EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

PSEUDO-BCI CEBİRLERİ ÜZERİNE

Sinem BULUT

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alev FIRAT

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.01.01

Sunuş Tarihi:22.09.2017

Bornova-İzmir

2017

Sinem BULUT tarafından hazırlanan YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan ''Pseudo-BCI Cebirleri Üzerine (On Pseudo-BCI Algebras)'' başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 22.09.2017 tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/ oy~~çokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri **İmza**

Jüri Başkanı: Prof .Dr. Alev FIRAT

Rapotör Üye: Prof. Dr. Oya ÖZBAKIR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Pseudo-BCI Cebirleri Üzerine" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

22.09.2017

Sinem BULUT

ÖZET

PSEUDO-BCI CEBİRLERİ ÜZERİNE

BULUT, Sinem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Alev FIRAT

Ağustos, 2017, 61 sayfa

Bu tezde cebirsel bir yapı olan pseudo-BCI cebirlerinin tanım ve temel özellikleri, pseudo-BCI cebirlerinde atomlar, dallar, medyaller, idealler ve p-yarıbasit pseudo BCI cebirleri incelenmiştir. Birinci bölümde, tezin konusu tanıtılmış, konunun çalışılma amacı ve süreci özetlenmiştir. İkinci bölümde, Georgescu ve Iorgulescu nun 2001 yılında yayınlanan, Dymek in 2012 de yayınlanan, Jun, Kim ve Neggers ın 2006 da yayınlanan, Hao ve Li nin 2004 yılında yayınlanan makaleleri ve Hungerford un 1974 yılında yayınlanan kitabı baz alınarak sonraki böümlerin kolay anlaşılması için gerekli bazı tanım ve uyarılar verilmiştir. Ayrıca BCK-cebirleri ve BCI-cebirleri arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Üçüncü bölümde, Jun, Kim ve Neggers ın 2006 yılında yayınlanan, Dudek ve Jun un 2008 yılında yayınlanan, Lee ve Park ın 2009 yılında yayınlanan ve Dymek in 2012 de yayınlanan makaleleri baz alınarak pseudo-BCI cebirlerinin tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. Pseudo-BCK cebirleri ve pseudo-BCI cebirleri arasındaki fark incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Dymek in 2012 de yayınlanan ve Jun, Kim ve Neggers ın 2006 da yayınlanan makaleleri baz alınarak pseudo-BCI cebirlerinde atomlar, dallar, medyaller ve p-yarıbasit pseudo-BCI cebirleri olmak üzere pseudo-BCI cebirleri dört altbaşlıkta detaylandırılmıştır. Bu bölümde bu yapıların birbirleriyle olan ilişkilerine değinilmiştir. Ayrıca "Bir pseudo-BCI cebri ne zaman bir grup yapısı gösterir?" sorusu cevap bulmuştur. Beşinci bölümde, Lee ve Park ın 2009 yılında yayınlanan, Dymek in 2012 de yayınlanan ve Jun, Kim ve Neggers ın 2006 da yayınlanan makaleleri baz alınarak pseudo-BCI ideali kavramı tanıtılmış ve genel özellikleri incelenmiştir. Bir pseudo-BCI altcebrin ne zaman bir pseudo-BCI ideali olacağı üzerinde durulmuştur. Altıncı bölümde, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ve devamında yapılacak olan çalışmalar bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: BCK-Cebirleri, BCI-Cebirleri, Pseudo-BCK Cebirleri, Pseudo-BCI Cebirleri.

ABSTRACT

ON PSEUDO-BCI ALGEBRAS

BULUT, Sinem

MSc in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Alev FIRAT

August, 2017, 61 pages

In this thesis, definition and basic properties of BCI-algebras, atoms, branches, medial and ideals of pseudo-BCI algebras and p-semisimple pseudo-BCI algebras are investigated. In the first section, the subject of the thesis is introduced, the goal of working on this area and the development process of the subject are summarized. In the second section, by primiraly considering the paper of Georgescu and Iorgulescu which is published in 2001 , the paper of Dymek which is published in 2012, the paper of Jun, Kim and Neggers which is published in 2006, the paper of Hao and Li which is published in 2004 and the book of Hungerford which is published in 1974, some definitions and remarks are given which are necessary for easy understanding of next sections. Also, the connection between BCK-algebras and BCI-algebras is given. In the third section, by primiraly considering the paper of Jun, Kim and Neggers which is published in 2006, the paper of Dudek and Jun which is published in 2008, the paper of Lee and Park which is published in 2009 and the paper of Dymek which is published in 2012, definition and some basic properties of pseudo-BCI algebras are given and the difference between pseudo-BCK algebras and pseudo-BCI algebras is investigated. In the forth section, by primarily considering the paper of Dymek which is published in 2012 and the paper of Jun, Kim and Neggers which is published in 2006, four subtitles which are atoms, branches and medials of pseudo-BCI algebras and p-semisimple pseudo-BCI algebras are investigated. In this section, the relations of these structures with each other are mentioned. Also, the question which is "When does a pseudo-BCI algebras turn into a group?" is answered. In the fifth section, by primiraly considering the paper of Lee and Park which is published in 2009, the paper of Dymek which is published in 2012 and the paper of Jun, Kim and Neggers which is published in 2006, definition and some basic properties of pseudo-BCI ideals are introduced. It is investigated when a pseudo-BCI subalgebra is a pseudo-BCI ideal. In the sixth section, the conclusion of this work and the future work are given.

Key Words: BCK-Algebras, BCI-Algebras, Pseudo-BCK Algebras, Pseudo-BCI Algebras.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmamı sonlandırmamda yardımlarını esirgemeyen, lisans ve lisansüstü eğitim hayatım boyunca her zaman destek olan, bilgi birikimini ve tecrübelerini hem eğitim hayatım boyunca hem de özel hayatımda bir yol gösterici olarak aldığım tez danışmanım çok sevgili Prof. Dr. Alev FIRAT'a fazlasıyla teşekkür ederim. Ayrıca tez çalışmalarım boyunca beni her halimle hoş gören sevgili eşime ve aileme teşekkür etmeyi de bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1958 yılında C. C. Chang tarafından MV(Çok Değerli)-cebirleri kavramı çalışılmıştır. Ardından 1966 yılında Y. Imai ve K. Iséki BCK-cebirleri ve BCI-cebirleri kavramlarını tanımlayıp bunlar üzerine birçok çalışma yapmıştır. BCI-cebirleri, fonksiyonel programlama dilinde kombinatorik lojik uygulamalarında BCI-sisteminin cebirsel bir ifadesidir. BCI-cebirleri adı ise kombinatorik lojikte B, C ve I kombinatörlerinden meydana gelmiştir. 2001 yılında G. Georgescu ve A. Iorgulescu, BCK-cebirlerinin bir genişlemesi olan pseudo-BCK cebirleri kavramını ortaya atmıştır. Pseudo-BCI cebirleri kavramı W. A. Dudek ve Y. B. Jun tarafından 2008 yılında BCI-cebirlerinin bir genişlemesi olarak sunulmuştur. Ayrıca G. Dymek, K. J. Lee ve C. H. Park, Y. B. Jun, H. S. Kim ve J. Neggers tarafından da incelenmiştir. Bu çalışmada, onların çalışmalarını detaylandırarak pseudo-BCI cebirleri üzerinde durulacaktır. Pseudo-BCI cebirlerinin temel özellikleri, atomları, dalları, medyali, p-yarıbasitliği ve idealleri incelenecektir. Ayrıca kategorisel anlamda bir pseudo-BCI cebri ile bir grup yapısı karşılaştırılacaktır.

2. ÖNBİLGİLER

2.1. BCI-Cebirlerinin Tanım ve Özellikleri

Tanım 2.1. *(Georgescu ve Iorgulescu, 2001) Aşağıdaki aksiyomları sağlayan* $(2,0)$ *tipindeki bir* $(X,*,0)$ *yapısına bir* ***BCI-cebri*** *denir: Her* $x,y,z \in X$ *için*

- $((x*y)*(x*z))*(z*y) = 0$,
- $(x*(x*y))*y = 0$,
- $x*x = 0$,
- $x*y = 0$ *ve* $y*x = 0$ *ise* $x = y$

olur. Ayrıca her $x \in X$ *için*

- $0*x = 0$

ise X *e bir* ***BCK-cebri*** *denir.*

Uyarı 2.1 *(Jun et al., 2006) Herhangi bir* X *BCI-cebri için*

$$x*y = 0 \Longleftrightarrow x \leq y$$

ile tanımlı " $\leq$ *" bağıntısı* X *üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.*

Tanım 2.2 *(Hao ve Li, 2004)* X *bir BCI-cebri ve* I, X *in boştan farklı bir altkümesi olsun. O zaman*

- $0 \in I$,
- *Her* $x,y \in X$ *için* $x*y \in I$ *ve* $y \in I$ *ise* $x \in I$

koşulları sağlanırsa I *ya* X *in bir* ***BCI-ideali*** *denir.*

2.2. Kategori ve Kategorisel Denklik

Tanım 2.3.*(Hungerford, 1974)* $A,B,C,...$ *ile gösterilen nesnelerin bir* $\mathcal{C}$ *sınıfı ile*

(i) $\mathcal{C}$ *deki her bir* A,B *nesne çifti için ayrık kümelerin* $hom(A,B)$ *ile gösterilen bir sınıfı (*$hom(A,B)$ *nin bir* f *elemanına* A *dan* B *ye bir morfizma denir ve* $f : A \longrightarrow B$ *ile gösterilir) ve*

(ii) $\mathcal{C}$ *nin nesnelerinin her bir* (A,B,C) *üçlüsü için bir*

$$hom(B,C) \times hom(A,B) \longrightarrow hom(A,C)$$

*fonksiyonu ($f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ morfizmaları için bu fonksiyon $(g, f) \longrightarrow g \circ f$ şeklinde yazılır ve $g \circ f : A \longrightarrow C$ ye f ile g nin **terkibi** denir.) verildiğinde eğer aşağıdaki özellikler sağlanrsa $\mathcal{C}$ ye bir **kategori** denir:*

***(I) Birleşme özelliği:** $\mathcal{C}$ nin $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ ve $h : C \longrightarrow D$ morfizmaları için*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

eşitliği sağlanır.

***(II) Birim:** $\mathcal{C}$ nin her bir $\mathcal{B}$ nesnesi ve herhangi $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ morfizmaları için*

$$I_B \circ f = f \quad \text{ve} \quad g \circ I_B = g$$

*olacak şekilde bir $I_B : B \longrightarrow B$ morfizması vardır. Bir $\mathcal{C}$ kategorisinin bir $f : A \longrightarrow B$ morfizmasına eğer $\mathcal{C}$ de $g \circ f = I_A$ ve $f \circ g = I_B$ olacak şekilde bir $g : B \longrightarrow A$ morfizması varsa buna bir **denklik** denir. Eğer iki denkliğin terkibi tanımlıysa bu terkip yine bir denkliktir. Eğer $f : A \longrightarrow B$ bir denklik ise A ile B ye **denk nesneler** denir.*

3. PSEUDO-BCI CEBİRLERİNİN TANIM VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1. *(Jun et al., 2006) X herhangi bir küme, "$\leq$", X üzerinde bir ikili bağıntı "$*$" ve "$\circ$", X üzerinde ikili işlemler ve "0", X in bir sabit elemanı olmak üzere $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ yapısı eğer aşağıdaki aksiyomları sağlayor ise $\mathbb{X}$ e bir* ***pseudo-BCI cebri*** *denir: Her $x, y, z \in X$ için*

($\boldsymbol{a_1}$) $(x * y) \circ (x * z) \leq z * y$,
$(x \circ y) * (x \circ z) \leq z \circ y$,

($\boldsymbol{a_2}$) $x * (x \circ y) \leq y$,
$x \circ (x * y) \leq y$,

($\boldsymbol{a_3}$) $x \ \leq x$,

($\boldsymbol{a_4}$) $x \leq y, \ y \leq x \implies x = y$,

($\boldsymbol{a_5}$) $x \leq y \iff x * y = 0 \iff x \circ y = 0$

olur. Ayrıca her $x \in X$ için

($\boldsymbol{a_6}$) $0 \leq x$

ise $\mathbb{X}$ e ***pseudo-BCK cebri*** *denir.*

Uyarı 3.1. *(Jun et al., 2006) Her $x, y \in X$ için*

$$x * y = x \circ y$$

koşulunu sağlayan her $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ pseudo-BCI cebri bir BCI-cebridir.

Uyarı 3.2. *(Jun et al., 2006) Her pseudo-BCK cebri bir pseudo-BCI cebridir.*

Önerme 3.1. *(Dudek ve Jun, 2008) $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ bir pseudo-BCI cebiri olsun. O zaman her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşullar sağlanır:*

($\boldsymbol{b_1}$) $x \leq 0 \implies x = 0$.

($\boldsymbol{b_2}$) $x \leq y \implies z * y \leq z * x$,
$z \circ y \leq z \circ x$.

($\boldsymbol{b_3}$) $x \leq y, \ \ y \leq z \implies x \leq z$.

($\boldsymbol{b_4}$) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$.

($\boldsymbol{b_5}$) $x * y \leq z \iff x \circ z \leq y$.

($\boldsymbol{b_6}$) $(x * y) * (z * y) \leq x * z$,

$(x \circ y) \circ (z \circ y) \leq x \circ z$.

($\boldsymbol{b_7}$) $x \leq y \implies x * z \leq y * z$,

$x \circ z \leq y \circ z$.

($\boldsymbol{b_8}$) $x * 0 = x = x \circ 0$.

($\boldsymbol{b_9}$) $x * (x \circ (x * y)) = x * y$,

$x \circ (x * (x \circ y)) = x \circ y$.

Kanıt. ($\boldsymbol{b_1}$) *Her* $x \in X$ *için* $x \leq 0$ *olsun. O zaman sırasıyla* (a_5), (a_3) *ve* (a_2) *den*

$$\begin{aligned} 0 \circ x &= (x * 0) \circ x \\ &= (x * (x \circ x)) \circ x \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $0 \leq x$ *bulunur. Hipotezden* $x \leq 0$ *ve* $0 \leq x$ *olduğundan* (a_4) *den* $x = 0$ *bulunur.*
($\boldsymbol{b_2}$) $x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *olsun. O zaman*

$$x * y = 0 \quad ve \quad x \circ y = 0$$

olur. Buradan (a_1) *ve hipotezden*

$$(z * y) \circ (z * x) \leq x * y = 0$$

olur. (b_1) *den*

$$(z * y) \circ (z * x) = 0$$

bulunur. (a_5) *den*

$$z * y \leq z * x$$

elde edilir.

