

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FİZİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**MAXWELL VE SÜPER MAXWELL KÜTLEÇEKİM
TEORİLERİ**

SALİH KİBAROĞLU

KOCAELİ 2017

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

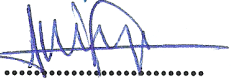
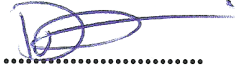
FİZİK
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MAXWELL VE SÜPER MAXWELL KÜTLEÇEKİM
TEORİLERİ

SALİH KİBAROĞLU

Yrd. Doç. Dr. Oktay CEBECİOĞLU
Danışman, Kocaeli Üniversitesi
Doç. Dr. Jale Yılmazkaya SÜNGÜ
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi
Doç. Dr. Ali DEMİR
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi
Doç. Dr. Mustafa ERKOVAN
Jüri Üyesi, Sakarya Üniversitesi
Doç. Dr. Cem Salih ÜN
Jüri Üyesi, Uludağ Üniversitesi


.....

.....

.....

.....

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 19.06.2017

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER

Bu çalışmada Maxwell simetrisine ölçekleme simetrisinin eklenmesiyle oluşan yeni durum ve bunu temel alan genişletilmiş kütleçekim teorisinin oluşturulması incelendi. Literatüre ilave olarak Maxwell-Weyl kütleçekim teorisi oluşturuldu ve bunun süpersimetrik genelleştirmesi yapıldı.

Öncelikle bana bu tezi yazma kuvvetini nasib eden Allah’a hamd ve şükrederim. İkinci olarak, diğer peygamberler de dahil olmak üzere, son Resulüne salât-u selâm ederim.

Çalışma sürecinde desteklerinden dolayı danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Oktay Cebecioğlu ve Doç. Dr. Mustafa Erkovan’a teşekkür ederim.

Tezin süpersimetri ile alakalı kısımları TÜBİTAK tarafından 2015 yılı 2. dönem 2214-A “Yurt Dışı Araştırma Burs Programı” kapsamında desteklenmiştir. Bu proje Polonya’nın Wrocław Üniversitesi Teorik Fizik Enstitüsü’nde Prof. Dr. Jerzy Kowalski-Glikman’ın koordinatörlüğünde gerçekleştirilmiştir.

Haziran - 2017

Salih KİBAROĞLU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
GİRİŞ	1
1. KÜTLEÇEKİM, DİFERANSİYEL GEOMETRİ VE AYAR TEORİSİ.....	4
1.1. Genel Görelilik Teorisi.....	4
1.1.1. Vierbein formalizmi	4
1.1.2. Jeodezik denklemi ve Christoffel sembolü	6
1.1.3. Paralel öteleme ve kovaryant türev	8
1.1.4. Afın bağlantı spin bağlantı ilişkisi	12
1.1.5. Eğrilik tensörü.....	14
1.1.6. Einstein alan denklemi	16
1.2. Diferansiyel Geometri	17
1.2.1. Formlar, dış çarpım ve dış türev	18
1.2.2. Dual eşlenik.....	20
1.2.3. İç çarpım ve Lie türevi	22
1.3. Ayar Teorisi.....	24
1.3.1. Global ve yerel değişmezlik.....	24
1.3.2. $U(1)$ ayar teorisi	28
1.3.3. Lorentz değişmezliği	31
2. SÜPERSİMETRİ VE SÜPER KÜTLEÇEKİM TEORİSİ	36
2.1. Süpersimetri	36
2.1.1. Süper Poincare grubu	36
2.2. Süper Kütleçekim Teorisi.....	38
2.2.1. Süper Poincare grubunun ayar teorisi	39
2.2.2. $N = 1$ ve $D = 4$ süper kütleçekimi	42
3. MAXWELL SİMETRİSİ VE KÜTLEÇEKİM TEORİSİ	47
3.1. Maxwell Cebri.....	47
3.1.1. Maxwell cebrinin ayar teorisi.....	49
3.2. Süper Maxwell Cebri	52
3.2.1. Süper Maxwell cebrinin ayar teorisi	52
3.3. Maxwell-Weyl Cebri.....	55
3.3.1. Maxwell-Weyl cebrinin ayar teorisi.....	58
3.4. Süper Maxwell-Weyl Cebri	64
3.4.1. Süper Maxwell-Weyl cebrinin ayar teorisi	64
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	68
KAYNAKLAR	70
EKLER.....	76
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER	95
ÖZGEÇMİŞ	96

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. M manifoldundaki p noktasında tanımlı T_p tanjant uzayı.....	4
Şekil 1.2. Bir S yüzeyinde tanımlı P ve Q noktaları arası yol.....	7
Şekil 1.3. Bir vektörün eğri boyunca paralel ötelenmesi	9
Şekil 1.4. Düz uzayda kutupsal koordinatlarda bir vektörün paralel ötelenmesi.....	9
Şekil 1.5. Bir vektörünün sonsuz küçük bir çevrimde paralel ötelenmesi	14



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{A}$	: Ayar alanının genel ifadesi
$A, B, C, \dots$	: Lie cebri üretici indisleri (Büyük Latin harfleri)
$a, b, c, \dots$	: Tanjant uzay indisleri (Küçük Latin harfleri)
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	: Uzay-zaman veya spinör indisleri (Küçük Yunan harfleri)
C	: Yük eşleniği matrisi
D	: Lorentz kovaryant dış türev operatörü
$\mathcal{D}$	: Lorentz-Weyl kovaryant dış türev operatörü
d	: Dış türev operatörü
e^a	: Tanjant uzayı baz vektörleri
e^a_{μ}	: Vierbein vektör alanı
$\mathbb{F}$	: Eğriliğin genel ifadesi
f^C_{AB}	: Lie cebri yapı sabiti
g	: Grup elemanı
$g_{\mu\nu}(x)$	: Uzay-zaman metriği
H	: Kararlılık grubu
i_{ξ}	: İç çarpım operatörü
K	: Koset
L	: Lagranjiyen
l_v	: Lie türevi operatörü
M	: Manifold
R	: Ricci skaler eğriliği
$R_{\mu\nu}$	: Ricci eğrilik tensörü
$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$	: Riemann eğrilik tensörü
S	: Eylem
T^{α}_{β}	: Simetrik enerji-momentum tensörü
$T_p M$	: M manifolduna p noktasından teğet tanjant uzayı
U	: Grup elemanı
X^A	: Lie cebri üreticileri
x^{μ}	: Uzay-zaman koordinat parametresi
γ^{μ}	: Dirac gamma matrisleri ($\mu = 0, 1, 2, 3$)
$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$	: Christoffel sembolü
δ_{ξ}	: ξ alanına göre varyasyon
δ^a_b	: Kronecker delta tensörü
ε_{abcd}	: Levi Civita tensörü
η_{ab}	: Minkowski metriği
θ^{α}	: Spinör uzayının koordinat parametresi
ϕ^{ab}	: Antisimetrik tensör uzayının koordinat parametresi

$\Phi(x)$	: x parametresine bağılı herhangi bir skaler alan
κ	: Einstein sabiti
Λ	: Kozmolojik sabit
ω^{ab}	: Antisimetrik spin bağlantı tensörü
∇_μ	: Kovaryant türev
$\wedge$	: Dış çarpım operatörü
$*$	: Hodge dual operatörü
$\cdot$	: Skaler çarpım operatörü
∂	: Kısmi türev operatörü

Kısaltmalar

$M(1,3)$	: Maxwell Grubu
$MW(1,3)$	: Maxwell-Weyl Grubu
$P(1,3)$	: Poincare Grubu
$sM(1,3)$	: Süper Maxwell Grubu
$sMW(1,3)$	: Süper Maxwell-Weyl Grubu
$SO(1,3)$	: Special Othogonal Group (Lorentz Grubu)
$sP(1,3)$	: Süper Poincare Grubu
$sW(1,3)$	: Süper Weyl Grubu
$U(1)$	: Üniter Faz Dönüşümü Simetrisi
$W(1,3)$	: Weyl Grubu

MAXWELL VE SÜPER MAXWELL KÜTLEÇEKİM TEORİLERİ

ÖZET

Bu tezde Maxwell simetrisi temelinde genişletilmiş bir kütleçekim teorisinin oluşturulması üzerine çalışıldı. Maxwell-Weyl kütleçekim teorisinin ayar değişmez formülasyonu diferansiyel geometrik usûlle elde edildi ve süpersimetrik genelleştirmesi yapıldı. Elde edilen değişken bir kozmolojik terim ve buna ilave katkılar sayesinde Einstein-Cartan-Weyl alan denklemi genelleştirildi. Ayrıca $N = 1$ ve $D = 4$ için ölçekleme dönüşümü altında da değişmez kalan yalın süper kütleçekim Lagranjiyenin Maxwell-Weyl süper cebinden kaynaklanan eğriliklerin kullanılmasıyla elde edilebileceği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Ayar Alan Teorisi, Diferansiyel Geometri, Genişletilmiş Kütleçekim Teorisi, Maxwell Simetrisi, Süpersimetri.

MAXWELL AND SUPER MAXWELL GRAVITY THEORIES

ABSTRACT

In this thesis, establishing an extended gravity theory based on Maxwell symmetry is studied. Gauge invariant formulation of Maxwell-Weyl gravity is obtained by differential geometric method and its supersymmetric generalisation is given. An extension of the Einstein-Cartan-Weyl field equation with a variable cosmological term and an additional source term is given. We also show that $N = 1$ and $D = 4$ the scale invariant pure supergravity Lagrangian can be obtained from the curvatures of the Maxwell-Weyl superalgebra.

Keywords: Gauge Field Theory, Differential Geometry, Extended Theory of Gravity, Maxwell Symmetry, Supersymmetry.

GİRİŞ

Geçtiğimiz asırda yapılan Standart Model ve Süpersimetri gibi devrimsel nitelikteki çalışmalar, simetrilerin fizikte ne kadar önemli bir etki alanı olduğunu gözler önüne sermiştir. Simetrilerin, kütleçekim teorileri ile ilişkilerini incelediğimizde ise, 1956 yılı Utiyama'nın çalışması [1] öne çıkmaktadır. Utiyama bu çalışmasında Lorentz grubunu ($SO(1,3)$) yerel dönüşümler altında inceleyerek kütleçekim için Einstein alan denklemini elde etti. Bu sayede Utiyama uzay-zaman simetrilerinin yerel incelenmesiyle, diğer bir deyişle ayar teorisinin kurulmasıyla, bir kütleçekim teorisinin oluşturulabileceğini ilk olarak göstermiş oldu. Daha sonra 1961 yılında Kibble yaptığı çalışmada [2] Poincare simetrisini kullandı ve bunun sonucu olarak Einstein-Cartan teorisini elde etti. İlerleyen yıllarda benzer yöntemler diğer uzay-zaman simetrilerine de (Weyl, DeSitter, Conformal...) [3-10] uygulanarak genelleştirilmiş kütleçekim modelleri elde edildi.

Buradan anlaşıyor ki, elimizde bir simetri varsa ayar teorisini kullanarak buradan fiziksel sonuçlar çıkartabiliriz ve bu fikirden hareketle diyebiliriz ki, var olan herhangi bir simetri üzerinde değişiklikler yaparak yeni etkileşme terimleri ve genelleştirilmiş yapılar elde edebiliriz. İleride daha detaylı vereceğimiz üzere süpersimetri ve süper kütleçekim teorileri, bu simetri genişletmesine güzel bir misal teşkil etmektedir.

Simetri genişletmelerine diğer bir örnek ise Maxwell grubudur. Bu grup Poincare grubunun ($P(1,3)$) merkezi olmayan bir genişletmesidir ve artık momentum üreticileri abelyan değildir ve $[P_a, P_b] = F_{ab}$ komutasyon ilişkisini sağlar. Burada F_{ab} Lorentz dönüşümü altında tensör gibi davranan bir üreticidir ve $a, b = 0, 1, 2, 3$ değerlerini alır. Eğer bu simetri altında değişmez bir Lagranjiyen oluşturulursa, onun yüklü bir parçacığın sabit bir elektromanyetik alandaki hareket denklemlerini sağladığı görülecektir. Bu sonuca göre Poincare simetrisi kırılmış olup boş uzay-zaman yerine elektromanyetik alanla doldurulmuş bir uzay-zaman elde edilmiştir ve F_{ab} artık elektromanyetik gerilme tensörüne karşılık gelmektedir [11-13].

Maxwell cebirinin ismi ilk olarak Glashow'un çalışmasında [14] görülmektedir, burada nötron yıldızlarında oluşan aşırı güçlü manyetik alanın madde üzerindeki etkileri üzerinde durulmuştur, bunlar günümüzde magnetarlar olarak bilinmektedir. Bu cebir sistematik anlamda ilk olarak Schrader [11] tarafından incelenmiştir, diğer erken dönem çalışmalar için [12-17] makalelerine bakılabilir.

2005 yılında Maxwell cebirinin, klasik biçiminin dışında farklı bir incelemesi Soroka [18] tarafından ortaya konmuştur. Burada komutasyon ilişkisi $[P_a, P_b] = iZ_{ab}$ ile ifade edilmiş, yine aynı şekilde Z_{ab} antisimetrik bir tensör üretici fakat yapısı

$$Z_{ab} = i \frac{\partial}{\partial \phi^{ab}} = i \partial_{ab} \text{ şeklindedir. Buradaki türev } \partial_{ab} \phi^{cd} = \frac{1}{2} (\delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_a^d), \partial_{ab} x^c = 0$$

şeklinde davranmaktadır. Eklenen yeni ϕ^{ab} parametresi sayesinde uzay-zamana 6 serbestlik derecesi daha eklenmiştir ve oluşturulan arka plan alanı bu parametreye bağlıdır. Böylece bu tanımlamalardan sonra denilebilir ki, bilinen uzay-zaman gruplarının bu Z_{ab} üreticisi ile genişletilmesine o grubun Maxwell genişletmesi ve ortaya çıkan yeni simetri de Maxwell simetrisi olarak adlandırılır.

Bir Maxwell simetrisi elde etmek adına veya daha genel ifadeyle uzay-zaman gruplarının genişletilmesi için literatürde çeşitli yöntemler mevcuttur. (süper) Maxwell cebirlerini oluşturmasında şimdiye kadar expansion [19-25], S-expansion [26, 27] ve Chevalley–Eilenberg (CE) kohomoloji [28-30] yöntemleri kullanılmıştır. Bu üç yöntemin ortak özelliği, ele alınan grubun boyutunu artırarak genişletmesidir. Literatürde bunların dışında contraction, deformation ve extension (kısa bilgi için [22-23]) adında üç yöntem daha vardır lakin bu yöntemlerde grubun boyutu sabit kalmaktadır, bu sebepten Maxwell simetrilerinin oluşturulmasında kullanılmaları uygun değildir.

Ortaya çıkan bu yeni simetri sayesinde, süpersimetrisinin tarihi gelişiminin bir neticesi olarak süper grupların (süper Poincare, süper Conformal ...) ortaya çıktığı gibi, bilinen uzay-zaman gruplarının genişletilmesiyle Maxwell grupları ve süper Maxwell grupları ortaya çıkacak (Maxwell-Weyl, AdS-Maxwell ...) ve bunları temel alan başta kütleçekim olmak üzere çeşitli teoriler kurulacaktır. Maxwell simetrisi bu yönüyle ileriye yönelik önemli bir potansiyel arz etmektedir. Bu motivasyon ile

Maxwell grubunun ($M(1,3)$), cebirsel incelemeleri [18, 29-33], süpercebirselleştirmeleri [24, 34-38], genelleştirilmiş kütleçekim [39-46] ve süper-kütleçekim [47-51] oluşturulması, Landau problemindeki düzlem dinamikleri ve yüksek spin alanlarıyla ilişkisi [51-54] üzerine pek çok çalışmalar yapılmıştır.

Bu tezde, Maxwell ve süper Maxwell kütleçekim teorisine literatürde ilk olarak ölçekleme simetrisinin eklenmesiyle (süper) Maxwell-Weyl kütleçekim teorisi oluşturulması hedeflenmiştir. Bu gaye doğrultusunda, ilk bölümde kütleçekim ve ayar teorisi arasındaki ilişkiyi anlamak amacıyla sırasıyla Genel Görelilik teorisi, diferansiyel geometri ve ayar teorisinin temel kavramlarını vereceğiz. Ayar teorisine uygulama olarak ise sırasıyla faz dönüşümü ($U(1)$) ve Lorentz simetrisi ele alınacaktır. Bu bölüm genişletilmiş bir kütleçekim teorisinin oluşturulmasında kaynak oluşturacaktır.

İkinci bölümde Süpersimetrisinin tarihi gelişimi kısaca verilip süper Poincaré cebirinin çizgisel olmayan gerçekleştirilmesinin ardından ayar teorisi kurulup süper kütleçekim teorisi oluşturulacaktır.

Son bölümde ise öncelikle literatürde bulunan $M(1,3)$ ve süper Maxwell gruplarının ($sM(1,3)$) ayar teorisini seçtiğimiz notasyonda inceleyeceğiz. Ardından bu gruplara dilaton üreticisi katılarak elde edilen Maxwell-Weyl ($MW(1,3)$) ve süper Maxwell-Weyl gruplarının ($sMW(1,3)$) ayar teorisini diferansiyel geometrik usûlle kurarak genelleştirilmiş kütleçekim teorilerini elde edeceğiz. Çalışmamızda yer alan neticelerin bir kısmı [41] içinde tartışılmıştır. Hesaplamalarda kullandığımız notasyon ve seçimler (Ek-A) ve (Ek-B)'de detaylı olarak verilmiştir.

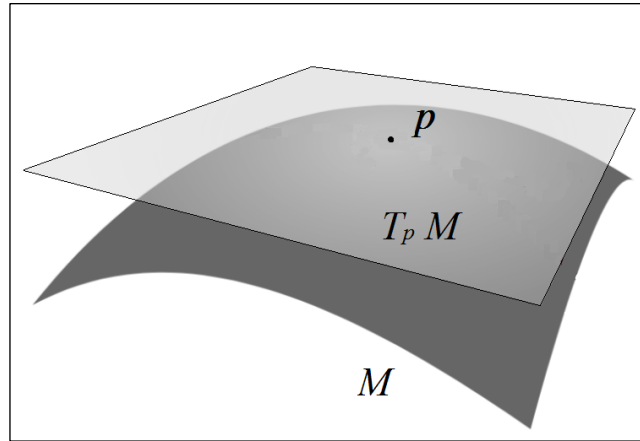
1. KÜTLEÇEKİM, DİFERANSİYEL GEOMETRİ VE AYAR TEORİSİ

1.1. Genel Görelilik Teorisi

Bu bölümde, Maxwell kütleçekim teorisinin oluşturulmasında gerekli olan Einstein genel çekim teorisine [55-59] dair bazı temel kavramlara değinilecektir.

1.1.1. Vierbein formalizmi

Vierbein, tetrad veya Cartan formalizmi olarak adlandırılan bu usûl, Einstein genel çekim yasasının oluşturulmasında alternatif bir yol teşkil eder. Kullanılmasındaki temel gaye uygulamada çeşitli kolaylıklar sağlamasıdır. Misal olarak, matematik açısından bakıldığında içinde bulunduğumuz uzay zaman 4 boyutlu bir manifold olarak ele alınabilir. Aynı zamanda yerel ele alındığında ise Minkowski benzeri bir karakteristiğe sahiptir. İşte bu noktadan hareketle vierbein formalizmi eğri uzay zaman ve buna bağlı Minkowski uzayı arasındaki ilişkiyi daha kolay ifade etmesinden dolayı tercih edilmektedir. Şekil 1.1’de gösterildiği gibi, bir M manifoldu üzerindeki her bir P noktası için bir tanjant uzayı T_p tanımlanabilir.



Şekil 1.1. M manifoldundaki p noktasında tanımlı T_p tanjant uzayı

Bu T_p uzayında herhangi bir vektörü $V \in T_p$ aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$V = V^a e_a \quad (1.1)$$

Denklem (1.1)'deki e_a ifadesi tanjant uzayı T_p 'nin baz vektör setidir ve,

$$e_a = \partial_a \quad (1.2)$$

yapısındadır. Her bir tanjant uzayı T_p için dual baz vektörleri içeren bir kotanjant uzayı T_p^* tanımlanabilir ve dual bazda bir vektör aşağıdaki gibi verilir,

$$V = V_a e^a \quad (1.3)$$

Burada $e^a = (e_a)^{-1}$ dual baz vektörüdür ve aşağıdaki yapıdadır,

$$e^a = dx^a \quad (1.4)$$

Bu vektörler $e^a e_b = \delta^a_b$ ifadesini sağlar. Tanjant uzayındaki baz vektörler ile eğri uzaydaki vektörler arasındaki ilişki,

$$e^a = e_\mu^a(x) e^\mu(x) = e_\mu^a(x) dx^\mu \quad (1.5)$$

$$e_a = e_a^\mu(x) e_\mu(x) = e_a^\mu(x) \partial_\mu \quad (1.6)$$

ile verilir. Burada $e_\mu^a(x)$ ile gösterilen 16 parametrelilik vektör alanı “vierbein alanı” veya kısaca “vierbein” olarak adlandırılır. Yunan indisleri $\mu, \nu, \dots = 0, \dots, 3$ eğri uzay zamanına, Latin indisler $a, b, \dots = 0, \dots, 3$ ise tanjant uzay zamanına karşılık gelir. Sırasıyla “holonomik” ve “holonomik olmayan” indisler olarak adlandırılabilir.

Vierbein vektörleri aşağıdaki dönüşümleri sağlar,

$$\eta^{ab} = g^{\mu\nu}(x) e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \quad (1.7)$$

$$g^{\mu\nu}(x) = e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) \eta^{ab} \quad (1.8)$$

burada $g^{\mu\nu}$ ve η^{ab} sırasıyla eğri uzay zaman metriği ve tanjant uzayında tanımlanan Minkowski metriğidir. Vierbein vektörünün tersi $e^a_\nu = (e_\nu^a)^{-1}$ şeklinde verilir ve çarpımları neticesinde Denklem (1.9) elde edilir.

$$e^a{}_\nu e^\nu{}_b = \delta^a{}_b, \quad e^\mu{}_a = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e^\nu{}_b \quad (1.9)$$

Bu dual gösterimlerden yola çıkarak,

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu{}_a e^\nu{}_b, \quad g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} \quad (1.10)$$

elde edilir. Yukarıdaki tanımların yardımıyla bir vierbein vektörünün determinantını aşağıdaki şekilde verebiliriz,

$$e = |\det e^a{}_\mu| = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \sqrt{|g|} \quad (1.11)$$

Vierbeinler sayesinde artık herhangi bir P uzay zaman noktasındaki bir vektörü hem tanjant uzayı (tetrad) bazında hem de eğri uzay zaman (koordinat) bazında aşağıdaki gibi ifade edebiliriz,

$$V = V^\mu e_\mu = V^a e_a \quad (1.12)$$

Ayrıca vektörler arası ilişki aşağıdaki şekilde verilir,

$$\begin{aligned} V^a &= e^a{}_\mu V^\mu \\ V^a{}_b &= e^a{}_\mu e^\nu{}_b V^\mu \end{aligned} \quad (1.13)$$

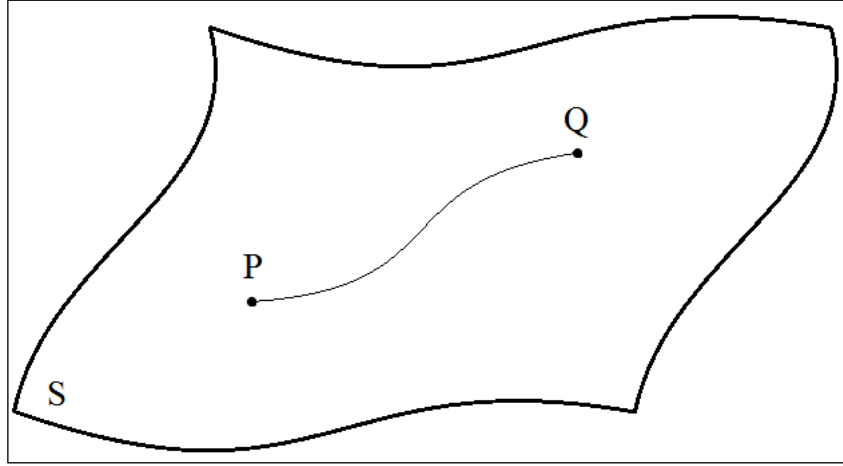
1.1.2. Jeodezik denklemi ve Christoffel sembolü

Eğri bir uzayda sonsuz küçük aralığın karesi aşağıdaki şekilde verilir,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.14)$$

Bu uzayda Şekil 1.2’de gösterildiği gibi, bir P noktasından Q noktasına olan hareketin toplamı veya eylemi aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$S = \int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (1.15)$$



Şekil 1.2. Bir S yüzeyinde tanımlı P ve Q noktaları arası yol

Şimdi bu eylemin varyasyonunu alalım,

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int_P^Q \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} \int_P^Q \frac{d\lambda}{\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \left(-\delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - 2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\delta x^\nu}{d\lambda} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_P^Q ds \left(-\delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + 2 \frac{dg_{\mu\nu}}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu + 2g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \delta x^\nu \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_P^Q ds \left(-\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} + 2g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right) \delta x^\nu \\
 &= - \int_P^Q ds \left\{ \frac{1}{2} \left(-\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right\} \delta x^\nu
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

ve $\delta S = 0$ ilkesini dikkate alırsak süslü parantez içeriğini $g^{\sigma\nu}$ ile çarptığımızda,

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left(-\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0 \tag{1.17}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki gibi bir tanım yapıldığında,

$$\Gamma_{\mu\rho}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left(-\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} \right) \tag{1.18}$$

Denklem (1.18) aşağıdaki şekli alır,

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0 \quad (1.19)$$

Bu denklem jeodezik denklemdir ve $\Gamma^\sigma_{\mu\rho}$ ifadesi ise Christoffel sembolü olarak adlandırılır. Christoffel sembolünün genel koordinat dönüşümü altındaki değişimine bakıldığında,

$$\left(\Gamma^\mu_{\nu\delta} \right)' = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\delta} \quad (1.20)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik bize $\Gamma^\mu_{\nu\delta}$ sembolünün tensör yapısında olmadığını göstermektedir. Yapılan hesaplamalarda, $T^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$ olarak da ifade edilen burulma (torsion) tensörünün sıfır olduğu düşünülmüştür. $T^\sigma_{\mu\nu} \neq 0$ durumu için sembolün genel ifadesi aşağıdaki şekilde gösterilebilir,

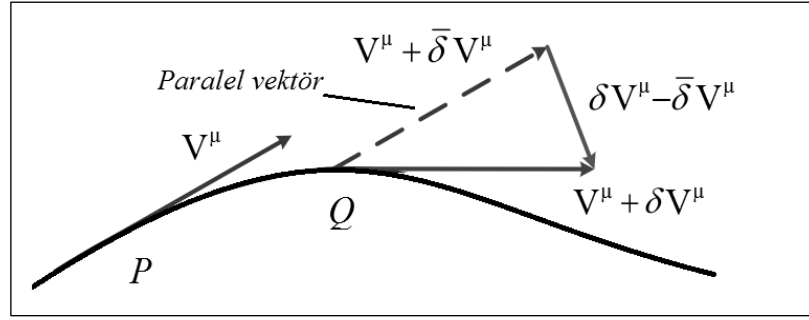
$$\Gamma^\sigma_{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(-\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - T_{\mu\rho\sigma} - T_{\rho\mu\sigma} + T_{\sigma\mu\rho} \right) \quad (1.21)$$

1.1.3. Paralel öteleme ve kovaryant türev

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki şekilde verilebilir,

$$\partial_\nu f(x^\mu) = \frac{\partial f(x^\mu)}{\partial x^\nu} = \lim_{\delta x^\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x^\mu + \delta x^\mu) - f(x^\mu)}{\delta x^\nu} \right\} \quad (1.22)$$

Lakin yukarıdaki tanıımı vektör alanlar için ele aldığımızda, vektörlerin farklı noktalarda farklı dönüşümlere sahip olmalarından veya diğer bir deyişle farklı noktalarda tanımlanmış vektörlerin farkının veya toplamının bir vektör oluşturmadığı bilindiğinden dolayı kullanışlı olmadığı açıkça görülmektedir. Vektör alanlar ile çalışmak için türev üzerinde bazı değişiklikler yapmak durumundayız. Bu sebepten dolayı paralel öteleme işlemini tanımlamamız gerekmektedir.

