düşündün?

Hale: ...

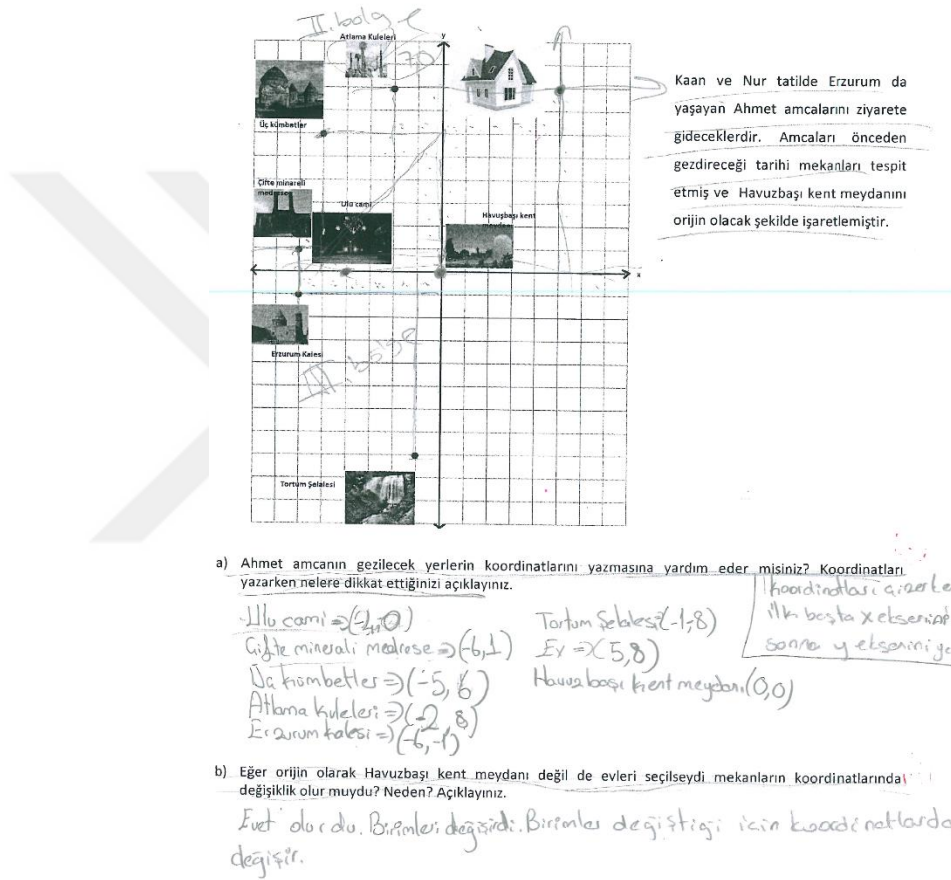
Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Hale: Haa. Diyor ki evleri orijin başlama noktası olsaydı değişiklik olur muydu? Olurdu. Çünkü bir yerde değişiklik olduğu için noktalar değişirdi.

Mülakatçı: Peki bir tanesindeki değişikliği gösterebilir misin?

Hale: Mesela, Atlama Kuleleri Havuz başı orijin olduğunda $(-2, 8)$ oluyor. Ev orijin olduğunda $(7, 0)$ oluyor.

Mülakatçı: Tamam güzel.



Şekil 4.93. Hale'nin birinci probleme ait çözümü

Hale'nin birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) orijin ii) koordinat iii) koordinat sistemi iv) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hale'nin belirttiği “*orijin (0,0) noktasıdır*” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Hale koordinatı “*koordinat eee bir noktanın yeri*” tanımlamıştır. Koordinatlar, bir noktanın düzlemdeki ya da uzaydaki yerini belirtmeye yarar. Bu

açından düşünüldüğünde matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Hale'nin koordinat sistemini ise tanımlayamadığı “*eee işte bu şekilde çizilen şey. eee noktaların olduğu eee*” ifadelerinde görülmektedir. Bu ifadelerde matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Hale soruda verilen tarihi mekânların koordinatlarını zorlanmadan yazabilmiştir. Koordinatları yazarken “*Ulu camiden başladım. Burada x ekseninde 4 ü göstermiş. Zaten noktayı gösterirken önce x eksinini yazarız*” ifadelerini kullanmıştır. Nedeni sorulduğunda ise, “*kural olduğu için*” cevabını vermiştir. Koordinatın konum belirttiğini ifade ederken, koordinat sistemini ise “*eee işte bu şekilde çizilen şey. eee noktaların olduğu eee...*” ifadeleriyle emin olmadan cevaplamıştır. Hale'nin işlemleri öğrendiği şekilde yapma sebepleri hakkında fikir yürütme veya açıklama yapma durumu olmamıştır. Bu açıdan düşünüldüğünde AR'nin özelliklerini sağlamaktadır. Hale'nin koordinat sistemi ile ilgili bir kavram olan sıralı ikili kavramını ise bilmediği görülmektedir. B şıkında ise, ilk olarak bir süre sessiz kalmış görüşmecinin uyarısıyla sesli düşünmeye başlamıştır. Soruyu tekrar okuduktan sonra bu soru ile ilgili orijinin değişmesinin değişikliğe neden olacağını belirtmiştir. Hale'nin “*Haa. Diyor ki evleri orijin başlama noktası olsaydı değişiklik olur muydu? Olurdu. Çünkü birilerde değişiklik olduğu için noktalar değiştirdi.*” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir.

➤ Hale koordinatları yazarken zorlanmamıştır. Bu durumun sebebi koordinatları yazarken kullanacağı kuralları bilmesinden kaynaklanmaktadır. Fakat Hale koordinat sistemi ile ilgili kavramları çok iyi bilmemektedir. Bu durumun sebebi kavramsal anlamasındaki zayıflık olabilir. Hale'nin etkili tartışmalar yapmadan ve yaptığı işlemlerin sebeplerini açıklamadan direk işlem yapma eğiliminde olduğu ve yüzeysel bir bakış açısı sergilediği görülmektedir. Doğru bir çözüm yapan Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{dgy} olarak sınıflandırılmıştır.

-Hale'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: *Taksi sorusuyla alakalı ne düşündün*

Hale: *(Soruyu okudu) x e ödenecek ücret alından yola da y dedim. İşte açılış ücreti 3 TL. 3 mesela alınan yol 1*

km olursa ödenecek ücret $3+1$ olur. Yol 2 km olsaydı, $3+2=5$ TL olurdu. İşte böyle böyle devam edebiliriz.

Mülakatçı: Peki ücret-yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade ederiz?

Hale: Zaten her km 1 TL ya hani 3 km de olursan 3 TL ödemeyeceğin sonra açılış ücreti ekleyeceğim o yüzden ben hiç ödenecek ücreti yapmadım. $x + 3$ olur. Yani x alınan yol 3 de açılış ücreti.

Mülakatçı: Yani $x + 3$ birlikte neyi belirtiyor?

Hale: Bu ifade... eee ödenecek ücreti belirtiyor.

Mülakatçı: Peki bu haliyle bu ifade bir denklem olur mu?

Hale: Olmaz.

Mülakatçı: Neden?

Hale: Çünkü eee... Olmaz.

Mülakatçı: Neden?

Hale: Çünkü şey yok. Bu (3) ödenecek ücret alınan yol yok.

Mülakatçı: Alınan yola az önce x demiştin?

Hale: Ödenecek ücret yok. Çünkü o yüzden cebirsel ifade olmaz. Yok denklem olmaz.

Mülakatçı: Peki. Yol-ücret arasındaki ilişkinin grafiğini nasıl çizersin?

Hale: Mesela yol 1 olursa ücreti açılış ücreti ile birlikte $4+1$ olur. (4, 1) noktası. 2 km giderse ücreti ile birlikte 5 TL öderiz. (5, 2) noktası. Grafiğini çizmek için en az 2 nokta olması gerekir.

Mülakatçı: Neden?

Hale: Çünkü 2 nokta olmazsa doğru olmaz. 2 noktada geçmesi gerekir.

Doğrunun en az 2 nokta. İşte böyle getirdim grafiği yaptım.

Mülakatçı: Peki grafikte 3 noktasından geçiyor. Neden 3 noktasından geçiyor?

Hale: Mesela 0 km gitseydik. Şey yani burada olur. Şimdi 0 km gittik mi açılış ücreti ödemek lazım. O yüzden (3, 0) noktası olur. Burası da olur. (3, 0) şurası da (6, 3) ü gösteriyor. Olur diyor.

Mülakatçı: Peki grafik aşağıya doğru devam ediyor mu?

Hale: Aşağıya etmez. ...eder.

Mülakatçı: Neden?

Hale: Çünkü hani devamında varda ben çizmemiştim. -1, -2, -3 de var. Yani buradan da geçer. (3, -3) noktasında da. Eee...

Mülakatçı: Kafan mı karıştı?

Hale: Biraz.

Mülakatçı: Neden? Ne karıştırdı kafanı?

Hale: Yok aşağı doğru devam etmez.

Mülakatçı: Neden?

Hale: Çünkü 0 km, -1 km yok ki. O yüzden devam etmez.

Mülakatçı: Güzel. Peki, o zaman grafik son hali olarak nasıl olmalıydı?

Hale: Şöyle

Mülakatçı: Peki yol ile ücret arasında nasıl bir ilişki var?

Hale: Nasıl bir ilişki var. Eee. Hani alınan yol 1 km ise açılış ücretine 1 ekliyoruz. 2 km ise açılış ücretine 2 ekliyoruz. Öyle bir ilişki var.

Mülakatçı: Tamam.

Hale: Hani alınan yola ne dersek açılış ücretine de onu ekleriz.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti olmasa fakat km başına 1 TL olsaydı nasıl bir değişim olurdu?

Hale: Evet olurdu. Çünkü birimler değişirdi. Açılış ücreti olmasa 1 km ye 1 TL öderdi ala orada açılış ücreti ile beraber 4 TL ödeniyordu. O yüzden birimler değişir. Değişiklik olur.

Mülakatçı: Peki grafik üzerinde nasıl bir değişiklik olurdu?

Hale: Azalırdı. Yani sola doğru giderdi.

Mülakatçı: Nasıl yani. Çizdiğin grafik üzerinde gösterir misin?

Hale: Yani, mesela 1 km 4 TL ya, 1 km 1 TL olacak. Yani burası olurdu (1, 1). Yani nokta sola doğru kayardı.

Mülakatçı: Yani noktanın yeri değişirdi.

Hale: Evet.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti 3 TL ama km başına 2 olsaydı ne olurdu?

Hale: Bunda da olurdu. Mesela 1 km y 5 TL öderdi. Yukarıda 4 TL ödüyordu. Bundan da sağa doğru nokta koyar.



Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesini; Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

Ödenecek Ücret	Alınan Yol
3+1	1
3+2	2

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$X+3$$

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çiziniz.

En Ark a sayıfada .

Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersiniz. Neden.

Ağırlıklıdır. Örnek olarak (1,1) 4-1=3

Taksi tarifesini, açılış ücreti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

Evet olurdu. Çünkü TL miktarı azaldığı için grafikte de sola doğru giderdi.

Taksi tarifesini açılış ücreti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

Evet olurdu. Çünkü TL miktarı fazla olduğu için grafikte de sağa doğru giderdi.

Her 5 TL

Şekil 4.94. Hale'nin ikinci probleme ait çözümü

Hale'nin ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) yol, ücret ii) tablo, grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ “Yol” ve “ücret” birer gerçek dünya bileşenidir. Tablo ve grafik ise birer dönüşümdür. Hale'nin oluşturduğu tablo ve grafik problem durumunu karşılamaktadır.

➤ Hale, soruyu okuduktan sonra değişkenlere anlam yükleyerek işlem yapmaya başlamıştır. Sonrasında ise değer vererek tabloyu oluşturmuştur. Yol ve ücret arasındaki ilişkinin cebirsel gösterimi ile ilgili, ifadeyi doğru yazmıştır. Fakat Hale'nin “*Zaten her km 1 TL ya hani 3 km de olursan 3 TL ödemeyeceğin sonra açılış ücreti ekleyeceğim o yüzden ben hiç ödenecek ücreti yapmadım. $x+3$ olur. Yani x alınan yol 3 de açılış ücreti*” ifadesinde görüldüğü gibi Hale cebirsel ifadeyi doğru yazmıştır fakat her bir km de 1 TL olduğu için $x+3$ yazdığını açıklamamıştır. Hale'nin ifadesine göre alınan yol ve açılış ücreti olan iki farklı nicelik toplanmaktadır. Hale'nin belirttiği $x+3$ ifadesi bir denklem değildir ve yol ve ücret arasındaki ilişkiyi göstermek için yetersizdir. Hale bu durumun farkındadır. Grafik çiziminde ise, eksenleri adlandırmıştır x eksenini için ödenecek ücret ve y eksenini için ise, alınan yol demiştir ve eksenlerin değerlerini yazmıştır. Sonrasında ise, iki nokta belirleyerek grafiği çizmiştir. Hale'nin “*Çünkü 2 nokta olmazsa doğru olmaz. 2 noktada geçmesi gerekir. Doğrunun en az 2 nokta. İşte böyle getirdim grafiği yaptım*” ifadelerinden grafik çizimi ile ilgili belli bilgi birikimine sahip olduğu söylenebilir. Grafiğin x eksenini kestiğinin farkındadır. Fakat grafiğin x - y ekseninin negatif kısımlarında değerler alıp almayacağı ile ilgili tereddüt yaşamıştır. Fakat sonrasında Hale kendi tartışmaları ile doğru sonuca ulaşmıştır. Hale'nin “*Aşağıya etmez. ...eder. Çünkü hani devamında varda ben çizmemiştim. -1, -2, -3 de var. Yani buradan da geçer. (3, -3) noktasında da. Eee... Yok, aşağı doğru devam etmez. Çünkü 0 km, -1 km yok ki. O yüzden devam etmez*” ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Hale yol ve ücret arasındaki ilişkiyi sadece niceliksel olarak değerlendirmiştir. Problem durumunda değişiklik olması durumunda değişiklik olacağını söylemiştir. Hale grafik üzerinde ise değerlerde değişiklik olacağını grafiğin sola doğru kayacağını belirtmiştir fakat grafiğin orijinden geçip geçmeyeceği veya eksenleri kesip kesmeyeceği ile ilgili yorum yapmamıştır. Hale'nin akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Hale, değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmamıştır fakat başlangıçta yüklediği anlamlara bağlı kalmamıştır. İlk olarak y için gidilecek yol demişken sonrasında x için

gidilecek yol anlamını yüklemiştir. Hale dikkatsizlik hatası yapmış olabilir. Hale önceki deneyimlerinden grafik çizimi için en az iki noktanın gerekli olduğu bilgisine sahiptir. Grafik çizimi ile ilgili zorluk yaşamamıştır. Grafiğin devam edip etmemesi ile ilgili tereddüt yaşamış fakat kendisi bu problemin üstesinden gelmiştir. Hale'nin doğru bir grafik çizmesi, tek tip akıl yürütme türü ve yer yer yüzeysel yer yer derin düşünce yapısına sahip olmasından dolayı Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü AR_{dgx} olarak belirlenmiştir.

-Hale'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Peki 4. Soru ile ilgili ne düşündün?

Hale: (Soruyu okudu) Burada da hani x e zaman, boya y dedim. Mesela burada diyor ki 5 cm, B mumundan başlamışım. Zaman x , boya y dedim. Zaman 3 olursa boya 5 cm azalıyor. Evet, 6 saat olduğunda 10 azalıyor. A da da zamana x boya y , 3 saatte 15 azalıyor. 1 saatte 5 cm. $5 \cdot 3 = 15$ cm oldu. 6 saatte de mum bitiyor. İşte öyle.

Mülakatçı: Peki bu boy-zaman ilişkisini grafikte göstermek istersek nasıl gösteririz?

Hale:

B grafiği için, x de 3 ü bulurum. Y de 5 i bulurum. Yine x de 6 yı. Y de de 10 u bulurum. Birleştiririm, doğruyu çizerim.

Mülakatçı: Peki neden böyle bir grafik çıktı?

Hale: Nasıl yani?

Mülakatçı: Tablodaki değerlere dayanarak çizdin değil mi?

Hale: evet

Mülakatçı: Peki bu grafiğe bakarak zaman-boy arasında nasıl bir ilişki vardır?

Hale: (Sessiz kaldı).

Mülakatçı: Yani mumun boyu ve zaman arasındaki ilişki? Grafikten bir şey çıkarabilir miyiz?

Hale: (Sessiz kaldı)

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Hale: Tekrar sorar mısınız?

Mülakatçı: Mumun boyu ve geçen zaman arasında bir ilişki var mıdır? Grafikte veya tabloda.

Hale: (Sessiz kaldı)

Mülakatçı: Soruyu mu anlamadın?

Hale: Soruyu anlamadım.

Mülakatçı: Yani birisi artarken diğeri artar mı ya da azalır mı? O tarz bir ilişki kurabilir miyiz?

Hale: Kurarız.

Mülakatçı: Nasıl?

Hale: Mesela bu 6 saatte mum bitiyor. Burada (B) 10 cm azalıyor. O yüzden bu (A) daha çabuk eriyor. Bu (B) yavaş

yavaş boyundan dolayı yavaş eriyor.
Yok, boyundan dolayı değil pardon.

Mülakatçı: Neyden dolayı?

Hale: Yani bu (A) saatte 5 cm bu (B) 3 saatte 5 cm şeyden dolayı.

Mülakatçı: Erime hızı mı?

Hale: Evet.

Mülakatçı: Peki A mumunun boy-zaman ilişkisini gösteren denklemi nasıl yazarsın?

Hale: Boyu şöyle yazarız. Hani A nen boyu 30 cm mis. Saatte 5 cm azalacağı

Mülakatçı: peki.

için kaç saatte azalacağını bilmiyoruz. O yüzden zamana x dedim. 5 l, boyunu bulmak için 30 den çıkararak buluruz. $Boy=5x-30$.

Mülakatçı: Yani herhangi bir zaman diliminde boyunuz ne kadar kalacağını bu denklemden buluruz.

Hale: Evet.

Mülakatçı: Doğru yapıp yapmadığından emin misin?

Hale: eminim.



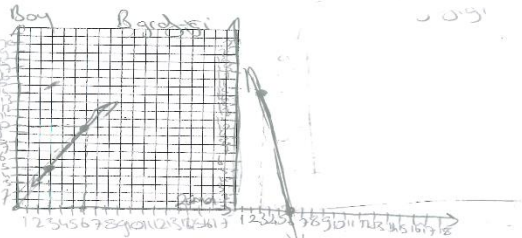
Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

B	Zaman	Boy	A	Zaman	Boy
1	3	5	3	15	
2	6	10	6	30	

Ayrıca boy ve zamanları aynı sığara B mumunun 10 cm'lik kısaca olduğu için ve 3 saatte yandığı için 10 cm kalıyor.

b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çiziniz.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız. Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

$$boy = 5x - 30$$

$$zaman = \frac{30}{5}$$

Şekil 4.95. Hale'nin üçüncü probleme ait çözümü

Hale'nin üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) boy, zaman ii) tablo iii) grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hale'nin değişkenlere “boy” ve “zaman” olarak anlam yüklemesi matematiksel olarak anlamlıdır fakat a mumunun boy zaman ilişkisine dair kurulan denklem matematiksel olarak kabul edilebilir değildir. “Boy” ve “zaman” nesneleri gerçek hayat bileşenidir. Hale'nin tablo ve grafiği problem için anlamlı değildir.

➤ Hale tablo yaparken, ilk olarak değişkenler anlam yüklemiştir. x e zaman ve boya y demiştir ve tabloyu oluşturmuştur. Hale çözümünü “*Zaman x, boya y dedim. Zaman 3 olursa boya 5 cm azalıyor. Evet, 6 saat olduğunda 10 azalıyor. A da da zamana x boya y, 3 saatte 15 azalıyor. 1 saatte 5 cm. 5.3=15 cm oldu. 6 saatte de mum bitiyor. İşte öyle*” olarak ifade etmiştir. Hale'nin oluşturduğu tablo problemi karşılamaz çünkü B mumu için Hale saatte göre mumun eriyen kısmının tablosunu yapmıştır. B şikkında ise grafik çiziminde Hale ayrı iki grafik çizmiş, Hale tablodaki değerleri baz alarak grafik çizdiği için b mumunun grafiğini hatalı çizmiştir. A mumunun grafiğinde ise, grafiğin y eksenini kesip kesmediği belli olmamakla birlikte mumun bitmesini göz önüne almadığı için grafiği x eksenini kestikten sonrada devam ettirmiştir. Araştırmacının Hale'nin hatasını anlaması için bir ipucu olarak sorduğu *Yani mumun boya ve zaman arasındaki ilişki? Grafikten bir şey çıkarabilir miyiz?* Sorusuna ilk önce cevap verememiş sonrasında ise, hatasını anlamadığını belli edecek şekilde “*Mesela bu 6 saatte mum bitiyor. Burada (B) 10 cm azalıyor. O yüzden bu (A) daha çabuk eriyor. Bu (B) yavaş yavaş boyundan dolayı yavaş eriyor. Yok, boyundan dolayı değil pardon*” ifadeleriyle cevap vermiştir. Hale'nin hiç tartışmadan cevap verdiği görülmektedir. A mumunun boy zaman ilişkisini ifade eden denklemi ise hatalı bir şekilde “*Boya şöyle yazarız. Hani A nın boya 30 cm miş. Saatte 5 cm azalacağı için kaç saatte azalacağını bilmiyoruz. O yüzden zamana x dedim. 5 l, boyunu bulmak için 30 den çıkararak buluruz. Boy=5x-30*” olarak kurmuştur. Hale'nin sadece işlemleri yapma odaklı olduğu altında yatan sebepleri dikkate almadığı ve ne yaptığının farkında olmadığı görülmektedir. Bu açıdan düşünüldüğünde Hale'nin akıl yürütme türünün AR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Hale'nin zorlanmasının sebebi değişkenlere anlam yüklemiştir ancak B mumu için boy zaman ilişkisini yazarken mumun kalan boyunu değil eriyen kısmını dikkate almıştır. Bu yanlış algıdan ötürü grafiği de yanlış çizmiştir. Bu durum azalan bir grafik çizmesi gerekirken artan bir grafik çizmesine sebep olmuştur. Hale'nin grafik çiziminde a ve b mumlarının grafiğini tek grafikte göstermeleri istenmesine rağmen Hale ayrı ayrı

grafikler çizmiştir. Hale zorlanacağını hissettiği için veya soruyu dikkatli okumadığı için bu şekilde çizim yapmış olabilir. Hale'nin değişkenlere anlam yükleyebildiği fakat denklem kurarken bunları dikkate almadığı ve hatalı probleme karşılık gelebilecek bir denklem kuramadığı görülmüştür. Hale'nin belli bilgi birikimi olmasına rağmen kavramsal altyapısının zayıf olmasından kaynaklanan yüzeysel bir düşünce tarzına sahip olduğu söylenebilir. Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü, hatalı çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{yyg} olarak belirlenmiştir.

-Hale'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hale'nin dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soru ile ilgili ne düşündün?

$$145 - 110 = x/2$$

$$135 = x/2$$

Hale: Değer vererek yaptım.

$$x = 270 \text{ miş.}$$

Mülakatçı: Neden değer verdin?

Mülakatçı: Tamam. Yani 270 yaşında birinin kan basıncı 145 mi diyorsun?

Hale: Nasıl yani?

Hale: Evet.

Mülakatçı: Değer verme amacın ne?

Mülakatçı: İşleminin doğru olup olmadığını nasıl anlarsın?

Hale: x e değer vererek y yi y ye değer vererek x i buldum. Gerçi y ye değer vermedim de. Eee x e 0 verirsem $0/2 = 0$, $0 + 110 = 110$, $y = 110$ olur. x e 2 verirsem $2/2 + 110 = 111$ olur. $(0, 110)$ $(2, 111)$ olur. Noktaları yazmışım zaten.

Hale: x e 270 koyarım, $270/2 = 135$ ediyor. $135 + 110$ ekledim mi 245 ediyor. Haa yok eee... (sessiz kaldı)

Mülakatçı: Ne oldu?

Mülakatçı: peki bu kadar mı çözümün grafiğin doğru olup olmadığı hakkında ne söylersin?

Hale: Yanlış çıktı.

Hale: bu kadar doğru bence. Bu şekilde olmalı değerleri öyle buldum.

Mülakatçı: Neden yanlış çıkmış olabilir?

Hale: ... (sessiz kaldı)

Mülakatçı: peki altta kan basıncı 145 olan birisinin yaşını nasıl buldun?

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Hale: Kan basıncı y vermiş. Denklemi yazdım.

Hale: Haa. İşlem hatam var burada.

$$145 - 110 = 35 \text{ olacak}$$

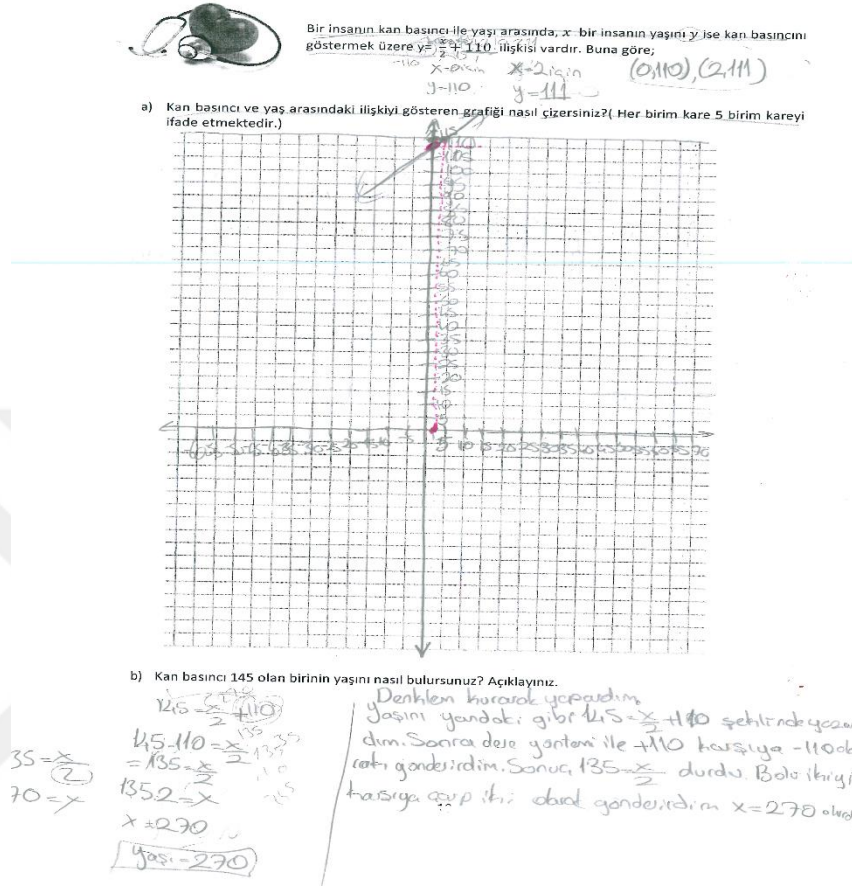
$$35.2 = 70.$$

$$145 = x/2 + 110$$

Sağlayalım. Yine $70/2 = 35$,

$$35 + 110 = 145 \text{ eder.}$$

Mülakatçı: Güzel.



Şekil 4.96. Hale'nin dördüncü probleme ait çözümü

Hale'nin dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hale'nin matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) denklem, grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hale'nin bahsettiği “yaş” ve “kan basıncı” gerçek dünya bileşenidir. Denklem ve grafik ise birer dönüşümdür. Hale'nin çizdiği grafikte hatalar olmasına rağmen muhtemel doğru olarak kabul edilebilir.

➤ Hale değer vererek yaptığını belirtmiştir. Hale x ve y ye değer vermiştir. “ x e değer vererek y yi y ye değer vererek x i buldum. Gerçi x e değer vermedim de. Eee x e 0 verirsem $0/2 = 0, 0 + 110 = 110, y = 110$ olur. x e 2 verirsem $2/2 + 110 = 111$ olur. $(0, 110) (2, 111)$ olur. Noktaları yazdım zaten” şeklinde çözümünü ifade etmiştir.

Hale sıralı ikili oluşturarak grafik çizimine geçmiştir. Grafik çiziminde, koordinat ekseninde x eksen ve y eksenindeki değerleri 5 er 5 yazmıştır. 111 noktasını arada bir yerde göstererek grafiği çizmiştir. Grafiğin x in negatif değerleri için de devam edip etmediğine dikkat etmeden bir grafik çizmiştir. Araştırmacı doğruluğundan emin misin? Diyerek dikkat çekmek istemişse de Hale yaptığından emin olduğunu doğru bir grafik çizdiğini belirtmiştir. Hale'nin x ve y ye değer vermesi be iki nokta belirlemesi bir grafik çizimi için en az iki noktanın bulunması gerektiği bilgisine sahip olduğunu göstermektedir. Fakat Hale bazı noktalara dikkat etmeden ve etkili tartışmalar yapmadan devam etmiştir. Bu yönüyle akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılabilir. B şikkında ise, denklemi kullanarak çözüm yapmaya çalışmıştır fakat işlem hatası yaptığı için sonucu yanlış bulmuştur bulduğu sonuç gerçek hayatla uyumlu bir sonuç olmamasına karşın Hale'nin bu duruma dikkat etmediği ve hatasını fark etmediği görülmüştür. Araştırmacının doğru olup olmadığı ile ilgili sorusunun sonrasında sağlama yaparak yanlış yaptığını fark etmiştir ve sonrasında doğrusunu yapmıştır.

➤ Hale'nin grafik çiziminin nasıl yapılacağına dair x ve y değişkenlerini değer verileceği bilgisine sahip olduğu ve devamında gelen işlemleri zorlanmadan yaptığı görülmektedir. Hale'nin belli bir bilgi birikiminin olduğu fakat etkili tartışmalar ve açıklamalar yapmadan direk işlem odaklı ilerlediği görülmüştür. Bu sebeple hatalarını fark etmekte zorlanmıştır. Hale'nin matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

Hale'nin “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.21’de gösterilmiştir.

Tablo 4.21.

Hale'nin “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Hale	AR _{dgy}	AR _{dgx}	AR _{ygy}	AR _{ogy}

Tablo 4.21 incelendiğinde, Hale'nin incelenen dört problemin tamamında algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Hale üçüncü problem dışındaki tüm sorulara doğru veya muhtemel doğru cevap verirken problemlerin tamamında global akıl yürütme sergilemiştir. Hale akıl yürütme sürecinde genellikle yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.10. Hülya'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Hülya'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya'nın birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soru ile ilgili ne düşündün?

Hülya: Yerlerini vermişler. Koordinatlarını yazmamızı istemişler. Ben teker teker koordinatlarını buldum.

Mülakatçı: evet.

Hülya: Ben x ve y ye dikkat ettim karıştırmamak için. Önce x i yazdım. Sonra y yi yazdım. Mesela Tortum Şelalesini yazdım. X bölümü -1 den -8 e doğru. Böylece buldum koordinatlarını.

Mülakatçı: bir noktanın koordinatı denilince ne anlıyorsun? Aklına ne geliyor?

Hülya: y ve x eksenleri arasında bulunan yer geliyor.

Mülakatçı: peki koordinat sistemi denilince ne aklına geliyor?

Hülya: iki eksenin kesiştiği yerlerde oluşan bir düzlemdir.

Mülakatçı: peki. Sıralı ikili ne demek?

Hülya: sıralı ikili eee hocam bilmiyorum.

Mülakatçı: Peki orijin ev olsaydı nasıl olurdu?

Hülya: Hocam şimdi bu eve göre bütün koordinat sistemindeki yerler belirlenmiş. Bu yer orijin olsaydı aynı kalmayacaktı. Aynı mesafede kalmayacaktı. O yüzden değişiklik olur dedim.

Mülakatçı: Peki herhangi bir yer için bir örnek verir misin? Herhangi bir noktanın nasıl değişim gösterdiğine dair?

Hülya: Hocam Havuz başı buraya kayar. (Evden 8 kare sola kaydı)

Mülakatçı: Yani havuz başının normalde koordinatı neydi?

Hülya: Orijindeydi $(0, 0)$ dı.

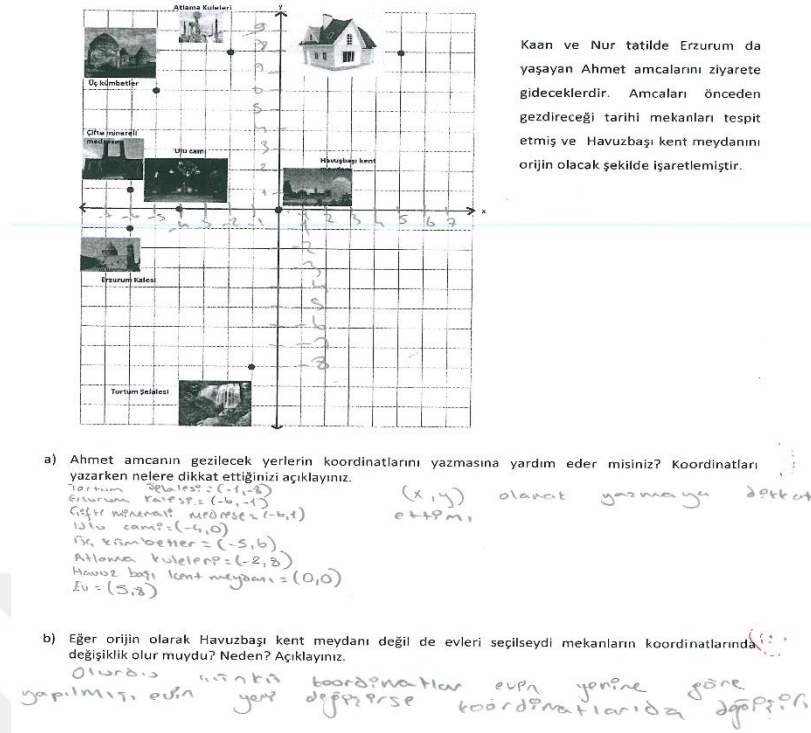
Mülakatçı: Şimdi ne oldu?

Hülya: Şimdi $(8, -5)$ oldu.

Mülakatçı: Yani Havuz başı buraya mı gelmiş olur?

Hülya: Evet buraya gelmiş olur.

Mülakatçı: Peki.



Şekil 4.97. Hülya'nın birinci probleme ait çözümü

Hülya'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hülya'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) koordinat ii) koordinat sistemi iii) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hülya bir noktanın koordinatını “*y ve x eksenleri arasında bulunan yer*” olarak ifade etmiştir. Bu ifade matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir. Koordinat sistemini ise “*iki eksenin kesiştiği yerlerde oluşan bir düzlemdir*” tanımlamasını kullanmıştır bu tanım matematiksel olarak kabul edilebilir.

➤ Hülya zorlanmadan tarihi mekânların koordinatlarını yazabilmiştir. Koordinatları yazarken x ve y değerlerinin yazım sırasına dikkat ettiğini “*Ben x ve y ye dikkat ettim karıştırmamak için. Önce x i yazdım. Sonra y yi yazdım. Mesela Tortum Şelalesini yazdım. x bölümü -1 den -8 e doğru. Böylece buldum koordinatlarını*” ifadeleriyle belirtmiştir. Bir noktanın koordinatı ile ilgili eksik bir tanımlama getirmiş olsa da koordinat sistemini doğru bir şekilde ifade etmiştir. Koordinat sistemi konusunun önemli bir kavramı olan sıralı ikili kavramını ise bilmediğini “*sıralı ikili eee hocam bilmiyorum*” cümlesiyle ifade etmiştir. b şıkkında ise, “*Hocam şimdi bu eve göre bütün koordinat sistemindeki yerler belirlenmiş. Bu yer orijin olsaydı aynı*

kalmayacaktı. Aynı mesafede kalmayacaktı. O yüzden değişiklik olur dedim” sözleriyle ifade etmiştir. Hülya’nın değişiklik olacağının farkındadır fakat orijinin değişmesiyle koordinatlarda ki değişikliği gösterememiştir. Havuzbaşının koordinatlarını yazarken, y ekseninde hiç değişiklik olmayacakmış algısıyla yanlış bir sonuca ulaşmıştır. Bu durumun sebebi, dikkatsizlik hatası veya ye bir duruma yönelik çözüm geliştirememesindeki eksiklik olabilir. Hülya’nın akıl yürütme türünün AR ye yakın olduğu görülmektedir. Hülya’nın koordinatları doğru yazarken b şıkında değişikliği doğru bir şekilde yazamaması nedeniyle doğruluk kategorisi olası (o) olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Hülya koordinatları yazmakta zorlanmamıştır. Bu durumun sebebi koordinatları yazarken hangi kurallara dikkat etmesi gerektiğini bilmesinden kaynaklanmaktadır. Hülya’nın yer yer yaptığı işlemleri açıkladığı görülse de etkili tartışmalar geliştirmeden işlem yaptığı görülmektedir. Bu sebeple matematiksel özellik kategorisi belirsiz(x) olarak sınıflandırılmıştır. Hülya’nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yer yer derin yer yer yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogx} olarak belirlenmiştir.

-Hülya’nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya’nın ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Taksi sorusu ile ilgili ne düşündün?

Hülya: Açılış ücreti 3 olduğu için 3 yaptım. Her km içinde 1 TL dediği için de x dedim. $3 + x$ yazdım. x e değer verdim. 1 verseydim bu yazdığım $(x + 3)$ şey y ye eşit oluyor. 1 versem y 4, 2 versem 5 3 versem 6 oluyordu.

Mülakatçı: Güzel. Peki, x ve y ne demek.

Hülya: y km de alınan parayı x de o km yi ifade ediyor.

Mülakatçı: Peki ücret ve yol ilişkisini cebirsel olarak nasıl ifade edersin?

Hülya: Cebirsel olarak ifade edemem.

Mülakatçı: Neden?

Hülya: Çok uzak geliyor cebirsel bana.

Mülakatçı: Cebirsel olarak ifade etmek ne demek?

Hülya: Cebirsel hatırladığıma göre $+$, $-$ x miydi? Öyle bir şeydi hatırlıyorum. Ben soruda çıksa yaparım da tanım deyince aklıma gelmedi.

Mülakatçı: Yani tanımdan ziyade ücret ile yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmeni istiyorum. Veya denklem olarak.

Hülya: Denklem olarak şöyle yapabilirim mesela. y yerine 6 yazarım. $6 = 3 + x$ x i bulmak için de 3 le neyi

toplarsak 6 eder diye düşünerek 3 bulurum. Bu 3 km de 6 TL ödemiş oluyor. Öyle buldum.

Mülakatçı: Güzel. Peki, ücret ile yol arasındaki ilişkinin grafiğini çizmeni istiyorum. Nasıl çizersin?

Hülya: İki tane doğru yapıyoruz. Bu iki doğru da sayılar oluyor hocam. Biri alınan yol öbürü ödenecek ücret. Alınan yol x di, 1, 2, 3 de böyle gidebilir. Y de ücretimizdi. Ücretide 7 ye kadar yaptım. Burada demiş ki (tabloya bakıyor) 1 km de 4 TL ödüyorsun. Grafikte gösterdim öbürlerini de aynı şekilde yaptım. Sonra da grafik çizdim.

Mülakatçı: Grafikte ilgili doğru yapıp yapmadığınla ilgili ne düşünüyorsun?

Hülya: Bence doğru yaptım. Çünkü öbür değerleri eğer doğru verdimse grafikte kendiliğinden doğru olması gerekiyor.

Mülakatçı: Peki grafik senin çizdiğine gör aşağıya doğru devam ediyor. Öyle mi?

Hülya: Evet.

Mülakatçı: eee. Şu tam köşeden geçiyor mu grafik?

Hülya: Geçiyor.

Mülakatçı: peki köşe neresi?

Hülya: (0, 0)

Mülakatçı: Orijin mi?

Hülya: Evet orijin.

Mülakatçı: Yani grafik orijinden geçiyor mu?

Hülya: Geçer hocam orijinden.

Mülakatçı: Peki tamam.

Mülakatçı: Ödenecek ücret ile yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersin?

Hülya: Aralarında hep 3 TL fark var. 1 de 4, 6 da 9 TL ödeyeceksin.

Mülakatçı: Yani km ile ücret arasında 3 TL fark var?

Hülya: evet 3 fazlası

Mülakatçı: Peki bu grafik neden yukarı doğru gidiyor?

Hülya: Hocam şimdi ben 3 e kadar yaptım 12 yapabilirim. 100 yapabilirim. Bu yukarı götürüyor. Genişliği ve yüksekliği için belki eksiklerde de yapabilirdim. O da aşağı götürürdü.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti olmasaydı ama km başına 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu?

Hülya: Olurdu hocam. Bu ilk aldığımız 3 TL değişirdi.

Mülakatçı: Nasıl bir değişiklik olurdu?

Hülya: Mesela km de 1 TL öderdik. 2 km d 2 TL öderdik. Yani ikisi aynı olurdu x ve y alınan ücret ve yol arasında değişme olmazdı. Sabit olurdu ikisi de.

Mülakatçı: O grafiği çizebilir misin?

Hülya: Evet.

Mülakatçı: Ne yaptığını anlatır mısın?