Şimdi de (a_1) *ve hipotezden*

$$(z \circ y) * (z \circ x) \leq x \circ y = 0$$

olur. Böylece (b_1) *den*

$$(z \circ y) * (z \circ x) = 0$$

bulunur. Buradan

$$(z \circ y) \leq (z \circ x)$$

elde edilir.

(***b₃***) $x, y, z \in X$ *için* $x \leq y$ *ve* $y \leq z$ *olsun. O zaman* (b_2) *den*

$$x * z \leq x * y$$

olur. Hipotezden $x \leq y$ *olduğundan* $x * y = 0$ *bulunur. O zaman*

$$x * z \leq x * y = 0$$

elde edilir. (b_1) *den* $x * z = 0$ *olur. Böylece* $x \leq z$ *bulunur.*

(***b₄***) $x, y, z \in X$ *için* (a_2) *den* $x * (x * z) \leq z$ *olur. Buradan* (b_2) *ve* (a_1) *den*

$$\begin{aligned}(x * y) \circ z &\leq (x * y) \circ (x * (x \circ z)) \\ &\leq (x \circ z) * y\end{aligned}$$

olur. Ayrıca (a_2) *den*

$$x \circ (x * y) \leq y$$

olur ve buradan (b_2) *ve* (a_1) *den*

$$\begin{aligned}(x \circ z) * y &\leq (x \circ z) * (x \circ (x * y)) \\ &\leq (x * y) \circ z\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$(x * y) \circ z \leq (x \circ z) * y \quad \textit{ve} \quad (x \circ z) * y \leq (x * y) \circ z$$

elde edilir. (a_4) *den*

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$$

olur.

(***b₅***) $(\Rightarrow)$ *Her* $x, y, z \in X$ *için* $x * y \leq z$ *ise o zaman* (a_5) *ve* (b_4) *den*

$$\begin{aligned}0 &= (x * y) \circ z \\ &= (x \circ z) * y\end{aligned}$$

olur ve (a_5) *den*

$$(x \circ z) * y = 0 \implies x \circ z \leq y$$

olur.

$(\Leftarrow)$ *Her* $x, y, z \in X$ *için* $x \circ z \leq y$ *ise o zaman* (a_5) *ve* (b_4) *den*

$$\begin{aligned} 0 &= (x \circ z) * y \\ &= (x * y) \circ z \end{aligned}$$

bulunur ve (a_5) *den*

$$(x * y) \circ z = 0 \implies x * y \leq z$$

olur. Böylece

$$x * y \leq z \iff x \circ z \leq y$$

elde edilir.

(***b*₆**) *Her* $x, y, z \in X$ *için* (a_1) *den* $(x * y) \circ (x * z) \leq z * y$ *yazılabilir.*

(b_5) *den yukarıdaki ifade düzenlenirse*

$$(x * y) * (z * y) \leq x * z$$

bulunur.

Benzer şekilde (a_1) *den* $(x \circ y) * (x \circ z) \leq z \circ y$ *yazılabilir.*

(b_5) *den yukarıdaki ifade düzenlenirse*

$$(x \circ y) \circ (z \circ y) \leq x \circ z$$

bulunur.

(***b*₇**) $x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *olsun.* (a_5) *den*

$$x * y = 0 \quad ve \quad x \circ y = 0$$

olur. (b_6) *ve hipotezden*

$$\begin{aligned} (x * y) * (z * y) &\leq x * z \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ (z \circ y) &\leq x \circ z \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (b_1) *den*

$$(x * y) * (z * y) = 0 \quad \textit{ve} \quad (x \circ y) \circ (z \circ y) = 0$$

bulunur. (a_5) *den*

$$(x * y) \leq (z * y) \quad \textit{ve} \quad (x \circ y) \leq (z \circ y)$$

elde edilir.

($\boldsymbol{b_8}$) $x, y \in X$ *için* (a_2) *den*

$$x * (x \circ y) \leq y \quad \textit{ve} \quad x \circ (x * y) \leq y$$

olur. Burada $y = 0$ *alınırsa*

$$x * (x \circ 0) \leq 0 \quad \textit{ve} \quad x \circ (x * 0) \leq 0$$

elde edilir. (b_1) *den*

$$x * (x \circ 0) = 0 \quad \textit{ve} \quad x \circ (x * 0) = 0$$

olur ve böylece (a_5) *den*

$$x \leq x \circ 0 \quad \textit{ve} \quad x \leq x * 0$$

bulunur.

Diğer taraftan sırasıyla (b_4), (a_3) *ve tekrar* (a_3) *den*

$$\begin{aligned}(x \circ 0) * x &= (x * x) \circ 0 \\ &= 0 \circ 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(x * 0) \circ x &= (x \circ x) * 0 \\ &= 0 * 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. (a_5) *den*

$$x \circ 0 \leq x \quad \textit{ve} \quad x * 0 \leq x$$

olur. Böylece (a_4) *den*

$$x * 0 = x = x \circ 0$$

elde edilir.

(***b₉***) $x, y \in X$ *için* (a_2) *de* y *yerine* $x * y$ *alınırsa*

$$x * (x \circ (x * y)) \leq x * y \quad \textit{ve} \quad x \circ (x * (x \circ y))$$

elde edilir.

Diğer taraftan sırasıyla (a_1), (b_4) *ve* (a_3) *den*

$$\begin{aligned}(x * y) \circ (x * (x \circ (x * y))) &\leq (x \circ (x * y)) * y \\ &= (x * y) \circ (x * y) \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(x \circ y) * (x \circ (x * (x \circ y))) &\leq (x * (x \circ y)) \circ y \\ &= (x \circ y) * (x \circ y) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (b_1) *den*

$$(x * y) \circ (x * (x \circ (x * y))) = 0 \quad \textit{ve} \quad (x \circ y) * (x \circ (x * (x \circ y))) = 0$$

olur ve (a_5) *den*

$$x * y \leq x * (x \circ (x * y)) \quad \textit{ve} \quad x \circ y \leq x \circ (x * (x \circ y))$$

elde edilir. Böylece (a_4) *den*

$$x * (x \circ (x * y)) = x * y \quad \textit{ve} \quad x \circ (x * (x \circ y)) = x \circ y$$

bulunur.

$\square$

Örnek 3.1. *$X = \{0, a, b, c\}$ olsun. X kümesi üzerinde " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın:*

*	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
c	c	b	b	0

o	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
c	c	c	a	0

O zaman $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ bir pseudo-BCK cebridir ve bu yüzden bir pseudo-BCI cebridir.

Örnek 3.2. *$X = \{0, a, b, c, d\}$ olsun. X kümesi üzerinde " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın:*

*	0	a	b	c	d
0	0	a	0	0	0
a	a	0	a	a	a
b	b	a	0	0	0
c	c	a	c	0	0
d	d	a	c	c	0

o	0	a	b	c	d
0	0	a	0	0	0
a	a	0	a	a	a
b	b	a	0	0	0
c	c	a	c	0	0
d	d	a	d	b	0

O zaman her $x \in X$ için $0 * x \neq 0$ ve $0 \circ x \neq 0$ olduğundan $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ bir öz pseudo-BCI cebridir.

Örnek 3.3. *(Lee ve Park, 2009) $X_1 = [0, \infty)$ ve " $\leq$ " X_1 üzerinde adi sıralama bağıntısı olsun. X_1 üzerinde " $*$ " ve " $\circ$ " ikili işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın: Her $x, y \in X_1$ için*

$$x * y := \begin{cases} 0 & , \quad x \leq y \\ \frac{2x}{\pi} \arctan(\ln(\frac{x}{y})) & , \quad y < x \end{cases}$$

$$x \circ y := \begin{cases} 0 & , \quad x \leq y \\ xe^{-\tan(\frac{\pi y}{2x})} & , \quad y < x \end{cases}$$

olsun. O zaman $\mathbb{X}_1 = (X_1, \leq, *, \circ, 0)$ bir pseudo-BCK cebridir ve bu yüzden bir pseudo-BCI cebridir.

Örnek 3.4. *(Dymek, 2012) $X_2 = \mathbb{R}^2$ olsun. X_2 üzerindeki "$\leq$" ikili bağıntısı ve "$*$" ve "$\circ$" ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın: Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_2$ için*

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, (y_1 - y_2)e^{-x_2}),$$
$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2 e^{x_1 - x_2}),$$
$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (0, 0) = (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)$$

olsun. O zaman $\mathbb{X}_2 = (X_2, \leq, *, \circ, (0, 0))$ bir pseudo-BCI cebridir. $\mathbb{X}_2$ bir pseudo-BCK cebri değildir. Çünkü $(0, 0) \nleq (x, y)$ olacak şekilde bir $(x, y) = (1, 1) \in X_2$ elemanı vardır.

Örnek 3.5. *(Dymek, 2012) $\mathbb{X}$, sırasıyla Örnek 0.3.3. ve 0.3.4. deki $\mathbb{X}_1$ ve $\mathbb{X}_2$ pseudo-BCI cebirlerinin direkt çarpımı olsun. O zaman $X = [0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ ve X üzerinde "$\leq$" ikili bağıntı, "$*$" ve "$\circ$" ikili işlemler olmak üzere her $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in X$ için*

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = \begin{cases} (0, y_1 - y_2, (z_1 - z_2)e^{-y_2}) & , \quad x_1 \leq x_2 \\ (\frac{2x}{\pi} \arctan(\ln(\frac{x_1}{x_2})), y_1 - y_2, (z_1 - z_2)e^{-y_2}) & , \quad x_2 < x_1 \end{cases}$$

$$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = \begin{cases} (0, y_1 - y_2, z_1 - z_2 e^{y_1 - y_2}) & , \quad x_1 \leq x_2 \\ (x_1 e^{-\tan(\frac{\pi x_2}{2x_1})}, y_1 - y_2, z_1 - z_2 e^{y_1 - y_2}) & , \quad x_2 < x_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ bir pseudo-BCI cebridir. Fakat $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCK cebri değildir. Çünkü $(0, 0, 0) \nleq (x, y, z)$ olacak şekilde bir $(x, y, z) = (0, 1, 1) \in X$ vardır.

Önerme 3.2. *(Jun et al., 2006; Dymek, 2012) $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her $x, y \in X$ için aşağıdakiler sağlanır:*

- ***(i)*** $0 * (x \circ y) \leq y \circ x$.
- ***(ii)*** $0 \circ (x * y) \leq y * x$.
- ***(iii)*** $0 * (x * y) = (0 \circ x) \circ (0 * y)$.
- ***(iv)*** $0 \circ (x \circ y) = (0 * x) * (0 \circ y)$.
- ***(v)*** $0 * x = 0 \circ x$.

Kanıt. ***(i)*** *Her $x, y \in X$ için (a_3) ve (a_1) den*

$$\begin{aligned} 0 * (x \circ y) &= (x \circ x) * (x \circ y) \\ &\leq y \circ x \end{aligned}$$

olur. Böylece (i) sağlanmış olur.

(ii) *Her $x, y \in X$ için (a_3) ve (a_1) den*

$$\begin{aligned} 0 \circ (x * y) &= (x * x) \circ (x * y) \\ &\leq y * x \end{aligned}$$

olur. Böylece (ii) sağlanmış olur.

(iii) *Her $x, y \in X$ için sırasıyla (a_3), (b_4), (b_4), (a_3), (b_4) ve (a_3) den*

$$\begin{aligned} (0 \circ x) \circ (0 * y) &= (((x * y) * (x * y)) \circ x) \circ (0 * y) \\ &= (((x * y) \circ x) * (x * y)) \circ (0 * y) \\ &= (((x \circ x) * y) * (x * y)) \circ (0 * y) \\ &= ((0 * y) * (x * y)) \circ (0 * y) \\ &= ((0 * y) \circ (0 * y)) * (x * y) \\ &= 0 * (x * y) \end{aligned}$$

olur. Böylece (iii) sağlanmış olur.

(iv) *Her $x, y \in X$ için sırasıyla (a_3), (b_4), (b_4), (a_3), (b_4) ve (a_3) den*

$$\begin{aligned} (0 * x) * (0 \circ y) &= (((x \circ y) \circ (x \circ y)) * x) * (0 \circ y) \\ &= (((x \circ y) * x) \circ (x \circ y)) * (0 \circ y) \\ &= (((x * x) \circ y) \circ (x \circ y)) * (0 \circ y) \\ &= ((0 \circ y) \circ (x \circ y)) * (0 \circ y) \\ &= ((0 \circ y) * (0 \circ y)) \circ (x \circ y) \\ &= 0 \circ (x \circ y) \end{aligned}$$

olur. Böylece (iv) sağlanmış olur.

(v) *(iv) de $y = 0$ alalım. O zaman*

$$0 \circ (x \circ 0) = (0 * x) * (0 \circ 0)$$

olur. Şimdi sırasıyla (b_8), (iv), (b_8) ve tekrar (b_8) den

$$\begin{aligned} 0 \circ x &= 0 \circ (x \circ 0) \\ &= (0 * x) * (0 \circ 0) \\ &= (0 * x) * 0 \\ &= 0 * x \end{aligned}$$

olur. Böylece $0 \circ x = 0 * x$ sağlanmış olur.

□

Teorem 3.1. *(Dudek ve Jun, 2008) $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ yapısının bir pseudo-BCI cebri olması için gerek ve yeter koşul (a_1), (a_4), (a_5) ve (b_8) i sağlamasıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ *$\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olduğundan tanımdan (a_1), (a_4) ve (a_5) sağlanır. Önerme 3.1. den de (b_8) sağlanır.*
$(\Leftarrow)$ *Her $x, y \in X$ için (a_1), (a_4), (a_5) ve (b_8) in sağlandığı kabul edilsin. $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI cebri olabilmesi için (a_1), (a_2), (a_3), (a_4) ve (a_5) koşullarını sağlaması gerekir. O zaman (a_2) nin ve (a_3) ün sağlandığını göstermek yeterlidir.*

Her $x, y, z \in X$ için (a_1) de $y = 0$ alınıp (b_8) kullanılarak

$$\begin{aligned} x \circ (x * z) &= (x * 0) \circ (x * z) \\ &\leq z * 0 \\ &= z \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x * (x \circ z) &= (x \circ 0) * (x \circ z) \\ &\leq z \circ 0 \\ &= z \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$x \circ (x * z) \leq z \quad \textit{ve} \quad x * (x \circ z) \leq z$$

olur. Böylece (a_2) ispatlanmış olur.