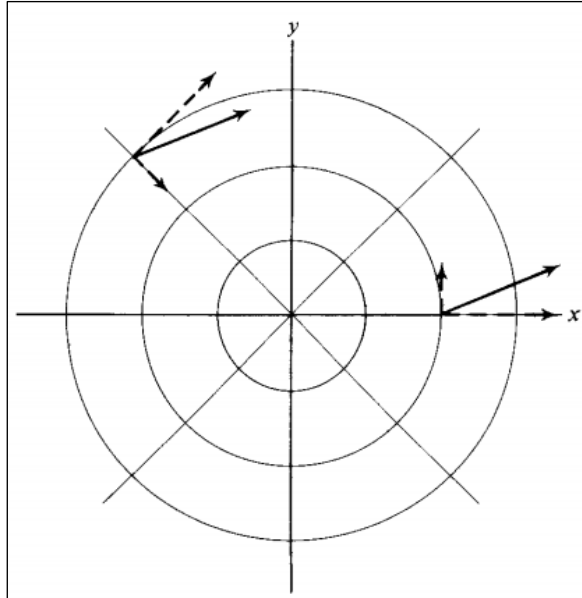


Şekil 1.3. Bir vektörün eğri boyunca paralel ötelenmesi

V^μ kontravaryant bir vektör alanı olsun. Şekil 1.3 dikkate alındığında $V^\mu(P)$ ile $V^\mu(Q)$ arası ilişki,

$$V^\mu(Q) = V^\mu(P) + \delta V^\mu(P) = V^\mu(P) + \frac{\partial V^\mu(P)}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \quad (1.23)$$

ile verilir. Burada $\delta V^\mu(P) = V^\mu(Q) - V^\mu(P)$, farklı iki noktada tanımlanmış vektör alanlarının bileşenlerinin farkı olduğundan dolayı bir vektör değildir. Bu durumu daha iyi kavramak maksadıyla Şekil 1.4'e baktığımızda vektörün kesik çizgiler ile gösterilen bileşenlerinin değiştiği açıkça görülmektedir.



Şekil 1.4. Düz uzayda kutupsal koordinatlarda bir vektörün paralel ötelenmesi [55]

Şimdi öyle bir $\bar{\delta}$ işlemi tanımlayalım ki düz uzay dikkate alındığında Q noktasında $V^\mu(P)$ vektörüne paralel bir $\bar{V}^\mu(Q)$ vektörü oluştursun,

$$\bar{V}^\mu(Q) = V^\mu(P) + \bar{\delta}V^\mu(P) \quad (1.24)$$

Aynı şekilde $\bar{\delta}V^\mu(P)$ ifadesi de bir vektörü temsil etmeyeceği için $\bar{\delta}V^\mu(P)$ ifadesini de,

$$\bar{\delta}V^\mu(P) = -G^\mu_{\rho\sigma} V^\rho \delta x^\sigma \quad (1.25)$$

şeklinde kullanacağız. Yukarıdaki ifadede $G^\mu_{\rho\sigma}$, $V^\mu(P)$ vektör alanının Q noktasına paralel olarak taşınması ile alakalı alanlar arası ilişkiyi temsil eder, “Afin bağlantı” olarak adlandırılır ve dört boyutlu uzay için 64 adet katsayı içerir. Şimdi birisi paralel taşınmış $\bar{V}^\mu(Q)$ diğeri ise ele alınan eğriye teğet taşınmış $V^\mu(Q)$ iki vektörün farkına bakalım,

$$\begin{aligned} V^\mu(Q) - \bar{V}^\mu(Q) &= \{V^\mu(P) + \delta V^\mu(P)\} - \{V^\mu(P) + \bar{\delta}V^\mu(P)\} \\ &= \delta V^\mu(P) - \bar{\delta}V^\mu(P) = \delta V^\mu(P) + G^\mu_{\rho\sigma} V^\rho \delta x^\sigma \\ &= \left\{ \frac{\partial V^\mu(P)}{\partial x^\sigma} + G^\mu_{\rho\sigma} V^\rho \right\} \delta x^\sigma \end{aligned} \quad (1.26)$$

Bu ifade aynı noktadaki vektör alanların farkını ihtiva ettiğinden dolayı bir kontravaryant vektörü temsil etmektedir. Yaptığımız bu işlem; afin uzayda bir vektörün paralel ötelenmesi işlemi olarak adlandırılmaktadır. Denklem (1.26) dikkate alındığında aşağıdaki türev tanımlanabilir,

$$\begin{aligned} \nabla_v V^\mu &= \lim_{\delta x^v \rightarrow 0} \left\{ \frac{\delta V^\mu(P) - \bar{\delta}V^\mu(P)}{\delta x^v} \right\} \\ &= \partial_v V^\mu + G^\mu_{\nu\rho} V^\rho \end{aligned} \quad (1.27)$$

Bu türev “kovaryant türev” olarak adlandırılır ve vektörlerin tanımından da anlaşılacağı üzere tensörel bir yapıdadır. Şimdi $G^\mu_{\nu\rho}$ afin bağlantısının dönüşüm kurallarını bulalım. Bir vektörün genel koordinat dönüşümü altında,

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (1.28)$$

şeklinde dönüştüğünü göz önüne aldığımızda Denklem (1.27) ifadesinin,

$$(\nabla_{\nu} V^{\mu})' = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} (\nabla_{\sigma} V^{\rho}) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} V^{\rho} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} G^{\rho}_{\sigma\lambda} V^{\lambda} \quad (1.29)$$

biçiminde dönüşmesi beklenir. Ayrıca son denklemi aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\nu} V^{\mu})' &= \nabla'_{\nu} V'^{\mu} = \partial'_{\nu} V'^{\mu} + (G^{\mu}_{\nu\rho})' V'^{\rho} \\ &= \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} V^{\rho} \right) + \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} (G^{\mu}_{\nu\rho})' V^{\lambda} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} V^{\rho} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} V^{\rho} + \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} (G^{\mu}_{\nu\rho})' V^{\lambda} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Burada Denklem (1.29) ile Denklem (1.30) birbirlerine denk ifadelerdir dolayısıyla aşağıdaki ifade yazılabilir,

$$\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} (G^{\mu}_{\nu\rho})' V^{\lambda} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} G^{\rho}_{\sigma\lambda} V^{\lambda} - \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} V^{\rho} \quad (1.31)$$

düzenlendiğinde,

$$(G^{\mu}_{\nu\delta})' = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} G^{\rho}_{\sigma\lambda} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \quad (1.32)$$

veya,

$$(G^{\mu}_{\nu\delta})' = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} G^{\rho}_{\sigma\lambda} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\delta}} \quad (1.33)$$

elde edilir. Bu değişim Denklem (1.20) ifadesi ile verilen Christoffel sembolünün değişimine denktir. O halde $G^{\mu}_{\nu\rho}$ ifadesi yerine Christoffel sembolü $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ kullanılırsa kovaryant türev aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\nabla_{\mu} V^{\alpha} = \partial_{\mu} V^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} V^{\rho} \quad (1.34)$$

Bu türev sırasıyla kovaryant vektör ve rankı 2 tensörlere uygulandığında genel olarak aşağıdaki yapılar elde edilir,

$$\nabla_{\mu} V_{\alpha} = \partial_{\mu} V_{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} V_{\rho} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} V^{\alpha\beta} &= \partial_{\mu} V^{\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} V^{\rho\beta} + \Gamma_{\mu\rho}^{\beta} V^{\alpha\rho} \\ \nabla_{\mu} V_{\beta}^{\alpha} &= \partial_{\mu} V_{\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} V_{\beta}^{\rho} - \Gamma_{\mu\beta}^{\rho} V_{\rho}^{\alpha} \\ \nabla_{\mu} V_{\alpha\beta} &= \partial_{\mu} V_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} V_{\rho\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\rho} V_{\rho\alpha} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Bir misal olarak kovaryant türevi Christoffel sembolüne uyguladığımızda aşağıdaki ifadeye ulaşılır,

$$\nabla_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \quad (1.37)$$

Bütün bu işlemlerden hareketle diyebiliriz ki tanımladığımız kovaryant türev; seçilen uzayda bir P noktasında tanımlanmış bir vektörü aynı uzayda Q noktasına, ilk durumuna göre paralel taşınmasını sağlayan matematiksel niceliktir.

1.1.4. Afin bağlantı spin bağlantı ilişkisi

Tanjant uzayında tanımlanmış tensörler, Lorentz simetrisi altında ele alındığında kovaryant türevlerde afin bağlantı yerine “spin bağlantı” denilen ve $\omega_{\mu}^a{}_b$ ile gösterilen katsayılar kullanılır. Misal olarak,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} V^a &= \partial_{\mu} V^a + \omega_{\mu}^a{}_b V^b \\ \nabla_{\mu} V_a &= \partial_{\mu} V_a - \omega_{\mu}^b{}_a V_b \end{aligned} \quad (1.38)$$

eşitlikleri verilebilir. Her iki durumda da yapı değişmemektedir. Yukarıdaki denklemin ilk ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} V^a &= \nabla_{\mu} (e^a_{\rho} V^{\rho}) \\ &= \nabla_{\mu} e^a_{\rho} V^{\rho} + e^a_{\rho} \nabla_{\mu} V^{\rho} \\ &= \nabla_{\mu} e^a_{\rho} V^{\rho} + e^a_{\rho} (\partial_{\mu} V^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} V^{\lambda}) \\ &= \nabla_{\mu} e^a_{\rho} V^{\rho} + \partial_{\mu} V^a - \partial_{\mu} e^a_{\rho} V^{\rho} + e^a_{\rho} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} V^{\lambda} \\ &= \partial_{\mu} V^a + \omega_{\mu}^a{}_b V^b + (\nabla_{\mu} e^a_{\rho} - \partial_{\mu} e^a_{\rho} - \omega_{\mu}^a{}_b e^b_{\rho} + e^a_{\lambda} \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}) V^{\rho} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Elde edilen son ifade, Denklem (1.38) ile mukayese edildiğinde üçüncü terimin sıfır olacağı görülür, böylece vierbein vektörünün kovaryant türevi aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\nabla_{\mu} e^a_{\rho} = \partial_{\mu} e^a_{\rho} + \omega_{\mu}^a{}_b e^b_{\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} e^a_{\lambda} \quad (1.40)$$

Şimdi ∇V skaleri üzerinden bu iki bağlantı arası ilişkiyi inceleyelim. Afın bağlantı için bu ifade,

$$\nabla V = (\nabla_{\mu} V^{\nu}) dx^{\mu} \partial_{\nu} = (\partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^{\lambda}) dx^{\mu} \partial_{\nu} \quad (1.41)$$

şeklinde yazılabilir. Keza aynı ifadeyi vierbeinleri de kullanarak spin bağlantı ile yazdığımızda,

$$\begin{aligned} \nabla V &= (\nabla_{\mu} V^a) dx^{\mu} \partial_a = (\partial_{\mu} V^a + \omega_{\mu}^a{}_b V^b) dx^{\mu} \partial_a \\ &= \left\{ \partial_{\mu} (e^a_{\nu} V^{\nu}) + \omega_{\mu}^a{}_b e^b_{\lambda} V^{\lambda} \right\} dx^{\mu} e^{\sigma}_a \partial_{\sigma} \\ &= e^{\sigma}_a \left(e^a_{\nu} \partial_{\mu} V^{\nu} + \partial_{\mu} e^a_{\nu} V^{\nu} + \omega_{\mu}^a{}_b e^b_{\lambda} V^{\lambda} \right) dx^{\mu} \partial_{\sigma} \\ &= \left\{ \partial_{\mu} V^{\nu} + (e^{\nu}_a \partial_{\mu} e^a_{\lambda} + e^{\nu}_a e^b_{\lambda} \omega_{\mu}^a{}_b) V^{\lambda} \right\} dx^{\mu} \partial_{\lambda} \end{aligned} \quad (1.42)$$

elde edilir. Bu noktada Denklem (1.41) ve Denklem (1.42) karşılaştırıldığında ise,

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = e^{\nu}_a \partial_{\mu} e^a_{\lambda} + e^{\nu}_a e^b_{\lambda} \omega_{\mu}^a{}_b \quad (1.43)$$

ile,

$$\omega_{\mu}^a{}_b = e^a_{\nu} e^{\lambda}_b \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - e^{\lambda}_b \partial_{\mu} e^a_{\lambda} \quad (1.44)$$

ilişkileri açık bir şekilde elde edilir. Eğer Denklem (1.44) ifadesini e^b_{ρ} ile çarpar ve düzenleme yaparsak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır,

$$\partial_{\mu} e^a_{\rho} + \omega_{\mu}^a{}_b e^b_{\rho} - e^a_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} = 0 \quad (1.45)$$

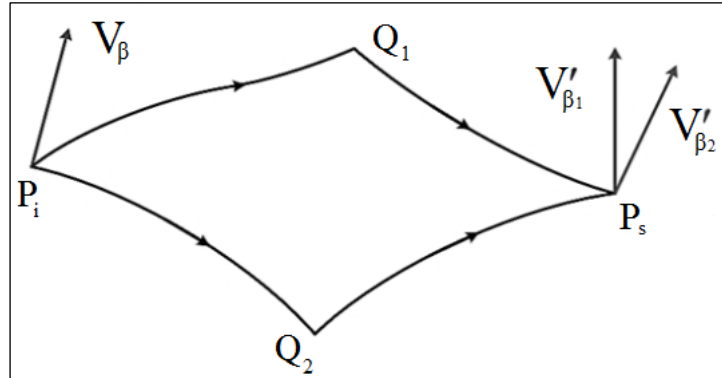
Denklem (1.45) aynı zamanda Denklem (1.40)'da verilen $\nabla_\mu e_\rho^a$ türevine eşittir, dolayısıyla burada $\nabla_\mu e_\rho^a = 0$ şartı sağlanır ve bu şart “tetrad postülası” olarak adlandırılır. Bu postüladan yola çıkarak,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu g_{\rho\sigma} &= \nabla_\mu (e_\rho^a e_\sigma^b \eta_{ab}) \\ &= \nabla_\mu e_\rho^a e_\sigma^b \eta_{ab} + e_\rho^a \nabla_\mu e_\sigma^b \eta_{ab} + e_\rho^a e_\sigma^b \nabla_\mu \eta_{ab} \\ &= 0\end{aligned}\tag{1.46}$$

neticesine ulaşılır, bu ise uzayın “metrik uyumlu” olması olarak bilinir.

1.1.5. Eğrilik tensörü

Bir uzayda bir P_i başlangıç noktasından P_s varış noktasına giden sonsuz küçük iki farklı yol düşünelim. Şekil 1.5'te gösterildiği gibi, ilk yol için V_β vektörü önce Q_1 sonra P_s noktasına, ikinci yol için ise önce Q_2 sonra P_s noktasına gidilecektir. Buradan birinci yolun takibi $\nabla_\mu \nabla_\nu V_\beta$, ikinci yolun takibi de ise $\nabla_\nu \nabla_\mu V_\beta$ sayesinde gerçekleşir. Bu iki ifade bir vektörü başlangıç konumundan farklı bir noktaya ve farklı yollardan paralel taşınmasını temsil eder.



Şekil 1.5. Bir vektörünün sonsuz küçük bir çevrimde paralel ötelenmesi

Son durumda taşınan vektörlerin β_2 farkı $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\beta$ ile ifade edilir. Eğer uzay düz ise taşınan vektörlerin farkının sıfır olması gerekir. Lakin uzayda eğrilik varsa durum farklıdır ve bu fark beklendiği üzere uzaydaki eğrilik ile doğrudan ilişkilidir. Bu ilişki Denklem (1.47)'deki şekilde tanımlanır,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\beta = \nabla_\mu \nabla_\nu V_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu V_\beta = -R^\alpha_{\beta\mu\nu} V_\alpha \quad (1.47)$$

Burada $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ Riemann-Christoffel eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Eğer $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$ ise uzay düzdür, aksi durumda ise bir eğrilik söz konusudur. Yukarıdaki komutasyon kontravaryant tensöre uygulandığında $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta$ şeklinde yazılır. Şimdi bu tensörün yapısının nasıl olması gerektiğine bakalım, bu işlem için öncelikle $\nabla_\mu \nabla_\nu V_\beta$ ifadesini hesaplayalım,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\nabla_\nu V_\beta) &= \partial_\nu (\nabla_\mu V_\beta) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} (\nabla_\sigma V_\beta) - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} (\nabla_\nu V_\sigma) \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\partial_\mu (\partial_\nu V_\beta - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} V_\alpha) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} (\partial_\sigma V_\beta - \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} V_\alpha) \\ &- \Gamma^\sigma_{\mu\beta} (\partial_\nu V_\sigma - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} V_\alpha) \end{aligned} \right\} \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\partial_\mu \partial_\nu V_\beta - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} V_\alpha - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \partial_\mu V_\alpha - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \partial_\sigma V_\beta + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} V_\alpha \\ &- \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \partial_\nu V_\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} V_\alpha \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (1.48)$$

ve benzer şekilde,

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu V_\beta) = \left\{ \begin{aligned} &\partial_\nu \partial_\mu V_\beta - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} V_\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \partial_\nu V_\alpha - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \partial_\sigma V_\beta + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} V_\alpha \\ &- \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \partial_\mu V_\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeler Denklem (1.47)'de yerine yazılırsa,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\beta = -(-\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}) V_\alpha \quad (1.50)$$

ve buradan eğrilik tensörü aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \quad (1.51)$$

Eğrilik tensörünü spin bağlantı ile ifade etmek istediğimizde ya doğrudan spin bağlantıya bağlı kovaryant türevin komütasyonuna bakılır ya da Denklem (1.51) içerisinde Denklem (1.43)'de verilen dönüşüm kullanılır. Neticede aşağıdaki ifade elde edilir,

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = e^\alpha_a e_\beta^b (\partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^a{}_b + \omega_{[\mu}^a{}_c \omega_{\nu]}^c{}_b) \quad (1.52)$$

Riemann-Christoffel tensörünün indislerinde yapılan değişimler ile farklı özelliklere sahip ifadeler elde edilebilir. Örneğin $R_{\alpha\beta\nu\mu} = g_{\alpha\rho} R^{\rho}_{\beta\mu\nu}$ biçiminde yazıldığında aşağıda verilen özellikleri sağlar,

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu} \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu} \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta} \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} &= 0 \\
\nabla_{\alpha} R_{\beta\mu\nu\rho} + \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\rho} + \nabla_{\beta} R_{\mu\alpha\nu\rho} &= 0
\end{aligned} \tag{1.53}$$

burada son ifade Bianchi özdeşliği olarak adlandırılır. Ricci tensör ifadesi ise,

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\mu\alpha\nu} \\
&= \partial_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}
\end{aligned} \tag{1.54}$$

şeklindedir. Burada Denklem (1.37) dikkate alındığında Ricci tensörü aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \tag{1.55}$$

ve bu nicelik “Palatini özdeşliği” olarak bilinir. Ricci skaler veya skaler eğrilik ise,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.56}$$

biçiminde tanımlanır. Ricci tensör ve skaleri kullanılarak Einstein tensörü aşağıdaki şekilde yazılır,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.57}$$

1.1.6. Einstein alan denklemi

Serbest kütleçekim alanını ifade eden Einstein-Hilbert eylemi ve madde kaynağını içeren eylem aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$S = S_{EH} + S_{Kütle} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R - \int d^4x \sqrt{-g} L_m = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\kappa L_m) \tag{1.58}$$

Denklem (1.58)'de L_m kütle terimi, $\kappa = 8\pi G c^{-4}$ olmak üzere Einstein sabitidir, G kütleçekim sabiti, c ise ışığın vakumdaki hızıdır. Bu eylemde metrik tensör $g_{\mu\nu}$ dinamik bir değişken olduğundan, varyasyon ilkesi gereği, $\delta_g S = 0$ olması gerekir. Bu sayede metrik tensöre göre hareket denklemi elde edilmiş olur. Şimdi bu varyasyonu uygulayalım,

$$\delta_g S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left\{ \delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} - 2\kappa \delta(\sqrt{-g} L_m) \right\} \quad (1.59)$$

burada $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, Denklem (1.55) ve $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ eşitlikleri kullanıldığında aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\delta_g S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \nabla_\alpha \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^\rho_{\mu\rho} \right) \right\} \quad (1.60)$$

Burada son parantezli terim bir tam türev yapısında olduğundan dolayı ihmal edilir ve Einstein alan denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.61)$$

Burada $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörüdür ve aşağıdaki şekilde gösterilir,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.62)$$

1.2. Diferansiyel Geometri

Diferansiyel geometrik yöntem, ele alınan teoriye bir yenilik katmamasına rağmen, formüllerin daha basit yazılmasına yardımcı olmakta ve bunun yanında yapılan işlemlerde de pek çok kolaylık sağlamaktadır. Bu bölüm dış cebir ve Diferansiyel geometriye kısa bir giriş mahiyetinde olup takip eden konular için temel oluşturacaktır.