Hülya: Şimdi 1 TL de tabloda da yararlanabilirdin. $x=y$ olması gerekiyor. Bu (x) 1 se bu (y) de 1 olması gerekiyor. Hepsini aynı şekilde yaptım. Ortadan da çizdim.

Mülakatçı: Peki önceden çizilen grafikte şimdiki yeni grafik arasında fark var mı?

Hülya: Var hocam.

Mülakatçı: Nasıl bir fark var?

Hülya: Zaten şekillerden de belli oluyor. Bu (yeni) böyle biraz yukarı giderken bu (eskisi) daha yatay gidiyor.

yaptığı şeyi adlandıramamıştır. Denklem deyince ise y değişkenine değer vererek $6=3+x$ denklemini söylemiştir. Grafik çiziminde ise, x ve y eksenlerine değerleri yazmıştır. x gidilecek yol y ise ücret olarak belirtmiştir. Sonrasında ise, tabloda yazdığı değerleri grafikte birleştirerek grafiği tamamlamıştır. Fakat grafiğin orijini kesip kesmediğini veya eksenleri kesme durumunu göz önüne almamıştır. x - y eksenlerinin negatif olduğu kısımlarda grafiğin değer alıp almayacağı ile ilgili yorum yapmamıştır. Hülya, problem durumundaki değişikliğin grafiği nasıl etkileyeceği ile ilgili yorum yapmıştır ve değerlerin değişeceğini söylemiştir fakat orijinden geçip geçmeme durumuna dikkat etmemiştir.

➤ Hülya, genel olarak aritmetik işlemlerini sürdürecektir temel bilgi birikimine sahiptir. İşlemlerini rahatlıkla sürdürmektedir fakat grafik çizerken bazı önemli noktalara ve grafiğin problem durumunu karşılamasına dikkat etmemiştir. Bu durumun sebebi kavramsal olarak bilgi eksikliğine sahip olması olabilir. Genellikle yaptığı işlemleri açıklamıştır. Zaman zaman derinlikli düşünce sergilemiş zaman zaman da yüzeysel düşünce sergilemiştir. Hülya'nın matematiksel akıl yürütme türü, hatalı işlemler yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yer yer yüzeysel yer yer derin düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ygx} olarak belirlenmiştir.

-Hülya'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya'nın üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Hocam iki mum varmış A ve B. A saatte 5 cm ama B 3 saatte 5 cm azalıyor. Hocam ben şöyle (yazdığını gösteriyor) gösterdim. 3 Saatte 5, 6 saatte 0 oluyor. B 3 saatte 5 cm azalıyor. B 20 cm di. 6 saatte 10 cm, 9 saatte 15 azalıyor. Böyle azalıyor git gide. 12 saatte de bitiyor. Her azaldığında 5 cm azaltacağız. 20 den çıkaracağız. A mumu saatte 5 cm azaldığı için bu 3 saatte 15 cm azalıyor. 15 kalıyor. A mumu 6 saatte 30 cm harcıyor. B mumu 12 saatte 5 cm ini harcıyor.

Mülakatçı: Güzel. Yani A ve B nin boy-zaman tablosunu böyle mi oluşturursun?

Hülya: Evet.

Mülakatçı: peki boy-zaman ilişkisini gösteren grafiği nasıl çizdin?

Hülya: Hocam bir A ver bir B var hocam. A ya baksak 3 saatte 5 cm azalıyordu. Yani $3x - 5$ oluyor. Buna değer versek $x=1$ olsa -2 olurdu.

Mülakatçı: Neden $3x - 5$ dedin?

Hülya: Saati x olarak gösterdim. 3 saat dediği için $3x$ oldu. Bu azalması da -5 oluyor.

Mülakatçı: Yani $3x - 5$ denklemini kurduktan sonra değer mi verdin?

Hülya: Evet.

Mülakatçı: Sonrada bulduğun noktaları birleştirdin?

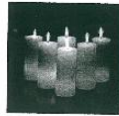
Hülya: Evet. A ya da saatte 5 cm azaldığı için $x - 5$ dedim.

Mülakatçı: Peki.

Mülakatçı: Peki A mumunun boy-zaman ilişkisini gösteren denklemi nasıl yazdın?

Hülya: Burada da $x - 5$ yazdım. Saati x yazdım. Azalmasını 5 yaptım.

Mülakatçı: Peki.



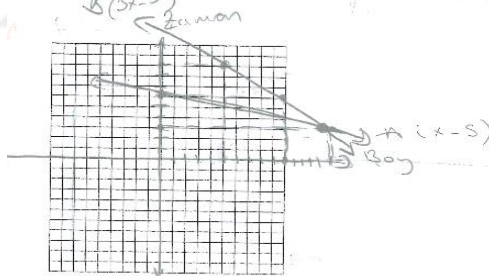
Boy 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

	A	B
3	15	15
6	10	10
9	5	5
12	0	0

A mumu 3 saatte biter,
B mumu 12 saatte biter.
A mumu B mumundan 2 kat
hızla biter. A
3 saat = 5, 6 saat = 10, 9 saat = 15
B mumu 3 saat = 5, 6 saat = 10, 9 saat = 15, 12 saat = 20

b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çizin.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

$A = x - 5$ saat x olarak ifade edilirse ve saatte 5 cm erimeye göre erime -5 olarak saat x olarak yazarak $x - 5$ 'i buluruz.

Şekil 4.99. Hülya'nın üçüncü probleme ait çözümü

Hülya'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hülya'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) boy, zaman ii) tablo iii) grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hly'nın bahsettiği "boy" ve "zaman" ifadeleri gerçek dnya bileşenidir. Hly'nın çizdiği tablo ve grafikler ise birer dnmdr. Hly'nın oluşturduğu tablo problemi karşılayacak niteliktedir fakat grafik eksikliklere sahip ve kurulan denklemler matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Hly'nın ncelikle mumların erimesiyle ilgili yorum yaptđđı kaç saatte biteceğini belirlediği ve sonrasında ise tablo yaptđđı grlmektedir. Hly'nın aynı tabloyu kullanarak B mumu 3 saatte 5 cm azaldđđı için zaman artđđını 3 er saat yaparak tek tabloda gsterdiği grlmektedir. Yaptđđı tablo doğrudur ve problem verilerini karşılamaktadır. Fakat grafik çizimine geçtiğinde Hly denklem kurarak zmne balamıtır. Değişkenlere anlam yklemitir fakat kurulan denklem problemi karşılayacak nitelikte değildir. Hly'nın "*Saati x olarak gsterdim. 3 saat dediği için $3x$ oldu. Bu azalması da -5 oluyor. A ya da saatte 5 cm azaldđđı için $x-5$ dedim.*" ifadeleri bu durumu desteklemektedir. Hly'nın denklem kurarken "*3 saat dediği için $3x$ ve azalması dediği için -5 dedim*" ifadeleri Hly'nın anahtar kelimeleri kullandđđının bir gstergesidir. Hly'nın grafiğine bakılacak olursa, aynı koordinat sistemi zerinde gsterebilmitir, x eksenini boy y eksenini zaman olarak gstermitir, fakat grafikte grafiklerin eksenleri kestiği noktalarla ilgili bir bilgi yoktur. Hly'nın etkili tartışmalar yapmadan, bilinen algoritmaları uygulayarak hatalı bir şekilde zme ulaştığı grlmektedir. Bu ynyle FAR akıl yrtme tr olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Hly tablo yaparken zorlanmadan işlemlerini yapmıştır. Verileri tablo ile ifade etme kazanımı ile ilgili anlamasının kuvvetli olduğu sylenebilir. Hly'nın grafik çizimi için denklemden faydalanması bir zm prosedr olabilir fakat Hly'nın kurduğu denklemler problemi sağlamamaktadır ve Hly b mumu ile ilgili $3x-5$ denkleminde "*Buna değer versek $x=1$ olsa -2 olurdu*" ifadesini kullanmasına rağmen hatasını fark edememiştir. Hly denklemini yorumlamadan tartışmalar yapmadan yazdığı kontrol etme gereği duymadığı için zorlanmıştır. Fakat anahtar kelime stratejisi her zaman doğru bir sonuca gtremeyebilir. Hly'nın algoritmik işlemler yapmakta zorlanmadđđı belli bilgi birikimine sahip olduğu grlmektedir fakat kavramsal anlamasının zayıflığından kaynaklanan hatalar yapmıştır. Hly'nın matematiksel akıl yrtme tr, muhtemel doğru zm yapıldđđından, tek tip akıl yrtme tr ve yzeyssel dnme yapısı sergilendiğinden FAR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

-Hülya'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Hülya'nın dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soruyla ilgili ne düşündün?

Hülya: Burada zaten vermiş. $Y=x/2+110$ bu ilişkiyi gösteriyormuş. Ben x e 10 versem. $10/2+110=115$ oluyor. $Y=115$, $x=10$ oluyor. 20 versek 120 olacaktı. Onu da tabloda şöyle gösterdim. Her kareyi 5 cm demiş. Birinci 10 oluyor. 2. De $20/2$ demiştik bu da 120 nin olduğu yer olacak. İkisini de birleştirtince böyle oluyor.

Mülakatçı: Peki grafiği doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Hülya: Bence doğru hocam. Değerler verdim. Değerler eşit birbirine eğer doğru saydıysam doğrudur. Hata yaptıysam hata olabilir.

Mülakatçı: İşlem hatası olabilir.

Hülya: Evet.

Mülakatçı: Grafiğin doğrusal olup olmadığı hakkında ne düşünüyorsun?

Hülya: Bence doğrusal 10 verdik 115 oldu, 20, 120, 30, 125 oluyor. Hani her seferinde 5 er fazla oluyor.

Mülakatçı: Güzel. Peki, kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursun?

Hülya: Ben kan basıncı y olarak ifade ediyor, y nin yerine 145 yazarız. Bunu bir denklem yaptım. Denklemde bilinmeyenler ve tamsayılar bölümüne getirdim. 110 bilinmeyenler tarafında olduğu için tamsayılar tarafına getirdim. Eksi oldu 35 kaldı. $35=x/2$ oldu.

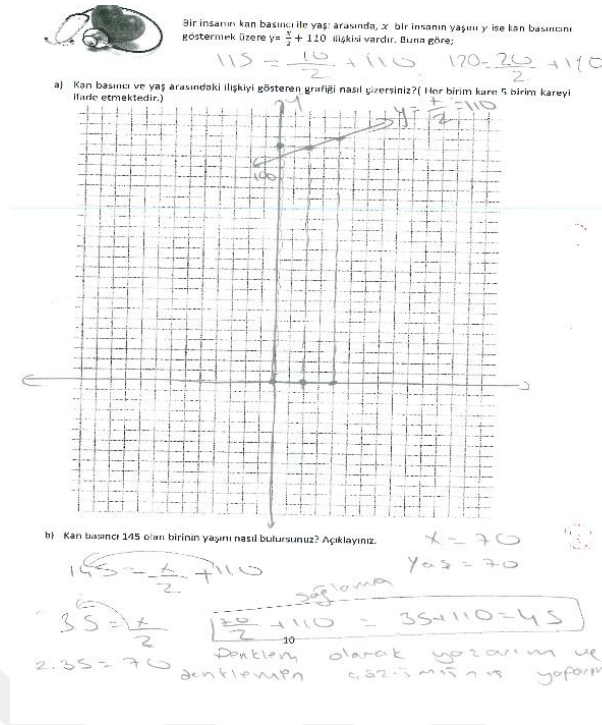
$$145 = x/2 + 110$$

$$145 - 110 = x/2$$

$$35 = x/2$$

2 yi de çarpı götürdüm. $x = 70$ oldu. Yaşı 70 miş.

Mülakatçı: peki.



Şekil 4.100. Hülya'nın dördüncü probleme ait çözümü

Hülya'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Hülya'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) denklem iii) grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Hülya'nın belirttiği “kan basıncı” ve “yaş” gerçek dünya bileşenidir. Hülya b şikkında denklemi çözdükten sonra bulduğu değerin yaş olduğunu ifade etmiştir. Bu şekilde modelleme özelliğinin üç safhasını da gerçekleştirmiş olmaktadır. Denklem ve grafik ise birer dönüşümdür.

➤ Hülya soruyu okuduktan sonra x e değer vermeye başlamıştır. x için 10 ve 20 değerlerini verdikten sonra grafik çizimine geçmiştir. Çözümünü “ $y = \frac{x}{2} + 110$ bu ilişkiyi gösteriyormuş. Ben x e 10 versem. $10/2 + 110 = 115$ oluyor. $y = 115$, $x = 10$ oluyor. 20 versek 120 olacaktı. Onu da tabloda şöyle gösterdim. Her kareyi 5 cm demiş.” şeklinde yapmıştır. Grafik çiziminde ise, bulduğu değerleri göstermiştir. Grafiğin doğruluğu hakkında sadece değerlerde işlem hatası yapıldığında grafiğin hatalı olabileceğini düşünmektedir. Grafik ile ilgili eksenleri kestiği noktanın net olarak belli olmadığı, grafiğin x in negatif değerlerinde devam ettiği bir grafik çizmiştir. Hülya grafiğin probleme uygun olup olmadığını düşünmeden direk işlemler bütününe takip

ederek yapmıştır. b şıkında ise, denklemi kullanarak y yerine kan basıncı değerini yazmıştır ve denklemi rahatlıkla çözerek sonuca ulaşmıştır. Hülya'nın akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Hülya'nın grafik çiziminde ve denklem çözümünde zorlanmadan işlemlerini rahatlıkla yapması Hülya'nın belli bir düzeyde bilgi birikiminin olduğunu göstermektedir. Fakat grafik çiziminde bazı önemli noktaları (grafikğin negatif değerler alıp almayacağı) dikkate almadan işlem yapması kavramsal anlamasında bir takım eksiklikler olabileceğini düşündürmektedir. Hülya'nın genel olarak ne yaptığının farkında olduğu görülmektedir. Fakat genel anlamda yüzeysel bir bakış acısı hâkimdir. Hülya'nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogy} olarak sınıflandırılmıştır.

Hülya'nın “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.22’de gösterilmiştir.

Tablo 4.22.

Hülya'nın “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Hülya	AR_{ogx}	AR_{ygx}	FAR_{ogy}	AR_{ogy}

Tablo 4.22 incelendiğinde, Hülya'nın incelenen beş problemin dördünde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne, bir tanesinde bilinen algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Hülya ikinci problem dışındaki tüm sorulara muhtemel doğru cevap verirken problemlerin tamamında global akıl yürütme sergilemiştir. Hülya akıl yürütme sürecinde bazı sorularda derinlikli bazı sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.11. Rabia'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Rabia'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia'nın birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Rabia: Bunların noktalarını soracağımı tahmin etmiştim. Soruyu okudum. Burada Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Yani bunların noktalarını bulmamız gerekiyor. Aslında bizi eğlenceli gibi gösterip noktaları buldurmayı pekiştirmemiz için yapılmış. Bakıyoruz işte (0,0) orijin kabul edilmiş. Tek tek bakıyoruz, bu noktalara bakıyoruz Ulucami (-4,0) mesela yazarak gösterdim.

Mülakatçı: Peki Rabia, sıralı ikili ne demek?

Rabia: Sıralı ikili (x, y). Yani bunlar sıralı ikilidir. Bunlara değer vererek sıralı ikili oluştururuz.

Mülakatçı: Peki bu soru ile ilgili yanlış veya doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Rabia: Nasıl yani?

Mülakatçı: Hani cevabından emin misin?

Rabia: Kesinlikle eminim diyemem ama belki yanlışlarım olabilir. Ama rastgele bir yer seçeriz (-6, -1) Ulu Cami miymiş? 1 dk. (-6,-1) eee Çifte Minareli Medreseymiş. Doğru yapmışım veya rastgele Atlama Kulelerine bakalım. (-2, 8) bakıyorum (-2,8) doğru yapmışım. Böyle rastgele seçip doğru yaptığımızı kontrol edebiliriz.

Rabia: eee burada demiş ki orijin Havuz başı değil de başka bir yer seçilseydi değişiklik olur muydu? Diye soruyor. Yani bir mesele okulu orijin

olarak kabul edip ve Migros'u, Akgün sitesini filan hep benim okula göre söylersek gelen bulabilir. Ama eğer biz Akgül sitesini orijin olarak kabul edip vermeye çalışırsak aradaki değerler farklılaşır. Çünkü burada biz eğer mesela ben size göre siz benim sağımdaysanız ona göre başka biri hakkında sizi tanımayan biri gelse benim sağımda sizi görse tanıyabilir. Ama eğer ben başka biri üzerinden sizi söyleseydim aynı olmazdı, yani farklı olurdu.

Mülakatçı: Güzel. Peki, üstteki yerlerden herhangi birinin konumu hakkında b şıkkını değerlendirebilir misin?

Rabia: Ama çizmem lazım evler seçilseydi böyle olurdu (ev üzerine orijin çizdi). Bu şekilde olurdu. Şurayı daha da keskinleştirelim. Bu orijin kabul edilseydi. Bakıyoruz (çizdiği doğru üzerinde değerleri yazdı). Mesela şimdiki eski orijini yani orijine göre tarif ederken, -8'e 5 olur. Eee bir dakika. Hayır, (-5, -8) olur yazdı.

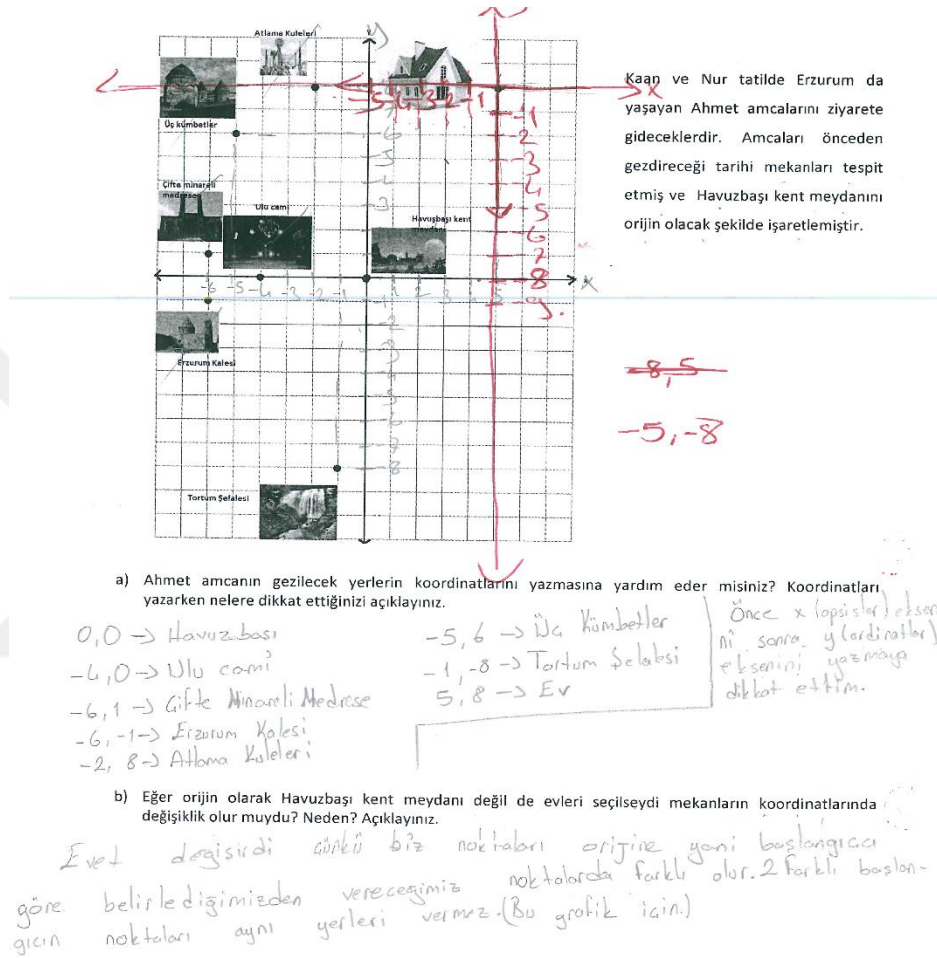
Mülakatçı: Peki. Bir noktanın koordinatı denildiğinde ne arıyorsun?

Rabia: O noktanın konumunun nerde olduğunu. Mesela ben böyle biliyorum, böyle olmasını tahmin ediyorum. Uçaklarda falan hep böyle. Hani Afyon demez de noktalar belirler, bu noktalara iniş yapılır, yani ben öyle biliyorum. Uçaklarda koordinatların kullanıldığını onlar için daha kolay olur ölçümlerde falan hem yanlış payı daha az olur, hem

de kesin bir sonuca varılacağını düşünüyorum.

Mülakatçı: Peki. Koordinat sistemi ne demek?

Rabia: koordinat sistemi x ve y eksenlerinin dik olarak kesişmesiyle oluşan sistemdir.



Şekil 4.101. Rabia'nın birinci probleme ait çözümü

Rabia'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) koordinat ii) koordinat sistemi iii) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Sıralı ikili kavramını “Sıralı ikili (x, y) . Yani bunlar sıralı ikilidir. Bunlara değer vererek sıralı ikili oluştururuz” olarak tanımlamıştır. Bu tanım matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Rabia koordinat sistemini “koordinat sistemi x ve y

eksenlerinin dik olarak kesişmesiyle oluşan sistemdir. Düzlemde diyebiliriz.” olarak tanımlamıştır. Bu tanım matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir. Rabia koordinatı ise, “O noktanın konumunun nerde olduğunu” Diyerek doğru ve matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliğe değinmiştir.

➤ Rabia soruyu okurken sorudan anladığını ve nasıl yapacağını ifade etmiştir ” *Bunların noktalarını soracağını tahmin etmiştim. Soruyu okudum. Burada Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Yani bunların noktalarını bulmamız gerekiyor. Aslında bizi eğlenceli gibi gösterip noktaları buldurmayı pekiştirmemiz için yapılmış. Bakıyoruz işte (0, 0) orijin kabul edilmiş. Tek tek bakıyoruz, bu noktalara bakıyoruz Ulucami (-4, 0) mesela yazarak gösterdim”* ifadeleri bu durumu destekler niteliktedir. Rabia’nın kendinden emin cevapları dikkat çekmektedir. Sıralı ikili kavramını “*Sıralı ikili (x, y). Yani bunlar sıralı ikilidir. Bunlara değer vererek sıralı ikili oluştururuz*” olarak tanımlamıştır. Bir noktanın koordinatını ise, *O noktanın konumunun nerde olduğunu. Mesela ben böyle biliyorum, böyle olmasını tahmin ediyorum. Uçaklarda falan hep böyle. Hani Afyon demez de noktalar belirlir, bu noktalara iniş yapılır, yani ben öyle biliyorum. Uçaklarda koordinatların kullanıldığını onlar için daha kolay olur ölçümlerde falan hem yanlış payı daha az olur, hem de kesin bir sonuca varılacağını düşünüyorum”* olarak ifade etmiştir. Rabia’nın ne yaptığının farkında olması ve kavramsal altyapısının kuvvetli olması kolayca cevap vermesinde etkili olabilir. Rabia doğru yapıp yapmadığını kontrol ederek sağlam adımlarla ilerlemeyi seçmektedir. b şikkında ise, katılımcının sorunun cevabını verirken farklı örnekler üzerinden cevabını tartışarak vermiştir. Rabia’nın “*eee burada demiş ki orijin Havuz başı değil de başka bir yer seçilseydi değişiklik olur muydu? Diye soruyor. Yani bir mesele okulu orijin olarak kabul edip ve Migros’u, Akgün sitesini filan hep benim okula göre söylersek gelen bulabilir. Ama eğer biz Akgül sitesini orijin olarak kabul edip vermeye çalışırsak aradaki değerler farklılaşır. Çünkü burada biz eğer mesela ben size göre siz benim sağımdaysanız ona göre başka biri hakkında sizi tanımayan biri gelse benim sağımda sizi görse tanıyabilir. Ama eğer ben başka biri üzerinden sizi söyleseydim aynı olmazdı, yani farklı olurdu”* bu durumu destekler niteliktedir. Bu düşüncesini bir örnekle koordinat belirleyerek kesinleştirmiştir. “*Mesela şimdiki eski orijini yani orijine göre tarif ederken, -8’e 5 olur. Eee bir dakika. Hayır, (-*

5, -8) olur” ifadesinde yaptığı işlemi doğru bir şekilde anlatmıştır. Rabia’nın akıl yürütme türünün CR ye yakın olduğu görülmektedir.

➤ Rabia zorlanmadan çözüm yapmıştır. Koordinatları zorlanmadan bulduğu, yaptığı her işlemi tartışarak ve açıklayarak yapması kavramsal altyapısının kuvvetli olduğunun bir göstergesidir. Bu anlamda katılımcının genel olarak derin bir düşünce yapısı sergilediği görülmektedir. Doğru çözüm yapan Rabia’nın matematiksel akıl yürütme türü, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünce yapısı sergilenmesinden CR_{dgd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Rabia’nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia’nın ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soruyla ilgili nasıl düşündün?

Rabia: Bu da zaten telefonlara benziyordu açılış ücreti. Her km 1 TL orda her dk. İdi. Burada her km demiş. Bakıyorum ilk soruyu okuyorum ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişki ile tablo yapın. Yani x ve y değerler veren bu değerlerin artışını yazın diyor. Bakıyoruz km 1 fiyat yazıyoruz önce 1 km de 3 TL kesin açılış ücreti var. $3 + 1 = 4$ demişim. Çünkü burada 1 km de 4 TL vermesi gerekiyor. 2 ‘de 5, 3 de 6. Her kilometresi 1 TL olduğu için her seferinde 1 TL artar.

Km	Fiyat
1	$3 + 1.1 = 4$
2	$3 + 1.2 = 5$
3	$3 + 1.3 = 6$

Mülakatçı: Peki aradaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade etmek istersek nasıl ederiz?

Rabia: Cebirsel olarak, yani bize bir nevi denklem kurmamızı istiyor. Mesela

burada y ’ye ücret demişim. y ücret olunca bakıyoruz 3’ü zaten ilk başta yazmak zorundayım (üstteki tabloya bakarak yazıyor) Sonra $x.1$ dedim, 1 her km için 1 TL verdiği için gidilen yer ücreti mutlaka etkileyecek. X dedim çünkü ne kadar gideceğini bilmiyorum. O yüzden $3 +$ alınan yol ile 1’i çarpınca ücreti veriyor.

Mülakatçı: Ödenecek ücret ile yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çizebilir misin?

Rabia: Hı hı

Mülakatçı: Nasıl çizersin?

Rabia: Önce şuradaki (tablo) değerlere baktım. 1 TL, 1tl arttığını görünce işe bunu dökmek aslında kolay oldu. Tablodakini grafiğe çevireceğiz. Grafiğimizi çiziyoruz, değerlerini yazıyoruz. Bir eksene km değerine ücret diyoruz. Eğer bunları denersek hangisinin ne olduğunu karıştırır ve yanlış işlemler yaparız. Bakınca ilk km de 4, 2.’de 5, 3.’de 6, 4.’de 7 diye devam eder. Bunu fark ettim. İşte bunu çizdikten sonra bunu oluşturdum.

Mülakatçı: Peki grafikte ilgili bir şey dikkatini çekti mi?

Rabia: Nasıl yani?

Mülakatçı: Yani şöyle sorayım. Doğru yapıp yapmadığından emin misin?

Rabia: Evet eminim. Çünkü sürekli böyle artmış, sabit kalmamış veya aşağıya doğru düşmemiş. Her mesafe kat ettikçe ücrette artacağına göre, bu grafik böyle çıkması lazım.

Mülakatçı: Peki. Ücret ile yol arasında nasıl bir ilişki var?

Rabia: Ücret, yani vereceğimiz para 3 TL nin üzerine kaç km gittiysek vereceğimiz tutardır. Yani taksici bizden açılış ücretini birde aldığımız yolun parasını almak zorunda. Yani yol arttıkça ücrette artacak.

Mülakatçı: Güzel. Peki, açılış ücreti alınmasaydı ama yine her km 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz?

Rabia: Çizebilir miyim?

Mülakatçı: Tabi.

Rabia: Bir eksene km, bir eksene ücreti yazacağım. Bu sefer açılış ücreti olmadığı için 3 TL yi hiç hesaba katmayacağım. Bu seferde eşit olur. 1 km de 1, 2 de 2, 3 de 3 TL. Bu müşteri açısından daha uygundur. Cebimden daha az para çıkacak ve gideceği yere daha az cüzi bir miktarda gitmiş oluyor. Burada da yine değişen bir şey olmadı. Grafikte, yani burada sadece alttaki suretten 3tl çıkarmış olduk. Yani, pek bir şey fark etmedi. Yine gittiğimiz yol arttıkça vereceğimiz ücret artacak.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti 3 TL ama her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu?

Rabia: Bu taksici için daha hesaplı olurdu. Çünkü daha fazla para alıyordu. Grafiği yine çizdim. Burada işlemleri de var. Eğer açılış ücreti 3 TL olsaydı ve her km 2 TL olsaydı ilki 5 TL olacaktı. Sonrakiler 2 şer 2 şer artacaktı. Görüldüğü gibi zaten değerler artmış. Müşterinin verdiği para yol arttıkça daha da artıyor.

Mülakatçı: Peki



Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesini;
Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

2) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

Km	€ Fiyat	x	y
1	$3+1.1=4$	1	$3+1.1=4$
2	$3+1.2=5$	2	$3+1.2=5$
3	$3+1.3=6$	3	$3+1.3=6$

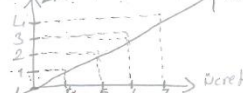
$x \Rightarrow \text{km}$
 $y \Rightarrow \text{€ (ücret)}$

3) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$3 + x \cdot 1 = y$$

$$x = \text{km} \quad y = \text{ücret}$$

4) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çiziniz.



5) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersiniz. Neden.

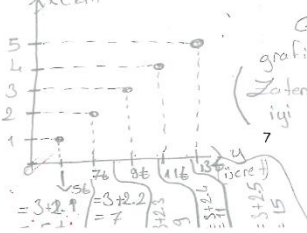
Ücret = alınan yolun parası + açılış ücreti. Çünkü zaten taksiye biner binmez 3tl verilecek. Bir de gidilen yolun parası var. Yani ödeneceklerimiz tutar / ücret gittiğimiz yol + 3tl'dir.

6) Taksi tarifesini, açılış ücreti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

Evet olurdu. Çünkü taksiye biner binmez direkt olarak 3tl vermek gerekiyor. Eğer açılış ücreti alınmasaydı kişi biner binmez 3tl vermesi gerekmiyordu. Sadece gittiği yol kadar para verecekti ve bu müşteri açısından daha avantajlıydı.

7) Taksi tarifesini açılış ücreti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

Evet olurdu.



Görüldüğü gibi değerler arttı ve grafikteki ücret yerleri biraz arttı. (Zaten grafiği çizip bakınca daha iyi kavranır.)

Şekil 4.102. Rabia'nın ikinci probleme ait çözümü

Rabia'nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) km, ücret ii) tablo, grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Rabia'nın belirttiği "km" ve "ücret" birer gerçek dünya nesnesidir. Rabia'nın oluşturduğu tablo ve grafik ise birer dönüşümdür. Tablo problem durumunu karşılayan ve matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir fakat Rabia'nın çizdiği grafikte eksiklikler vardır.

➤ Rabia, soruyu okuduktan sonra önceki deneyimlerinden farklı bir soruya benzediğini ifade etmiştir. Tablo oluştururken km olarak değerler denedikten sonra

tabloya yazmıştır. Yol ve ücret arasındaki ilişkinin cebirsel ifadesini yazarken ilk olarak değişkenlere anlam yüklemiştir. Sonrasında ise doğru olarak cebirsel ifadeyi yazabilmiştir. Grafik çiziminde, tabloda yazdığı değerleri grafiğe taşımaya başlamıştır. Koordinat sisteminde x eksenini ücret ve y eksenini km olarak belirlemiştir. Sonrasında tablodaki değerlere göre grafiği oluşturmuştur. Fakat Rabia, grafiğin orijinden geçip geçmemesi durumunu, eksenleri kesme durumunu ve eksenlerin negatif kısımlarında grafiğin değer alıp almayacağını dikkate almamıştır. Grafiğin doğruluğundan emindir çünkü km arttıkça ücretin arttığını ve artan bir grafik çıkması gerektiğini düşünmektedir çizdiği grafik bu şartları sağladığı için hatasını fark edememiştir. Problem durumunda değişiklik olması durumunda grafikte ne gibi değişiklik olacağı ile ilgili Rabia, tekrar grafiği çizerek cevap vermek istemiştir. Rabia, grafiğin orijinden geçip geçmemesi ile ilgili herhangi bir yorum yapmamıştır. Grafikte çok fazla bir şey değişmediğini sadece niceliksel bir fark olduğunu düşünmüştür. Rabia'nın akıl yürütme türü, önceki deneyimlerinden hatırladığı algoritmaya göre strateji seçimi yaptığından, AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Rabia'nın zorlanmasının nedeni, grafikte eksenlerdeki değerlerin aralıklarını eşit almaması ve noktaları gösterdikten sonra grafiği orijinden geçip geçmediğini kontrol etmemesinden kaynaklanmaktadır. Rabia algoritmik işlemleri uygulayabilecek bilgi birikimine sahiptir. Bu sebeple kendinden emin tavrı dikkat çekmektedir. Yaptığı işlemleri açıklamaktadır. Genellikle derinlikli bir düşünce yapısına sahiptir. Rabia'nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünce yapısı sergilendiğinden AR_{ogd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Rabia'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia'nın üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soru ile ilgili ne düşündün?

Rabia: Önce soruyu okudum ve parçalara ayırdım. Boyu 30 cm olan A mumu, o zaman A'ya 30 cm, B'ye 20 cm yazmam gerektiğini düşünüyorum. Yazdım. Devamını arıyorum. Benden isteneni bulmak için. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. Aynı anda

yakılıyorlar ve eriycekler. A mumu saatte 5 cm azalıyor. B mumu 3 saatte 5 cm azalıyor. Yani B mumu daha uzun süre dayanır. Hemen bunun tablosunu istemiş zaten. Altta A'ya bakıyoruz. Y boy dedim. 30 dan 5 çıkınca ilk saati buluruz. 30 'dan 5 çıkınca zaten ilki bu. Herkes bunu böyle yapar. 30 – 10 çıkarmamın nedeni çünkü biz birinciye

göre ayarlıyoruz. Ha buraya 25 – 5 de yazabilirdik. Her seferinde işlemi bir öteye atmış olurduk ama böyle hem daha doğru olur hem de anlaşılması kolay olur.

Mülakatçı: Koordinat sisteminde A ve B'nin boy zaman ilişkisini gösteren bir grafik çizin demiştik. Nasıl çizdin?

Rabia: Önce işte değerlerine baktım. Hangisi kaç saatte ne kadar kalmış diye. Sonra bunları yazdım. Bakıyorum 3 saatte 15 cm azalıyor. 15 cm boyu kalıyor. Diğer değerleri de buldum ve noktaları birleştirdim ve B mumuna baktım. A mumunun 1 saatte eridiğini, B mumu 3 saatte eriyor. Ve bunun (3, 15) noktasında kesiştiğini gördüm.

Mülakatçı: Peki grafiği doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Rabia: Doğru yaptığımı düşünüyorum. Mesela rastgele bakalım şimdi. x 'e zaman dedik bakıyorum (tabloya) 1 saatte 25 olmuş. Yani 25 kalmış. 1'e 25 tutuyor. Noktaları hiç böyle farkında değilmiş gibi hani hiç çizilmemiş gibi tekrar bakınca yanlışımız varsa rastgele bir noktada buluyoruz. Mesela noktayı bulmuşum. ((3, 15)i gösteriyor) (3, 15)'de 3 x , y 15 miş bakınca doğru yaptığımı anlayabiliyorum.

Mülakatçı: Peki grafikler bu şekilde aşağıya doğru devam edecek mi?

Rabia: ... eee A mumu 30 cm ve her saatte 5 cm kısalıyorsa x 'e zaman deriz. Böylece $30 - x.5 = y$ denklemi ortaya çıkar. Burada 30 mumun boyunu $-x.5$ te mumun saate göre kısalma uzunluğunu verir.



Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

A 30cm B 20cm

a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.

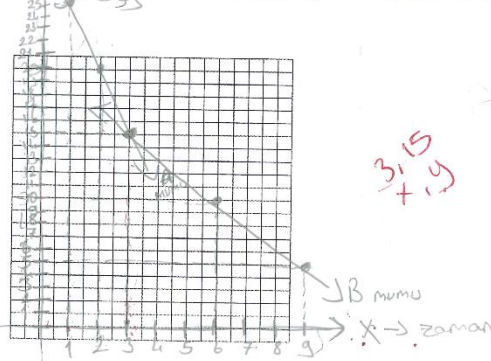
Y ⇒ Boy
X ⇒ Zaman

A		B	
Y	X	Y	X
30-5	1 saat	20-5	3 saat
30-10	2 saat	20-10	6 saat
30-15	3 saat	20-15	9 saat
30-20	4 saat		

Y	X
25	1 saat
20	2 saat
15	3 saat

Y	X
15	3 saat
10	6 saat
5	9 saat

b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çiziniz.



c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuz açıklayınız.

$$30 - x \cdot 5 = Y$$

X = Zaman

Y = Boy

A mumu 30cm ve her saatte 5cm boyu kısalıyorsa x=zaman deriz. Ve böylece $30 - x \cdot 5 = Y(\text{zaman})$ denklemi ortaya çıkar. Burada 30 mumun boyunu $-x \cdot 5$ 'te mumun saate göre kısalma uzunluğunu verir.

Şekil 4.103. Rabia'nın üçüncü probleme ait çözümü

Rabia'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) tablo ii) grafik iii) boy, zaman bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Rabia'nın kurduğu denklem ve tablo matematiksel olarak kabul edilebilirdir ve problemi karşılamaktadır. Rabia'nın grafiği eksikliklere sahiptir ama muhtemel doğru olarak kabul edilebilir. Tablo ve grafik dönüşümlerdir. "Boy" ve "zaman" ise, gerçek hayat nesnesidir.

➤ Rabia soruyu okur okumaz parçalara ayırması gerektiğini düşünmüştür ve adım adım soruyu okuyarak işlemlerini ilerletmiştir. Tabloyu oluştururken ilk olarak aynı tablo üzerinde A ve B mumlarının boy zaman durumlarını gösterirken sonrasında tekrar ayrı ayrı da tablo yapmıştır. Tablodaki değerleri oluştururken öncelikle değişkenlere anlam yükleyerek başlamıştır. Değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmamıştır. Sonrasında ise tablodaki değerleri doldurmuştur. Grafik çizimini ise “Önce işte değerlerine baktım. Hangisi kaç saatte ne kadar kalmış diye. Sonra bunları yazdım. Bakıyorum 3 saatte 15 cm azalıyor. 15 cm boyu kalıyor. Diğer değerleri de buldum ve noktaları birleştirdim ve B mumuna baktım. A mumunun 1 saatte eridiğini, B mumu 3 saatte eriyor. Ve bunun (3, 15) noktasında kesiştiğini gördüm” ifadeleriyle açıklamıştır. Rabia grafiği çizerken grafiklerin eksenleri kestiği noktalara dikkat etmemiştir. Grafiğin doğruluğu ile ilgili grafiğinde rastgele değerleri deneyerek doğru olup olmadığını kontrol etmiştir. C şıkkında ise, Rabia’nın A mumunun boy zaman ilişkisini ifade eden denklemi doğru bir şekilde kurduğu görülmektedir. Rabia’nın ne yaptığının farkında olması, etkili tartışmalar yaparak ve yaptığı işlemleri açıklayarak kendinden emin bir şekilde ilerlemesi akıl yürütme türünün CR olarak sınıflanmasına sebep olmuştur.

➤ Rabia’nın değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmaması bu kazanımla ilgili önceki deneyimlerinde bilgi ve kavrama eksikliğinin olmamasından kaynaklanmaktadır. Rabia ne yaptığının farkındadır ve her yaptığı işlemin açıklamalarını da yapmaktadır. Rabia’nın genel olarak derin bir düşünme yapısı sergilediği görülmüştür. Rabia’nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünme yapısı sergilenmesinden CR_{ogd} olarak belirlenmiştir.

-Rabia’nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Rabia’nın dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasındaki ilişkiden bahsedilmiş. Nasıl düşündün?

Rabia: Her birim kareyi 5 br düşünün demiş. Ben burayı 5, 10 derken bu yaş olur, 10 yaşındakini bulun diyor. 0 yaşındaki biri 110’dur. Buna bakarız. 0 yaşındaki biri için önce x verilir, x, 0

olur. 0’ı 2’ye bölünce $0 + 110 = 110$ ’dur. Sonra 20 yaşındaki biri için $20:2 = 10, 110 + 10 = 120$ denklemi kan basıncı 120’dir. Bir dakika hocam ben bir daha düşünüyüm.

Mülakatçı: Peki sesli düşün. Kafan mı karıştı?

Rabia: Evet. Eee ben 10'u 0 olarak görünce şaşırdım. Tamam, sorun yokmuş. 10'u 2'ye bölünce 5, $5 + 110 = 115$ eder. 10 yaşındaki 115 eder, bunu yazarız. Biz hep 10, 20, 30 diye gittiğimiz için demek ki orada hep 2 kare var ve her seferinde 1 kare yukarı çıkıyor. Bakıyoruz 110'un devamını getiriyoruz.