Her $x, y, z \in X$ için (a_1) de $y = 0$ ve $z = 0$ alınıp (b_8) kullanılarak

$$\begin{aligned} (x * 0) \circ (x * 0) &\leq (0 * 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(x \circ 0) * (x \circ 0) &\leq (0 \circ 0)\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(x * 0) \circ (x * 0) \leq 0 \quad \textit{ve} \quad (x \circ 0) * (x \circ 0) \leq 0$$

bulunur. (b_8) *den*

$$x \circ x \leq 0 \quad \textit{ve} \quad x * x \leq 0$$

olur ve (a_5) *den*

$$(x \circ x) * 0 = 0 \quad \textit{ve} \quad (x * x) \circ 0 = 0$$

bulunur. Buradan (b_8) *den*

$$\begin{aligned}x \circ x &= (x \circ x) * 0\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}x * x &= (x * x) \circ 0\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. $x \circ x = 0$ *ve* $x * x = 0$ *olduğundan* (a_5) *den* $x \leq x$ *olur. Böylece* (a_3) *sağlanmış olur.*

Sonuç olarak, $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *yapısı bir pseudo-BCI cebridir.*

□

Tanım 3.2. *(Dudek ve Jun, 2008)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun.* S, X *in bir altkümesi olmak üzere her* $x, y \in S$ *için* $x * y \in S$ *ve* $x \circ y \in S$ *koşulları sağlanıyorsa* S *ye* $\mathbb{X}$ *in bir* ***pseudo-BCI altcebri*** *denir.*

Teorem 3.2. *(Dudek ve Jun, 2008)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun.*

$$K(\mathbb{X}) := \{x \in X | 0 \leq x\}$$

kümesi, $\mathbb{X}$ in bir ***pseudo-BCI altcebridir****. Bu kümeye $\mathbb{X}$ in* ***BCK-kısmı*** *denilir.*

Kanıt. $x, y \in K(\mathbb{X})$ *olsun. O zaman* $K(\mathbb{X})$ *tanımından* $0 \leq x$ *ve* $0 \leq y$ *olur. Buradan* (a_5) *den*

$$0 * x = 0, \quad 0 \circ x = 0, \quad 0 * y = 0 \quad \textit{ve} \quad 0 \circ y = 0$$

olur. (b_7) *den* $0 \leq x$ *ise*

$$0 * y \leq x * y$$

ve

$$0 \circ y \leq x \circ y$$

olur. Hipotezden

$$0 = 0 * y \leq x * y$$

ve

$$0 = 0 \circ y \leq x \circ y$$

bulunur. Buradan

$$0 \leq x * y \quad \textit{ve} \quad 0 \leq x \circ y$$

elde edilir. Dolayısıyla $x * y, x \circ y \in K(\mathbb{X})$ *dir. Böylece* $K(\mathbb{X})$*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI altcebridir.*

□

Uyarı 3.3. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCK cebri ise o zaman* $X = K(\mathbb{X})$ *olduğuna dikkat edilmelidir.*

Örnek 3.6. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 3.1. deki pseudo-BCI cebri olsun.*
$K(\mathbb{X}) = \{0, a, b, c\} = X$ *olduğu görülür.*

Örnek 3.7. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 3.2. deki pseudo-BCI cebri olsun.* $0 * a = a \neq 0$ *ve* $0 \circ a = a \neq 0$ *olduğundan* $K(\mathbb{X}) = \{0, b, c, d\}$ *olduğu görülür.*

Teorem 3.3. *(Dudek ve Jun, 2008)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. Her* $x, y \in X$ *için*

$$x \circ (x * y) = y \circ (y * x) \quad \textit{ve} \quad x * (x \circ y) = y * (y \circ x)$$

ise o zaman $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCK cebridir.

Kanıt. *$\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri ve her $x, y \in X$ için*

$$x \circ (x * y) = y \circ (y * x) \quad \textit{ve} \quad x * (x \circ y) = y * (y \circ x)$$

koşulları sağlansın.

Öncelikle her $x, y \in K(\mathbb{X})$ ve $a, b \in X \setminus K(\mathbb{X})$ için

$$x * a \notin K(\mathbb{X}) \quad \textit{ve} \quad y \circ b \notin K(\mathbb{X})$$

olduğu kabul edilsin.

$x, y \in K(\mathbb{X})$ ve $a, b \in X \setminus K(\mathbb{X})$ için

$$x * a \in K(\mathbb{X}) \quad \textit{ve} \quad y \circ b \in K(\mathbb{X})$$

olsaydı o zaman

$$x \circ (x * a) \in K(\mathbb{X}) \quad \textit{ve} \quad y * (y \circ b) \in K(\mathbb{X})$$

olurdu. Dolayısıyla $K(\mathbb{X})$ in tanımından ve (a_2) den

$$0 \leq x \circ (x * a) \leq a$$

ve

$$0 \leq y * (y \circ b) \leq b$$

olurdu. Böylece $0 \leq a$ ve $0 \leq b$ elde edilirdi. Bu da $a, b \in K(\mathbb{X})$ anlamına gelirdi. Bu ise $a, b \notin K(\mathbb{X})$ olması ile çelişir.

$X \neq K(\mathbb{X})$ olsun. O zaman en az bir $a \in X \setminus K(\mathbb{X})$ vardır ve böylece hipotezde $x = 0$ ve $y = 0$ alınırsa (b_8) ve (a_3) den

$$\begin{aligned} 0 * (0 \circ a) &= a * (a \circ 0) \\ &= a * a \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 \circ (0 * a) &= a \circ (a * 0) \\ &= a \circ a \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$0 \leq 0 * a \quad \textit{ve} \quad 0 \leq 0 \circ a$$

elde edilir. O halde $K(\mathbb{X})$ in tanımından $0 * a \in K(\mathbb{X})$ ve $0 \circ a \in K(\mathbb{X})$ olur. Bu da a nın seçilişine bir çelişkidir. Dolayısıyla $X = K(\mathbb{X})$ olmalıdır. Böylece $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCK cebridir.

□

Teorem 3.4. *(Dudek ve Jun, 2008) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. Her $x, y \in X$ için*

$$(x * y) \circ y = x \circ y \quad \textit{ve} \quad (x \circ y) * y = x * y \qquad \textit{(1)}$$

ise o zaman $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCK cebridir.

Kanıt. *Her $x, y \in X$ için (1) de $x = y$ olsun. O zaman her $x \in X$ için sırasıyla (a_3), (1) ve (a_3) den*

$$\begin{aligned} 0 \circ x &= (x * x) \circ x \\ &= x \circ x \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 * x &= (x \circ x) * x \\ &= x * x \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $x \in X$ için $0 \leq x$ olur. Dolayısıyla $X = K(\mathbb{X})$ olur ve böylece $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCK cebridir.

□

Teorem 3.5. *(Dudek ve Jun, 2008) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. Her $x, y \in X$ için*

$$x * (y \circ x) = x \quad \textit{ve} \quad x \circ (y * x) = x \qquad \textit{(2)}$$

ise o zaman $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCK cebridir.

Kanıt. *Her $x, y \in X$ için (2) de $x = 0$ alınsın. O zaman her $y \in X$ için (2) ve (b_8) den*

$$\begin{aligned} 0 &= 0 * (y \circ 0) \\ &= 0 * y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \circ (y * 0) \\ &= 0 \circ y \end{aligned}$$

olur. Buradan her $y \in X$ *için* $0 \leq y$ *bulunur. Dolayısıyla* $X = K(\mathbb{X})$ *demektir. Böylece* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCK cebridir.*

$\square$

4. PSEUDO-BCI CEBİRLERİNDE ATOMLAR, DALLAR, MEDYALLER VE P-YARIBASİT PSEUDO-BCI-CEBİRLERİ

4.1. Pseudo-BCI Cebirlerinin Atomları

Tanım 4.1. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. Her* $x \in X$ *için*

$$x \leq a \implies x = a$$

koşulunu sağlayan X *in bir* a *elemanına* X *in bir* ***atomu*** *denir.*

Uyarı 4.1. *(Dymek, 2012a)* X *in tün atomlarının kümesi* $At(\mathbb{X})$ *şeklinde gösterilir.*

Uyarı 4.2. *(Dymek, 2012a)* $0 \in At(\mathbb{X})$ *olur. Gerçekten Önerme 3.1.* (b_1) *den*

$$x \leq 0 \implies x = 0$$

bulunur. Böylece $0 \in At(\mathbb{X})$ *dir.*

Örnek 4.1. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 3.1. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman* $At(\mathbb{X}) = \{0\}$ *olduğu görülür.*

Örnek 4.2. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 3.2. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman* $At(\mathbb{X}) = \{0, a\}$ *olduğu görülür.*

Örnek 4.3. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}_1$*, Örnek 3.3. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman* $At(\mathbb{X}_1) = \{0\}$ *olur.*

Örnek 4.4. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}_2$*, Örnek 3.4. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman* $At(\mathbb{X}_2) = \{\mathbb{X}_2\}$ *olur.*

Örnek 4.5. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$*, Örnek 3.5. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman* $At(\mathbb{X}) = \{(0, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$ *olur.*

Uyarı 4.3. *(Dymek, 2012a)* $At(\mathbb{X}) \cap K(\mathbb{X}) = \{0\}$ *olur. Gerçekten* $a \in At(\mathbb{X}) \cap K(\mathbb{X})$ *ise o zaman*

$$a \in At(\mathbb{X}) \quad ve \quad a \in K(\mathbb{X})$$

olur. $a \in K(\mathbb{X})$ *olduğundan* $0 \leq a$ *bulunur.* $a \in At(\mathbb{X})$ *olduğundan* $a = 0$ *elde edilir.*

Örnek 4.6. *Örnek 3.6. ve Örnek 4.1. den*

$$At(\mathbb{X}) \cap K(\mathbb{X}) = \{0\}$$

olur.

Örnek 4.7. *Örnek 3.7. ve Örnek 4.2. den*

$$At(\mathbb{X}) \cap K(\mathbb{X}) = \{0\}$$

olur.

Uyarı 4.4. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCK cebri ise* "0" *tek atomdur. Gerçekten* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCK cebri ise Uyarı 3.3. den* $K(\mathbb{X}) = X$ *olduğundan ve Uyarı 4.2. den* $At(\mathbb{X}) = \{0\}$ *olur.*

Aşağıdaki teoremlerde bir pseudo-BCI cebrinin atomlarının karakterizasyonu verilecektir.

Teorem 4.1. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her* $a, x \in X$ *için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) $a \in At(\mathbb{X})$*,*

(ii) $x * (x \circ a) = a = x \circ (x * a)$*.*

Kanıt. ***(i)⇒ (ii)*** $a \in At(\mathbb{X})$ *ve* $x \in X$ *olsun. Tanım 3.1.* (a_2) *den*

$$x * (x \circ a) \leq a \quad \textit{ve} \quad x \circ (x * a) \leq a$$

olur. Böylece Tanım 4.1. den

$$x * (x \circ a) = a = x \circ (x * a)$$

elde edilir.

(ii)⇒ (i) $x, a \in X$ *için* $x \leq a$ *olsun. O zaman* $x * a = 0$ *olur.* $x = a$ *olduğunu göstermek için* $a \leq x$ *olduğunu göstereceğiz. Sırasıyla (ii), Önerme 3.1.* (b_4)*, Tanım 3.1.* (a_3)*, hipotez ve Tanım 3.1.* (a_3) *den*

$$\begin{aligned} a * x &= (x \circ (x * a)) * x \\ &= (x * x) \circ (x * a)) \\ &= 0 \circ (x * a) \\ &= 0 \circ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. (a_5) *den* $a \leq x$ *olur. Böylece* $x = a$ *elde edilir. Dolayısıyla* $a \in At(\mathbb{X})$ *olur.*

$\square$

Teorem 4.2. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her* $a, x, y, z \in X$ *için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) $a \in At(\mathbb{X})$,

(ii) $x * (x \circ a) = a = x \circ (x * a)$,

(iii) $a * (x \circ y) \leq y \circ (x * a)$,

(iv) $(a \circ x) * (y \circ z) \leq (z \circ (y * a)) \circ x$,

(v) $a * x = 0 \circ (x * a)$.

Kanıt. ***(i)⇒ (ii)*** *Teorem 4.1. de kanıtı verilmiştir.*

(ii)⇒ (iii) *Her* $a, x, y \in X$ *için sırasıyla (ii), Önerme 3.1.* (b_4)*, ve Tanım 3.1.* (a_2) *ile Önerme 3.1.* (b_7) *den*

$$\begin{aligned} a * (x \circ y) &= (x \circ (x * a)) * (x \circ y) \\ &= (x * (x \circ y)) \circ (x * a) \\ &\leq y \circ (x * a) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $a * (x \circ y) \leq y \circ (x * a)$ *olur.*

(iii)⇒(iv) *Her* $a, x, y, z \in X$ *için sırasıyla Önerme 3.1.* (b_4) *ve (iii) ile Önerme 3.1.* (b_7) *den*

$$\begin{aligned} (a \circ x) * (y \circ z) &= (a * (y \circ z)) \circ x \\ &\leq (z \circ (y * a)) \circ x \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $(a \circ x) * (y \circ z) \leq (z \circ (y * a)) \circ x$ *olur.*

(iv)⇒ (v) *Her* $a, x \in X$ *için sırasıyla Önerme 3.1* (b_8)*, (iv) ve Önerme 3.1.* (b_8) *den*

$$\begin{aligned} a * x &= (a \circ 0) * (x \circ 0) \\ &\leq (0 \circ (x * a)) \circ 0 \\ &= 0 \circ (x * a) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan Önerme 3.2. (ii) den

$$0 \circ (x * a) \leq a * x$$

olur. Dolayısıyla Tanım 3.1. (a_4) *den*

$$a * x = 0 \circ (x * a)$$

elde edilir.

(v)⇒(i) $a, x \in X$ *için* $x \leq a$ *olduğunu kabul edelim. O zaman* $x * a = 0$ *olur. Dolayısıyla sırasıyla (v), hipotez ve Tanım 3.1.* (a_3) *den*

$$\begin{aligned} a * x &= 0 \circ (x * a) \\ &= 0 \circ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $a \leq x$ *olur. Tanım 3.1.* (a_4) *den* $a = x$ *olur. Dolayısıyla* $a \in At(\mathbb{X})$ *elde edilir.*

□

Teorem 4.3. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her* $a, x, y, z \in X$ *için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) $a \in At(\mathbb{X})$,

(ii) $x * (x \circ a) = a = x \circ (x * a)$,

(iii) $a \circ (x * y) \leq y * (x \circ a)$,

(iv) $(a * x) \circ (y * z) \leq (z * (y \circ a)) * x$,

(v) $a \circ x = 0 * (x \circ a)$.

Kanıt. *Teorem 4.2. ile benzer şekilde denklikler kanıtlanır.*

□

Aşağıdaki teoremlerde bir pseudo-BCI cebrinin atomlarının bir diğer karakterizasyonu verilecektir.

Teorem 4.4. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her* $a, x, y \in X$ *için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) $a \in At(\mathbb{X})$,

(ii) $x * (x \circ a) = a = x \circ (x * a)$,

(iii) $a * x = (y * x) \circ (y * a)$,

(iv) $a \circ x = y \circ (y * (a \circ x))$.