1.2.1. Formlar, dış çarpım ve dış türev

Bir M manifoldu üzerinde tanımlı V vektör uzayı için $\Omega^{(p)}(V)$ ifadesi p -form'ların veya p dereceli diferansiyel formların vektör uzayı olarak tanımlanır. Örneğin $\omega \in \Omega^{(p)}(V)$ yapısında bir p -form aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (1.63)$$

burada “ $\wedge$ ” işareti “dış çarpım” (wedge product) ve “ d ” işlemcisi “dış türev” olarak adlandırılır bunlara ek olarak x^μ ise 0-form uzay-zaman vektörüdür. Şimdi sırasıyla bu ifadeleri açıklayalım. Dış çarpım aşağıda gösterildiği gibi,

$$\wedge : \Omega^{(p)}(V) \times \Omega^{(q)}(V) \rightarrow \Omega^{(p+q)}(V) \quad (1.64)$$

bir p -form ile bir q -form yapısındaki değişkenleri belli kurallar altında işleme tabi tutup bir $(p+q)$ form elde etmeye yarayan bir işlemci olarak ele alınır. Örneğin $f \rightarrow f(x)$ herhangi bir fonksiyon ve α , β ve σ ifadelerini sırasıyla p , q ve r form olarak ele alalım. Bu durumda dış çarpımın bazı özelliklerini aşağıdaki biçimde gösterebiliriz,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (-1)^{p \cdot q} \beta \wedge \alpha \\ (\alpha \wedge \beta) \wedge \sigma &= \alpha \wedge (\beta \wedge \sigma) \\ (\alpha + \beta) \wedge \sigma &= \alpha \wedge \sigma + \beta \wedge \sigma \\ (c\alpha + d\beta) \wedge \gamma &= c(\alpha \wedge \gamma) + d(\beta \wedge \gamma) \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\gamma^{(p+q)} = \alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!q!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+q}} \quad (1.66)$$

Son ifadeden anlaşılacağı gibi γ değişkeni $(p+q)$ form yapısındadır. Dış türev ise, aşağıda gösterildiği gibi bir p -formu, $(p+1)$ forma dönüştüren bir işlemci olarak tanımlanabilir,

$$d : \Omega^{(p)}(V) \rightarrow \Omega^{(p+1)}(V) \quad (1.67)$$

Verilen bir p-form ω 'ya dış türev uygulandığında,

$$d\omega = \frac{1}{(p+1)} \partial_{[\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p]} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (1.68)$$

genel ifadesi elde edilir. Burada antisimetrik açılım $A_{[\mu} B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$ şeklinde ifade edilir (Ek-A). Dış türev sırasıyla 0-form ϕ 'ye ve 1-form A 'ya uygulanırsa,

$$d\phi = \partial_\mu \phi dx^\mu \quad (1.69)$$

$$dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.70)$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer $F = dA$ şeklinde bir 2-form tanımlanır ve dF ifadesi aranırsa $\partial_{[\rho} \partial_{\mu]} = 0$ olduğundan aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\begin{aligned} dF &= d^2 A = d \wedge dA \\ &= \frac{1}{2} \partial_{[\rho} \partial_{\mu]} A_\nu dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.71)$$

Bu neticeye göre $d^2 = d \wedge d = 0$ genellemesi yapılır. Bunlara ek olarak α , β ve σ sırasıyla p, q ve r form olsun burada dış türev aşağıdaki özelliklere sahiptir,

$$\begin{aligned} d(\alpha + \beta) &= d\alpha + d\beta \\ d(\alpha^{(p)} \wedge \beta^{(q)}) &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \\ d(\alpha^{(p)} \wedge \beta^{(q)} \wedge \sigma^{(r)}) &= (d\alpha) \wedge \beta \wedge \sigma + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \wedge \sigma + (-1)^{p+q} \alpha \wedge \beta \wedge d\sigma \end{aligned} \quad (1.72)$$

Verilen formlarının komutasyon ilişkisi,

$$[\alpha, \beta] = -(-1)^{p \cdot q} [\beta, \alpha] \quad (1.73)$$

eşitliği ile gösterilir ve Jacobi özdeşliği ise aşağıdaki şekilde ele alınır,

$$[[\alpha, \beta], \sigma] + (-1)^{r(p+q)} [[\sigma, \alpha], \beta] + (-1)^{p(r+q)} [[\beta, \sigma], \alpha] = 0 \quad (1.74)$$

1.2.2. Dual eşlenik

Hodge dual (*) olarak da adlandırılan bu işlemci $* : \Omega^{(p)}(V) \rightarrow \Omega^{(D-p)}(V)$ şeklinde tanımlanır ve D boyutlu bir uzayda p-form yapısındaki bir değişkene uygulandığında $(D-p)$ form yapısına dönüştürür. Örneğin $A \in \Omega^{(p)}(V)$ üzerine uygulandığında,

$$*A^{(p)} = \frac{1}{(D-p)!} A^{\mu_1 \dots \mu_p} \eta_{\mu_1 \dots \mu_p \mu_{p+1} \dots \mu_D} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} \quad (1.75)$$

elde edilir. Burada bütünüyle antisimetrik $\eta_{\mu_1 \dots \mu_D}$ tensörü Levi-Civita sembolü $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_D}$ ifadesi ile ilişkilidir,

$$\eta_{\mu_1 \dots \mu_D} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_D}, \quad \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \quad (1.76)$$

yukarıdaki ifadede $g = \det(g_{\mu\nu})$ şeklinde tanımlanır. Bu antisimetrik tensörün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir,

$$\eta_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_{p+1} \dots \mu_D} \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} = (-1)^{D-1} (D-p)! \delta^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_p} \quad (1.77)$$

$$\eta_{\mu_1 \dots \mu_D} \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} = (-1)^{D-1} D! \quad (1.78)$$

Ayrıca bu tensör ile ilişkili olarak,

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} = \sqrt{|g|} \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} d^D x = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} d^D x, \quad (1.79)$$

yazılabilir. Bu temelden hareketle,

$$\begin{aligned} *1 &= \frac{1}{D!} \eta_{\mu_1 \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} = \frac{1}{D!} \eta_{\mu_1 \dots \mu_D} \sqrt{|g|} dx^D \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} \\ &= \frac{1}{D!} (-1)^{D-1} D! \sqrt{|g|} dx^D \\ &= (-1)^{D-1} \sqrt{|g|} dx^D \end{aligned} \quad (1.80)$$

$$A^{(p)} \wedge *B^{(p)} = B^{(p)} \wedge *A^{(p)} = p! (*1) A_{\mu_1 \dots \mu_p} B^{\mu_1 \dots \mu_p} \quad (1.81)$$

$$d^*A = \frac{1}{(D-p)} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} A^{\mu_1 \dots \mu_p} \right) \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} dx^\alpha \wedge dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} \quad (1.82)$$

$$*(*A^{(p)}) = (-1)^{p(D-p)+D-1} A^{(p)} \quad (1.83)$$

denklemleri elde edilir. $D=4$ için sırasıyla 0, 1, 2 form olan ϕ , A , F alanlarına Hodge dual işlemcisi uygulandığında aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$\begin{aligned} * \phi^{(0)} &= \frac{1}{4!} \phi \eta_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \frac{1}{4!} \phi \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x \\ &= -\phi \sqrt{-g} d^4x \\ *A^{(1)} &= \frac{1}{3!} A^\mu \eta_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \frac{1}{3!} A^\mu \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ *F^{(2)} &= \frac{1}{2!} F^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma = \frac{1}{2!} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \end{aligned} \quad (1.84)$$

Hodge dual işlemcisini 1-form $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ baz vektörüne uyguladığımızda,

$$\begin{aligned} *e^a &= \frac{1}{3!} \varepsilon^a_{bcd} e^{bcd}, \quad *e_a = \frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd} e^{bcd} \\ *e_{ab} &= \frac{1}{2!} \varepsilon_{abcd} e^c \wedge e^d, \quad *e_{abc} = \varepsilon_{abcd} e^d, \quad *e_{abcd} = \varepsilon_{abcd} \\ e^a \wedge *e_a &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd} e^{abcd} = 4 *1 \end{aligned} \quad (1.85)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $e^{a_1, \dots, a_n} = e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_n}$ olarak tanımlanır ve $D=4$ için Denklem (1.11), Denklem (1.79) ve $V^a_\mu V^b_\nu V^c_\rho V^d_\sigma \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{abcd} \det(V)$ tanımı kullanıldığında aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\begin{aligned} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d &= e^a_\mu e^b_\nu e^c_\rho e^d_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= \sqrt{-g} \varepsilon^{abcd} d^4x \end{aligned} \quad (1.86)$$

Hodge dual, integral içerisinde kullandığımızda ise aşağıdaki yapı elde edilir,

$$\begin{aligned} \int A^{(p)} \wedge *B^{(p)} &= \frac{1}{(D-p)!} \int A_{\mu_1 \dots \mu_p} B^{\nu_1 \dots \nu_p} \eta_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_{p+1} \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} \\ &= (-1)^{D-1} p! \int d^Dx \sqrt{|g|} A_{\mu_1 \dots \mu_p} B^{\mu_1 \dots \mu_p} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Örneğin $D = 4$ için $S = \int D\phi^{(0)} \wedge *D\phi^{(0)}$ biçiminde bir eyleme uygulandığında,

$$\int D\phi^{(0)} \wedge *D\phi^{(0)} = -\int (D\phi)_a (D\phi)^a \sqrt{-g} d^4x \quad (1.88)$$

ifadesine ulaşılır. Burada D dış kovaryant türevidir. Benzer şekilde Dirac eylemi için kullanıldığında ise,

$$\begin{aligned} S_{\text{Dirac}} &= -\int \bar{\psi} (i * \gamma \wedge d + m * 1) \psi \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi \end{aligned} \quad (1.89)$$

elde edilir. Burada ψ 0-form, $d\psi$ 1-form ve $*\gamma = *(\gamma_a e^a)$ 3-form yapısındadır, bunlara ek olarak γ_a Dirac gamma matrisleri ve $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ 1-form yapısında ve e^a_μ ise vierbein'dir. Dirac lagrangian yoğunluğu ise aşağıdaki şekildedir,

$$L_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi \quad (1.90)$$

1.2.3. İç çarpım ve Lie türevi

İç çarpım veya iç türev, verilen bir p -form $\Omega^{(p)}$ ve bir vektör alan V 'nin belli kurallar altında birleşerek $(p-1)$ form $\Omega^{(p-1)}$ oluşturması olarak tanımlanır ve aşağıdaki şekilde gösterilebilir,

$$i_V : \Omega^{(p)}(V) \rightarrow \Omega^{(p-1)}(V) \quad (1.91)$$

Örneğin $\omega \in \Omega^{(p)}(V)$ yapısında bir p -form olmak üzere, iç çarpım $i_V \omega$ aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$i_V \omega = \frac{1}{(p-1)!} \omega_{\alpha\mu_2, \dots, \mu_p} V^\alpha dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (1.92)$$

Bu işlemin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir,

1. $i_V f = 0, \quad f \in \Omega^{(0)}(V)$
2. $i_V h = \langle h, V \rangle = h(V), \quad h \in \Omega^{(1)}(V)$

3. $i_V dx^\alpha = dx^\alpha(V) = V^\alpha$
4. $i_V(\alpha \wedge \beta) = i_V \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_V \beta, \quad \alpha \in \Omega^{(p)}(V), \quad \beta \in \Omega^{(q)}(V)$
5. $i_V^2 = 0, \quad \{i_{V_1}, i_{V_2}\} = 0$
6. $(i_V T)_{bcde\dots} = V^a T_{abcde\dots}, \quad T \in \Omega^{(p)}(V)$
7. $i_V * \omega = *(\omega \wedge V)$

Eğer burada vektör alanı olarak e^a_μ vierbein seçersek, bu bazda iç çarpım $i_{e^a_\mu} = i_a$ şeklinde gösterilir ve 4 boyutta aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$\begin{aligned}
i_a e^a &= 4 \\
i_a * 1 &= *e_a, \quad e^a \wedge i^b * 1 = g^{ab} * 1 \\
i_a * e^b &= *(e^b \wedge e_a) \\
i_a *(e^b \wedge e^c) &= *(e^b \wedge e^c \wedge e_a) \\
i_a *(e^b \wedge e^c \wedge e^d) &= *(e^b \wedge e^c \wedge e^d \wedge e_a) \\
i^c (e^a \wedge *e^b) &= i^c e^a \wedge *e^b - e^a \wedge i^c *e^b
\end{aligned} \tag{1.93}$$

Bunlara ek olarak iç türevin, dış türev ile ilişkileri göz önüne alındığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir,

$$l_V = \{d, i_V\}, \quad i_{[V, \omega]} = [l_V, i_\omega], \quad [l_V, d] = 0 \tag{1.94}$$

Burada l_V Lie türevi olarak adlandırılır. Bu türevin bir p-forma etkisi ise $l_V \omega = d(i_V \omega) + i_V d\omega$ şeklindedir ve Cartan özdeşliği olarak bilinir. Lie türevinin önemli bir özelliği ise $S = \int L$ şeklinde verilen bir eylemin genel koordinat dönüşümleri (diffeomorphism) altındaki değişiminin bulunmasında kolaylık sağlamasıdır. Örneğin $l_a S = \delta S = 0$ olduğu dikkate alındığında,

$$l_a S = \int i_a (dL) + d(i_a L) = 0 \tag{1.95}$$

elde edilir. Burada Lagranjiyen L , N boyutta bir N -form olduğu dikkate alındığında, ilk terim $N+1$ form olduğu için integrale bir katkısı olmayacaktır. İkinci terim ise tam türev yapısında olduğu için ihmal edilir. Böylece eşitlik sağlanmış olur.

1.3. Ayar Teorisi

Genel görelilik teorisinin 1915 yılında ortaya çıkmasıyla birlikte kütleçekimin artık uzay-zamanın geometrisiyle alakalı olduğu görüşü baskın geldi. Kütleçekime getirilen bu yeni bakış açısı sayesinde ayar teorisiyle alakalı olarak Weyl'in 1929 [60], Yang ve Mills'in 1954 [61] ve Utiyama'nın 1956'da [1] yaptığı çalışmalar ortaya çıkmıştır. 1960'larda başta Kibble [2] olmak üzere yapılan diğer çalışmalar gösterdi ki Minkowski uzayında ele alınan $P(1,3)$ kütleçekim ile yakın ilişkiye sahiptir ve bu grubun ayar teorisi uzay-zamanda Riemann-Cartan geometrisini ortaya çıkarmaktadır. Buradan anlaşıldı ki diğer uzay-zaman gruplarının veya daha geniş simetrilerin de kullanılmasıyla kütleçekim teorisini genelleştirmek ayar teorisi ile mümkündür.

Bu fikir sayesinde, bilinen uzay-zaman simetrisini Maxwell simetrisi ile genelleştirdiğimizde, genişletilmiş bir kütleçekim teorisinin ve bazı yeni etkileşimlerin ortaya çıkması beklenmektedir. Burada, sonraki bölümlerde yapacağımız işlemlere temel oluşturması için kısaca ayar teorisinin bazı temel kavramları verilecek ve sırasıyla $U(1)$ ve $SO(1,3)$ grupları üzerinde iki adet uygulama yapacağız.

1.3.1. Global ve yerel değişmezlik

Elimizde n parametrelili bir Lie grubu olduğunu varsayalım, bu grubun üreticileri arası komütasyon ilişkisi aşağıdaki şekilde olsun,

$$[X_A, X_B] = if_{AB}^C X_C \quad (1.96)$$

Burada X_A grubun üreticileri, $f_{AB}^C = -f_{BA}^C$ yapı sabitleridir, $A, B, \dots = 1, \dots, N$ değerlerini alır ve N üretici sayısını gösterir. Global dönüşüm altında bir ψ alanı,

$$\psi' = U\psi = e^{ie^A X_A} \psi \quad (1.97)$$

gibi dönüşür. Son ifadenin dış türevi aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$d\psi' = d(U\psi) = U d\psi \quad (1.98)$$

Kütlesiz Dirac Lagranjiyenini $L_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi} * \gamma \wedge d\psi$ bu global simetri dönüşümünü incelediğimizde,

$$\begin{aligned} L'_{\text{Dirac}} &= i\bar{\psi}' * \gamma \wedge d\psi' = i\bar{\psi} U^{-1} * \gamma \wedge d(U\psi) \\ &= \cancel{i\bar{\psi} U^{-1} * \gamma \wedge dU\psi} + i\bar{\psi} U^{-1} U * \gamma \wedge d\psi \\ &= i\bar{\psi} * \gamma \wedge d\psi = L_{\text{Dirac}} \end{aligned} \quad (1.99)$$

değişmez kaldığı görülmektedir. Eğer ilgili simetriyi yerel dönüşüm $\varepsilon^A \rightarrow \varepsilon^A(x)$ altında incelersek $U = e^{ie^A(x)X_A}$ için,

$$d\psi' = d(U\psi) = dU\psi + U d\psi \quad (1.100)$$

elde edilir. Aynı şekilde Dirac Lagranjiyenine uyguladığımızda,

$$\begin{aligned} L'_{\text{Dirac}} &= i\bar{\psi}' * \gamma \wedge d\psi' = i\bar{\psi} U^{-1} * \gamma \wedge d(U\psi) \\ &= L_{\text{Dirac}} + i\bar{\psi} U^{-1} * \gamma \wedge dU\psi \end{aligned} \quad (1.101)$$

elde edilir. Burada açıkça görülebilir ki yerel simetri dönüşümü altında ilgili Lagranjiyen değişmez kalmamaktadır. Bu durumun üstesinden gelebilmek için “kovaryant türev” olarak adlandırılan yeni bir türev operatörü tanımlanır,

$$D = d + ig\mathbb{A} \quad (1.102)$$

ve bu kovaryant türev aşağıdaki özelliğe sahiptir,

$$D(\psi_1 \psi_2) = D(\psi_1) \psi_2 + \psi_1 D(\psi_2) \quad (1.103)$$

Burada $\mathbb{A} = A^A X_A$ “ayar potansiyeli” veya “ayar alanı” olarak adlandırılır g ise etkileşim sabitidir. Şimdi ilgili A ayar alanının özelliklerini bulalım. Aradığımız dönüşüm Denklem (1.98)’e benzer şekilde aşağıdaki gibidir,

$$(D\psi)' = UD\psi = U d\psi + igU\mathbb{A}\psi \quad (1.104)$$

yukarıdaki ifadenin sol tarafını açık bir şekilde yazdığımızda ise Denklem (1.105) elde edilir,

$$(D\psi)' = (d + ig\mathbb{A}')U\psi = dU\psi + Ud\psi + ig\mathbb{A}'U\psi \quad (1.105)$$

Son iki ifadenin sağ taraflarının eşit olduğunu düşünürsek,

$$dU\psi + Ud\psi + ig\mathbb{A}'U\psi = Ud\psi + igU\mathbb{A}\psi \quad (1.106)$$

ve $d(UU^{-1}) = 0$ olduğunu hesaba katarak düzenlediğimizde,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}' &= \frac{i}{g} dUU^{-1} + U\mathbb{A}U^{-1} = -\frac{i}{g} UdU^{-1} + U\mathbb{A}U^{-1} \\ &= -\frac{i}{g} UDU^{-1} \end{aligned} \quad (1.107)$$

Ulaşılan son netice $\mathbb{A}'$ 'nin dönüşüm kuralını göstermektedir. $\mathbb{A}$ ayar potansiyelinin ilgili simetri altında sonsuz küçük değişiminin bulmak için $U = e^{i\lambda^A X_A}$ ifadesi yerine yazılır ve Backer-Campbell-Hausssdorf formüllerinden (Ek-C) yararlanıldığında,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}' &= -\frac{i}{g} e^{i\lambda^A X_A} (d + ig\mathbb{A}) e^{-i\lambda^A X_A} \\ &= -\frac{1}{g} d\lambda^A X_A + \mathbb{A} + [i\lambda^A X_A, \mathbb{A}] \end{aligned} \quad (1.108)$$

elde edilir ve $\delta\mathbb{A} = \mathbb{A}' - \mathbb{A}$ ifadesinden hareketle,

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{A} &= -\frac{1}{g} d\lambda^A X_A - [\mathbb{A}, i\lambda^A X_A] \\ &= \frac{i}{g} D(i\lambda^A X_A) \end{aligned} \quad (1.109)$$

Bu neticeyi basitleştirmek adına $\zeta(x) = \lambda^A X_A$ kullanılırsa aşağıdaki yapı elde edilir,

$$\delta\mathbb{A} = -\frac{1}{g} d\zeta - i[\mathbb{A}, \zeta] \quad (1.110)$$

Bulunan bu niceliklerin yardımıyla Denklem (1.104) ifadesini Denklem (1.111)'deki gibi ispat edebiliriz,

$$\begin{aligned}
(D\psi)' &= (d + ig\mathbb{A}') U\psi = dU\psi + U d\psi + ig \left(-\frac{i}{g} U dU^{-1} + U\mathbb{A}U^{-1} \right) U\psi \\
&= dU\psi + U d\psi - dU\psi + ig U\mathbb{A}\psi \\
&= U(d + ig\mathbb{A})\psi \\
&= UD\psi
\end{aligned} \tag{1.111}$$

Böylece kütlelessiz Dirac Lagranjiyeni kovaryant dış türev ile $L_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}' * \gamma \wedge D\psi$ şeklinde yazılabilir. Yerel dönüşümler altında değişmezliği ise,

$$\begin{aligned}
L'_{\text{Dirac}} &= i\bar{\psi}' * \gamma \wedge (D\psi)' = i\bar{\psi}U^{-1} * \gamma \wedge UD\psi \\
&= i\bar{\psi} * \gamma \wedge D\psi = L_{\text{Dirac}}
\end{aligned} \tag{1.112}$$

şeklinde gösterilebilir.

Tanımlanan kovaryant türevin karesi ise bizi aşağıdaki gösterildiği şekilde 2-form eğriliklere ulaştıracaktır,

$$\begin{aligned}
D^2\phi &= D \wedge D\phi = (d + ig\mathbb{A}) \wedge (d + ig\mathbb{A})\phi \\
&= d^2\phi + igd(\mathbb{A}\phi) + ig\mathbb{A} \wedge d\phi - g^2\mathbb{A} \wedge \mathbb{A}\phi \\
&= ig(d\mathbb{A} + ig\mathbb{A} \wedge \mathbb{A})\phi \\
&= ig\mathbb{F}\phi
\end{aligned} \tag{1.113}$$

Burada $\mathbb{F}$ eğriliği temsil etmektedir ve 1-formlar arası $\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}[\alpha, \beta]$ ifadesi kullanılırsa,

$$\mathbb{F} = d\mathbb{A} + ig\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} = d\mathbb{A} + \frac{ig}{2}[\mathbb{A}, \mathbb{A}] \tag{1.114}$$

elde edilir. Eğer $\mathbb{A} = \mathbb{A}^A X_A$ ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F} &= \mathbb{F}^A X_A = d\mathbb{A} + ig\mathbb{A} \wedge \mathbb{A} \\
&= (d\mathbb{A}^A) X_A + \frac{ig}{2} \mathbb{A}^B \wedge \mathbb{A}^C [X_B, X_C] \\
&= \left(d\mathbb{A}^A - \frac{g}{2} f_{BC}^A \mathbb{A}^B \wedge \mathbb{A}^C \right) X_A
\end{aligned} \tag{1.115}$$

Neticede her bir üreticiye karşılık gelen eğriliği aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$\mathbb{F}^A = d\mathbb{A}^A - \frac{g}{2} f_{BC}^A \mathbb{A}^B \wedge \mathbb{A}^C \quad (1.116)$$

Elde edilen eğriliklerin ele alınan simetri altındaki sonsuz küçük değişimini Denklem (1.107) ve Denklem (1.114) yardımıyla aşağıdaki şekilde bulabiliriz,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}' &= d\mathbb{A}' + ig\mathbb{A}' \wedge \mathbb{A}' \\ &= d\left(U\mathbb{A}U^{-1} - \frac{i}{g}UdU^{-1}\right) + ig\left(U\mathbb{A}U^{-1} - \frac{i}{g}UdU^{-1}\right) \wedge \left(U\mathbb{A}U^{-1} - \frac{i}{g}UdU^{-1}\right) \\ &= \left\{ \begin{aligned} &dU\mathbb{A}U^{-1} + Ud\mathbb{A}U^{-1} - U\mathbb{A}dU^{-1} - \frac{i}{g}dUdU^{-1} \\ &+ igU\mathbb{A} \wedge \mathbb{A}U^{-1} + U\mathbb{A}dU^{-1} + UdU^{-1}U\mathbb{A}U^{-1} - \frac{i}{g}UdU^{-1}UdU^{-1} \end{aligned} \right\} \\ &= U(d\mathbb{A} + ig\mathbb{A} \wedge \mathbb{A})U^{-1} \\ &= U\mathbb{F}U^{-1} \end{aligned} \quad (1.117)$$

Burada sonsuz küçük grup elemanı $U = e^{i\lambda^A(x)X_A} = e^{i\zeta(x)}$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\mathbb{F}' = e^{i\zeta}\mathbb{F}e^{-i\zeta} = \mathbb{F} + i[\zeta, \mathbb{F}] \quad (1.118)$$

elde edilir. Netice itibariyle eğriliklerin bir simetri dönüşümü altındaki sonsuz küçük değişimi aşağıdaki ifade yardımıyla bulunabilir,

$$\delta\mathbb{F} = i[\zeta, \mathbb{F}] \quad (1.119)$$

Şimdi sırasıyla ilki uzay-zaman indisleri ile diğeri ise tanjant uzayının indisleri ile iki uygulama yapalım.

