

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FRAME TEORİ VE AYRILABİLİR OLMAYAN HİLBERT UZAYINDA BESSEL
SİSTEMİ**

YUNUS SAÇLI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. YUSUF ZEREN**

İSTANBUL, 2017

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**FRAME TEORİ VE AYRILABİLİR OLMAYAN HİLBERT UZAYINDA BESSEL
SİSTEMİ**

Yunus SAÇLI tarafından hazırlanan tez çalışması 30.05.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Özgür YILDIRIM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK
İstanbul Ticaret Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında ilk olarak vektör uzayları, metrik uzaylar, normlu uzaylar ve iç çarpım uzayları ile ilgili temel kavramlar verilmiş daha sonra Hilbert uzayı üzerinde frame'ler incelenip ayrılabilir olmayan Hilbert uzayı üzerinde Bessel sistemleri tanıtılmıştır.

Tez çalışmam boyunca her türlü görüş ve düşüncesiyle bana yol gösteren, destek olan, yardım ve katkılarını esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Yusuf ZEREN'e ve hocamızla çalışmalarını sürdüren çalışma grubuna teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım süresinde sağladıkları maddi ve manevi destekle beni hiç yalnız bırakmayan anneme, babama ve biricik ablam Yeliz'e teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2017

Yunus SAÇLI

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.1 Vektör Uzayları	3
2.2 Normlu Uzay ve Banach Uzayları	6
2.3 İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayları	7
2.4 $L^p(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{N})$ Uzayları	10
2.5 Şartsız Yakınsaklık ve Mutlak Yakınsaklık	11
2.6 Hilbert Uzayında Ortonormal Bazlar ve Bessel Dizileri	13
BÖLÜM 3	
HİLBERT UZAYINDA FRAME'LER	15
3.1 Hilbert Uzayında Frame'ler	15
3.2 Sonlu Frame Teoriye Giriş	26
BÖLÜM 4	
AYRILABİLİR OLMAYAN HİLBERT UZAYINDA BESSEL SİSTEMİ	35
4.1 Ayrılabilir Olmayan Hilbert Uzayları	35
4.2 Ayrılabilir Olmayan Hilbert Uzayında Bessel Sistemi	37

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER	40
KAYNAKLAR.....	41
ÖZGEÇMİŞ.....	43



SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümelerinden herhangi birisi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi $= \{1, 2, 3, \dots\}$
$l^2(\mathbb{N})$	$\left\{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n ^2 < \infty, x_n \in \mathbb{F}\right\}$
$Sp A$	A 'nın gereni
$\overline{Sp E}$	E 'nin kapalı lineer gereni
$\bar{A}$	A 'nın kapanışı
$\bar{A} = M$	A , M içinde yoğundur
$\ \cdot\ $	Norm
l^p	p . kuvveti toplanabilir dizilerin kümesi
$L^p(X)$	p . kuvveti integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\ T\ $	T 'nin operatör normu
T^{-1}	T operatörünün tersi
δ_{kj}	Kronecker deltası
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım
$x \perp y$	$\langle x, y \rangle = 0$, iki vektör diktir
T^*	T 'nin eşleniği

FRAME TEORİ VE AYRILABİLİR OLMAYAN HİLBERT UZAYINDA BESSEL SİSTEMİ

Yunus SAÇLI

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tezde Hilbert uzayındaki frame'ler ve ayrılabilir olmayan Hilbert uzaylarında Bessel sistemi konu alınmıştır. Çalışma dört temel bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir. İkinci bölümde tezin bütününde kullanılacak olan temel kavramlar anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde Hilbert uzayındaki frame'ler tanımlanmış ve bu uzay üzerindeki özellikleri incelenmiştir.

Bizim çalışmamız olan dördüncü bölümde ise ayrılabilir olmayan Hilbert uzaylarında Bessel sistemi tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı, frame, bessel sistemi, ayrılabilir olmayan Hilbert uzayı

ABSTRACT

FRAME THEORY AND BESSEL SYSTEM IN NON-SEPARABLE HILBERT SPACE

Yunus SAÇLI

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

This thesis has been subject to frames on Hilbert space and uncountable Bessel system in non-separable Hilbert spaces. Thesis consist of four chapters.

In the first chapter the aim of the thesis and the review of the literature are given. The basic concepts are described in the second chapter, which are used in whole thesis.

In the third chapter properties of frames on Hilbert space are examined.

The fourth chapter of the thesis is the our work. Defined the Bessel system in non-separable Hilbert spaces.

Keywords: Hilbert space, frame, Bessel system, non-separable Hilbert space

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Fourier dönüşümü yüz yılı aşkın bir süredir analiz için önemli bir araç olmuştur. Fakat sinyalin frekansı hakkında bilgi verirken yayılma anı ve süresiyle ilgili bilgileri evrelerinde saklar. D. Gabor [1] bu problemi 1946 yılında sinyal ayrışımına yeni bir yaklaşım getirerek çözmüştür. Gabor'un yaklaşımı kısa sürede bu alanda kabul gördü ve yayıldı. Bunun sebebi bu yöntemin parazitlere karşı direnç sağlaması, iletimde bilgi kayıplarını önlemesi, nicelemede esneklik sağlaması ve bunları yaparken sinyalin önemli karakteristik özelliklerini korumasıydı. Gabor farkında olmadan frame'in temel özelliklerini keşfetmişti.

1952 yılında Duffin ve Schaeffer [2] harmonik olmayan Fourier serilerinde ağır bir problem üzerinde çalışırken resmi olarak ilk kez frame'leri tanımlamışlardır. 1986 yılında ise Daubechies, Grossmann ve Meyer [3] dönüm noktası olan bir çalışmayla frame'lerin daha genel kullanım alanlarına yayılmalarını sağlamıştır. Daha sonra günümüze kadar frame'ler ile ilgili çalışmalar devam etmiş Casazza [4] ve Christensen [5] tarafından önemli kaynaklar oluşturulmuştur. Yakın zamanda da Bilalov [6], [7], [8], [9], [10] önemli çalışmalarda bulunmuştur. Frame'ler alışılmış olarak sinyal ve görüntü işlemede, harmonik olmayan Fourier serilerinde, bilgi sıkıştırmada ve örnekleme teorisinde kullanıldı. Günümüzde ise uygulama alanları giderek artarak teorik ve uygulamalı matematikte, fizikte, mühendislikte ve bilgisayar bilimlerinde yaygın olarak kullanılır hale gelmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı Hilbert uzayı üzerindeki frame'ler konusunda temel bir kaynak oluşturmaktır. Bu nedenle ilk olarak Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan frame'ler anlatılmıştır. Ayrıca tezin bizim çalışmamız olan bölümünde ise ayrılabilir olmayan Hilbert uzayları üzerinde Bessel sistemi tanıtılmıştır.

1.3 Hipotez

Bu tezde, Hilbert uzayındaki frame'ler hakkında temel bir kaynak oluşturduktan sonra ayrılabilir olmayan Hilbert uzayındaki frame'lere giriş için bazı temel tanımları ve teoremleri elde etmek amaçlanmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde konuyla ilgili olarak daha sonraki bölümlerde kullanılacağımız temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1 Vektör Uzayları

Tanım 2.1 $\mathbb{F}$ verilen bir cisim ve X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$$+ : X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y$$

ve

$$\cdot : \mathbb{F} \times X \rightarrow X, (\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$$

şeklinde olsunlar. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(ii) $x + y = y + x$

(iii) $x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in X$

(iv) Her $x \in X$ için $x + x' = 0$ olacak şekilde $x' \in X$ vardır.

(v) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

(vi) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

$$(vii) \alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$$

$$(viii) 1.x = x$$

şartları sağlanıyorsa X kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir. $\mathbb{F}$ 'ye X vektör uzayının skaler cismi denir. $\mathbb{F}$ cisminin $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ya da $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olup olmadığına bağlı olarak X uzayına reel vektör uzayı ya da kompleks vektör uzayı denir, [13].