Kanıt. ***(i)⇒ (ii)*** *Teorem 4.1. de kanıtı verilmiştir.*

(ii)⇒ (iii) *Her* $a, x, y \in X$ *için Önerme 3.1.* (b_4) *ve (ii) den*

$$\begin{aligned}(y * x) \circ (y * a) &= (y \circ (y * a)) * x \\ &= a * x\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)⇒ (iv) *Her* $a, x, y \in X$ *için sırasıyla Önerme 3.1.* (b_8)*, (iii) ve tekrar Önerme 3.1.* (b_8) *den*

$$\begin{aligned}y \circ (y * (a \circ x)) &= (y * 0) \circ (y * (a \circ x)) \\ &= (a \circ x) * 0 \\ &= a \circ x\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv)⇒(i) $a, x \in X$ *için* $x \leq a$ *olsun. O zaman* $x * a = 0$ *olur. Buradan sırasıyla Önerme 3.1.* (b_8)*, (iv), Önerme 3.1.* (b_8)*, hipotez ve Önerme 3.1.* (b_8) *den*

$$\begin{aligned}a &= a \circ 0 \\ &= x \circ (x * (a \circ 0)) \\ &= x \circ (x * a) \\ &= x \circ 0 \\ &= x\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Tanım 4.1. den $a \in At(\mathbb{X})$ *olur.*

□

Teorem 4.5. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her* $a, x, y \in X$ *için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) $a \in At(\mathbb{X})$,

(ii) $x * (x \circ a) = a = x \circ (x * a)$,

(iii) $a \circ x = (y \circ x) * (y \circ a)$,

(iv) $a * x = y * (y \circ (a * x))$.

Kanıt. *Teorem 4.4. ile benzer şekilde denklikler kanıtlanır.*

□

Teorem 4.6. *(Dymek, 2012a) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her $a, x \in X$ için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) $a \in At(\mathbb{X})$,

(ii) $a * x = (0 * x) \circ (0 * a)$,

(iii) $a \circ x = (0 \circ x) * (0 \circ a)$.

Kanıt. ***(i)⇒ (ii)*** *$x \in X$ ve $a \in At(\mathbb{X})$ olsun. Teorem 4.4. (i)⇔(iii) den $y \in X$ için*

$$a * x = (y * x) \circ (y * a)$$

elde edilir. Buradan $y = 0$ alınırsa kanıt tamamlanmış olur. Böylece

$$a * x = (0 * x) \circ (0 * a)$$

olur.

(ii)⇒ (i) *Her $a, x \in X$ için sırasıyla (ii), Önerme 3.2. (v), Önerme 3.2. (iii) ve Önerme 3.2. (v) den*

$$\begin{aligned} a * x &= (0 * x) \circ (0 * a) \\ &= (0 \circ x) \circ (0 * a) \\ &= 0 * (x * a) \\ &= 0 \circ (x * a) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Teorem 4.2. (i)⇔(v) den $a \in At(\mathbb{X})$ elde edilir.

(i)⇒ (iii) *(i)⇒(ii) ye benzer şekilde kanıtlanır.*

(iii)⇒ (i) *(ii)⇒(i) e benzer şekilde kanıtlanır.*

□

Teorem 4.7. *(Dymek, 2012a) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her $a \in X$ için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) $a \in At(\mathbb{X})$,

(ii) $0 * (0 \circ a) = a = 0 \circ (0 * a)$.

Kanıt. ***(i)⇒(ii)*** *Teorem 4.1. de $a \in At(\mathbb{X})$ için $x = 0$ alınırsa*

$$0 * (0 \circ a) = a = 0 \circ (0 * a)$$

elde edilir.

(ii)⇒(i) $a, x \in X$ *için* $x \leq a$ *olsun. O zaman* $x * a = 0$ *olur. Diğer taraftan sırasıyla (ii), Önerme 3.1.* (b_4)*, Önerme 3.2. (v), (iii) ve (v), hipotez ve son olarak Tanım 3.1.* (a_3) *den*

$$\begin{aligned} a * x &= (0 \circ (0 * a)) * x \\ &= (0 * x) \circ (0 * a) \\ &= (0 \circ x) \circ (0 * a) \\ &= 0 * (x * a) \\ &= 0 \circ (x \circ a) \\ &= 0 \circ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $a \leq x$ *olur. Sonuç olarak Tanım 3.1.* (a_4) *den* $a = x$ *elde edilir. Bu ise* $a \in At(\mathbb{X})$ *demektir.*

□

Uyarı 4.5. *(Dymek, 2012a)* *Her* $x \in X$ *için Önerme 3.2. (v) den*

$$\begin{aligned} 0 * (0 \circ x) &= 0 \circ (0 \circ x) \\ &= 0 \circ (0 * x) \\ &= 0 * (0 * x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla bir önceki teoremden

$$At(\mathbb{X}) = \{x \in X | x = 0 * (0 * x)\}$$

yazılabilir.

Uyarı 4.6. *(Dymek, 2012a)* *Her* $x \in X$ *için Önerme 3.1.* (b_9) *ve Önerme 3.2. (v) den*

$$\begin{aligned} 0 * x &= 0 \circ x \\ &= 0 \circ (0 * (0 \circ x)) \\ &= 0 * (0 * (0 * x)) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $x \in X$ *için*

$$0 * x = 0 \circ x \in At(\mathbb{X})$$

elde edilir.

4.2. Pseudo-BCI Cebirlerinin Dalları

Tanım 4.2. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. Her* $a \in At(\mathbb{X})$ *için*

$$V(a) = \{x \in X | a \leq x\}$$

kümesine $\mathbb{X}$ *in bir **dalı** denir.*

Uyarı 4.7. *(Dymek, 2012b)* $V(0) = K(\mathbb{X})$ *olur. Gerçekten* $a \in At(\mathbb{X})$ *için* $a = 0$ *alınırsa*

$$V(0) = \{x \in X | 0 \leq x\}$$

olur. Bu ise $V(0) = K(\mathbb{X})$ *demektir.* $V(0)$ *a* $\mathbb{X}$ *in bir **pseudo-BCK kısmı** denilir.*

Örnek 4.8. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 4.1. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman* $V(0) = \{0, a, b, c\} = K(\mathbb{X})$ *olur.*

Örnek 4.9. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 4.2. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman* $V(0) = \{0, b, c, d\} = K(\mathbb{X})$ *ve* $V(a) = \{a\}$ *olur.*

Uyarı 4.8. *(Dymek, 2012b)* $V(a) \neq \varnothing$ *olur. Gerçekten her* $a \in X$ *için* $a \leq a$ *olacak şekilde daima bir* $a \in V(a)$ *vardır.*

Uyarı 4.9. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCK cebri ise o zaman her* $a, b \in X$ *için* $a \leq b$ *olduğunda* $V(0) = X$ *ve* $V(b) \subseteq V(a)$ *olur. Gerçekten* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCK cebri ise Uyarı 3.3. den* $X = K(\mathbb{X})$ *olur ve Uyarı 4.7. den* $V(0) = X$ *olur.* $a, b \in X$ *için*

$$V(a) = \{x \in X | a \leq x\} \quad ve \quad V(b) = \{x \in X | b \leq x\}$$

olur. $a \leq b$ *olduğundan* $V(b) \subseteq V(a)$ *bulunur.*

Tanım 4.3. *(Dymek, 2012b)* X *bir pseudo-BCI cebri ve* $x, y \in X$ *olsun. O zaman* $x \leq y$ *veya* $y \leq x$ *ise* x *ve* y *ye **karşılaştırılabilirdir**, denir.*

Uyarı 4.10 *$x, y \in X$ için x ve y karşılaştırılabilir ise o zaman $V(a)$ tek daldır. x ve y, X in karşılaştırılabilir iki elemanı ve $x \leq y$ olsun. $a \in At(X)$ için $x \in V(a)$ ise $x \leq y$ olduğundan $y \in V(a)$ olur. X in her elemanı karşılaştırılabilir ise o zaman $V(a)$ tek daldır.*

*$V(a)$ ya X in **karşılaştırılabilir bir altkümesi** denilir.*

Tanım 4.4. *(Dymek, 2012b) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri ve $a \in X$ için $U(a)$, $V(a)$ nın bir altkümesi olsun. $U(a)$, $a \leq x$ olacak şekilde tüm $x \in X$ elemanlarını içeriyorsa ve $U(a)$ daki her iki eleman karşılaştırılabilir ise o zaman $U(a)$ ya $V(a)$ nın bir **dalı** denir.*

W, boştan farklı keyfi bir küme ve her $w \in W$ için her $U_w(a)$, $V(a)$ nın bir dalı olacak şekilde

$$V(a) = \bigcup_{w \in W} U_w(a)$$

*ise o zaman $V(a)$ ya X in **dalvari karşılaştırılabilir bir altkümesi** denir.*

Önerme 4.1. *(Dymek, 2012b) $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman $a, b \in At(\mathbb{X})$ için*

$$V(a) \cap V(b) = \varnothing$$

olur.

Kanıt. *$a, b \in At(\mathbb{X})$ ve $a \neq b$ olsun. Bir $z \in V(a) \cap V(b)$ alınsın. O zaman*

$$z \in V(a) \quad \textit{ve} \quad z \in V(b)$$

olur. Böylece $a \leq z$ ve $b \leq z$ elde edilir.

Şimdi $a \leq z$ alınsın. O zaman $b \in X$ için Önerme 3.1. (b_2) den

$$b * z \leq b * a$$

bulunur. Buradan

$$0 = b * z \leq b * a$$

olur. Dolayısıyla

$$0 \leq b * a$$

elde edilir. Böylece $b \in X$ için sırasıyla Önerme 3.1. (b_7), Önerme 3.1. (b_4) ve Tanım 3.1. (a_3) den

$$\begin{aligned} 0 \circ b &\leq (b * a) \circ b \\ &= (b \circ b) * a \\ &= 0 * a \end{aligned}$$

bulunur. Buradan sırasıyla Önerme 3.1. (b_2), Önerme 3.2.(i) ve Önerme 3.1. (b_8) den

$$\begin{aligned} 0 * (0 * a) &\leq 0 * (0 \circ b) \\ &\leq b \circ 0 \\ &= b \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat $b \in At(\mathbb{X})$ olduğundan

$$b = 0 * (0 * a)$$

olur. Dolayısıyla sırasıyla Önerme 3.2. (iii), Tanım 3.1. (a_3), Önerme 3.2. (ii) ve Önerme 3.1. (b_8) den

$$\begin{aligned} b = 0 * (0 * a) &= (0 \circ 0) \circ (0 * a) \\ &= 0 \circ (0 * a) \\ &\leq a * 0 \\ &= a \end{aligned}$$

bulunur. $a \in At(\mathbb{X})$ olduğundan $b = a$ olur. Bu ise a ve b nin seçilişine bir çelişkidir. Böylece $V(a) \cap V(b) = \varnothing$ elde edilir.

$\square$

Örnek 4.10 *Örnek 4.9. dan $V(0) = \{0, b, c, d\}$ ve $V(a) = \{a\}$ için*

$$V(0) \cap V(a) = \varnothing$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.1. *(Dymek, 2012b) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman*

$$\bigcap_{a \in At(\mathbb{X})} V(a) = \varnothing$$

olduğu görülür.

Önerme 4.2. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her bir* $x \in X$ *için* $a \leq x$ *olacak şekilde tek bir* $a \in At(\mathbb{X})$ *vardır.*

Kanıt. $x \in X$ *alalım. Tanım 3.1.* (a_2) *den*

$$0 \circ (0 * x) \leq x$$

olur. $0 \circ (0 * x) = a$ *olsun. İlk olarak* $a \in At(\mathbb{X})$ *olduğu gösterilmelidir.*

$y \leq a$ *olacak şekilde bir* $y \in X$ *olsun.* $y = a$ *olduğunu gösterilirse* a *nın atom olduğunu gösterilmiş olur. Kabulden*

$$y \leq 0 \circ (0 * x)$$

olur. Dolayısıyla Tanım 3.1. (a_5) *den*

$$y * (0 \circ (0 * x)) = 0$$

bulunur. Buradan

$$(y * (0 \circ (0 * x))) \circ y = 0 \circ y$$

olur ve sırasıyla Önerme 3.1. (b_4)*, Tanım 3.1.* (a_3) *ve Önerme 3.1.* (b_9) *dan*

$$\begin{aligned} 0 \circ y &= (y \circ y) * (0 \circ (0 * x)) \\ &= 0 * (0 \circ (0 * x)) \\ &= 0 * x \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi sırasıyla yukarıdaki eşitlikten, Önerme 3.2. (i) ve Önerme 3.1. (b_8) *den*

$$\begin{aligned} 0 \circ (0 * x) &= 0 \circ (0 \circ y) \\ &= 0 * (0 \circ y) \\ &\leq y \circ 0 \\ &= y \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $a \leq y$ olur. Tanım 3.1. (a_4) den $y = a$ elde edilir. Böylece $a \in At(\mathbb{X})$ nın olduğu görülür. Tekliği ise Önerme 4.1. nin kanıtında gösterilmiştir.

□

Uyarı 4.11. *(Dymek, 2012b) Yukarıdaki önermede bir $a \in At(\mathbb{X})$ için X in her elemanı bir tek $V(a)$ dalına aittir. Dolayısıyla Önerme 4.1. den aşağıdaki sonuç elde edilir.*

Sonuç 4.2. *(Dymek, 2012b) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman $a \in At(\mathbb{X})$ için*

$$X = \bigcup_{a \in At(\mathbb{X})} V(a)$$

olduğu görülür.

Örnek 4.11. *$\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$, Örnek 4.9. daki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman*

$$X = V(0) \cup V(a)$$

olduğu görülür.

Örnek 4.12. *(Dymek, 2012a) $\mathbb{X}_1$, Örnek 3.3. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman $At(\mathbb{X}_1) = \{0\}$ ve her $a \in X_1$ için $V(a) = [a, \infty)$ olur.*

Örnek 4.13. *(Dymek, 2012a) $\mathbb{X}_2$, Örnek 3.4. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman $At(\mathbb{X}_2) = \{X_2\}$ ve her $(x, y) \in X_2$ için $V((x, y)) = \{(x, y)\}$ olur.*

Örnek 4.14. *(Dymek, 2012a) $\mathbb{X}$, Örnek 3.4. deki pseudo-BCI cebri olsun. O zaman*

$$At(\mathbb{X}) = \{(0, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$$

olur. $(0, a_1, a_2), (0, b_1, b_2) \in At(\mathbb{X})$ için

$$V((0, a_1, a_2)) \cap V((0, b_1, b_2)) = \varnothing$$

olacak şekilde W nın dalları

$$V((0, a_1, a_2)) = \{(x, a_1, a_2) \in X | x \geq 0\}$$

şeklindedir ve

$$X = \bigcup_{(0,a_1,a_2)\in At(\mathbb{X})} V((0, a_1, a_2))$$

olur.