1.3.2. U(1) ayar teorisi

Bu bölümde yerel U(1) faz dönüşümü simetrisinin altında aşağıda verilen Dirac Lagranjiyenini inceleyeceğiz,

$$L_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi \quad (1.120)$$

Sonuçları daha detaylı görebilmek için uzay zaman indislerini kullanacağız. $U(1)$ simetrisinin üreticisi 1 olup, herhangi bir grup elemanı $U = e^{i\zeta(x)}$ olarak ele alındığında bir ψ alanının değişimi aşağıdaki şekilde verilebilir,

$$\psi' = U\psi = e^{i\zeta(x)}\psi \quad (1.121)$$

Bu grup için bir önceki bölümde verilen temelden yola çıkarak yerel dönüşümler altında değişmez kalan Dirac Lagranjiyenini aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$L_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu + m)\psi \quad (1.122)$$

burada kovaryant türev aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$D_\mu = (\partial_\mu + iqA_\mu) \quad (1.123)$$

ve q etkileşim sabitidir. Ortaya atılan A_μ ayar alanının sonlu ve sonsuz küçük değişimi sırasıyla Denklem (1.107) ve Denklem (1.110) dikkate alındığında aşağıdaki biçimi alır,

$$A'_\mu = -\frac{i}{q} U D_\mu U^{-1}, \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{q} \partial_\mu \zeta \quad (1.124)$$

Bu sayede Denklem (1.122)'deki Lagranjiyenin yerel dönüşüm altındaki değişmezliği rahatlıkla gösterilebilir. Ortaya atılan A_μ ayar alanından kaynaklanan eğrilikler Denklem (1.114) ile ve bunların $U(1)$ simetrisi altında sonsuz küçük değişimi ise Denklem (1.119) ile aşağıdaki gibi bulunabilir,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \delta F_{\mu\nu} = 0 \quad (1.125)$$

Kovaryant türevleri kullanarak başka bir önemli ifadeyi elde edebiliriz. Kovaryant türevleri Jacobi özdeşliklerinde yerine yazdığımızda,

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] + [D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] = 0 \quad (1.126)$$

elde edilir ve bu işlemin sonucunda Denklem (1.127) elde edilir,

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (1.127)$$

Ayrıca $F_{\mu\nu}$ ayar değişmez bir ifade olduğu için kovaryant türevi sıradan türev ile değiştirebiliriz,

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (1.128)$$

Yukarıdaki netice Bianchi özdeşlikleri olarak adlandırılır ve $F_{\mu\nu}$ eğriliğinin Denklem (1.125)'deki gibi vektör alanlar yardımıyla ifade edilebileceğini göstermektedir. Burada A_μ vektör potansiyelini elektromanyetik vektör potansiyel, $F_{\mu\nu}$ eğriliğini elektromanyetik gerilme tensörü ve q etkileşme sabitini de elektrik yükü olarak ele aldığımızda ulaşılan teoremin elektrodinamiği içerdiğini görebiliriz. Buradan hareketle Denklem (1.125) dikkate alındığında aşağıdaki Lagranjiyen yazılabilir,

$$L_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.129)$$

ve Dirac Lagranjiyeninin $L_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu + m)\psi$ olduğu hesaba katılırsa toplam Lagranjiyen $L_{\text{Toplam}} = L_{\text{Dirac}} + L_A$ biçiminde yazılabilir,

$$L_{\text{Toplam}} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu + m)\psi \quad (1.130)$$

Bu sayede yerel $U(1)$ simetrisi altında değişmez kalan ve vektörel alanlarla fermiyon alanlarının etkileştiği bir teori elde edilmiş olur. Bu Lagranjiyene ait hareket denklemleri bulunmak istenirse ayar alanlarına göre varyasyon alınır. A_μ ayar alanına göre varyasyon ile aşağıdaki sonuç elde edilir,

$$\begin{aligned} \delta_A L_{\text{Toplam}} &= \delta \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu + m)\psi \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \delta (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) F_{\mu\nu} - q \bar{\psi} \gamma^\mu \delta A_\mu \psi \\ &= -\partial^\mu \delta A^\nu F_{\mu\nu} - \delta A_\mu (q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \\ &= \partial_\mu (-\delta A^\nu F_{\mu\nu}) - \delta A^\mu (\partial^\nu F_{\mu\nu} + q \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) = 0 \end{aligned} \quad (1.131)$$

Son ifadede ilk terim tam türev olduğu için integralde ihmal edilir, ikinci terim ise aşağıdaki hareket denklemini verir,

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = J_\mu \quad (1.132)$$

Son denklem homojen olmayan Maxwell denklemlerine karşılık gelmektedir, J_μ ise akımı ifade eder. Benzer şekilde $\bar{\psi}$ alanına göre varyasyon alınır,

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = q\gamma^\mu A_\mu\psi \quad (1.133)$$

hareket denklemi elde edilir ve bu ifade yüklü bir fermiyonun dinamiğini tanımlar.

1.3.3. Lorentz değişmezliği

$SO(1,3)$ Lorentz grubu için herhangi bir grup elmanı,

$$U = e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab}(x)M_{ab}} \quad (1.134)$$

ile verilir. Burada $\omega^{ab}(x) = -\omega^{ba}(x)$ antisimetrik “spin bağlantı” veya “Lorentz bağlantı” olarak adlandırılır, $M_{ab} = -M_{ba}$ ise bu gruba ait üreticidir ve diferansiyel gösterimi aşağıdaki şekildedir,

$$M_{ab} = i(x_a\partial_b - x_b\partial_a) \quad (1.135)$$

Bu üretici aşağıdaki komutasyon ilişkisini sağlar,

$$[M_{ab}, M_{cd}] = i(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \quad (1.136)$$

$SO(1,3)$ için ayar teorisine aşağıdaki gibi bir kovaryant türev tanımlayarak başlayalım,

$$D = d + i\mathbb{A} = d - \frac{i}{2}\omega^{ab}M_{ab} \quad (1.137)$$

Burada $\mathbb{A} = -\frac{1}{2}\omega^{ab}M_{ab}$ yapısındadır ve $\omega^{ab}(x)$ ise ayar alanıdır.

Tanımlanan ayar alanının Lorentz simetrisi altındaki değişimini, Denklem (1.110) ve sonsuz küçük parametrelili $\zeta(x) = -\frac{1}{2}\tau^{ab}(x)M_{ab}$ sonsuz küçük parametrelili bir ayar üreticisi kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbb{A} &= -d\zeta - i[\mathbb{A}, \zeta] \\
&= -d\left(-\frac{1}{2}\tau^{ab}M_{ab}\right) - i\left[-\frac{1}{2}\omega^{ab}M_{ab}, -\frac{1}{2}\tau^{cd}M_{cd}\right] \\
&= \frac{1}{2}d\tau^{ab}M_{ab} + \omega^{ab}\tau^{cd}(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \\
&= -\frac{1}{2}(-d\tau^{ab} - \tau^{[a}_c\omega^{cb]})M_{ab}
\end{aligned} \tag{1.138}$$

elde edilir ve bu netice ile değişimin genel ifadesinin $\delta\mathbb{A} = -\frac{1}{2}\delta\omega^{ab}M_{ab}$ yapısında olduğu göz önüne alındığında aşağıdaki biçimde bulabiliriz,

$$\delta\omega^{ab} = -d\tau^{ab} - \tau^{[a}_c\omega^{cb]} = -D\tau^{ab} \tag{1.139}$$

Bu gruba ait eğrilikler Denklem (1.114) yardımıyla aşağıdaki şekilde bulabiliriz,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F} &= d\mathbb{A} + \frac{i}{2}[\mathbb{A}, \mathbb{A}] \\
&= -\frac{1}{2}d\omega^{ab}M_{ab} + \frac{i}{2}\left[-\frac{1}{2}\omega^{ab}M_{ab}, -\frac{1}{2}\omega^{cd}M_{cd}\right] \\
&= -\frac{1}{2}d\omega^{ab}M_{ab} - \frac{1}{8}\omega^{ab} \wedge \omega^{cd}(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \\
&= -\frac{1}{2}(d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb})M_{ab}
\end{aligned} \tag{1.140}$$

Burada $\mathbb{F} = \mathbb{F}^A X_A = -\frac{1}{2}R^{ab}M_{ab}$ ifadesinden yararlandığımızda,

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \tag{1.141}$$

2-form Lorentz eğriliği elde edilir ve bu eşitliğin Denklem (1.52)'ye denk olduğu gösterilebilir. Yerel Lorentz dönüşümü altında bu eğriliğin varyasyonunu ise Denklem (1.119) yardımıyla Denklem (1.142)'deki şekilde bulabiliriz,

$$\begin{aligned}
\delta \mathbb{F} &= i[\zeta, \mathbb{F}] = i \left[-\frac{1}{2} \tau^{ab} M_{ab}, -\frac{1}{2} R^{cd} M_{cd} \right] \\
&= -\tau^{ab} R^{cd} (\eta_{ad} M_{bc}) \\
&= -\frac{1}{2} \tau^{[a}{}_c R^{cb]} M_{ab}
\end{aligned} \tag{1.142}$$

Elde edilen son ifade $\delta \mathbb{F} = -\frac{1}{2} \delta R^{ab} M_{ab}$ denklemi ile karşılaştırıldığında,

$$\delta R^{ab} = \tau^{[a}{}_c R^{cb]} \tag{1.143}$$

elde edilir. Şimdi bir uygulama olarak Einstein-Hilbert eylemini dikkate alalım,

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int R^{ab} \wedge * (e_a \wedge e_b) = -\frac{1}{4\kappa} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \tag{1.144}$$

burada κ Einstein sabiti, $e^a(x) = e^a{}_\mu dx^\mu$ 1-form vierbein vektörlerini temsil etmektedir ve Lorentz simetrisi altındaki dönüşümü $(e^a)' = \Lambda^a{}_b e^b$ şeklindedir. Eğer $\Lambda^a{}_b$ parametresinin sonsuz küçük açılımını $\Lambda^a{}_b = \delta^a{}_b + \tau^a{}_b$ dikkate alırsak,

$$\delta e^a = \tau^a{}_b e^b \tag{1.145}$$

elde edilir. İlgili eylemin yerel Lorentz değişmezliği aşağıdaki şekilde gösterilebilir,

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{4\kappa} \int \left(\delta \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \varepsilon_{abcd} \delta R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \delta e^c \wedge e^d + \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \delta e^d \right) \\
&= -\frac{1}{4\kappa} \int \left(\varepsilon_{abcd} \tau^{[a}{}_e R^{eb]} \wedge e^c \wedge e^d + \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \tau^c{}_e e^e \wedge e^d \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge \tau^d{}_e e^e \right) \\
&= -\frac{1}{4\kappa} \int \left(\tau^e{}_a \varepsilon_{ebcd} + \tau^e{}_b \varepsilon_{aecd} + \tau^e{}_c \varepsilon_{abed} + \tau^e{}_d \varepsilon_{abce} \right) R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \\
&= -\frac{1}{4\kappa} \int \tau^e{}_e \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.146}$$

Burada $\delta \varepsilon_{abcd} = 0$ ve $\tau^{ab}(x)$ parametresinin antisimetrik özelliğinden faydalanılarak elde edilen Denklem (1.147) kullanılmıştır,

$$\left(\tau_a^e \varepsilon_{ebcd} + \tau_b^e \varepsilon_{aecd} + \tau_c^e \varepsilon_{abed} + \tau_d^e \varepsilon_{abce}\right) = \tau_e^e \varepsilon_{abcd} = 0 \quad (1.147)$$

Hareket denklemleri için $\delta S = 0$ temel alınarak sırasıyla ayar alanlarına göre varyasyonlara bakılır. İlk olarak $\omega^{ab}(x)$ ayar alanına göre varyasyon alınır,

$$\begin{aligned} \delta_\omega S &= \int \varepsilon_{abcd} \delta R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \\ &= \int \varepsilon_{abcd} D\delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \\ &= \int D\left(\varepsilon_{abcd} \delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d\right) + 2\delta\omega^{ab} \wedge (\varepsilon_{abcd} \wedge D e^c \wedge e^d) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.148)$$

elde edilir. Burada D Lorentz kovaryant türevidir (Ek-A). İlk terim tam türev olduğundan ihmal edilirse aşağıdaki hareket denklemi elde edilir,

$$\varepsilon_{abcd} D e^c \wedge e^d = 0 \quad (1.149)$$

Bu denklemin sağlanabilmesi için burulma (torsion) tensörü $F^c = D e^c = 0$ olması gerektiği açıkça görülmektedir. İkinci olarak $e^a(x)$ alanına göre varyasyon alınır,

$$\delta_e S = \int 2\delta e^c \wedge (\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^d) = 0 \quad (1.150)$$

ve bu neticeden hareketle,

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^d = 0 \quad (1.151)$$

hareket denklemi elde edilir. Bu denklem kullanılarak Einstein alan denklemini elde edebiliriz. Bunun için öncelikle denklemi sağ taraftan e^v ile çarpalım,

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^d \wedge e^v = 0 \quad (1.152)$$

Son ifade üzerinde Denklem (1.86) kullanılıp açık bir şekilde yazıldığında Denklem (1.153) elde edilir,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^d \wedge e^v &= \varepsilon_{abcd} \left(\frac{1}{2} R^{ab}_{ef} e^e \wedge e^f \right) \wedge e^d \wedge e^v \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab}_{ef} \varepsilon^{efdv} \sqrt{-g} d^4x = -\frac{1}{2} R^{ab}_{ef} (\varepsilon_{abcd} \varepsilon^{efvd}) \sqrt{-g} d^4x \\
&= \frac{1}{2} \left(R^{ab}_{ab} \delta^v_c - R^{av}_{ac} - R^{ab}_{ba} \delta^v_c \right) \sqrt{-g} d^4x \\
&\quad + R^{vb}_{bc} + R^{av}_{ca} - R^{vb}_{cb} \sqrt{-g} d^4x \\
&= -2 \left(R^v_c - \frac{1}{2} R \delta^v_c \right) \sqrt{-g} d^4x
\end{aligned} \tag{1.153}$$

Bu ifade uzay-zaman indisleri ile yazılıp Denklem (1.152) ile karşılaştırıldığında aşağıdaki ifade elde edilir,

$$G^\mu_\alpha = R^\mu_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu_\alpha R = 0 \tag{1.154}$$

Bu eşitlik Denklem (1.57)'de belirtildiği gibi Einstein tensörü olarak adlandırılır. Benzer şekilde Einstein-Hilbert eylemi kozmolojik sabit ve kütle terimini içerecek şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$S = -\frac{1}{4\kappa} \int \left(\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{\Lambda}{2} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d - 4\kappa L_m *1 \right) \tag{1.155}$$

Burada Λ kozmolojik sabit ve L_m ise kütle terimidir. Uzay zaman koordinatlarında yazılmak istendiğinde,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 6\Lambda - 2\kappa L_m) \tag{1.156}$$

biçimiyle ifade elde edilir. Son eylemin metriğe göre varyasyonu alındığında kozmolojik terimi içeren Einstein alan denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + 3\Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{1.157}$$

Burada $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörüdür (Ek-Ç).

2. SÜPERSİMETRİ VE SÜPER KÜTLEÇEKİM TEORİSİ

2.1. Süpersimetri

Parçacık fiziği açısından ele alındığında ise süpersimetri, bozon ve fermiyonların birbirlerine dönüştüğü genişletilmiş bir uzay-zaman simetrisi olarak ele alınabilir. Bilinen süpersimetrinin ortaya çıkışı için komütatör ve anti komütatörlerin aynı cebirde ilk olarak kullanıldığı Neveu'nun [62] makalesine gidilebilir. Burada Virasora cebirinin bir boyutta “süper” genişletilmesi yapılmıştı. Bu çalışmadan kısa bir süre sonra 4 boyutta Poincare cebirinin süper genişletilmesi yapıldı. Bu konudaki önemli çalışmalar ise tarihi sırasıyla Golfand ve Likhtman [63], Volkov ve Akulov [64, 65], Wess ve Zumino [66] olarak verilebilir. Bu çalışmaların ardından 1975 yılında Fayet'in çalışmasıyla [67] zayıf ve elektromanyetik etkileşmenin süpersimetrik teorisi elde edildi. 1976 da ise Feedman'ın makalesi [68] ile birlikte 4 boyutta minimal süpersimetri ve Genel Görelilik teorisinin birleşimi olan süper kütleçekimi keşfedildi. Süpersimetri ve süper kütleçekim teorisi hakkında detaylı bilgi için [69-73] kaynaklarına başvurulabilir.

2.1.1. Süper Poincare grubu

Burada süper Poincare grubunu $sp(1,3)$ ele alacağız. Süper cebirin oluşturulmasında Majorana formalizmi seçilmiştir. Bu grubun üreticileri $X_A = \{P_a, M_{ab}, Q_\alpha\}$ şeklindedir ve bilinen $P(1,3)$ 'na ek olarak ilave bir spinör üretici Q_α içermektedir. Burada spinör indislerini temsil eden Yunan harfleri $\alpha, \beta, \dots = 0, \dots, 3$ değerlerini alırlar. $sp(1,3)$ 'nun komütasyon ilişkileri Denklem (2.1)'deki şekilde verilir,

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= i(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \\ [M_{ab}, P_c] &= i(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b) \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2(C\gamma^c)_{\alpha\beta} P_c, \\ [M_{ab}, Q_\rho] &= \frac{1}{2}(\sigma_{ab}Q)_\rho \end{aligned} \tag{2.1}$$

Grup elemanı ise,

$$g(x, \theta, \omega) = e^{ix^a P_a} e^{i\theta^\alpha Q_\alpha} e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab} M_{ab}} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x^a(x)$, $\theta^\alpha(x)$, $\omega^{ab}(x)$ ilişkili üreticilere karşılık gelen sonlu parametrelerdir. Bu parametrelerin $SP(1,3)$ altında sonsuz küçük değişimlerini bulmak için koset dönüşümlerinden faydalanacağız. K bir koset olmak üzere bu kosetin dönüşümü $K'H = g(a, \varepsilon, u)K$ şeklinde verilir. Burada $a^a(x)$, $\varepsilon^\alpha(x)$, $u^{ab}(x)$ sonsuz küçük parametrelerdir ve H kararlılık grubunu temsil etmektedir. Koset aşağıdaki şekilde seçilir,

$$K(x, \theta) = \frac{g(x, \theta, \omega)}{H(\omega)} = e^{ix^a P_a} e^{i\theta^\alpha Q_\alpha} \quad (2.3)$$

Burada $H(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab} M_{ab}}$ şeklinde $SO(1,3)$ olarak tercih edilmiştir. Bu noktadan hareketle gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki neticeler elde edilir,

$$\delta x^a = a^a + u^a_b x^b - i\bar{\varepsilon}\gamma^a \theta \quad (2.4)$$

$$\delta \theta^\alpha = \varepsilon^\alpha - \frac{i}{4} u^{ab} (\sigma_{ab})^\alpha \quad (2.5)$$

$$\omega^{ab} = u^{ab} \quad (2.6)$$

Burada bir spinörün yük eşleniği $\bar{\psi} = \psi^T C$ şeklinde tanımlanır ve yük eşleniği matrisi $C = \gamma_0$ şeklindedir ayrıca süpersimetriye dair detaylı notasyon bilgileri (Ek-B)'de yer almaktadır. İlk iki varyasyon kullanılarak üreticilerin diferansiyel gösterimleri bulunabilir. Bunun için varyasyonlar, bir skaler alanın sonsuz küçük değişimi $\Phi'(x, \theta) = \Phi(x - \delta x, \theta - \delta \theta)$ olan ifadede yerine yazılır ve Denklem (2.7)'de gösterildiği şekilde Taylor serisine açılır,

$$\begin{aligned}
\Phi'(x^a, \theta^\alpha) &= \Phi(x^a - \delta x^a, \theta^\alpha - \delta \theta^\alpha) \\
&= \Phi\left(x^a - a^a - u^a_b x^b + i\bar{\varepsilon}\gamma^a \theta, \theta^\alpha - \varepsilon^\alpha + \frac{i}{4} u^{ab} (\sigma_{ab} \theta)^\alpha\right) \\
&= \Phi(x^a, \theta^\alpha) + \left(\begin{aligned} &\left(-a^a - u^a_b x^b + i\varepsilon^\alpha (C\gamma^a)_{\alpha\beta} \theta^\beta\right) \partial_a \\ &+ \left(-\varepsilon^\alpha + \frac{i}{4} u^{ab} (\sigma_{ab} \theta)^\alpha\right) \partial_\alpha \end{aligned} \right) \Phi(x^a, \theta^\alpha)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Burada $\delta\Phi'(x, \theta) = \Phi'(x, \theta) - \Phi(x, \theta)$ temel alınarak düzenleme yapıldığında,

$$\delta\Phi(x^a, \theta^\alpha) = \left(\begin{aligned} &ia^a [i(\partial_a)] + i\varepsilon^\alpha [i\partial_\alpha + (C\gamma^a)_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_a] \\ &-\frac{i}{2} u^{ab} \left[i(x_a \partial_b - x_b \partial_a) - \frac{1}{2} (\sigma_{ab} \theta)^\alpha \partial_\alpha \right] \end{aligned} \right) \Phi(x^a, \theta^\alpha) \tag{2.8}$$

elde edilir. Buna ek olarak skaler alanın sonsuz küçük grup dönüşümü altındaki varyasyonu,

$$\delta\Phi = \left(ia^a P_a + i\varepsilon^\alpha Q_\alpha - \frac{i}{2} \omega^{ab} M_{ab} \right) \Phi \tag{2.9}$$

şeklindedir. Bu ifade ile Denklem (2.8) karşılaştırıldığında üreticilerin diferansiyel gösterimleri aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$P_a = i\partial_a \tag{2.10}$$

$$Q_\alpha = i\left\{ \partial_\alpha - i(C\gamma^b \theta)_\alpha \partial_b \right\} \tag{2.11}$$

$$M_{ab} = i\left\{ (x_a \partial_b - x_b \partial_a) + \frac{i}{2} (\sigma_{ab} \theta)^\alpha \partial_\alpha \right\} \tag{2.12}$$

2.2. Süper Kütleçekim Teorisi

Bu bölümde $sp(1,3)$ 'nün ayar teorisi oluşturulup süper kütleçekim teorisine ulaşılabacaktır.

2.2.1. Süper Poincare grubunun ayar teorisi

Grubun yerel incelemesi için kovaryant türevin genel ifadesinin $D = d + i\mathbb{A}$ olduğu dikkate alınır. Burada 1-form ayar potansiyellerini $\mathbb{A}^A = \{e^a, \omega^{ab}, \psi^\alpha\}$ şeklinde parametrize ettiğimizde aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^A X_A = e^a P_a + \psi^\alpha Q_\alpha - \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} \quad (2.13)$$

Burada 1-form ayar alanları sırasıyla $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ vierbein, $\psi^\alpha = \psi^\alpha_\mu dx^\mu$ gravitino alanı ve $\omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu$ spin bağlantıdır. Belirlenen bu ayar alanlarının varyasyonlarını aşağıdaki gibi,

$$\zeta(x) = y^a(x) P_a + \varepsilon^\alpha(x) Q_\alpha - \frac{1}{2} \tau^{ab}(x) M_{ab} \quad (2.14)$$

sonsuz küçük parametrelere sahip bir yardımcı alan ve Denklem (1.110) yardımıyla Denklem (2.15)'deki gibi bulabiliriz,

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{A} &= -d\zeta + i[\zeta, \mathbb{A}] \\ &= -d\zeta + i \left[y^a P_a - \frac{1}{2} \tau^{ab} M_{ab} + \varepsilon^\alpha Q_\alpha, e^c P_c - \frac{1}{2} \omega^{cd} M_{cd} + \psi^\rho Q_\rho \right] \\ &= -d\zeta + i \left\{ \begin{aligned} &i\omega^d_a y^a P_d - i\tau^b_c e^c P_b + \frac{i}{2} \tau^{[a}_c \omega^{cb]} M_{ab} \\ &-\frac{1}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \psi)^\alpha Q_\alpha + \frac{1}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \varepsilon)^\alpha Q_\alpha \\ &-2(\bar{\varepsilon} \gamma^a \psi) P_a \end{aligned} \right\} \\ &= -d\zeta + i \left\{ \begin{aligned} &i(\omega^a_c y^c - \tau^a_c e^c + 2i\bar{\varepsilon} \gamma^a \psi) P_a - \frac{i}{2} \omega^{[a}_c \tau^{cb]} M_{ab} \\ &+ i \left(\frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \psi)^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \varepsilon)^\alpha \right) Q_\alpha \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Son ifade $\delta\mathbb{A} = \delta e^a P_a + \delta \psi^\alpha Q_\alpha - \frac{1}{2} \delta \omega^{ab} M_{ab}$, ile karşılaştırıldığında 1-form ayar alanlarının varyasyonu Denklem (2.16)'daki şekliyle elde edilir,

$$\begin{aligned}
\delta e^a &= -dy^a - \omega^a_b y^b + \tau^a_b e^b - 2i\bar{\epsilon}\gamma^a \psi \\
\delta \omega^{ab} &= -d\tau^{ab} - \omega^{[a}_c \tau^{cb]} \\
\delta \psi^\alpha &= -d\epsilon^\alpha + \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \epsilon)^\alpha - \frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \psi)^\alpha
\end{aligned} \tag{2.16}$$

2-form eğrilikler için genel ifade aşağıdaki gibi verilir,

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^A X_A = F^a P_a + \Psi^\alpha Q_\alpha - \frac{1}{2} R^{ab} M_{ab} \tag{2.17}$$