Tanım 2.2 X ve Y bir aynı skaler $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $L : X \rightarrow Y$ bir dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

özellikliğini sağlıyorsa L 'ye X 'den Y 'ye bir lineer dönüşüm denir. Lineer bir dönüşüm aynı zamanda sürekli ise lineer dönüşüm yerine lineer operatör ifadesi de kullanılır, [13].

Tanım 2.3 X kümesi $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $L : X \rightarrow \mathbb{F}$ dönüşümü lineer ise L 'ye lineer fonksiyonel denir, [13].

Tanım 2.4 X boştan farklı bir küme olmak üzere,

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

dönüşümü her $x, y, z \in X$ için,

$$(i) d(x, y) \geq 0 \text{ ve } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(ii) d(x, y) = d(y, x)$$

$$(iii) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartlarını sağlıyorsa, d 'ye X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine de metrik uzay adı verilir, [13].

Tanım 2.5 X metrik uzayında alınan bir (x_n) dizisi için eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsak (ya da x noktasına yakınsar) denir. x noktasına, (x_n) dizisinin limiti adı verilir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (ya da kısaca $x_n \rightarrow x$) ile gösterilir, [13].

Tanım 2.6 X metrik uzayında alınan bir dizi (x_n) olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n > N$ için,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir, [13].

Tanım 2.7 X bir metrik uzay olmak üzere X 'deki her Cauchy dizisi yakınsak ise yani X 'de bulunan bir limit noktasına sahip ise X uzayı tamdır denir, [13].

2.2 Normlu Uzay ve Banach Uzayları

Tanım 2.8 X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir normdur denir:

$$(i) \quad \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Üçgen eşitsizliği)}$$

$\|\cdot\|$ fonksiyonu ile birlikte $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise normlu uzay adı verilir, [13].

Tanım 2.9 Eğer X normlu vektör uzayı sayılabilir ve yoğun bir alt küme içeririyorsa ayrılabilir denir, [13].

Tanım 2.10 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer X uzayı normdan indirgenen $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğiyle tam ise $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir Banach uzayı adı verilir, [14].

Tanım 2.11 X ve Y birer normlu uzay ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T dönüşümü X 'deki her sınırlı kümeyi, Y 'de sınırlı bir kümeye dönüştürüyorsa T 'ye sınırlı (ya da sürekli) operatör denir.

Diğer bir ifadeyle eğer her $x \in X$ için,

$$\|T(x)\| \leq K \cdot \|x\| \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı bulunabiliyor ise T 'ye sınırlı operatör denir, [14].

Tanım 2.12 T operatörünün normu, $\|T\|$ ile tanımlanır ve (2.1) eşitsizliğini sağlayan en küçük K sabitidir. Diğer bir ifadeyle,

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1 \}$$

olur, [13].

Tanım 2.13 $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olmak üzere T , birebir ve örten ise tersi vardır. Bu durumda T operatörüne tersinirdir denir, [14].

Teorem 2.1 Banach uzayları arasındaki sınırlı, birebir ve örten bir operatör sınırlı bir inverse (terse) sahiptir, [15].

Teorem 2.2 X bir Banach uzayı olsun, $T: X \rightarrow X$ operatörü sınırlı ve $\|I - T\| < 1$ şartını sağlar ise bu durumda T tersinirdir ve

$$T^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T)^k$$

ile birlikte

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}$$

olur, [15].

2.3 İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayları

Tanım 2.14 X , $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki bir vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{F}, (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

$$(i) \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$(iii) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

şartlarını sağlıyorsa X üzerinde bir iç çarpım adını alır. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

Bir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımıyla bir X uzayı $x \in X$ olmak üzere,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

normuyla bir normlu uzaydır, [13].

Tanım 2.15 X bir iç çarpım uzayı olmak üzere eğer X , $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ normuna göre tam ise, Hilbert uzayı adını alır.

Hilbert uzayları için biz bu tezde H yazılımını kullanacağız.

Herhangi bir H Hilbert uzayı, her $x, y \in H$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini sağlar, [13].

Tanım 2.16 H bir Hilbert uzayı olsun. H 'de bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine eğer

$$\overline{\text{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}} = H$$

özelliğine sahipse totaldir denir, [15].

Yardımcı Teorem 2.1 H Hilbert uzayı olmak üzere H uzayındaki bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

$$(i) \quad \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ totaldir.}$$

(ii) Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $\langle f, f_k \rangle = 0$ ise bu durumda $f = 0$ 'dır, [15].

Bir Hilbert uzayı üzerindeki lineer operatörler arasında, fonksiyonel olan $U : H \rightarrow \mathbb{C}$ operatörlerinden sürekli lineer olanlar önemlidir ve Riesz Temsil Teoremi ile karakterize edilebilirler.

Teorem 2.3 (Riesz Temsil Teoremi) $U : H \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in H$ için,

$$Ux = \langle x, y \rangle$$

olacak şekilde bir tek $y \in H$ vardır, [13].

Bu şekilde bir fonksiyonele temsil veren $y \in H$ elemanının tekliği aşağıdaki sonuç ile verilmiştir:

Sonuç 2.1 H bir Hilbert uzayı olsun. Her $z \in H$ için $x, y \in H$ 'nin

$$\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$$

sağladığını kabul edelim. Bu durumda $x = y$ 'dir, [13].

Şimdi de herhangi bir $x \in H$ elemanının normunun, H 'nin birim küresi üzerindeki elemanlar ve x arasındaki iç çarpıma dayanarak yazılabileceğine de belirtelim:

Yardımcı Teorem 2.2 H bir Hilbert uzayı olmak üzere her $x \in H$ için,

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|$$

olur, [15].

Tanım 2.16 H ve K Hilbert uzayları olsun ve U , H uzayından K uzayına sınırlı bir operatör olsun. U 'nun adjoint operatörü her $x \in H$ ve her $y \in K$ için,

$$\langle Ux, y \rangle = \langle x, U^*y \rangle$$

eşitliğini sağlayan bir tek $U^* : K \rightarrow H$ operatörü şeklinde tanımlanır, [13].

Yardımcı Teorem 2.3 $U : H \rightarrow K$ sınırlı bir operatör olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\|U\| = \|U^*\|$ ve $\|UU^*\| = \|U\|^2$ dir.

(ii) U örtendir $\Leftrightarrow$ Her $y \in K$ için $\|U^*y\| > C\|y\|$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır, [15].

Tanım 2.17 Bir $U : H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörü eğer $UU^* = U^*U = I$ ($U^* = U^{-1}$) ise üniterdir denir. U üniter ise, bu durumda her $x, y \in H$ için, $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ sağlanır. Eğer $U = U^*$ ise U 'ya self-adjoint denir. $UU^* = U^*U$ ise U 'ya normal operatör denir.

U self-adjoint olduğunda

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ux, x \rangle|$$

olur.

Self-adjoint operatörlerin kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı, her $x \in H$ için

$$U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow \langle U_1x, x \rangle \leq \langle U_2x, x \rangle$$

şeklinde verilir, [15].

Teorem 2.4 U_1, U_2, U_3 self-adjoint operatörler olsun. Eğer $U_1 \leq U_2$ ve $U_3 \geq 0$ ise $U_1U_3 \leq U_2U_3$ olur, [15].

Self-adjoint operatörlerin önemli bir sınıfını ortogonal projeksiyonlar oluşturur:

Tanım 2.18 H 'nin bir V kapalı alt uzayı verilsin. H 'nin V üzerine ortogonal projeksiyonu $P : H \rightarrow H$ olmak üzere

$$Px = x, \quad x \in V$$

$$Px = 0, \quad x \in V^\perp$$

şeklinde tanımlanan P operatörüdür, [15].