Mülakatçı: Yani grafik bu şekilde olması gerekiyor diyorsun.

Rabia: Evet.

Mülakatçı: Doğru yapıp yapmadığın hakkında ne düşünüyorsun?

Rabia: Doğru yaptığımı düşünüyorum. Çünkü değer verirken mesela 0 yaşındaki biri için mesela 10 yaşındaki biri için $10/2 + 110 = 115$ bakalım grafiğe doğru yapmış mıyız? Evet yapmışız. 115

Mülakatçı: Peki. Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz diyor? Nasıl bulursun?

Rabia: Ters işlem yapacağız burada. Her zaman öğrendiğimiz gibi 145'den 110'u çıkaracağız. Şöyle yapalım; $145 = x/2 + 110$ deriz. Bunu denklem olarak çözelim. Buda bize daha kesin sonuç verir.

$$145 - 110 = \frac{x}{2}$$

$$135 = x/2$$

135, x 'in yarısına eşitse! Eee, bakarız buradan eee...(durakladı). Zaten burada da belirttiğim gibi bu sonucu buluruz. Bir dakika hocam ben bir düşünüyem.

Şimdi burada yaptığımı bakıyorum. Önceki yaptığım ile aynı sonuç çıkar mı diye bakıyorum.

Mülakatçı: Peki güzel.

Mülakatçı: Kafan mı karıştı?

Rabia: Hı hı.

Mülakatçı: Neden? Farklı sonuç mu çıkacak gibi geldi?

Rabia: Evet. Hangisinde hata yaptığımı bakıyorum.

Şimdi yaşla 110'u topluyorduk o zaman, $110 + x$ ay 1 dk. demiyorduk.

$$(145 - 110)/2 = x,$$

x'i verecek bu değer.

Mülakatçı: Peki doğrusunu yap.

Rabia: Basınç = yaş/2 + 110

$$145 = x/2 + 110$$

Bakıyoruz işlem önceliğine bakıyoruz. Önce bölmeyi yaparız, sonra toplamayı. O yüzden toplama sonraya kalır. O yüzden 110'u diğer tarafa atarız.

$$145 - 110 = x/2$$

$$135 = x/2$$

Yani bunu iki şekilde de yazabiliriz;

$$135 = x/2,$$

$$135.2 = x$$

$$270 = x$$

Dur tabi böyle bir yaş olur mu, onu ben bilmiyorum. Burda 17,5 buluruz burada 135 olmayacak, yanlış bulmuş 35 olacak. $35.2 = x$, $70 = x$ olur.

Bunun doğruluğunu kontrol etmek için yerine yazarız.

$$\text{Basınç} = 70/2 + 110$$

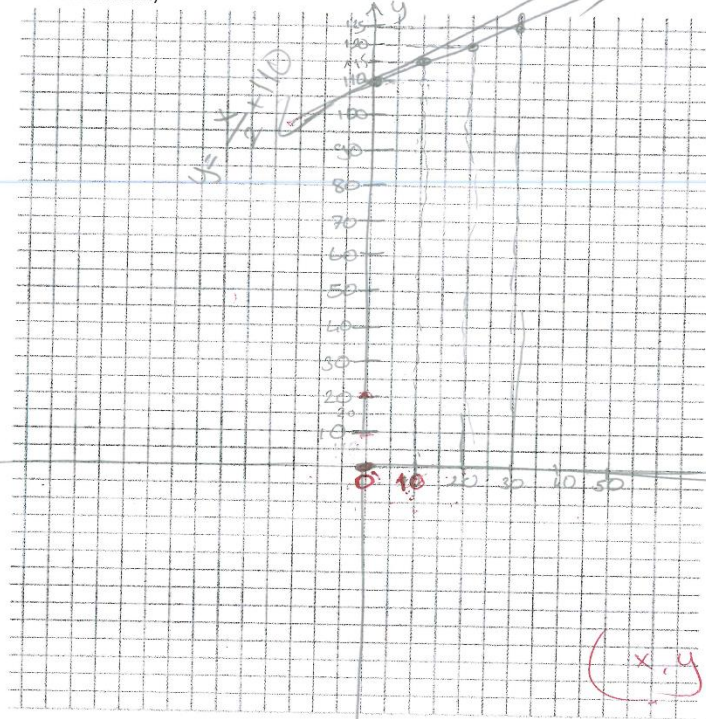
$$\text{Basınç} = 35 + 110$$

$\text{Basınç} = 145$ olur. Yani doğru bulmuyoruz.



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

- a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz? (Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



- b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

$$(145 - 110) : 2 = 17,5$$

Ters işlem yoluyla buluruz.

Şekil 4.104. Rabia'nın dördüncü probleme ait çözümü

Rabia'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Rabia'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) denklem, grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Rabia'nın belirttiği “yaş” ve “kan basıncı” ifadeleri birer gerçek dünya bileşeni olup Rabia sonuçta bulduğu değerlere göre tekrar gerçek dünyaya dönüş yapıp yorum yaptığından modelleme özelliği de sağlanmış olur. Denklem ve grafik ise birer dönüşümdür.

➤ Rabia soruyu okuduktan sonra yorum yapmaya başlamıştır. x e değer vererek çözüme başlamıştır. “Her birim kareyi 5 br düşünün demiş. Ben burayı 5, 10 derken bu

yaş olur, 10 yaşındakini bulun diyor. 0 yaşındaki biri 110'dur. Buna bakarız. 0 yaşındaki biri için önce x verilir, x , 0 olur. 0'ı 2'ye bölünce $0 + 110 = 110$ 'dur. Sonra 20 yaşındaki biri için $20:2 = 10$, $110 + 10 = 120$ denklemi kan basıncı 120'dir. Bir dakika hocam ben bir daha düşüneyim” ifadeleri Rabia'nın çözüm sürecini göstermektedir. Rabia bulduğu değerlere göre grafiği çizmiştir. Fakat grafiğin x ekseninin negatif bölümünde değer alıp almayacağına dikkat etmemiştir. Doğru yapıp yapmadığını kontrol ederken ise rastgele değerler deneyerek sadece işlemlerin doğruluğunu kontrol etmiştir. B şikkında ise, denklemde kan basıncı değerini y yerine yazarak çözüm yapmıştır fakat çözümünde dikkatsizlik hataları yapmıştır. Sonrasında kontrol ederken hatasını belirleyip doğru sonuca ulaşmıştır. Rabia'nın akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılabilir.

➤ Rabia grafiğin nasıl çizileceği ile ilgili bir bilgi birikimine sahiptir. Fakat bazı noktalarda kavramsal eksikliğe sahiptir. Rabia genel olarak ne yaptığının farkında ve yaptığı işlemlerin açıklamalarını yaparak ve doğruluğunu kontrol ederek emin adımlarla ilerleme yolunu seçmiştir ve genel olarak derin bir düşünce yapısına sahiptir. Rabia'nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme ve derin düşünme yapısı sergilendiğinden AR_{ogd} olarak sınıflandırılmıştır.

Rabia'nın “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.23'te gösterilmiştir.

Tablo 4.23.

Rabia'nın “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Rabia	CR_{dgd}	AR_{ogd}	CR_{ogd}	AR_{ogd}

Tablo 4.23 incelendiğinde, Rabia'nın incelenen dört problemin ikisinde yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türüne, iki tanesinde algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Rabia tüm sorulara doğru veya muhtemel doğru cevap verirken problemlerin tamamında global akıl yürütme

sergilemiştir. Rabia akıl yürütme sürecinde tüm sorularda derinlikli düşünce yapısına sahiptir.

4.1.2.12. Seda'nın Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

-Seda'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda'nın birinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Bu soruda ne düşündün?

Seda: Her kare 1 birim gösterdiği için şöyle çizdim. (noktaları gösteriyor) Burası bu taraf + olur 5, yukarı giderken + olur. Burası 8 olur. 5 e 8 oldu evi. Diğerlerini de aynı yaptım.

Mülakatçı: Peki noktalarını bulurken nelere dikkat ettin?

Seda: x ilk verilir, y x ten sonra verilir. Ona dikkat ettim. Bir de -, + ya dikkat ettim.

Mülakatçı: Peki bir noktanın koordinatı denilince ne aklına geliyor?

Seda: x i y sonra böyle tablo gibi bir şey aklıma geliyor.

Mülakatçı: peki koordinat sistemi deyince ne aklına geliyor?

Seda: İçerisinde sayılar olan sonsuza kadar gidebilen eee sayı doğrusu. - si + sı olan x ve y e eksini olan. Eee

Mülakatçı: Olan?

Seda: Olan grafik.

Mülakatçı: Peki sıralı ikili ne demektir?

Seda: Nasıl desem iki tane böyle yer olacak (havuzbaşını gösteriyor) onların noktalarını bulacağız. Bu sıralı ikilileri grafikte gösteriniz der. Oradaki noktaları grafikte gösteriniz.

Mülakatçı: Sıralı ikilinin özelliği nedir? Belli özelliği var mı?

Seda: (-6, -1) bu tip noktası olan sayılar. Yani bir yerin koordinat üzerinde noktası olan yere sıralı ikili denir öyle bir şey.

Mülakatçı: Peki B şıkkı için nasıl düşündün?

Seda: (soruyu okudu) Evet olurdu. Çünkü noktalar orijin ile belirttikten sonra noktaları farlı olurdu. Mesela orijin değil de burada (evi gösteriyor) olsaydı bunun noktaları farklı olurdu. Orijin olmazdı.

Mülakatçı: Peki bir tanesindeki değişikliği gösterebilir misin bana?

Seda: nasıl yani?

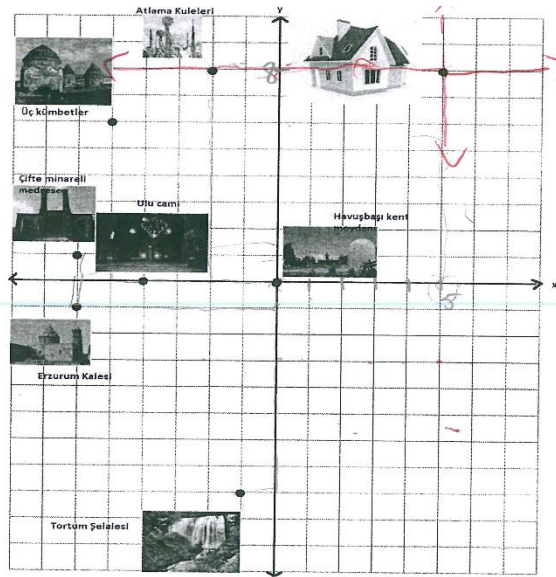
Mülakatçı: Herhangi bir yerin orijini değiştiği zaman noktaların değişimi?

Seda: Orijin burada (başka yeri gösteriyor) olsaydı.

Mülakatçı: Orijin ev olsaydı diyelim.

Seda: tamam. Şöyle çiz erdim. (evden koordinat sistemi oluşturdu) atlama kuleleri (seyyar kareleri) -10 a kaç olurdu bakayım (-10, 0) olurdu.

Mülakatçı: tamam



Kaan ve Nur tatilde Erzurum'da yaşayan Ahmet amcalarını ziyarete gideceklerdir. Amcaları önceden gezdireceği tarihi mekanları tespit etmiş ve Havuzbaşı kent meydanını orijin olacak şekilde işaretlemiştir.

(-10, 10)

- a) Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.

Havuzbaşı: 0, 0 Erzurum Kalesi: -6, -1
 EV = 5, 8
 Atama Kuleleri = -2, 8
 Üç kumbet = -5, 6
 Çifte M. Medrese = -6, 1
 Tortum Şelalesi = -7, -8

Önce x eksenini yazdım. Sonra y eksenini yazdım. Eksileri, artıları dikkat ettim

- b) Eğer orijin olarak Havuzbaşı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekanların koordinatlarında değişiklik olur muydu? Neden? Açıklayınız.

Evet. Değişiklik olurdu. Çünkü noktaları orijin ile belirlendikten sonra noktalar farklı olur. Bu durumda yerler değişir.

Şekil 4.105. Seda'nın birinci probleme ait çözümü

Seda'nın birinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) koordinat ii) koordinat sistemi iii) sıralı ikili bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Seda bir noktanın koordinatı ile ilgili "x ve y sonra böyle tablo gibi bir şey aklıma geliyor" ifadelerini kullanmıştır içerisinde matematiksel terimleri içeren bir tanım olmasına rağmen eksiktir ve matematiksel özellik olarak kabul edilemez. "İçerisinde sayılar olan sonsuza kadar gidebilen eee sayı doğrusu. - si + s1 olan x ve ye eksini olan. Eee grafik" olarak tanımladığı koordinat sistemi tanımında da eksiklikler olup yine matematiksel kabul edilir bir özellik değildir. Seda sıralı ikili için anlamsız

cümleler kurarken ”(-6, -1) bu tip noktası olan sayılar” ifadesini kullanmıştır. Bu ifade de (-6,-1) bir sıralı ikilidir fakat ifade olarak Seda kabul edilebilir bir ifade kullanmamıştır.

➤ Seda başarılı bir şekilde soruda verilen tarihi mekânların koordinatlarını bulmuştur. Koordinatları bulurken dikkatli olduğunu “*x ilk verilir, y x ten sonra verilir. Ona dikkat ettim. Bir de -, + ya dikkat ettim*” sözleriyle ifade etmiştir. Buradan koordinat sistemin özelliklerini bildiğini söyleyebiliriz. Bir noktanın koordinatı ile ilgili “*x ve y sonra böyle tablo gibi bir şey aklıma geliyor*” ifadelerini kullanarak açıklama yapmıştır. Açıklaması tam anlamıyla koordinatı tanımlamak için yeterli değildir. Koordinat sistemini tanımlarken ise, “*İçerisinde sayılar olan sonsuza kadar gidebilen eee sayı doğrusu. – si + sı olan x ve ye eksini olan. Eee grafik*” ifadelerini kullanmıştır. İfadesi tam anlamıyla koordinat sistemini karşılamamaktadır. Seda’nın sıralı ikili kavramını “*Nasıl desem iki tane böyle yer olacak (havuzbaşını gösteriyor) onların noktalarını bulacağız. Bu sıralı ikilileri grafikte gösteriniz der. Oradaki noktaları grafikte gösteriniz. Diye sorabilir*” cümleleriyle soru üzerinden açıklamaya çalışmıştır. “*(-6, -1) bu tip noktası olan sayılar. Yani bir yerin koordinat üzerinde noktası olan yere sıralı ikili denir öyle bir şey.*” cümleleriyle devam etmiştir. Seda’nın bazı kavramları kafasında tam olarak oturtamadığı veya ifade etmekte güçlük yaşadığı söylenebilir. b şikkında ise orijinin değişmesiyle değişiklik olacağı ile ilgili “*Evet olurdu. Çünkü noktaları orijin ile belirttikten sonra noktaları farlı olurdu. Mesela orijin değil de burada (evi gösteriyor) olsaydı bunun noktaları farklı olurdu. Orijin olmazdı*” cümlelerini kullanmıştır fakat örnek olarak bir tarihi mekânın koordinatındaki değişimi gösterirken, “*Şöyle çizdim. (evden koordinat sistemi oluşturdu) atlama kuleleri (seyyar kareleri) -10 a kaç olurdu bakayım (+10, 0) olurdu*” olarak işlem yapmış ve yanlış sonuca ulaşmıştır. Seda herhangi bir tartışma ortamı oluşturmadan direk buluşu sonucun doğru olduğunu düşünerek işlemini tamamlamıştır. Seda’nın akıl yürütme türünün AR ye yakın olduğu görülmektedir. Seda’nın koordinatları başlangıçta doğru yazması fakat orijini değişmesi durumunda ise hatalı yazması nedeniyle doğruluk kategorisi olası (o) olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Seda koordinatları zorlanmadan yazabilmiştir. Zorlanmamasının sebebi Seda’nın koordinatları yazma ile ilgili bilgi birikiminden kaynaklanmaktadır. Sedaya engel olan şey dikkatsizliğidir. Seda’nın işlem yaparken genel olarak etkili tartışmalar ve

açıklamalar geliştirmedeği için yüzeysel bir bakış açısına sahip olduğu söylenebilir. Seda'nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapılmasından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilenmesinden AR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

-Seda'nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda'nın ikinci probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Taksi sorusu ile ilgili ne düşündün?

Seda: Bu da tarife sorusuna benziyordu. Şimdi y ye yol demişim. Ücrete de x dedim. Açılış ücreti zaten 3 TL. 3 km yol gitseydi 6 TL verirdi. Çünkü açılış ücreti 3 TL 3. 3 altı her km için 1 TL 7 olurdu. Sanki bunu doğru mu yapmışım hocam.

Mülakatçı: Bilmem. Bende sana soracaktım doğru mu yaptın diye. Sen ne düşünüyorsun?

Seda: bakayım. Sanırım yanlış mı yapmışım. 3 km gidiyor açılış 3 yolu olduğu yapmışım. Şimdi bunu nasıl yaptım? Şimdi açılış ücreti 3 TL zaten. 1 km bile gitse 3 verecek. 3 km yol gitmişse 3tl. her km 1 TL. 3 km de 3 TL idi. Topladım 6 TL oldu. Burada da 4 için 7 oldu. 2 için de 5 TL oldu.

Mülakatçı: Peki tablodaki değerler arasında bir ilişki var mı?

Seda: 3 artmış. Hepsi x y den hep 3 fazla. Yani ücret yolda hep 3 fazla. Bunu ilerletseydim de hep aynı olurdu. Bunu da $3 + x. 1 = y$ yapmışım.

Mülakatçı: Neden öyle yaptın?

Seda: 3 Arttığı için $3 + \text{ücret} = y$ ye açılış ücreti 3 olduğu için 3 e normal ücreti topladığımdan yolu veriyor bana. Yerine de koyalım bakalım oluyor mu? 3 diyelim 6 olmuyor. Eee...

Mülakatçı: Neden olmamış olabilir?

Seda: Yanlış yazmışım demek ki. Hiç yerine koymamışım, şimdi koydum. Yol 2 km olsa (tabloya bakıyor) ücrete ne dedik $5, 3 + 5 = y$ yola da 2 demiştik. 8 eee 2 yol olması gerekiyor. Burada bir yanlışlık yapmışım sanki. Doğru mu yapmışım, yanlış mı?

Mülakatçı: Bilmiyorum sen düşün?

Seda: 3 vardır, 3 artı eee.

Mülakatçı: Ne düşünüyorsun?

Seda: 3 açılış ücreti olduğu için 3 ün kesin olduğunu düşündüm. Gerisini de getirmeye çalışıyorum.

Mülakatçı: kafan mı karıştı?

Seda: Yani eee arasında 3 fark var. Demek ki eee şöyle yapabiliriz. $3 +$ vardır. Bunu biliyorum çünkü açılış ücreti bu her zaman var. Ne kadar gidersek var. Sanırım peki x i şöyle yaparsak olur mu? y y oldu. $3 + y = x$ şöyle bir şey olur. 3 km giderse 6 TL, 4 km giderse 7 olur.

Mülakatçı: Peki eee neden yanlış yapmışsın? Fark ettin mi hatanı?

Seda: Hatam eee.

Mülakatçı: Ya da hangisi doğru sence?

Seda: Şu doğru $3 + y = x$. Çünkü sağlamasını da yaptım y ye 3, x e 6

koydum oluyor. Ama burada $3+x.1=y$ de olmuyor. Bunları yaparken de koymamışım demek ki.

Mülakatçı: Peki

Mülakatçı: Ücret – yol arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizdin?

Seda: Grafikte nasıl çizdim, bura y (dikey eksen) bura x (dikey eksen) demişim. Sonra burada (tabloda) yaptıklarımı kullandım. x 5, y 2. O zaman burası (noktaları buluyor). X 4, x 7, x 2, x 5 buldum. Sonrada bunları birleştirdim böyle oldu.

Mülakatçı: Peki grafiği doğru çizip çizmediğin hakkında ne düşünüyorsun?

Seda: eee yanlış çizmişte olabilirim. Çünkü eee aralarındaki mesafeler kareli defte olmadığı için mesafeleri doğru ayarlamamış olabilir. Ama böyledir diye düşünüyorum.

Mülakatçı: Mesafelerin eşit olduğunu düşünürsek doğru olup olmadığı hakkında ne düşünüyorsun?

Seda: Doğrudur muhtemelen.

Mülakatçı: Yani grafik bu şekilde olmalı?

Seda: Evet. Bu benim düşüncem.

Mülakatçı: Peki yol-ücret arasındaki ilişki hakkında ne söylersin?

Seda: 3 sayı yani 3 TL yoldan fazladır. Mesela burada (tablodan) örneğini buraya Türkçe olarak açıkladım. Eee mesela yol 3 km ise ücret 6, yol 4 km ise ücret 7 TL olur. Mesela yol 5 olsaydı ücret 8 TL olurdu. İşlem yapmadan da 3 er 3 er arttığı için kolayca bulabilirdik.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti alınmasıydı fakat her km için 1 TL alınsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı hakkında ne düşünüyorsun?

Seda: Olurdu. Çünkü buraya (tabloyu x i gösteriyor) açılış ücretini de katarak yaptım. Katmasaydım demek ki olurmuş.

Mülakatçı: Yani nasıl bir değişiklik olur grafikte?

Seda: Daha uygun olurdu. Çünkü 3 TL alınınca 6 km de 6 TL olursa öbür türlü 3 TL olurdu. Arasındaki fark yani açılış ücreti olmadan eskisine göre daha uygun fiyat olurdu. Tabi taksici için öyle olmazdı ama binen için öyle olurdu. Eee buradan açılış ücretini katmadan da bir tablo yapabilirim ama çizememişim.

Mülakatçı: çizmek istersen çizebilirsin?

Seda: Çizeyim. Bu km kullanayım. Aradaki farkı da görmek için. Şimdi 3 TL alınmasaydı o zaman bu da 3, bu da 4 bu da 2 olurdu. Her km de 1 TL aldığı için km kadar fiyat alınırdı. Ama burada (eskisi) 3 TL fazlası kadar alınmış o yüzden değiştirdi. Bunlar birbirine eşit değil.

Mülakatçı: Peki açılış ücreti 3 TL ama her km için 2 TL alınsaydı değişiklik olup olmayacağı ile ilgili ne düşünüyorsun?

Seda: Olurdu. Çünkü burada 1 idi. Burada 2. Burada daha fazla ücret alırdı. Burada grafiğini de çizdim (tabloyu gösteriyor). 2 km yolda 7 almış çünkü 3 TL var. Evet, doğru yapmışım. Açılış 3 TL ve her km de 2 TL alınsaydı grafik değiştirdi.

Mülakatçı: Nasıl değiştirdi grafik?

Seda: (Sessiz kaldı)

Mülakatçı: İkisi arasında nasıl bir fark var? Tablodaki değişim grafiği nasıl etkiledi?

Seda: Burada 3 katının 1 fazlası burada 3 katının 2 fazlası yok. 1 dk. Soruyu tekrar sorar mısın?

Mülakatçı: Hani değerlerin değişeceğini söyledin ya onun grafiği nasıl etkileyeceğini soruyorum?

Seda: Ha tamam. Şöyle 1 km de 5 TL olurdu. Burada 5 TL de 2 km yol gitmiş.

7 TL vererek 2 km gitmiş. Burada (önceki) 4 TL yol gitmiş. Buradaki fark önceki daha uygun oluyor. Şöyle oluyor, 2. Daha uygundur 1. Ye göre. 1 de daha uygundur 3. ye göre.

Mülakatçı: Tamam devam edelim.



Ahmet bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesini;
Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

a) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?

Yol (km)	1	2	3	4	5
Ücret (TL)	4	5	6	7	8

Yol (km)	1	2	3	4	5
Ücret (TL)	4	5	6	7	8

b) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?

$$3 + y = x$$

c) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çizin.



d) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişki hakkında ne söylersiniz. Neden.

3 sayı (3+) ücret y'dan fazla olur.

Örneğin = yol 3km ise ücret 6tl olur.
yol 4km ise ücret 7tl olur.

e) Taksi tarifesini, açılış ücreti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

Evet olur. Çünkü taksi gittiğinde her km için 1tl alınır. Açılış ücreti 3tl alınmaz. Ve açılış ücreti alınmadan daha uygun olurdu.

f) Taksi tarifesini açılış ücreti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olur muydu? Açıklayınız.

Olurdu. Çünkü açılış ücreti 3tl ve 1km'de 2tl alırsanız 2km'de 7tl olur.

Yol (km)	1	2	3	4	5
Ücret (TL)	5	7	9	11	13

Ve bu yeni grafikte ücret daha fazla alınmış olur.

Şekil 4.106. Seda'nın ikinci probleme ait çözümü

Seda'nın ikinci probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) yol, ücret ii) tablo, grafik bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Seda'nın bahsettiği "yol" ve "ücret" ifadeleri birer gerçek yaşam bileşenidir. Seda'nın oluşturduğu tablo problem durumunu karşılayacak bir tablodur ve

matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Fakat grafikte eksiklikler olduğu için matematiksel olarak kabul edilebilir değildir.

➤ Seda ilk olarak problemi okumuştur önceki deneyimlerine benzediğini ifade etmiştir ve değişkenleri belirleyerek değişkenlere anlam yüklemiştir. Sonrasında ise tabloya değerleri yerleştirmiştir. Yol ve ücret arasındaki ilişkinin cebirsel ifadesini yazarken doğru cebirsel ifadeyi yazmıştır fakat tabloda değişkenlere yüklediği anlamla cebirsel ifadede yüklediği anlam aynı olmadığı için cebirsel ifadenin doğruluğunu kontrol ederken yanlış yaptığını düşünmüştür. Sonrasında Seda tekrar düşünmeye başlamıştır ve başlangıçta değişkenlere anlam yüklemesine bağlı kalarak tekrar bir cebirsel ifade yazmıştır. Seda'nın *"Yani eee arasında 3 fark var. Demek ki eee şöyle yapabiliriz. 3+ vardır. Bunu biliyorum çünkü açılış ücreti bu her zaman var. Ne kadar gidersek var. Sanırım peki x i şöyle yaparsak olur mu? y yoldu. 3+y=x şöyle bir şey olur. 3 km giderse 6 TL, 4 km giderse 7 olur"* ifadesi bu durumu göstermektedir. Seda, grafik çiziminde, koordinat sisteminde eksenlere değerleri yerleştirmiştir. Seda y eksenini için km ve x eksenini için ücret dedikten sonra tablodaki değerlere göre grafiği çizmiştir. Grafiği çizerken, grafiğin eksenleri kesip kesmediğine, grafiğin orijinden geçip geçmediğine ve eksenlerin negatif olduğu kısımlarda grafiğin değer alıp almayacağına dikkat etmemiştir. Grafiğin doğruluğu hakkında ise, eksenlere değerleri eşit aralıklı yazamamış olabileceğini bu yüzden hata olabileceğini söylemiştir. Problem durumunda değişiklik olması durumunda Seda, nicelik olarak değerlerin değişeceğini, bu yüzden tabloda ve grafikteki değerlerin değişeceğini düşünmektedir. Bu değişimlerin grafiği nasıl etkileyeceği konusunda ise yine niceliksel değişimi vurgulamıştır grafiğin orijinden geçip geçmediği ile ilgili bir yorum yapmamıştır. Seda'nın akıl yürütme türü strateji seçimini hatırladığı bir algoritmaya dayandırması açısından AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Seda, değişken seçme ve değişkenlere anlam yükleme konusunda sıkıntı yaşamamıştır. Bu durumun sebebi önceki kazanımları başarılı biçimde edinmesi ile ilgili olabilir. Seda'nın belli bilgi düzeyine sahip olduğu ancak grafik çiziminde dikkat etmesi gereken bazı noktalara dikkat etmediği görülmüştür. Bu açıdan bakıldığında yüzeysel bir düşünce tarzı sergilemiştir. Zaman zaman yaptığı işlemlerden emin olamayışı araştırmacıdan destek almaya çalışması kendine güvensizliğinin ve kavramsal bilgi eksikliğinin bir sonucu olabilir. Seda'nın matematiksel akıl yürütme türü, hatalı

işlemler yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yer yer yüzeysel yer yer derin bir düşünce tarzı sergilendiğinden AR_{ygx} olarak sınıflandırılmıştır.

-Seda'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda'nın üçüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Mum sorusu ile ilgili ne düşündün?

Seda: (Soruyu okudu) Değerler verdim. A 3 saatte ne kadar olur dedim. Saatte 5 cm azalıyor 3 saatte 15 cm azalır. Eee sonra burada 15 cm kalır. 6 saatte 30 cm azalır. Çıkardım 0 cm oldu. 1 saat de 25 cm kalır. B de de 3 saatte 5 cm azalır. 5 çıkardım 15. 6saatte 10 cm azalır. $20-10=10$ cm oldu 9 saatte 15 cm azalır çıkardım. Çıkardım 5 cm buldum. Sonra da burada aynı koordinat sistemi üzerinde dediği için 2 doğru çizdim. Birisi A'nın diğeri B'nin grafiği olarak bunu ayrı ayrı da çizebilirdik ve ben bunları (x ve y ekseninin negatif taraflarını gösteriyor) uzatmadım. Eksili olmadığı için yeri isgal etmeyelim dedim.

Mülakatçı: Peki grafiği doğru çizip çizmediğin hakkında ne düşünüyorsun?

Seda: 1 dk. bakayım. 1 saatte 25 cm, arasında 25 ise doğrudur. (grafiği kontrol ediyor, kareleri sayıyor) evet doğru yapmışım. Bu A mumu 6 saatte 0 yani (6, 0) olur. Çünkü x zaman, y boyu. 3 saati de doğru yapmışım. Sonra bunları birleştirdim. B ye geçtim 3

saatte 15 cm, burasıda (3,15) ikisinin de kesiştiği nokta oldu. Bu arada 6 saatte de 10. 9 saatte de 5 sonra bunu da birleştirdim. Peki, söyle bir şey yapabilir miydik?

Seda: Şurada ok çıkarıp A ve B mumunun grafiği diyebilir miydik?

Mülakatçı: Yok arası kesiştikleri nokta oluyor.

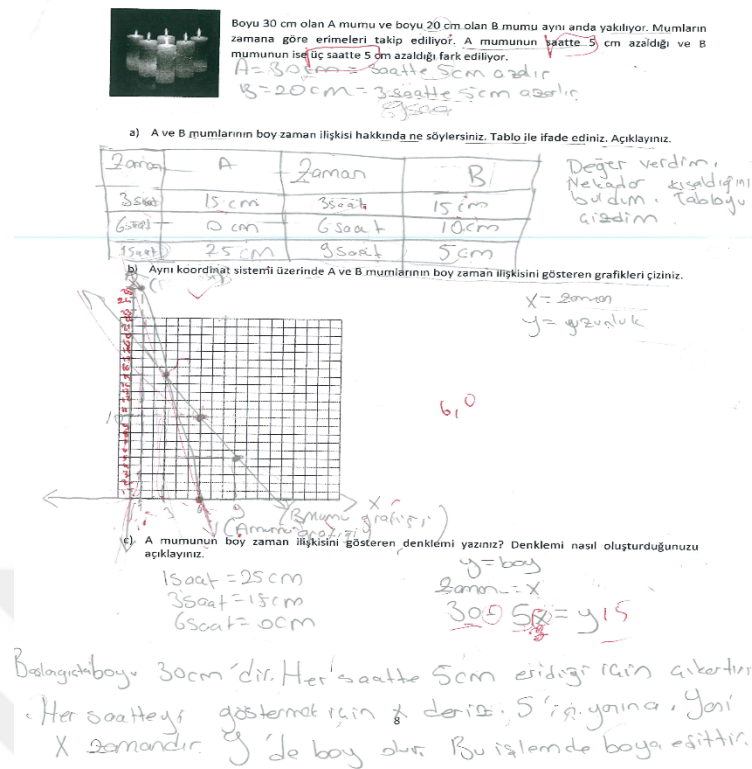
Mülakatçı: A'nın boy-zaman ilişkisini gösteren denklemin nasıl yazdın?

Seda: Bunları (üstteki tablo) buraya aktardım. Y boy, x zaman demişim. Şimdi şöyle ilk boyu 30 cm çıkardım. Çünkü azalıyor eriyor. Çünkü eee her saatte de 5 cm eridiği için x dedim. $30-5x$ dedim. 2 saat olsa ya da 3 diyelim 15. $30-15=15$ y boydu zaten boyu kaldı. Burada denedim baktım doğru oluyor dedim o zaman doğru.

Mülakatçı: yani önce denklemini yazdın sonra sağlamasını mı yaptın?

Seda: Hı hı. Çoğu zaman öyle yapıyorum. Ya da şıkları deniyorum oluyor mu diye.

Mülakatçı: Peki tamam



Şekil 4.107. Seda'nın üçüncü probleme ait çözümü

Seda'nın üçüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

- Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) tablo ii) grafik iii) boy, zaman bileşenlerinden oluşmaktadır.
- Seda'nın kurduğu denklem ve tablo matematiksel olarak kabul edilebilirdir ve problemi karşılamaktadır. Seda'nın grafiği eksikliklere sahiptir ama muhtemel doğru olarak kabul edilebilir. Tablo ve grafik dönüşümlerdir. "Boy" ve "zaman" ise, gerçek hayat bileşenidir.
- Seda'nın tabloyu yaparken değer vererek tabloyu oluşturmuştur. Oluşturulan tablo verileri karşılayacak şekilde doğrudur. Grafik çizimi ile ilgili "Sonra da burada aynı koordinat sistemi üzerinde dediği için 2 doğru çizdim. Birisi A'nın diğeri B'nin grafiği olarak bunu ayrı ayrı da çizebilirdik ve ben bunları (x ve y ekseninin negatif taraflarını gösteriyor) uzatmadım. Eksili olmadığı için yeri işgal etmeyelim dedim" ifadelerini kullanmıştır. Seda tablodaki değerlere göre grafikte noktaları belirlemiştir ve birleştirmiştir. Seda negatif tarafta değerler olmadığına farkında olmasına rağmen, eksenleri kestiği noktalara dikkat etmemiştir. Seda'nın c şikkında ise, denklemi nasıl

kurduğunu “*Bunları (üstteki tablo) buraya aktardım. y boy, x zaman demişim. Şimdi şöyle ilk boyu 30 cm çıkardım. Çünkü azalıyor eriyor. Çünkü eee her saatte de 5 cm eridiği için x dedim. 30-5x dedim. 2 saat olsa ya da 3 diyelim 15. 30-15=15 y boydu zaten boyu kaldı. Burada denedim baktım doğru oluyor dedim o zaman doğru*” cümleleriyle ifade etmiştir. Seda’nın ne yaptığının farkında olduğu işlemlerinin açıklamalarını ve sağlamalarını yaptığı görülmektedir. Bu yönüyle akıl yürütme türü CR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Seda’nın tablo yaparken zorlanmadan işlemlerini yapmıştır. Verileri tablo ile ifade etme kazanımı ile ilgili anlamasında sıkıntı olmadığı söylenebilir. Grafik çiziminde ise, iki grafiği de aynı koordinat sisteminde göstermekte zorlanmamıştır. Bu durum konu ile ilgili bilgi birikiminin olduğunun göstergesidir. Seda’nın değişkenlere anlam yüklemekte zorlanmaması ve denklem kurmakta problem yaşamaması bu kazanımla ilgili önceki deneyimlerinde bilgi ve kavrama eksikliğinin olmamasından kaynaklanmaktadır. Seda’nın genel olarak derin bir düşünme yapısı sergilediği görülmektedir. Seda’nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve derin düşünme yapısı sergilendiğinden CR_{ogd} olarak sınıflandırılmıştır.

-Seda’nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu

Seda’nın dördüncü probleme ait yarı yapılandırılmış mülakat transkripti

Mülakatçı: Kan basıncı sorusu için ne düşündün?

Seda: Burada en az iki istediğimiz kadar verebiliriz. Ben 3 tan verdim paranteze almak için. Eksilerde olmayabilirdi Yaş dediği için. Ya da her kareyi 10 birim olarak da alabilirim. Mesela ben 10 aldım x yaş olduğu için x e 10 koydum. 2 ye böldüm. 110 la topladım 115 oldu. Sonrada buraya ş kan basıncı olduğu için 5 er 5 er saydım grafikte yaptım. Sonra ona göre yaptım.

Mülakatçı: Peki doğru yapıp yapmadığından emin misin?

Seda: Bakayım bir daha. (noktaları ve yerlerini kontrol ediyor) 10 a 115, 20 ye 120. Doğru bulmuşum.

Mülakatçı: Peki grafik aşağıya doğru devam eder mi?

Seda: Hı hı. Yukarı doğruda aşağı doğruda devam eder.

Mülakatçı: Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz?

Seda: Dere yöntemiyle buldum. Şöyle bir denklem kurdum. Kan basıncı 145 ise,

$$145 = x/2 + 110 x$$

nedir? Gibisinden.

$$35 = x/2$$

Mülakatçı: Neden y yerine 145 yazdın?

$$x = 70$$

Seda: Kan basıncı 145. Burada da y nin yerine 145 yaz diyor. Y nin kan basıncı olduğu söyleniyor.

olur.

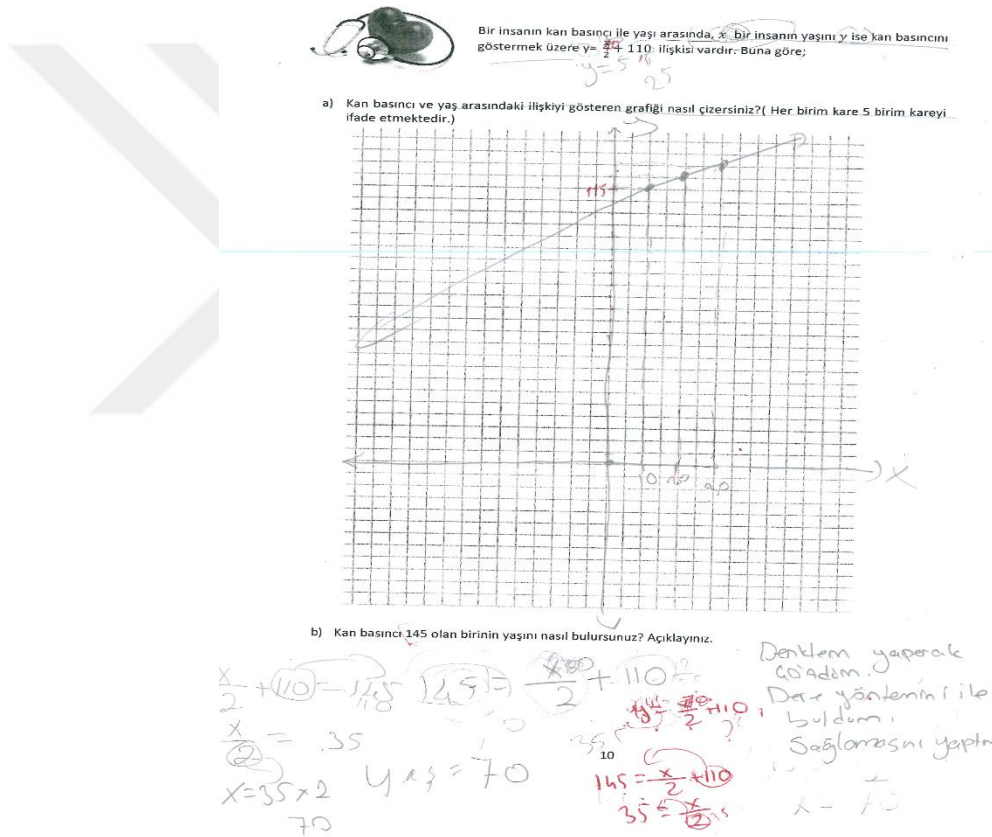
Mülakatçı: Tamam.

Sonrada $y = x/2 + 110$ buraya x in yerine 70 koydum. Böldüm, topladım 145 oluyor. Sonra y nin yerine 145 koydum baktım oluyor o zaman doğrudur.

Seda:

$$145 = x/2 + 110$$

Mülakatçı: Güzel.



Şekil 4.108. Seda'nın dördüncü probleme ait çözümünü

Seda'nın dördüncü probleme ait matematiksel akıl yürütme türü analizi

➤ Seda'nın matematiksel akıl yürütme süreci; i) yaş, kan basıncı ii) denklem, grafik iii) dere yöntemi bileşenlerinden oluşmaktadır.

➤ Seda'nın belirttiği “yaş” ve “kan basıncı” birer gerçek dünya bileşenidir fakat çözüm sonucunda bulunan değer in yaş olduğunu söylememiştir ve modelleme süreci tamamlanmamış olur. Denklem ve grafik ise birer dönüşümdür. “Dere yöntemi” ise, matematiksel olarak kabul edilmeyen fakat genel olarak kullanılan pratik bir yöntemdir.