Burada Denklem (1.114) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F} &= d\mathbb{A} + \frac{i}{2} [\mathbb{A}, \mathbb{A}] \\
&= d\mathbb{A} + \frac{i}{2} \left[e^a P_a - \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} + \psi^\alpha Q_\alpha, e^c P_c - \frac{1}{2} \omega^{cd} M_{cd} + \psi^\rho Q_\rho \right] \\
&= d\mathbb{A} + \frac{i}{2} \left(-\omega^{ab} \wedge e^c [M_{ab}, P_c] + \frac{1}{4} \omega^{ab} \wedge \omega^{cd} [M_{ab}, M_{cd}] \right. \\
&\quad \left. + \omega^{ab} [M_{ab}, Q_\rho] \psi^\rho - \psi^\rho \{Q_\alpha, Q_\rho\} \psi^\alpha \right) \\
&= d\mathbb{A} + \frac{i}{2} \left(-2i\omega^a_c \wedge e^c P_a + i\omega^a_c \wedge \omega^{cb} M_{ab} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \omega^{ab} \wedge (\sigma_{ab} \psi)^\alpha Q_\alpha - 2\bar{\psi} \gamma^a \wedge \psi P_a \right) \\
&= \left\{ \left(de^a + \omega^a_b \wedge e^b - i\bar{\psi} \gamma^a \wedge \psi \right) P_a \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \right) M_{ab} + \left(d\psi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} \wedge (\sigma_{ab} \psi)^\alpha \right) Q_\alpha \right\}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

elde edilir ve buradan 2-form eğriliklerin açık ifadelerine ulaşılır,

$$\begin{aligned}
F^a &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b - i\bar{\psi} \wedge \gamma^a \psi = D e^a - i\bar{\psi} \wedge \gamma^a \psi \\
\Psi^\alpha &= d\psi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} \wedge (\sigma_{ab} \psi)^\alpha = D \psi^\alpha \\
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} = D \omega^{ab}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Son ifadeler sırasıyla süper torsion (burulma) tensörü, spinör eğrilik, Riemann eğrilik tensörleridir ve bunlar öteleme, süpersimetri ve Lorentz simetrilerinden kaynaklanmaktadır. Bu eğriliklerin ilgili grup yerel ayar dönüşümü altında sonsuz küçük değişimi Denklem (1.119) ve Denklem (2.14) yardımıyla Denklem (2.20)'deki şekilde bulunabilir,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbb{F} &= i[\zeta, \mathbb{F}] \\
&= i \left[y^a P_a - \frac{1}{2} \tau^{ab} M_{ab} + \varepsilon^\alpha Q_\alpha, F^c P_c - \frac{1}{2} R^{cd} M_{cd} + \Psi^\rho Q_\rho \right] \\
&= i \left\{ \begin{aligned} &i R^d{}_a y^a P_d - i \tau^b{}_c F^c P_b + \frac{i}{2} \tau^{[a}{}_c R^{cb]} M_{ab} \\ &-\frac{1}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab})^\alpha{}_\rho \Psi^\rho Q_\alpha + \frac{1}{4} R^{ab} (\sigma_{ab})^\alpha{}_\rho \varepsilon^\rho Q_\alpha \\ &-2\varepsilon^\alpha (C\gamma^a)_{\alpha\rho} \Psi^\rho P_a \end{aligned} \right\} \\
&= i \left(\begin{aligned} &i \left(R^a{}_c y^c - \tau^a{}_c F^c + 2i\varepsilon^\rho (C\gamma^a)_{\rho\sigma} \Psi^\sigma \right) P_a - \frac{i}{2} R^{[a}{}_c \tau^{cb]} M_{ab} \\ &+ i \left(\frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab})^\alpha{}_\rho \Psi^\rho - \frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab})^\alpha{}_\rho \varepsilon^\rho \right) Q_\alpha \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Bu netice $\delta\mathbb{F} = \delta\mathbb{F}^A X_A = \delta F^a P_a + \delta\Psi^\alpha Q_\alpha - \frac{1}{2} \delta R^{ab} M_{ab}$ ile karşılaştırıldığında,

$$\begin{aligned}
\delta F^a &= \tau^a{}_b F^b - R^a{}_b y^b - 2i(\bar{\varepsilon}\gamma^a\Psi) \\
\delta R^{ab} &= -R^{[a}{}_c \tau^{cb]} \\
\delta\Psi^\alpha &= -\frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab}\Psi)^\alpha + \frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab}\varepsilon)^\alpha
\end{aligned} \tag{2.21}$$

elde edilir. Bianchi özdeşlikleri ise aşağıdaki şekilde bulunabilir,

$$\begin{aligned}
DF^a &= D(de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b) - iD(\Psi^\rho \wedge (C\gamma^a)_{\rho\alpha} \Psi^\alpha) \\
&= R^a{}_b \wedge e^b - i(\Psi^\rho \wedge (C\gamma^a)_{\rho\alpha} \Psi^\alpha - \Psi^\rho \wedge (C\gamma^a)_{\rho\alpha} \Psi^\alpha) \\
&= R^a{}_b \wedge e^b - 2i\bar{\Psi}\gamma^a\Psi
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
D\Psi^\alpha &= \left\{ \begin{aligned} &d(\Psi^\alpha) - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab})^\alpha{}_\beta \wedge \left(d\Psi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} \wedge (\sigma_{ab}\Psi)^\alpha \right) \\ &+ \frac{1}{2} \chi \wedge \left(d\Psi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} \wedge (\sigma_{ab}\Psi)^\alpha \right) \end{aligned} \right\} \\
&= \left[d \left(d\Psi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} \wedge (\sigma_{ab}\Psi)^\alpha \right) - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab})^\alpha{}_\beta \left(d\Psi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} \wedge (\sigma_{ab}\Psi)^\alpha \right) \right] \\
&= -\frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \Psi)^\alpha
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
DR^{ab} &= dR^{ab} + \omega^a_c \wedge R^{cb} - \omega^b_c \wedge R^{ca} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &d(d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb}) + \omega^a_c \wedge (d\omega^{cb} + \omega^c_d \wedge \omega^{db}) \\ &-\omega^b_c \wedge (d\omega^{ca} + \omega^c_d \wedge \omega^{da}) \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &d^2\omega^{ab} + d\omega^a_c \wedge \omega^{cb} - \omega^a_c \wedge d\omega^{cb} + \omega^a_c \wedge d\omega^{cb} \\ &+ \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \wedge \omega^{db} - \omega^b_c \wedge d\omega^{ca} - \omega^b_c \wedge \omega^c_d \wedge \omega^{da} \end{aligned} \right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.2.2. N = 1 ve D = 4 süper kütleçekimi

Bu temelden hareketle N=1 ve D=4 için Lagranjiyenin genel ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$S = \int \alpha \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \beta \bar{\Psi} \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \Psi \tag{2.25}$$

Burada ilk terim bilinen Einstein-Hilbert Lagranjiyeni diğer terim ise Rarita-Schwinger alanıdır ve α, β sabittir. İlgili katsayılar Lagranjiyenin istenilen simetri altında değişmezliğine bakılarak belirlenebilir. Einstein-Hilbert Lagranjiyeninin değişmezliği Denklem (1.146)'da gösterilmiştir, Rarita-Schwinger alanının Lorentz değişmezliği ise Denklem (2.26)'daki şekilde gösterilebilir,

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{Lorentz}} S_{RS} &= \beta \int \delta \bar{\Psi} \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \Psi + \bar{\Psi} \wedge \delta e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \Psi + \bar{\Psi} \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \delta \Psi \\
&= \beta \int \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{i}{4} \bar{\Psi} \tau^{ab} \sigma_{ab} \right) \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \Psi + \bar{\Psi} \wedge \left(\tau^c_b e^b \right) \gamma_c \gamma_5 \wedge \Psi \\ &+ \bar{\Psi} \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \left(-\frac{i}{4} \tau^{ab} \sigma_{ab} \Psi \right) \end{aligned} \right\} \\
&= \beta \int \frac{i}{4} \bar{\Psi} \wedge \tau^{ab} e^c [\sigma_{ab}, \gamma_c] \gamma_5 \wedge \Psi + \bar{\Psi} \wedge \tau^c_b e^b \gamma_c \gamma_5 \wedge \Psi \\
&= \beta \int -\bar{\Psi} \wedge \tau^c_b e^b \gamma_c \gamma_5 \wedge \Psi + \bar{\Psi} \wedge \tau^c_b e^b \gamma_c \gamma_5 \wedge \Psi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Görüldüğü gibi iki terim bağımsız olarak Lorentz değişmez olduğundan dolayı katsayıların bir önemi yoktur. Şimdi eylemin süpersimetri dönüşümü altındaki davranışına bakalım,

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{susy}} S &= \int \left\{ 2\alpha \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \delta e^c \wedge e^d + \beta \delta \bar{\psi} \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \right\} \\
&= \int \left\{ \underbrace{2\alpha \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge (2i\bar{\psi} \gamma^c \varepsilon) \wedge e^d}_{\text{B}} + \underbrace{\beta (-D\bar{\varepsilon}) \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge e^c}_{\text{A}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Son ifadede sırasıyla A ve B terimlerini inceleyelim,

$$\begin{aligned}
A &= -\beta D\bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge e^c \\
&= D(-\beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge e^c) + \beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D^2 \psi \wedge e^c + \beta D\bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge De^c \\
&= D(-\beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge e^c) - \frac{i\beta}{4} R^{ab} \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \sigma_{ab} \wedge \psi \wedge e^c + \beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge De^c
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$B = 2i\beta \bar{\psi} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge \bar{\psi} \gamma^c \varepsilon = 2i\beta \underbrace{\bar{\psi} \gamma_c \gamma_5 \wedge \psi}_0 \wedge D\bar{\psi} \gamma^c \varepsilon = 0 \tag{2.29}$$

Bulunan nicelikler eylemde yerine yazıldığında Denklem (2.30) elde edilir,

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{susy}} S &= \int \left\{ 4i\alpha \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma^c \varepsilon \wedge e^d - \frac{i\beta}{4} R^{ab} \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \sigma_{ab} \wedge \psi \wedge e^c \right. \\
&\quad \left. + \beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge De^c - \beta \bar{\psi} \gamma_c \gamma_5 \wedge \left(-\frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} \varepsilon)^\alpha \right) \wedge e^c \right\} \\
&= \int \left\{ \underbrace{4i\alpha \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma^c \varepsilon \wedge e^d - \frac{i\beta}{4} R^{ab} \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \sigma_{ab} \wedge \psi \wedge e^c}_{\text{C}} \right. \\
&\quad \left. + \beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge De^c + \underbrace{\frac{i\beta}{4} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma_c \gamma_5 \sigma_{ab} \varepsilon \wedge e^c}_{\text{D}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Şimdi C ve D terimlerini sırasıyla inceleyelim,

$$\begin{aligned}
C &= -i \frac{\beta}{4} R^{ab} \bar{\varepsilon} \gamma_r \left(\frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} \sigma^{cd} \right) \wedge \psi \wedge e^r = \frac{\beta}{8} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \bar{\varepsilon} \gamma^m \sigma^{cd} \wedge \psi \wedge e_m \\
&= \frac{\beta}{8} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \bar{\varepsilon} \left\{ i \left(\eta^{cr} \gamma^d - \eta^{dr} \gamma^c \right) + \varepsilon^{cdmn} \gamma_5 \gamma_n \right\} \wedge \psi \wedge e_r \\
&= -i \frac{\beta}{4} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \bar{\varepsilon} \gamma^c \wedge \psi \wedge e^d + \frac{\beta}{8} \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{cdmn} R^{ab} \bar{\varepsilon} \gamma_5 \gamma_n \wedge \psi \wedge e_r
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
D &= i \frac{\beta}{4} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma_n \left(\frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} \sigma^{cd} \right) \varepsilon \wedge e^n \\
&= i \frac{\beta}{4} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma^c \varepsilon \wedge e^d - \frac{\beta}{8} \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{cdmn} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_n \varepsilon \wedge e_r
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Bu iki terim $\bar{\psi} \gamma^c \varepsilon = -\bar{\varepsilon} \gamma^c \psi$ ve $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_n \varepsilon = \bar{\varepsilon} \gamma_5 \gamma_n \psi$ dikkate alınarak toplandığında,

$$C + D = i \frac{\beta}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma^c \varepsilon \wedge e^d \tag{2.33}$$

elde edilir ve eylemde yerine yazılırsa aşağıdaki nihai netice elde edilir,

$$\delta_{\text{susy}} S = \int \left\{ 4i\alpha \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma^c \varepsilon \wedge e^d + i \frac{\beta}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \bar{\psi} \gamma^c \varepsilon \wedge e^d + \underbrace{\beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \wedge D\varepsilon^c}_E \right\} \tag{2.34}$$

Burada $\beta = -8\alpha$ seçilirse ilk iki terim birbirini götürüleceği açıkça görülmektedir. Üçüncü terim ise, klasik torsion $T^a = D\varepsilon^a = 0$ veya süper torsion $F^a = 0$ şartlarında sıfıra gitmektedir. Örneğin son şartı ele alırsak $D\varepsilon^a = i\bar{\psi} \gamma^a \wedge \psi$ elde edilir ve E teriminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
E &= i\kappa\beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 D\psi \wedge \bar{\psi} \gamma^a \wedge \psi = i\kappa\beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \psi \wedge D\bar{\psi} \gamma^a \wedge \psi \\
&= i\kappa\beta \bar{\varepsilon} \gamma_c \gamma_5 \psi \wedge \bar{\psi} \gamma^a \wedge D\psi \\
&= i\kappa\beta \underbrace{\bar{\psi} \gamma_c \gamma_5 \psi}_0 \bar{\varepsilon} \gamma^a \wedge D\psi = 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

İfadesine ulaşılır. Böylece katsayılar arası ilişki, Lagranjiyenin süpersimetri dönüşümü altında değişmezliği ile gösterilmiş olur. Lagranjiyen $\alpha = -\frac{1}{4\kappa}$ için tekrar yazıldığında aşağıdaki şekli alır,

$$S = -\frac{1}{4\kappa} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - 8\bar{\psi} \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi \tag{2.36}$$

Bu ifade aynı zamanda yalın süper kütleçekim Lagranjiyeni olarak bilinir. Hareket denklemleri için $\delta S = 0$ temel alınarak sırasıyla ayar alanlarına göre varyasyonlara bakılır. Einstein-Hilbert terimine ait hareket denklemlerini daha önce bulmuştuk. Bu

sebepten sadece Rarita-Schwinger teriminden gelen katkılara bakacağız. İlk olarak ω^{ab} ayar alanına göre varyasyon alınırsa,

$$\begin{aligned}\delta_\omega S_{RS} &= \int -8\bar{\psi} \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \delta D\psi = \int -8\bar{\psi} \wedge e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \left(-\frac{i}{4} \delta\omega^{ab} \sigma_{ab} \wedge \psi \right) \\ &= \int 2\delta\omega^{ab} \wedge (i\bar{\psi} \wedge e^c \gamma_c \sigma_{ab} \gamma_5 \wedge \psi) \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.37}$$

elde edilir. Bu netice ile Denklem (1.149) dikkate alındığında aşağıdaki hareket denklemini elde edilir,

$$\varepsilon_{abcd} D e^c \wedge e^d + i\bar{\psi} \wedge e^c \gamma_c \sigma_{ab} \gamma_5 \wedge \psi = 0\tag{2.38}$$

Son denklem açıldığında,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abcd} D e^c \wedge e^d &= -i\bar{\psi} \wedge e^k \gamma_k \sigma_{ab} \gamma_5 \wedge \psi = -i\bar{\psi} \wedge e^k \gamma_k \left(\frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} \sigma^{cd} \right) \wedge \psi \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} \bar{\psi} \wedge e_k \left\{ i \left(\eta^{ck} \gamma^d - \eta^{dk} \gamma^c \right) + \varepsilon^{cdkr} \gamma_5 \gamma_r \right\} \wedge \psi \\ &= -i\varepsilon_{abcd} \bar{\psi} \wedge e^d \gamma^c \wedge \psi + \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{cdkr} e_k \wedge \underbrace{\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_r \wedge \psi}_0 \\ &= i\varepsilon_{abcd} \bar{\psi} \gamma^c \wedge \psi \wedge e^d\end{aligned}\tag{2.39}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada sol ve sağ taraf karşılaştırıldığında,

$$D e^c = i\bar{\psi} \gamma^c \wedge \psi\tag{2.40}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade sayesinde süper burulma tensörü $F^a = 0$ olur ve Lagranjiyenin değişmezlik şartına uygundur. İkinci olarak e^a ayar potansiyeline göre varyasyon alınırsa,

$$\begin{aligned}\delta_e S_{RS} &= \int -8\bar{\psi} \wedge \delta e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi = \int 2\delta e^c \wedge (4\bar{\psi} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi) \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.41}$$

ve bu netice Denklem (1.151) ile birlikte ele alındığında,

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^d + 4\bar{\psi} \gamma_c \gamma_5 \wedge D\psi = 0\tag{2.42}$$

hareket denklemi elde edilir. Bu denklem kullanılarak Einstein alan denkleminin genelleştirilmiş halini elde edebiliriz. Bunun için Denklem (1.153)'deki neticeye ilave olarak ikinci terimi sağ taraftan e^v ile çarpalım,

$$\begin{aligned} 4\bar{\psi}\gamma_c\gamma_5\wedge D\psi\wedge e^v &= 4\bar{\psi}_a\gamma_c\gamma_5D_b\psi_d e^a\wedge e^b\wedge e^d\wedge e^v \\ &= 2\bar{\psi}_a\gamma_c\gamma_5D_{[b}\psi_{d]}\varepsilon^{abdv}\sqrt{-g}d^4x \end{aligned} \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir. Bu netice uzay-zaman indislerine geçirilip Denklem (1.154) ile birlikte yazıldığında,

$$\begin{aligned} R^\mu{}_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\alpha R &= \bar{\psi}_\nu\gamma_\alpha\gamma_5D_{[\rho}\psi_{\sigma]}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= T(\psi)^\mu{}_\alpha \end{aligned} \quad (2.44)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik Einstein alan denkleminin genelleştirilmiş halidir. Burada $T(\psi)^\mu{}_\alpha$ enerji momentum tensörü olarak ele alınabilir.

Son olarak $\bar{\psi}^\alpha$ ayar potansiyeline göre varyasyona bakılırsa,

$$\delta_{\bar{\psi}}S = 8\int \delta\bar{\psi}\wedge(e^c\gamma_c\gamma_5\wedge D\psi) = 0 \quad (2.45)$$

Böylece son hareket denklemi aşağıdaki şekilde bulunur,

$$e^c\gamma_c\gamma_5\wedge D\psi = 0 \quad (2.46)$$

Bu denklem sağ taraftan e^d ile çarpılıp açılırsa,

$$\begin{aligned} e^c\gamma_c\gamma_5\wedge D\psi\wedge e^d &= \gamma_c\gamma_5D\psi\wedge e^c\wedge e^d \\ &= \gamma_c\gamma_5D_a\psi_b\wedge e^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d \\ &= \frac{1}{2}\gamma_c\gamma_5D_{[a}\psi_{b]}\varepsilon^{abcd}d^4x \end{aligned} \quad (2.47)$$

elde edilir ve uzay-zaman indislerinde tekrar yazılırsa aşağıdaki genel ifade elde edilir,

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\rho\gamma_5\wedge D_{[\mu}\psi_{\nu]} = 0 \quad (2.48)$$

3. MAXWELL SİMETRİSİ VE KÜTLEÇEKİM TEORİSİ

3.1. Maxwell Cebri

Poincare cebrinin antisimetrik bir Z_{ab} üreticisi ile genişletilmiş hali olan $M(1,3)$ 'ün sıfır olmayan komutasyon bağıntıları,

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= i(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \\ [P_a, P_b] &= iZ_{ab} \\ [M_{ab}, P_c] &= i(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b) \\ [M_{ab}, Z_{cd}] &= i(\eta_{ad}Z_{bc} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ve grup elemanı ise,

$$g(x, \phi, \omega) = e^{ix^a P_a} e^{i\phi^{ab} Z_{ab}} e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab} M_{ab}} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x^a(x)$, $\phi^{ab}(x)$, $\omega^{ab}(x)$ ilgili üreticilere karşılık gelen sonlu parametrelerdir. Bu parametrelerin $M(1,3)$ altında sonsuz küçük değişimlerini bulmak için koset dönüşümlerinden faydalanacağız. K bir koset olmak üzere bu kosetin dönüşümü $K'(x', \theta', \dots)H = g(a, \varepsilon, u)K(x, \theta, \dots)$ şeklinde verilir. Burada $a^a(x)$, $\varepsilon^{ab}(x)$, $u^{ab}(x)$ sonsuz küçük parametrelerdir ve H kararlılık grubunu temsil etmektedir. Koset aşağıdaki şekilde seçilir,

$$K(x, \phi) = \frac{g}{H} = e^{ix^a P_a} e^{i\phi^{ab} Z_{ab}} \quad (3.3)$$

Burada $H = e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab} M_{ab}}$ şeklinde $SO(1,3)$ olarak tercih edilmiştir. Bu noktadan hareketle Denklem (3.4)'deki neticeler elde edilir,

$$\begin{aligned}
\delta x^a &= a^a + u^a{}_b x^b \\
\delta \phi^{ab} &= \varepsilon^{ab} + u^{[a}{}_c \phi^{cb]} - \frac{1}{4} a^{[a} x^{b]} \\
\omega^{ab} &= u^{ab}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

İlk iki varyasyon kullanılarak üreticilerin diferansiyel gösterimleri bulunabilir. Bunun için varyasyonlar bir skaler alanın değişimi $\Phi'(x, \phi) = \Phi(x - \delta x, \phi - \delta \phi)$ üzerinde uygulanır ve Taylor serisine açılır,

$$\begin{aligned}
\Phi'(x^a, \phi^{ab}) &= \Phi(x^a - \delta x^a, \phi^{ab} - \delta \phi^{ab}) \\
&= \Phi\left(x^a - a^a - u^a{}_c x^c, \phi^{ab} - \varepsilon^{ab} + \frac{1}{4} a^{[a} x^{b]} - u^{[a}{}_c \phi^{cb]}\right) \\
&= \Phi(x^a, \phi^{ab}) + \left\{ \left(-a^a - u^a{}_c x^c \right) \partial_a + \left(-\varepsilon^{ab} + \frac{1}{4} a^{[a} x^{b]} - u^{[a}{}_c \phi^{cb]} \right) \partial_{ab} \right\} \Phi(x^a, \phi^{ab})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Burada $\delta \Phi'(x, \theta) = \Phi'(x, \theta) - \Phi(x, \theta)$ temel alınarak düzenleme yapıldığında,

$$\delta \Phi(x, \phi) = \left[\begin{aligned} & i a^a \left\{ i \left(\partial_a - \frac{1}{2} x^b \partial_{ab} \right) \right\} + i \varepsilon^{ab} (i \partial_{ab}) \\ & - \frac{i}{2} u^b{}_a \left\{ i (x_a \partial_b - x_b \partial_a + 2 \phi_a{}^c \partial_{bc} - 2 \phi_b{}^c \partial_{ac}) \right\} \end{aligned} \right] \Phi(x, \phi) \tag{3.6}$$

elde edilir. Buna ek olarak skaler alanın sonsuz küçük grup dönüşümü altındaki varyasyonu,

$$\delta \Phi = \left(i a^a P_a + i \varepsilon^{ab} Z_{ab} - \frac{i}{2} \omega^{ab} M_{ab} \right) \Phi \tag{3.7}$$

şeklindedir. Bu ifade ile Denklem (3.6) ile karşılaştırıldığında üreticilerin diferansiyel gösterimleri Denklem (3.8)'deki yapıda elde edilir,

$$\begin{aligned}
P_a &= i \left(\partial_a - \frac{1}{2} x^b \partial_{ab} \right) \\
Z_{ab} &= i \partial_{ab} \\
M_{ab} &= i \left\{ x_a \partial_b - x_b \partial_a + 2 (\phi_a{}^c \partial_{bc} - \phi_b{}^c \partial_{ac}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.1.1. Maxwell cebirinin ayar teorisi

Bu bölümde Maxwell cebirinin ayar teorisini oluşturacağız. Ayar teorisi için öncelikle bir $\mathbb{A}(x)$ ayar alanı tanımlanır,

$$\mathbb{A} = e^a P_a + B^{ab} Z_{ab} - \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} \quad (3.9)$$

Burada $e^a(x)$ vielbein, $\omega^{ab}(x)$ spin bağlantısı, $B^{ab}(x)$ antisimetrik üreticiye karşılık gelen ayar alanıdır. Bu alanların, sonsuz küçük ayar dönüşümü altındaki değişimi Denklem (1.110)'da verilen,

$$\delta \mathbb{A} = -d\zeta - i[\mathbb{A}, \zeta] \quad (3.10)$$

formülü ile bulunur. Burada $\zeta(x)$ ayar üreticisi olup aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\zeta(x) = y^a(x) P_a + \varphi^{ab}(x) Z_{ab} - \frac{1}{2} \tau^{ab}(x) M_{ab} \quad (3.11)$$

Burada $y^a(x)$, $\varphi^{ab}(x)$, $\tau^{ab}(x)$ sonsuz küçük parametrelerdir. Son iki eşitlik kullanıldığında ayar alanlarının değişimi aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned} \delta e^a &= -dy^a - \omega^a_b y^b + \tau^a_b e^b, \\ \delta B^{ab} &= -d\varphi^{ab} - \omega^{[a}_c \varphi^{cb]} + \tau^{[a}_c B^{cb]} + \frac{1}{2} e^{[a} y^{b]}, \\ \delta \omega^{ab} &= -d\tau^{ab} - \omega^{[a}_c \tau^{cb]}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Bu gruba ait 2-form eğrilikler $\mathbb{F} = \mathbb{F}^A X_A = F^a P_a + F^{ab} Z_{ab} - \frac{1}{2} R^{ab} M_{ab}$ şeklinde tanımlanır ve Denklem (1.114) kullanıldığında eğrilikler aşağıdaki biçimde elde edilir,

$$\begin{aligned} F^a &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b \\ F^{ab} &= dB^{ab} + \omega^{[a}_c \wedge B^{cb]} - \frac{1}{2} e^a \wedge e^b \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Denklem (3.13)'deki ifadeler sırasıyla burulma tensörü, Maxwell eğriliği ve Riemann eğrilik tensörüdür. Bunların sonsuz küçük ayar dönüşümü altındaki değişimini bulmak için Denklem (1.119) kullanıldığında aşağıdaki denklemler elde edilir,

$$\begin{aligned}\delta F^a &= -R^a_b y^b + \tau^a_b F^b \\ \delta F^{ab} &= \phi^a_c R^{cb} + \tau^a_c F^{cb} - \frac{1}{2} y^a F^{b] \\ \delta R^{ab} &= \tau^a_c R^{cb}\end{aligned}\tag{3.14}$$

Lorentz kovaryant dış türev kullanıldığında Bianchi özdeşlikleri aşağıdaki şekilde bulunabilir,

$$\begin{aligned}DF^a &= R^a_b \wedge e^b \\ DF^{ab} &= R^{[a}_c \wedge B^{cb]} - \frac{1}{2} F^{[a} \wedge e^{b]} \\ DR^{ab} &= 0\end{aligned}\tag{3.15}$$

Bu temelden hareketle $M(1,3)$ için kütleçekim eylemini oluşturmaya başlayabiliriz. Eğriliklerin sadece Lorentz simetrisi altındaki değişimleri dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}\delta F^a &= \tau^a_b F^b \\ \delta F^{ab} &= \tau^a_c F^{cb} \\ \delta R^{ab} &= \tau^a_c R^{cb}\end{aligned}\tag{3.16}$$

elde edilir. Buradan hareketle aşağıdaki şekilde bir birleşimi (ötelenmiş eğrilik) yazabiliriz,

$$\mathcal{J}^{ab} = R^{ab} + 2\mu F^{ab}\tag{3.17}$$

Bu eğriliğin, Denklem (3.16)'daki ilgili ifadeler kullanıldığında aşağıdaki dönüşüme sahip olduğu açıkça görülmektedir,

$$\delta \mathcal{J}^{ab} = \tau^a_c \mathcal{J}^{cb}\tag{3.18}$$

Bu ötelenmiş eğrilikten yararlanıldığında yerel Lorentz dönüşümü altında değişmez kalan bir eylem Denklem (3.19)'daki şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4\kappa\mu} \int \mathcal{J} \wedge * \mathcal{J} = \frac{1}{8\kappa\mu} \int \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge \mathcal{J}^{cd} \\
&= \int \frac{1}{8\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} + \frac{1}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd} + \frac{\mu}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} F^{ab} \wedge F^{cd}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

burada κ Einstein sabiti ve μ herhangi bir sabittir ve (*) Hodge dual işlemine karşılık gelmektedir. Yerel Maxwell dönüşümleri altında değişmezlik ise Lie türevi ile doğrudan gösterilebilir;

$$\delta S_{\text{diff}} = \int l_{\zeta} L = \int (di_{\zeta} L + i_{\zeta} dL) \tag{3.20}$$

Burada ilk terim tam türev olduğundan yüzey terimi olarak ihmal edilebilir, ikinci terim ise 5-form olduğundan 4 boyutlu uzay-zamanda etkisi olmayacaktır. Bu sayede $\delta_{\text{diff}} S = 0$ olur.