Önerme 4.3. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri ve* $x, y \in X$ *olsun.* x *ve* y *karşılaştırılabilir ise o zaman* x *ve* y *bir* $a \in At(\mathbb{X})$ *için aynı* $V(a)$ *dalındadır.*

Kanıt. $x, y \in X$ *ve* $a \in At(\mathbb{X})$ *için* $x \in V(a)$ *alınsın.* x *ve* y *nin karşılaştırılabilir olsun. O zaman* $x \leq y$ *veya* $y \leq x$ *yazılabilir.*

$x \leq y$ *olsun. O zaman* $x \in V(a)$ *olduğundan* $a \leq x$ *yazılabilir. Buradan* $a \leq y$ *olur. Böylece* $y \in V(a)$ *elde edilir.*

$y \leq x$ *olsun. Bu da ilk duruma benzer şekilde sağlanır.*

Bir $b \in At(\mathbb{X})$ *için* $y \in V(b)$ *ve* $b \neq a$ *olsun. O zaman* $b \leq y$ *olur. Buradan* $b \leq x$ *elde edilir. Bu da* $x \in V(b)$ *demektir.*

$x \in V(a)$ *ve* $x \in V(b)$ *olduğundan*

$$V(a) \cap V(b) \neq \varnothing$$

olur. Fakat bu durum Önerme 0.4.1. ile çelişir. Dolayısıyla $a, b \in At(\mathbb{X})$ *ve* $b \neq a$ *için* $y \notin V(b)$ *olur. Bu ise Sonuç 4.2. den* $y \in V(a)$ *demektir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.*

□

4.3. Pseudo-BCI Cebirlerinin Medyali

Tanım 4.5. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. Eğer her* $x, y, z, u \in X$ *için*

(M1) $(x * y) \circ (z * u) = (x * z) \circ (y * u)$

özdeşliği sağlanıyorsa $\mathbb{X}$ *e* $\circ$***-medyal*** *denir.*

Önerme 4.4. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri olsun.* $\mathbb{X}$ *in* $\circ$*-medyal olabilmesi için gerek ve yeter koşul her* $x, y, z \in X$ *için*

(M2) $x \circ (y * z) = (x * y) \circ (0 * z)$

özdeşliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $\mathbb{X}$ *in* $\circ$*-medyal olsun. (M1) de* $z = 0$ *ve* $u = z$ *alınırsa ve Önerme 3.1.* (b_8) *den*

$$(x * y) \circ (0 * z) = (x * 0) \circ (y * z) = x \circ (y * z)$$

bulunur. Böylece (M2) sağlanmış olur.

$(\Leftarrow)$ $\mathbb{X}$ *in (M2) sağlansın. O zaman sırasıyla Önerme 3.1.* (b_4)*, (M2), Önerme 3.1.* (b_4) *ve (M2) den*

$$\begin{aligned}(x * y) \circ (z * u) &= (x \circ (z * u)) * y \\ &= ((x * z) \circ (0 * u)) * y \\ &= ((x * z) * y) \circ (0 * u) \\ &= (x * z) \circ (y * u)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mathbb{X}$ $\circ$*-medyaldir.*

□

Önerme 4.5. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X}$ *bir* $\circ$*-medyal pseudo-BCI cebri olsun. O zaman aşağıdaki özdeşlikler sağlanır: Her* $x, y \in X$ *için*

(i) $x * y = 0 \circ (y * x)$,

(ii) $0 \circ (0 * x) = x$,

(iii) $x \circ (x * y) = y$

olur.

Kanıt. ***(i)*** *Her* $x, y \in X$ *için sırasıyla Önerme 3.1.* (b_8)*, Tanım 3.1.* (a_3)*, (M1) ve Tanım 3.1.* (a_3) *den*

$$\begin{aligned}x * y &= (x * y) \circ 0 \\ &= (x * y) \circ (x * x) \\ &= (x * x) \circ (y * x) \\ &= 0 \circ (y * x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (i) sağlanmış olur.

(ii) *Her* $x \in X$ *için sırasıyla Önerme 3.1.* (b_8) *den ve (i) de* $y = 0$ *alınırsa*

$$\begin{aligned}x &= x * 0 \\ &= 0 \circ (0 * x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) sağlanmış olur.

(iii) *Her $x, y \in X$ için sırasıyla Önerme 3.1. (b_8), (M1), Tanım 3.1. (a_3) ve (ii) den*

$$\begin{aligned} x \circ (x * y) &= (x * 0) \circ (x * y) \\ &= (x * x) \circ (0 * y) \\ &= 0 \circ (0 * y) \\ &= y \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (iii) sağlanmış olur.

□

4.4. p-yarıbasit Pseudo-BCI Cebirleri

Tanım 4.6. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. Her $x \in X$ için $0 \leq x$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa $\mathbb{X}$ e bir* ***p-yarıbasit pseudo-BCI cebri*** *denir.*

Örnek 4.15 $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 4.8. daki pseudo-BCI cebri olsun. $0 \leq b$ fakat $b \neq 0$ olduğundan $\mathbb{X}$ p-yarıbasit pseudo-BCI cebri değildir.*

Örnek 4.16 $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 4.9. daki pseudo-BCI cebri olsun. $0 \leq b$ fakat $b \neq 0$ olduğundan $\mathbb{X}$ p-yarıbasit pseudo-BCI cebri değildir.*

Uyarı 4.12. *(Dymek, 2012b) $\mathbb{X}$ bir (öz) p-yarıbasit pseudo-BCI cebri ise o zaman $K(\mathbb{X}) = \{0\}$ dır. Dolayısıyla $\mathbb{X}$ bir p-yarıbasit pseudo-BCK cebri ise o zaman $X = \{0\}$ dır.*

Aşağıdaki önermelerde p-yarıbasit pseudo-BCI cebrinin farklı karakterizasyonları verilecektir.

Önerme 4.6. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman her $x, y \in X$ için aşağıdakiler birbirine denktir:*

(i) *$\mathbb{X}$ p-yarıbasittir,*

(ii) $x \leq y \implies x = y$,

(iii) $x * (x \circ y) = y = x \circ (x * y)$,

(iv) $0 * (0 \circ x) = x = 0 \circ (0 * x)$,

(v) $x * (0 \circ y) = y \circ (0 * x)$.

Kanıt. ***(i)⇒ (ii)*** *$\mathbb{X}$ bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri ve her $x, y \in X$ için $x \leq y$ olsun. O zaman Önerme 3.1. (b_7) den*

$$x * x \leq y * x$$

olur. Buradan Tanım 3.1. (a_3) den

$$0 \leq y * x$$

bulunur. $\mathbb{X}$, p-yarıbasit olduğundan

$$y * x = 0$$

olur. Bu ise $y \leq x$ demektir. Böylece Önerme 3.1. (a_4) den $x = y$ elde edilir.

(ii)⇒ (iii) *Her $x, y \in X$ için Tanım 3.1. (a_2) den*

$$x * (x \circ y) \leq y$$

olur. Dolayısıyla (ii) den

$$x * (x \circ y) = y$$

bulunur. Benzer şekilde Tanım 3.1 (a_2) den

$$x \circ (x * y) \leq y$$

olur ve (ii) den

$$x \circ (x * y) = y$$

elde edilir.

(iii)⇒(iv) *Her $x, y \in X$ için (iii) de $x = 0$ ve $y = x$ alınırsa o zaman*

$$0 * (0 \circ x) = x = 0 \circ (0 * x)$$

elde edilir.

(iv)⇒(v) *Her $x, y \in X$ için sırasıyla (iv), Önerme 3.1. (b_4) ve tekrar (iv) den*

$$\begin{aligned} x * (0 \circ y) &= (0 \circ (0 * x)) * (0 \circ y) \\ &= (0 * (0 \circ y)) \circ (0 * x) \\ &= y \circ (0 * x) \end{aligned}$$

elde edilir.

(v)⇒ (i) *Her $x \in X$ için $0 \leq x$ olsun. (v) de $y = 0$ alınırsa Önerme 3.1. (b_8) ve Tanım 3.1. (a_5) den*

$$
\begin{aligned}
x &= x * (0 \circ 0) \\
&= 0 \circ (0 * x) \\
&= 0 \circ 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $\mathbb{X}$ bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebridir.

□

Uyarı 4.13. *(Dymek, 2012b) Önerme 4.6. (ii) den " $=$ " yerine " $\leq$ " alınırsa bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri bir pseudo-BCI cebri olur.*

Önerme 4.7. *(Dymek, 2012b) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir: Her $a, b, x, y, z \in X$ için*

(i) *$\mathbb{X}$ p-yarıbasittir,*

(ii) $x * y = 0 \circ (y * x)$,

(ii') $x \circ y = 0 * (y \circ x)$,

(iii) $x * y = (z * y) \circ (z * x)$,

(iii') $x \circ y = (z \circ y) * (z \circ x)$,

(iv) $x * y = (0 * y) \circ (0 * x)$,

(iv') $x \circ y = (0 \circ y) * (0 \circ x)$,

(v) $x * a = x * b \implies a = b$,

(v') $x \circ a = x \circ b \implies a = b$,

(vi) $a * x = b * x \implies a = b$,

(vi') $a \circ x = b \circ x \implies a = b$.

olur.

Kanıt. ***(i)⇒(ii)*** *$\mathbb{X}$ p-yarıbasit pseudo-BCI cebri olsun. Her $x, y \in X$ için Önerme 3.2. (ii) de x yerine y, y yerine x alınırsa*

$$0 \circ (y * x) \leq x * y$$

olur. Uyarı 4.4. den

$$0 \circ (y * x) = x * y$$

elde edilir.

(ii)$\Rightarrow$***(i)*** *Her* $x, y \in X$ *için (ii) de* $y = 0$ *alınırsa*

$$x * 0 = 0 \circ (0 * x)$$

olur. Buradan Önerme 3.1. (b_8) *den*

$$x = 0 \circ (0 * x)$$

bulunur. Önerme 3.2. (iv) den

$$x = 0 * (0 \circ x)$$

elde edilir. Dolayısıyla Önerme 4.6. (i)$\Leftrightarrow$*(iv) denkliğinden* $\mathbb{X}$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebridir.*

(i)$\Leftrightarrow$***(ii')*** *Bu denklik (i)*$\Leftrightarrow$*(ii) ile benzer şekilde kanıtlanır.*

(i)$\Rightarrow$***(iii)*** $\mathbb{X}$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebri olsun. Her* $x, y, z \in X$ *için Tanım 3.1.* (a_1) *de* x *yerine* z*,* z *yerine* x *alınırsa*

$$(z * y) \circ (z * x) \leq x * y$$

olur. Uyarı 4.4. den

$$(z * y) \circ (z * x) = x * y$$

elde edilir.

(iii)$\Rightarrow$***(i)*** *Her* $x, y, z \in X$ *için (iii) de* $y = z = 0$ *alınırsa ve Önerme 3.1.* (b_8) *den*

$$\begin{aligned} x &= x * 0 \\ &= (0 * 0) \circ (0 * x) \\ &= 0 \circ (0 * x) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} x &= x \circ 0 \\ &= (0 \circ 0) * (0 \circ x) \\ &= 0 * (0 \circ x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Önerme 4.6. (i)⇔(iv) denkliğinden $\mathbb{X}$ p-yarıbasit pseudo-BCI cebri bulunur.

(i)⇔(iii') *Bu denklik (i)⇔(iii) ile benzer şekilde kanıtlanır.*

(i)⇔(iv) *Her $x, y, z \in X$ için (iii)de $z = 0$ alınırsa (i)⇔(iii) denkliğinden*

$$x * y = (0 * y) \circ (0 * x) \iff \mathbb{X} \text{ p-yarıbasit pseudo-BCI cebridir.}$$

sağlanır.

(i)⇔(iv') *Bu denklik (i)⇔(iv) ile benzer şekilde kanıtlanır.*

(i)⇒(v) *$a, b, x \in X$ için $x * a = x * b$ olsun. O zaman $\mathbb{X}$ p-yarıbasit olduğundan Önerme 4.6. (i)⇔(iii) denkliğinden*

$$a = x \circ (x * a)$$

olur ve hipotezden

$$a = x \circ (x * a) = x \circ (x * b)$$

elde edilir.

(v)⇒(i) *$x, y \in X$ için $x \leq y$ olsun. O zaman Tanım 3.1. (a_5) ve (a_3) den*

$$x * y = 0 = x * x$$

olur. Böylece (v) den $y = x$ elde edilir. Sonuç olarak Önerme 4.6. (i)⇔(ii) denkliğinden $\mathbb{X}$ p-yarıbasit pseudo-BCI cebridir..

(i)⇔(v') *Bu denklik (i)⇔(v) ile benzer şekilde kanıtlanır.*

(i)⇒(vi) *$a, b, x \in X$ için $a * x = b * x$ olsun. (i)⇔(ii) denkliğinden $\mathbb{X}$ p-yarıbasit ise o zaman*

$$x * a = 0 \circ (a * x)$$

ve

$$x * b = 0 \circ (b * x)$$

olur. Buradan Önerme 4.6. (i)⇔(iii) denkliğinden ve yukarıdaki özdeşliklerden

$$\begin{aligned} a &= x \circ (x * a) \\ &= x \circ (0 \circ (a * x)) \\ &= x \circ (0 \circ (b * x)) \\ &= x \circ (x * b) \\ &= b \end{aligned}$$

elde edilir.

(vi)⇒(i) $x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *olsun. O zaman Tanım 3.1.* (a_5) *ve* (a_3) *den*

$$x * y = 0 = y * y$$

olur. Böylece (vi) den $x = y$ *elde edilir. Sonuç olarak Önerme 4.6. (i)⇔(ii) denkliğinden* $\mathbb{X}$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebri olur.*

(i)⇔(vi') *Bu denklik (i)⇔(vi) ile benzer şekilde kanıtlanır.*

□

Örnek 4.17. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ *ve* $\mathbb{X}$*, sırasıyla Örnek 3.3., Örnek 3.4. ve Örnek 3.5. deki pseudo-BCI cebirleri olsunlar.* $\mathbb{X}_1$ *ve* $\mathbb{X}$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebri değilken* $\mathbb{X}_2$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebridir.*

Önerme 4.8. *(Dymek, 2012b)* $\mathbb{X}$ *bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri ise o zaman*

(i) *Her* $y \in X$ *için* $x * y = y$ *olacak şekilde tek bir* $x \in X$ *vardır.*

(i') *Her* $y \in X$ *için* $x' \circ y = y$ *olacak şekilde tek bir* $x' \in X$ *vardır.*

Kanıt. ***(i)*** $\mathbb{X}$ *bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri ve* $y \in X$ *olsun. O zaman sırasıyla Önerme 3.1.* (b_4)*, Tanım 3.1.* (a_3) *ve Önerme 4.6. (i)⇔(iv) denkliğinden*

$$\begin{aligned}(y \circ (0 * y)) * y &= (y * y) \circ (0 * y) \\ &= 0 \circ (0 * y) \\ &= y\end{aligned}$$

bulunur. Burada $x = y \circ (0 * y)$ *olarak alınırsa*

$$x * y = y$$

olur. O zaman

$$x * y = (y \circ (0 * y)) * y$$

olduğundan Önerme 4.7. (i)⇔(vi) denkliğinden

$$x = y \circ (0 * y)$$

olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır.