➤ Seda grafik çizimi için en az iki değer verilmesi gerektiğinin farkındadır. Fakat 3 değer vererek işlem yapmıştır. Çözüm olarak x değeri olarak 10,20,30 değerlerini vererek bu değerlere karşılık gelen y değerlerini bulmuştur ve bunları grafikte göstermiştir. Grafik çizerken bulduğu noktaları birleştirmiştir. Fakat grafik çiziminde grafiğin eksenlerin negatif tarafında değerler alıp almayacağını kontrol etmemiştir. Ve y eksenini grafiğin hangi noktada keseceğinin de belirlememiştir. Oysaki çözümüne başlamadan önce eksenlerin negatif tarafını almasak da olacağını “*Eksilerde olmayabilirdi Yaş dediği için.*” ifadeleriyle desteklemiştir. Fakat bu düşüncesini uygulamada göstermemiştir. Seda grafiğin doğruluğunu sadece bulduğu değerleri kontrol ederek yaptığı kavramsal olarak probleme uygunluğunu dikkate almadığı dikkat çekmiştir. b şıkında ise, Seda denklem kullanarak çözüme gitmiştir. Çözüm stratejisini “Dere yöntemiyle buldum. Şöyle bir denklem kurdum. Kan basıncı 145 ise, $145 = x/2 + 110$ x nedir?” cümleleriyle açıklamıştır. Rahatlıkla çözümünü tamamlayıp cevaba ulaşmıştır. Seda'nın akıl yürütme türü AR olarak sınıflandırılmıştır.

➤ Seda grafiği çizerken zorlanmamıştır. Seda'nın zorlanmamasının nedeni grafik çizimi ile ilgili bilgi birikimine sahip olmasıdır. Fakat Seda'nın bu konuda kavramsal olarak atladığı birkaç nokta vardır. Bu yüzden grafiğinde eksiklikler vardır. Seda'nın matematiksel akıl yürütme türü, muhtemel doğru çözüm yapıldığından, tek tip akıl yürütme türü ve yüzeysel düşünme yapısı sergilenmesinden AR_{ogy} olarak belirlenmiştir.

Seda'nın “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki akıl yürütme türleri Tablo 4.24'te gösterilmiştir.

Tablo 4.24.

Seda'nın “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili problemlerdeki matematiksel akıl yürütme türleri

Öğrenci	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Seda	AR _{ogy}	AR _{ygx}	CR _{ogd}	AR _{ogy}

Tablo 4.24 incelendiğinde, Seda'nın incelenen dört problemin üçünde dayalı algoritmaya akıl yürütme türüne, bir tanesinde yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Seda üç soruya muhtemel doğru cevap verirken problemlerin bir tanesine yanlış cevap vermiştir. Seda tüm sorularda global akıl yürütme sergilemiştir. Seda akıl yürütme sürecinde bazı sorularda derinlikli bazı sorularda yüzeysel düşünce yapısına sahiptir.

Araştırmaya katılan öğrencilerin “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konuları kapsamında hazırlanan problemlere verdikleri cevaplar doğrultusunda belirlenen matematiksel akıl yürütme türleri Tablo 4.25’de verilmiştir.

Tablo 4.25.

Öğrencilerin Problemlere Yönelik Sergiledikleri Matematiksel Akıl Yürütme Beceri Türleri

Öğrenci	Eşitlik ve Denklem					Doğrusal Denklemler			
	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4	Problem 5	Problem 1	Problem 2	Problem 3	Problem 4
Ahmet	P-GAR _{dgy}	P-GAR _{ogy}	P-GAR _{ogy}	AR _{dly}	AR _{dgx}	AR _{dgy}	P-GAR _{ylly}	FAR _{xgy}	P- GAR _{oly}
Barış	AR _{dgd}	AR _{dgd}	AR _{dgy}	AR _{dly}	AR _{dlx}	AR _{dgy}	AR _{ogd}	AR _{dgd}	AR _{ogy}
Cengiz	CR _{dgd}	CR _{dld}	CR _{dgd}	CR _{ygd}	CR _{dgd}	CR _{dgd}	CR _{dgd}	CR _{dgd}	AR _{ogd}
Emin	AR _{dgx}	AR _{ogy}	AR _{dly}	CR _{dlx}	CR _{ygd}	CR _{dld}	CR _{olx}	CR _{olx}	CR _{dgd}
Faruk	AR _{dgy}	MR _{ogy}	CR _{dld}	P-GAR _{dly}	AR _{ogy}	AR _{dgx}	CR _{dld}	AR _{ogd}	CR _{dgd}
Nilgün	P-GAR _{oly}	MR _{ygy}	AR _{ogy}	MR _{ygy}	AR _{ygy}	AR _{dgy}	CR _{ylx}	FAR _{xgy}	MR _{ygy}
Ece	MR _{ygy}	MR _{ygy}	MR _{ogy}	MR _{ygy}	AR _{dgy}	AR _{ogy}	MR _{ygy}	MR _{ygy}	AR _{ogy}
Efe	MR _{dgy}	MR _{ogy}	AR _{dgy}	AR _{dgy}	AR _{dgy}	AR _{ogy}	AR _{ygy}	AR _{ogy}	AR _{ogy}
Hale	AR _{dgy}	DAR _{dgx}	MR _{ogy}	AR _{ygy}	AR _{dgy}	AR _{dgy}	AR _{dgx}	AR _{ygy}	AR _{ogy}
Hülya	AR _{dgy}	CR _{dld}	AR _{ygy}	AR _{dgy}	AR _{dgd}	AR _{ogx}	AR _{ygy}	FAR _{ogy}	AR _{ogy}
Rabia	CR _{dld}	CR _{dlx}	AR _{ogy}	AR _{dgd}	CR _{dgd}	CR _{dgd}	AR _{ogd}	CR _{ogd}	AR _{ogd}
Seda	CR _{dld}	CR _{dlx}	MR _{ogx}	AR _{dgy}	CR _{dgd}	AR _{ogy}	AR _{ygy}	CR _{ogd}	AR _{ogy}

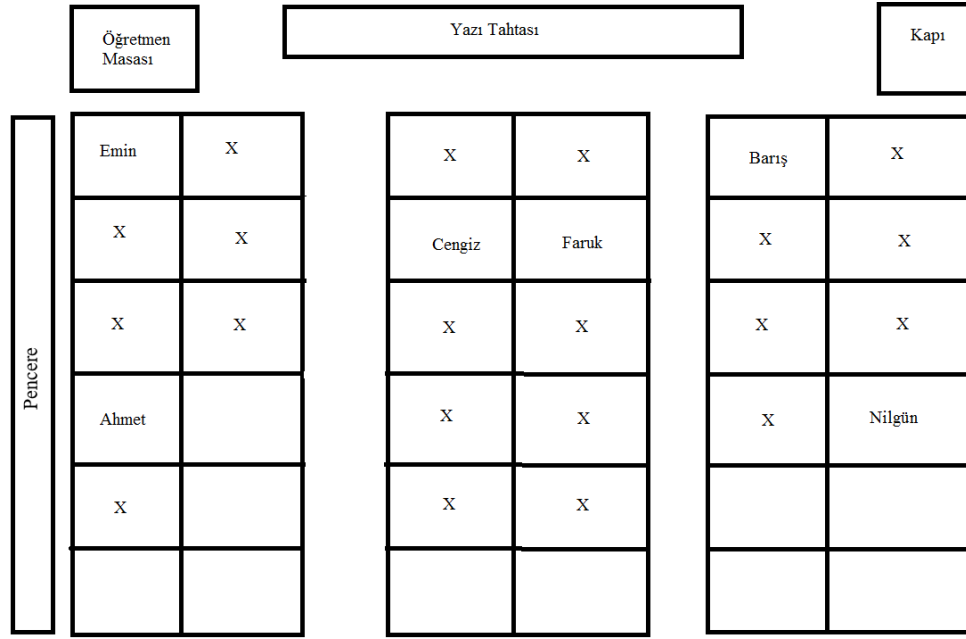
Tablo 4.25 incelendiğinde öğrencilerin tamamının sorular hakkında fikir yürüttüğü görülmektedir. Sadece öğrencilerden Ahmet ve Nilgün birer sorusunda cevaba ulaşamadıkları için çözümlerini tamamlamadan çözümü bırakmışlardır.

4.2. Öğrenme Ortamında Öğretmenlerin Öğrencilere Sundukları Matematiksel Akıl Yürütme Becerisi Fırsatları İle İlgili Bulgular

Bu bölümde “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konularının öğretimi süresince araştırmacı tarafından yapılan gözlemler ve video kayıtlarının analizi sonucunda elde edilen bulgular sunulmuştur. Her bir öğretmenin sınıf ortamı betimlendikten sonra öğretmenlerin öğretim ortamında sundukları örneklerin çözümü süresince sınıf ortamındaki diyaloglar ve sunumun analizi ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Öğretmenlerin incelenen her bir sunumu; problem tipinin tanımlanması, çözüm metodu tanımlama, yaratıcı düşünme, tartışma, matematiksel temel, bağlantı olmak üzere altı açıdan değerlendirilmiştir.

4.2.1. Eda Öğretmenin Sınıfındaki Öğrenme Ortamı

Bu bölümde Eda Öğretmenin sınıfındaki öğrenme ortamı, dersin işleniş biçimi, öğrencilerle iletişimi ile ilgili bulgular sunulmuştur. Eda Öğretmenin sınıfının oturma planı Şekil 4.109’da gösterilmiştir.



Şekil 4.109. Eda Öğretmenin sınıfının oturma planı

Eda öğretmenin sınıfı 26 öğrenciden oluşan normal sıra düzeni düzenlenmiş bir sınıftır. Sınıfın fiziksel özellikleri öğrencileri etkilemeyecek şekildedir. Sınıfta akıllı tahta bulunmaktadır. Eda öğretmen öğretim süreci boyunca gerek duyduğunda öğrencilerin oturma planlarında değişiklik yaptığını ifade etmektedir.

Eda öğretmen “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konularının öğretimini Tablo 4.26’da verilen sırayla yapmıştır.

Tablo 4.26.

Eda Öğretmenin “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konularının öğretim süreci

Tarih	Süre	Dersin Konusu
15.12.2015	2 ders saati	Sözel ifadelere karşılık gelen cebirsel ifadeleri yazma
16.12.2015	2 ders saati	Eşitlik ve denklem
18.12.2015	2 ders saati	Denklem çözümü
21.12.2015	1 ders saati	Denklem çözümü
22.12.2015	2 ders saati	Denklem çözümü
23.12.2015	2 ders saati	Denklem kurma problemleri
25.12.2015	2 ders saati	Denklem kurma problemleri

28.12.2015	1 ders saati	Denklem kurma problemleri
30.12.2015	1 ders saati	Koordinat düzlemi
04.01.2016	1 ders saati	Koordinat düzlemi
05.01.2016	2 ders saati	Koordinat düzlemi
06.01.2016	1 ders saati	Doğrusal ilişkiler
08.01.2016	2 ders saati	Doğrusal ilişkiler
11.01.2016	1 ders saati	Doğru grafikleri
12.01.2016	2 ders saati	Doğru grafikleri
13.01.2016	1 ders saati	Doğru grafikleri

Tablo 4.26’da görüldüğü gibi Eda Öğretmen “Eşitlik ve Denklem” konusunun öğretimi için iki ders hatırlatma saatinden sonra toplam 12 ders saati ve “Doğrusal Denklemler” konusu için ise, 11 ders saati ayırmıştır. Eda Öğretmen öğretim sürecinde öğrencilerin öncelikle cebirsel ifadelerle alışmalarını sağlamak için çeşitli sözel ifadelerle karşılık gelen cebirsel ifadeleri yazdırarak başlamış, konuyu anlattıktan sonra denklem çözümü ile ilgili çok sayıda örnek çözmüş ve sonrasında denklem kurmayı gerektirecek problem çözümlerine geçmiştir. Eşitlik ve denklem konusunun bitmesinden sonra koordinat düzlemini tanıtarak doğrusal ilişkiler hakkında bilgi vermiş ve grafik çizimi konusunu işlemiştir.

Eda Öğretmen ders anlatırken genelde anlatım yöntemini ve soru cevap yöntemini kullanmaktadır. Eda öğretmen yeni bir konu başlangıcında öncelikle konunun günlük hayatla ilişkisinden bahsetmekte ve sonrasında konuya giriş yapmaktadır. Eda öğretmen anlatılan konunun hemen devamında bol sayıda örnek çözerek konunun pekişmesini sağlamaktadır. Her ders bitiminde bir sonraki ders yapmaları için öğrencilere çalışma kâğıtları (Ek 4) ödev olarak verilmektedir. Verilen her ödevin yapılıp yapılmadığı ile ilgili bir sonraki ders başlangıcında kontrol yapılmaktadır. Öğrencilere çalışma kâğıtlarında yapamadıkları zorlandıkları sorular sorularak, hızlı bir şekilde cevaplandırıldıktan sonra derse başlanılmaktadır. Eda öğretmen konu anlatımı için öncelikle konuya giriş yapmakta sonrasında öğrencileri konunun içine çekmek için sorular sorarak (1. Derece ne demek? Bu denklemi nasıl çözersiniz? Farklı bir yöntemle çözülebilir miydi? Koordinat düzlemine neden ihtiyaç duyulmuştur?) onları öğrenme ortamına dâhil etmektedir. Öğrenilen konunun pekiştirilmesi için bol bol örnek çözümü yaptıran Eda Öğretmen öğrencilerden gelen

soruları direk cevaplamaktan kaçınmaktadır. Öğrencilerin hatalarını fark etmeleri için öğrencilere sorular yönlendirmektedir. Eda öğretmen öğrencilerin problemin çözümü ile ilgili yeterince düşünmelerine fırsat vermektedir. Genelde *Neden? Nasıl?* sorularını kullanarak öğrencilerin düşüncelerini açığa çıkarmaya çalışmaktadır. Eda öğretmen sorulan problemin alternatif çözüm yöntemlerini de öğrencilere göstermektedir. Problem çözümünün sonrasında ise öğrencilerin cevaplarını nasıl kontrol edeceklerine dair bilgiler vermektedir. Eda Öğretmenin dikkat ettiği bir diğer husus, öğrencilere kuralları/formülleri direk vermemektedir. Eda öğretmen, örneklerden hareketle kurala ulaşmaları için öğrencileri yönlendirmektedir. Yaptığı işlemlerin mantıksal açıklamalarına değinmektedir.

Eda Öğretmen ders içinde zaman zaman öğrencilerle birlikte etkinlikler yaparak öğrencilerin konuyu daha eğlenceli bir şekilde öğrenmelerini sağlamaktadır. Eda öğretmenin sınıf içinde uyguladığı etkinliklerden biri olan boyama etkinliği (Ek 5) öğrenciler tarafından çok sevilen, bir etkinlik olmuştur. Boyama etkinliği ders gözlemleri sürecinde iki defa yapılmıştır. Birincisi boyandığında ejderha ve fil figürlerinin çıktığı denklem çözümü ile ilgili boyama etkinliği diğeri ise, boyandığında bal kabağı figürü çıkan koordinat sisteminde noktaların bulunması ile ilgili boyama etkinliğidir. Boyama etkinliğinin bitiminde güzel resimler sınıf panosunda sergilenmektedir. Sınıf içerisinde uygulanan diğeri bir etkinlik ise, öğrencilerin gruplara bölünerek uygulandığı denklem çözme etkinliğidir.(Ek 6) Denklem çözme etkinliğinde ise, Eda öğretmen önceden hazırladığı etkinlik kâğıtlarını öğrencilere dağıtarak etkinliği başlatmıştır. Etkinliğin amacı; 10 tane denklem çözümünü doğru bir şekilde yaparak çözüm sıralamasını ilk bitiren grup olmaktır. Öğrenciler 4 er ve 5 er kişilik gruplar oluşturduktan sonra her birine 1. kart ve çözüm sıralaması verilmiştir. Etkinlik süresince öğretmen sınıf ortamında gruplar arasında dolaşmıştır. Yine denklem çözümü ile ilgili başka bir etkinlik başlangıç ve bitiş noktaları bulunan ve içerisinde 37 denklem çözümünü barındıran bir etkinlik kâğıdıdır. (Ek 7) Ayrıca Eda öğretmen zümre arkadaşlarıyla hazırladığı ve derledikleri farklı tarzda örnekler ve problemler ile öğrencilerin tek tip sorulara maruz kalmalarını engellemek için çaba sarf etmektedir. Konunun tekrar edilmesi noktasında akıllı tahtayı kullanarak hatırlatmalar yapmaktadır.

Eda öğretmenin öğrencilerle iletişimi oldukça iyidir. Öğrenciler derste rahatlıkla soru sorabilmektedirler. Eda Öğretmen ders anlatımı esnasında sınıf hâkimiyetini

sağlamaktadır. Gerek konu anlatımlarında gerekse soru çözümlerinde öğrencilerden gelen soru ve düşünceleri dikkatle dinlemekte ve mutlaka dönüt vermeye çalışmaktadır. Öğrencilerin soru çözümü için söz hakkı almaları noktasında adil davranan Eda öğretmen, sürekli aynı kişilerin söz hakkı almasını engellemek adına zaman zaman öğrencileri teşvik edici konuşmalar yapmaktadır. Örneğin; öğrencilerin cebirsel ifadelerle ilgili tedirginliğini fark ettiği için öğrencilerin motivasyonunu artırmak adına onlara konuşmalar yapmıştır. Yaşadıkları zorlanmanın normal olduğunu zamanla azalacağını söyleyerek öğrencilerin öğrenme isteğini artırmıştır.

4.2.2. Eda Öğretmenin Öğrenme Ortamında Sunduğu Örneklerin Analizine Dair Bulgular

4.2.2.1. Eda Öğretmen tarafından sunulan birinci örnek

“Üç ardışık sayının toplamı” ifadesinin cebirsel karşılığını yazınız.

(Eda Öğretmen öncelikle soruda öğrencilerin hatırlamaları gereken ardışık sayı kavramı olduğunu fark etmiştir)

Faruk: hocam. $x + x^2$

(Aynı anda öğretmende Faruk'un söylediklerini tahtaya yazmaktadır)

Eda Öğretmen: x 'in birinci sayı olduğunu vurgulamıştır. Faruk sen şimdi x^2 diyorsun yani $2x$ mi diyorsun?

Faruk: Evet.

Eda Öğretmen: Bu senin yaptığın ne demek biliyor musun? Bir sayıyla sayının 2 katı demek. Hâlbuki bize ard arda gelen sayılar diyor.

Faruk: $x + 2$

Eda Öğretmen: ama bana sadece ardışık sayı demiş. Mesela 3,4 düşün bu sayılar ardışık mı?

Öğrenciler: Evet

Eda Öğretmen: Peki bunlar kaçar kaçar artıyor.

Öğrenciler: 1 er 1 er

Eda Öğretmen: O zaman aradaki fark ne olacak?

Öğrenciler: 1 olacak

Eda Öğretmen: Peki, sen en küçüğüne x dersen diğer sayının ne olacak?

Faruk: Eee +1 ben yapmıyım hocam

Eda Öğretmen: Bak şimdi en küçüğüne x dedik ne olacak 1 er 1 er fazla olacak.

Ali: $x+1$ mi?

Eda Öğretmen: Hayır, yani 1 fazlası $x + 1$ olacak. Sonra üçüncü sayıda ikinci sayıdan 1 fazla olacak ne olacak o zaman?

Öğrenciler: $x + 2$

Eda Öğretmen: çocuklar şöyle de diyebilirdiniz? En küçüğüne $x + 1$ deseydiniz. Diğerleri yine bir fazla olacaktı ne olacaktı?

Öğrenciler: $x + 2$

Eda Öğretmen: diğeri de bundan 1 fazla olacaktı. Ne olacaktı?

Öğrenciler: $x + 3$

Eda Öğretmen: yani sunu anlatmaya çalışıyorum en küçüğüne ne versen diğerleri hep önceki sayıdan 1 fazla

olacak. Çünkü neden bunlar ardışık sayılar. Peki, bizden soruda ne isteniyor? Toplamı isteniyor. O zaman $x + x + 1 + x + 2$ yazıyoruz. Anlaşıldı mı?

Öğrenciler: evet.

Eda Öğretmen tarafından sunulan birinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Problem sözel bir ifadenin cebirsel olarak matematiksel notasyonlarla gösterilmesi ile ilgilidir. Öğretmen bu durumdan bahsetmiştir.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen çözümü açık bir şekilde ifade etmiştir. Problem tipi ile çözüm yöntemi arasında bağlantı kurmuştur.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğrenciye direk cevabı söylemektense öğrencinin hatalı cevabının aslında ne anlama geldiğinden bahsederek öncelikle öğrencinin cevabının hatalı olduğu fark etmesini sağlamıştır. Öğretmenin “sen şimdi x^2 diyorsun yani $2x$ mi diyorsun?” sorusunu yöneltmesi öğrencinin düşünmesi için fırsat vermektedir.
- 4) Tartışma: Öğretmen öğrencilerle sürekli iletişim halinde ve işlem adımlarını öğrencilerle beraber yapmaktadır. Çözümünü çözüm amacını açıkça ifade etmiştir. Sınıf içinde tartışma ortamı vardır.
- 5) Matematiksel temel: Öğretmen, soruda geçen ardışık sayılar ifadesini öğrencilere hatırlatmak için çaba sarf etmiştir. Bileşenler matematiksel olarak kabul edilebilirdir.
- 6) Bağlantı: Farklı problem durumları ve çözüm amaçlarına ait göstergelere rastlanmamıştır. Fakat öğretmen soruya “çocuklar şöyle de diyebilirdiniz? En küçüğüne $x + 1$ deseydiniz. Diğeri yine bir fazla olacaktı ne olacaktı...” şeklinde alternatif bir çözüm de söylemiştir.

Genel olarak düşünüldüğünde, öğretmen çözümün nasıl yapılacağını, çözüm amacını açıkça ifade etmiştir. Öğretmen soruda geçen kavramlarla ilgili matematiksel özelliklere değinmiştir ve öğrencilere öğrenme fırsatı sunmaya çalışmıştır.

4.2.2.2. Eda Öğretmen tarafından sunulan ikinci örnek

$\frac{(x+2).3}{4}$ cebirsel ifadesini sözel olarak nasıl ifade edebiliriz?

Eda Öğretmen: evet kim söylemek ister?

Bilal: bir sayının 2 fazlasının 3 katının 4'e bölümü

Barış: bir sayının 2 fazlasının 3 katının $\frac{1}{4}$ 'ü.

Eda Öğretmen: başka?

Öğrenciler: hocam başka var mı? (düşünüyorlar)

Eda Öğretmen: evet güzel. Başka nasıl ifade edilebilir?

Eda Öğretmen: peki ben söyleyeyim. Bir sayının 2 fazlasının $\frac{3}{4}$ 'ü.

Bilal: bir sayının 2 fazlasının 3 katının çeyreği

Eda Öğretmen: doğru. Başka? Değişik şekilde söylemek isteyen var mı?

Eda Öğretmen tarafından sunulan ikinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Problem cebirsel bir ifadenin sözel olarak ifade edilmesi ile ilgilidir. Bir önceki örnekte bahsettiği için bu örnekte ayrıca açıklama yapmamıştır.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen çözümü açık bir şekilde ifade etmiştir.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmen, öğrencilerin sorunun cevabı için alternatif ifadeler olduğunu fark etmeleri ve bu durum üzerine öğrencilerin düşünmesini sağlaması açısından öğrencilere “başka nasıl ifade edilebilir?” sorusunu yönelterek öğrencileri düşünmeye sevk etmiştir.
- 4) Tartışma: Öğretmen öğrencilerle sürekli iletişim halindedir doğru cevapları için olumlu pekiştireç kullanmıştır ve farklı alternatif cevaplar için tartışma ortamı oluşturmuştur.
- 5) Matematiksel temel: Öğrencinin kullandığı ‘çeyrek’ ifadesi matematiksel olarak kabul edilebilir bir özelliktir.

6) Bağlantı: Öğretmenlerin ve öğrencilerin farklı problem durumları ve çözüm amaçlarına ait göstergeye rastlanmamıştır. Fakat öğretmen soruya “çocuklar şöyle de diyebilirdiniz? ...” şeklinde alternatif bir çözüm de söylemiştir.

Genel olarak düşünüldüğünde, öğretmenin amacı sadece soruyu cevaplandırıp bir başkasına geçmek değildir öğrencilerin bir soruyla ilgili alternatif çözümleri de görmelerini istemektedir. Ve bu durum için fırsatlar yaratmaya çabalamaktadır.

4.2.2.3. Eda Öğretmen tarafından sunulan üçüncü örnek

$$x + 4 = 20 \text{ ise } x = ?$$

Eda Öğretmen: Bu bir denklem değil mi arkadaşlar? Burada x nedir hepiniz bakınca görüyorsunuz değil mi?

Öğrenciler: evet 16.

Eda Öğretmen: Şimdi arkadaşlar biz 16 yı nasıl bulacağımızı öğreneceğiz? İşin mantığı şu bunu eşitliği terazinin iki kefesi gibi düşünüyorsunuz? Bir kefedede $x + 4$ var bir kefe de 20 var. Peki, bizim amacımız ne?

Bilal: x 'i bulmak

Faruk: bilinmeyeni bulmak

Eda Öğretmen: evet doğru. Yani bilinmeyeni yalnız bırakmak için bilinmeyenin yanındaki sayıyı yok etmemiz lazım. Peki, ben sayıyı nasıl yok ediyorum. Bilinmeyenin yanında hangi sayı var?

Öğrenciler: +4

Eda Öğretmen: bilinmeyenin yanında 4 sayısı var değil mi bu +4'ü nötrlemem için ne yapmam lazım 0 yapmam için +4'ü nasıl nötrlüyorum?

Cengiz: hocam eksi eee

Eda Öğretmen: evet. Yanına ne yazarsam nötrlenir? -4 o zaman ben bu taraftan 4 ü çıkarıyorum.

$$x + 4 - 4$$

Terazilerde görmüştük bir kefeye ne işlem yapıyorsam öbür kefeye de aynı işlemi yapacağız ki denge bozulmasın tamam mı? Yani buradan (eşitliğin sol tarafı) 4 çıkardıysam buradan da (eşitliğin sağ tarafı) ne yapacağım?

Öğrenciler: 4 çıkaracağız.

Eda Öğretmen: Her zaman için kuralım şu kalemi elime aldığım zaman “=” ‘i hizadan yazacağım.

$$x + 4 - 4 = 20 - 4$$

$$x = 16.$$

Demek ki cevap neymiş 16. Peki testlerde ben bunu böyle uzun uzun mu yapacağım? Tek tek çıkarayım işlemler yapayım? Testlerde yaparken daha kısa yapabilirsiniz. Ne yapmam lazım x 'i yalnız bırakmam lazım peki ne yapayım x 'in yanındakini atayım karşıya yanında ne var?

Öğrenciler: 4

Eda Öğretmen: +4.+4'ü karşıya atarken yön değiştiriyor karşı tarafa geçerken işaretini değiştiriyor. Kalemimi aldım elime yine eşittir işaretini hizadan yazıyorum. Peki, +4 diğer taraf geçtiyse sol tarafta ne kaldı?

Öğrenciler: x

Eda Öğretmen: peki +4 diğer taraf geçince kimliğini değiştirecek birde 20 vardı o zaman kaç kalacak?

$$x + 4 = 20$$

$$x = 20 - 4$$

$$x = 16$$

Yani ilk önce mantığını anladım sonra pratik yaptım.

Ela: Öğretmenim burada eksi artıyı görünce eksi oluyor mu?

Eda Öğretmen: nasıl yani?

Ela: $-4 + 20$ yi hani

Eda Öğretmen: toplama gibi düşüneceksin Ela. Zıt işaretliler toplanırken ne yapıyoruz büyük sayıdan küçüğü çıkartıp büyüğün işaretini koyuyoruz yani bu işlem çarpma değil ki burada. -4 20'nin yanına işaretiyle beraber geliyor. Her ikisini de yazın.

Eda Öğretmen tarafından sunulan üçüncü örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Problem denklem problemidir. Öğretmen ilk olarak denklemin 1. Dereceden bir bilinmeyenli bir denklem olduğunu ve bu denklemin çözümüyle ilgileneceğini belirtmiştir.
- 2)Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen çözümü açık bir şekilde ifade etmiştir. Çözüm için nasıl bir yol izleyeceğini adım adım anlatmıştır. Problemde kullanılan kuralların olduğu çözüm yönteminin tanımını vermiştir.
- 3) Yaratıcı düşünme: Sorunun çözümü için öğrencilerden fikir almamıştır. Çünkü öğrenciler bu tip soruyla ilk defa karşılaşmaktadırlar.
- 4) Tartışma: Öğretmenin çözümünü açıklaması çözüm için öğrencilerin çözüm mantığını anlamalarını sağlayacak temel bilgileri söylemesi en sonunda ise, sonucu pratik bir kurala dayandırması tartışma ortamını oluşturduğunu göstermektedir.
- 5) Matematiksel temel: Akıl yürütmeye kapsanan bileşenlerin gerçek özelliklerine değinilmiştir. “Eşitliğin her iki tarafına aynı sayının eklenmesi” kuralı söylenmiştir ve altında yatan özellikler açıklanmıştır. Fakat sonrasında “+4 ü -4 olarak karşıya geçiriyoruz” ifadesi matematiksel gereklilik değildir fakat genel kabul görmüş pratik bir kuraldır.
- 6) Bağlantı: Öğrencinin sorduğu, “Öğretmenim burada eksi artıyı görünce eksi oluyor mu?” sorusuna cevap verilmiştir. Fakat öğrencinin asıl problemi temel işlemlerde

yaşadığı eksiklikten kaynaklandığı için tekrar bu tip sorularla kafasının meşgul olma ihtimali vardır.

Genel olarak düşünüldüğünde, öğretmenin amacı sadece soruyu cevaplandırıp bir başkasına geçmek değildir öğrencilerin bir soruyla ilgili alternatif çözümleri de görmelerini istemektedir. Soru çözümünde iki çözüm yöntemi uygulamıştır ve çözüm adımlarını ayrıntılı bir şekilde açıklamıştır. Öğretmen öğrencilerin algoritmayı anlamlandırması gereken temel noktaları anlatmıştır ve ihtiyaçları olabilecek pratik yöntemi de onlara alternatif olarak göstermiştir.

4.2.2.4. Eda Öğretmen tarafından sunulan dördüncü örnek

$$\frac{x}{2} + 1 = 3 \quad x = ?$$

Eda Öğretmen: Elayı tahtaya kaldırdı.

Ela: Öğretmenim ben benim yaptığım gibi yapayım mı?

Eda Öğretmen: Buradan mı yapacaksın? Buradan (pratik yöntem) yap. Sana bir şey sormak istiyorum önce hangisini göndereceksin karşı tarafa?

Ela: +1 i göndereceğim.

$$\frac{x}{2} = 3 + 1$$

Öğrenciler: Yanlış oldu hocam.

Ela: pardon eksi olacak.

Eda Öğretmen: sol tarafta kalanı yaz sağ tarafta işlemi yap yaz,

$$\text{Ela: } \frac{x}{2} = 4$$

Eda Öğretmen: x'i yalnız bırakmak için ne yapacaksın? x'in yanında ne kaldı?

Ela: eee hocam ya ben benim yaptığım gibi yapayım. (Ela'nın kastettiği yöntem algoritmik işlemlere dayalı ters işlem yaparak sonuca ulaşmak)

Eda Öğretmen: 2 yi yaz bakalım. x i yalnız bırakmak için x'in yanında ne var Ela?

Ela: bölü 2 var

Eda Öğretmen: bölü 2 yi ne olarak geçireceğiz karşıya?

Ela: Çarpı 2 olarak (aynı basamakta işlem yapmaya çalıştı)

Eda Öğretmen: ama aynı basamakta geçirmiyoruz işlem hatası yaparsınız. Eşittir işaretini aynı hizada yaz. 2 yi okla gösterelim buraya(eşitliğin sağ tarafı) geldi. Burada ne kaldı(eşitliğin sol tarafı)

Ela: (öğretmenin yardımıyla işlemleri yazıyor)

$$x = 4.2$$

$$x = 8$$

Eda Öğretmen: Peki arkadaşalar anlaşılmayan bir yer var mı?

Öğrenciler: Hayır.

Eda Öğretmen: Peki o zaman bu denklem için $\frac{x}{2} + 1 = 3$ e bir problem

yazalım? Kim söyleyecek? Büşra sen söyle?

Büşra: *hangi sayının eee 1 dk 2 ye bölümünün 1 fazlasın ee 3 tür.*

Eda Öğretmen: *evet güzel. Başka ne söyleyebiliriz?*

Emin: *Bir sayının yarısının 1 fazlası 3 tür.*

Eda Öğretmen: *evet. Güzel. Başka nasıl diyebiliriz? Hep bir sayının mı deriz?*

Faruk: *bilinmeyen*

Barış: *x'in a'nın*

Eda Öğretmen: *Başka ne deriz?*

Öğrenciler: *y deriz*

Eda Öğretmen: *peki başka sözel olarak ne deriz peki? Mesela Elif'in yaşı desek olmuyor mu? Bilinmeyen için.*

Bilal: *olur. Elif'in yaşı mı diyeyim yoksa başka bir şey mi?*

Eda Öğretmen: *olur hangisini istersen.*

Bilal: *Elif'in yaşı abisinin yarısının 1 fazlasıdır Elif'in yaşı kaçtır?*

Faruk: *hayır 3 yok.*

Cengiz: *hayır olmadı.*

Bilal: *yok olmadı bu. Bir elma diyelim yok oda olamaz.*

Eda Öğretmen: *olur niye olmasın.*

Bilal: *yok. Elif'in yaşının yarısının 1 fazlası 3 tür Elif'in yaşı kaçtır?*

Eda Öğretmen: *Emin sen sanki bir şey söyledin sanki abisinin yaşı 3 tür falan?*

Emin: *Elif'in abisinin yaşının yarısının bir fazlası 3 tür buna göre Elif'in yaşı kaçtır?*

Faruk: *aynı olmadı mı?*

Eda Öğretmen: *şimdi abisinin yaşını söyledik Elif'in yaşını sorduk.*

Sorduğumuz şeyin bilinmeyenle aynı olması lazım. Çünkü bilinmeyi buluyoruz.

Emin: *iki elmanın yarısının 1 fazlası eee*

Eda Öğretmen: *iki elmanın mı o zaman bilinmeyen olmadı elmanın kütlesi olsun o zam. Poşet var poşette elma var poşetteki elmanın kütlesinin yarısının 1 fazlası 3 kg dir. Poşetteki elma kaç kilogramdır?*

Bilal: *Bir tenekenin yarısının 1 fazlası 3 litredir bu teneke kaç litre sini alır?*

Eda Öğretmen: *evet olabilir.*

Eda Öğretmen tarafından sunulan dördüncü örneğin analizi

1) Problem tipinin tanımlanması: Problem denklem problemidir. Öğretmen bu problemin çözüldüğü ders hep denklem çözümü ile ilgilendiğinden bu örnekte ayrıca problem türü ile ilgili açıklama yapmamıştır.

2) Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen tahtaya kaldırdığı Ela ile birlikte çözüm yapmıştır. Ela'ya adım adım ne yapacağı konusunda yardımcı olmuştur. Denklemlerin nasıl çözüleceği konusunda sürekli hatırlatma yapmıştır. Fakat Ela'nın sürekli "ben

yaptığım gibi yapayım mı” söylemlerini dikkate almamıştır. Çünkü Ela, dört işleme dayalı algoritmik işlemler yapma eğilimindedir. Bu düşünce yapısından soyut düşünme yapısına geçmesi gerekmektedir.

3) Yaratıcı düşünme: Denklem çözümü ile ilgili önceki prosedürleri takip etmiştir. Fakat denklem çözümünden sonrasında *“bu denkleme uygun problem kurun”* demesi öğrencileri düşünmeye sevk etmek için sorulmuş bir sorudur.

4) Tartışma: Öğretmen öğrencilerle sürekli iletişim halinde ve işlem adımlarını öğrencilerle beraber yapmaktadır. Ela’nın ısrarla uygulamak istediği çözüm yöntemini neden kullanmaması gerektiğini söylememiştir. Bu aşamada, Ela’yı ikna edecek yaptığı çözüm yöntemine odaklanmasını sağlayacak ikna edici cümleler kurulabilirdi. Bu kısımda tartışma olduğu söylenemez. Fakat öğretmenin denklem çözümü bittikten sonra öğrencilerle problem kurma ile ilgili tartışma ortamı oluşturması dikkat çekmektedir. Konuşmak isteyen tüm öğrencilerin fikirleri için dönütler vermektedir. Örneğin, Öğrencinin yanlış bir problem kurduğunu fark ettiği için öğrencinin problemini tekrar söylemesini sağlamıştır ve hatasını düzeltmiştir. “Elif’in abisinin yaşının yarısının bir fazlası 3 tür buna göre Elif’in yaşı kaçtır?” probleminde hatanın ne olduğunu sınıfta söylemiştir ve düzeltmiştir. Bu bölümde öğrencinin yanlış öğrenmesi engellenmiş olsa da yansıtıcı sorularla daha etkili bir durum yaratılabilirdi. Sence hatan ne? Nasıl düzeltebilirsin? Gibi sorular sorulabilirdi.

5) Matematiksel temel: Öğretmen, öğrencilerin işlem yaparken basamaklarda işlem hatası yapmalarına sebep olacak durumları ortadan kaldırmak için matematiksel notasyonlara dikkat etmektedir. Öğrencileri sürekli eşittir işaretleri alt alta gelsin eğer bir sayıyı diğer tarafa geçiriyorsanız okla gösterin ve alt basamakta geçtiği yeri yazın söylemleri ile uyarmaktadır ve yanlış yapılan yerlerde müdahale etmektedir.

6) Bağlantı: Öğretmen, öğrencilerin problem kurarken hep bir sayının hangi sayının gibi sayılarla ilgili problem kurduğunu fark etmesi üzerine bu durumun önüne geçmek için alternatif problemler kurmak için çabalamıştır.

Genel olarak düşünüldüğünde, öğretmenin amacı sadece denklem çözüp sonuca ulaşmak değil aynı zamanda öğrencilerin önceki deneyimlerini kullanmalarını sağlamak, işlemlerini anlamlandırmalarını sağlamak, bir problem için farklı

alternatifleri görmeleri için destek olmaktır. Öğrencilerin farklı alternatifler üzerinde düşünmelerini sağlamak, öğrencilerin birebir işlem yapmasından ötesinde bir etki yaratmaktadır. Akıl yürütme sürecine başlangıçta sınırlı bir algoritmayla başlanması sınırlı fırsatlar sunmuş olsa da sonrasında oluşturulan tartışma ortamı ve alternatif sorular öğrencilerin yaratıcı düşüncelerine imkân vermektedir.

4.2.2.5. Eda Öğretmen tarafından sunulan beşinci örnek

$7x - 15 = 3x - 3$ denklemini çözünüz?

Bilal: 2 bilinmeyen var.

Barış: hayır değil.

Ela: evet.

Eda Öğretmen: 2 bilinmeyen mi?

Ela: evet.

Eda Öğretmen: 2 bilinmeyen mi var yoksa eşitliğin 2 tarafında da bilinmeyen var?

Öğrenciler: evet.

Eda Öğretmen: tek bilinmeyen var ama eşitliğin her iki tarafında da bilinmeyen var.

Eda Öğretmen: şimdi bunu nasıl yapacağımızı öğreneceğiz. Yapan var mı?

Faruk: ben buldum.

Cengiz: buldum hocam

Emin: buldum.

Eda Öğretmen: nasıl yaptınız?

Faruk: hocam mantıken bu sorudaki x ler aynı değil mi? aynı 7 ile 3 ü çarptık 15 çıkardık burada 3 ile 3 çarptık 3 çıkardım.

Eda Öğretmen: yani değer vererek mi yaptın?

Faruk: evet.

Eda Öğretmen: sen nasıl yaptın?

Cengiz/Emin/Barış: hocam -15 i karşıya attım $3x$ i de diğer tarafa atarak işlem yaptım.

Eda Öğretmen: peki ben yapayım mı? Şimdi çocuklar soruya bakalım eşitliğin her iki tarafında bilinmeyene var gördüğünüzde şaşırmayalım. Olabilir. Her iki tarafta aynı cins bilinmeyende olabilir farklı cins te olabilir ama şuan biz bir bilinmeyenlerle ilgileniyoruz. Bu tarafta bilinmeyen $7x$ diğer tarafta $3x$. İşlem kolaylığı olsun diye tek kalemde çözebilmek için bilinmeyen küçük olanını büyük olanının ayağına götüreceğiz çocuklar. Bayramlarda ne yapıyoruz küçükler büyüklerin elini öpüyor değil mi? Burada da küçükler büyüklerin ayağına gidiyor. Bu sayede bilinmeyenler bir yerde toplanmış oluyor bilinenlerde diğer tarafa gidiyor ve karşıda toplanıyor. Eşittir işaretini aynı hizada yazdım $3x$ i $7x$ in yanına getireceğim. $3x$ artıydı ne olarak geçecek $-3x$. Peki diğer tarafta ne vardı -3 15 nasıl geçecek $+15$ olarak. İşlemlerimizi yapalım.

$$7x - 15 = 3x - 3$$

$$7x - 3x = -3 + 15$$

$$4x = 12$$

$$x = 12/4$$

$$x = 3$$

Ali: anlamadım hocam.

Eda Öğretmen: tamam yazın tekrar anlatayım. Zaten size verdiğim çalışma kâğıdında örnekler var onlarda ödeviniz olsun.