Yardımcı Teorem 2.4 $U : H \rightarrow H$ sınırlı bir operatör olsun. Her $x \in H$ için $\langle Ux, x \rangle = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) H kompleks bir Hilbert uzayı ise bu durumda $U = 0$ 'dır.

(ii) H reel bir Hilbert uzayı ve U self-adjoint ise bu durumda $U = 0$ 'dır, [15].

Tanım 2.19 Eğer her $x \in H$ için $\langle Ux, x \rangle \geq 0$ ise $U : H \rightarrow H$ sınırlı operatörüne pozitifdir denir, [13].

2.4 $L^p(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{N})$ Uzayları

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\mathbb{R})$ uzayları Banach uzaylarının önemli bir sınıfını oluşturmaktadır.

Tanım 2.20 $L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$

olarak tanımlanır. Burada $|f|^p$ nin integrali Lebesgue ölçüsüne göre alınmaktadır.

$L^p(\mathbb{R})$,

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

$p = 2$ durumu önemlidir. Çünkü $L^2(\mathbb{R})$ uzayı,

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

iç çarpımla donatılan $L^2(\mathbb{R})$ uzaylarından sadece biridir. Gerçekten de $L^2(\mathbb{R})$,

$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır.

$L^2(\mathbb{R})$ 'de her $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ için,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği sağlanır, [14].

Tanım 2.21 $l^2(\mathbb{N})$ uzayı ,

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay

$$\langle \{x_k\}, \{y_k\} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \overline{y_k}$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır.

$l^2(\mathbb{N})$ 'de her $\{x_k\}_{k \in I}, \{y_k\}_{k \in I}$ için,

$$\left| \sum_{k \in I} x_k \overline{y_k} \right|^2 \leq \sum_{k \in I} |x_k|^2 \sum_{k \in I} |y_k|^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği sağlanır, [14].

2.5 Şartsız Yakınsaklık ve Mutlak Yakınsaklık

X bir vektör uzayı olmak üzere her $f \in X$ 'in $\{f_k\}$ vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde bazı $c_k \in \mathbb{C}$ katsayıları için,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

şeklinde bir temsile sahip olduğu ve bu $\{f_k\}$ dizilerinin çeşitli formlarının olduğunu bilmek fonksiyonel analizde gözlemlediğimiz çoğu uzayda sonlu bir $\{f_k\}$ dizisiyle yapılamamaktadır. Burada $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi aracılığıyla f 'nin temsilini sonsuz bir seri verecektir. Bu sebeple sonsuz serilerin yakınsaklığı ile ilgili bazı açıklamalar yapalım:

Tanım 2.22 X normlu uzayında bir $\{f_k\}$ dizisi alalım. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| \rightarrow 0 \text{ sağlanıyorsa } \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \text{ serisinin } f \in X \text{ 'e yakınsar denir, [11].}$$

Tanımdaki bu şart sağlanıyorsa $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ yazılabilir. Bu tanımda $\{f_k\}$ dizisi belli bir sırada oluşturulmuştur. Ancak burada, $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisinin yakınsama özelliğinin sadece $\{f_k\}$ dizisi ve $\{c_k\}$ katsayılarına bağlı olmadığını aynı zamanda sıralamanın da önemli olduğunu belirtmekte fayda vardır.

Örneğin en çok bilinen Banach uzayı örneklerinde $\mathbb{R}$ uzayında bir $\{\alpha_k\}$ dizisi için

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ serisi yakınsak olabilir, fakat doğal sayıların belli herhangi bir σ permütasyonu için $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(k)}$ ıraksak olabilmektedir. İşte bu sebepten aşağıdaki ikinci yakınsama çeşidini vermemiz bizim için önemlidir.

Tanım 2.23 X normlu uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi alalım. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}$ serisi $\mathbb{N}$ kümesinin bütün σ permütasyonları için yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisine şartsız yakınsaktır denir, [11].

Bu durumda serinin limiti toplama sırasına bakılmaksızın aynı kalır.

Tanım 2.24 X normlu uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi alalım. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi mutlak yakınsaktır denir, [11].

Teorem 2.5 X normlu uzayında bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi alalım. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi mutlak yakınsak ise şartsız yakınsaktır, [11].

2.6 Hilbert Uzaylarında Ortonormal Bazlar ve Bessel Diziler

Tanım 2.25 H bir Hilbert uzayı olsun. H üzerinde $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. Eğer $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$ oluyorsa $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormal bazdır denir, [14].

Teorem 2.6 (Bessel Eşitsizliği) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi H Hilbert uzayı üzerinde ortonormal bir dizi olsun. Her $x \in H$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

sağlanır, [14].

Yardımcı Teorem 2.5 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi H Hilbert uzayında olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ serisi tüm

$\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ aileleri için yakınsak olsun. Bu durumda,

$$T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow H$$

$$T \{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

şeklinde sınırlı lineer operatörü tanımlanır. Bu operatörün adjoint operatörü ise

$$T^* : H \rightarrow l^2(\mathbb{N})$$

$$T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$$

şeklinde olup

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2, \quad \forall f \in H$$

sağlanır, [5].

Tanım 2.26 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi H Hilbert uzayında olmak üzere her $f \in H$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

ilacak şekilde bir $B > 0$ sabiti varsa $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine Bessel dizisi denir.

Bu eşitsizliği sağlayan herhangi bir B sayısına da $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için Bessel sınırı denir, [5].

Teorem 2.7 Her ayrılabilir H Hilbert uzayı ortonormal bir baza sahiptir, [5].

Tanım 2.27 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesi H Hilbert uzayı üzerinde ortonormal bir baz olmak üzere sınırlı, birebir ve örten $U : H \rightarrow H$ operatörü tanımlanmış olsun. Bu durumda $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesine H için bir Riesz bazıdır denir, [5].

Önerme 2.1 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesi H uzayı için bir Riesz bazı olsun. Bu durumda her $f \in H$ için,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

olacak şekilde $A, B > 0$ sabitleri vardır. A sabiti için en büyük değer $\frac{1}{\|U^{-1}\|^2}$, B sabiti

içinse en küçük değer $\|U\|^2$ olur, [5].

Önerme 2.2 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, H uzayı için ortonormal bir baz olmak üzere her $x \in H$ için

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

olur, [16].

Önerme 2.3 (Parseval Eşitliği) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, H uzayı için ortonormal bir baz olmak üzere her $x \in H$ için

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

olur, [16].

BÖLÜM 3

HİLBERT UZAYINDA FRAME'LER

Bu bölümde Hilbert uzayındaki frame'lerin genel tanımından ve özelliklerinden bahsedilecek ve bazı frame örnekleri verilerek frame'lere ilişkin bir teori sunulacaktır.

3.1 Hilbert Uzayında Frame'ler

Bir H Hilbert uzayında bir $\{f_k\}$ bazının temel özelliği, her $f \in H$ 'nin bazdaki f_k elemanlarının bir sonsuz lineer kombinasyonu olarak,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k \quad (3.1)$$

şeklinde temsil edilmesidir. Burada $c_k(f)$ katsayıları tektir. Bir frame, her $f \in H$ için

(3.1)'deki temsile imkan sağlayan H uzayındaki $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ elemanlarının bir dizisidir.

Ancak bu temsilde bulunan $c_k(f)$ katsayılarının tek türlü olması gerekmez. Böylece bir frame baz olmayabilir.

Şimdi bu bölümde kullanacağımız temel kavramlara değineceğiz:

$H \neq \{0\}$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.

Tanım 3.1 Bir H Hilbert uzayındaki elemanların bir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine, her $f \in H$ için,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.2)$$

eşitsizliğini sağlayan $0 < A \leq B < \infty$ katsayıları bulunabiliyor ise bir frame denir.

Tanımdaki eşitsizliği sağlayan A ve B sayıları sırasıyla, alt ve üst frame sınırları olarak adlandırılır. Her $f \in H$ için frame eşitsizliğini sağlayan en büyük $A > 0$ ve en küçük $B > 0$ sayıları optimal frame sınırları olarak adlandırılır.