Şimdi hareket denklemlerini bulabiliriz. Eylemin $\omega^{ab}(x)$ spin bağlantıya göre değişimini alırsak aşağıdaki ifade elde edilir,

$$DF^{ab} - \mathcal{J}^{[a}_{c} \wedge B^{cb]} = 0 \tag{3.21}$$

Eylemin $e^a(x)$ 'ye göre değişimini alırsak,

$$\varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge e^d = 0 \tag{3.22}$$

eşitliğine ulaşılır. $B^{ab}(x)$ 'ye göre değişimi alırsak,

$$D\mathcal{J}^{ab} = 0 \tag{3.23}$$

elde edilir. Böylece hareket denklemlerini elde etmiş olduk. Bu denklemlerin birbirlerini sağladıkları gösterilebilir. Denklem (3.22) sayesinde,

$$\left(\mathcal{J}^a_{b} - \frac{1}{2} \delta^a_{b} \mathcal{J} \right) = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. Burada tanjant uzayı indislerinden uzay-zaman indislerine geçiş yapılır ve denklem açılırsa Denklem (3.25) elde edilir,

$$R^\mu{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha R + 3\mu \delta^\mu{}_\alpha = -2\mu T(B)^\mu{}_\alpha \quad (3.25)$$

Burada, yukarıdaki ifadeyi Denklem (1.157) ile karşılaştırdığımızda kolaylıkla görülecektir ki eşitliğin sol tarafında bulunan $(3\mu \delta^\mu{}_\alpha)$ terimi kozmolojik sabit ile ilişkilidir, buna ilaveten $B^{ab}(x)$ alanına karşılık gelen enerji-momentum tensörü aşağıdaki şekilde verilir,

$$T(B)^\mu{}_\alpha = e^\mu{}_a e^\nu{}_b D_{[\alpha} B_{\nu]}{}^{ab} - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha (e^\rho{}_a e^\sigma{}_b D_{[\rho} B_{\sigma]}{}^{ab}) \quad (3.26)$$

3.2. Süper Maxwell Cebri

Süper Maxwell cebri [47] seçtiğimiz notasyona göre Denklem (3.27)'deki yapıda verilir,

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= i(\eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac}) \\ [P_a, P_b] &= iZ_{ab} \\ [M_{ab}, P_c] &= i(\eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b) \\ [M_{ab}, Z_{cd}] &= i(\eta_{ad} Z_{bc} + \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}) \\ [P_a, Q_\beta] &= -i\Sigma_\rho (\gamma_a)^\rho{}_\beta \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2(C\gamma^c)_{\alpha\beta} P_c \\ \{Q_\alpha, \Sigma_\beta\} &= -\frac{i}{2}(C\sigma^{cd})_{\alpha\beta} Z_{cd} \\ [M_{ab}, Q_\rho] &= \frac{1}{2}(\sigma_{ab} Q)_\rho, \quad [M_{ab}, \Sigma_\rho] = \frac{1}{2}(\sigma_{ab} \Sigma)_\rho \end{aligned} \quad (3.27)$$

Bu gruba ait herhangi bir grup elemanı aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$g = e^{ix^a P_a} e^{i\phi^{ab} Z_{ab}} e^{i\theta^\alpha Q_\alpha} e^{i\phi^\alpha \Sigma_\alpha} e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab} M_{ab}} \quad (3.28)$$

3.2.1. Süper Maxwell cebrinin ayar teorisi

Ayar teorisine geldiğimizde ise, bunun için öncelikle Denklem (3.29)'daki gibi bir 1-form $\mathbb{A}$ ayar alanı ortaya atılır,

$$\mathbb{A} = e^a P_a + B^{ab} Z_{ab} + \psi^\alpha Q_\alpha + \xi^\alpha \Sigma_\alpha - \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} \quad (3.29)$$

Burada e^a , A^{ab} , ψ^α , ξ^α , ω^{ab} sırasıyla P_a , Z_{ab} , Q_α , Σ_α , M_{ab} üreticilerine karşılık gelen ayar alanlarıdır. Bu alanların sonsuz küçük ayar dönüşümü altındaki değişimleri Denklem (1.110) ve aşağıda verilen,

$$\zeta(x) = y^a P_a + \phi^{ab} Z_{ab} + \varepsilon^\alpha Q_\alpha + v^\alpha \Sigma_\alpha - \frac{1}{2} \tau^{ab} M_{ab} \quad (3.30)$$

sonsuz küçük ayar üreticisi yardımıyla aşağıdaki biçimde bulunabilir,

$$\begin{aligned} \delta e^a &= -dy^a - \omega^a_b y^b + \tau^a_b e^b - 2i(\bar{\varepsilon} \gamma^a \psi) \\ \delta B^{ab} &= -d\phi^{ab} - \omega^{[a}_c \phi^{cb]} + \tau^{[a}_c B^{cb]} + \frac{1}{2} e^{[a} y^{b]} - \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon} \sigma^{ab} \xi) - \frac{1}{2} (\bar{v} \sigma^{ab} \psi) \\ \delta \omega^{ab} &= -d\tau^{ab} - \omega^{[a}_c \tau^{cb]} \\ \delta \psi^\alpha &= -d\varepsilon^\alpha + \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \varepsilon)^\alpha - \frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \psi)^\alpha \\ \delta \xi^\alpha &= -dv^\alpha + \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} v)^\alpha - \frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \xi)^\alpha + y^c (\gamma_c \psi)^\alpha - e^c (\gamma_c \varepsilon)^\alpha \end{aligned} \quad (3.31)$$

2-form Eğrilikler Denklem (1.114) ifadesi yardımı ile bulabiliriz. Burada eğriliklerin genel ifadesi,

$$\mathbb{F} = F^a P_a + F^{ab} Z_{ab} + \Psi^\alpha Q_\alpha + \Xi^\alpha \Sigma_\alpha - \frac{1}{2} R^{ab} M_{ab} \quad (3.32)$$

kullanılırsa eğrilikler aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned} F^a &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b - i(\bar{\psi} \gamma^a \wedge \psi) \\ F^{ab} &= dB^{ab} + \omega^{[a}_c \wedge B^{cb]} - \frac{1}{2} e^a \wedge e^b - \frac{1}{2} (\bar{\psi} \sigma^{ab} \wedge \xi) \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb} \\ \Psi^\alpha &= d\psi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \psi)^\alpha \\ \Xi^\alpha &= d\xi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \xi)^\alpha + e^a (\gamma_a \wedge \psi)^\alpha \end{aligned} \quad (3.33)$$

Son iki eğriliğin kompleks eşlenikleri Denklem (3.34)'teki şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}^\alpha &= D\bar{\Psi}^\alpha, \\ \bar{\Xi}^\alpha &= D\bar{\Xi}^\alpha + (\bar{\Psi} \wedge e^a \gamma_a)^\alpha\end{aligned}\tag{3.34}$$

Burada D Lorentz kovaryant dış türevidir. Eğriliklerin sonsuz küçük ayar dönüşümü altındaki değişimini bulmak için Denklem (1.119) ifadesi kullanıldığında Denklem (3.35)'deki varyasyonlar elde edilir,

$$\begin{aligned}\delta F^a &= \tau^a_b F^b - R^a_b y^b - 2i(\bar{\epsilon} \gamma^a \Psi) \\ \delta F^{ab} &= \tau^{[a}_c F^{cb]} - R^{[a}_c \varphi^{cb]} - \frac{1}{2} y^{[a} F^{b]} - \frac{1}{2} (\bar{\epsilon} \sigma^{ab} \Xi) - \frac{1}{2} (\bar{v} \sigma^{ab} \Psi) \\ \delta R^{ab} &= \tau^{[a}_c R^{cb]} \\ \delta \Psi^\alpha &= -\frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \Psi)^\alpha + \frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} \epsilon)^\alpha \\ \delta \Xi^\alpha &= -\frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \Xi)^\alpha + \frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} v)^\alpha + y^c (\gamma_c \Psi)^\alpha - F^c (\gamma_c \epsilon)^\alpha\end{aligned}\tag{3.35}$$

Her bir eğrilik için Bianchi özdeşlikleri de aşağıdaki şekilde bulunabilir,

$$\begin{aligned}DF^a &= R^a_b \wedge e^b - i(\bar{\Psi} \gamma^a \wedge \Psi) \\ DF^{ab} &= \left\{ \begin{aligned} &R^{[a}_c \wedge B^{cb]} - \frac{1}{2} F^{[a} \wedge e^{b]} - \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \sigma^{ab} \wedge \xi) \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \sigma^{ab} \wedge \Xi) - \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \wedge e^{[a} \gamma^{b]} \wedge \Psi) \end{aligned} \right\} \\ DR^{ab} &= 0 \\ D\Psi^\alpha &= -\frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \Psi)^\alpha \\ D\Xi^\alpha &= -\frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \xi)^\alpha + F^a (\gamma_a \wedge \Psi)^\alpha - e^a (\gamma_a \wedge \Psi)^\alpha\end{aligned}\tag{3.36}$$

Bulunan eğrilikler kullanılarak süper Maxwell ayar dönüşümleri altında değişmez kalan bir Lagranjiyen, Azcárraga'nın [47] makalesi dikkate alınarak, aşağıdaki şekilde yazıldı,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd} + 4\bar{\Xi} \gamma_5 \wedge \Psi.\tag{3.37}$$

Bu Lagranjiyendeki terimler açıldığında Denklem (3.38) elde edilir,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2\kappa} \int \left\{ \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge D B^{cd} - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge (\bar{\xi} \sigma^{cd} \wedge \psi) \right\} \\
&\quad + 4D\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi + 4\bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge \Psi \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int \left\{ -\frac{1}{2} (\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - 8\bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge D\psi) + D(\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge B^{cd}) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge (\bar{\xi} \sigma^{cd} \wedge \psi) + 4D\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Buradaki son terim üzerinde Denklem (3.36)'daki dördüncü Bianchi özdeşliği ve

$$\gamma_5 \sigma_{ab} = \frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} \sigma^{cd} \text{ eşitliği kullanıldığında,}$$

$$\begin{aligned}
4D\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi &= D(4\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi) + 4\bar{\xi} \gamma_5 \wedge D\Psi \\
&= D(4\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi) - iR^{ab} \wedge (\bar{\xi} \gamma_5 \sigma_{ab} \wedge \psi) \\
&= D(4\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi) + \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge (\bar{\xi} \sigma^{cd} \wedge \psi)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilir. Bu ifade Denklem (3.38)'de yerine yazılır ve tam türevler ihmal edilirse eylem aşağıdaki biçimi alır,

$$S = -\frac{1}{4\kappa} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - 8\bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge D\psi \tag{3.40}$$

Böylece Denklem (2.36)'de verilen $D=4$ için minimal süper kütleçekim Lagranjyenini Maxwell simetrisi yardımıyla elde etmiş oluruz. Buradan anlaşıyor ki süper Maxwell simetrisi süper kütleçekim Lagranjyenine alternatif bir yol olarak karşımıza çıkmaktadır ve Maxwell simetrisi saklı bir simetri olarak teoride yer almaktadır.

3.3. Maxwell-Weyl Cebri

$P(1,3)$ 'na ölçekleme simetrisinin ilave edilmesiyle elde edilen Weyl grubu $(W(1,3))$ sırasıyla $X_A = \{P_a, D, M_{ab}\}$ üreticilerinden oluşmaktadır. Burada D ölçekleme simetrisini temsil etmektedir. Bu grubun sıfır olmayan komütasyon ilişkileri Denklem (3.41)'deki gibidir,

$$\begin{aligned}
[M_{ab}, M_{cd}] &= i(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \\
[M_{ab}, P_c] &= i(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b) \\
[P_a, D] &= iP_a
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Bu gruba ait herhangi bir grup elemanı,

$$g(x, \sigma, \omega) = e^{ix^a P_a} e^{i\sigma D} e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab} M_{ab}} \tag{3.42}$$

Şeklinde seçilebilir ve üreticilerinin diferansiyel gösterimleri aşağıdaki biçimde verilir,

$$\begin{aligned}
M_{ab} &= i(x_a \partial_b - x_b \partial_a) \\
P_a &= i\partial_a \\
D &= i(x \cdot \partial)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Weyl cebrinin antisimetrik bir Z_{ab} üreticisi ile genişletilmiş hali olan MW(1,3)'ün sıfır olmayan komutasyon bağıntıları,

$$\begin{aligned}
[M_{ab}, M_{cd}] &= i(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \\
[P_a, P_b] &= iZ_{ab} \\
[M_{ab}, P_c] &= i(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b) \\
[M_{ab}, Z_{cd}] &= i(\eta_{ad}Z_{bc} + \eta_{bc}Z_{ad} - \eta_{ac}Z_{bd} - \eta_{bd}Z_{ac}) \\
[P_a, D] &= iP_a, \quad [Z_{ab}, D] = 2iZ_{ab}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

ve grup elemanı ise aşağıdaki biçimdedir,

$$g(x, \phi, \omega) = e^{ix^a P_a} e^{i\phi^{ab} Z_{ab}} e^{i\sigma D} e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab} M_{ab}} \tag{3.45}$$

Grup elemanındaki sırasıyla $x^a(x)$, $\phi^{ab}(x)$, $\sigma(x)$, $\omega^{ab}(x)$ ifadeleri, ilgili üreticilere karşılık gelen sonlu parametrelerdir. Bu parametrelerin MW(1,3) altında sonsuz küçük değişimlerini bulmak için koset dönüşümlerinden faydalanacağız. K bir koset olmak üzere bu kosetin parametrelerinin dönüşümü $K'H = g(a, \varepsilon, \lambda, u)K$ şeklinde verilir. Burada $a^a(x)$, $\varepsilon^{ab}(x)$, $\lambda(x)$, $u^{ab}(x)$ sonsuz küçük parametrelerdir ve H kararlılık grubunu temsil etmektedir. Koset aşağıdaki şekilde seçilir,

$$K(x, \theta, \sigma) = \frac{g(x, \phi, \sigma, \omega)}{H} = e^{ix^a P_a} e^{i\phi^{ab} Z_{ab}} e^{i\sigma D} \quad (3.46)$$

Burada $H = e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab}M_{ab}}$ şeklinde tercih edilmiştir. Bu noktadan hareketle aşağıdaki neticeler elde edilir,

$$\begin{aligned} \delta x^a &= a^a + u^a_b x^b + \lambda x^a \\ \delta \phi^{ab} &= \varepsilon^{ab} + u^{[a}_c \phi^{cb]} + 2\lambda \phi^{ab} - \frac{1}{4} a^{[a} x^{b]} \\ \delta \sigma &= \lambda \\ \omega^{ab} &= u^{ab} \end{aligned} \quad (3.47)$$

İlk iki varyasyon kullanılarak üreticilerin diferansiyel gösterimleri bulunabilir. Bunun için varyasyonlar bir skaler alanın değişimi $\Phi'(x, \phi) = \Phi(x - \delta x, \phi - \delta \phi)$ üzerinde uygulanır ve Taylor serisine açılır,

$$\begin{aligned} \Phi'(x^a, \phi^{ab}) &= \Phi(x^a - \delta x^a, \phi^{ab} - \delta \phi^{ab}) \\ &= \Phi\left(x^a - a^a - u^a_c x^c - \lambda x^a, \phi^{ab} - \varepsilon^{ab} + \frac{1}{4} a^{[a} x^{b]} - u^{[a}_c \phi^{cb]} - 2\lambda \phi^{ab}\right) \\ &= \Phi(x^a, \phi^{ab}) + \left\{ \left(-a^a - u^a_c x^c - \lambda x^a \right) \partial_a + \left(-\varepsilon^{ab} + \frac{1}{4} a^{[a} x^{b]} - u^{[a}_c \phi^{cb]} - 2\lambda \phi^{ab} \right) \partial_{ab} \right\} \Phi(x^a, \phi^{ab}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Burada $\delta \Phi'(x, \phi) = \Phi'(x, \phi) - \Phi(x, \phi)$ temel alınarak düzenleme yapıldığında,

$$\delta \Phi(x, \phi) = \left[ia^a \left\{ i \left(\partial_a - \frac{1}{2} x^b \partial_{ab} \right) \right\} + i\varepsilon^{ab} (i\partial_{ab}) + i\lambda \{ i(x \cdot \partial + 2\phi \cdot \partial) \} \right. \\ \left. - \frac{i}{2} u^b_a \left\{ i(x_a \partial_b - x_b \partial_a + 2\phi_a^c \partial_{bc} - 2\phi_b^c \partial_{ac}) \right\} \right] \Phi(x, \phi) \quad (3.49)$$

elde edilir. Buna ek olarak skaler alanın sonsuz küçük grup dönüşümü altındaki varyasyonu Denklem (3.50)'deki şekilde yazılabilir,

$$\delta \Phi(x, \phi) = \left(ia^a P_a + i\varepsilon^{ab} Z_{ab} + i\lambda D - \frac{i}{2} \omega^{ab} M_{ab} \right) \Phi(x, \phi) \quad (3.50)$$

Bu ifade ile Denklem (3.49) mukayese edildiğinde üreticilerin diferansiyel gösterimleri aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned}
P_a &= i \left(\partial_a - \frac{1}{2} x^b \partial_{ab} \right) \\
Z_{ab} &= i \partial_{ab} \\
D &= i \left(x^a \partial_a + 2 \phi^{ab} \partial_{ab} \right) \\
M_{ab} &= i \left\{ x_a \partial_b - x_b \partial_a + 2 \left(\phi_a^c \partial_{bc} - \phi_b^c \partial_{ac} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

3.3.1. Maxwell-Weyl cebirinin ayar teorisi

Weyl ayar teorisi Charap, Omote, Kasuya ve diğer pek çok bilim insanının [5-7, 10, 74, 75] çalışmalarında detaylı verilmiştir. Bu bölümde MW(1,3)'ün ayar teorisini oluşturacağız. Ayar teorisi için öncelikle bir $\mathbb{A}_\mu(x)$ ayar alanı tanımlanır,

$$\mathbb{A}_\mu = e_\mu^a P_a + B_\mu^{ab} Z_{ab} + \chi_\mu D - \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} M_{ab} \tag{3.52}$$

Burada $e_\mu^a(x)$ vielbein, $\omega_\mu^{ab}(x)$ spin bağlantısı, $B_\mu^{ab}(x)$ antisimetrik üreticiye karşılık gelen ayar alanı, $\chi_\mu(x)$ ölçekleme üreticisine karşılık gelen ayar alanıdır. Bu alanların, sonsuz küçük ayar dönüşümü altındaki değişimi, Denklem (1.110) ile,

$$\zeta(x) = y^a(x) P_a + \varphi^{ab}(x) Z_{ab} + \rho(x) D - \frac{1}{2} \tau^{ab}(x) M_{ab} \tag{3.53}$$

şeklinde bir sonsuz küçük ayar üreticisi tanımlanarak aşağıdaki biçimde bulunabilir,

$$\begin{aligned}
\delta e_\mu^a &= -\partial_\mu y^a - \omega_{\mu b}^a y^b + \rho e_\mu^a + \tau^a_b e_\mu^b - \chi_\mu y^a \\
\delta B_\mu^{ab} &= -\partial_\mu \varphi^{ab} - \omega_{\mu c}^{[a} \varphi^{cb]} - 2\chi_\mu \varphi^{ab} + \tau_{\mu c}^{[a} B^{cb]} + B_\mu^{ab} \rho + \frac{1}{2} e_\mu^{[a} y^{b]} \\
\delta \chi_\mu &= -\partial_\mu \rho \\
\delta \omega_\mu^{ab} &= -\partial_\mu \tau^{ab} - \omega_{\mu c}^{[a} \tau^{cb]}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Bu gruba ait 2-form eğrilikler $\mathbb{F} = \mathbb{F}^A X_A = F^a P_a + F^{ab} Z_{ab} + F D - \frac{1}{2} R^{ab} M_{ab}$ biçiminde tanımlayabiliriz ve Denklem (1.114) yardımıyla aşağıdaki şekilde bulabiliriz,

$$\begin{aligned}
F^a &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b + \chi \wedge e^a \\
F^{ab} &= dB^{ab} + \omega^{[a}_c \wedge B^{cb]} + 2\lambda \wedge B^{ab} - \frac{1}{2}e^a \wedge e^b \\
f &= d\chi \\
R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Eğrilikleri uzay-zaman indisleri ile ifade edersek,

$$\begin{aligned}
F^a_{\mu\nu} &= \partial_{[\mu} e^a_{\nu]} + \omega^a_{[\mu b} e^b_{\nu]} + \chi_{[\mu} e^a_{\nu]} \\
F^{ab}_{\mu\nu} &= \partial_{[\mu} B^{ab}_{\nu]} + \omega^{[a}_{[\mu c} B^{cb]}_{\nu]} + 2\chi_{[\mu} B^{ab}_{\nu]} - \frac{1}{2}e^a_{[\mu} e^b_{\nu]} \\
f_{\mu\nu} &= \partial_{[\mu} \chi_{\nu]} \\
R^{ab}_{\mu\nu} &= \partial_{[\mu} \omega^{ab}_{\nu]} + \omega^a_{[\mu c} \omega^{cb}_{\nu]}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

elde edilir. Bunların sonsuz küçük ayar dönüşümü altındaki değişimini ise Denklem (1.119) ve $\mathbb{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} P_a + F^{ab}_{\mu\nu} Z_{ab} + f_{\mu\nu} D - \frac{1}{2} R^{ab}_{\mu\nu} M_{ab}$ tanımı yardımıyla Denklem (3.57)'deki şekilde bulunabilir,

$$\begin{aligned}
\delta F^a_{\mu\nu} &= -y^a f_{\mu\nu} - R^a_{\mu\nu b} y^b + \rho F^a_{\mu\nu} + \tau^a_b F^b_{\mu\nu} \\
\delta F^{ab}_{\mu\nu} &= -2\varphi^{ab} F_{\mu\nu} + \varphi^{[a}_c R^{cb]}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} y^{[a} F^{b]}_{\mu\nu} + 2\rho F^{ab}_{\mu\nu} + \tau^{[a}_c F^{cb]}_{\mu\nu} \\
\delta f_{\mu\nu} &= 0 \\
\delta R^{ab}_{\mu\nu} &= \tau^{[a}_c R^{cb]}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Bu bölümde Lorentz-Weyl kovaryant türevi (Ek-A) kullanacağız. Böylece Bianchi özdeşlikleri aşağıdaki şekilde bulunabilir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}F^a &= R^a_b \wedge e^b + f \wedge e^a \\
\mathcal{D}F^{ab} &= R^{[a}_c \wedge B^{cb]} + 2f \wedge B^{ab} - \frac{1}{2} F^{[a} \wedge e^{b]} \\
\mathcal{D}R^{ab} &= 0
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Şimdi kütleçekim Lagranjiyenini Denklem (3.55)'deki eğrilikler yardımıyla oluşturmaya çalışacağız. Ayar değişmez bir Lagranjiyen yazabilmek için ölçekleme dönüşümüne ve bunun eyleme etkisine dikkat etmek gerekir. Ölçekleme simetrisini yerelleştirmek bizi Weyl ayar teorisine götürmektedir. Burada önemli bir nokta, metriğin ölçekleme simetrisini altında sonsuz küçük değişiminin,

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = 2\rho(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (3.59)$$

biçiminde olmasıdır. Metriğin bu şekilde değişmesi, bizi eğriliklerden oluşturulmak istenen eylem konusunda sınırlamaktadır. Denklem (3.59), metrik tensörün Weyl ağırlığının iki $w(g_{\mu\nu}) = +2$ olduğunu ifade etmektedir. Buna ek olarak, $w(g^{\mu\nu}) = -2$ ve $w(\sqrt{-g}) = +4$ olduğu gösterilebilir. Denklem (3.54) ve Denklem (3.57)'den doğrudan anlaşılabilir ki $e_\mu^a, B_\mu^{ab}, \chi_\mu, \omega_\mu^{ab}$ ve $F_{\mu\nu}^a, F_{\mu\nu}^{ab}, f_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}^{ab}$ ifadelerinin Weyl ağırlıkları sırasıyla 1, 2, 0, 0 ve 1, 2, 0, 0'dır.