Emin: hocam hep küçük büyüğün yanına gider değil mi büyük gitmez?

Eda Öğretmen: yok gider gider de o zaman işlem biraz karışır yani onu da yapalım istiyorsan eksili çıkar. Yani bu denklemin çözme kuralı değil bu sadece ben size diyorum ki benim size söylediğim bir öneri büyüğü küçüğün ayağına götürün ki daha kolay işlem yaparsınız. Öbür türlüde olur yapıyor mu onu da.

Öğrenciler: yapın.

Eda Öğretmen: tamam. Hangisi büyük $7x$ o zaman $3x$ in yanına gitsin. Eşittir işareti hiızadan yazdım. -15 in yanına ne gelecek $+3$ gelecek.

$$-15 + 3 = 3x - 7x$$

$$-12 = -4x$$

$$\frac{-12}{-4} = x$$

$$x = 3$$

Bakın sonuç aynı çıktı ama bakın negatiflerle uğraşmış olduk.

Eda Öğretmen tarafından sunulan beşinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Öğretmen problemin yapısı hakkında bilgi vermiştir. Denkleminde bir bilinmeyen olduğunu fakat eşitliğin her iki tarafında da bilinmeyen olduğunu böyle bir denklem gördüklerinde şaşırmamaları gerektiğini söylemiştir. “Olabilir. Her iki tarafta aynı cins bilinmeyende olabilir farklı cins te olabilir ama şuan biz bir bilinmeyenlerle ilgileniyoruz” cümleleriyle problem tipi ile ilgili bilgi vermiştir.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen çözümden önce öncelikle sınıfta öğrencilerin çözüm yapıp yapmadıklarını sorgulamıştır. Çözüm yapan öğrencilerin çözümlerine baktıktan sonra problemin nasıl çözüleceği ile ilgili bilgi vermiştir. Problem çözümünü açık bir şekilde ifade etmiştir. Çözüm için nasıl bir yol izleyeceğini adım adım anlatmıştır. Problemde kullanılan kuralların olduğu çözüm yönteminin tanımını vermiştir.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmen, çözüm yöntemi ile ilgili öğrencilere başlangıçta düşünme fırsatı vermiştir. Bazı öğrenciler değer vererek çözüme ulaşmıştır fakat öğretmen çözüm prosedürünün nasıl seçileceği ile ilgili öğrencilere bir soru yöneltmemiştir. Örneğin, *önceki kuralları burada kullanabilir miyiz?* gibi öğrencileri düşünmeye sevk edecek sorular sorulabilirdi.

4) Tartışma: Sunum boyunca sınırlı tartışma ortamı olmuştur. Sadece problem tipi ve nasıl çözüleceği vurgulanmıştır. Öğretmen değişkenlerin farklı yönleri işaret değiştirerek hareket edebileceğini çözümü iki kere yaparak aynı sonucu bulunduğunu vurgulayarak doğrulama tartışması yapmıştır. Fakat eğer öğretmen denklemin çözüm prensiplerini ve amaçlarından bahsederek başlasaydı ve sonra kural seçimine gitseydi tartışma ortamı olabilirdi.

5) Matematiksel temel: Öğretmen çözümünü *“İşlem kolaylığı olsun diye tek kalemde çözebilmek için bilinmeyen küçük olanını büyük olanının ayağına götüreceğiz çocuklar. Bayramlarda ne yapıyoruz küçükler büyüklerin elini öpüyor değil mi? Burada da küçükler büyüklerin ayağına gidiyor. Bu sayede bilinmeyenler bir yerde toplanmış oluyor bilinenlerde diğer tarafa gidiyor ve karşıda toplanıyor”* şeklinde yapmaktadır. Fakat burada söylenilen küçüğün büyüğün ayağına gitmesi durumu matematiksel bir gereklilik değildir. Nitekim öğrencinin *“hocam hep küçük büyüğün yanına gider değil mi büyük gitmez?”* soruyla karışıklık ortaya çıkmıştır ve öğretmen hemen müdahale ederek, *“yok gider gider de o zaman işlem biraz karışır yani onu da yapalım istiyorsan eksili çıkar. Yani bu denklemi çözme kuralı değil bu sadece ben size diyorum ki benim size söylediğim bir öneri büyüğü küçüğün ayağına götürün ki daha kolay işlem yaparsınız. Öbür türlüde olur yapıyım mı onu da”* ifadeleriyle bu karışıklığı düzeltmiştir. Denklemi tekrar çözerek aynı sonuç çıktığını fakat negatiflerle uğraşmış olduğunu belirtmiştir.

6) Bağlantı: Öğretmen öğrenciden gelen soru üzerine çözüm olarak bahsettiği yöntemin onlara işlem kolaylığı sağlayacağını söylemiştir ve bu durumu denklemi tekrar öğrencilerin istediği şekilde çözerek onların aklında problem kalmasını engellemeye çalışmıştır.

Genel olarak öğretmen öğrencilerin farklı problem türleriyle karşılaşmalarını sağlamayı amaçlamıştır. Çözülen denklemle ilgili bir soru tipi daha kaldı demesi bu durumu göstermektedir. Çözüm yöntemi olarak tartışmadan seçilmesi açısından sınırlı fırsatlar sunulmuş olsa da yer yer öğrencileri ikna edici tartışmalar yapılmıştır.

4.2.2.6. Eda Öğretmen tarafından sunulan altıncı örnek

36 tane şeker 15 çocuğun bir kısmına 2şer tane bir kısmına 3 er tane olacak şekilde dağıtılıyor. Buna göre 2 şeker alan kaç çocuk vardır?

(Öğrencilerin düşünmesi için fırsat verildi)

Eda Öğretmen: Evet kim yapacak çocuklar?

Öğrenciler: Yapmak isteyen olmadı.

Eda Öğretmen: Peki yapaalım o zaman. Şimdi ben size soracağım burada bilinmeyen ne?

Barış: Hocam 2 bilinmeyen var.

Faruk: kaç çocuğa 2şer kaç çocuğa 3 er tane

Eda Öğretmen: Dikkat ettiyseniz önceki soruyla çok benzer. Şimdi bakın burada da bilinmeyenleri başlıklar altında yazıyorum. 2şer şeker ve 3er şeker ala çocuklar diye. Diğer soruda da neydi horoz ve keçi sayısı bilinmeyenlerdi. Bu da aynı mantık. Yine ne yapacağım çocuklar iki bilinmeyen ama ben bunu tek bilinmeyene düşüreceğim. Nasıl düşünüyorsunuz?

Emin: hocam 2 şer şeker alan x olur. Hocam 3 er alan da toplam 15 çocuk var o yüzden $15-x$ olur.

Eda Öğretmen: evet güzel. Yazalım. Çocuklar en çok neyi karıştırıyor biliyor musunuz? 3 er şeker alan için $36-x$ diyorlar.

Nilgün: ee hayır 15 olacak. 36 olmaz.

Eda Öğretmen: çünkü neden şeker sayıları toplamı değil x dediğimiz 2 şer şeker alan çocuk sayısı. 2şer şeker alan çocuk sayısına x dersek 3 er şeker alan çocuk sayısını bulmak için toplam 15 den neyi çıkaracağız x i çıkaracağız. Şimdi buraya kadar tamam mı?

Öğrenciler: tamam.

Eda Öğretmen: peki sorunun devamını nasıl getireceğim?

Emin: diyor ki. (sorunun devamını okuyor)

Eda Öğretmen: toplam kaç şeker var?

Emin: 15

Faruk: 36

Cengiz: 36

Nilgün: 15

...

Eda Öğretmen: Bakın aynı hataya düştünüz. Toplam kaç şeker varmış 36 şeker varmış. Peki, 36 şeker verilmiş bana bu verilene nerden ulaşacağım ben onu düşünüyorum.

Emin: eşittir 36 diyeceğiz.

Eda Öğretmen: tamam. Yani bu yazdıklarımın toplamı mı 36 ya eşit?

Emin: hayır o 15 e eşit.

Öğrenciler: hayır.

Eda Öğretmen: 36 neye eşit onu bulacağım.

Bilal: şekere

Eda Öğretmen: evet doğru şekere eşit ama şeker sayısını nerden elde edeceğim?

Emin: hocam önce kişilerin sayısını bulalım sonra eee

Eda Öğretmen: kişi sayısı zaten verilmemiş mi? 15 olarak verilmiş.

Emin: hocam o zaman x ile onun toplamını 36 ya böleceğiz. eee

Ela: hocam çarpacağız.

Eda Öğretmen: ela neyi çarpacağız?

Ela: $15-x$ i eeee bilmiyorum.

Bilal: 2 ile x i 3 er şeker le de $15 - x$ 'i çarpacağız.

Eda Öğretmen: Niye çarpıyorsun?

Bilal: Şekerin ne kadar olduğunu bulmak için.

Eda Öğretmen: x tane kişi 2 şer şeker almışsa her biri 2 şeker aldı toplam kaç şeker eder çocuklar?

Öğrenciler: $2x$

Eda Öğretmen: $15 - x$ kişi 3 er şeker aldıysa şekerini nasıl bulacağız?

Barış: $45 - 3x$

Faruk: $45 - 3x$

Cengiz: $45 - 3x$

Eda Öğretmen: 3le çarpacağız. Hani bir önceki soruda kaç tane ayak

olduğunu çarparak bulduk burada aynı mantık. Burada da kaç tane şeker sayısı ile çarptık. Peki, bu toplam neye eşit olacak.

Öğrenciler: 36.

Eda Öğretmen: Bu denklemi çözüyoruz hemen.

$$2x + 3 \cdot (15 - x) = 36$$

$$2x + 45 - 3x = 36$$

$$-x = 36 - 45$$

$$-x = -9$$

$$x = 9$$

Peki. Kaç tane 2 şer şeker alan varmış

Öğrenciler: 9 tane.

Eda Öğretmen: peki 3 er şeker alanı sorsaydı?

Emin: 15 den çıkarırdık.

Eda Öğretmen: evet o zaman 6 taneymiş. Anlaşılmayan yer var mı?

Eda Öğretmen tarafından sunulan altıncı örneğin analizi

1) Problem tipinin tanımlanması: Öğretmen, problemi okuduktan sonra problemin yapısı ile ilgili öğrencilere bilgi vermiştir. Problemde iki bilinmeyen olduğunu fakat bir bilinmeyene düşürerek çözüm yapacağını belirtmiştir.

2) Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen çözümden önce öncelikle sınıfta öğrencilerin çözüm yapıp yapmadıklarını sorgulamıştır. Öğretmen, öğrencilerin çözüm yapamadığını gördükten sonra problemi kendisi çözmeye başlamıştır. Çözüm yöntemini açıklamıştır. Problem ve çözüm yöntemi arasında bağlantı kurmuştur. Çözüm için nasıl bir yol izleyeceğini adım adım anlatmıştır.

3) Yaratıcı düşünme: Öğretmen, çözüm yöntemi ile ilgili öğrencilere başlangıçta düşünme fırsatı vermiştir. Öğrencilerin problem tipini algılamalarını sağlayacak “burada bilinmeyen ne” sorusu ile öğrencilerin problemi anlamaları için fırsat vermiştir. Sonrasında ise, öğrencilerin muhtemel hataya düşmelerini engellemek için girişimde bulunmuş ve yaygın bir hatayı söylemiştir. Problem çözüm süreci boyunca sürekli öğrencilere “peki sorunun devamını nasıl getireceğim? Evet, doğru şekere eşit ama şeker sayısını nereden elde edeceğim?” gibi sorular yönlendirmesi öğrencilerin düşünmesi için fırsatlar verilmesine sebep olmaktadır.

4) Tartışma: Öğretmen öğrencilerle sürekli iletişim halinde ve işlem adımlarını öğrencilerle beraber yapmaktadır. Konuşmak isteyen tüm öğrencilerin fikirleri için dönütler vermektedir. Problemden istenen cevaba ulaştıktan sonra şunu sorsaydı cevap ne olurdu? gibi ek sorular yöneltmesi öğrencileri farklı düşüncelere yönlendirmektedir.

5) Matematiksel temel: Öğretmen, öğrencilerin işlem yaparken basamaklarda işlem hatası yapmalarına sebep olacak durumları ortadan kaldırmak için matematiksel notasyonlara dikkat etmektedir.

6) Bağlantı: Öğrencilerin problemi anlamaları için önceki problem durumu ile sürekli bağlantı kurarak ve ayrıntılı açıklamalar yaparak çözüm yapmıştır.

Genel olarak incelendiğinde, öğretmen denklem çözümünü gerektirecek bir problem seçerek öğrencilerin bu kazanımı kazanmalarını hedeflemiştir. Problem çözerken problemi parça parça okumaları gerektiğini her adım için açıklamalar yaparak ayrıntılı bir şekilde çözüm yapmıştır. Öğrencilere ufak hatırlatmalar ve düşünmeleri için soru sorarak yönlendirmeler yapması öğrencilerin derse katılmaları için fırsat vermektedir. Farklı problem türleri ile karşılaşmaları öğrencilerin düşünmeleri için etkili bir fırsat olabilir.

4.2.2.7. Eda Öğretmen tarafından sunulan yedinci örnek

$A(3,0), B(0, -4), C(7,0), D(0,6)$ olsun. Bu noktaları koordinat düzleminde gösterelim.

Eda Öğretmen tahtaya çizilen koordinat düzleminde noktaları göstermek istediğini söylemiştir. Noktaların nasıl gösterileceği ile ilgili hatırlatma yapmıştır.

Eda Öğretmen: A noktasını kim gösterecek?

Barış: önce x den alıyoruz (y yi gösterdi)

Eda Öğretmen: x orası mı?

Barış: pardon. Diğer taraftan da 0.

Eda Öğretmen: y si yok yani.

Barış: (noktayı gösterdi).

Eda Öğretmen: B noktasını kim gösterecek?

Murat: gösterdi.

Eda Öğretmen: C noktasını kim gösterecek?

Aleyna: gösterdi.

Eda Öğretmen: D noktasını kim gösterecek?

Büşra: gösterdi.

Eda Öğretmen: peki çocuklar bulduğumuz noktalar hep eksenlerin üzerinde çıktı gördünüz mü?

Öğrenciler: evet.

Eda Öğretmen: peki bazı noktalar x ekseninde çıktı bazı noktalar y ekseninde çıktı peki ben buna göre bir kural oluşturabilir miyim?

Öğrenciler: sessiz kaldı.

Eda Öğretmen: tekrar etti

Faruk: hocam ilk olarak eee. Hocam ilk olarak apsisteki sonra ordinattaki sayıları alırsınız.

Eda Öğretmen: evet doğru. Onu yaparak noktaları bulduk yerlerine yerleştirdik. Bazıları x üzerinde bazıları y ekseninde çıktı neden? Hangi durum oldu da bu noktalar x ekseninde çıktı.

Ahmet: Hocam ordinatı 0 olursa apsis kendi üzerinde çıkar.

Eda Öğretmen: Çok güzel. Yani çocuklar y si 0 olan noktalar ne üzerindedir?

Faruk: x

Eda Öğretmen: Ahmet diyor ki öğretmenim x ekseninde noktalar baktım y si hep 0. Şöyle diyebilir miyim x ekseninde noktaların y si nedir? 0 dır. Peki, buna göre y ekseninde noktaların x i nedir?

Öğrenciler: 0 dır.

Eda Öğretmen: peki bunu not olarak yazalım. X ekseninde noktaların y bileşeni 0 dır. Y ekseninde noktaların x bileşeni 0 dır. Anladınız mı?

Eda Öğretmen tarafından sunulan yedinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Öğretmen soruda verilen noktaların koordinat düzleminde gösterilmesi ile ilgili bir soru olduğunu söylemiştir.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Problemin nasıl çözüleceği ile ilgili hatırlatma yapmıştır.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmen, öğrenciler noktaları gösterdikten sonra öğrencilere “peki bazı noktalar x ekseninde çıktı bazı noktalar y ekseninde çıktı peki ben buna göre bir kural oluşturabilir miyim?” sorusunu yöneltmiştir ve bu sayede öğrencilerin düşüncelerini sağlamıştır.

4) Tartışma: Öğretmen, “Bazıları x üzerinde bazıları y eksenini üzerinde çıktı neden? Hangi durum oldu da bu noktalar x eksenini üzerinde çıktı.” sorusu ile öğrencilerin problem durumu ile ilgili yorum yapmalarını istemiştir. Öğrencilerin mevcut örneklerden hareketle bir yargıya varmalarını ve kuralı kendilerinin oluşturmalarını beklemektedir. Dolayısıyla etkili bir tartışma ortamı sağlanmıştır.

5) Matematiksel temel: Öğrencilerin kuralı bulmasından sonra öğretmen daha düzenli bir şekilde kuralı ifade etmiştir tekrar ayrıntılı anlatmıştır ve öğrencilerin notlarına eklettirmiştir. “ x eksenini üzerindeki noktaların y bileşeni 0 dır. y eksenini üzerindeki noktaların x bileşeni 0 dır. “ ifadesi matematiksel olarak kabul edilebilirdir.

6) Bağlantı: Problem durumu sadece noktaları koordinat düzleminde göstermektir fakat öğretmen bu noktaların ortak özellikleri yardımıyla öğrencileri düşünmeye sevk ederek bir kurala ulaşmayı hedeflemiştir.

Genel olarak, öğretmen başlangıçta noktaların nasıl gösterileceği ile ilgili kuralı kendisi hatırlatmıştır ve öğrenciler zorlanmadan bu işlemi yapmışlardır. Öğrenciler için rutin bir problem rolü üstlenen bir problem olarak görünse de öğretmenin problemin sonunda yaptırdığı yorumlama işlemi öğrenciler için önemli fırsatları barındırmaktadır.

4.2.2.8. Eda Öğretmen tarafından sunulan sekizinci örnek

Bir telefon şirketi müşterileri için üç farklı tarife çeşidi oluşturmuştur. Bunlar;

A: Açılış ücreti olmadan dakikda başına 3 TL ücret ödenecektir.

B: Açılış ücreti 15 TL, dakika başına 2 TL ücret ödenecektir.

C: Paket tarifesidir. Toplam 60 TL lik paket satın alındığında, dakika başına ücret 5 TL dir. Bu 3 durumu inceleyelim.

İlk olarak bir arabanın benzini ve gidilen yol sonrasında bir havuzun doldurulması örneği ile doğrusal iliki kavramına değinilmiştir. Sonrasında ise, öğretmen konuyu bir örnek üzerinde açıklamak istediğini söylemiştir ve bir problem durumu ile anlatmaya başlamıştır.

Eda Öğretmen :şimdi biz bu durumlarla ilgili tablo ve grafik oluşturacağız. Oluşturduğumuz tabloda nelerin olması lazım?

Bilal: süre ve para miktarı

Eda Öğretmen: evet yazalım. Şimdi burda açılış ücreti yok dk başına ne kadar ödenecek 3 TL. Peki ilk etapta 1 dakikada kişi kaç tl ödeyecek?

Öğrenciler:3 TL

Eda Öğretmen: 2 dakika olduğu zaman kaç tl ödeyecek?

Öğrenciler:6 TL

Eda Öğretmen: tablodaki değerleri doldurdu. En son n. dakikada ne olacak?

Faruk: n. dakika ne demek hocam?

Eda Öğretmen: n burada bilinmeyen kuralını bulacağım

Cengiz: örüntülerdeki gibi.

Eda Öğretmen: evet ne olacak 3.n ödemiş olur. x de diyebilirsiniz. Peki ödenen toplam miktara y dersem bilmiyorum ya, bu y neye eşit olur en sonunda $3x$ e eşit olur. $y = 3x$ oldu.ödenen tutar dakika başı 3 tl ödediği için kaç tl ise bunun 3 katıymış

Ela: 3 nerden geldi?

Eda Öğretmen: soruda demiş ki zaten her dakikaya 3 TL ödüyor.1. dakikada 3 TL 2. dakikada 6 TL 3. dakikada 9 4. dakikada 12 öder x. dakikada $3x$ öder.

Ela: öğretmenim dakika başına 4 tl ödeseydi $4x$ mi olurdu?

Eda Öğretmen: evet. Aradaki ilişki anlaşıldı mı?

Öğrenciler:evet

Eda Öğretmen: peki şimdi grafikte gösterelim. İlk önce eksenlerimize ne yapacağız isim vereceğiz. Ne isim vereceğiz eksenlere?

Barış: geçen süre ve ödenen miktar

Eda Öğretmen: nereye yazalım?

Barış: üste.

Eda Öğretmen: boşluklar eşit olacak eksenlerin isimleri yazılacak değil mi. Yazdık. Şimdi geçen süre 1,2,3,4 olarak

gitmiş x eksenine yazalım. Ödenen miktar nasıl gitmiş 3,6,9, olarak gitmiş eşit aralıklı yaptık.Şimdi burada açılış ücreti yok değil mi en başta ne kadar ödemiş bu 0. dakikada ?

Bilal:0 ödemiş.

Eda Öğretmen: peki tabloya onu da ekleyelim 0. dakikada ne kadar öder $0.3 = 0$ TL öder o halde birinci sıralı ikilim , sıralı ikili neydi (x,y) idi değil mi? Ne olacak 0. Dakikada 0 o zaman (0,0) olacak ikincisi (1,3), diğeri (2,6)

Faruk: bu hep böyle gidiyor.

Eda Öğretmen: evet. ne yapacağız şimdi bu noktaları birleştireceğiz.işte bu grafik nedir benim doğrusal ilişkimin grafiğidir.

Barış: yauk yumuk olsaydı olmazdı değil mi?

Eda Öğretmen: evet olmazdı. Evet devam edelim. B durumuna bakalım. Önce ilişkiyi ifade edelim. Geçen süre ve ödenecek miktarın tablosunu oluşturalım. 0. dakikada ne kadar ödenir arkadaşlar?

Öğrenciler:15 TL

Eda Öğretmen: evet peki yazalım. Birinci sıralı ikilimiz ne olacak (0,15) oldu. 1. Dk da ne olacak?

Barış: 2 TL

Eda Öğretmen: evet 2 TL ödenecek birde +15 var

Barış: neden +15 hocam?

Eda Öğretmen: neden? Açılış ücretini ödeniyor.her bir dk için ayrı düşüneceğiz.

Barış: öncekinde öyle yapmadık.

Eda Öğretmen: evet onda açılış ücreti yoktu zaten. Niye olduğunu anladın mı?

Barış: evet.

Eda Öğretmen: devam edelim o zaman bunun(1 dakika konuşan için) sıralı ikilisi nedir?

(1,17) olur.

Eda Öğretmen: (öğrencilerle iletişim halinde tabloyu oluşturmuştur)

Peki x dakika geçince ne kadar ödeneceğini bulalım. $x.2 + 15$ olur.yine ödenen toplam miktar y olursa,

Bilal: $y = 2x + 15$ olur hocam.

Eda Öğretmen: Evet.şimi tekrar yapalım sonra grafiğini çizelim.eksenleri belirleyelim ve isim verelim, x eksenini geçen süre, y eksenini ödenen miktar .siz isterseniz tersini de yapabilirsiniz. Evet grafiğimizi çizelim. (teker teker sıralı ikililer gösterilerek çizim yapıldı)

Barış: 15 i gösterrek hocam buradan mı başlayacak grafik?

Eda Öğretmen: evet. neden oradan başlayacak 0. dakikada 15 TL ödeniyor çünkü.

Ela: hocam çıkıkkını biz yapalım mı?

Eda Öğretmen: tamam biraz düşünün bakalım.

Bilal:nasıl yapacağız hocam?

Eda Öğretmen: önce tablo yapacaksınız tabloya göre kural bulacaksınız ve ikilileri göstereceksiniz grafiği çizeceksiniz.

Cengiz: hocam 60 dan mı düşecek?

Eda Öğretmen: evet. ne yapacağız bakalım tabloda ne yazağız?

Barış: geçen süre ile ödenecek ücret

Eda Öğretmen: evet. 0. dakikada ne kadar ödenmiştir.

Faruk: $60 - 0.5$

Eda Öğretmen: güzel neden böyle yazdık?

Faruk/Barış: hocam 60 dan geriye gideceğiz 0. dakikada 5Tl düşmeyecek

Eda Öğretmen: 1 dakikada ne olacak

Öğrenciler:60 – 1.5

Eda Öğretmen: peki güzel devam edelim . x . Dakika geçince ne olacak

Öğrenciler:60 – $5x$

Eda Öğretmen: o zaman ödenen miktara y dersek ne olcak $y = 60 - 5x$ olacak değil mi?

Öğrenciler:evet.

Eda Öğretmen: sıralı ikilileri yazalım ve grafiğini çizelim.(grafikte eksenlere isim verdi ve değerleri yreleştirdi) evet ne olacak ne zaman 0 a gelecek kaçınıcı dakikada

Öğrenciler:12 hocam

Eda Öğretmen: evet 12. Dk da 0 olması gerekiyor. Evet grafiğe dikkat ederseniz grafiğin doğrusal olması için eğilme bükülme olmaması lazım. Peki bu örnekleri yaptık sizce doğrusal denklemin kuralı nedir?

Öğrenciler:sessiz kaldı.

Eda Öğretmen: yani a şıkında ne bulduk $y = 3x$ B şıkında $y = 15 + 5x$ ve sonuncusu $y = 60 - 5x$ değil mi bu üçüyle ilgili nasıl bir kural oluşturulabilir doğrusal grafiklerin denklemi nasıldır?

Öğrenciler:sessiz kaldı

Eda Öğretmen: peki size bir ipucu vereyim. Bütün değerleri aynı tarata toparlayalım.

$$3x - y = 0$$

$$2x + 15 - y = 0$$

$$60 - 5x - y = 0$$

Bu üçüne bakarak doğrusal denklemlerin grafiği nasıldır diye yorum yapabiliriz?

Faruk: hepsi 0 oluyor.

Eda Öğretmen: evet hepsi 0 a eşit.başka.

Faruk: hepsi birbirine eşit.

Eda Öğretmen: hepsi birbirine eşit mi faruk nasıl eşit oldu?

Emin: hocam sonuçları eşit.

Eda Öğretmen: evet hepsi doğrusal grafik çıkıyor doğru. Peki bu kalıplardan ne görüyorsunuz?

Aslı: hep y leri çıkarmış.

Eda Öğretmen: peki şöyle diyebilir miyiz hep x li bir terim var birde y li terim var birde sayılı bir terim var değil mi?

Öğrenciler: evet.

Eda Öğretmen: peki o zaman xli terim için önünde katsayıda var buna diyebilirm ax derim y için ise by derim. Ve birde sabit var değil mi? Ona da c diyebilirm o zaman ne olcak

$ax + by + c = 0$ olacak bu bizim doğrusal denklemimizin grafiğidir.

Eda Öğretmen tarafından sunulan sekizinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Öğretmen, problem durumunun özelliğinden ve çözüm için ne yapacağından bahsetmiştir. Doğrusal ilişkiler denilince öğrencilerin akıllarına ne gelmesi gerektiğini açıklamıştır.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Adım adım nasıl bir çözüm yolu izleneceğini anlatmıştır.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmenin örnekler üzerinden genellemeye ulaşmaya çalışması ve bu sırada öğrencilere sorular yöneltmesi öğrencileri düşünmeye sevk etmektedir. Öğretmen, öğrencilerin takılmaları cevap verememeleri durumunda ipuçları vererek destek sağlamaktadır. Üç durumu birlikte ele alarak aralarındaki farkı öğrencilere hissettirmek istemesi öğrenciler için düşünme fırsatı verir. Öğrencilerin ara ara sorduğu soruları dikkate alarak onların yanlış düşünmelerine engel olmaktadır.
- 4) Tartışma: Başlangıçta öğrencilerin ilk defa karşılaştıkları bir durum olduğundan öğretmen kendisi çözüme başlamıştır fakat sonrasında öğrencilerle iletişim halinde çözüme devam etmiştir. Öğretmen, öğrencilerin mevcut örneklerden hareketle bir yargıya varmalarını ve kuralı kendilerinin oluşturmalarını beklemektedir. Dolayısıyla etkili bir tartışma ortamı sağlanmıştır. Öğretmenin öğrencilerine “yani a şıkkında ne

bulduk $y = 3x$ B şıkında $y = 15 + 5x$ ve sonuncusu $y = 60 - 5x$ değil mi bu üçüyle ilgili nasıl bir kural oluşturulabilir doğrusal grafiklerin denklemi nasıldır?" sorusunu yönlendirmesi onları düşünmeye sevk etmektedir.

5) Matematiksel temel: Doğrusal ilişkinin ne anlama geldiği ile ilgili açıklama yapmıştır. Yapılan açıklamalar ulaşılan genellemeler matematiksel olarak kabul edilebilirdir.

6) Bağlantı: Öğrencilerin iki değişken arasındaki ilişkiyi anlama, tablo ve grafikte ifade etmeyi öğrenmeleri amaçlanmıştır. Birbirleriyle karşılaştırma yapılarak 3 örnek incelenmiştir. Öğrenciler son şıkta da artan bir ilişki beklentisine girmiştir. Öğretmen bu durumu açıklamıştır.

Genel olarak düşünüldüğünde, öğrencilerin kafalarında bir şema oluşturulması için birbirinden bazı özellikler açısından ayrılan üç farklı durumu bir arada karşılaştırmalı olarak sunulması öğrencilerin kafalarındaki soruları da gidermek için bir fırsat olabilir. Öğretmen başlangıçta öğrenciler için yeni bir konu olan doğrusal ilişkiler ile ilgili örnekler vererek sonrasında ise bu örnekle öğrencileri bu yeni konuya hazırlamaktadır. Bu anlamda öğrenciler için tartışma ortamı oluşturulması önemli bir fırsat olabilir.

4.2.2.9. Eda Öğretmen tarafından sunulan dokuzuncu örnek

$y = 3x$ ve $y = 2x + 1$ denklemlerinin grafiklerini çizelim.

Eda Öğretmen: Şimdi bu denklemler bana neyi anlatıyor önce onu konulaşım $y = 3x$ ne demek?

Bahar: hocam y x 'in 3 katı.

Eda Öğretmen: yani x 'in 3 katı y ye eşit değil mi? Geçen ders yaptığımız örneklerden hangisine benziyor.

Öğrenciler: a şıkına

Eda Öğretmen: evet. peki $y = 2x + 1$ de ne diyor?

Aleyna: 2 katının bir fazlası

Eda Öğretmen: hangisi?

Aleyna: nasıl?

Eda Öğretmen: yani ne neyin 2 katının 1 fazlası?

Aleyna: $2x$ in katı hocam eee

Bilal: x 'in 2 katının bir fazlası y ye eşit.

Eda Öğretmen: Güzel. Önce bu iki denklem için tablo oluşturalım. x ve y için tablo oluşturalım. x 'e ne değer verelim? En az iki değer vermemiz gerekir.

Öğrenciler: 1 verelim. 2 verelim. -2 verelim. -3 verelim.

Eda Öğretmen: peki birde 0 verelim olmaz mı?

Öğrenciler: olur.

Eda Öğretmen: peki grafiğimizi oluşturalım. (eksenleri farklı çizdi, öğrenciler hemen müdahale etti) evet sıralı ikilileri yazalım ve grafiği çizelim. Peki noktaları birleştirince ne çıkacak?

Öğrenciler: doğru çıkacak.

Eda Öğretmen: (grafiği çizdi). Gördünüz mü grafiği? İşte bu benim doğru grafiğim. $y=3x$ in grafiği. evet şimdi $y = 2x + 1$ e bakalım hangi değerleri verelim?

Öğrenciler: 3, -1, 0 verelim.

Eda Öğretmen: Bu 3 değere göre çizelim. (grafik çizildi)

(öğrenciler kendileri tablo ve grafik oluşturuyor. öğretmen aralarda dolaşarak öğrencilerin hatalarını söylüyor zolandıkları yerlere bakıyor)

Eda Öğretmen: iki grafik çizdik bu iki grafik arasında ne gibi bir fark var?

Bilal: birinde 4 birinde 3 sayı var.

Eda Öğretmen: buna da 4 değer verebilirdik o sıkıntı değil.

Ahmet: eksenlerin yeri farklı.

Eda Öğretmen: yeri mi aynı her ikisinde de düşey y yatay x .

Ahmet: hayır yani yer olarak doğru farklı.

Eda Öğretmen: evet ama biri bir değişik biri bir değişik arada bir fark var,

Emin: evet evet. hocam birisi orijinden geçmiş biriside 1 den geçmiş.

Eda Öğretmen: çok güzel. çocuklar aradaki fark bu birincisi orijinden geçen bir doğru diğeri de orijinden

geöemeyen bir doğru. Şimdi çocuklar ben orijinden geçmeyen doğru için tabloda bir şey yapmanızı istiyorum. şimdi herkes y 0 olursa x ne çıkar bulabilir mi?

Öğrenciler: evet. (işlem yapıyorlar)

Barış: buldum.

Emin: buldum.

Eda Öğretmen: y yerine 0 yazacaksınız. tahtada yapalım mı? Yazalım.

$$0 = 2x + 1$$

$$-1 = 2x$$

$$x = -1/2$$

Olur . peki sıralı ikilim ne oldu. $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Ela: öyle çıkabiliyor mu hocam?

Eda Öğretmen: tabiki. Biz bu düzlemi oluştururken nasıl oluşturduk sayı doğrusunu kullandık tamsayılarla uğraşırken rasyonel sayılarla da uğraşabiliriz. Ne demek bu x i $-\frac{1}{2}$. y si 0. $-\frac{1}{2}$ kaç la kaç arasındadır.

Furkan: 0 ile -1 arasında hocam.

Eda Öğretmen: evet. gösterelim bakın zaten ikiye bölünmüş grafikte. gördünüz mü? birşey dikkatinizi çekti mi?

Emin: orijini bulduk hocam

Faruk: orijini mi bulduk?

Barış: hayır

Bilal: hayır.

Eda Öğretmen: (0,0) noktasını mı bulduk?

Öğrenciler: hayır.

Eda Öğretmen: neyi bulduk? x e 0 verdik bir değer verdik bir şey bulduk y

ye 0 verdik bir değer bulduk bunlar ne noktaları?

Faruk: hocam biri 1 de biri 1'in yanında

Eda Öğretmen: yani $-\frac{1}{2}$ de. Peki bu noktalar ne?

Bilal: bu noktalar doğru içerisinde

Eda Öğretmen: evet doğru.başka?

Ahmet: hocam y ye 0 verince x 1 çıkıyor ama x e 0 verince y 1 çıkmıyor

Eda Öğretmen: çıkmayabilir.öyle bir kural yok. Çocuklar bulduğumuz iki noktanın bu grafikte ilgili bir özelliği var.

Öğrenciler:kestiği için.

Eda Öğretmen: neyi kesiyor?

Barış: birbirini.

Emin:koordinatın yarısını kesiyö.

Ela: x ile y yi kesiyor.

Eda Öğretmen: evet x vey eksenini kesiyor. Bakın grafiğin y yi kestiği nokta burası (1), x i kestiği nokta $(-\frac{1}{2})$. Peki ben xi kestiği noktayı bulmak için ne yaptım?

Barış: y ye 0 verdik.

Eda Öğretmen: peki y yi kestiği noktayı bulmak için ne yaptım?

Ela: x e 0 verdik.

Eda Öğretmen: peki aynı şeyi orijinden geçen için yapalım.x e 0 verince ne çıkıyor 0 y ye 0 verince ne çıkıyor 0. Bu nokta nerden geçer.

Öğrenciler:orijinden

Eda Öğretmen: orijinden geçen bir grafik ekenleri kesmiyor mu kesmiyor mu?

Öğrenciler:bir kısmı kesiyor bir kısmı kesmiyor diyor.

Eda Öğretmen: kesiyor mu kesmiyor.peki diyelim size bir denklem verildi orijinden geçiyor mu geçmiyor mu nasıl anlayacağım.

Bilal: x ve y 0 olacak

Faruk: x ve y 0 olacak.

Eda Öğretmen: ne 0 olacak

Faruk: x e 0 verince y 0 olacak y ye 0 verince x 0 olacak.

Eda Öğretmen: başka nasıl düşünebiliriz?

Barış: sadece kat olacak

Eda Öğretmen: evet sadece kat olacak yani yanında toplama gibi bir şey olursa ne oluyo orijinden geçmiyor eksenleri kesiyor. Peki bunları not olarak yazalım.

Barış: Hocam $y = 2x/4$ orijinden geçer mi geçmez mi?

Nilgün: hocam geçmez

Eda Öğretmen: nedne

Nilgün: hocam bir ile çarpsak

Ela: geçer katı var

Nilgün: ama bölme de var

Eda Öğretmen: bu ne demek x'in 2/4 katı bir şey eklenmiyor çıkarılmıyor demekki orijinden geçiyor. Anlaşıldı mı?

Öğrenciler:evet.

Eda Öğretmen tarafından sunulan dokuzuncu örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Verilen denklemlerin grafiğinin çizilmesi ile ilgili sorulardır. Problem durumundan bahsedilmiştir.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen adım adım nasıl bir çözüm yolu izleneceğini ve çözümü nasıl yapacağını anlatmıştır. Öğretmen *“Güzel. Önce bu iki denklem için tablo oluşturalım. x ve y için tablo oluşturalım. x ‘e ne değer verelim? En az iki değer vermemiz gerekir.”* ifadeleriyle çözüm prosedürünü belirtmiştir.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğrenciler çözüm sürecinde aktiftirler ve öğretmen onlara soru yönelterek süreci devam ettirmektedir. *“Peki, noktaları birleştirtince ne çıkacak? İki grafik çizdik bu iki grafik arasında ne gibi bir fark var? Peki diyelim size bir denklem verildi orijinden geçiyor mu geçmiyor mu nasıl anlayacağım.”* sorularıyla öğrencilerin düşünmeleri için fırsatlar yaratmaktadır.
- 4) Tartışma: Öğretmen, öğrencilerin sorularını dikkate alarak onların kafalarında problem kalmamasını sağlamaktadır. Örneğin öğrencilerin noktanın rasyonel sayı çıkmasına şaşkınlıkları sonucunda *“Biz bu düzlemi oluştururken nasıl oluşturduk sayı doğrusunu kullandık tamsayılarla uğraşırken rasyonel sayılarla da uğraşabiliriz. Ne demek bu x i $-\frac{1}{2}$ y si 0 . $-\frac{1}{2}$ kaç la kaç arasındadır.”* ifadeleriyle onların düşüncelerini değiştirmektedir. Öğretmen, çözüm yaparken ilk olarak grafik çizimi için rastgele noktalar bularak çizim yapmış sonrasında ise, x ve y ye 0 vererek yapabileceklerini vurgulamıştır. Ve bu durumun açıklamalarını yapmıştır. Sınıfta tartışma ortamını sağlanmıştır.
- 5) Matematiksel temel: Yapılan açıklamalar ulaşılan genellemeler matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Orijinden geçen ve geçmeyen doğrular ile ilgili öğrencilerin farkındalıklarını artırılmıştır. Öğretmen örneklerden genellemelere ulaşmaları için öğrencilere yardımcı olmaktadır. Bir grafiğin x eksenini kestiği noktayı bulmak için $y = 0$ ve y eksenini kestiği noktayı bulmak için $x = 0$ için değerleri bulma bilgisi matematiksel olarak kabul edilebilirdir. Öğretmen ulaşılan yargıları ve bilgilerin açıklamalarını yapmıştır.
- 6) Bağlantı: Öğrencilerin iki değişken arasındaki ilişkiyi anlama, tablo ve grafik ile ifade etmeyi öğrenmeleri amaçlanmıştır. Öğrencilerin örnekleri yaptıktan sonra ekstra sorular sorarak onların düşünmelerini sağlanmaktadır. Öğrencilerin kendilerini

düşünmeye zorladıkları sınıf ortamında rahatça düşündüklerini söyleyebildikleri görülmüştür.

Genel olarak, ilk başta sadece grafik çizimi olarak görülen alıştırma tarzında bir örnek olarak değerlendirilmiş olsa da sonrasında iki grafik arasındaki farkların öğrencilerle tartışılması, genellemelere ulaşılması, grafik çizimi için kural oluşturulması açısından öğrencilere fırsatlar sunmaktadır. Direk ezber değil de örnekler yardımıyla oluşturulan kavramsal bir anlam söz konusu olduğundan öğrenciler için etkili fırsatlar sağlanmıştır.

Araştırmanın katılımcılarından Eda Öğretmenin, analiz edilen dokuz örnekte matematiksel akıl yürütme becerisi ile ilgili analiz boyutlarını sağlayıp sağlamadığı Tablo 4.27’de verilmiştir.