Bir $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ frame'i Bessel dizisi olduğundan,

$$T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow H \quad (3.3)$$

$$T \{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

sınırlı ve lineer bir operator tanımlar. Bu T operatörüne sentez (pre-frame) operatörü denir. T 'nin adjoint operatörü,

$$T^* : H \rightarrow l^2(\mathbb{N}) \quad (3.4)$$

$$T^* f = \left\{ \langle f, f_k \rangle \right\}_{k=1}^{\infty}$$

olur ve bu T^* operatörü analiz operatörü olarak adlandırılır.

Eğer $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi H için bir frame ise bu durumda frame operatörü olarak adlandırılan $S = TT^*$ operatörü,

$$S : H \rightarrow H, Sf = TT^* f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır ve H üzerinde tersinir bir operatördür.

Her $f \in H$ için,

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \quad (3.6)$$

sağlanır. Gerçekten de;

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k, f \right\rangle \\ &= \langle \langle f, f_1 \rangle f_1 + \langle f, f_2 \rangle f_2 + \langle f, f_3 \rangle f_3 + \dots, f \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle f, f_1 \rangle \overline{\langle f, f_1 \rangle} + \langle f, f_2 \rangle \overline{\langle f, f_2 \rangle} + \langle f, f_3 \rangle \overline{\langle f, f_3 \rangle} + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2
\end{aligned}$$

olur, [5].

Tanım 3.2 H uzayı için bir frame eğer;

$A = B$ ise tight frame,

$A = B = 1$ ise parseval frame,

her $i, j \in \mathbb{N}$ için $\|f_i\| = \|f_j\|$ ise uniform frame,

her $k \in \mathbb{N}$ için $\|f_k\| = 1$ ise normalleştirilmiş frame,

uniform şartına ek olarak bir de $A = B = 1$ şartı sağlanıyor ise uniform (parseval) tight frame,

frame'deki elemanların herhangi birisi kaldırıldığında frame olma durumu bozuluyorsa exact frame,

eğer frame'den en az bir tane eleman kaldırılabilir ve bu elemanı kaldırma işleminden sonra frame teşkil eden vektörlerin kümesi hala H için frame olarak kalıyorsa (belki farklı bir frame sınırı ile) overcomplete (inexact) olarak adlandırılır, [15].

Eğer bir $\{f_k\}$ ailesi, H uzayı için bir frame ise bu durumda $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ olur. Yani eğer $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f \in H$ bütün f_k 'lara dik ise bu durumda frame eşitsizliği olarak adlandırılan (3.2) eşitsizliği $f = 0$ olduğunu gösterir.

Sık sık H uzayında total olmayan dizilerle uğraştığımız olur. Total olmayan bu diziler, H için bir frame oluşturmazlar fakat bu dizilerin elemanlarının kapalı lineer gereni için bir frame oluştururlar:

Tanım 3.3 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H uzayında bir dizi olsun. Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için bir frame ise $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesine bir frame dizisi denir, [5].

Örnek 3.1 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, H için bir ortonormal baz olmak üzere;

(i) $\{e_k\}$ ortonormal bazı $A=B=1$ ile bir tight frame'dir. Ayrıca $\{e_k\}$ exact frame'dir:

$\{e_k\} = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ ailesi ortonormal baz olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2$$

Parseval eşitliğini sağlar ve $A=B=1$ frame sınırı ile bir tight frame'dir. $\{e_k\}$ ailesinden

$k \neq m$ olmak üzere herhangi bir e_m elemanı çıkarıldığı takdirde belirli bir $f \in H$ için

$\sum_{k \neq m} |\langle f, e_k \rangle|^2 = 0$ olup, buradan $\{e_k\}$ ailesinin bir frame teşkil etmediği sonucuna varılır.

(ii) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisindeki her bir elemanın tekrarlanmasıyla oluşan

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ ailesi $A=B=2$ sınırları ile tight ve inexact bir frame

oluşturur:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 + \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + 2|\langle f, e_2 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

olur, $\{e_k\} = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ ailesi ortonormal baz olduğundan Parseval eşitliğini sağlar.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = 2\|f\|^2$$

sağlanır dolayısıyla $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ ailesi $A=B=2$ sınırları ile bir tight frame'dir.

Bu aile aynı zamanda inexact bir frame'dir:

Çünkü $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesinden herhangi bir eleman kaldırıldığında dizinin frame olma durumu bozulmayacaktır. Örneğin kaldırılan böyle bir eleman f_3 olsun. Yeni $\{f_k\}_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{\infty}$ dizisi $\{e_1, e_1, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ şeklinde olacaktır.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + 2|\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= 2\|f\|^2 \end{aligned}$$

olup $B=2$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için bir üst sınırdır. Yine,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + 2|\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &> |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup $A=1$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için bir alt sınırdır. f_3 elemanının kaldırılmasıyla yeniden oluşturulan $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi H uzayı için bir frame oluşturduğundan, örnekte verilen $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ ailesi inexact bir frame'dir. Görüldüğü gibi sadece alt

sınır değişmiş ve frame olma özelliği kaybolmamıştır. Bu şekilde davranarak, hangi eleman kaldırılırsa kaldırılırsın bu dizinin frame olma durumunun bozulmayacağı görülür.

(iii) Yine sadece e_1 elemanı tekrar edilmek üzere, $A=1, B=2$ sınırları ile,

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}$ frame'i elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= 2\|f\|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup $A=1$ ve $B=2$ 'dir.

(iv) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots\right\}$ ailesini ele alalım. Yani $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$

ailesi $l \in \mathbb{N}$ olmak üzere, her bir vekt r  l kez tekrarlayarak $\frac{1}{\sqrt{l}}e_l$ şeklinde yazılan bir

dizi olsun. Bu durumda $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A=B=1$ sınırlarıyla tight bir frame'dir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 + \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{k}} e_k \right\rangle \right|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

olup $A = B = 1$ frame sınırları ile $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ tight bir frame'dir.

Örnek 3.2 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesi H için bir ortonormal baz olmak üzere;

(i) $\left\{e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{3}, \frac{e_4}{4}, \dots\right\}$ ailesi H için bir ortogonal baz olmasına rağmen frame

oluşturmamaktadır çünkü $B=1$ üst sınırı bulunmasına rağmen bir A alt sınırı içermemektedir.

(ii) $\{2e_1, e_2, e_3, \dots\}$ ailesi $A=1, B=2$ frame sınırları ile bir frame oluşturur:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \dots \\
&= |\langle f, 2e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&= 2 |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\
&= 2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \dots \\
&= |\langle f, 2e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

olup $A=1$ ve $B=2$ 'dir.

Yardımcı Teorem 3.1 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, S frame operatörü ve A, B sınırları ile bir frame olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanır:

(i) $Sf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k$ ile tanımlanan $S: H \rightarrow H$ operatörü, $A.I \leq S \leq B.I$ özelliğini

sağlayan ve H üzerinde sınırlı, self-adjoint, pozitif ve tersinir bir operatördür.

(ii) $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, S^{-1} frame operatörü ve B^{-1}, A^{-1} sınırları ile bir frame'dir.

(iii) Eğer A ve B , $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için optimal frame sınırları ise, B^{-1} ve A^{-1} sınırları da $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için optimaldir, [5].

İspat (i): S 'nin sınırlı olduğunu gösterelim. S frame operatörü iki sınırlı operatörün (analiz ve sentez operatörleri) bileşkesi olduğundan,

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\| \|T^*\| = \|T\|^2 \leq B$$

olup S sınırlıdır.

$$S^* = (TT^*)^* = TT^* = S$$

olup, S self-adjonittir.