Serbest kütleçekimsel eylemin genel ifadesi aşağıdaki biçimdedir,

$$S_f = \int d^4x e \mathcal{L}_f \quad (3.60)$$

ve bu son yapı, eylemin toplam Weyl ağırlığının sıfır olmasını gerektirir. Lakin ele aldığımız durumda $w(\sqrt{-g}) = w(e) = +4$ olduğundan $w(\mathcal{L}_f) = -4$ olması gerekir. Buna göre $w(R) = -2$ olduğundan eylem içerisinde R'ye göre lineer bir yapı gözlenemez. Tutarlı bir kütleçekim teorisi ortaya koymak için Weyl [76] eylem içerisinde kuadratik eğrilik terimlerini kullanmıştır. Buradan da açıkça görülüyor ki,

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x e R \quad (3.61)$$

Einstein-Hilbert eylemi tek başına değişmezlik için uygun değildir, fakat Brans ve Dicke'nin [77] girişini yaptığı ve Dirac, Agnese ve Dereli'nin [78-80] detaylandığı şekilde R'yi öyle bir skaler alanla çarpalım ki bu çarpımın Weyl ağırlığı (-4) olsun. Bu sayede R'ye göre lineer bir eylem yazabiliriz. Biz burada Dirac'ın yaklaşımını kullanacağız. Ölçekleme dönüşümü altındaki varyasyonu aşağıdaki şekilde olan bir skaler alan ortaya atıldığında,

$$\delta\phi(x) = -\rho\phi(x) \quad (3.62)$$

Bu $\phi(x)$ alanının Weyl ağırlığı (-1) olur ve $\phi^2 R$ gibi bir ifadenin Weyl ağırlığına bakıldığında $w(\phi^2 R) = -4$ elde edilir. Bu sayede değişmezlik şartı sağlanır. Diğer

tarafından, diferansiyel formlarda ise genel eylem $S = \int L$ şeklinde yazılır ve buradan anlaşılır ki Lagranjiyenin Weyl ağırlığı $w(L) = 0$ olmak zorundadır. Örneğin Einstein-Hilbert eylemi diferansiyel formlarda,

$$S_{EH} = -\frac{1}{4\kappa} \int \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \quad (3.63)$$

şeklinde verilir ve ölçekleme dönüşümü altındaki varyasyonu alındığında aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\begin{aligned} \delta_{\text{weyl}} S_{EH} &= -\frac{1}{2\kappa} \int \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \delta e^c \wedge e^d \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int \rho \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \neq 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Son denklemde açıkça görülmektedir ki değişmezlik sağlanmamaktadır. Lakin Lagranjiyen Denklem (3.62)'deki dönüşüme sahip bir $\phi(x)$ alanı yardımıyla aşağıdaki şekilde yazıldığında,

$$S = -\frac{1}{4\kappa} \int \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \quad (3.65)$$

ve değişmezliğe bakıldığında,

$$\begin{aligned} \delta_{\text{weyl}} S &= -\frac{1}{4\kappa} \int \left\{ \delta \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + 2\phi \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \delta e^c \wedge e^d \right\} \\ &= -\frac{1}{4\kappa} \int \left\{ -2\rho \phi^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + 2\rho \phi \epsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

elde edilir ve böylece değişmezlik sağlanmış olur. Bu temelden hareketle MW(1,3) için kütleçekim eylemini oluşturmaya başlayabiliriz. Lagranjiyeni diferansiyel formlarda oluşturacağımızdan dolayı Weyl ağırlığı sıfır olan ifadeler işimizi kolaylaştıracaktır, bu sebeple Denklem (3.67)'deki birleşimi (değiştirilmiş eğrilik) yazabiliriz,

$$\mathcal{J}^{ab} = R^{ab} + 2\mu\phi^2 F^{ab} \quad (3.67)$$

Burada $w(\mathcal{J}^{ab}) = 0$ 'dır. Bu birleşim sayesinde Lagranjiyenin serbest kütleçekimsel kısmını aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$\begin{aligned} L_f &= \frac{1}{4\kappa\mu} \mathcal{J} \wedge * \mathcal{J} = \frac{1}{8\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge \mathcal{J}^{cd} \\ &= \frac{1}{8\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} + \phi^2 \frac{1}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd} + \phi^4 \frac{\mu}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} F^{ab} \wedge F^{cd} \end{aligned} \quad (3.68)$$

burada κ ve μ sabittir ve Lagranjiyenin Weyl ağırlığının sıfır olduğu açıkça görülmektedir. Ortaya atılan skaler alan bizi Lagranjiyen içerisinde ona ait bir kinetik terim yazmaya zorlar. Lagranjiyen içerisinde bir bütünlük olması için $\phi(x)$ skaler alanının kendisiyle etkileştiğini de varsayarak $\frac{\lambda}{4} \phi^4$ terimini ekleyebiliriz. Bu sayede vakum için toplam Lagranjiyeni aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$L_0 = f \wedge * f - \frac{1}{2} \mathcal{D}\phi \wedge * \mathcal{D}\phi + \frac{\lambda}{4} \phi^4 * 1 \quad (3.69)$$

Şimdi toplam eylemi aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$\begin{aligned} S &= \int L_f + L_0 \\ &= \int \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{8\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} + \phi^2 \frac{1}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd} + \phi^4 \frac{\mu}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} F^{ab} \wedge F^{cd} \\ &+ f \wedge * f - \frac{1}{2} \mathcal{D}\phi \wedge * \mathcal{D}\phi + \frac{\lambda}{4} \phi^4 * 1 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Denklem (3.57)'deki eğriliklerin sadece Lorentz ve ölçekleme simetrisi altındaki dönüşümleri dikkate alındığında aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^a &= \rho F_{\mu\nu}^a + \tau^a_b F_{\mu\nu}^b \\ \delta F_{\mu\nu}^{ab} &= 2\rho F_{\mu\nu}^{ab} + \tau^{[a}_c F_{\mu\nu}^{cb]} \\ \delta f_{\mu\nu} &= 0 \\ \delta R_{\mu\nu}^{ab} &= \tau^{[a}_c R_{\mu\nu}^{cb]} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Buradan hareketle değiştirilmiş eğrilik olan $\mathcal{J}^{ab}$ 'nin sonsuz küçük değişimi Denklem (3.72)'deki yapıda olması gerekir,

$$\delta \mathcal{J}^{ab} = \tau^{[a} \mathcal{J}^{cb]} \quad (3.72)$$

Değiştirilmiş eğriliğin değişimi $\delta\phi = -\rho\phi$ olmasını zorunlu kılar. Bu sayede eylemin serbest kısmı ayar değişmez kalmaktadır. Vakum tarafı ise kendi biçimi ile ayar değişmez yapıdadır. Yerel Maxwell-Weyl dönüşümleri altında değişmezlik ise Lie türevi ile doğrudan gösterilebilir.

Şimdi hareket denklemlerini bulabiliriz. Bunun için $\delta S = 0$ temel alınarak sırasıyla ω^{ab} , e^a , B^{ab} , χ ayar alanlarına ve $\phi(x)$ alanına göre varyasyon alınırsa aşağıdaki hareket denklemleri elde edilir (Ek-D),

$$\mathcal{D}(\phi^2 F^{ab}) - \phi^2 \mathcal{J}^{[a} \wedge B^{cb]} = 0 \quad (3.73)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\phi^2}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{bc} \wedge e^d + \left[\mathcal{D}_a \phi * \mathcal{D}\phi + \mathcal{D}\phi \wedge * (e_c \wedge e_a) \mathcal{D}^c \phi \right] \\ & -\frac{1}{2} \left(f_{ab} e^b \wedge *f - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} f^{bc} e^d \wedge f \right) + \frac{\lambda \phi^4}{2} *e_a \end{aligned} \right\} = 0 \quad (3.74)$$

$$\mathcal{D}(\phi^2 \mathcal{J}^{ab}) = 0 \quad (3.75)$$

$$\frac{\phi^2}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge B^{cd} + \frac{1}{2} \mathcal{D} * f + \phi * \mathcal{D}\phi = 0 \quad (3.76)$$

$$\frac{\phi}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge F^{cd} + \mathcal{D} * \mathcal{D}\phi + \lambda \phi^3 * 1 = 0 \quad (3.77)$$

Bu denklemlerin birbirlerini sağladıkları gösterilebilir. Denklem (3.74) sayesinde ölçekleme alanına bağlı kozmolojik terimi içeren alan denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir (Ek-E),

$$R^\mu{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha R + 3\mu\phi^2 \delta^\mu{}_\alpha = -2\mu\phi^2 T(B)^\mu{}_\alpha - \kappa\phi^{-2} \left\{ T(\phi)^\mu{}_\alpha + \frac{1}{2} T(f)^\mu{}_\alpha \right\} \quad (3.78)$$

Burada alanların açık ifadesi ise Denklem (3.79)'daki gibi verilir,

$$\begin{aligned}
T(B)^\mu{}_\alpha &= e^\mu{}_a e^\nu{}_b \mathcal{D}_{[\alpha} B_{\nu]}{}^{ab} - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha (e^\rho{}_a e^\sigma{}_b \mathcal{D}_{[\rho} B_{\sigma]}{}^{ab}) \\
T(\phi)^\mu{}_\alpha &= \mathcal{D}^\mu \phi \mathcal{D}_\alpha \phi - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha \left(\mathcal{D}^\gamma \phi \mathcal{D}_\gamma \phi - \frac{\lambda}{2} \phi^4 \right) \\
T(f)^\mu{}_\alpha &= f_{\beta\alpha} f^{\mu\beta} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\alpha f^{\gamma\delta} f_{\gamma\delta}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Bu son denklemler ilgili alanlara bağılı enerji momentum tensörlerine karşılık gelir. Burada önceki (süper) Maxwell gruplarına kıyasla en önemli farklılık kozmolojik terimin $(3\mu\phi^2\delta^\mu{}_\alpha)$ şeklinde $\phi(x)$ alanının bir fonksiyonu şeklinde gelmesidir.

3.4. Süper Maxwell-Weyl Cebri

Süper Maxwell-Weyl cebri [34] makalesindeki cebirin seçtiğimiz notasyona uyarlanmasıyla aşağıdaki şekilde elde edilmiştir,

$$\begin{aligned}
[M_{ab}, M_{cd}] &= i(\eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac}) \\
[P_a, P_b] &= iZ_{ab} \\
[M_{ab}, P_c] &= i(\eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b) \\
[M_{ab}, Z_{cd}] &= i(\eta_{ad} Z_{bc} + \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}) \\
[P_a, D] &= iP_a, \quad [Z_{ab}, D] = 2iZ_{ab} \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 2(C\gamma^c)_{\alpha\beta} P_c \\
[P_a, Q_\beta] &= -i\Sigma_\rho (\gamma_a)^\rho{}_\beta, \quad \{Q_\alpha, \Sigma_\beta\} = -\frac{i}{2}(C\sigma^{cd})_{\alpha\beta} Z_{cd} \\
[M_{ab}, Q_\rho] &= \frac{1}{2}(\sigma_{ab} Q)_\rho, \quad [M_{ab}, \Sigma_\rho] = \frac{1}{2}(\sigma_{ab} \Sigma)_\rho \\
[D, Q_\alpha] &= -\frac{i}{2}Q_\alpha, \quad [D, \Sigma_\alpha] = -\frac{3}{2}i\Sigma_\alpha
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Bu gruba ait grup elemanı aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$g = e^{ix^a P_a} e^{i\phi^{ab} Z_{ab}} e^{i\theta^\alpha Q_\alpha} e^{i\phi^\alpha \Sigma_\alpha} e^{i\sigma D} e^{-\frac{i}{2}\omega^{ab} M_{ab}} \tag{3.81}$$

3.4.1. Süper Maxwell-Weyl cebrinin ayar teorisi

Ayar teorisi için 1-form $\mathbb{A}$ ayar alanı Denklem (3.82)'deki gibi yazılır,

$$\mathbb{A} = e^a P_a + \chi D + B^{ab} Z_{ab} + \psi^\alpha Q_\alpha + \xi^\alpha \Sigma_\alpha - \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} \quad (3.82)$$

Burada $e^a, \chi, B^{ab}, \psi^\alpha, \xi^\alpha, \omega^{ab}$ alanları sırasıyla $P_a, D, Z_{ab}, Q_\alpha, \Sigma_\alpha, M_{ab}$ üreticilerine karşılık gelen ayar alanlarıdır. Bu alanların tanjant uzayında sonsuz küçük ayar dönüşümü altındaki değişimi Denklem (1.110) ile,

$$\zeta(x) = y^a P_a + \rho D + \varphi^{ab} Z_{ab} + \varepsilon^\alpha Q_\alpha + v^\alpha \Sigma_\alpha - \frac{1}{2} \tau^{ab} M_{ab} \quad (3.83)$$

şeklinde tanımlanan sonsuz küçük bir ayar üreticisi yardımıyla aşağıdaki biçimde bulunabilir,

$$\begin{aligned} \delta e^a &= -dy^a - \omega^a_b y^b - \chi y^a + \tau^a_b e^b + \rho e^a - 2i(\bar{\varepsilon} \gamma^a \psi) \\ \delta B^{ab} &= \left(-d\varphi^{ab} - \omega^{[a}_c \varphi^{cb]} - 2\chi \varphi^{ab} + \tau^{[a}_c B^{cb]} + 2\rho B^{ab} + \frac{1}{2} e^{[a} y^{b]} \right) \\ &\quad \left(-\frac{1}{2} (\bar{\varepsilon} \sigma^{ab} \xi) - \frac{1}{2} (\bar{v} \sigma^{ab} \psi) \right) \\ \delta \chi &= -d\rho \\ \delta \omega^{ab} &= -d\tau^{ab} - \omega^{[a}_c \tau^{cb]} \\ \delta \psi^\alpha &= -d\varepsilon^\alpha + \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \varepsilon)^\alpha - \frac{1}{2} \chi \varepsilon^\alpha - \frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \psi)^\alpha + \frac{1}{2} \rho \psi^\alpha \\ \delta \xi^\alpha &= \left(-dv^\alpha + \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} v)^\alpha - \frac{3}{2} \chi v^\alpha - \frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \xi)^\alpha \right) \\ &\quad \left(+\frac{3}{2} \rho \xi^\alpha + y^c (\gamma_c \psi)^\alpha - e^c (\gamma_c \varepsilon)^\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Bu gruba ait 2-form eğrilikler $\mathbb{F} = F^a P_a + fD + F^{ab} Z_{ab} + \Psi^\alpha Q_\alpha + \Xi^\alpha \Sigma_\alpha - \frac{1}{2} R^{ab} M_{ab}$

biçiminde tanımlanırlar ve ilgili formüller yardımıyla aşağıdaki şekilde bulunur,

$$\begin{aligned} F^a &= de^a + \omega^a_b \wedge e^b + \chi \wedge e^a - i(\bar{\psi} \gamma^a \wedge \psi) \\ F^{ab} &= dB^{ab} + \omega^{[a}_c \wedge B^{cb]} + 2\chi \wedge B^{ab} - \frac{1}{2} e^a \wedge e^b - \frac{1}{2} (\bar{\psi} \sigma^{ab} \wedge \xi) \\ R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb}, \quad f = d\chi \\ \Psi^\alpha &= d\psi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \psi)^\alpha + \frac{1}{2} \chi \wedge \psi^\alpha \\ \Xi^\alpha &= d\xi^\alpha - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \xi)^\alpha + \frac{3}{2} \chi \wedge \xi^\alpha + e^a (\gamma_a \wedge \psi)^\alpha \end{aligned} \quad (3.85)$$

Eğriliklerin sonsuz küçük ayar dönüşümü altındaki değişimini ise Denklem (1.119) yardımıyla aşağıdaki şekilde bulunabilir,

$$\begin{aligned}
\delta F^a &= \tau^a_b F^b + \rho F^c - R^a_b y^b - f y^a - 2i(\bar{\varepsilon} \gamma^a \Psi) \\
\delta F^{ab} &= \left\{ \begin{aligned} &\tau^{[a}_c F^{cb]} + 2\rho F^{ab} - R^{[a}_c \varphi^{cb]} - 2f \varphi^{ab} - \frac{1}{2} y^{[a} F^{b]} \\ &-\frac{1}{2}(\bar{\varepsilon} \sigma^{ab} \Xi) - \frac{1}{2}(\bar{v} \sigma^{ab} \Psi) \end{aligned} \right\} \\
\delta f &= 0 \\
\delta R^{ab} &= \tau^{[a}_c R^{cb]} \\
\delta \Psi^\alpha &= -\frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \Psi)^\alpha + \frac{1}{2} \rho \Psi^\alpha + \frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} \varepsilon)^\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^\alpha f \\
\delta \Xi^\alpha &= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{i}{4} \tau^{ab} (\sigma_{ab} \Xi)^\alpha + \frac{3}{2} \rho \Xi^\alpha + \frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} v)^\alpha \\ &-\frac{3}{2} v^\alpha f + y^c (\gamma_c \Psi)^\alpha - F^c (\gamma_c \varepsilon)^\alpha \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Lorentz-Weyl kovaryant dış türevi kullanıldığında Bianchi özdeşlikleri Denklem (3.87)'deki şekilde bulundu,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}F^a &= R^a_b \wedge e^b + f \wedge e^a - i(\bar{\Psi} \gamma^a \wedge \Psi) \\
\mathcal{D}F^{ab} &= \left\{ \begin{aligned} &R^{[a}_c \wedge B^{cb]} + 2f \wedge B^{ab} - \frac{1}{2} F^{[a} \wedge e^{b]} - \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \sigma^{ab} \wedge \xi) \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \sigma^{ab} \wedge \Xi) - \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \wedge e^{[a} \gamma^{b]} \wedge \psi) \end{aligned} \right\} \\
\mathcal{D}f &= 0 \\
\mathcal{D}R^{ab} &= 0 \\
\mathcal{D}\Psi^\alpha &= -\frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \Psi)^\alpha + \frac{1}{2} f \wedge \Psi^\alpha \\
\mathcal{D}\Xi^\alpha &= -\frac{i}{4} R^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \xi)^\alpha + \frac{3}{2} f \wedge \xi^\alpha + F^a (\gamma_a \wedge \Psi)^\alpha - e^a (\gamma_a \wedge \Psi)^\alpha
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Yukarıda bulunan nicelikler ve bir önceki bölümde verdiğimiz temelden hareketle kullanılarak aşağıdaki gibi bir Lagranjiyen yazıldı,

$$S = \int \frac{\phi^2}{2\kappa} (\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd} + 4\bar{\Xi} \gamma_5 \wedge \Psi) + \frac{1}{4} f \wedge *f - \frac{1}{2} \mathcal{D}\phi \wedge * \mathcal{D}\phi + \frac{\lambda}{4} \phi^4 *1 \tag{3.88}$$

Bu Lagranjiyen $\mathcal{D}\phi=0$ sMW(1,3) dönüşümü altında değişmez kaldığı (Ek-F)'de gösterilmiştir. Buradan hareketle ilgili Lagranjiyen aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$S = \int -\frac{\phi^2}{4\kappa} (\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - 8\bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge \mathcal{D}\psi) + \frac{1}{4} f \wedge *f + \frac{\lambda}{4} \phi^4 *1 \quad (3.89)$$

Şimdi hareket denklemlerini bulabiliriz. Bunun için $\delta S = 0$ temel alınarak sırasıyla ω^{ab} , e^a , χ , $\bar{\psi}$ ayar alanlarına ve $\phi(x)$ alanına göre varyasyon alınırsa aşağıdaki hareket denklemleri elde edilir,

$$\varepsilon_{abcd} \mathcal{D}e^c \wedge e^d + i\bar{\psi} \wedge e^c \gamma_c \sigma_{ab} \gamma_5 \wedge \psi = 0 \quad (3.90)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi^2}{\kappa} (\varepsilon_{abcd} R^{bc} \wedge e^d + 4\bar{\psi} \gamma_a \gamma_5 \wedge \mathcal{D}\psi) \\ \frac{1}{2} \left(f_{ab} e^b \wedge *f - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} f^{bc} e^d \wedge f \right) - \frac{\lambda \phi^4}{2} *e_a \end{array} \right\} = 0 \quad (3.91)$$

$$\frac{\phi^2}{\kappa} \bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge \psi + \frac{1}{2} \mathcal{D} *f = 0 \quad (3.92)$$

$$e^c \gamma_c \gamma_5 \wedge \mathcal{D}\psi = 0 \quad (3.93)$$

$$(\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - 8\bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge \mathcal{D}\psi) - 2\kappa \lambda \phi^2 *1 = 0 \quad (3.94)$$

Bunlara ilave olarak Denklem (3.91) sayesinde aşağıdaki ifade elde edilir,

$$R^\mu{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha R = T(\psi)^\mu{}_\alpha - \kappa \phi^{-2} \left\{ T(\phi)^\mu{}_\alpha + \frac{1}{2} T(f)^\mu{}_\alpha \right\} \quad (3.95)$$

Bu eşitlik Denklem (2.44)'ın ölçekleme simetrisi dönüşümü altında genişletilmiş halidir. Burada enerji-momentum tensörlerinin açık şekli aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} T(\psi)^\mu{}_\alpha &= \bar{\psi} \gamma_\alpha \gamma_5 \mathcal{D}_{[\rho} \psi_{\sigma]} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ T(\phi)^\mu{}_\alpha &= \frac{\lambda}{4} \delta^\mu{}_\alpha \phi^4 \\ T(f)^\mu{}_\alpha &= f_{\beta\alpha} f^{\mu\beta} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\alpha f^{\gamma\delta} f_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (3.96)$$

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Maxwell simetrisi üzerine, 2005 yılında Soroka'nın çalışmasından [18] itibaren şimdiye kadar genişletilmiş kütleçekim teorileri ve bunların süpersimetrik genellemeleri, kozmolojik sabit, karanlık enerji, yüksek spinli alanların da içinde bulunduğu geniş bir yelpazede çalışmalar yapıldı. Burada yazarlar ağırlıklı olarak, anti de Sitter grubunda olduğu gibi Maxwell simetrisinin de doğal neticesi olan, kozmolojik sabit üzerinde durdu. Karanlık enerjinin açıklanmasında kozmolojik sabitin kuvvetli bir aday [81, 82] olması da bu simetrinin önemini giderek arttırmaktadır.

Diğer bir önemli alan ise Maxwell simetrisinin komutatif olmayan geometri ile ilişkisidir. Örneğin $[P_a, P_b] = iZ_{ab}$ eşitliğinin, Minkowski uzay-zamanında komutatif olmayan geometriyi temsil eden $[x_a, x_b] = i\phi_{ab}$ [83, 84] ifadesine kanonik olarak eş olduğu düşünüldüğünde Maxwell simetrisinin komutatif olmayan geometri ile ilişkisi kurulur ve dolayısıyla kuantum kütleçekiminin [85] cebirsel bir yaklaşımı elde edilmiş olur. Buradan da anlaşılır ki bu simetri ileride komutatif olmayan alan teorisinde de [86] önemli bir yere sahip olacaktır.

Bu tezde Maxwell-Weyl ve Süper Maxwell-Weyl cebirlerinin doğrusal olmayan gerçeklemeleri ve ayar teorileri incelendi. Bu inceleme neticesinde ilgili gruplara ait eğrilikler, genelleştirilmiş kütleçekim Lagranjiyeni ve hareket denklemleri elde edildi.

MW(1,3) için, tanımladığımız ötelenmiş eğrilik sayesinde $\phi(x)$ alanına bağlı değişken kozmolojik terimi içeren Einstein-Cartan-Weyl alan denkleminin genelleştirilmiş halini ve buna ilave kaynak terimler elde ettik. Bu kaynak terimler, enerji-momentum tensörü olarak tanımlandı ve neticede görüldü ki, teoriye dilatonun eklenmesi kozmolojik sabite ve enerji-momentum tensörüne katkılar getirmiştir. Son durumda kozmolojik sabit terimi, Maxwell simetrisinden kaynaklanan arka plan alanında bir dinamik değişken olarak karşımıza çıkmıştır. Kozmolojik sabit ve

karanlık enerjinin birbiri ile yakın alakalı olduğu bilindiğinden dolayı, bu durum bizi elde edilen enerji-momentum tensörünün bütününün veya bir kısmının karanlık enerji olarak yorumlanmasına götürebilir. Bir başka deyişle karanlık enerji Maxwell simetrisinden kaynaklanan $B^{ab}(x)$ ayar alanı ile ilişkili olabilir.

sMW(1,3) simetrisinin incelenmesinde ise öncelikle literatürde bulunan bu cebir [34] seçtiğimiz notasyona uyarlandı. Kurulan ayar teorisinden elde edilen eğrilikler sayesinde sMW(1,3) simetrisi altında değişmez kalan bir Lagranjiyen elde edildi. Keza bu Lagranjiyenin ölçekleme simetrisi altında değişmez kalan yalın süper kütleçekim Lagranjiyenine dönüştüğü gözlemlendi. Bu netice bize sMW(1,3) simetrisinin süper kütleçekim teorisinin oluşturulmasında alternatif bir yol olacağını göstermiştir.

Bu iki çalışma sayesinde sırasıyla [39] ve [47] makalelerindeki neticelerin genelleştirilmiş halleri elde edildi. Böylece Maxwell kütleçekim teorisine literatürde ilk defa olarak ölçekleme simetrisinin eklenmesiyle Maxwell-Weyl kütleçekim teorisine elde edildi ve olan çalışmalar bir adım öteye taşınmış oldu.