Tablo 4.27

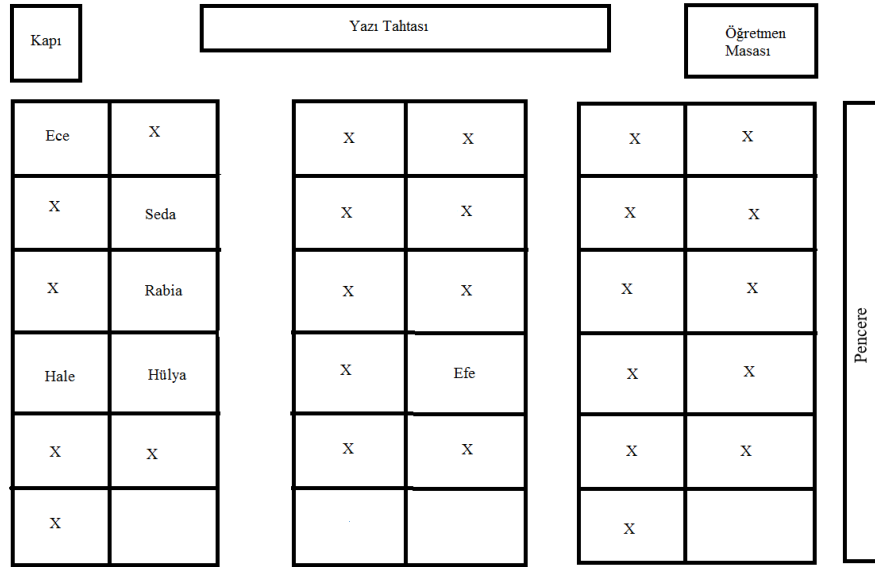
Eda öğretmenin öğretim ortamında sunduğu örneklerin matematiksel akıl yürütme fırsatları açısından değerlendirilmesi

Analiz boyutları	Örnek 1	Örnek 2	Örnek 3	Örnek 4	Örnek 5	Örnek 6	Örnek 7	Örnek 8	Örnek 9
Problem tipinin tanımlanması	✓	×	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓
Çözüm metodu tanımlama	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Yaratıcı düşünme	✓	✓	×	✓	×	✓	✓	✓	✓
Tartışma	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓
Matematiksel temel	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Bağlantı	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Eda Öğretmenin ders sunumları incelendiğinde, sunulan örneklerden bazılarının rutin problemler bazılarının ise öğrencilerin ilk defa karşılaştıkları belli bir algoritma kullanılarak direk çözülemeyen problemler olduğu görülmektedir. Eda Öğretmen örnek sunumlarında matematiksel özelliklerin ön planda tutulduğu, öğrencilerin sorularını kaçırmamaya özenli davranıldığı, öğrencileri çözüm sürecine katıldığı iletişimin üst düzeyde olduğu bir sunum sergilemeyi benimsemiştir. Eda Öğretmenin rutin bir problem olsa dahi problemin bazı bölümlerinde öğrencilere sorular yöneltmesi öğrencilerin düşünmesi için fırsatlar sağlanması açısından önemlidir. Eda Öğretmenin genellikle eğer bir kural öğretilmek isteniyorsa örneklerden hareketle öğrencilerin kurala kendilerinin ulaşmasını sağlamak noktasındaki hassasiyeti göze çarpmaktadır. Bu durum öğrencilerin düşünmelerini, varsayımda bulunmalarını ve sonuç çıkarma gibi üst düzey becerileri kazanmaları için birer fırsattır. Bu anlamda düşünüldüğünde zaman zaman eksiklikler olmasına rağmen genel olarak Eda Öğretmenin yaratıcılığı ön planda tutan ve tartışma ortamını sağlayan öğrenciler için önemli öğrenme fırsatlarının sunulduğu bir öğrenme ortamı oluşturduğu söylenebilir.

4.2.3. Tülay Öğretmenin Sınıfındaki Öğrenme Ortamı

Tülay Öğretmenin sınıfı 32 öğrenciden oluşan normal sıra düzeni düzenlenmiş bir sınıftır. Sınıfın fiziksel özellikleri öğrencileri etkilemeyecek şekildedir. Sınıfta akıllı tahta bulunmaktadır. Tülay Öğretmenin sınıfının oturma planı Şekil 4.110'da gösterilmiştir.



Şekil 4.110. Tülay Öğretmenin sınıfının oturma planı

Tülay Öğretmen “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konularının öğretimini Tablo 4.28’te verildiği sırayla yapmıştır.

Tablo 4.28.

Tülay öğretmenin “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konularını öğretim süreci

Tarih	Süre	Dersin Konusu
30.11.2015	2 ders saati	Cebirsel ifade, denklem, bilinmeyen kavramları
02.12.2015	2 ders saati	Denklem kurma/çözme
07.12.2015	2 ders saati	Denklem çözümü
09.12.2015	2 ders saati	Denklem çözümü
14.12.2015	2 ders saati	Denklem çözümü
16.12.2015	2 ders saati	Denklem kurma problemleri
21.12.2015	2 ders saati	Doğrusal denklemler
23.12.2015	2 ders saati	Doğru grafikleri
28.12.2015	2 ders saati	Doğru grafikleri
30.12.2015	2 ders saati	Doğru grafikleri

Tablo 4.27’de görüldüğü gibi Tülay Öğretmen “Eşitlik ve Denklem” konusu için toplam 12 ders saati ayırmış ve “Doğrusal Denklemler” konusu için ise 8 ders saati ayırmıştır. Tülay Öğretmen öğretim sürecinde önce cebirsel ifade, bilinmeyen, denklem

kavramlarını öğrencilere hatırlatmış sonrasında denklem kurmayı gerektiren problemler için çözüm yapmadan sadece denklem kurdurmuş, sonrasında denklem çözümü konusunu anlatmış ve denklem kurmayı gerektiren problem çözümüne geçmiştir. Tülay Öğretmen doğrusal denklemler konusunun öğretiminde doğrusal ilişkilerden bahsetmeden direk koordinat düzleminde nokta gösterme ve grafik çizimi ile konu anlatımını bitirmiştir.

Tülay Öğretmen ders anlatımında genellikle anlatım yöntemini tercih etmektedir. Zaman zaman soru cevap yöntemini de tercih ettiği zamanlar olmuştur. Tülay Öğretmen yeni bir konu anlatımında önce bağlantılı olduğu önceki bilgilerin hatırlatılması ile derse başlamaktadır. Öğrenciler akıllı defter (belli kuralların ve örneklerin yazılı olduğu ayrıca not almaları için boş alanların bırakılmış olduğu defter) kullandıkları için yazmaları gereken pek fazla ifade olmamaktadır. Tülay Öğretmen konu ile ilgili sorular (Cebirsel ifade nedir? Bilinmeyen nedir? denklem nedir?) yöneltmektedir. Konu anlatımının bitmesinden sonra çeşitli örneklerle konunun pekişmesini sağlamaya çalışan Tülay Öğretmen öğrencilerin sorularına cevap vermektedir. Fakat sınıf içi çok fazla konuşma olduğundan bazı öğrencilerin soruları öğretmen tarafından fark edilememekte ve maalesef cevapsız kalmaktadır. Tülay Öğretmen öğrencilere kuralları verdikten sonra örnekler çözmektedir. Öğrenciler kuralların altında yatan mantıksal açıklamalarından yoksun kalmaktadırlar. Problem çözme esnasında öğrencilerin çözmeleri için yeterli zaman verilmesine karşın bu zaman içerisinde öğretmen tarafından strateji seçimi seçilip öğrencilerle paylaşıldığından öğrenciler bu aşamada çözüm prosedürünü direk öğretmenden almış bulunmaktadır. Tülay Öğretmen problem çözümlerinde öğrencilere sorular yönlendiriyor olsa da bu soruların cevaplarını öğrencilerden yanıt beklemeden kendisi hızlıca verdiği için öğrencilerin düşünme fırsatlarının önüne geçilmiş olmaktadır. Tülay Öğretmenin yönlendirdiği sorular genellikle *ardışık sayılar arasındaki fark 2 dir değil mi? Denge bozulmasın diye bir tarafa ne koyarsak diğer tarafa da onu koyarız değil mi?* Gibi cevabı evet, hayır şeklinde olan, cevabını içinde barındıran tarzda sorulardır. Tülay Öğretmen öğrencilerin dikkatini derse çekmek için zaman zaman “artılı soru” diye tabir ettiği öğrencilerin yapmaları için belirli süre verdiği sorular sorarak bu sorulara cevap veren öğrenciler için tuttuğu not defterine ödül olarak “+” vermektedir.

Tülay Öğretmenin öğrencilerle iletişimi oldukça iyidir. Öğrenciler derste rahatlıkla soru sorabilmektedirler. Tülay Öğretmenin sınıfı kalabalık ve ders hâkimiyetinin sağlanmasının zor olduğu bir sınıftır. Tülay Öğretmen söz hakkı almak isteyen öğrencileri seçerken adil davranmaktadır. Fakat sınıfta hiç söz hakkı almayan öğrenciler vardır bu duruma müdahale etmemektedir.

4.2.4. Tülay Öğretmenin Öğrenme Ortamında Sunduğu Örneklerin Analizine Dair Bulgular

4.2.4.1. Tülay Öğretmen tarafından sunulan birinci örnek

Ardışık 3 sayının toplamı 99 ise en küçük sayı nedir? Problemini çözmek için denklem kurunuz.

(Öğrencilere yapmaları için zaman verildi)

Ali: Hocam a, b, c deriz sayılara.

Ece: Hocam 3 tane x i toplarız.

Tülay öğretmen: Ardışık demek 1 er 1 er artıyor demek değil mi?

Öğrenciler: evet.

Tülay öğretmen: 1. Sayı x olursa, 2. Sayı $x + 1$ ve 3. Sayı $x + 2$ olmaz mı?

Öğrenciler: evet.

Tülay öğretmen: Peki o zaman ne yapacağız toplamı dediği için,

$$x + x + 1 + x + 2 = 99$$

yazılır.

Tülay Öğretmen tarafından sunulan birinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Problem sözel bir problem durumunun denklem olarak ifade edilmesiyle ilgilidir. Öğretmen, problem durumunda geçmesine rağmen problem tipiyle ilgili ayrıca bir açıklama yapmamıştır.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen çözümü kendisi yapmıştır. Çözüm ve problem durumu arasında bağlantı kurmamıştır.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmen, öğrencilerin her bir sayı için farklı değişkenler kullandığını ve her bir sayı için aynı ifadeyi kullandıklarını görmüştür fakat müdahale etmemiştir. Hâlbuki bu noktada öğrencilere soru yöneltilerek öğrencilerin hatalarını fark etmeleri sağlanabilirdi.

4) Tartışma: Herhangi bir tartışma ortamı olmamıştır. Öğretmen problemin çözümünü kendisi yapmıştır. Çözüm esnasında sorduğu soruları da kendisi cevaplandığı için öğrenciler için fırsat sunulmamıştır.

5) Matematiksel temel: Problemden geçen ardışık sayılar ifadesini matematiksel olarak açıklamıştır. Öğretmenin “*Ardışık demek 1 er 1 er artıyor demek değil mi?*” ifadesi bu durumu göstermektedir.

6) Bağlantı: Öğretmenin öğrencilerin zorlandıkları noktaları anlamaktan ziyade çözüme odaklandığı görülmektedir. Öğrencilerin sorularını dikkate almamıştır. Öğrencilerin her bir sayıyı farklı değişken olarak almalarının neden hatalı olacağını açıklamamıştır.

Genel olarak, öğretmenin öğrencilerin problem hakkında düşünceleri için zaman vermesi dışında öğrencilerin düşüncelerini sağlayabilecek fırsata rastlanmamıştır. Öğrenciler yaptığı işlemlerle ilgili dönüt alamadıkları için bir sonraki soruda benzer hataları yapma eğiliminde olabilirler. Bu tarz sadece çözümün öğrenciye aktarıldığı problem çözümleri öğrencilerin ezbere işlem yapması için zemin oluşturmaktadır.

4.2.4.2. Tülay Öğretmen tarafından sunulan ikinci örnek

“Ayşe’nin kumbarasında 5 lira ve 10 liralara vardır. 10 liralara sayısı 5 liralara sayısından 3 fazladır. Ayşe’nin toplam 90 lirası vardır.” İfadesini denklem ile ifade edelim.

Tülay Öğretmen: *Arkadaşlar şimdi ne yapmamız lazım denklem kurmamız isteniyor. Denklem kurmak için birine bilinmeyen dememiz gerekiyor.*

5 liralara sayısına x dersek, 10 liralara sayısı $x + 3$ olur. Peki, Ayşe’nin toplam 90 lirası varmış zaman ne yapacağız denklemi yazalım.

$$5 \cdot x + (x + 3) \cdot 10 = 90$$

Tülay Öğretmen tarafından sunulan ikinci örneğin analizi

1) Problem tipinin tanımlanması: Verilen bir problem durumuna uygun denklem kurma ile ilgili bir problemdir. Öğretmen denklem kurulması gerektiğini söylemiştir. Fakat ayrıntılı bir açıklama yapmamıştır.

- 2) Çözüm metodu tanımlama: Denklem kurarken nasıl kurulacağı ile ilgili bir açıklama yapmadan direk denklem kurmaya başlamıştır. Bilinmeyen seçmiş değişkenlere anlam yüklemiştir fakat bu konuda neden öyle yaptığı ile ilgili öğrencilerle bir paylaşımı olmamıştır. Problem tipi ve çözüm arasında bağlantı kurulmamıştır.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmenin çözümü boyunca yaratıcı bir durumla karşılaşmamıştır. Direk çözüm prosedürünün uygulandığı öğrencilerin bu tip problem gördüklerinde nasıl çözeceklerine dair düşünmedikleri bir sunum olmuştur.
- 4) Tartışma: Herhangi bir tartışma ortamı olmamıştır. Öğretmen problemin çözümünü kendisi yapmıştır. Çözüm sürecinde öğrencilerle iletişim yoktur.
- 5) Matematiksel temel: Öğretmen, denklem kurarken dikkat edilmesi gereken noktalar veya denklemin problemi karşılayıp karşılamadığı ile ilgili bilgi vermemiştir.
- 6) Bağlantı: Farklı problem tipleri ile ilgili bağlantıya rastlanmadı. Öğretmen öğrencilerin bu problem tipi ile ilgili hangi noktalarda zorlanmış olabileceği ile ilgilenmemiştir.

Genel olarak, öğretmen direk çözüm yaparak, benzer problem durumlarında öğrencilerin çözüm yaparken zorlanabileceği durumunu göz ardı etmiştir. Öğrenciler için yaratıcı düşünme adına bulguya rastlanmamıştır. Örnek sunumundaki tek avantaj farklı bir problem türü olduğu için öğrencilerin rutin olmayan bir durumla karşılaşmış olmalarıdır.

4.2.4.3. Tülay Öğretmen tarafından sunulan üçüncü örnek

$3x+6=12$ ise x nedir?

Tülay Öğretmen: Arkadaşlar eşitliğin sağında ve solunda rakamlar ve bilinmeyenler olabilir. Ortada bir dere olduğunu kabul edelim. (Bu sırada tahtaya bir dere çizmiştir. Ve derenin solunda ne varsa karşıya okla geçirerek ters işaretlisini yazmıştır). Bu dere içine gelen her şeyi ters çeviriyor. İşte denklem çözerken eşitliğin karşı tarafına geçirilen işlemler ters işlemler olarak geçirilir. Bilinmeyi bulmak için, bilinmeyen yalnız bırakılır. Bunun

içinde en son yapılan işlemde başlanarak x 'e yaklaşılar.

Öğrenci: hocam parantez olursa ne yapacağız?

Tülay Öğretmen: Onlara sonra geleceğiz. Şimdi bu örnekte en son hangi işlem yapılır. Çarpma ve sonra toplama yapılmış o zaman önce toplamadan başlayacağız.

$$3x + 6 = 12$$

$$3x = 12 - 6$$

$$x = 2$$

$$3x = 6$$

olur.

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

Tülay Öğretmen tarafından sunulan üçüncü örneğin analizi

1) Problem tipinin tanımlanması: Problem bir denklem çözme problemidir. Öğrenciler bu durumla ilk defa karşılaşmaktadır. Verilen örnek ilk denklem çözme örneği olmasına rağmen öğretmen denklemin yapısı ile ilgili bilgi vermemiştir.

2) Çözüm metodu tanımlama: Öğretmen çözüme başlamadan önce çözümü nasıl yapacağı ile ilgili bazı dikkat çekici ifadeler kullanmıştır. Kullandığı çözüm yöntemi için “dere yöntemi” terimini kullanmıştır. Fakat çözüm yöntemi ve problem türü arasındaki bağlantı kurulmamıştır.

3) Yaratıcı düşünme: Öğrencilerin akıllarında kalması açısından resim çizilerek anlatılan çözüm yöntemi ile dikkat çekilmiştir. Fakat öğrencinin sorduğunu “*parantez olursa ne olur?*” sorusu ile ilgili cevap vermediği için herhangi bir düşünme durumu söz konusu olmamıştır. “*Şimdi bu örnekte en son hangi işlem yapılır. Çarpma ve sonra toplama yapılmış o zaman önce toplamadan başlayacağız.*” ifadesinde de görüldüğü üzere öğretmen soru sormuştur fakat cevabı kendisi vermiştir. Öğrencilerin fikirleri alınmış olsaydı onlar da çözüm sürecine dâhil edilebilirdi.

4) Tartışma: Çözüm sürecinde pek tartışma ortamı olmamıştır. Sadece başlangıçta bilinmeyen olduğu ve bilinmeyeninin yalnız bırakılması gerektiğinden bahsedilmiştir fakat ayrıntılı bir açıklama yapılmamıştır. Yapılan işlemlerin altında yatan nedenler söylenmemiştir.

5) Matematiksel temel: Öğretmenin bahsettiği “*dere yöntemi*” matematiksel olarak kabul edilebilir bir özellik değildir. Öğretmenin bahsettiği “*Bu dere içine gelen her şeyi ters çeviriyor. İşte denklem çözerken eşitliğin karşı tarafına geçirilen işlemler ters işlemler olarak geçirilir.*” ifadeleri gerçek özellikler değildir. Fakat genel kabul görmüş

pratik bir kuraldır. Öğretmen, bu durumun nedenlerini açıklamış olsaydı hem tartışma ortamı oluşturmuş olurdu hem de matematiksel özelliklere değinmiş olurdu.

6) Bağlantı: Farklı problem tipleri ile ilgili bağlantıya rastlanmamıştır. Öğretmen öğrencilerin bu problem tipi ile ilgili hangi noktalarda zorlanmış olabileceği ile ilgilenmemiştir. Öğrencilerin ilk defa karşılaştıkları bir konu için daha basit bir örnekle başlanabilirdi.

Genel olarak, öğretmenin kuralı vererek kuralın altında yatan sebeplerden bahsetmemiş olması açısından öğrenciler için sınırlı fırsatlar sunulmaktadır. Öğrenciler için yaratıcı düşünme adına bulguya rastlanmamıştır. Öğrenciler nasıl çözüm yapacakları ile ilgili zorlanabilirler, çünkü çözümle ilgili ayrıntılı açıklamalardan yoksun bir sunum olmuştur.

4.2.4.4. Tülay Öğretmen tarafından sunulan dördüncü örnek

$x + 5 = 13$ denklemini çözelim.

Tülay Öğretmen: Arkadaşlar bir terazi düşünelim. Bir kefesine ne koyarsam denge bozulmasın diye diğer kefesine de aynısını koyarız değil mi? Mesela bir kefedden 5 kg silersen diğer kefedden de silmek gerekir değil mi?

Öğrenciler: evet.

Tülay Öğretmen: işte biz şimdi bunu denklemden nasıl uygulayacağımızı göreceğiz. Yok etme mantığı x 'in yanındakileri yok edeceğiz. x 'in yanında ne var?

Öğrenciler: 5 var hocam.

Tülay Öğretmen: -5 var değil mi? +5 i nasıl yok edebiliriz?

Öğrenciler: -5

Tülay Öğretmen: +5 ve -5 toplanırsa 0 eder değil mi?

Öğrenciler: evet.

Tülay Öğretmen: yazalım o zaman.

$$x + 5 = 13$$

$$x + 5 - 5 = 13 - 5$$

$$x = 8$$

Hülya: eee hocam direk 13-5yapsaydık.

Tülay Öğretmen: işte o eski yöntem biz yeni bir şey öğreniyoruz.

Esin: Hocam 13 ü yok etsek olmaz mı?

Tülay Öğretmen: o zaman x 'in yanını iyice kalabalık etmiş oluruz.

Tülay Öğretmen tarafından sunulan dördüncü örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Problem, denklem çözümü ile ilgili bir problemidir. Problem tipi ile ilgili herhangi bir açıklama yapılmamıştır.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Öğrencilere çözüm metodu ile ilgili açıklama yapılmıştır. *“İşte biz şimdi bunu denklemde nasıl uygulayacağımızı göreceğiz. Yok etme mantığı x 'in yanındakileri yok edeceğiz.”* ifadeleri ile çözümden bahsetmiştir fakat problem tipi ve çözüm yöntemi arasında bağlantı kurulmamıştır.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmen, öğrencinin *“13'ü yok etsek olmaz mı?”* sorusuna karşılık vermiştir ve neden olmayacağını açıklamıştır fakat ayrıntılı ve öğrenciyi ikna edecek bir açıklama yapılmamıştır. Yeni bir çözüm yöntemi olarak anlatılan “terazi yönteminin” diğer yöntem ile farkları tartışılmamıştır. Öğrencinin sorduğu “15 den 3 ü çıkarsaydık” sorusu ise, geçirilerek o eski yöntem denerek üstü kapatılmıştır. Öğrenciye sorular yöneltilerek öğrencinin düşünmesi sağlanabilirdi.
- 4) Tartışma: Öğretmen teraziden bahsederken terazinin kefelelerinde yapılan işlemlerin aynı olmasından bahsetmiştir. Fakat denklemde nasıl uygulanacağına geçtikten sonra direk x 'in yanındakileri yok edeceğiz diyerek çözüme geçmiştir. Eğer öğretmen çözüm mantığını açıklamış olsaydı ve sonrasında denklemin her iki tarafında aynı işlemleri yapmak gerektiğinden bahsetmiş olsaydı tartışma ortamı oluşabilirdi.
- 5) Matematiksel temel: Öğretmenin bahsettiği $+5$ i yok etmek için -5 kullanılması ve her iki tarafa da yazması matematiksel olarak doğrudur fakat öğretmen bu durumla ilgili derin matematiksel özelliklere değinmemiştir. Neden her iki tarafa yazılıyor farklı sayılar yazılsa ne olur gibi durumların açıklanması öğrenciler için fırsat verebilirdi.
- 6) Bağlantı: Öğrencilerin farklı problem türleri ile bağlantı kurabilecekleri bir gösterge bulunamamıştır. Öğretmen direk çözümü yapma eğilimindedir.

Genel olarak bakıldığında, Öğrencilerin denklem çözümü ile ilgili ilk gösterilen pratik yöntem ve son çözüm yöntemi arasındaki ilişkiyi anlamlandıramadıkları görülmektedir. Öğretmen çözüm yönteminin kapsadığı bileşenlerin matematiksel özelliklerine değinmediği için öğrenciler için sınırlı öğrenme fırsatı sunulmuş olmaktadır. Öğrencilere düşünme fırsatı verilmeden direk yapılan bir çözüm süreci görülmektedir.

4.2.4.5. Tülay Öğretmen tarafından sunulan beşinci örnek

$3x + 6 = 2x + 8$ denklemini çözelim?

Tülay Öğretmen: Çözümü yapalım. Ne yapacağız öncelikle küçük x 'i yok edeceğiz.

$$3x + 6 = 2x + 8$$

$$3x + 6 - 2x = 2x + 8 - 2x$$

$$x + 6 = 8$$

Şimdi ise, 6'yı yok etmemiz gerekiyor. 6'yı nasıl yok edeceğiz +6 olduğu için -6 gerekiyor değil mi?

Öğrenciler: Evet.

$$x + 6 - 6 = 8 - 6$$

$$x = 2$$

olarak bulunur.

Tülay Öğretmen tarafından sunulan beşinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Problem, bir denklem çözme problemidir. Fakat öğretmen bu problem tipi ile ilgili açıklama yapmamıştır. Denklemin önceki çözülen denklemlerden farkına değinilmemiştir. Eşitliğin her iki tarafında bilinmeyen olduğu durumu açıklanabilirdi.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Çözüm yöntemi ve problem tipi arasında bağlantı kurulmamıştır. Hangi çözüm yöntemi ile çözüm yapılacağı açıklanmamıştır. Öğretmen çözüme dair sadece “öncelikle küçük x 'i yok edeceğiz” ifadesini kullanmıştır.
- 3) Yaratıcı düşünme: Çözüm sürecinde yaratıcı düşünmeye rastlanmamıştır. Öğrenciler çözüme dâhil olmamıştır. Öğretmen, “bu soruyu nasıl çözebiliriz fikri olan var mı? Önceki kurallar işimize yarar mı? Ne yapabiliriz?” gibi öğrencileri düşünmeye sevk edebilecek soruları yönlendirerek yaratıcı düşünme için ortam sağlayabilirdi.
- 4) Tartışma: Öğretmenin çözüm süreci herhangi bir tartışma türünü kapsamamaktadır. Sadece cebirsel işlemlerin yapıldığı öğrencilerin çözüm sürecine dâhil olmadığı bir sunum olmuştur. Öğretmen öncelikle problem tipinden, çözüm yönteminden ve amacından bahsetmiş, işlemlerin altında yatan nedenleri açıklamış olsaydı tartışma ortamı sağlanmış olabilirdi.
- 5) Matematiksel temel: Akıl yürütme sürecinde kapsanan bileşenlerin gerçek matematiksel özelliklerine değinilmemiştir. Öğretmenin kullandığı “öncelikle küçük x 'i

yok edeceğiz.” ifadesi matematiksel bir gereklilik değildir ve öğrencinin kafasının karışmasına neden olabilir. Fakat öğretmen bu durumun öğrenciler için işlem kolaylığı sağlayacağından veya diğer türlü de yapılabileceğinden bahsetmemiştir.

6) Bağlantı: Öğrencilerin farklı problem türleri ile bağlantı kurabilecekleri bir gösterge bulunamamıştır.

Genel olarak, öğretmenin çözümleri yaparken ara ara sorular sorduğu fakat sorular için öğrencilerden cevap beklemekten ziyade kendisinin soruların cevabını verdiği görülmüştür. Bu durum öğrencilerin düşüncelerinin öğrenilmesinin önünde bir engel olabilir. Öğrencinin takıldığı bir yer olsa bile o an bu durum ortaya çıkmamış olur. Bu anlamda düşünüldüğünde direk çözüm yönteminin uygulandığı rutin bir problem çözümünden öteye gitmeyen öğrenciler için sınırlı fırsatlar sunan bir sunum olmuştur.

4.2.4.6. Tülay Öğretmen tarafından sunulan altıncı örnek

$A(-3, -5), B(2, -3), C(-2, 4), D(0, 0), E(3, 5), F(-2, 1)$ noktalarını koordinat düzleminde gösteriniz ve hangi bölgede olduklarını söyleyiniz.

Tülay Öğretmen: noktaları yazın ve gösterin çocuklar.

Ece: hocam orijin nereydi.

Tülay Öğretmen: iki eksenin birleştiği (0,0) noktasıdır.

Hilal: ordinat neydi.

Emir: y eksen

Hilal: apsiste x eksen.

Rabia: hepsini aynı düzlemde mi göstereceğiz.

Tülay Öğretmen: evet koordinat düzlemimizi çizdik. x ekseninin diğer adı neydi?

Hilal: apsis

Ece: ordinat

Tülay Öğretmen: ooo unutmuştunuz. x eksenini yani apsis. y eksenini ordinat.

Fatma: orijinin bölgesi neresi acaba?

Tülay Öğretmen: acaba orijin bir bölgeye ait mi? şekli çizin teker teker yapın.

Seda: hocam bir tarafında 4 sayı var bir tarafında 3 sayı var olur mu?

Tülay Öğretmen: iki tarafı da sonsuza kadar gidiyor Sedacığım o sana bağlı sana gerekli olanı gösterebilirsin.

Esmâ: hocam şimdi $(-3, -5)$ diyor ya nasıl göstereceğiz iki tane gösterebiliriz.

Tülay Öğretmen: önce x de buluyoruz Esma sonra y de buluyoruz.

Emre: noktayı buluyor

Tülay Öğretmen: -3 ü x ekseninden -5 i y ekseninden seçiyoruz. Bölgesini yazalım hangi bölge burası?

Emre: eee

Tülay Öğretmen: hatırlıyor musun grafik üzerine yazalım ilk bölgemiz I. Bölge, II Bölge, III Bölge ve IV. Bölge.

Hülya: (2, -3) noktasını gösterdi.

Eda: (-2,4) noktasını gösterdi.

Zehra: hocam (-2,4) burda olmaz mı?(farklı bir noktayı gösteriyor).

Tülay Öğretmen: hayır bak biz ne dedik ilk nokta önce yazılan x eksenini üzerinde olacak sonra y.

Hale: (3,5) noktasını gösterdi.

Ali: hocam oradan(y eksenini gösteriyor) 3 ü seçsek oradan(x eksenini gösteriyor) 5 i seçsek olmaz mı?

Tülay Öğretmen: bakın arkadaşlar tekrar söylüyorum. Noktaları belirlerken ilk yazılan nokta her zaman x ikinci yazılan y dir. Birinciye x den yani apsisten seçiyoruz ikinciye y den yani ordinattan seçiyoruz. Hepsinde birinciler x ikinciler y.evet devam edelim.(-2, -1) ikisinde eksi olduğu daha önce yaptık kaçınıcı bölgeydi?

Ali: III. Bölge.

Tülay Öğretmen: x den -2 y den -1 i seçiyoruz.

Ali: noktayı buldu.

Rabia: (-4,1) noktasını gösterdi.

Enes: (0,0) ı gösterdi.

Tülay Öğretmen: Neymiş bu noktanın ismi orijinmiş.

Tülay Öğretmen tarafından sunulan altıncı örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Öğretmen verilen noktaların koordinat düzleminde gösterilmesi ile ilgili bir soru olduğunu söylemiştir.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Öğrencilerin soruları üzerine problemin nasıl çözüleceği ile ilgili hatırlatma yapmıştır.
- 3) Yaratıcı düşünme: Sunumda yaratıcı düşünmeyi destekleyici duruma rastlanmamıştır. Öğrencilerin sorularına cevap verilmiştir fakat öğrencilerin düşünmesini sağlayacak şekilde dönüt verilmemiştir. Örneğin, eksenlerin birer sayı doğrusu olduğu söylenebilirdi bu sayede öğrenciler eksenler üzerindeki değerlerin sonsuza gittiğini düşünebilirlerdi. Öğrencilerin x ve y değerlerinin önce hangisinin yazılacağı ile ilgili sorularına öğrencilerin düşünmeleri sağlanacak şekilde cevap verilebilirdi. İki durum karşılaştırılarak aralarındaki fark vurgulanabilirdi.
- 4) Tartışma: Öğretmen öğrencilerin sorularını sınıfa yönelterek tartışma ortamı oluşturabilirdi fakat genellikle direk soruları cevaplamayı seçmiştir.

5) Matematiksel temel: Öğretmen koordinat düzlemi ile ilgili matematiksel bilgilerden bahsetmiştir. Düzlemde önce x sonra y değerinin bulunması veya orijinin $(0,0)$ noktası olması ve eksenlerin birleştiği yer olması matematiksel olarak kabul edilebilirdir.

6) Bağlantı: Problem durumu sadece noktaları koordinat düzleminde göstermektir. Farklı problem durumlarıyla bağlantı kurulmamıştır.

Genel olarak bakıldığında, sadece noktaların koordinat düzleminde gösterilmesini içeren, rutin bir problem çözümünden ibaret yaratıcılığın ve tartışmanın olmadığı öğrenciler için sınırlı fırsat sunan bir sunumdur.

4.2.4.7. Tülay Öğretmen tarafından sunulan yedinci örnek

$2x = y + 5$ doğrusunun grafiğini çiziniz.

Tülay Öğretmen: tabloyu sol tarafa yapalım. Nasıl çözdüğünü açıklar mısın Emir?

Emir: Hocam x e 3 verirse 6 dır. Y ye de 1 verirse 6 olur eşit olur.

Tülay Öğretmen: işte o verdiklerini göster.

Emir: koordinat düzleminde mi?

Tülay Öğretmen: yok yok yaz bakalım $x = 3$ için yerine yaz.

$$2 \cdot 3 = y + 5$$

yaz.

Fatma: hocam y ye 2 değeri de verecek miydi?

Tülay Öğretmen: hayır bakın x e 3 vermiş y yi 1 bulmuş. Devam et şimdi,

Emir:

$$6 = y + 5$$

$$y = 1$$

Tülay Öğretmen: x e 4 vermiş emir.

Fatma: hocam ben zannediyorum çıkan sonucu koordinatta gösteriyoruz meğerse verdiğimiz değerlermiş.

Emir: $x = 4$ için,

$$4 \cdot 2 = y + 5$$

$$8 = y + 5$$

$$y = 3$$

Tülay Öğretmen: evet güzel. İkinci noktayı da $(4,3)$ bulduk. Koordinat düzleminde gösterelim.

Emir: noktaları gösterip grafiği çizdi.

Ece: hocam x e 3 verdiğimizde $x = 6$ olmayacak mı?

Tülay Öğretmen: x 6 olmaz ki. x e 3 verdik.

Ece: ama hocam $2x$ yazıyor 6 eder. Verdiğimiz değerdense çarpıp yazsak.

Tülay Öğretmen: hayır olmaz

Ece: peki koordinat sisteminde 6 yı göstersek

Tülay Öğretmen: hayır olmaz. Bak bize bir x ve bir y lazım.

Ece: çok saçma.

Fatma: hocam diyelim ki ben sonucu böyle buldum (doğrusal olmayan bir grafik çiziyor)

Tülay Öğretmen: öyle bir şey olmaz. Bir doğru üzerindeki noktalar hep aynı doğrusallıkta olacak. Biz 2 nokta bulduk ya bazı arkadaşlarınız da şu noktayı

bulmuş $(-1, -3)$ bazıları $(5,5)$ bakın hepsi doğru üzerindedir.

Fatma: peki hocam. Mesela biri (doğrunun dışında bir yeri gösteriyor) çıksaydı.

Tülay Öğretmen: öyle olmaz eğer öyle bulduysanız soruyu yanlış çözmüşsünüzdür. İşlemlerinizi kontrol edersiniz.

Tülay Öğretmen tarafından sunulan yedinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Verilen doğru denkleminin grafiğini çizme ile ilgili bir problemdir fakat öğretmen problem tipini açıklamamıştır.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Çözüm hakkında bilgi verilmemiştir.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmen öğrencilerden gelen soruları cevaplamaktadır. Fakat öğrencilerin çözüm yöntemi ile ilgili anlamadıkları noktalar vardır. Öğretmen bu sorular sonrasında öğrencilere yansıtıcı sorular sorarak düşünmelerini sağlayabilirdi.
- 4) Tartışma: Öğrencilerden bazıları yapılan işlemleri anlamamakta ısrar etmektedir. Öğretmen açıklama yapmasına rağmen bazı öğrenciler hala anlamamıştır bir noktadan sonra öğretmen anlatmaktan vazgeçip çözüme dönmüştür. Fakat bir noktada çözüm amacından bahsederek tartışma ortamı oluşturmuştur. Öğretmenin “öyle bir şey olmaz. Bir doğru üzerindeki noktalar hep aynı doğrusallıkta olacak. Biz 2 nokta bulduk ya bazı arkadaşlarınız da şu noktayı bulmuş $(-1, -3)$ bazıları $(5,5)$ bakın hepsi doğru üzerindedir.” ifadesi bu durumu desteklemektedir.
- 5) Matematiksel temel: Öğretmenin öğrencilerin soruları karşısında verdiği cevaplar ve açıklamalar matematiksel olarak kabul edilebilirdir.
- 6) Bağlantı: Farklı problem tipleri ile ilgili bağlantı sağlanmamıştır. Öğretmen çözümü anlatmıştır fakat öğrencilerin asıl sıkıntıları denklem çözümü ile ilgilidir. x e değer verdikten sonra oluşan denklemi çözemedikleri için sıkıntı yaşamaktadırlar. Öğretmenin öğrenci sorusu üzerine “doğrusallıkla ilgili doğrunun dışında bir nokta bulmuşsanız

yanlış işlem yapmışsınızdır” ifadeleri sonraki muhtemel yanlış anlamaların önüne geçmeyi sağlayabilir.

Genel olarak bakıldığında, öğrencilerin önceki konu olan denklem çözümünde problem yaşamaları grafik çiziminde de problem yaşamalarına neden olmaktadır. Öğretmenin sunumunda öğrencilerin sınırlı öğrenme fırsatı yakalayabilecekleri görülmektedir. Öğrencinin “hocam ben zannediyorum çıkan sonucu koordinatta gösteriyoruz meğerse verdiğimiz değerlermiş”. İfadesi önceki sorularda anlamadığı bir durumu fark ettiğini göstermektedir. Bu durumdan da anlaşılacağı üzere, öğrencilerin sorularına aldıkları cevaplar onların öğrenmeleri için birer fırsat oluşturabilir.

4.2.4.8. Tülay Öğretmen tarafından sunulan sekizinci örnek

$2x = 3y - 12$ grafiğinin eksenlerle oluşturduğu üçgenin alanı nedir?

Tülay Öğretmen: Çocuklar üçgenin alanını hatırlıyor musunuz?

Hilal: evet hocam. Yükseklikle tabanı çarpıp ikiye bölüyoruz.

Tülay Öğretmen: peki güzel. Üçgen dik üçgen ne yapıyoruz?

Hilal: iki dik kenarı çarpıp ikiye bölüyoruz.

Tülay Öğretmen: güzel. Peki, biraz yapmayı deneyin. Bakın şimdi grafiği çizdiğinizde bir üçgen olacak yani eksenleri nerde kestiğini bulursanız üçgenin alanını da bulursunuz.

Enes: Hocam x e y ye değer mi vereceğiz?

Emre: iki değer olsa olur mu hocam?

Tülay Öğretmen: Zaten doğruyu çizebilmen için en az iki değer olması lazım.

Fatma: Hocam x e değer vermeyi biliyorum da y yi bilmiyorum.

Tülay Öğretmen: x e değer verdin mesela $x = 3$ olsun dedin. $2.3 = 6$ dedin sonra normal denklem çözer gibi

y yi yalnız bırakıp y nin kaç olduğunu buluyorsun.

Fatma: işte anlamadım o konuyu anlamadım ben.

Tülay Öğretmen: denklem çözmeyi anlamamışsın sen. O zaman tekrar etmen gerekiyor. Sorularını getir bana sor hallederiz.

Tülay Öğretmen: Şimdi çocuklar üçgen oluşacak ya bana eksenler arasındaki alan lazım demekki benim eksenlerin üzerindeki noktaları bulmam lazım yani birinin sıfır olduğunda diğerinin kaç olduğunu bulmam lazım. Elif hemen $x = 0$ olursa diyorsun.

Elif: $x = 0$ için,

$$2.0 = 3y - 12$$

$$0 = 3y - 12$$

$$3y = 12$$

$$y = 4$$

Tülay Öğretmen: güzel şimdi de $y=0$ için diyorsun.

Elif: $y=0$ için,

$$2x = 3.0 - 12$$

$$2x = -12$$

$$x = -6$$

Fatma: hocam anlatırsanız olur mu?

Emre: evet hocam hiç bir şey anlamadık.

Tülay Öğretmen: şimdi çocuklar ilk önce $x = 0$ olsun dedim. 2 kere 0 0 eder.

$$0 = 3y - 12$$

-12 yi karşıya atınca

$$3y = 12$$

olur. Burada $3y$ demek 3 çarpı y demektir 12 yi 3 e bölersek

$$y = 4$$

olur. Grafiğe gittik $y = 4$ ü işaretledik. Şimdi diğerine bakalım. x de kaç olduğunu bulmak için $y = 0$ diyoruz. İşlemleri yapınca $x = -6$ olur. Grafikte gidiyoruz x de -6 yi işaretliyoruz.

Fatma: öğretmenin yaptığını tekrar ediyor.

Rabia: hocam x e iki kere değer versek olmaz mı?

Tülay Öğretmen: Olur ama bize eksenleri kestiği noktaları bulmamız gerekiyor ki üçgenin alanını bulalım. Devam edelim. Şimdi ne yapacağız grafikte üçgen oluştu bu üçgen nasıl bir üçgen dik bir üçgen o halde alanını nasıl bulacağız dik kenarları çarpıp ikiye böleceğiz değil mi? Üçgenin bir kenarları kaç olacak birisi x i kestiği nokta diğeri y yi kestiği nokta yani,

$$6.4 = 24$$

$$\frac{24}{2} = 12$$

olur. Demek ki neymiş üçgenin alanı 12 imiş.

Tülay Öğretmen tarafından sunulan sekizinci örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Verilen problem durumu grafik çiziminin üçgende alan konusu ile birleştirildiği bir problemdir. Öğretmen probleminden bahsetmiştir.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Problemi yazdıktan sonra çözüm yöntemi ile ilgili öğrencilere yol gösterici açıklamalar yapmıştır. Sonrasında ise onlara çözümü denemeleri için fırsat vermiştir.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğretmen, öğrencilere problem çözümünde ihtiyaç duyacakları bilgileri hatırlatmak suretiyle destek sağlamıştır. Fakat öğrencilere çözüm yöntemini kendilerinin seçmeleri için veya düşünceleri için fırsat verilmemiştir. Örneğin, “bu soruyu nasıl yapabiliriz? Veya önceden öğrendiğimiz kurallar bu soru için geçerli midir? Neyi bilmeye ihtiyacımız var?” soruları ile öğrencilerin düşünmeye sevk edilmesi öğrenciler için etkili fırsatlar olabilir.