(3.2) eşitsizliğinde (3.6) eşitliği kullanılırsa,

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f \rangle \leq B\|f\|^2$$

olup $A, B, \|f\|^2 \geq 0$ olduğundan $\langle Sf, f \rangle \geq 0$ olur. Sonuç olarak S pozitif operatördür.

Bu eşitsizliği kullanarak,

$$AI \leq S \leq BI$$

$$-BI \leq -S \leq -AI$$

$$0 \leq BI - S \leq BI - AI$$

$$0 \leq I - B^{-1}S \leq \frac{B-A}{B}I$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} \|I - B^{-1}S\| &= \sup_{\|f\|=1} \left| \langle (I - B^{-1}S)f, f \rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle \left(\frac{B-A}{B}I \right) f, f \right\rangle \right| \\ &= \frac{B-A}{B} \sup_{\|f\|=1} \|f\|^2 \\ &= \frac{B-A}{B} = 1 - \frac{A}{B} < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.2 gereğince, bu sonuç S 'nin tersinir olduğunu göstermektedir.

(ii): S , self-adjoint olduğundan, S^{-1} 'de self-adjointtir. Her $f \in H$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle f, S^{-1}f_k \rangle \right|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle S^{-1}f, f_k \rangle \right|^2 \\ &\leq B \|S^{-1}f\|^2 \\ &\leq B \|S^{-1}\|^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup, bu ise $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin bir Bessel dizisi olduğunu gösterir. Yani $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için frame operatörü iyi tanımlıdır. Şimdi S^{-1} frame sınırı ile $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin bir frame olduğunu göstereceğiz. Bunun için,

$$S : H \rightarrow H$$

$$Sf = TT^* f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k$$

tanımını kullanacağız:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle S^{-1}f_k &= S^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k \\ &= S^{-1}SS^{-1}f \\ &= S^{-1}f \end{aligned} \tag{3.7}$$

Bu, $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi için, frame operatörünün S^{-1} olduğunu göstermektedir.

$$AI \leq S \leq BI$$

Eşitsizliğini S^{-1} operatörü ile göz önüne alırsak, Teorem 2.4 kullanılarak, her $f \in H$ için,

$$B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$$

ve buradan

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \langle S^{-1}f, f \rangle \leq A^{-1}\|f\|^2$$

yazılabilir. (3.7) eşitliğini de göz önünde bulundurursak, her $f \in H$ için,

$$\begin{aligned} B^{-1}\|f\|^2 &\leq \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle S^{-1}f_k, f \right\rangle \leq A^{-1}\|f\|^2 \\ &\Rightarrow B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k \rangle \langle S^{-1}f_k, f \rangle \leq A^{-1}\|f\|^2 \\ &\Rightarrow B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle f, S^{-1}f_k \rangle \right|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, B^{-1}, A^{-1} frame sınırları ile bir frame'dir.

(iii): A , $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için optimal alt sınır olsun ve $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için optimal üst sınırın $C < A^{-1}$ olduğunu kabul edelim. $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ frame'i için (ii) 'yi uygulayarak $\{f_k\} = \{(S^{-1})^{-1}S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $C^{-1} > A$ alt sınırına sahip olduğunu buluruz. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A^{-1} optimal üst sınırına sahiptir. $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ için optimal alt sınırın B^{-1} olduğu da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 3.1 Frame'ler topolojik izomorfizmalar altında korunur.

Yani $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, H Hilbert uzayı için bir frame ve $T: H \rightarrow K$ bir topolojik izomorfizm ise $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$, K Hilbert uzayı için bir frame oluşturur. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, A ve B frame sınırlarına sahip ise $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A\|T^{-1}\|^{-2}$ ve $B\|T\|^2$ frame sınırlarına sahiptir.
- (ii) Eğer $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, S frame operatörüne sahip ise $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$, TST^* frame operatörüne sahiptir, [11].

İspat Her $f \in K$ için

$$TST^*f = T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle T^*f, f_k\rangle f_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, Tf_k\rangle Tf_k$$

olduğunu biliyoruz. Yardımcı Teorem 3.1 gereğince, eğer

$$A\|T^{-1}\|^{-2}I \leq TST^* \leq B\|T\|^2I$$

olduğu gösterilirse $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin hem (i) hem de (ii) özelliklerini sağlayan bir frame olduğu sonucuna ulaşılabacaktır.

Eğer $f \in H$ ise bu durumda

$$\langle TST^*f, f \rangle = \langle S(T^*f), (T^*f) \rangle$$

olur. Sonuç olarak

$$AI \leq S \leq BI$$

olduğundan

$$A\langle IT^*f, T^*f \rangle \leq \langle ST^*f, T^*f \rangle \leq B\langle IT^*f, T^*f \rangle$$

ve buradan

$$A\|T^*f\|^2 \leq \langle TST^*f, f \rangle \leq B\|T^*f\|^2 \quad (3.8)$$

elde edilir. Ayrıca T topolojik izomorfizm olduğundan,

$$\frac{\|f\|}{\|T^{-1}\|} = \frac{\|f\|}{\|(T^*)^{-1}\|} \leq \|T^*f\| \leq \|T^*\| \|f\| = \|T\| \|f\| \quad (3.9)$$

(3.8) ve (3.9) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse,

$$A \frac{\|f\|^2}{\|T^{-1}\|^2} \leq \langle TST^*f, f \rangle \leq B\|T\|^2 \|f\|^2$$

ve buna denk olan

$$A\|T^{-1}\|^2 I \leq TST^* \leq B\|T\|^2 I$$

istenilen ifadesine ulaşılır. Buradan Yardımcı Teorem 3.1 gereğince (i) ve (ii) sağlanır.

3.2 Sonlu Frame Teoriye Giriş

Tanım 3.3 H^N sonlu boyutlu bir Hilbert uzayı olmak üzere H^N üzerinde seçilen bir $\{f_k\}_{k=1}^M$ dizisine, her $f \in H^N$ için

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^M |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

eşitsizliğini sağlayan $0 < A \leq B < \infty$ katsayıları bulunabiliyor ise bir frame denir.

Tanımdaki eşitsizliği sağlayan A ve B sayıları sırasıyla, alt ve üst frame sınırları olarak adlandırılır. Her $f \in H$ için frame eşitsizliğini sağlayan en büyük $A > 0$ ve en küçük $B > 0$ sayıları optimal frame sınırları olarak adlandırılır, [17].

Tanım 3.4 H^N uzayı için bir frame eğer;

$A = B$ ise tight frame,

$A = B = 1$ ise parseval frame,

her $i, j \in \mathbb{N}$ için $\|f_i\| = \|f_j\|$ ise uniform frame,

her $k \in \mathbb{N}$ için $\|f_k\| = 1$ ise normalleştirilmiş frame,

uniform şartına ek olarak bir de $A = B = 1$ şartı sağlanıyor ise uniform (parseval) tight frame,

frame'deki elemanların herhangi birisi kaldırıldığında frame olma durumu bozuluyorsa exact frame,

Eğer frame'den en az bir tane eleman kaldırılabilir ve bu elemanı kaldırma işleminden sonra frame teşkil eden vektörlerin kümesi hala H için frame olarak kalıyorsa (belki farklı bir frame sınırı ile) overcomplete (inexact) olarak adlandırılır, [17].