(i') *(i) ye benzer şekilde kanıtlanır.*

$\mathbb{X}$ *bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri ve $y \in X$ olsun. O zaman sırasıyla Önerme 3.1. (b_4), Tanım 3.1. (a_3) ve Önerme 4.6. (i)⇔(iv) denkliğinden*

$$\begin{aligned}(y * (0 \circ y)) \circ y &= (y \circ y) * (0 \circ y) \\ &= 0 * (0 \circ y) \\ &= y\end{aligned}$$

bulunur. Burada $x' = y * (0 \circ y)$ olarak alınırsa

$$x' \circ y = y$$

olur. O zaman

$$x' \circ y = (y * (0 \circ y)) \circ y$$

olduğundan Önerme 4.7. (i)⇔(vi) denkliğinden

$$x' = y * (0 \circ y)$$

olacak şekilde bir tek $x' \in X$ vardır.

□

Uyarı 4.14. *(Dymek, 2012b) Tanım 4.5. de, Bir $\mathbb{X}$ $\circ$-medyal pseudo-BCI cebri her $x, y, z, u \in X$ için*

$$(x * y) \circ (z * u) = (x * z) \circ (y * u)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer yukaıdaki özdeşlikte $z = u = 0$ alınırsa o zaman her $x, y \in X$ için

$$x * y = x \circ y$$

olur. Böylece bir $\circ$-medyal pseudo-BCI cebri bir (medyal) BCI-cebridir. Dolayısıyla p-yarıbasit pseudo-BCI cebridir. Gerçekten $\mathbb{X}$ $\circ$-medyal pseudo-BCI cebri olduğundan Önerme 4.5. (i) den

$$x * y = 0 \circ (y * x)$$

olur. Önerme 4.7. (i)⇔(ii) denkliğinden $\mathbb{X}$ p-yarıbasit pseudo-BCI cebri olur.

Aşağıdaki teoremde p-yarıbasit pseudo-BCI cebirleri ile grupların kategorisel anlamda denk olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.8. *(Dymek, 2012b)* ***(i)*** $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri olsun. Her* $x, y \in X$ *için*

$$x + y := x * (0 \circ y) = y \circ (0 * x)$$

ve

$$-x := 0 * x = 0 \circ x$$

olacak şekilde bir $\phi(\mathbb{X}) = (X, +, -, 0)$ *kümesi tanımlansın. O zaman* $\phi(\mathbb{X})$ *bir gruptur.*
(i') *Tersine olarak* $\mathbb{X} = (X, +, -, 0)$ *bir grup olsun. Her* $x, y \in X$ *için*

$$x * y := x - y,$$
$$x \circ y := -y + x$$
$$x \leq y \iff x * y = 0 = x \circ y$$

şeklinde tanımlanan $\psi(\mathbb{X}) = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *yapısı bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebridir.*
(ii) *Yukarıda tanımlanan* ϕ *ve* ψ *dönüşümleri birbirinin tersidir.*

Kanıt. ***(i)*** $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *p-yarıbasit BCI cebri olsun.*

- *Önerme 4.6. (i)⇔(v) denkliğinden "* $+$ *" iyi tanımlıdır. Gerçekten her* $x, y, x', y' \in X$ *için*

$$x + y := x * (0 \circ y) = y \circ (0 * x)$$
$$x' + y' := x' * (0 \circ y') = y' \circ (0 * x')$$

olur. Burada $x = x'$ *ve* $y = y'$ *ise o zaman*

$$x + y = x' + y'$$

olur.

- *"* $+$ *" birleşmelidir. Gerçekten her* $x, y, z \in X$ *için "* $+$ *" toplamanın tanımından ve Önerme 3.1.* (b_4) *den*

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= (y\circ(0*x))+z\\ &= (y\circ(0*x))*(0\circ z)\\ &= (y*(0\circ z))\circ(0*x)\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}x+(y+z) &= x+(y*(0\circ z))\\ &= (y*(0\circ z))\circ(0*x)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

elde edilir. Böylece $"+"$ *birleşmelidir.*

- $"0"$, *etkisiz elemandır. Gerçekten her* $x\in X$ *için sırasıyla* $"+"$ *tanımından, Tanım 3.1.* (a_3) *ve Önerme 3.1.* (b_8) *den*

$$\begin{aligned}x+0 &= x*(0\circ 0)\\ &= x*0\\ &= x\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}0+x &= x\circ(0*0)\\ &= x\circ 0\\ &= x\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $"0"$, $"+"$ *işlemine göre etkisiz (birim) elemanıdır.*

- *Her elemanın bir tersi vardır. Gerçekten her* $x\in X$ *için sırasıyla* $"+"$ *tanımından, Önerme 4.6. (i)⇔(iv) den ve Tanım 3.1.* (a_3) *den*

$$\begin{aligned}x+(0*x) &= x*(0\circ(0*x))\\ &= x*x\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(0\circ x)+x &= x\circ(0*(0\circ x))\\ &= x\circ x\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $x \in X$ için Önerme 3.2. (v) den

$$-x = 0 * x = 0 \circ x$$

olur. Böylece her $x \in X$ in $-x$ ile gösterilen bir tersi vardır.

Tüm bu özelliklerden dolayı $\phi(\mathbb{X}) = (X, +, -, 0)$ bir gruptur.

(i') $\mathbb{X} = (X, +, -, 0)$ *bir grup olsun. Her $x, y \in X$ için*

$$x * y := x - y,$$
$$x \circ y := -y + x,$$
$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x * y = 0 = x \circ y$$

olacak şekilde $\psi(\mathbb{X}) = (X, \leq, *, \circ, 0)$ olsun. $\psi(\mathbb{X})$ in bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri olduğu gösterilecektir.

- *Hipotezden Tanım 3.1. (a_5) sağlanır. Dolayısıyla her $x, y \in X$ için*

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x * y = 0 = x \circ y$$

olur.

- *Tanım 3.1. (a_1) in sağlanması için her $x, y, z \in X$ için*

$$(x * y) \circ (x * z) \leq z * y$$

yani

$$((x * y) \circ (x * z)) * (z * y) = 0$$

olduğunu göstermek gerekir. Gerçekten her $x, y, z \in X$ için " $*$ " ve " $\circ$ " tanımlarından

$$\begin{aligned}
((x * y) \circ (x * z)) * (z * y) &= ((x * y) \circ (x * z)) - (z * y) \\
&= (-(x * z) + (x * y)) + (y - z) \\
&= (-(x - z) + (x - y)) - (z - y) \\
&= ((z - x) + (x - y)) + (y - z) \\
&= (z - y) + (y - z) \\
&= z - z \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(x * y) \circ (x * z) \leq z * y$$

olur. Benzer şekilde

$$(x \circ y) * (x \circ z) \leq z \circ y$$

olduğu görülür. Böylece Tanım 3.1. (a_1) *sağlanmış olur.*

- *Her* $x \in X$ *için* " $*$ " *ve* " $\circ$ " *tanımlarından*

$$x * 0 = x - 0 = x$$

ve

$$x \circ 0 = -0 + x = x$$

bulunur. Böylece Önerme 3.1. (b_8) *sağlanmış olur.*

- *Her* $x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *ve* $y \leq x$ *olsun. O zaman*

$$x * y = x - y = 0$$

ve

$$y * x = y - x = 0$$

olur. Buradan

$$x - y + y = 0 + y$$

elde edilir. Böylece $x = y$ *bulunur. Dolayısıyla Tanım 3.1.* (a_4) *sağlanmış olur.*

Teorem 3.1. den $\psi(\mathbb{X}) = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebridir. Sonuç olarak Önerme 4.6. (i)⇔(ii) denkliğinden* $\psi(\mathbb{X})$ *bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebridir.*

(ii) *(i') koşulundan* ψ *ile* $(X, \leq, *, \circ, 0)$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebri elde edilir. (i) koşulundan* ϕ *yardımıyla* $(X, \oplus, \ominus, 0)$ *grubu elde edilir. O zaman her* $x, y \in X$ *için*

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x * (0 \circ y) \\ &= x - (0 \circ y) \\ &= x - (-y + 0) \\ &= x + y \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\ominus x &= 0 * x \\
&= 0 - x \\
&= -x
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $(X, +, -, 0)$ *ve* $(X, \oplus, \ominus, 0)$ *grupları aynıdır.*

Tersine olarak bir $(X, \leq, *, \circ, 0)$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebri alınsın. (i) koşulundan* ϕ*,* $(X, +, -, 0)$ *grubunu doğurur. Dolayısıyla (i') koşulundan* ψ*,* $(X, \subseteq, \star, \bullet, 0)$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebrini doğurur. O zaman Önerme 4.6. (i)⇔(iv) denkliğinden her* $x, y \in X$ *için*

$$
\begin{aligned}
x \star y &= x - y \\
&= x + (0 * y) \\
&= x * (0 \circ (0 * y)) \\
&= x * y
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
x \bullet y &= -y + x \\
&= (0 \circ y) + x \\
&= x \circ (0 * (0 \circ y)) \\
&= x \circ y
\end{aligned}
$$

olur. Böylece " $\subseteq$ " *ile* " $\leq$ " *çakışır. Dolayısıyla* $(X, \leq, *, \circ, 0)$ *ve* $(X, \subseteq, \star, \bullet, 0)$ *aynı p-yarıbasit pseudo-BCI cebirleridir.*

Böylece ϕ *ve* ψ *dönüşümleri birbirinin tersidir.*

Sonuç olarak $(X, \leq, *, \circ, 0)$ *ve* $(X, \subseteq, \star, \bullet, 0)$ *p-yarıbasit pseudo-BCI cebirleri kategorisel olarak denktir.*

$\square$

5. PSEUDO-BCI CEBİRLERİNİN PSEUDO-BCI İDEALLERİ

Tanım 5.1. *(Lee ve Park, 2009)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri ve* J*,* X *in boştan farklı herhangi bir altkümesi olsun.* X *in herhangi bir* y *elemanı için* $*(y, J)$ *ve* $\circ(y, J)$ *kümeleri*

$$*(y, J) := \{x \in X | x * y \in J\}$$
$$\circ(y, J) := \{x \in X | x \circ y \in J\}$$

olmak üzere J *aşağıdaki koşulları sağlıyorsa* J *ye* $\mathbb{X}$ *in bir* ***pseudo-BCI ideali*** *denir:*

- ***(I1)*** $0 \in J$,
- ***(I2)*** *Her* $y \in J$ *için* $*(y, J) \subseteq J$ *ve* $\circ(y, J) \subseteq J$ *olur.*

Örnek 5.1. *(Dymek, 2012a)* $\{0\}$ *ve* X *pseudo-BCI ideallerin aşikar örnekleridir.*

Örnek 5.2. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$, *Örnek 3.2. deki pseudo-BCI cebri olsun.* $J = \{0, b\} \subseteq X$ *kümesi* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI idealidir:*

(I1) $0 \in J$ *olduğundan (I1) sağlanır.*

(I2) $0 \in J$ *için*

$$*(0, J) = \{x \in X | x * 0 \in J\} = \{0, b\} \subseteq J$$
$$\circ(0, J) = \{x \in X | x \circ 0 \in J\} = \{0, b\} \subseteq J$$

bulunur. $b \in J$ *için*

$$*(b, J) = \{x \in X | x * b \in J\} = \{0, b\} \subseteq J$$
$$\circ(b, J) = \{x \in X | x \circ b \in J\} = \{0, b\} \subseteq J$$

bulunur. Böylece (I2) sağlanmış olur.

Uyarı 5.1. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. Her* $x, y \in X$ *için*

$$x * y = x \circ y$$

koşulu sağlanıyorsa o zaman $\mathbb{X}$ *in her pseudo-BCI ideali bir BCI-ideali olur.*

Önerme 5.1. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri ve* J*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olsun.* $x \in J$ *ve* $y \leq x$ *ise o zaman* $y \in J$ *olur.*

Kanıt. *J, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali ve $x \in J$ ve $y \leq x$ olsun. O zaman*

$$y * x = 0 \quad \textit{ve} \quad y \circ x = 0$$

olur. (I1) den $0 \in J$ olduğundan

$$y * x \in J \quad \textit{ve} \quad y \circ x \in J$$

olur. Buradan

$$y \in *(x, J) \quad \textit{ve} \quad y \in \circ(x, J)$$

bulunur. Böylece (I2) den $y \in J$ elde edilir.

$\square$

Tanım 5.2. *(Jun et al., 2006) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. Herhangi bir $a \in X$ için*

$$\downarrow a := \{x \in X | x \leq a\}$$

kümesine $\mathbb{X}$ in bir ***başlangıç kısmı*** *denir.*

Teorem 5.1. *(Jun et al., 2006) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. Her $a \in X$ için $\downarrow a = \{x \in X | x \leq a\}$ başlangıç kısmının $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:*

- ***(i)*** *Her $x, y, z \in X$ için $x * y \leq z$, $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$,*
- ***(ii)*** *Her $x, y, z, \in X$ için $x \circ y \leq z$, $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.*

Kanıt. *($\Rightarrow$) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri ve her $a \in X$ için $\downarrow a$, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olsun. $x, y, z \in X$ için $x * y \leq z$, $x \circ y \leq z$ ve $y \leq z$ alınsın. $\downarrow a$ nın tanımından*

$$x * y \in \downarrow z, \quad x \circ y \downarrow z \quad \textit{ve} \quad y \in \downarrow z$$

olur. Buradan $y \in \downarrow z$ için

$$x \in *(y, \downarrow z) \quad \textit{ve} \quad x \in \circ(y, \downarrow z)$$

olur. $\downarrow z$, $\mathfrak{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olduğundan (I2) den her $y \in \downarrow z$ için

$$*(y, \downarrow z) \subseteq \downarrow z \quad \textit{ve} \quad \circ(y, \downarrow z) \subseteq \downarrow z$$

bulunur. Buradan

$$x \in *(y, \downarrow z) \subseteq \downarrow z \quad \textit{ve} \quad x \in \circ(y, \downarrow z) \subseteq \downarrow z$$

olduğundan $x \in \downarrow z$ olur. Böylece $x \leq z$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. (i) ve (ii) nin sağlansın. $z \in X$ için $\downarrow z$ alınsın.*

$0 \in \downarrow z$ *dir. Çünkü (i) ve (ii) de $x = 0$ alınırsa o zaman*

$$0 * y \leq z, \quad 0 \circ y \leq z \quad \textit{ve} \quad y \leq z \implies 0 \leq z$$

olur. Böylece $0 \in \downarrow z$ sağlanır.