4) Tartışma: Öğretmen öğrencilerle sürekli iletişim halinde ve işlem adımlarını öğrencilerle beraber yapmaktadır. Öğretmen öğrencilerin anlamaması üzerine tekrar neden x ve y ye 0 değerlerini verdiklerini anlatmıştır. Fakat öğretmen, öğrencilerin çözüm yönteminin amacını anlamaları açısından farklı değerler verip sonrasında çözüme geçmiş olsaydı öğrencilerin x ve y için 0 değerini verme gerekliliğini anlamaları daha kolay olabilirdi. Ek olarak tartışma ortamı oluşabilirdi. Nitekim öğrencinin sorduğu “*hocam x e iki kere değer versek olmaz mı?*” sorusu öğrencilerin kafa karışıklığı yaşadığının bir göstergesidir.

5) Matematiksel temel: Öğretmen problem çözüm sürecinde üçgenin alanı ile ilgili bilgilerin ve eksenleri kesen noktaların bulunması ile ilgili matematiksel bilgilerden bahsetmiştir. Fakat ayrıntılı açıklamalar yapmamıştır.

6) Bağlantı: Öğretmen, öğrencilerin sorularına dönüt vermektedir. Öğrencilerden bazılarının önceki soruda olduğu gibi denklem çözümünde problem yaşadığını fark etmiştir fakat bu durumla ilgili çözüm esnasında müdahale etmemiştir. Ders dışında yardımcı olacağını söyleyip çözüme devam etmiştir.

Genel olarak, öğretmenin öğrenciler için rutin bir problem olmanın dışında iki farklı konunun birleştirilmesiyle oluşan değişik bir problem çözmesi öğrenciler için güzel bir öğrenme fırsatıdır. Fakat öğrencilerin önceki deneyimlerinden grafik çiziminde farklı değerler vermeye alışkın olmaları öğrencilerin zorlanmalarına sebep olmuştur. Öğretmen, matematiksel açıklamalar yapmış olsa dahi öğrenciler için açıklamaların yeterli olmadığı görülmektedir. Çünkü öğrenciler açıklamalardan sonra bile yine aynı soruları sormaktadırlar. Bu durum daha ayrıntılı bir şekilde anlatım yapılması gerektiğinin bir göstergesidir.

4.2.4.9. Tülay Öğretmen tarafından sunulan dokuzuncu örnek

$x + y = 5$ ve $x = 3$ doğrularının grafiğini çiziniz?

Ece: x 3 olmaz mı?

Tülay Öğretmen: olabilir.

Ece: peki 2. değeri nerden vereceğiz.

Hilal: hocam iki tane doğru mu çizeceğiz?

Tülay Öğretmen: evet iki tane. Birinci grafiği normal bildiğiniz şekilde çiziyorsunuz iki nokta bulup.

Fatma: hocam $x = 3$ de x e değeri siz mi verdiniz?

Tülay Öğretmen: farklı bir grafik siz önce birinciye çizin bi.

Hale: hocam iki tane ayrı mı koordinat düzlemi çizeceğiz.

Tülay Öğretmen: Hayır tek koordinat düzleminde gösterin kesiştikleri yeri bulacağız.

Eda: hocam $x = 3$ demek $y = 0$ mı demek?

Tülay Öğretmen: $x = 3$ demek $y = 0$ demek y ne olursa olsun x hep 3 demek. Evet, birinci grafiği çizelim önce.

Tülay Öğretmen: iki nokta bul bakalım.

Fatma: $x = 6$ için

$$6 + y = 5$$

$$y = -1$$

Olur.

Öğrenciler: bir tane daha bul.

Fatma: bir tane daha mı bulayım hocam.

Tülay Öğretmen: evet bir tane daha bul.

Fatma: $x = 5$ için dedik $5 + y = 5$ ise, $y = 0$ olur.

Tülay öğretmen: bir tane daha bulalım. Arkadaşların dedi ya bir nokta farklı tarafta oluyor mu diye. $Y=0$ için bul birde.

Fatma: $y = 0$ için,

$$x + 0 = 5$$

$$x = 5$$

çıkar.

Zehra: yanlış hocam ama y ye 0 verdi.

Tülay Öğretmen: tamam $y = 0$. İlk noktamızı göster $(6, -1)$

Fatma: noktayı gösterdi.

Tülay Öğretmen: ikinci nokta $(5,0)$ gösterelim.

Fatma: noktayı gösterdi.

Tülay Öğretmen: noktalardan biri 0 ise o nokta eksenlerden birinin üzerindedir dedik. Diğerini de bul bakalım. $(0,5)$ noktasını.

Fatma: noktaları buldu ve birleştirdi.

Tülay Öğretmen: şimdi $x=3$ ün grafiğini çizelim.

Zehra: ama ben bu soruyu çözemedim.

Tülay Öğretmen: Zehra nokta bulalım. $y = 3$ olsa x kaç olur?

Zehra: eee 2 olur.

Tülay Öğretmen: $y=3$ olsa x değişir mi?

Zehra: değişmez.

Tülay Öğretmen: git o zaman düzlemde 3 ü işaretle.

Zehra: $+3$ e -3 mü?

Tülay Öğretmen: ikinci doğrudaki çocuklar y ye bağlı bir şey var mı y bile yok ortada. $y = 3$ olsa da $x = 3$ olur. Peki, $y = 0$ olsa değişir mi?

Zehra: değişir ee değişmez.

Tülay Öğretmen: peki işaretle o zaman.

Tülay Öğretmen: peki $y = -2$ olsa x kaç olur?

Fatma: değişmez.

Tülay Öğretmen: peki y bir milyon olsa x değişir mi?

Öğrenciler: hayır.

Tülay Öğretmen: y ne olursa olsun x hep 3 olduğu için bu doğruyu dümdüz çiziyoruz.

Ece: ama hocam y yi vermemiş.

Tülay Öğretmen: *işte y ne olursa olsun x değişmemiş.*

Tülay Öğretmen tarafından sunulan dokuzuncu örneğin analizi

- 1) Problem tipinin tanımlanması: Problem tipi ile ilgili açıklama yapılmamıştır.
- 2) Çözüm metodu tanımlama: Birinci denklem ile ilgili bir çözüm yöntemi söylenmiştir fakat ayrıntılı bir açıklama yapılmamıştır problem tipi ve çözüm yöntemi arasında bağlantı kurulmamıştır. 2. denklem ile ilgili sorulara cevap verilmemiştir.
- 3) Yaratıcı düşünme: Öğrencilerin sorularına cevap verilmiştir. Öğrencilerin takıldıkları noktalarda açıklamalar yapılmıştır. Fakat daha etkili olması açısından öğrenciye sorular yöneltilebilirdi.
- 4) Tartışma: Öğretmen öğrencilerin önceki örneklerde “doğrunun dışında bir nokta çıkabilir mi?” sorusunun cevabı olması açısından normalde grafik için iki noktanın yeterli olduğunu fakat 3. noktayı da göstermenin öğrencilerin kafa karışıklığını gidermesi açısından etkili olduğu düşüncesiyle 3 nokta bularak grafik çizmiştir. Dolayısıyla bu noktada tartışma ortamı oluşturmuştur. Yine “*ikinci doğru da çocuklar y ye bağlı bir şey var mı y bile yok ortada. y 3 olsa da x = 3 olur. Peki, y = 0 olsa değişir mi?*” ifadeleri de öğrencileri çözüme dâhil etmesi açısından önemlidir.
- 5) Matematiksel temel: Öğretmenin bahsettiği grafiğin çizimi için en az iki noktanın yeterli olacağı bilgisi matematiksel kabul edilebilir bir bilgidir. Yine “*noktalardan biri 0 ise o nokta eksenlerden birinin üzerindedir*” bilgisi de matematikseldir.
- 6) Bağlantı: Farklı problem tipleriyle ilgili bağlantıya rastlanmamıştır. Öğrencilerin denklemleri tanımakta ve anlamakta zorlandıkları görülmektedir. Öğrenciler hangi değişkene değer verecekleri ile ilgili kısacası ne yapacakları ile ilgili farkındalığa sahip değildirler. Öğretmen, çözüm prosedürünü açıklamaktadır. Fakat asıl problem konunun anlaşılmasından ve önceki konu olan denklem çözümü konusundaki problemten kaynaklanmaktadır.

Genel olarak, öğretmenin çözüm için öğrencilere zaman vererek çözüm için çabalamalarını sağlaması açısından iyi bir fırsat olmuştur. Öğretmen çözüm

prosedürünü açıklayarak yapmıştır. Fakat öğrenciler için zorlandıkları bir konu olması sebebiyle ve altyapılarındaki eksiklikten kaynaklı sıkıntılar olmuştur.

Araştırmanın katılımcısı olan Tülay Öğretmenin analiz edilen dokuz örnekte matematiksel akıl yürütme becerisi ile ilgili analiz boyutlarını sağlayıp sağlamadığı Tablo 4.29’da gösterilmiştir.

Tablo 4.29.

Tülay öğretmenin öğretim ortamında sunduğu örneklerin matematiksel akıl yürütme fırsatları açısından değerlendirilmesi

Analiz boyutları	Örne k 1	Örne k 2	Örne k 3	Örne k 4	Örne k 5	Örne k 6	Örne k 7	Örne k 8	Örne k 9
Problem tipinin tanımlanması	x	x	x	x	x	✓	x	✓	x
Çözüm metodu tanımlama	x	x	x	x	x	✓	x	✓	✓
Yaratıcı düşünme	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Tartışma	x	x	x	x	x	x	✓	x	✓
Matematiksel temel	✓	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓
Bağlantı	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Tülay Öğretmenin ders sunumları incelendiğinde, sunulan örneklerden bazılarının rutin problemler bazılarının ise öğrencilerin ilk defa karşılaştıkları belli bir algoritma kullanılarak direk çözülemeyen problemler olduğu görülmektedir. Tülay Öğretmen birkaç istisna dışında örnek sunumlarının genelinde öğrencilerin çözüm

sürecine dâhil olmadığı, matematiksel özelliklerin kısmen ön planda tutulduğu, öğrencilerin sorularına direk cevabın söylenerek dönüt verildiği bir sunumu benimsemiştir. Tülay Öğretmenin problem çözümünde anahtar noktalarla ilgili sorular sorduğu fakat soruların cevabını öğrencilerden beklemek yerine hızlıca kendisinin verdiği gözlemlenmiştir. Bu durum öğrencilere sınırlı öğrenme fırsatları sağlamaktadır. Tülay Öğretmen kuralların öğretiminde kuralı söylemiş ve yine istisnalar olmakla birlikte genellikle matematiksel özelliklere değinmemiştir. Yapılan işlemlerin altında yatan matematiksel temel sınırlıdır. Bu anlamda düşünüldüğünde, direk çözümün öğrenciye aktarıldığı bir öğrenme ortamı öğrenciler için ezber yapmaya zemin hazırlayan bir ortamdır.



BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu araştırmada, 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanı kapsamında matematiksel akıl yürütme beceri süreçleri incelenmiştir. Bu bölümde araştırmadan elde edilen bulgular doğrultusunda araştırmanın alt problemleri temel alınarak ortaya çıkan sonuçlar özetlenmiş, sonuçlarla ilgili tartışmalara ve önerilere yer verilmiştir.

5.1. Öğrencilerin Matematiksel Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Öğrencilerin matematiksel akıl yürütme süreçleri “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konuları kapsamında incelenmiştir. Öğrencilerin “Eşitlik ve Denklem” konusu ile ilgili beş problem ve “Doğrusal Denklemler” konusu ile ilgili dört problemde sergiledikleri matematiksel akıl yürütme türleri belirlenmiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerin problemlere verdikleri cevaplar doğrultusunda belirlenen matematiksel akıl yürütme türleri Tablo 4.25’te verilmiştir. Tablo 4.25 incelendiğinde her bir öğrencinin matematiksel akıl yürütme süreci ile ilgili aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Ahmet’in “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; bütün sorularda algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü göstermiş özelde ise beş soruda PGAR ve bir soruda da FAR akıl yürütme türünü göstermiştir. Ahmet problemlerle ilgili fikir yürütmeye çalışmıştır ancak sık sık bırakma eğilimde olduğu için araştırmacının mülakatlarda cesaretlendirmesiyle çözümüne devam etmiştir. Nitekim bir soruda devam etmek istemediği için çözümü bırakmıştır. Ahmet bir soruya yanlış cevap vermiş, bir soruya cevap vermemiş, üç soruya muhtemel doğru cevap vermiş ve geriye kalan dört soruya ise doğru cevap vermiştir. Ahmet’in zaman zaman yerel düşünme tarzı sergilemesine

rağmen genellikle global düşünme tarzı sergilediği görülmektedir. Ahmet'in matematiksel temellerden uzak yüzeysel bir bakış açısıyla çözüme ulaştığı görülmektedir. Ahmet bazı sorulara özellikle eşitlik ve denklem konusu ile ilgili sorulara doğru cevap verdiği düşünüldüğünde Ahmet'in aslında belli bir bilgi düzeyine sahip olduğu fakat bu bilgilerin kavramsal altyapısını iyi yapılandırmadığı için yüzeysel bir bakış açısıyla problemleri cevaplandırırdığı söylenebilir. Ahmet bu yüzeysel düşünme yapısının etkisiyle yaptığı işlemlerden bir türlü emin olamadığı için dış kaynaklardan (öğretmen, araştırmacı) destek alma eğiliminde olan bir öğrencidir. Ahmet'in problem çözümlerinde kullandığı *“niye olduğunu bilmiyorum çünkü Eda hoca söyledi bana ben ilk anlamadım önce” Yanlış mı acaba?”* gibi cümleleri Ahmet'in kendine güvensizliği neticesinde destek talebinde bulunduğunu göstermektedir. Ahmet sınıf içerisinde zaman zaman söz hakkı alan fakat sınıf içerisinde de kendine güvensiz tavrıyla sürekli öğretmeninden veya arkadaşlarından destek alma eğiliminde olan bir öğrencidir. Bu durum Ahmet'in akıl yürütme türlerine de yansımıştır.

Barış'ın “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; bütün sorularda algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü göstermiş olduğu sonucuna varılmıştır. Barış problemlerden sadece iki tanesine muhtemel doğru cevap vermiş diğer sorulara doğru cevap vermiştir. Barış'ın zaman zaman yerel düşünme tarzı sergilemesine rağmen genellikle global düşünme tarzı sergilediği görülmektedir. Barış matematiksel temellere dayanarak açıklama yaparak derin bir düşünme tarzı sergilediği problemler olduğu gibi yüzeysel düşünme tarzını sergilediği problemlerde vardır. Barış'ın problemlere verdiği cevaplar düşünüldüğünde belli bilgi birikimine sahip olduğu, fakat genellikle belirli algoritmaları kullanarak çözüm yapmaya çalıştığı söylenebilir. Barış ne yaptığının farkında ve işlemlerini sorgulayabilen bir öğrencidir.

Cengiz'in “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; bir problem haricinde kalan problemlerde yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Cengiz sorulardan bir tanesine yanlış cevap vermesine karşın diğer sorularda muhtemel doğru veya doğru cevabını vererek belli bilgi düzeyine ulaşmış olduğunu göstermektedir. Cengiz'in problemlerde global düşünme yapısını sergilediği

ve genellikle kavramsal altyapısının kuvvetli olduğunu gösteren matematiksel özelliklere dayalı açıklamaları ile derin bir düşünme yapısının olduğu görülmektedir.

Emin'in "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; üç soruda algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilerken altı problemde yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilediği görülmektedir. Emin'in sadece bir soruda yanlış cevap verdiği diğer sorularda muhtemel doğru veya doğru cevabı verdiği dolayısıyla belli bir bilgi düzeyinin olduğu söylenebilir. Emin'in problem çözümlerinde beş problemde yerel düşünme tarzı diğer dört problemde ise global düşünme tarzı sergilediği görülmüştür. Bu durum Emin'in yerel düşünme tarzı sergilediği sorularda hem algoritmaya dayalı akıl yürütme hem de yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilediği anlamına gelmektedir. Emin'in iki problemde tamamen yüzeysel bir düşünce yapısı dört problemde hem yüzeysel hem de derin bir düşünce yapısı ve kalan problemlerde ise derin düşünce yapısına sahip olması Emin'in problemlere göre yaptığı açıklamaların farklılık gösterdiğini göstermektedir.

Faruk'un "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; Faruk beş problemde algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilerken, bir problemde ezbere dayalı akıl yürütme türünü ve üç problemde ise yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilemiştir. Faruk'un problemlerin tamamına ya muhtemel doğru ya da doğru cevap verdiği ve dört problemde yüzeysel olmak üzere diğer problemlerde derin bir düşünce yapısı sergilediği görülmüştür. Bu durumun Faruk'un aslında temel bilgi birikimine sahip olduğunu fakat zaman zaman yaptığı işlemlerin altında yatan anlamları bilmeden kavramsal altyapıdan yoksun bir süreç ilerlettiği anlamına gelmektedir. Faruk genellikle global bir düşünce yapısı sergilemiş sadece iki problemde yerel düşünme tarzına sahiptir.

Nilgün'ün "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; üç problemde ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü, bir tanesinde yaratıcılığa dayalı akıl yürütme türü ve diğer problemlerde algoritmaya dayalı akıl yürütme türüne sahip olduğu görülmektedir. Nilgün'ün beş probleme yanlış cevap verdiği ve bir probleme de cevap vermediği kalan

problemlere ise muhtemel doğru veya doğru cevap verdiği düşünüldüğünde kavramsal altyapısının zayıf olduğu söylenebilir. Nilgün'ün düşünme yapısının genellikle yüzeysel olduğu ve matematiksel özellikleri temel almadığı görülmüştür. Nilgün problem cevaplarında genellikle ne yaptığının farkında olmadan, çok fazla açıklama yapmamak suretiyle işlemlerini ilerletmiştir. Bu durum kavramsal altyapısındaki yetersizlikten kaynaklanmış olabilir.

Ece'nin "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; altı problemde ezbere dayalı akıl yürütme türünü ve üç problemde ise algoritmaya dayalı akıl yürütme türünü sergilediği görülmektedir. Ece problemlerin büyük çoğunluğuna yanlış cevap verdiği ve matematiksel özelliklerden uzak, mantıksal açıklamaların az olduğu bir süreç geçirmiştir. Ece genellikle hatırlama ve bilinen prosedürleri uygulama eğiliminde olan bir öğrencidir. Bu anlamda Ece'nin bilgi birikiminin ve kavramsal altyapısının zayıf olduğu söylenebilir.

Efe'nin "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; genellikle algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sadece iki problemde ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilediği görülmüştür. Efe'nin problemlerin büyük kısmına muhtemel doğru veya doğru cevap vermesi düşünüldüğünde belli bilgi birikimine sahip olduğunu göstermektedir. Efe'nin problemlerin tamamında yüzeysel bir düşünce yapısını sergilemesi matematiksel özelliklerden uzak, kavramsal altyapısının zayıf olduğunun bir göstergesidir.

Hale'nin "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; sekiz problemde algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü ve bir problemde ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilediği görülmektedir. Hale iki probleme yanlış cevap vermiş ve diğer problemlere de muhtemel doğru veya doğru cevabını vermiştir. Bu durum Hale'nin algoritmik işlemleri yapabileceği bilgi birikimine sahip olduğunu göstermektedir. Fakat Hale'nin soruların çoğunluğunda yüzeysel çok az bir kısmında derin düşünce yapısını sergilemesi açısından düşünüldüğünde matematiksel temellerden uzak ve kavramsal altyapısının yetersiz olduğu söylenebilir.

Hülya'nın "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; genellikle algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilediği sadece bir problemde yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilediği görülmüştür. Hülya'nın problemlerin büyük çoğunluğuna muhtemel doğru veya doğru cevap vermesi açısından belli bilgi birikimine sahip olduğu söylenebilir. Hülya problemlerin bir kısmına yüzeysel bir kısmına derin düşünce yapısıyla yaklaşmıştır.

Rabia'nın "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; beş problemde yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilerken dört problemde ise algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilediği görülmüştür. Rabia bütün problemlere muhtemel doğru veya doğru cevap vererek bilgi birikiminin ve kavramsal altyapısının belli bir düzeyde olduğunu göstermiş olmaktadır. Rabia'nın genelde global düşünce tarzını gösterdiği ve bir problem dışında matematiksel özellikler ve mantıksal açıklamalar yapmak suretiyle derin bir düşünce tarzı sergilediği söylenebilir.

Seda'nın "Eşitlik ve Denklem" ve "Doğrusal Denklemler" konusunda matematiksel akıl yürütme süreci incelendiğinde; problemlerin dört tanesinde yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilemiş, dört tanesinde algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilemiş ve kalan bir tane problemde ise ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türünü sergilemiştir. Seda'nın problemlerin büyük kısmına muhtemel doğru veya doğru cevap vererek belli bilgi birikime sahip olduğunu gösterdiği söylenebilir. Fakat Seda bazı problemlerde yüzeysel bazı problemlerde ise derin düşünce yapısına sahip olduğundan kavramsal altyapısında da eksikler olabileceği söylenebilir. Seda'nın düşünce yapısının genellikle global olduğu da problemlere verdiği cevaplardan anlaşılmaktadır.

Özet olarak; araştırmaya katılan öğrenciler bireysel olarak incelendiğinde, Cengiz, Emin ve Rabia dışındaki öğrencilerin ağırlıklı olarak benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme türüne sahip oldukları görülmüştür. Araştırmaya katılan öğrenciler dikkate alındığında, öğrencilerin büyük kısmının daha çok benzetmeye dayalı akıl yürütme türlerinden algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türünü kullandıkları tespit edilmiştir. Bu sonuç; Lithner (2000a), Lithner (2003), Lithner

(2008), Çiftçi (2015), Bergqvist, Lithner ve Sumpter (2003), Bergqvist, Lithner ve Sumpter (2008) ve Öystein (2011)'in çalışmalarının sonuçlarıyla paralellik göstermektedir. Öğrencilerin önceki deneyimlerinden faydalanarak problem durumu ile bağdaştırdıkları algoritmaları hatırlamayı temel alarak çözüm yapmaya çalıştıkları ve çoğu zaman yaptıkları algoritmaların altında yatan matematiksel özelliklerden haberdar olmadan işlem yaptıkları sonucuna varılmıştır. Bu durum öğrencilerin kavramsal anlamlarındaki eksiklikten kaynaklanmaktadır. Benzer olarak, Umay ve Kaf (2005), kusurlu akıl yürütmelerde bulunan öğrencilerin genellikle akıl yürütme sürecini henüz tamamlamadan sona erdirdikleri ya da kavramsal eksikliklerinden dolayı alıştıkları kalıp çözümlere yöneldiklerini belirtmiştir. Yaratıcı akıl yürütme türüne sahip öğrencilerin yaptıkları açıklamalar incelendiğinde, genellikle öğrencilerin matematiksel temelleri dikkate alarak mantıklı açıklamalar yapmak suretiyle derin bir düşünme tarzı sergiledikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç Çiftçi (2011)'nin ortaöğretim matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmasının sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir.

Öğrencilerin matematiksel akıl yürütme türlerinin belirlenmesi öğretmenlerin öğrencilerinden haberdar olması açısından önemlidir. Matematiksel akıl yürütme becerisi üzerine çalışmaların artırılarak daha kapsamlı çalışmaların yapılması hem öğretmenlere hem öğrencilere katkı sağlayabilir. Genel olarak öğrencilerde görülen algoritmaya dayalı akıl yürütme türünün kavramsal alt yapıyla desteklenerek daha az kullanılmasını sağlamak ve yaratıcı akıl yürütme türünü ön plana çıkartmak gerekmektedir.

5.2. Öğrenme Ortamında Öğretmenlerin Öğrencilere Sundukları Matematiksel Akıl Yürütme Becerisi Fırsatları İle İlgili Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu bölümde araştırmanın çalışma grubunda yer alan iki öğretmenin öğretim ortamlarında sunmuş oldukları dokuz örneğin matematiksel akıl yürütme becerisinin gelişimi adına ne tür fırsatlar sunduğu ile ilgili sonuçlar sunulmuştur.

Araştırma kapsamında uygulamanın yürütüldüğü öğrencilerin öğrenme ortamlarının fiziksel koşulları benzer niteliktedir. Tek fark Tülay öğretmenin sınıf mevcudu Eda öğretmenin sınıfına göre daha kalabalıktır. Fakat öğretmenlerin öğretim

durumları farklılık göstermektedir. “Eşitlik ve Denklem” ve “Doğrusal Denklemler” konularının işleniş sıraları bakımından öğretmenler hemen hemen aynı sırayı takip etmiştir. Fakat Eda öğretmen başlangıçta “*sözel ifadelere karşılık gelen cebirsel ifadeler konusunda*” hatırlatma yapmıştır. Tülay öğretmen direk cebirsel ifadeler konusu için “*bilinmeyen, denklem ve değişken*” kavramlarını anlatarak giriş yapmıştır. “Doğrusal Denklemler” konusunda ise, Eda öğretmen ayrıntılı bir anlatım sergilerken, Tülay öğretmen ise, doğrusal ilişkiler konusuna hiç değinmeden doğrusal denklemler konusuna geçiş yapmıştır. Öğretmenler “Eşitlik ve Denklem” konusunun öğretimi için Eda öğretmenin 2 ders saaati hatırlatma dersinin dışında, aynı ders saatini ayırmalarına karşın “Doğrusal Denklemler” konusunun öğretimi için Tülay öğretmen 8 ders saati ayırırken, Eda öğretmen 11 ders saati ayırmıştır. Her iki öğretmende anlatım yöntemini kullanarak ders anlatmaktadır. Öğretim sürecinde her iki öğretmen de öğrencilerin rahatça soru sorabildikleri bir ortam oluşturmuşlardır. Fakat Eda öğretmen Tülay öğretmene nazaran soruları cevaplama noktasında daha hassas davranmıştır. Öğrencilerin hatalarını görmeleri için yansıtıcı sorular sormayı ihmal etmeyen Eda öğretmenin öğrencilerin soru sorarak öğrenme fırsatını sağlamıştır. Fakat Tülay öğretmen tarafından öğrencilere soru yöneltilmiş olsa da genellikle etkin olduğu ve sorduğu soruları kendinin cevaplandığı durumların olması açısından öğrenciler için tartışma ortamı oluşturulamamıştır.

Öğretmenlerin ders sunum örnekleri incelendiğinde Tablo 4.27’de görüldüğü gibi Eda öğretmen genellikle öğrenciler için etkili fırsatlar sunmaya çalışmaktadır. Eda öğretmen “çözüm metodunun tanımlanması” ve “matematiksel temellerin verilmesi” noktalarında incelenen dokuz örnekte de girişimde bulunmuştur. Problem tipinin tanımlanması, yaratıcı düşünme, tartışma ve bağlantı noktalarında ise genellikle girişimde bulunmuş fakat bazı örneklerde bu noktaları gözardı etmiştir. Eda öğretmenin sınıfında öğrencilerin fikirlerini rahatça söyleyebildikleri, rahatça soru sorabildikleri, sorularına cevap bulabildikleri ve matematiksel özelliklerin ayrıntılı açıklandığı bir öğrenme ortamı olduğu sonucuna varılabilir. Eda öğretmenin ikinci örnekte kullandığı *başka nasıl ifade edilebilir?*”, altıncı örnekte; *Niye çarpıyorsun? Peki, sorunun devamını nasıl getireceğim? Peki 3 er şeker alanı sorsaydı?* yedinci örnekte; *peki bazı noktalar x ekseninde çıktı bazı noktalar y ekseninde çıktı peki ben buna göre bir kural oluşturabilir miyim?* sekizinci örnekte $y = 3x$ B şikkında $y = 15 + 5x$ ve sonuncusu

y = 60 - 5x değil mi bu üçüyle ilgili nasıl bir kural oluşturulabilir doğrusal grafiklerin denklemi nasıldır? dokuzuncu örnekte iki grafik çizdik bu iki grafik arasında ne gibi bir fark var? ifadelerinden öğrencilerinin fikir beyan etmelerini benimsediği ve yaratıcı düşünme için, matematiksel akıl yürütme becerisini etkilemesi anlamında fırsatlar sunduğu sonucuna varılabilir. Bu sonuç Olson (2007)'un öğretmenler öğrencilerin matematiksel fikirlerini geliştirmek için onların akıl yürütmeleri ve tahminlerini yansıtacak sorular planlayarak onlara fırsatlar sunabilirler bulgularıyla benzerlik göstermektedir.

Tablo 4.29 incelendiğinde ise Tülay öğretmenin sınıfında öğrenciler oldukça rahat ve rahatça soru sorabilmelerine rağmen, bu sorularla ilgili yansıtıcı girişimlerde bulunulmadığı görülmüştür. Tülay öğretmenin incelenen dokuz örnekte de özellikle yaratıcı düşünme ve bağlantı analiz boyutunda hiç girişimde bulunulmadığı sonucuna varılmıştır. Tülay öğretmenin problem tipinin tanımlanması, çözüm metodunun tanımlanması, tartışma ve matematiksel temel noktalarında ise sınırlı fırsatlar sunduğu sonucuna varılmıştır. Bu sonuç; Bergvist ve Lithner (2012)'in öğretmen sunumlarının mevcut öğrenme algoritmalarına dayandığı, çoğu zaman tartışmaların bulunmadığı, öğrencilere, problemlerde matematiksel özelliklere bağlı olan düşünce ve argümanlar gibi yaratıcı akıl yürütme özelliklerini görmek için bazı fırsatlar verildiği ancak bu durumun sınırlı olduğu sonuçlarıyla paralellik göstermektedir. Ayrıca bu sonuç, Karakuş ve Yeşilpınar (2016)'ın problem çözme, akıl yürütme, ilişkilendirme ve iletişim gibi alana özgü temel becerilerin kazanımına ilişkin olarak öğretmen tarafından süreçte öğrencilerden karşılaştırma yapma ve çıkarımda bulunmalarını isteme, benzerlik ve farklılıkları belirtme ve problem cozmeye yer verildiği ancak öğretmenin bu davranış ve söylemlerinin sıklığının bütüne oranla oldukça az olduğu, bunun yanı sıra öğrencilere verdiği problemleri kendisinin çözdüğü ve sorduğu soruları yanıtladığı durumlar olduğu sonucu ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca bu konu ile ilgili Schoenfeld (1985) yansıtma, tartışma ve matematiksel temel açısından sınırlılıkların öğretmenlikte hiçbir zaman açık olmaması durumunda, öğretim sürecinin öğrencilere yol gösterici olamayacağını, öğrencilerin süreci bağımsız olarak geliştirmesinin çok zor olabileceğini ve öğrencilerde bu sürecin önemli olmadığı inancını oluşturabileceğinden bahsetmektedir (Akt. Bergvist ve Lithner, 2012).

Öğretmenlerin ders sunum örnekleri incelendiğinde Eda öğretmen tarafından CR akıl yürütme türünü destekleyen yaratıcı düşünme, matematiksel temel, tartışma ve bağlantı bileşenlerinin Tülay öğretmen nazaran daha fazla gerçekleştirilmeye çalışıldığı sonucuna ulaşılmıştır. Eda öğretmenin sınıfında öğrenim gören öğrencilerin dokuz soruda belirlenen matematiksel akıl yürütme türlerine bakılacak olursa algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme ağırlıklı olmasına karşın CR akıl yürütme türünü sergilenme sıklığının Tülay öğretmenin sınıfındaki öğrencilere nazaran daha fazla olduğu sonucuna varılmıştır. Eda öğretmenin sınıfındaki öğrencilerin Tülay öğretmenin sınıfındaki öğrencilere göre yaptıkları işlemlerin mantıksal açıklamalarını daha rahat yaptıkları ve derin düşünme tarzını diğer öğrencilere nazaran daha fazla sergiledikleri düşünüldüğünde; Eda öğretmenin sınıfındaki öğretim durumlarının öğrenciler üzerinde olumlu etkiler bıraktığı söylenebilir. Fakat bu durum yine de algoritmaya dayalı akıl yürütme türünün baskın olduğu gerçeğini değiştirmemektedir. Bununla birlikte; AR ve MR akıl yürütme türlerinin sergilenmesi, Tülay öğretmenin sınıfında öğrenim gören öğrencilerde daha sık görülen matematiksel akıl yürütme türü olmuştur. Tülay öğretmenin sınıf ortamında sunduğu örneklerin öğrencilere sağladığı fırsatlar düşünüldüğünde; Tülay öğretmenin özellikle yaratıcı düşünme, tartışma, matematiksel temel ve bağlantı boyutlarında sınırlı fırsatlar sunmuş olması bu durumun sebebi olabilir. Bu anlamda bu sonuç Lithner (2008)'in öğrencilerin AR odaklarının büyük ölçüde öğrenme ortamındaki yetersizlikler tarafından desteklendiğine dair elde ettiği sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Diğer taraftan Erdem (2015) ise, farklı duyu organlarına hitap edecek zenginleştirilmiş bir öğrenme ortamının (teknoloji, işbirlikli, oyunlar, somut materyaller, tartışma... vb) öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerini geliştirdiği sonucuna varmıştır. Öğrencilerin kavramsal bilgi kazanabilmeleri için onlara matematikle mücadele etme imkânı tanıyan öğretici bir duruma girmeleri önemlidir (Jonsson vd. 2014). Bu anlamda düşünüldüğünde; öğrenme ortamının öğrencilerin matematiksel akıl yürütmeleri üzerinde oldukça etkili olduğu sonucuna varılabilir.

Eda öğretmen ve Tülay öğretmenin sınıflarında sundukları örnekler düşünüldüğünde; Eda öğretmen öğrencilerinin farklı tip sorularla karşılaşmalarını önemsemekte ve öğrencilere yönelttiği sorularda karşılaştırma, sonuca varma genellemelere varma gibi üst düzey düşünmeyi destekleyecek fırsatlara yer vermektedir.

Fakat Tülay öğretmenin genelde cevap odaklı yapısıyla zaman zaman farklı sorular sormuş olsa da genel anlamıyla matematiksel temellerden yoksun bir öğretim benimsediği sonucuna varılmıştır. Bu anlamda düşünüldüğünde; öğrencilerin sınıf içerisinde karşılaştığı örneklerin yapısı ve sunum şekli onların matematiksel akıl yürütme becerisi türlerini etkileyebilir sonucuna ulaşılabilir. Nitekim Boesen vd. (2010) çalışmasında öğrencilerin ders kitaplarında veya sınavlarda benzer sorularla karşılaştıklarında öğrencilerin prosedürleri veya algortimaları hatırlamaya çalışarak çözüm yaptıklarını ve bu çözümün kavramsal anlama gerektirmediğini, bu durumun aksine, ders kitaplarındakilere benzer olmayan soruların çözümünde ise çoğunlukla yaratıcı akıl yürütme becerisi türlerini gösterdikleri sonucuna varılmıştır. Öğrenme ortamında algoritmaya dayalı akıl yürütme tamamen yok sayılamaz fakat bu akıl yürütme türünün merkezde olması ilerdeki dönemler için sıkıntılar yaratabilir. Lithner (2006), algoritmaya dayalı akıl yürütme odağının, benzer ders kitabı alıştırmaları yöneltmenin ve algoritmaya dayalı akıl yürütmeye uyarlanan sınavları geçmek gibi kısa vadeli kazanımlara sebep olsa da zayıf kavramsal anlama ve zayıf problem çözme yeterliliği gibi uzun vadeli kayıplara neden olacağını belirtmiştir.

Öğretim sürecinin planlanması öğrencilerin üst düzey düşünme becerilerini kazanmaları açısından oldukça önemlidir. Bu anlamda bir süreç becerisi olarak sayılan matematiksel akıl yürütme becerisinin geliştirilmesi ve kazandırılması gerekmektedir. Öğretmenlerimizin bu beceri hakkında bilgi sahibi olmaları kadar bu becerinin öğrencilere nasıl kazandırılabilceği konusunda da bilgi sahibi olmaları gerekmektedir. Öğrencilerimizin sınıf içerisinde karşılaştıkları öğretim fırsatları öğretmenlerimizin öğrencilerimize sundukları fırsatlarla sınırlıdır. Bu açıdan düşünüldüğünde; öğrencilerimizin özgün düşüncelerini sağlayacak, fikirlerini rahatça söyleyebilecekleri, matematiksel temellere dayanan, tartışma ortamının olduğu ve öğrencilerin fikirlerinin önemsendiği zengin öğrenme ortamları oluşturmak önemlidir. Bu bakımdan gerekli altyapının sağlanarak matematiksel akıl yürütme becerisinin önemi vurgulanmalıdır. Ayrıca öğretmenler ile daha kapsamlı bir çalışma yürütülerek öğretmenlerin matematiksel akıl yürütme türlerini etkileyip etkilemedikleri ile ilgili çalışmalar yapılabilir.

Genel olarak düşünüldüğünde; öğrencilerin matematiksel akıl yürütme süreçleri ve öğrenme ortamı arasındaki ilişki önemsenmeli, öğrenme ortamının zenginleştirilmesi

ve öğrencilere algortimaya dayalı akıl yürütme türü ile ilgili fırsatlardan çok yaratıcı akıl yürütme türü ile ilgili fırsatların sunulması açısından dikkatli davranılmalı ve öğretmenler matematiksel akıl yürütme becerisi ile ilgili bilgilendirilmelidir.



KAYNAKÇA

- Akkaya, R., ve Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanılgıları. *Hacettepe Fakültesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31.
- Akkaya, R., ve Durmuş, S. (2015). İlköğretim 6. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanılgılarının giderilmesinde çalışma yapraklarının etkililiği. *Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, (27).
- Akkuş-Çıkla, O., ve Duatepe, A. (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23, 32-40.
- Akgün, L. (2006). Cebir ve değişken kavramı üzerine. *Journal of Qafqaz University*, 17 (1).
- Akgün, L. (2009). 8. sınıf öğrencilerinin sözel problemler ve değişken kavramı arasında ilişki kurabilme becerileri. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(2), 275-284.
- Alkan, H. ve Altun, M. (1998). *Matematik öğretimi*, İçinde Özdaş, A. (ed.) Matematik öğretmenliği matematik öğretimi, T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları No:1072 Açık Öğretim Fakültesi Yayınları No: 591. 24.05.2017 tarihinde www.aof.anadolu.edu.tr/kitap/ioltp/2289/unite01.pdf adresinden erişilmiştir.
- Alkan, H., ve Güzel, E. B. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25 (3), 221-236.
- Altıparmak, K., ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6 (1), 25-37.
- Altun, M. (2005). *Eğitim fakülteleri ve ilköğretim öğretmenleri için: matematik öğretimi*. Aktüel Alfa Yayıncılık.
- Altun, M. (2008). *Eğitim fakülteleri ve lise matematik öğretmenleri için: liselerde matematik öğretimi*. Aktüel Alfa Yayıncılık.
- Artz, A. F., and Yaloz-Femia, S. (1999). Mathematical reasoning during small-group problem solving. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 115-127). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Aufmann, R. N., Lockwood, J., Nation, R. D., and Clegg, D. K. (2007). *Mathematical thinking and quantitative reasoning*. Nelson Education.
- Aslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.
- Assaf, F. (2014). *Multilingual children's mathematical reasoning*. Doctoral dissertation. University of Ottawa. Canada.
- Bahtiyari, A.Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Harf eğitim yayıncılığı.

- Ball, D., and Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Başaran, S. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileriyle ilgili duyuşsal ve demografik etmenlerin araştırılması*. Yayınlanmamış doktora tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Baykul, Y. (2014). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8 sınıflar)* (Geliştirilmiş 2. Baskı). Ankara: Pegem Yayıncılık
- Baydar, S. C., ve Bulut, S. (2002). Öğretmenlerin matematiğin doğası ve öğretimi ile ilgili inançlarının matematik eğitimindeki önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*. 23. 62-66.
- Bergqvist, T., Lithner, J., and Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(1), 1-12.
- Bergqvist, T., and Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31 (2), 252-269.
- Bergqvist, T., Lithner, J., and Sumpter, L. (2003). *Reasoning characteristics in upper secondary school students' task solving*. Research Reports in Mathematics Education 1, Department of Mathematics, Umeå University.
- Bergsten, C. (2006). Trying to reach the limit: The role of algebra in mathematical reasoning. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., and Nad'a Stehlíková (eds.) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2, (pp.153-160). Prague: Charles University.
- Bike-Kalkan, D. (2014). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin kavramsal anlama ve cebirsel muhakeme yapıları*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. London: Springer Science and Business Media.
- Boesen, J., Lithner, J., and Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 89-105.
- Cai, J. (2002). Assessing and understanding US and Chinese students' mathematical thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(6), 278-290.
- Cates, J. M. (2000). Making algebra accessible to all students: An important issue for all mathematics teachers. *The Journal of the University of South Carolina Upstate School of Education*, 2(12), 110-113.
- Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri - beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (Gözden Geçirilmiş 2. Baskı) (Çev. Ed. M. Bütün. ve S. B. Demir). Ankara: Siyasal Kitabevi. (Eserin orijinali 2013'de yayımlandı).