Örnek 3.3 $\{e_k\}_{k=1}^N$, H^N için bir ortonormal baz olmak üzere;

i) $\{f_k\} = \{e_1, 0, e_2, 0, \dots, e_N, 0\}$ ailesi, H^N uzayı için Parseval frame'dir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, 0 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, 0 \rangle|^2 + \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + 0 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + 0 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + 0 + \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup verilen sistem bir Parseval frame'dir. Bu örnekten görüldüğü üzere frame sıfır elemanını içerebilir.

ii) $\left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}e_N, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}e_N\right\}$ ailesi de H^N uzayı bir

Parseval frame oluşturur:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N(N+1)/2} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_2}{\sqrt{2}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right\rangle \right|^2 + \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + |\langle f, e_4 \rangle|^2 + \dots \\
&= \sum_{k=1}^N |\langle f, e_k \rangle|^2 \\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

olup verilen sistem yine bir Parseval frame'dir.

iii) $\{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots, e_N, e_N\}$ ailesi H^N uzayı için bir 2-tight frame oluşturur:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2N} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 + \dots \\
&= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + \dots \\
&= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + 2|\langle f, e_2 \rangle|^2 + \dots \\
&= 2 \sum_{k=1}^N |\langle f, e_k \rangle|^2
\end{aligned}$$

olup 2-tight frame'dir.

iv) Benzer şekilde e_1 elemanın $N+1$ kez tekrar edilmesiyle oluşturulan $\{e_1, e_1, \dots, e_1, e_2, e_3, \dots, e_N\}$ ailesi H^N uzayı için 1 ve $N+1$ frame sınırları ile bir frame oluşturur.

Örnek 3.4 Parseval frame için gerçekten ilginç örneklerden birisi de $\mathbb{R}^2$ için Mercedes-

Benz frame olarak adlandırılmış $\left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$ ailesidir.

Bu frame aynı zamanda eşit açılıdır.

Örnek 3.5 e_1 elemanının tekrarı ile elde edilen $\{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots, e_N\}$ ailesi, H^N uzayı için bir frame oluşturur. Bu frame için $A=1$ optimal alt sınır, $B=2$ optimal üst sınırdır:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^N |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= 2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 + |\langle f, f_3 \rangle|^2 + |\langle f, f_4 \rangle|^2 \dots \\ &= |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &= 2|\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 + |\langle f, e_3 \rangle|^2 + \dots \\ &\geq \sum_{k=1}^N |\langle f, e_k \rangle|^2 \\ &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

olup $A=1$ ve $B=2$ ile bir frame'dir.

Şimdi bu sınırların optimal olduğunu gösterelim:

$B' < 2$ olmak üzere 2 'den küçük bir üst sınır B' olsun. Verilen aile, H^N uzayı için bir frame olduğundan her $f \in H^N$ için sağlanmalıdır.

$f = e_1$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} |\langle f, f_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{N+1} |\langle e_1, f_k \rangle|^2 = |\langle e_1, e_1 \rangle|^2 + |\langle e_1, e_1 \rangle|^2 + |\langle e_1, e_2 \rangle|^2 + |\langle e_1, e_3 \rangle|^2 \dots \\ &= |\langle e_1, e_1 \rangle|^2 + |\langle e_1, e_1 \rangle|^2 \\ &= 2 |\langle e_1, e_1 \rangle|^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde optimal üst sınır 2 'dir. Benzer şekilde optimal alt sınırın 1 olduğu da gösterilebilir.

Tanım 3.5 Bir $\{f_k\}_{k=1}^M$ frame'i için de bir Bessel dizisi olduğu için yine benzer şekilde,

$$T: l^2(\mathbb{N}) \rightarrow H^N$$

$$T\{c_k\}_{k=1}^M = \sum_{k=1}^M c_k f_k$$

sınırlı ve lineer bir operator tanımlar. Bu T operatörüne sentez (pre-frame) operatörü denir. T 'nin adjoint operatörü,

$$T^*: H^N \rightarrow l^2(\mathbb{N})$$

$$T^* f = \{\langle f, f_k \rangle\}_{k=1}^M$$

olur ve bu T^* operatörü analiz operatörü olarak adlandırılır.

Eğer $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi H^N için bir frame ise bu durumda frame operatörü olarak adlandırılan $S = TT^*$ operatörü,

$$S: H \rightarrow H, Sf = TT^* f = \sum_{k=1}^M \langle f, f_k \rangle f_k$$

şeklinde tanımlanır ve H^N üzerinde tersinir bir operatördür.

Her $f \in H$ için,

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{k=1}^M |\langle f, f_k \rangle|^2$$

sağlanır, [17].

Teorem 3.2 H^N uzayı için $\{f_n\}_{n=1}^M$ bir frame olmak üzere S frame operatörü için $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ özdeğerler olsun. Buna göre frame için λ_1 değeri optimal üst sınır, λ_N değeri ise optimal alt sınırdır, [17].

İspat $\{e_n\}_{n=1}^N$ ailesi sırasıyla $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ değerlerine karşılık gelen özvektörler olsun.

Herhangi bir $x \in H^N$ değeri için $x = \sum_{i=1}^N \langle x, e_i \rangle e_i$ yazılır ve buradan,

$$Sx = \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M |\langle x, f_k \rangle|^2 &= \langle Sx, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{i=1}^N \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i |\langle x, e_i \rangle|^2 \\ &\leq \lambda_1 \sum_{i=1}^N |\langle x, e_i \rangle|^2 \\ &= \lambda_1 \|x\|^2 \end{aligned}$$

yani $B_{op} \leq \lambda_1$ sonucuna ulaşılır.

$B_{op} = \lambda_1$ olduğu ise,

$$\sum_{i=1}^M |\langle e_1, f_i \rangle|^2 = \langle Se_1, e_1 \rangle = \langle \lambda_1 e_1, e_1 \rangle = \lambda_1$$

ile sağlanır. Benzer şekilde optimal üst sınırın da λ_N olduğu gösterilebilir.

Bir sinyalin analizi tipik olarak sadece frame katsayıları dikkate alınarak gerçekleştirilebilir. Eğer görev bir sinyal iletimiyse, sinyali kendi frame katsayılarından yeniden yapılandırma olanağı ve bunun etkili bir şekilde yapılması kritik önem taşır. Ortonormal bir baz olduğu zaman bu yapılandırmanın nasıl olduğunu göstermiştik. Bununla birlikte fazla sisteme göre yapılandırma çok daha hassastır ve dual frame adı verilen başka bir frame'in kullanılmasını gerektirir.

Tanım 3.6 $\{f_k\}_{k=1}^M$ ailesi H^N uzayı üzerinde S frame operatörü ile birlikte bir frame olsun. O halde $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^M$ ailesine $\{f_k\}_{k=1}^M$ frame'inin dual frame'i denir, [15].

Teorem 3.3 $\{f_k\}_{k=1}^M$ ailesi H^N uzayı için S frame operatörü ile birlikte bir frame olsun.

O halde her $x \in H^N$ için,

$$x = \sum_{k=1}^M \langle x, f_i \rangle S^{-1} f_i = \sum_{k=1}^M \langle x, S^{-1} f_i \rangle f_i$$

olur, [15].

İspat Frame operatörünün tanımından,

$$Sx = TT^*x = \sum_{k=1}^M \langle x, f_k \rangle f_k$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlik ve $x = SS^{-1}x, x = S^{-1}Sx$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$x = SS^{-1}x = \sum_{k=1}^M \langle S^{-1}x, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^M \langle x, S^{-1}f_k \rangle f_k$$

$$x = S^{-1}Sx = S^{-1} \left(\sum_{k=1}^M \langle x, f_k \rangle f_k \right) = \sum_{k=1}^M \langle x, f_k \rangle S^{-1}f_k$$

olup ispat tamamlanır.