Şimdi her $y \in \downarrow z$ için $a \in *(y, \downarrow z)$ ve $b \in \circ(y, \downarrow z)$ olsun. O zaman

$$a * y \in \downarrow z \quad \textit{ve} \quad b \circ y \in \downarrow z$$

bulunur. Böylece

$$a * y \leq z \quad \textit{ve} \quad b \circ y \leq z$$

olur. $y \in \downarrow z$ olduğundan

$$a \leq z \quad \textit{ve} \quad b \leq z$$

bulunur. O zaman

$$a \in \downarrow z \quad \textit{ve} \quad b \in \downarrow z$$

olur. Dolayısıyla

$$*(y, \downarrow z) \subseteq \downarrow z \quad \textit{ve} \quad \circ(y, \downarrow z) \subseteq \downarrow z$$

elde edilir. Böylece her $z \in X$ için $\downarrow z$ nin $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olduğu görülür.

$\square$

Teorem 5.2. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. J, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali ise o zaman aşağıdakiler sağlanır:*

(i) *Her $x, y, z \in X$ için $x, y \in J$, $\;z * y \leq x\;$ ise $\;z \in J$,*

(ii) *Her $a, b, c \in X$ için $a, b \in J$, $\;c \circ b \leq a\;$ ise $\;c \in J$.*

Kanıt. ***(i)*** *J, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-ideali olsun. $z, y, z \in X$ için $x, y \in J$ ve $z * y \leq x$ alınsın. O zaman*

$$(z * y) \circ x = 0$$

olur. Buradan J, $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olduğundan (I1) den*

$$(z * y) \circ x = 0 \in J$$

olduğundan

$$(z * y) \circ x \in J$$

olur. Uyarı 5.1. ve (I2) den

$$(z * y) \in \circ(x, J) \subseteq J$$

olur. $z * y \in J$ *olduğundan Tanım 0.5.1. den* $z \in *(y, J)$ *bulunur.* J, $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olduğundan (I2) den*

$$z \in *(y, J) \subseteq J$$

olur. Dolayısıyla $z \in J$ *elde edilir. Böylece (i) sağlanmış olur.*

(ii) J, $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olsun.* $a, b, c \in X$ *için* $a, b \in J$ *ve* $c \circ b \leq a$ *alınsın. O zaman*

$$(c \circ b) * a = 0$$

olur. Buradan J *bir pseudo-BCI ideali olduğundan (I1) den*

$$(c \circ b) * a = 0 \in J$$

olduğundan

$$(c \circ b) * a \in J$$

olur. Tanım 5.1. den

$$(c \circ b) \in *(a, J) \subseteq J$$

olur. $c \circ b \in J$ *olduğundan Tanım 5.1. den* $c \in \circ(b, J)$ *bulunur.* J, $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olduğundan (I2) den*

$$c \in \circ(b, J) \subseteq J$$

olur. Dolayısıyla $c \in J$ *elde edilir. Böylece (ii) sağlanmış olur.*

□

Teorem 5.3. *(Jun et al., 2006) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri ve J, $\mathbb{X}$ in pseudo-BCI altcebri olsun. O zaman J nin $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in X$ için*

$$x \in J \quad \text{ve} \quad y \in X - J \implies y * x \in X - J \quad \text{ve} \quad y \circ x \in X - J$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ *J nin $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali ve her $x, y \in X$ için $x \in J$ ve $y \in X - J$ olsun.*

$y * x \notin X - J$ olsun. O zaman

$$y * x \in J$$

olur. Dolayısıyla

$$y \in *(x, J) \subseteq J$$

olur. Buradan $y \in J$ bulunur. Fakat bu kabul ile çelişir. Böylece

$$y * x \in X - J$$

bulunur. Şimdi $y \circ x \notin X - J$ olsun. O zaman

$$y \circ x \in J$$

olur. Dolayısıyla

$$y \in \circ(x, J) \subseteq J$$

elde edilir. Buradan $y \in J$ bulunur. Bu yine bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$y \circ x \in X - J$$

bulunur.

($\Leftarrow$) Her $x, y \in X$ için

$$x \in J \quad \text{ve} \quad y \in X - J \implies y * x \in X - J \quad \text{ve} \quad y \circ x \in X - J$$

koşulu sağlansın. Bu durumda $\mathbb{X}$ in J pseudo-BCI altcebrinin $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olduğu gösterilmelidir.

J, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI altcebri olduğundan $0 \in J$ olur. Her $x \in J$ için $y \in *(x, J)$ olsun. O zaman

$$y * x \in J$$

olur. $y \notin J$ *olsa kabulden*

$$y * x \in X - J$$

olur. Bu ise $y * x \in J$ *olmasına bir çelişkidir. Dolayısıyla* $y \in J$ *olur ve buradan*

$$*(x, J) \subseteq J$$

elde edilir.

Şimdi bir $z \in \circ(x, J)$ *alınsın. O zaman*

$$z \circ x \in J$$

olur. $z \notin J$ *olsa kabulden*

$$z \circ x \in X - J$$

bulunur. Bu ise $z \circ x \in J$ *olmasına bir çelişkidir. Dolayısıyla* $z \in J$ *olur ve buradan*

$$\circ(x, J) \subseteq J$$

elde edilir.

Böylece J*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olur.*

□

Uyarı 5.2. *(Jun et al., 2006) Her* $\mathbb{X}$ *pseudo-BCI cebri bir*

$$K(\mathbb{X}) = \{x \in X | 0 \leq x\}$$

maksimal pseudo-BCK cebrini kapsar.

Önerme 5.2. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun.* $x \in K(\mathbb{X})$ *ve* $y \in X - K(\mathbb{X})$ *ise o zaman* $x * y \in X - K(\mathbb{X})$ *ve* $x \circ y \in X - K(\mathbb{X})$ *olur.*

Kanıt. $x \in K(\mathbb{X})$ *ve* $y \in X - K(\mathbb{X})$ *olsun.* $x * y \in K(\mathbb{X})$ *ise o zaman* $K(\mathbb{X})$*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI altcebri olduğundan*

$$x \circ (x * y) \in K(\mathbb{X})$$

olur. Dolayısıyla $K(\mathbb{X})$ *kümesinin tanımından ve Tanım 3.1.* (a_2) *den*

$$0 \leq x \circ (x * y) \leq y$$

olur. Böylece $K(\mathbb{X})$ *kümesinin tanımından ve* $0 \leq y$ *olduğundan* $y \in K(\mathbb{X})$ *olur. Bu ise* $y \in X - K(\mathbb{X})$ *kabulü ile çelişir. Bu yüzden*

$$x * y \in X - K(\mathbb{X})$$

bulunur.

Şimdi $x \circ y \in K(\mathbb{X})$ *ise o zaman* $K(\mathbb{X})$*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI altcebri olduğundan*

$$x * (x \circ y) \in K(\mathbb{X})$$

olur. Buradan $K(\mathbb{X})$ *kümesinin tanımından ve Tanım 3.1.* (a_2) *den*

$$0 \leq x * (x \circ y) \leq y$$

olur. Böylece $K(\mathbb{X})$ *kümesinin tanımından* $0 \leq y$ *olduğundan* $y \in K(\mathbb{X})$ *olur. Bu ise* $y \in X - K(\mathbb{X})$ *kabulü ile çelişir. Bu yüzden*

$$x \circ y \in X - K(\mathbb{X})$$

bulunur.

Böylece istenen gösterilmiş olur.

$\square$

Tanım 5.3. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun.* J*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olmak üzere eğer* J*,* $\mathbb{X}$ *in bir altcebri ise o zaman* J *ya* ***kapalıdır****, denir.*

Önerme 5.3. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri ve* J*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olsun.* J *nın kapalı olması için gerek ve yeter koşul her* $x \in J$ *için* $0 * x = 0 \circ x \in J$ *yı sağlamasıdır.*

Kanıt. *(⇒)* J*,* $\mathbb{X}$ *in kapalı bir pseudo-BCI ideali olsun. O zaman Önerme 3.2. (v) den her* $x \in X$ *için*

$$0 * x = 0 \circ x$$

olur. J *kapalı ise o zaman*

$$x \in J \quad ve \quad 0 \in J \implies 0 * x \in J$$

olur.

***(⇔)** Şimdi $x, y \in J$ alalım. J nın kapalı bir pseudo-BCI cebri olması için $x * y \in J$ olduğu gösterilmelidir. Önerme 3.1 (b_6) da $z = 0$ alınırsa Önerme 3.1. (b_8) den*

$$(x * y) * (0 * y) \leq x * 0 = x$$

bulunur. Buradan $x \in J$ olduğu için Önerme 5.1. den

$$(x * y) * (0 * y) \in J$$

olur. J, $\mathbb{X}$ in pseudo-BCI ideali olduğundan ve $0 * y \in J$ olduğundan

$$x * y \in J$$

elde edilir. Benzer şekilde her $x, y \in J$ için

$$x \circ y \in J$$

olur. Böylece J, $\mathbb{X}$ in bir altcebridir ve dolayısıyla kapalı bir pseudo-BCI idealidir.

□

Teorem 5.4. *(Jun et al., 2006) $\mathbb{X}$ bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman $\mathbb{X}$ in $K(\mathbb{X})$ maksimal pseudo-BCK cebri, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI idealidir.*

Kanıt. *$x, y \in X$ alalım. $x \in K(\mathbb{X})$ ve $y \in X - K(\mathbb{X})$ olsun. Tanım 3.1. (a_1) ve Önerme 3.1. (b_8) den*

$$(y * x) \circ y = (y * x) \circ (y * 0) \leq 0 * x$$

olur. $x \in K(\mathbb{X})$ olduğundan

$$(y * x) \circ y \leq 0 * x = 0$$

olur. Benzer şekilde

$$(y \circ x) * y = (y \circ x) * (y \circ 0) \leq 0 \circ x = 0$$

elde edilir. Buradan

$$(y * x) \circ y = 0$$

olduğundan

$$y * x \leq y$$

olur ve

$$(y \circ x) * y = 0$$

olduğundan

$$y \circ x \leq y$$

bulunur.

Şimdi $y * x \in K(\mathbb{X})$ *olsun. O zaman*

$$0 \leq y * x \leq y$$

olur. Böylece $0 \leq y$ *olduğundan* $y \in K(\mathbb{X})$ *bulunur. Bu ise* $y \in X - K(\mathbb{X})$ *kabulü ile çelişir. Bu yüzden*

$$y * x \in X - K(\mathbb{X})$$

elde edilir.

$y \circ x \in K(\mathbb{X})$ *olsun. O zaman*

$$0 \leq y \circ x \leq y$$

olur. Böylece $0 \leq y$ *olduğundan* $y \in K(\mathbb{X})$ *bulunur. Bu ise* $y \in X - K(\mathbb{X})$ *kabulü ile çelişir. Bu yüzden*

$$y \circ x \in X - K(\mathbb{X})$$

elde edilir.

Böylece Teorem 5.3. den $K(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olur.*

□

Sonuç 5.1. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri olsun. O zaman* $K(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ *in kapalı bir pseudo-BCI idealidir.*

Teorem 5.5. *(Dymek, 2012a)* $\mathbb{X}$ *bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri ve* J, $\mathbb{X}$ *in bir altkümesi olsun. O zaman* J, $\mathbb{X}$ *in kapalı bir pseudo-BCI ideali olması için gerek ve yeter koşul* J *nın* $\mathbb{X}$ *in bir altcebri olmasıdır.*

Kanıt. *(⇒)* $\mathbb{X}$ *bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri ve* J, $\mathbb{X}$ *in kapalı bir psurdo-BCI ideali olsun. O zaman* J, $\mathbb{X}$ *in bir altcebridir.*
(⇐) $\mathbb{X}$ *in p-yarıbasit pseudo-BCI cebri olduğunu ve* J *nın* $\mathbb{X}$ *in bir altcebri olsun. O zaman* J *nın* $\mathbb{X}$ *in bir ideali olduğunu göstermek yeterlidir.* $x, y \in X$ *için* $x * y \in I$ *ve* $y \in I$ *olsun. Buradan Önerme 4.6. (i)⇔(iii) ve Önerme 4.7. (i)⇔(ii) den*

$$\begin{aligned} x &= y \circ (y * x) \\ &= y \circ (0 \circ (x * y)) \end{aligned}$$

olur. $0, y, x * y \in J$ *ve* J, $\mathbb{X}$ *in bir altcebri olduğundan* $x \in J$ *elde edilir. Dolayısıyla* J, $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI idealidir. Böylece* J, $\mathbb{X}$ *in kapalı bir pseudo-BCI idealidir.*

□

Sonuç 5.2. *(Dymek, 2012a) Bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebrinin her altcebri bir pseudo-BCI idealidir.*

Teorem 5.6. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X}$ *bir pseudo-BCI cebri ve* J, $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir:*

- ***(i)*** J, $K(\mathbb{X})$ *maksimal pseudo-BCK cebrini kapsar* ($K(\mathbb{X}) \subset J$),
- ***(ii)*** *Her* $x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *ve* $x \in J$ *ise o zaman* $y \in J$ *olur.*

Kanıt. ***(i)⇒(ii)*** $K(\mathbb{X}) \subset J$ *ve* $x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *ve* $x \in J$ *olsun. O zaman* $x * y = 0$ *olur ve sırasıyla Tanım 3.1.* (a_3)*, hipotez, Tanım 3.1.* (a_3) *ve Tanım 3.1.* (a_1) *den*

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \circ 0 \\ &= 0 \circ (x * y) \\ &= (x * x) \circ (x * y) \\ &\leq y * x \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $y * x \in K(\mathbb{X})$ *demektir. Dolayısıyla*

$$y * x \in K(\mathbb{X}) \subset J$$

olur. Buradan

$$y \in *(x, J)$$

bulunur. J, $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olduğundan*

$$y \in *(x, J) \subseteq J$$

olur. Böylece $y \in J$ *elde edilir.*

(ii)⇒(i) *Her* $x, y \in X$ *için* $x \leq y$ *ve* $x \in J$ *ise o zaman* $y \in J$ *koşulu sağlansın.*

$x \in K(\mathbb{X})$ *olsun.* $K(\mathbb{X})$ *kümesinin tanımından* $0 \leq x$ *olur.* J*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olduğundan* $0 \in J$ *dir. Ayrıca* $0 \leq x$ *olduğundan hipotezden* $x \in J$ *olur. Böylece*

$$K(\mathbb{X}) \subset J$$

sağlanmış olur.