- Creswell, J. W. (2014). *Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları: Araştırma deseni* (Çev. Ed. S. B. Demir). Ankara: Eğiten Kitap. (Eserin orijinali 2014’de yayımlandı).
- Çiftci, Z. (2015). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Çoban, H. (2010). *Öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme becerileri ile bilişötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeyleri arasındaki ilişki*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gaziosmanpaşa Üniversitesi Sosyal Bilimleri Enstitüsü, Tokat.
- De Castro, B. (2004). Pre-service teachers’ mathematical reasoning as an imperative for codified conceptual pedagogy in Algebra: A case study in teacher education. *Asia Pacific Education Review*, 5(2), 157-166.
- Dede, Y. (2004). Öğrencilerin cebirsel sözel problemleri denklem olarak yazarken kullandıkları çözüm stratejilerinin belirlenmesi. *Eğitim Bilimleri ve Uygulama*, 3(6).
- Dede, Y., ve Argün, Y. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir?. *Hacettepe Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24.
- Ekiz, D. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (Genişletilmiş 2. Baskı). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Erbaş K., Çetinkaya, A., ve Ersoy, Y. (2009). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanlışları. *Eğitim ve Bilim*, 34 (152), 44-59.
- Erdem, Z. Ç. (2013). *Öğrencilerin denklem konusundaki hata ve kavram yanlışlarının belirlenmesi ve bu hata ve yanlışların nedenleri ve giderilmesine ilişkin öğretmen görüşleri*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.
- Erdem, E. (2015). *Matematiksel muhakemeyi geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının etkileri*. Yayınlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Ersoy, E., ve Başer, N. (2013). Matematiksel düşünce ölçeğinin geliştirilmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 21(4).
- Ersoy, E., ve Bal-İncebacak, B. (2017). Mathematical reasoning skills of 7th grade students. *International Online Journal of Educational Sciences*, 9(1).
- Francisco, J. M., and Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students’ mathematical reasoning: Lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(1), 49-66.
- Güler, A., Halıcıoğlu, M. B., ve Taşgın, S. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Gülşen, İ. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumlarının incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

- Gündoğdu, K., Albayrak, M., Ozan, C., ve Çelik, N., (2012). Müfettişlerin ilköğretim matematik öğretim programı hakkındaki görüşleri. *Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi*. 3(2).
- Gürbüz, R., ve Akkan, Y. (2008). Farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş düzeylerinin karşılaştırılması: denklem örneği. *Eğitim ve Bilim*. 33 (148).
- Greenes, C., and Findell, C. (1999). Developing Students' algebraic reasoning abilities. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 127-138). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Herbert, S. (2014). A framework for teachers' knowledge of mathematical reasoning. In *MERGA 2014: Curriculum in focus: research guided practice: Proceedings of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2014 annual conference*, 37th (pp. 702-705), Sydney, New South Wales, Australia.
- Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E., and Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, 74, 26-37.
- Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Kilpatrick, G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- House, P. (1999). Mathematical reasoning: in the eye of the beholder. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 175-188). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Işık, A., ve Bekdemir, M. (1998). Matematiğin doğası ve eğitimdeki yeri. *Çağdaş Eğitim*. 245-248.
- Işık, A. (2002). Matematik dünyasında değişimler. *Kastamonu Eğitim Dergisi*. 10(2). 365-368.
- Işık, A. (2007). Görselleştirme ve matematik öğretimi. *İlköğretmen*, 7, 18-21.
- Işıksal, M., Koç, Y., ve Osmanoğlu, A. (2010). Öğrencilerin ölçme alanında akıl yürütme becerilerine ilişkin bir çalışma: silindir örneği. *Eğitim ve Bilim*, 35(156).
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., and Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20-32.
- Karaçay, T. (1985). Orta Öğretim Kurumlarında Matematik Öğretimi ve Sorunları, Türk Eğitim Derneği, 13-14 Haziran. 01.06.2017 tarihinde http://www.ted.org.tr/pdf/ted_matematik_ogretimi_ve_sorunlari_ocr.pdf adresinden erişilmiştir.
- Karakuş, M., Yeşilpınar, M. (2016). İlköğretim Altıncı Sınıf Matematik Dersinde Uygulanan Etkinliklerin ve Ölçme-Değerlendirme Sürecinin İncelenmesi: Bir Durum Çalışması. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 3 (1), 35-54.
- Kasmer, L., and Kim, O. K. (2011). Using prediction to promote mathematical understanding and reasoning. *School Science and Mathematics*, 111(1), 20-33.

- Kaur, B. (2009). Reasoning and communication in the mathematics classroom - Some 'what' strategies. In Martin, D. et al. (Eds.), *Mathematics-of prime importance* (pp. 102 - 110). Melbourne: Mathematical Association of Victoria.
- Kaya, D., ve Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 3 (2).
- Koenig, G. (2007). Orchard Software and the NCTM Principles and Standards for School Mathematics. 21.07.2017 tarihinde <http://siboneylg.com/docs/NCTMPrinciplesStandardsPositionPaper.pdf>. adresinden erişilmiştir.
- Kramarski, B., and Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: the effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, 40, (1),81–310.
- Krulik, S., and Rudnick, J.A. (1999). Innovative tasks to improve critical and creative thinking skills. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 138-146). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lithner, J. (2000a). Mathematical reasoning and familiar procedures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 83–95.
- Lithner, J. (2000b). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165–190.
- Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (1), 29-55.
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 405-427.
- Lithner, J. (2005). *A framework for analysing qualities of mathematical reasoning: Version 3*. Research Reports in Mathematics Education 3, Department of Mathematics, Umeå University.
- Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning*. Research Reports in Mathematics Education, Department of Mathematics, Umeå University.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 255–276.
- Loong, E., Vale, C., Bragg, L., and Herbert, S. (2013). Primary school teachers' perceptions of mathematical reasoning. In V. Steinle, L. Ball and C. Bordini (Eds.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow. Proceedings of the Thirty-Sixth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 466-472). Melbourne: MERGA.
- Malloy, C. E. (1999). Developing Mathematical Reasoning in the Middle Grades: Recognizing Diversity In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 13-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- MacGregor, M., and Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1).
- Mason, J. (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. In *Reasoning, explanation and proof in school mathematics and their place in the intended curriculum: Proceedings of the QCA International Seminar*. London.
- McMillan, J. H., and Schumacher, S. (2010). *Research in education. Evidence-based research*. Boston: Pearson.
- McClain, K., Cobb, P., Gravemeijer, K. and Estes, B. (1999). Developing mathematical reasoning within the context of measurement. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 93-107). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Mevarech, Z., and Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. *Metacognition Learning*, 1, 85-97.
- Mert Uyangör, S. ve Dikkartın Övez, F. T. (2012). İlköğretim altıncı sınıf matematik dersi öğretim programı cebir öğrenme alanı kazanımlarına ulaşılma düzeyi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*. 6,(1), sayfa 1-22.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı*. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
- Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber* (Cev. Ed. S. Turan). Ankara: Nobel Yayıncılık. (Eserin orijinali 2009'da yayımlandı).
- Morris, A. K. (2002). Mathematical reasoning: Adults' ability to make the inductive-deductive distinction. *Cognition and Instruction*, 20(1), 79-118.
- Nathan, M. J., and Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 168-190.
- Nunes, T., Bryant, P., Barros, R., and Sylva, K. (2012). The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology*, 82(1), 136-156.
- Olson, J. C. (2007). Developing students' mathematical reasoning through games. *Teaching Children Mathematics*, 13(9), 464-471.
- Öystein, H. P. (2011). What characterizes high achieving students' mathematical reasoning? In B. Sriraman and K. H. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 193-216). Rotterdam: Sense.
- Öz, T. ve Işık, A. (2016). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel akıl yürütme becerisi üzerine görüşlerinin incelenmesi [Öz]. 8. *Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi Bildiri Özet Kitabı*. 269. Çanakkale.

- Palabıyık, U., ve İspir, O. A. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 111-123.
- Palm, T., Boesen, J., and Lithner, J. (2011). Mathematical reasoning requirements in Swedish upper secondary level assessments. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(3), 221-246.
- Peresini, D. and Webb, N. (1999). Analyzing mathematical reasoning in students' responses across multiple performance assessment tasks. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 156-175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pilten, P. (2008). *Üstbiliş stratejileri öğretiminin ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerine etkisi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Russell, S.J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 1-13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: early algebraic thinking in grades K-6. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 62-82). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 30(2), 197-210.
- Soylu, Y. (2008). 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri ve harf sembollerini (değişkenleri) yorumlamaları ve bu yorumlamada yapılan hatalar. *Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi*. 25.
- Sprigler, D. M., and Alsup, J. K. (2003). An analysis of gender and the mathematical reasoning ability sub-skill of analysis-synthesis. *Education*, 123(4), 763.
- Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important*. Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking. Tokyo and Sapporo, Japan.
- Steen, L. A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 270-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Susac, A., Bubic, A., Vrbanc, A., and Planinic, M. (2013). Development of abstract mathematical reasoning: the case of algebra. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, 679-679.

- Sumpter, L. (2009). *On aspects of mathematical reasoning: affect and gender*. Unpublished Doctoral dissertation. Umeå University Department of Mathematics, Umeå.
- Sumpter, L. (2013). Themes and interplay of beliefs in mathematical reasoning. *International Journal of Science & Mathematics Education*, 11(5).
- Şahin, S. M., ve Adnan, B. (2016). Matematik gücünün değerlendirilmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(1), 195-215.
- Tang, E.P., and Ginsburg, H.P. (1999). Young children's mathematical reasoning: a psychological view. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 45-62). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tekay, T. (2012). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin doğrusal denklemlerin grafiklerini kartezyen koordinat sistemine aktarma becerileri*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Tıraşoğlu, N. B. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme bağlamında matematik zihin alışkanlıklarının belirlenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Umay, A. (1996). Matematik eğitimi ve ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12, 145-149.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Umay, A., ve Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 188-195.
- Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn. *American Educator*, 19(1), 30-37.
- Van De Walle, J. A., Karp, K. S., and Bay-Williams, J. M. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim*. (Çev. Ed. S. Durmuş), Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Witzel, B. S., Mercer, C. D., and Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(2), 121-131.
- Wood, T., Williams, G., and McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 222-255.
- Yackel, E., and Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yankelewitz, D. (2009). *The development of mathematical reasoning in elementary school students' exploration of fraction ideas*. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers, The State University of New Jersey, New Brunswick.
- Yankelewitz, D., Mueller, M., and Maher, C. A. (2010). A task that elicits reasoning: A dual analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*. 29. 76-85.

- Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Yenilmez, K., ve Avcu, T. (2009). Altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki başarı düzeyleri. *Ahi Evran Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2).
- Yeşildere, S., ve Türnüklü, E. B. (2007). Examination of students' mathematical thinking and reasoning processes. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40(1), 181-213.
- Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (8. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4 th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage
- Yurdagül, H. (2005). Ölçek geliştirme çalışmalarında kapsam geçerliği için kapsam geçerlik indekslerinin kullanılması. *XIV. Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi*.
- Zengin, Y. (2015). *Dinamik matematik yazılımı destekli işbirlikli öğrenme modelinin ortaöğretim cebir konularının öğrenimi ve öğretiminde uygulanabilirliğinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Zembat, I. O. (2008). Pre-service teachers' use of different types of mathematical reasoning in paper-and-pencil versus technology-supported environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(2), 143–160.

EKLER

EK 1. Erzurum Valiliği İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden Alınan İzin Belgesi



T.C.
ERZURUM VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 36648235/605/12108991
Konu: Araştırma İzni

25.11.2015

MÜDÜRLÜK MAKAMINA

- İlgi: a) Atatürk Üniversitesi'nin 19/11/2015 tarihli ve 1500108547 sayılı yazısı.
b) Atatürk Üniversitesi'nin 12/11/2015 tarihli ve 1500103873 sayılı yazısı.
c) Atatürk Üniversitesi'nin 12/11/2015 tarihli ve 1500103861 sayılı yazısı.
d) Atatürk Üniversitesi'nin 10/11/2015 tarihli ve 1500102258 sayılı yazısı.
e) Atatürk Üniversitesi'nin 09/11/2015 tarihli ve 1500101034 sayılı yazısı.
f) Barbaros DİKEL'in 13/11/2015 tarihli ve 116475544 kayıt numaralı dilekçesi.

İlgi yazılarda belirtilen üniversite ve araştırmacıların İlimiz okullarında araştırma yapma isteği Bakanlığımızın 07/03/2012 tarihli ve 3616 (2012/13) sayılı genelgesi çerçevesinde incelenmiştir. Araştırmaların, eğitim öğretim faaliyetlerini aksatmayacak şekilde, komisyon kararında belirtilen mühürlenmiş veri toplama araçlarının kullanılarak ve ekli listede isimleri belirtilen okullarda yapılması şubemizce uygun görülmektedir.

Makamınıza da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Turan BAĞAÇLI
İl Milli Eğitim Müdür Yardımcısı

OLUR
25.11.2015

Yüksel ARSLAN
İl Milli Eğitim Müdürü

Ek: Komisyon karar Formu (6 adet)

Yönetim Cad. Valilik Binası Kat:4 Yakutiye ERZURUM
Elektronik Adı: erzurum.meb.gov.tr
e-posta: arge25@meb.gov.tr

Ayrıntılı bilgi için: Çiğdem HOPUR Şb.Mdr.
Tel: (0 442) 234 4800
Faks: (0 442) 235 1032

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <http://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 3e8f-8620-3c8f-8262-bd00 kodu ile teyit edilebilir.

FORM:2	
T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü	
ARAŞTIRMA DEĞERLENDİRME FORMU	
ARAŞTIRMA SAHİBİNİN	
Adı Soyadı	Tuba ÖZ
Kurumu / Üniversitesi	Atatürk Üniversitesi
Araştırma yapılacak iller	Erzurum
Araştırma yapılacak eğitim kurumu ve kademesi.	Yakutiye İlçesi Şükrüpaşa Ortaokulu, Ömer Nasuhi Bilmen Ortaokulu, Şair Nefi Ortaokulu, 50. Yıl Ortaokulu, Kültür Kurumu Ortaokulu, Faik Güngör Ortaokulu, Gazi Ahmet Muhtar Paşa Ortaokulu ; Palandöken İlçesi Saltukbey Ortaokulu, Turgut Özal Ortaokulu ; Aziziye İlçesi Fatih Ortaokulu
Araştırmanın konusu	Ortaokul Üçüncü Sınıf (7. sınıf) Öğrencilerinin Matematiksel Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi
Üniversite / Kurum onayı	Kurum Onayı İle
Araştırma / Proje /ödev / Tez önerisi	Araştırma Önerisi
Veri toplama araçları	Öğretmen Görüşme Formu, Ders Gözlem Formu, Matematiksel Akıl Yürütme Testi, Matematiksel Akıl Yürütmeyi Geliştirebilecek Etkinlikler/Problemler , Gerekli Görüldüğünde Video Kaydı.(Uygulama Yapılan Kişilerin veya Velilerinin onayı ile.)
Görüş İstenilecek Birim / Birimler.	
Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü'nün Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri konulu 2012/13 nolu genelge doğrultusunda yapılan incelemede araştırmanın kabulüne karar verildi.	
Komisyon Kararı	Oybirliği ile Kabulüne
Muhalif Üyenin Adı ve Soyadı	
KOMİSYON	
17.11.2015 Komisyon Başkanı Çiğdem HOPUR Şube Müdürü	Üye Tunç AĞAVER
	Üye Mesut ARAS

EK 2. Uzman görüş formu

Kazanımları hedef alan soru numarası	Görüş /öneri			
	Madde uygun	Madde uygun fakat gözden geçirilmeli	Madde uygun değil	Madde ile ilgili önerileriniz

EK 3. Matematiksel Akıl Yürütme Testi

Eşitlik ve Denklem

- 1) $3k + 10 = 31$ denklemi ile çözülebilecek bir problem kurunuz ve çözünüz.
- 2) $7x - 1 = 7$ denklemini Emre aşağıdaki şekilde çözüyor.

$$7x - 1 = 7$$

1. Adım $\frac{1}{7} \cdot 7x - 1 = \frac{1}{7} \cdot 7$

2. Adım $x - 1 = 1$

3. Adım $x - 1 + 1 = 1 + 1$

- a) Çözümün doğru olup olmadığı hakkında ne söylersiniz. Eğer çözüm hatalı ise hatalı basamakları gösteriniz ve neden hatalı olduğunu açıklayınız?
- b) Siz bu denklemi nasıl çözersiniz?
- 3)



Ayşe doğum günü için bir kafede parti düzenlemektedir. Kafenin yeterli kapasiteye sahip olup olmadığını öğrenmek için kafe sahibiyle görüşür. Kafe sahibi Ayşe'ye şöyle cevap verir:

Eğer misafirleriniz masalara 4'er kişi oturursa 20 kişi

ayakta kalır.

Eğer masalara 6'şar kişi oturursa 1 masa boş kalır.

Ayşe'nin doğum günü için kaç misafirinin olduğunu bulmak için kullanacağınız denklemi yazınız? Denklemi nasıl yazdığınızı açıklayınız?

4)

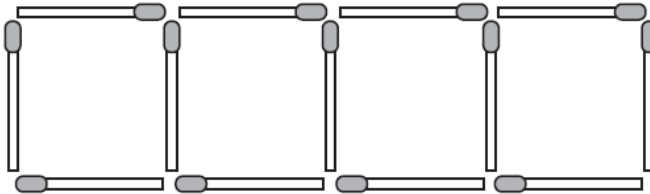


Bir DVD ve bilgisayar oyunu kiralama mağazası müşterilerine aşağıdaki fiyatlara göre hizmet vermektedir. Bu mağazada **yıllık üyelik ücreti 15 TL** dir. Aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi üye olanlar için DVD kiralama ücreti üye olmayanlara göre daha düşüktür.

Üye olmayanların bir DVD kiralama ücreti	Üye olanların bir DVD kiralama ücreti
3 TL	2 TL

- Turgay geçen yıl DVD kiralama mağazasının bir üyesiydi. Geçen yıl toplamda üyelik ücreti de dâhil 65 TL harcadı. Eğer Turgay üye olmasaydı fakat aynı sayıda DVD kiralamış olsaydı kaç TL harcayacaktı? Çözümünüzü açıklayınız.
- Üye olan birinin üye olmayan birine göre avantajlı olabilmesi için en **az** kaç DVD kiralaması gerekmektedir? Çözümünüzü açıklayınız.

5)

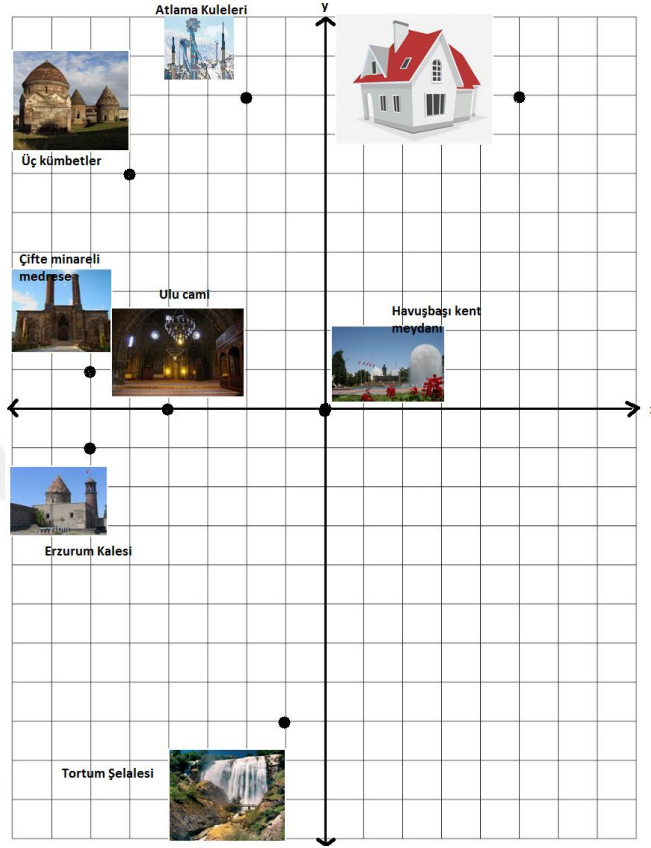


Şekildeki 4 kareyi yapmak için 13 kibrit çöpü kullanılmıştır.

- Aynı yöntemle 73 kibrit çöpü kullanılarak kaç tane kare yapılabilir? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz?
- Çözümünüzün doğru olup olmadığına nasıl karar verdiniz?

Doğrusal Denklemler

1)



Kaan ve Nur tatilde Erzurum da yaşayan Ahmet amcalarını ziyarete gideceklerdir. Amcaları önceden gezdireceği tarihi mekânları tespit etmiş ve Havuz başı kent meydanını orijin olacak şekilde işaretlemiştir.

- Ahmet amcanın gezilecek yerlerin koordinatlarını yazmasına yardım eder misiniz? Koordinatları yazarken nelere dikkat ettiğinizi açıklayınız.
- Eğer orijin olarak Havuz başı kent meydanı değil de evleri seçilseydi mekânların koordinatlarında değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Neden? Açıklayınız.

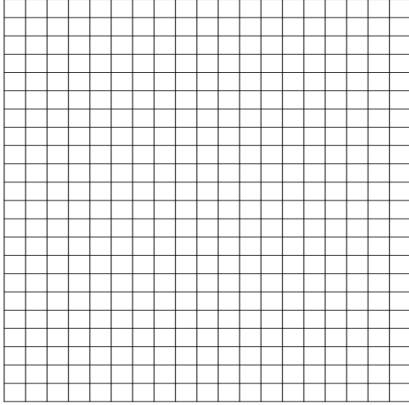
2)



Ahmet Bey işten eve gitmek için taksi kullanmaktadır. Bir taksi tarifesi;

Açılış ücreti olarak 3TL ve sonraki her km için 1 TL dir.

- a) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi tablo ile nasıl ifade edersiniz?
- b) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak nasıl ifade edersiniz?
- c) Ödenecek ücret ile alınan yol arasındaki ilişkiyi gösteren bir çizgi grafiği çiziniz.



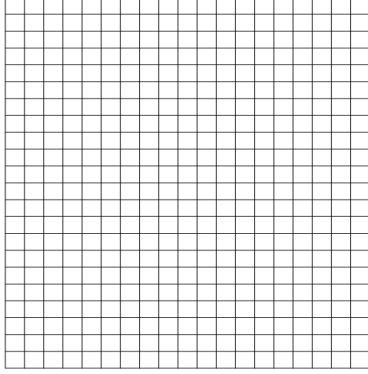
- d) Taksi tarifiesi, açılış ücreti alınmadan her km için 1 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
- e) Taksi tarifiesi açılış ücreti 3 TL ve her km için 2 TL olsaydı grafikte değişiklik olup olmayacağı konusunda ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

3)



Boyu 30 cm olan A mumu ve boyu 20 cm olan B mumu aynı anda yakılıyor. Mumların zamana göre erimeleri takip ediliyor. A mumunun saatte 5 cm azaldığı ve B mumunun ise üç saatte 5 cm azaldığı fark ediliyor.

- a) A ve B mumlarının boy zaman ilişkisi hakkında ne söylersiniz. Tablo ile ifade ediniz. Açıklayınız.
- b) Aynı koordinat sistemi üzerinde A ve B mumlarının boy zaman ilişkisini gösteren grafikleri çiziniz.



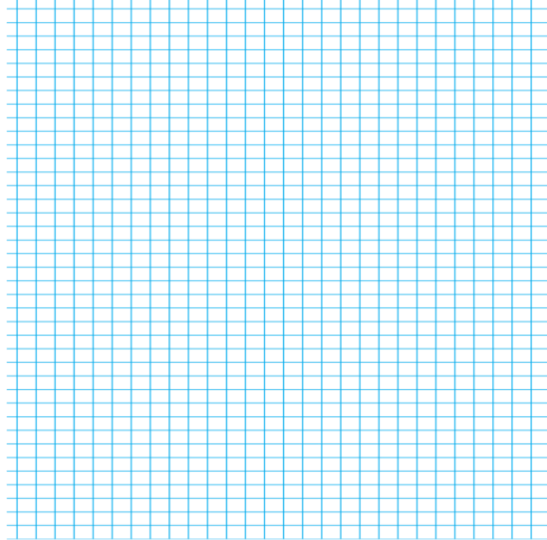
- c) A mumunun boy zaman ilişkisini gösteren denklemi yazınız? Denklemi nasıl oluşturduğunuzu açıklayınız.

4)



Bir insanın kan basıncı ile yaşı arasında, x bir insanın yaşını y ise kan basıncını göstermek üzere $y = \frac{x}{2} + 110$ ilişkisi vardır. Buna göre;

- a) Kan basıncı ve yaş arasındaki ilişkiyi gösteren grafiği nasıl çizersiniz?(Her birim kare 5 birim kareyi ifade etmektedir.)



- b) Kan basıncı 145 olan birinin yaşını nasıl bulursunuz? Açıklayınız.

EK 4. Eda öğretmenin kullandığı çalışma kağıdı örnekleri

DENKLEMLER ÇALIŞMA KAĞIDI		
$5x + 7 = 22$	$-3x + 8 = 20$	$2x - 8 = x - 2$
$17 = -x + 8$	$7x - 15 = 3x - 3$	$12x - 25 = -3x + 20$
$4x - 6 = 2x + 12$	$6x + 24 = 2x - 16$	$11x - 3 = x + 27$
$3x + 7 = -x + 5$	$-4x + 15 = x - 35$	$2x - 15 = 5x + 6$
$x + 4 = 3x - 10$	$-x - 10 = -3x - 4$	$-2x + 7 = 3x - 13$
$-x + 5 = -2x + 9$	$7x + 2 = -3x - 18$	$x + 11 = 2x + 7$

Aşağıda verilen durumlara ait birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri kurunuz.

- ❖ Bir sayının 5 katının 7 eksiği
- ❖ Herhangi bir sayının 3 eksiği
- ❖ Bir miktar paronun 2 katının 9 fazlası
- ❖ Bir sayının 8 eksiğinin 3 katı
- ❖ Bir sayının 4 katının 5 fazlası aynı sayının 3 katının 8 eksiğine eşittir
- ❖ Bir sayının 2 katının 12 fazlasını 25 tir.
- ❖ Hangi sayının 3 katının 8 fazlası 32 dir.
- ❖ Bir miktar limonun 3 katının 13 fazlası 24 limondur.
- ❖ Bir miktar çileğin 7 kg fazlası 15 tir.
- ❖ Bir sayının 5 katının 8 eksiğinin yarısı
- ❖ Bir sayının 8 katı 32 dir.
- ❖ Hangi sayının 2 katının 5 fazlası 25 tir.
- ❖ Hangi sayının 7 eksiğinin 5 katı 15 tir.
- ❖ Hangi sayının 4 fazlasının 7 katının yarısı 14 tür?
- ❖ Silgilerin sayısının 10 eksiği 53 tür?
- ❖ Bir miktar limonun 3 katının 13 eksiği 26 tanedir?
- ❖ Kaç tane bilyenin 2 katının 4 eksiği 22 eder?
- ❖ Kaç liranın 4 katının 15 fazlası 25 eder?

Doğrusal İlişkiler-2 7.Sınıf Test:42

1-) Aşağıda verilen şekillerdeki kovaları gözlemlen ve bulunan muskütün su miktarıdır. Hangisinde, geçen süre ile kovaldaki su yüksekliği arasında doğrusal bir ilişki vardır?

A) B) C) D) E) F) G) H) I) J) K) L) M) N) O) P) Q) R) S) T) U) V) W) X) Y) Z) AA) AB) AC) AD) AE) AF) AG) AH) AI) AJ) AK) AL) AM) AN) AO) AP) AQ) AR) AS) AT) AU) AV) AW) AX) AY) AZ) BA) BB) BC) BD) BE) BF) BG) BH) BI) BJ) BK) BL) BM) BN) BO) BP) BQ) BR) BS) BT) BU) BV) BW) BX) BY) BZ) CA) CB) CC) CD) CE) CF) CG) CH) CI) CJ) CK) CL) CM) CN) CO) CP) CQ) CR) CS) CT) CU) CV) CW) CX) CY) CZ) DA) DB) DC) DD) DE) DF) DG) DH) DI) DJ) DK) DL) DM) DN) DO) DP) DQ) DR) DS) DT) DU) DV) DW) DX) DY) DZ) EA) EB) EC) ED) EE) EF) EG) EH) EI) EJ) EK) EL) EM) EN) EO) EP) EQ) ER) ES) ET) EU) EV) EW) EX) EY) EZ) FA) FB) FC) FD) FE) FF) FG) FH) FI) FJ) FK) FL) FM) FN) FO) FP) FQ) FR) FS) FT) FU) FV) FW) FX) FY) FZ) GA) GB) GC) GD) GE) GF) GG) GH) GI) GJ) GK) GL) GM) GN) GO) GP) GQ) GR) GS) GT) GU) GV) GW) GX) GY) GZ) HA) HB) HC) HD) HE) HF) HG) HH) HI) HJ) HK) HL) HM) HN) HO) HP) HQ) HR) HS) HT) HU) HV) HW) HX) HY) HZ) IA) IB) IC) ID) IE) IF) IG) IH) II) IJ) IK) IL) IM) IN) IO) IP) IQ) IR) IS) IT) IU) IV) IW) IX) IY) IZ) JA) JB) JC) JD) JE) JF) JG) JH) JI) JJ) JK) JL) JM) JN) JO) JP) JQ) JR) JS) JT) JU) JV) JW) JX) JY) JZ) KA) KB) KC) KD) KE) KF) KG) KH) KI) KJ) KL) KM) KN) KO) KP) KQ) KR) KS) KT) KU) KV) KW) KX) KY) KZ) LA) LB) LC) LD) LE) LF) LG) LH) LI) LJ) LK) LL) LM) LN) LO) LP) LQ) LR) LS) LT) LU) LV) LW) LX) LY) LZ) MA) MB) MC) MD) ME) MF) MG) MH) MI) MJ) MK) ML) MM) MN) MO) MP) MQ) MR) MS) MT) MU) MV) MW) MX) MY) MZ) NA) NB) NC) ND) NE) NF) NG) NH) NI) NJ) NK) NL) NM) NN) NO) NP) NQ) NR) NS) NT) NU) NV) NW) NX) NY) NZ) OA) OB) OC) OD) OE) OF) OG) OH) OI) OJ) OK) OL) OM) ON) OO) OP) OQ) OR) OS) OT) OU) OV) OW) OX) OY) OZ) PA) PB) PC) PD) PE) PF) PG) PH) PI) PJ) PK) PL) PM) PN) PO) PP) PQ) PR) PS) PT) PU) PV) PW) PX) PY) PZ) QA) QB) QC) QD) QE) QF) QG) QH) QI) QJ) QK) QL) QM) QN) QO) QP) QQ) QR) QS) QT) QU) QV) QW) QX) QY) QZ) RA) RB) RC) RD) RE) RF) RG) RH) RI) RJ) RK) RL) RM) RN) RO) RP) RQ) RR) RS) RT) RU) RV) RW) RX) RY) RZ) SA) SB) SC) SD) SE) SF) SG) SH) SI) SJ) SK) SL) SM) SN) SO) SP) SQ) SR) SS) ST) SU) SV) SW) SX) SY) SZ) TA) TB) TC) TD) TE) TF) TG) TH) TI) TJ) TK) TL) TM) TN) TO) TP) TQ) TR) TS) TT) TU) TV) TW) TX) TY) TZ) UA) UB) UC) UD) UE) UF) UG) UH) UI) UJ) UK) UL) UM) UN) UO) UP) UQ) UR) US) UT) UJ) UV) UW) UX) UY) UZ) VA) VB) VC) VD) VE) VF) VG) VH) VI) VJ) VK) VL) VM) VN) VO) VP) VQ) VR) VS) VT) VU) VV) VW) VX) VY) VZ) WA) WB) WC) WD) WE) WF) WG) WH) WI) WJ) WK) WL) WM) WN) WO) WP) WQ) WR) WS) WT) WU) WV) WW) WX) WY) WZ) XA) XB) XC) XD) XE) XF) XG) XH) XI) XJ) XK) XL) XM) XN) XO) XP) XQ) XR) XS) XT) XU) XV) XW) XX) XY) XZ) YA) YB) YC) YD) YE) YF) YG) YH) YI) YJ) YK) YL) YM) YN) YO) YP) YQ) YR) YS) YT) YU) YV) YW) YX) YY) YZ) ZA) ZB) ZC) ZD) ZE) ZF) ZG) ZH) ZI) ZJ) ZK) ZL) ZM) ZN) ZO) ZP) ZQ) ZR) ZS) ZT) ZU) ZV) ZW) ZX) ZY) ZZ)

7-) Aşağıda verilen durumlara ait birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri kurunuz.

❖ Bir sayının 5 katının 7 eksiği

❖ Herhangi bir sayının 3 eksiği

❖ Bir miktar paronun 2 katının 9 fazlası

❖ Bir sayının 8 eksiğinin 3 katı

❖ Bir sayının 4 katının 5 fazlası aynı sayının 3 katının 8 eksiğine eşittir

❖ Bir sayının 2 katının 12 fazlasını 25 tir.

❖ Hangi sayının 3 katının 8 fazlası 32 dir.

❖ Bir miktar limonun 3 katının 13 fazlası 24 limondur.

❖ Bir miktar çileğin 7 kg fazlası 15 tir.

❖ Bir sayının 5 katının 8 eksiğinin yarısı

❖ Bir sayının 8 katı 32 dir.

❖ Hangi sayının 2 katının 5 fazlası 25 tir.

❖ Hangi sayının 7 eksiğinin 5 katı 15 tir.

❖ Hangi sayının 4 fazlasının 7 katının yarısı 14 tür?

❖ Silgilerin sayısının 10 eksiği 53 tür?

❖ Bir miktar limonun 3 katının 13 eksiği 26 tanedir?

❖ Kaç tane bilyenin 2 katının 4 eksiği 22



EK 6. Denklem çözme etkinliği

1 Denklemi Çözelim. $-18 - 6k = 6(1 + 3k)$ www.ortaokulmatematik.org a) $k = -2.67$ 3 numaralı karta gidiniz. b) $k = -1$ 4 numaralı karta gidiniz. c) $k = 1$ 7 numaralı karta gidiniz. d) $k = 6$ 10 numaralı karta gidiniz.	3 Denklemi Çözelim. $-3(4x + 3) + 4(6x + 1) = 43$ www.ortaokulmatematik.org a) $x = 3.25$ 6 numaralı karta gidiniz. b) $x = -4$ 4 numaralı karta gidiniz. c) $x = 4.25$ 5 numaralı karta gidiniz. d) $x = 4$ 9 numaralı karta gidiniz.
2 Denklemi Çözelim. $-(1 + 7x) - 6(-7 - x) = 36$ www.ortaokulmatematik.org a) $x = -\frac{5}{6}$ 7 numaralı karta gidiniz. b) $x = -7$ 1 numaralı karta gidiniz. c) $x = 13$ 8 numaralı karta gidiniz. d) $x = 5$ 10 numaralı karta gidiniz.	4 Denklemi Çözelim. $4x + 7 - 6x = 5 - 4x + 4$ www.ortaokulmatematik.org a) $x = -4$ 3 numaralı karta gidiniz. b) $x = 3$ 1 numaralı karta gidiniz. c) $x = 1$ 7 numaralı karta gidiniz. d) $x = -1$ 5 numaralı karta gidiniz.

5

Denklemi Çözelim.

$$3m = 5(m + 3) - 3$$

www.ortaokulmatematik.org

- a) $m = 0$ 6 numaralı karta gidiniz.
 b) $m = 6$ 2 numaralı karta gidiniz.
 c) $m = 7.5$ 4 numaralı karta gidiniz.
 d) $m = -6$ 1 numaralı karta gidiniz.

7

www.ortaokulmatematik.org

Denklemi Çözelim.

$$2(3x - 4) = 3x + 1$$

- a) $x = 3$ 2 numaralı karta gidiniz.
 b) $x = -2$ 9 numaralı karta gidiniz.
 c) $x = \frac{5}{3}$ 8 numaralı karta gidiniz.
 d) $x = 1$ 5 numaralı karta gidiniz.

6

Denklemi Çözelim.

$$-4k + 2(5k - 6) = -3k - 39$$

www.ortaokulmatematik.org

- a) $k = 1$ 3 numaralı karta gidiniz.
 b) $k = 12$ 2 numaralı karta gidiniz.
 c) $k = 6$ 1 numaralı karta gidiniz.
 d) $k = -3$ 8 numaralı karta gidiniz.
 e) $k = -10$ 10 numaralı karta gidiniz.

8

Denklemi Çözelim.

$$5 + 4x - 7 = 4x - 2 - x$$

www.ortaokulmatematik.org

- a) $x = 0$ 5 numaralı karta gidiniz.
 b) $x = 1$ 4 numaralı karta gidiniz.
 c) $x = -3$ 2 numaralı karta gidiniz.
 d) $x = 2$ 1 numaralı karta gidiniz.

9

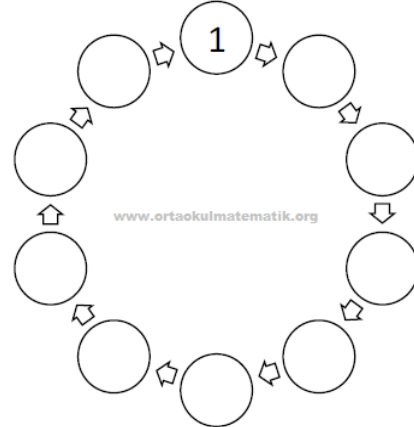
Denklemi Çözelim.

$$5n + 34 = -2(1 - 7n)$$

www.ortaokulmatematik.org

- a) $n = 0$ 7 numaralı karta gidiniz.
 b) $n = 4$ 6 numaralı karta gidiniz.
 c) $n = -3$ 8 numaralı karta gidiniz.
 d) $n = -1.9$ 4 numaralı karta gidiniz.
 e) $n = -4$ 2 numaralı karta gidiniz.

ÇÖZÜM SIRALAMASI



www.ortaokulmatematik.org

10

Denklemi Çözelim.

$$-(7 - 4x) = 9$$

www.ortaokulmatematik.org

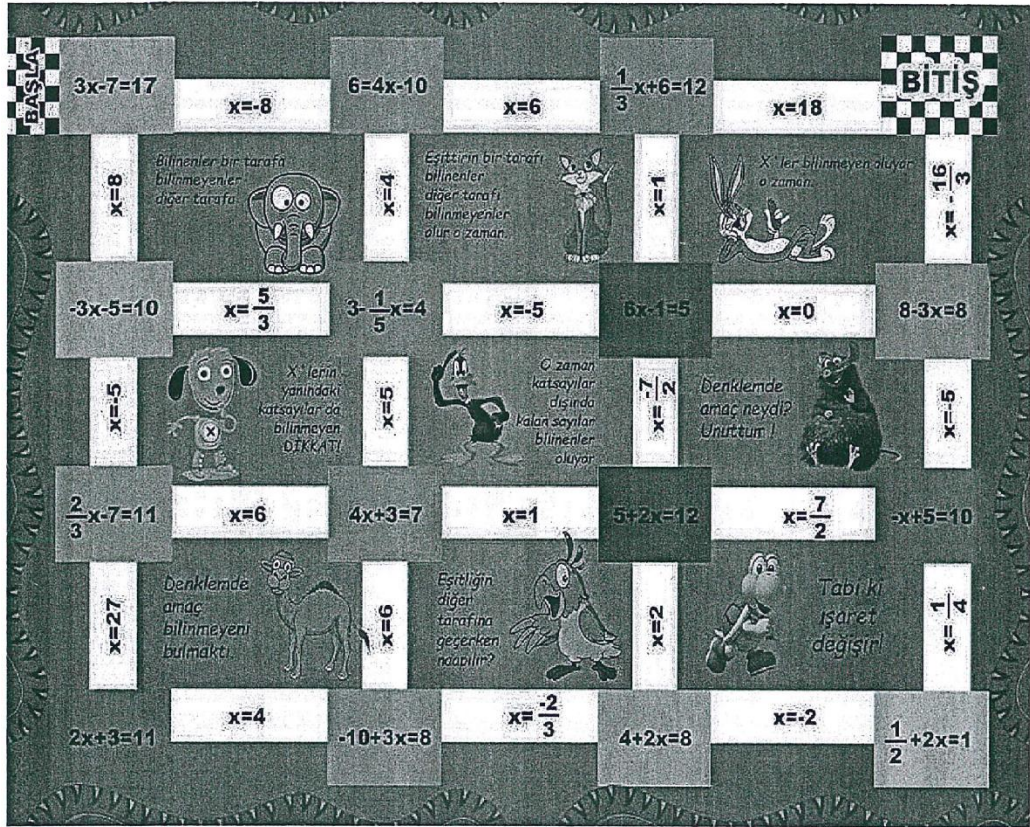
- a) $x = -4$ 6 numaralı karta gidiniz.
 b) $x = 0$ 4 numaralı karta gidiniz.
 c) $x = 1$ 1 numaralı karta gidiniz.
 d) $x = 4$ 3 numaralı karta gidiniz.

ADI :

SOYADI :



EK 7. Denklem çözme etkinlik kağıdı



ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Şanlıurfa’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurumda tamamladı. Lisans öğrenimini Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Bölümünde tamamlayarak 2009 yılında mezun oldu. 2009-2010 eğitim-öğretim yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Yüksek lisans eğitimini 2011 yılında tamamladı. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi ana bilim dalında araştırma görevlisi olarak göreve başladı ve aynı bölümde doktora eğitimine başladı. Halen Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalında görev yapmaktadır.