Örnek 3.6 $\{e_k\}_{k=1}^N$, H^N uzayı için bir ortonormal baz olsun. $\{f_k\}_{k=1}^M = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}$ frame'ini ele alalım,

$$Sf = \sum_{k=1}^M \langle f, f_k \rangle f_k$$

olduğunu biliyoruz. Frame operatörü tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}
 Sf_1 &= \sum_{k=1}^M \langle e_1, f_k \rangle f_k \\
 &= \langle e_1, f_1 \rangle f_1 + \langle e_1, f_2 \rangle f_2 + \langle e_1, f_3 \rangle f_3 + \langle e_1, f_4 \rangle f_4 + \dots \\
 &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle e_2 + \langle e_1, e_3 \rangle e_3 + \dots \\
 &= 2e_1
 \end{aligned}$$

ve $f_2 = e_1$ olduğundan $Sf_2 = 2e_1$ bulunur. İşlemlere devam edersek,

$$\begin{aligned}
 Sf_3 &= \sum_{k=1}^M \langle e_2, f_k \rangle f_k \\
 &= \langle e_2, f_1 \rangle f_1 + \langle e_2, f_2 \rangle f_2 + \langle e_2, f_3 \rangle f_3 + \langle e_2, f_4 \rangle f_4 + \dots \\
 &= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_2 \rangle e_2 + \langle e_2, e_3 \rangle e_3 + \dots \\
 &= e_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Sf_4 &= \sum_{k=1}^M \langle e_3, f_k \rangle f_k \\
 &= \langle e_3, f_1 \rangle f_1 + \langle e_3, f_2 \rangle f_2 + \langle e_3, f_3 \rangle f_3 + \langle e_3, f_4 \rangle f_4 + \dots \\
 &= \langle e_3, e_1 \rangle e_1 + \langle e_3, e_1 \rangle e_1 + \langle e_3, e_2 \rangle e_2 + \langle e_3, e_3 \rangle e_3 + \dots \\
 &= e_3
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuçlar kullanılarak,

$$Sf_1 = 2e_1 \Rightarrow S^{-1}f_1 = \frac{1}{2}e_1$$

$$Sf_2 = 2e_1 \Rightarrow S^{-1}f_2 = \frac{1}{2}e_1$$

$$Sf_3 = e_2 \Rightarrow S^{-1}f_3 = e_2$$

$$Sf_4 = e_3 \Rightarrow S^{-1}f_4 = e_3$$

...

ve

$$\begin{aligned}\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^M &= \{S^{-1}f_1, S^{-1}f_2, S^{-1}f_3, \dots\} \\ &= \left\{\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, e_2, e_3, \dots\right\}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $f \in H^N$ elemanının frame yardımıyla temsili

$$\begin{aligned}f &= \sum_{k=1}^M \langle f, S^{-1}f_k \rangle f_k \\ &= \frac{1}{2} \langle f, e_1 \rangle e_1 + \frac{1}{2} \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2 + \langle f, e_3 \rangle e_3 + \dots\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Önerme 3.1 $\{f_k\}_{k=1}^M$ ailesi S frame operatörü ile birlikte H^N uzayında bir frame olsun.

O halde $\left\{S^{-\frac{1}{2}}f_k\right\}_{k=1}^M$ ailesi H^N için bir Parseval frame oluşturur, [12].

İspat $\left\{S^{-\frac{1}{2}}f_k\right\}_{k=1}^M$ ailesinin Parseval eşitliğini sağladığını göstermemiz gerekmektedir.

Teorem 3.3 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}x &= S^{-\frac{1}{2}}SS^{-\frac{1}{2}}x = S^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^M \left\langle S^{-\frac{1}{2}}x, f_k \right\rangle f_k \\ &= S^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^M \left\langle x, S^{-\frac{1}{2}}f_k \right\rangle f_k \\ &= \sum_{k=1}^M \left\langle x, S^{-\frac{1}{2}}f_k \right\rangle S^{-\frac{1}{2}}f_k\end{aligned}$$

bulunur, böylece $\left\{S^{-\frac{1}{2}}f_k\right\}_{k=1}^M$ ailesi bir Parseval frame'dir.

AYRILABİLİR OLMAYAN HİLBERT UZAYINDA BESSEL SİSTEMİ

Buraya kadarki çalışmalarımız ayrılabilir Hilbert uzayları üzerindeydi. Bu bölümde ise ayrılabilir olmayan Hilbert uzayları üzerinde çalışacağız.

4.1 Ayrılabilir Olmayan Hilbert Uzayları

Yardımcı Teorem 4.1 H bir Hilbert uzayı olmak üzere $\{e_\alpha\} \subset H$ ortonormal bir sistem olsun. Bu durumda her $f \in H$ için $\{\alpha \in I : \langle f, e_\alpha \rangle \neq 0\}$ kümesi sayılabilir, [21].

İspat Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = \left\{ \alpha \in I : |\langle f, e_\alpha \rangle| \geq \frac{1}{n} \right\}$ kümesini tanımlayalım.

$E = \{\alpha \in I : \langle f, e_\alpha \rangle \neq 0\}$ kümesi için, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ yazabiliriz.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için E_n kümesinin sonsuz elemanlı olduğunu kabul edelim.

$\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir bir alt küme olsun. Bessel eşitsizliğinden,

$$\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için E_n kümesi sonlu elemanlıdır.

Sonlu kümelerin sayılabilir birleşimi de sayılabilir olduğundan E kümesi sayılabilir.

Yardımcı Teorem 4.2 Eğer $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert uzayı sayılabilir olmayan bir ortonormal sistem içeriyorsa, H ayrılabilir değildir, [21].

İspat I sayılabilir olmayan kümelerin indeksi olmak üzere H uzayını ayrılabilir bir Hilbert uzayı kabul edelim. $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$, H üzerinde ortonormal bir sistem olsun. Böylece H uzayın geren bir $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ortonormal sistemini içerir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = \{\alpha \in I : \langle f, e_\alpha \rangle \neq 0\}$ olmak üzere Yardımcı Teorem 4.1 gereğince E_n sayılabilir ve böylece $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ sayılabilir.

Bir $\alpha_0 \in I$ için $\langle f_n, e_{\alpha_0} \rangle = 0$ bulunabilir. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ uzayı geren bir ortonormal sistem olduğundan,

$$e_{\alpha_0} = \sum_{n=1}^\infty \langle e_{\alpha_0}, f_n \rangle f_n = 0$$

elde edilir ve bu sonuç $\|e_{\alpha_0}\| = 1$ durumu ile çelişir.

$$\langle f, g \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım ile $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 4.1 Sayılabilir olmayan ortonormal bir sistem içeren Hilbert uzayına ayrılabilir olmayan Hilbert uzayı denir, [21].

Örnek 4.1 Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $e_\alpha(t) = e^{i\alpha t}$ olacak şekilde $e_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. H ayrılabilir olmayan bir Hilbert uzayı olmak üzere $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$, H üzerinde sayılabilir olmayan bir ortonormal sistemdir:

Sayılabılır olmadığını göstermek için iki $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ elemanını ele alalım

$$e_{\alpha_1} = e_{\alpha_2} \Leftrightarrow e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)t} = 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

olduğu ve eğer $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ ise $e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{\pi}{(\alpha_1 - \alpha_2)}} = -1$ olduğu görülür. Buradan her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|e_\alpha\| = 1$ olduğu bulunur. Ortogonalite için ise ayrı $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $R > 0$ için,

$$\left| \frac{1}{2R} \int_{-R}^R e_{\alpha_1}(t) \overline{e_{\alpha_2}(t)} dt \right| = \frac{1}{2R} \left| \int_{-R}^R e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)t} dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2R|\alpha_1 - \alpha_2|} \left| e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)R} - e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)R} \right| \\
&\leq \frac{1}{R|\alpha_1 - \alpha_2|}
\end{aligned}$$

olup $R \rightarrow \infty$ iken sıfıra yakınsar. Yardımcı Teorem 4.2'ye göre H ayrılabilir olmayan bir Hilbert uzayıdır.

Şimdi ise ayrılabilir olmayan Hilbert uzayları üzerinde Bessel sistemini tanımlayacağız. Bu konuyla ilişkili çalışmalar [6], [7], [8], [9], [10], [18], [19], [20] incelendikten sonra I sayılabilir olmayan kümelerin bir indeksi ve H ayrılabilir olmayan bir Hilbert uzayı olmak üzere:

4.1 Ayrılabilir Olmayan Hilbert Uzayında Bessel Sistemi

Tanım 4.2 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi için eğer $\forall \omega \subset I : |\omega| \leq \theta_0$ ve $\forall x \in H$ için,

$$\sum_{\alpha \in \omega} |\langle x, x_\alpha \rangle|^2 \leq M \|x\|^2 \quad (4.1)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$, H uzayı üzerinde bir iç çarpım ve $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ olmak üzere bir $M > 0$ sabiti bulunabiliyorsa bir Bessel sistemidir denir.