□

Tanım 5.4. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *ve* $\mathbb{Y} = (Y, \leq, *, \circ, 0)$ *birer pseudo-BCI cebri olsunlar. Her* $x, y \in X$ *için*

$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$
$$f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$$

olacak şekilde $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *dönüşümüne bir* ***pseudo-BCI homomorfizması*** *denir.*

Önerme 5.4. *(Jun et al., 2006)* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *bir pseudo-BCI homomorfizması ise o zaman* $0_{\mathbb{X}}$ *ve* $0_{\mathbb{Y}}$ *sırasıyla* $\mathbb{X}$ *ve* $\mathbb{Y}$ *nin sabit elemanları olmak üzere* $f(0_{\mathbb{X}}) = 0_{\mathbb{Y}}$ *dir.*

Kanıt. $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *bir pseudo-BCI homomorfizması ve* $0_{\mathbb{X}}$ *ve* $0_{\mathbb{Y}}$ *sırasıyla* $\mathbb{X}$ *ve* $\mathbb{Y}$ *nin sabit elemanları olsun. O zaman Tanım 3.1.* (a_3) *den*

$$f(0_{\mathbb{X}}) = f(0_{\mathbb{X}} * 0_{\mathbb{X}})$$

olur. f*, bir pseudo-BCI homomorfizması olduğundan ve* $\mathbb{Y}$ *bir pseudo-BCI cebri olduğundan Tanım 3.1.* (a_3) *den*

$$\begin{aligned} f(0_{\mathbb{X}}) &= f(0_{\mathbb{X}} * 0_{\mathbb{X}}) \\ &= f(0_{\mathbb{X}}) * f(0_{\mathbb{X}}) \\ &= 0_{\mathbb{Y}} \end{aligned}$$

olur. Böylece $f(0_{\mathbb{X}}) = 0_{\mathbb{Y}}$ *bulunur.*

□

Örnek 5.3. *Birim dönüşüm ve sıfır dönüşümü aşikar pseudo-BCI homomorfizması örnekleridir.*

Örnek 5.4. $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$*, Örnek 3.2. deki pseudo-BCI cebri olsun.*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \\ 0 &\longrightarrow 0 \\ a &\longrightarrow a \\ b &\longrightarrow 0 \\ c &\longrightarrow 0 \\ d &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f *dönüşümü bir pseudo-BCI homomorfizmasıdır.*

Teorem 5.7. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X}$ *ve* $\mathbb{Y}$ *pseudo-BCI cebirleri ve* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *pseudo-BCI homomorfizması olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:*

(i) J*,* $\mathbb{Y}$ *nin bir pseudo-BCI ideali ise o zaman* $f^{-1}(J)$*,* $\mathbb{X}$ *in pseudo-BCI idealidir.*

(ii) f *örten ve* I*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali ise o zaman* $f(I)$*,* $\mathbb{Y}$ *nin bir pseudo-BCI idealidir.*

Kanıt. ***(i)*** J *nin* $\mathbb{Y}$ *nin bir pseudo- BCI ideali olsun. O zaman* $0_{\mathbb{Y}} \in J$ *olduğundan ve Önerme 5.4. den* $0_{\mathbb{X}} \in f^{-1}(J)$ *olur.*

Her $y \in f^{-1}(J)$ *için* $a \in *(y, f^{-1}(J))$ *ve* $b \in \circ(y, f^{-1}(J))$ *alınsın. O zaman*

$$a * y \in f^{-1}(J) \text{ ve } b \circ y \in f^{-1}(J)$$

olur. f *bir pseudo-BCI homomorfizması olduğundan*

$$f(a) * f(y) = f(a * y) \in f(f^{-1}(J)) = J$$

ve

$$f(b) \circ f(y) = f(b \circ y) \in f(f^{-1}(J)) = J$$

olur. Böylece

$$f(a) \in *(f(y), J) \quad \text{ve} \quad f(b) \in \circ(f(y), J)$$

bulunur. J*,* $\mathbb{X}$ *in bir pseudo-BCI ideali olduğundan*

$$f(a) \in *(f(y), J) \subseteq J \quad \textit{ve} \quad f(b) \in \circ(f(y), J) \subseteq J$$

bulunur ve $f(y) \in J$ olur. Dolayısıyla

$$a \in f^{-1}(J) \quad \textit{ve} \quad b \in f^{-1}(J)$$

olur. Buradan

$$*(y, f^{-1}(J)) \subseteq f^{-1}(J) \quad \textit{ve} \quad \circ(y, f^{-1}(J)) \subseteq f^{-1}(J)$$

bulunur. Böylece $f^{-1}(J)$, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olur.

(ii) *f örten bir dönüşüm ve I, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olsun. O zaman $0_{\mathbb{X}} \in I$ olduğundan $0_{\mathbb{Y}} \in f(I)$ olur.*

Her $y \in f(I)$ ve $a, b \in Y$ için $a \in *(y, f(I))$ ve $b \in \circ(y, f(I))$ olsun. O zaman

$$a * y \in f(I) \quad \textit{ve} \quad b \circ y \in f(I)$$

olur. Buradan

$$f(x_*) = a * y \quad \textit{ve} \quad f(x_\circ) = b \circ y$$

olacak şekilde $x_*, x_\circ \in I$ vardır.

$y \in f(I)$ olduğundan

$$f(x_y) = y$$

olacak şekilde bir $x_y \in I$ vardır. Üstelik f örten olduğundan

$$f(x_a) = a \quad \textit{ve} \quad f(x_b) = b$$

olacak şekilde $x_a, x_b \in X$ vardır. f bir pseudo-BCI homomorfizması olduğundan

$$f(x_a * x_y) = f(x_a) * f(x_y) = a * y \in f(I)$$

ve

$$f(x_b \circ x_y) = f(x_b) \circ f(x_y) = b \circ y \in f(I)$$

olduğundan

$$x_a * x_y \in I \quad \textit{ve} \quad x_b \circ x_y \in I$$

bulunur. I, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olduğundan

$$x_a \in *(x_y, I) \subseteq I \quad ve \quad x_b \in \circ(x_y, I) \subseteq I$$

elde edilir. Buradan

$$a = f(x_a) \in f(I) \quad ve \quad b = f(x_b) \in f(I)$$

olur. Dolayısıyla

$$*(y, f(I)) \subseteq f(I) \quad ve \quad \circ(y, f(I)) \subseteq f(I)$$

elde edilir. Böylece $f(I)$, $\mathbb{Y}$ nin bir pseudo-BCI idealidir.

□

Tanım 5.5. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ *ve* $\mathbb{Y} = (Y, \leq, *, \circ, 0)$ *pseudo-BCI cebirleri ve $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ dönüşümü bir pseudo-BCI homomorfizması olsun. O zaman*

$$Ker(f) := \{x \in X | f(x) = 0_{\mathbb{Y}}\}$$

kümesine f nin ***çekirdeği*** *denir.*

Teorem 5.8. *(Jun et al., 2006)* $\mathbb{X}$ *ve* $\mathbb{Y}$ *pseudo-BCI cebirleri ve $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ dönüşümü bir pseudo-BCI homomorfizması olsun. O zaman $Ker(f)$ kümesi $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI idealidir.*

Kanıt. $\mathbb{X}$ *ve Y pseudo-BCI cebirleri ve $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ dönüşümü bir pseudo-BCI homomorfizması olsun.*

$0_{\mathbb{X}} \in X$ için Önerme 5.4. den $0_{\mathbb{X}} \in Ker(f)$ elde edilir.

Şimdi $y \in Ker(f)$ için

$$*(y, Ker(f)) \subseteq Ker(f) \quad ve \quad \circ(y, Ker(f)) \subseteq Ker(f)$$

olduğu göstermek için $Ker(f)$ in $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olduğunu göstermek yeterlidir.

$x \in *(y, Ker(f))$ ve $z \in \circ(y, Ker(f))$ olsun. O zaman

$$x * y \in Ker(f) \quad ve \quad z \circ y \in Ker(f)$$

olur. Buradan

$$f(x * y) = 0_{\mathbb{Y}} \quad ve \quad f(z \circ y) = 0_{\mathbb{Y}}$$

bulunur. f bir pseudo-BCI homomorfizması olduğundan

$$f(x * y) = f(x) * f(y) = 0_{\mathbb{Y}} \quad ve \quad f(z \circ y) = f(z) \circ f(y) = 0_{\mathbb{Y}}$$

olur. y nin seçilişinden $f(y) = 0_{\mathbb{Y}}$ olduğundan

$$f(x) * 0_{\mathbb{Y}} = 0_{\mathbb{Y}} \quad ve \quad f(z) \circ 0_{\mathbb{Y}} = 0_{\mathbb{Y}}$$

olur. Önerme 3.1. (b_8) den

$$f(x) = 0_{\mathbb{Y}} \quad ve \quad f(z) = 0_{\mathbb{Y}}$$

bulunur. Dolayısıyla $x \in Ker(f)$ olur. Böylece

$$*(y, Ker(f)) \subseteq Ker(f) \quad ve \quad \circ(y, Ker(f)) \subseteq Ker(f)$$

olur. Dolayısıyla $Ker(f)$, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI idealidir.

□

Örnek 5.5. *$\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ ve f, Örnek 5.4. deki pseudo-BCI cebri ve pseudo-BCI homomorfizması olsunlar. O zaman f nin çekirdeği*

$$Ker(f) = \{0, b, c, d\}$$

şeklindedir ve $Ker(f)$, $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI idealidir.

(I1) *$0 \in Ker(f)$ olduğundan (I1) sağlanır.*

(I2) *$0 \in Ker(f)$ için*

$$*(0, Ker(f)) = \{x \in X | x * 0 \in Ker(f)\} = \{0, b, c, d\} \subseteq Ker(f)$$
$$\circ(0, Ker(f)) = \{x \in X | x \circ 0 \in Ker(f)\} = \{0, b, c, d\} \subseteq Ker(f)$$

bulunur. $b \in Ker(f)$ için

$$*(b, Ker(f)) = \{x \in X | x * b \in Ker(f)\} = \{0, b, c, d\} \subseteq Ker(f)$$
$$\circ(b, Ker(f)) = \{x \in X | x \circ b \in Ker(f)\} = \{0, b, c, d\} \subseteq Ker(f)$$

olur. $c \in Ker(f)$ için

$$*(c, Ker(f)) = \{x \in X | x * c \in Ker(f)\} = \{0, b, c, d\} \subseteq Ker(f)$$
$$\circ(c, Ker(f)) = \{x \in X | x \circ c \in Ker(f)\} = \{0, b, c, d\} \subseteq Ker(f)$$

bulunur. $d \in Ker(f)$ için

$$*(d, Ker(f)) = \{x \in X | x * d \in Ker(f)\} = \{0, b, c, d\} \subseteq Ker(f)$$
$$\circ(d, Ker(f)) = \{x \in X | x \circ d \in Ker(f)\} = \{0, b, c, d\} \subseteq Ker(f)$$

elde edilir. Böylece (I2) sağlanmış olur.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, ilk olarak pseudo-BCI cebirlerinin yapısı, genel özellikleri, daha sonra pseudo-BCI cebirlerinde atomlar, dallar, medyaller, p-yarıbasitlik ve idealler incelendi. Bunun sonucunda, bir $\mathbb{X}$ pseudo-BCI cebri ve $\mathbb{X}$ in bir altcebri olan $K(\mathbb{X})$ için $\mathbb{X} = K(\mathbb{X})$ olduğunda $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCK cebrine dönüştüğü görüldü. Pseudo-BCI cebirlerinin atomlarının farklı karakterizasyonları üzerinde duruldu ve X kümesinin atomlara ait dalların birleşimiyle oluşacağı görüldü. p-yarıbasit pseudo-BCI cebirlerinin farklı karakterizasyonları incelendi. Bunun sonucunda, bir p-yarıbasit pseudo BCI- cebrinde " $=$ " ile " $\leq$ " yer değiştirirse o cebrin bir BCI-cebrine dönüşeceği gösterildi. Bir $\mathbb{X} = (X, \leq, *, \circ, 0)$ p-yarıbasit pseudo-BCI cebrinin bir ϕ dönüşümü yardımıyla oluşan $\phi(\mathbb{X}) = (X, +, -, 0)$ yapısının bir grup yapısı gösterdiği belirtildi. Tersine olarak bir $\mathbb{X} = (X, +, -, 0)$ grubunun bir ψ dönüşümü yardımıyla oluşan $\psi(\mathbb{X}) = (X, \leq, *, \circ, 0)$ yapısının bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebri olduğu görüldü. Ayrıca bir p-yarıbasit pseudo-BCI cebrinin her altcebrinin bir pseudo-BCI cebri olduğundan bahsedildi. Son olarak bir f pseudo-BCI homomorfizmasını tanımlanıp f nin $Ker(f)$ çekirdeğinin $\mathbb{X}$ in bir pseudo-BCI ideali olduğuna ulaşıldı.

BCI-cebirlerinde türev üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bundan sonraki çalışmalar pseudo-BCI cebirlerinde türevi incelemek olacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Georgescu, G. ve Iorgulescu, A., 2001, Pseudo-BCK Algebras: An Extension of BCK Algebras, Springer-Verlag London Limited, Combinatorics, Computability and Logic 97-114 pp.

Hungerford, T.W., 1974, Algebra, Holf, Rinehart and Winston, Inc., the United States of America, 52-53 pp.

Jun, Y.B., Kim, H.S. ve Neggers, J., 2006, On Pseudo-BCI Ideals of Pseudo-BCI Algebras, UDK (512.222), 58p, 39-46 pp.

Dudek, W.A. ve Jun, Y.B., 2008, Pseudo-BCI Algebras, The Busan Gyeongnam Mathematical Society, (187), East Asian Math. J. (24), No.2, 187-190 pp.

Dymek, G., 2012, Atoms and Ideals of Pseudo-BCI-Algebras, Commentationes Mathematicae Vol.52, No.1, 73-90 pp.

Dymek, G., 2012, p-Semisimple Pseudo-BCI-Algebras, Old City Publishing, Inc., J. of Mult.-Valued Logic and Soft Computing, Vol.19, 461-474 pp.

Lee, K.J. ve Park, C.H., 2009, Some Ideals of Pseudo BCI-Algebras, Korean SIGCAM and KSCAM, J. Appl. Math. and Informatics Vol.27, No.1-2, 217-231 pp.

Hao, J. ve Li, C.X., 2004, On Ideals of an Ideal in a BCI-Algebra, Project 102028 supported bu natural ScienceFoundation of Zhejiang Province, P.R. China, Scientiae Mathematicae Japonicae, No.10, 493-500 pp.