Eğer $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi H uzayı üzerinde bir Bessel sistemi ise (4.1) eşitsizliği gereğince

$I(x) = \{\alpha \in I : \langle x, x_\alpha \rangle \neq 0\}$ kümesi her $x \in H$ için sayılabilir.

Teorem 4.1 Bir $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset H$ ailesi ve $\forall \lambda \in l^2(I^c)$ için yakınsak olan

$$\sum_{\alpha \in I(\lambda)} \lambda_\alpha x_\alpha$$

serisini ele alalım. Bu durumda,

$$\left\| \sum_{\alpha \in I(\lambda)} \lambda_{\alpha} x_{\alpha} \right\| \leq M \|\lambda\|_{l^2(I^C)}, \quad \forall \lambda \in l^2(I^C)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır ve

$$T\lambda = \sum_{\alpha \in I(\lambda)} \lambda_{\alpha} x_{\alpha}, \quad \forall \lambda \in l^2(I^C)$$

şeklindeki $T : l^2(I^C) \rightarrow H$ operatörü tanımlanır.

Teorem 4.2 $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \subset H$ ailesi ve $\forall \lambda \in l^2(I^C)$ için yakınsak olan

$$\sum_{\alpha \in I(\lambda)} \lambda_{\alpha} x_{\alpha}$$

serisini ele alalım. Bu durumda $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ ailesi $I_x = \{\alpha \in I : \langle x, x_{\alpha} \rangle_H \neq 0\}$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, H uzayı üzerinde bir iç çarpım) ve $\forall x \in H : \text{card} I_x \leq \theta_0$ için H üzerinde Bessel sistemidir. Ayrıca T Teorem 4.1'deki operatör olmak üzere

$$\sum_{\alpha \in I_x} |\langle x, x_{\alpha} \rangle_H|^2 \leq \|T\|^2 \|x\|^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 4.3 $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ ailesi H üzerinde bir Bessel sistemi olsun. $\inf \{M : (4.1) \text{ eşitsizliğini sağlayan sabitler}\}$ sayısına $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ sisteminin Bessel normu (B-norm) denir ve $B[\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I}]$ ile gösterilir.

Teorem 4.3 H üzerinde bir $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ ailesini alalım. $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ ailesinin bir Bessel sistemi olması için gerek ve yeter şart

$$T\lambda = \sum_{\alpha \in I(\lambda)} \lambda_{\alpha} x_{\alpha}$$

$$T : l^2(I^C) \rightarrow H$$

şeklinde tanımlanan T operatörünün sınırlı olmasıdır. Bu durumda $B[\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in I}] = \|T\|^2$ olur.

Teorem 4.4 H uzayı üzerinde bir $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi ve H üzerinde her yerde yoğun $V \subset H$ kümesini alalım. $I_x = \{\alpha \in I : \langle x, x_\alpha \rangle_H \neq 0\}$ olmak üzere $\forall x \in V : \text{card} I_x \leq \theta_0$ için,

$$\sum_{\alpha \in I} |\langle x, x_\alpha \rangle_H|^2 \leq B \|x\|^2, \quad \forall x \in V$$

eşitsizliğini sağlayan $B > 0$ sabiti bulunabilirse $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi H üzerinde bir Bessel sistemi oluşturur.



BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin dördüncü bölümünde ayrılabilir olmayan Hilbert uzayı üzerinde Bessel sistemleri tanıtılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Tezden yola çıkarak bundan sonraki çalışmalarda ise ayrılabilir olmayan Hilbert uzayı üzerinde frame'lerin incelenmesi amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Gabor, D., (1946). "Theory of communication", J. Inst. Electr. Eng., 93(26): 429-441.
- [2] Duffin, R. ve Schaeffer, A.C., (1952). "A Class of Nonharmonic Fourier series", Trans. Amer. Math. Soc., 72(2): 341-366.
- [3] Daubechies, I., Grossmann, A. ve Meyer, Y., (1986). "Painless Nonorthogonal Expansions", J. Math Phys., 27: 1271-1283.
- [4] Casazza, G.P., (2000). "The art of Frame Theory", Taiwanese Journal of Math., 4(2): 129-202.
- [5] Christensen, O., (2003). An Introduction to Frame and Riesz Bases, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.
- [6] Bilalov, B.T. ve Guseinov, Z.G., (2008). "p-Bessel and p-Hilbert systems and p-bases", Dokl. NANA, 64(4): 3-8.
- [7] Bilalov, B.T. ve Guseinov, Z.G., (2009). "K-Bessel and K-Hilbert systems and K-bases", Doklady Mathematics, 80(3): 826-828.
- [8] Bilalov, B.T. ve Mamedova, Z.V., (2012). "On the Frame Properties of Some Degenerate Trigonometric System", Dokl. Acad. Nauk , 68(5): 14-18.
- [9] Bilalov, B.T. ve Guliyeva, F.A., (2012). "On the Frame Properties of Degenerate System of Sines", Journal of Function Spaces and Applications, 2012: 1-12.
- [10] Bilalov, B.T. ve Guliyeva, F.A., (2015). "t-Frames and Their Noetherian Perturbation", Complex Analysis and Operator Theory, 9(7): 1609-1631.
- [11] Heil, C., (1997). A Basis Theory Primer, School of Mathematics Georgia Enstitute of Technology, Atlanta, Georgia.
- [12] Han, D., Kornelson, K., Larson, D. ve Weber, E., (2007). Frames for Undergraduates, American Mathematical Society.
- [13] Soykan, Y., (2012). Fonksiyonel Analiz, Nobel Akademik Yayıncılık, 2. Baskı.
- [14] Kreyszig, E., (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley-Sons Inc., New York.

- [15] Christensen, O., (2008). Frames and Bases, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.
- [16] Casazza, G.P., (2015). "A Brief Introduction to Hilbert Space Frame Theory and its Application", AMS Short Course: Joint Mathematics Meeting, 10-13 January 2015, San Antonio.
- [17] Casazza, G.P. ve Kutyniok, G., (2013). Finite Frames, Birkhauser, Boston.
- [18] Bilalov, B.T. ve Hashimov, Sh.M., (2014). "On Decomposition In Banach Spaces", Proceeding of the IMM of NAS of Azerbaijan, 40(2): 97-106.
- [19] Sadigova, S.R., (2013). "On Frame Properties of Degenerate Systems In Hardy Classes", Caspian Journal of Applied Mathematics Ecology and Economics, 1(1): 97-103.
- [20] Sadigova, S.R. ve Ismailov, I., (2014). "On Frames of Double and Unary Systems in Lebesgue Spaces", Pensee Journal, 76(4): 189-202.
- [21] Rosenzweig, M., Construction of a Nonseparable Hilbert Space, <https://matthewhr.files.wordpress.com/2012/09/construction-of-non-separable-hilbert-space.pdf>, 2 Mayıs 2017.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Yunus SAÇLI
Doğum Tarihi ve Yeri :06.10.1991 / Kadıköy
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :yunussaccli@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2017
Lisans	Matematik	Marmara Üniversitesi	2013
Lise	Fen Bilimleri	Suadiye Hacı Mustafa Tarman Lisesi	2009

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014	MEB	Matematik Öğretmeni
2013	Türkiye İş Bankası A.Ş.	Memur

YAYINLARI

Bildiri

1. Saçlı, Y. ve Zeren, Y., (2017). “Uncountable Bessel System in Non-separable Hilbert Spaces”, International Conference on Mathematics and Engineering, 10-12 May 2017, İstanbul.