Özetle bütün bu çalışmalar bize gösterdi ki Maxwell simetrisi gelecekte, başta kozmolojik sabit, karanlık enerji ve kuantum kütleçekimi olmak üzere fiziğin pek çok alanında oldukça mühim bir yere sahip olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Utiyama R., Invariant Theoretical Interpretation of Interaction, *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 1597.
- [2] Kibble T. W. B., Lorentz Invariance and The Gravitational Field, *J. Math. Phys.*, 1961, **2**, 212.
- [3] Salam A., Strathdee J., Nonlinear Realizations. I. The Role of Goldstone Bosons, *Phys. Rev.*, 1969, **184**, 1750.
- [4] Salam A., Strathdee J., Nonlinear Realizations. II. Conformal Symmetry, *Phys. Rev.*, 1969, **184**, 1760.
- [5] Charap J. M., Tait W., A Gauge Theory of Weyl Group, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1974, **340**, 249.
- [6] Omote M., Scale Transformations of The Second Kind and The Weyl Space-Time, *Lett. Nuovo Cimento*, 1971, **2**, 58.
- [7] Kasuya M., On The Gauge Theory in The Einstein-Cartan-Weyl Space-Time, *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis.*, 1975, **288**, 127.
- [8] Ivanov E. A., Niederle J., Gauge Formulation of Gravitation Theories, I. The Poincare, De Sitter and Conformal Cases, *Phys. Rev. D*, 1982, **25**, 976.
- [9] Ivanov E. A., Niederle J., Gauge Formulation of Gravitation Theories, II. Special Conformal Cases, *Phys. Rev. D*, 1982, **25**, 988.
- [10] Babourova O. V., Frolov B. N., Gauge Field Theory for Poincare–Weyl Group, *Phys. Rev. D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.74.064012.
- [11] Schrader R., The Maxwell Group and The Quantum Theory of Particles in Classical Homogeneous Electromagnetic Fields, *Fortschritte Der Physik*, 1972, **20**, 701-734.
- [12] Bacry H., Combe P., Richard J. L., Group-Theoretical Analysis of Elementary Particles in an External Electromagnetic Field, *Il Nuovo Cimento*, 1970, **67**, 267-299.
- [13] Bacry H., Combe P., Richard J. L., Group-Theoretical Analysis of Elementary Particles in an External Electromagnetic Field II. The Nonrelativistic Particle in a Constant and Uniform Field, *Il Nuovo Cimento*, 1970, **70**, 289-312.
- [14] Stein E. M., *High Energy Physics and Elementary Particles*, 1st Ed, International Atomic Energy Agency, New York, 1975.

- [15] Beckers J., Hussin V., Minimal Electromagnetic Coupling Schemes. II. Relativistic and Nonrelativistic Maxwell Groups, *J. Math. Phys.*, 1983, **24**, 1295.
- [16] Negro J., Del Olmo M. A., Local Realizations of Kinematical Groups with a Constant Electromagnetic Field. I. The Relativistic Case, *J. Math. Phys.*, 1990, **31**, 568.
- [17] Negro J., Del Olmo M. A., Local Realizations of Kinematical Groups with a Constant Electromagnetic Field. II. The Nonrelativistic Case, *J. Math. Phys.*, 1990, **31**, 2811.
- [18] Soroka D. V., Soroka V. A., Tensor Extension of The Poincare Algebra, *Phys. Lett. B*, 2005, **607**, 302-305.
- [19] Castellani L., Perotto A., Free Differential Algebras: Their Use in Field Theory and Dual Formulation, *Lett. Math. Phys.*, 1996, **38**, 321.
- [20] Hatsuda M., Sakaguchi M., Wess-Zumino Term for The AdS Superstring and Generalized Inonu-Wigner Contraction, *Prog. Theor. Phys.*, 2003, **109**, 853.
- [21] de Azcárraga J. A., Izquierdo J. M., Picon M., Varela O., Generating Lie and Gauge Free Differential (Super)Algebras by Expanding Maurer–Cartan Forms and Chern–Simons Supergravity, *Nucl. Phys. B*, 2003, **662**, 185.
- [22] de Azcárraga J. A., Izquierdo J. M., Picon M., Varela O., Extension, Expansion, Lie Algebra Cohomology and Enlarged Superspace, *Class. Quantum Grav.*, 2004, **21**, 1375.
- [23] de Azcárraga J. A., Izquierdo J. M., Picon M., Varela O., Expansion of Algebras and Superalgebras and Some Applications, *Class. Quantum Grav. Int. J. Theor. Phys.*, 2007, **46**, 2738.
- [24] de Azcárraga J. A., Izquierdo J. M., Lukierski J., Woronowicz M., Generalizations of Maxwell (Super)Algebras by The Expansion Method, *Nucl. Phys. B*, 2013, **869**, 303–314.
- [25] Gibbons G. W., Gomis J., Pope C. N., General Very Special Relativity is Finsler Geometry, *Phys. Rev. D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.76.081701.
- [26] Izaurieta F., Rodriguez E., Salgado P., Expanding Lie (Super)Algebras Through Abelian Semigroups, *J. Math. Phys.*, DOI: 10.1063/1.2390659.
- [27] Diaz J., Fierro O., Izaurieta F., Merino N., Rodriguez E., Salgado P., Valdivia O., A Generalized Action for (2+1)-Dimensional Chern-Simons Gravity, *J. Phys. A: Math. Theor.*, DOI: 10.1088/1751-8113/45/25/255207.
- [28] de Azcárraga J. A., Izquierdo J. M., *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Physics*, 1st Ed, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [29] Bonanos S., Gomis J., A Note on The Chevalley–Eilenberg Cohomology for The Galilei and Poincare Algebras, *J. Phys. A*, DOI: 10.1088/1751-8113/42/14/145206.
- [30] Bonanos S., Gomis J., Infinite Sequence of Poincare Group Extensions: Structure and Dynamics, *J. Phys. A*, DOI: 10.1088/1751-8113/43/1/015201.
- [31] Gibbons G. W., Gomis J., Pope C. N., Deforming The Maxwell-Sim Algebra, *Phys. Rev. D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.82.065002.
- [32] Gomis J., Kamimura K., Lukierski J., Deformations of Maxwell Algebra and Their Dynamical Realizations, *JHEP*, 2009, **08**, 39.
- [33] Salgado P., Salgado S., $\mathfrak{so}(D-1,1) \oplus \mathfrak{so}(D-1,2)$ Algebras and Gravity, *Physics Letters B*, 2013, **728**, 5-10.
- [34] Bonanos S., Gomis J., Kamimura K., Lukierski J., Deformations of Maxwell Superalgebras and Their Applications, *J. Math. Phys.*, DOI: 10.1063/1.3492928.
- [35] Concha P. K., Rodríguez E. K., Maxwell Superalgebras and Abelian Semi Group Expansion, *Nucl. Phys. B*, 2014, **886**, 1128-1152.
- [36] Kamimura K., Lukierski J., Supersymmetrization Schemes of $D = 4$ Maxwell Algebra, *Physics Letters B*, 2012, **707**, 292-297.
- [37] Lukierski J., Generalized Wigner-Inonu Contractions and Maxwell (Super)Algebras, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, **272**, 1-8.
- [38] Soroka D. V., Soroka V. A., Semi-Simple Extension of The (Super)Poincare Algebra, *Adv. High Energy Phys.*, DOI: 10.1155/2009/234147.
- [39] de Azcárraga J. A., Kamimura K., Lukierski J., Generalized Cosmological Term from Maxwell Symmetries, *Phys. Rev. D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.83.124036.
- [40] de Azcárraga J. A., Kamimura K., Lukierski J., Maxwell Symmetries and Some Applications, *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, DOI: 10.1142/S2010194513011604.
- [41] Cebecioglu O., Kibaroğlu S., Gauge Theory of The Maxwell-Weyl Group, *Phys. Rev. D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.90.084053.
- [42] Durka R., Kowalski-Glikman J., Szczachor M., Gauged AdS-Maxwell Algebra and Gravity, *Mod. Phys. Lett. A*, 2011, **26**, 2689-2696.
- [43] Hoseinzadeh S., Rezaei-Aghdam A., (2+1)-Dimensional Gravity From Maxwell And Semisimple Extension of The Poincare Gauge Symmetric Models, *Phys. Rev. D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.90.084008.

- [44] Inostroza C., Salazar A., Salgado P., Brans–Dicke Gravity Theory from Topological Gravity, *Phys. Lett. B*, 2014, **734**, 377–382.
- [45] Salgado S., Izaurieta F., González N., Rubio G., Gauged Wess–Zumino–Witten Actions for Generalized Poincare Algebras, *Physics Letters B*, 2014, **732**, 255–262.
- [46] Soroka D. V., Soroka V. A., Gauge Semi-Simple Extension of The Poincare Group, *Phys.Lett. B*, 2012, **707**, 160–162.
- [47] de Azcárraga J. A., Izquierdo J. M., Minimal $D = 4$ Supergravity from The Supermaxwell Algebra, *Nucl. Phys. B*, 2014, **885**, 34–45.
- [48] Bonanos S., Gomis J., Kamimura K., Lukierski J., Maxwell Superalgebra and Superparticles in Constant Gauge Backgrounds, *Phys. Rev. Lett.*, DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.090401.
- [49] Concha P. K., Rodrigues E. K., $N = 1$ Supergravity and Maxwell Superalgebras, *J. High Energ. Phys.*, 2014, **09**, 90.
- [50] Concha P. K., Rodrigues E. K., Generalized Supersymmetric Cosmological Term in $N = 1$ Supergravity, *J. High Energ. Phys.*, 2015, **08**, 9.
- [51] Durka R., Kowalski-Glikman J., Szczachor M., AdS-Maxwell Superalgebra and Supergravity, *Mod. Phys. Lett. A*, DOI: 10.1142/S021773231250023X.
- [52] Fedoruk S., Lukierski J., New Particle Model in Extended Space-Time and Covariantization of Planar Landau Dynamics, *Phys. Lett. B*, 2012, **718**, 646–652.
- [53] Fedoruk S., Lukierski J., Maxwell Group and HS Field Theory, *J. Phys. Conf. Ser.*, DOI: 10.1088/1742-6596/474/1/012016.
- [54] Fedoruk S., Lukierski J., New Spinorial Particle Model in Tensorial Space-Time and Interacting Higher Spin Fields, *JHEP*, 2013, **1302**, 128.
- [55] Ohanian H. C., *Gravitation and Spacetime*, 1st Ed, W. W. Norton & Company, New York, 1987.
- [56] Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J., Gravitation, Gauge Theory and Differential Geometry, *Physics Reports*, 1980, **66**, 213.
- [57] Özemre A. Y., *Gravitasyonun Rölativistik Teorileri*, 1. Basım, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 1982.
- [58] de Sabbata V., Gasperini M., *Introduction to Gravitation*, 1st Ed, World Scientific, 1985.
- [59] Gasperini M., *Theory of Gravitational Interactions*, 1st Ed, Springer, Milan, 2013.

- [60] Weyl H., Gravitation and The Electron, *Proc. Nat. Acad. Sci*, 1929, **15**, 323.
- [61] Yang C. N., Mills R. L., Conservation of Isotropic Spin and Isotopic Gauge Invariance, *Phys. Rev.*, 1954, **96**, 191.
- [62] Neveu A., Schwarz J. H., Factorizable Dual Model of Pions, *Nucl. Phys. B*, 1971, **31**, 86.
- [63] Golfand Y. A., Likhman E. P., Extension of The Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1971, **13**, 452.
- [64] Volkov D. V., Akulov V. P., Is The Neutrino a Goldstone Particle?, *Phys. Lett. B*, 1973, **46**, 109.
- [65] Akulov V. P., Volkov D. V., Goldstone Field With Spin 1/2, *Theor. Math. Phys.*, 1974, **18**, 28.
- [66] Wess J., Zumino B., Supergauge Transformations in Four Dimensions, *Nucl. Phys. B*, 1974, **70**, 39.
- [67] Fayet P., Supergauge Invariant Extension of The Higgs Mechanism and a Model for The Electron and Its Neutrino, *Nucl. Phys. B*, 1975, **90**, 104.
- [68] Freedman D. Z., Van Nieuwenhuizen P., Progress Toward a Theory of Supergravity, *Phys. Rev. D*, 1976, **13**, 3214.
- [69] West P., *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, 1st Ed, World Scientific, Philadelphia, 1986.
- [70] Müller-Kirsten H. J. W., Wiedemann A., *Supersymmetry, An Introduction with Conceptual and Computational Details*, 1st Ed, World Scientific, New Jersey, 1987.
- [71] Castellani L., D'Auria R., Fre P., *Supergravity and Superstrings, a Geometric Perspective Vol.1: Mathematical Foundation*, 1st Ed, World Scientific, New Jersey, 1991.
- [72] Castellani L., D'Auria R., Fre P., *Supergravity and Superstrings, a Geometric Perspective Vol.2: Supergravity*, 1st Ed, World Scientific, New Jersey, 1991.
- [73] Wess J., Bagger J., *Supersymmetry and Supergravity*, 1st Ed, Princeton University Press, New Jersey, 1992.
- [74] Bregman A., Weyl Transformations and Poincare Gauge Invariance, *Prog. Theor. Phys.*, 1973, **49**, 667.
- [75] Blagojevic M., *Gravitation and Gauge Symmetry*, 1st Ed, IOP, Bristol, 2002.
- [76] Weyl H., *Space, Time, Matter*, 1st Ed, Dover, New York, 1961.

- [77] Brans C., Dicke R. H., Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation, *Phys. Rev.*, 1961, **124**, 925.
- [78] Dirac P. A. M., Long Range Forces and Broken Symmetries, *Proc. R. Soc. A*, 1973, **403**, 403.
- [79] Agnese A. G., Calvini P., Gauge Fields Arising from Spacetime Symmetries and Gravitational Theories. II, *Phys. Rev. D*, 1975, **12**, 3804.
- [80] Dereli T., Tucker R. W., Weyl Scalings and Spinor Matter Interactions in Scalar-Tensor Theories of Gravitation, *Phys. Lett. B*, 1982, **110B**, 206.
- [81] Frieman J., Turner M., Huterer D., Dark Energy and the Accelerating Universe, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 2008, **46**, 385.
- [82] Padmanabhan T., Dark Energy and Its Implications for Gravity, *Adv. Sci. Lett.*, 2009, **2**, 174.
- [83] Chaichian M., Kulish P. P., Nishiyama K., Turaeanu A., On a Lorenz-Invariant Interpretation of Noncommutative Space-Time and Its Implication on Noncommutative QFT, *Phys. Lett. B*, 2004, **604**, 98.
- [84] Aschieri P., Blohmann C., Dimitrijevic M., Meyer F., Schupp P., Wess J., "A Gravity Theory on Noncommutative Spaces, *Class. Quant. Grav.*, 2005, **22**, 3511.
- [85] Doplicher S., Fredenhagen K., Roberts J. E., The Quantum Structure of Space-Time at the Planck Scale and Quantum Fields, *Commun. Math. Phys.*, 1995, **172**, 187.
- [86] Douglas M. R., Nekrasov N. A., Noncommutative Field Theory, *Rev. Mod. Phys.*, 2001, **73**, 977.



Ek-A: NOTASYON VE BAZI TEMEL FORMÜLLER

Tez boyunca 4 boyut için düz uzay metriği aşağıdaki şekilde kullanılmıştır,

$$\eta_{ab} = \text{diag}(+, -, -, -) \quad (4.1)$$

Levi-Civita sembolü ve bazı özellikleri

Levi-Civita sembolü $\varepsilon_{0123} = -1$, $\varepsilon^{0123} = 1$ şeklinde seçildi. Kovaryant ve kontravaryant indisleri arası geçiş ise aşağıdaki şekilde verilir,

$$-g\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g_{\gamma\rho}g_{\delta\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.2)$$

Yukarıdaki ifadeden anlaşılacağı üzere bu sembol bir tensör yoğunluğuna karşılık gelir. Eğer aşağıdaki gibi bir tanım yapılırsa,

$$\eta^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}}, \quad \eta_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.3)$$

bütünüyle antisimetrik olan bir tensör elde edilir. D boyut için genel ifade ve $D = 4$ için bazı uygulamalar aşağıda verilmiştir,

$$\begin{aligned} \eta^{\mu_1 \dots \mu_D} \eta_{\mu_1 \dots \mu_D} &= (-1)^{D-1} D! \\ \eta_{\mu\nu\rho\sigma} \eta^{\mu\nu\rho\sigma} &= -4! \\ \eta_{abcd} \eta^{abce} &= -3! \delta_d^e \\ \eta_{abcd} \eta^{abef} &= -2! \delta_{cd}^{ef} = -2! (\delta_c^e \delta_d^f - \delta_c^f \delta_d^e) \\ \eta_{abcd} \eta^{efrd} &= -1! \delta_{abc}^{efr} = - \left\{ \delta_a^e (\delta_b^f \delta_c^r - \delta_c^f \delta_b^r) - \delta_b^e (\delta_a^f \delta_c^r - \delta_c^f \delta_a^r) \right. \\ &\quad \left. + \delta_c^e (\delta_a^f \delta_b^r - \delta_b^f \delta_a^r) \right\} \\ \eta_{abcd} \eta^{efrs} &= -\delta_{abcd}^{efrs} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Burada $\delta^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_n}$ nicelikleri aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\delta^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \det \begin{pmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \dots & \delta^{\mu_1}_{\nu_n} \\ \dots & \cdot & \dots \\ \delta^{\mu_n}_{\nu_1} & \dots & \delta^{\mu_n}_{\nu_n} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Tensör notasyonu ve indislerin kullanımı

Tensör indislerinde simetrik ve anti simetrik gösterim aşağıdaki şekildedir,

$$A_{[\mu}B_{\nu]} = A_{\mu}B_{\nu} - A_{\nu}B_{\mu}, \quad A_{(\mu}B_{\nu)} = A_{\mu}B_{\nu} + A_{\nu}B_{\mu} \quad (4.6)$$

İndis ayırıcı (|) kullanıldığında ise aşağıdaki şekilde yazılır,

$$A_{[\mu}B_{\rho|\nu]} = A_{\mu}B_{\rho\nu} - A_{\nu}B_{\rho\mu} \quad (4.7)$$

Tez boyunca kullanılan indisler aksi belirtilmedikçe sonraki sayfadaki şekilde kullanılmıştır,

- $A, B, C, \dots = 0, 1, \dots, N$: Üretici indisleri, burada N grubun üretici sayısıdır
- $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$: Tanjant uzayı indisleri
- $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$: Koordinat veya spinör indisleri

Kovaryant türev

Kovaryant türev (V^{α} : vektör),

$$\nabla_{\mu} V^{\alpha} = \partial_{\mu} V^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} V^{\rho}, \quad \nabla_{\mu} V_{\alpha} = \partial_{\mu} V_{\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} V_{\rho} \quad (4.8)$$

Lorentz kovaryant dış türev (V^a : 1-form vektör, ψ^{α} : 1-form spinör),

$$DV^a = dV^a + \omega^a_b \wedge V^b, \quad DV_a = dV_a - \omega^b_a \wedge V_b \quad (4.9)$$

$$D\psi^{\alpha} = d\psi^{\alpha} - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \psi)^{\alpha}, \quad D\bar{\psi}^{\alpha} = d\bar{\psi}^{\alpha} + \frac{i}{4} \omega^{ab} \wedge (\bar{\psi} \sigma_{ab})^{\alpha} \quad (4.10)$$

Lorentz-Weyl kovaryant dış türev, (V^a : 1-form vektör, ψ^{α} : 1-form spinör),

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V^a &= dV^a + \omega^a_b \wedge V^b + w(V) \wedge V^a \\ \mathcal{D}\psi^{\alpha} &= d\psi^{\alpha} - \frac{i}{4} \omega^{ab} (\sigma_{ab} \wedge \psi)^{\alpha} + w(\psi) \wedge \psi^{\alpha} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Burada $w(\cdot)$ ilgili alana bağlı Weyl ağırlığıdır.

Komütasyon, anti komütasyon bağıntıları ve Jakobi özdeşlikleri,

Komütasyon ve anti komütasyon ifadeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$[A, B] = AB - BA, \quad \{A, B\} = AB + BA \quad (4.12)$$

F fermiyon ve B bozonik değişken olmak üzere Jacobi özdeşliğinin genel ifadesi,

$$(-1)^{g_c g_\beta} B_c \circ (F_\alpha \circ F_\beta) + (-1)^{g_\alpha g_c} F_\alpha \circ (F_\beta \circ B_c) + (-1)^{g_\beta g_\alpha} F_\beta \circ (B_c \circ F_\alpha) = 0 \quad (4.13)$$

şeklindedir. Burada bozonik $g_{a,b,\dots} = 0$ ve fermiyonik $g_{\alpha,\beta,\dots} = 1$ değerlerine sahip olduğu dikkate alındığında aşağıdaki nicelikler elde edilir,

$$\begin{aligned} [B_a, [B_b, B_c]] + [B_b, [B_c, B_a]] + [B_c, [B_a, B_b]] &= 0 \\ [B_a, [B_b, F_\rho]] + [B_b, [F_\rho, B_a]] + [F_\rho, [B_a, B_b]] &= 0 \\ [B_a, \{F_\rho, F_\sigma\}] + \{F_\rho, [F_\sigma, B_a]\} - \{F_\sigma, [B_a, F_\rho]\} &= 0 \\ [F_\rho, \{F_\sigma, F_\gamma\}] + [F_\sigma, \{F_\gamma, F_\rho\}] + [F_\gamma, \{F_\rho, F_\sigma\}] &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

A p-form, B q-form ve C r-form bozonik değişken olmak üzere sırasıyla komütasyon bağıntısı ve Jacobi özdeşliği aşağıdaki şekilde yazılır,

$$[A, B] = -(-1)^{pq} [B, A] \quad (4.15)$$

$$[[A, B], C] + (-1)^{r(p+q)} [[C, A], B] + (-1)^{p(r+q)} [[B, C], A] = 0 \quad (4.16)$$

Maxwell parametresi ve türevinin bazı özellikleri

$$\partial_{ab} = \frac{\partial}{\partial \phi_{ab}}, \quad \partial^{ab} = \frac{\partial}{\partial \phi^{ab}} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} [\partial_{ab}, \phi^{cd}] &= \partial_{ab} \phi^{cd} = \frac{1}{2} (\delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_a^d) \\ \partial_a \phi^{cd} &= 0, \quad \partial_{ab} x^c = 0 \\ [\partial_a, \partial_{cd}] &= 0, \quad [\partial_a, \phi_{cd}] = 0, \quad [\partial_{ab}, x^c] = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ek-B: DIRAC GAMMA MATRİSLERİ VE SPİNÖRLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Pauli spin matrisleri

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Dirac gamma matrisleri

Majorana gösterimi ile Dirac gamma matrisleri ve bazı özellikleri aşağıdaki şekildedir,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (4.22)$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad [\sigma^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0, \quad \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho &= \eta^{\mu\nu} \gamma^\rho - \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu + \eta^{\nu\rho} \gamma^\mu - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\sigma \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^5 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^{\beta]} = -\frac{i}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^5$$

$$\sigma^{ab} \sigma^{cd} = (\eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{ad} \eta^{bc}) + i(\eta^{ad} \sigma^{bc} + \eta^{bc} \sigma^{ad} - \eta^{ac} \sigma^{bd} - \eta^{bd} \sigma^{ac}) + i\varepsilon^{abcd} \gamma^5 \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho &= i(\eta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\sigma \\ \gamma^\rho \sigma^{\mu\nu} &= i(\eta^{\mu\rho} \gamma^\nu - \eta^{\nu\rho} \gamma^\mu) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\sigma \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\{\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho\} = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\sigma, \quad [\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = 2i(\eta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \eta^{\mu\rho} \gamma^\nu) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} [\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\rho\sigma}] &= 2i(\eta^{\mu\sigma}\sigma^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho}\sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\sigma^{\mu\rho}) \\ \{\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\rho\sigma}\} &= 2(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Burada Lorentz grubu üreticisi $M_{ab} = \frac{1}{2}\sigma_{ab}$ şeklinde seçildiğinde aşağıdaki komutasyon ilişkisini sağladığı görülecektir,

$$[M_{ab}, M_{cd}] = i(\eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \quad (4.29)$$

Yük eşleniği matrisi

Yük eşleniği matrisi $C = \gamma_0$ yapısındadır ve buna ait bazı özellikleri aşağıdaki şekildedir,

$$C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C, \quad C^2 = -1, \quad CC^\dagger = 1 \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^T &= -C\gamma_\mu C^{-1}, & \sigma_{\mu\nu}^T &= -C\sigma_{\mu\nu} C^{-1} \\ (\gamma^5)^T &= C\gamma^5 C^{-1}, & (\gamma^5\gamma^\mu)^T &= C\gamma^5\gamma^\mu C^{-1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} (C\gamma_\mu)^T &= (C\gamma_\mu), & (C\sigma_{\mu\nu})^T &= (C\sigma_{\mu\nu}) \\ (C\gamma_5)^T &= -(C\gamma_5), & (C\gamma_\mu\gamma_5)^T &= -(C\gamma_\mu\gamma_5) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$(C\gamma_\mu)_{(\alpha\beta)} (C\gamma^\mu)_{\sigma\beta)} = 0 \quad (4.33)$$

Bu temelden hareketle, bir spinörün kompleks eşleniği $\bar{\psi} = \psi^T C$ şeklinde kullanıldı.

Spinörlerin bazı özellikleri

Süpersimetrisinin oluşturulmasında kullanılan fermiyonik uzayın koordinat parametresi θ^α ve ilgili türevin ∂_α özellikleri aşağıdaki biçimdedir,

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \theta^\beta &= \delta_\alpha^\beta, \quad \partial_\alpha \theta_\beta = -\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \partial^\alpha \theta^\beta = -\varepsilon^{\alpha\beta}, \quad \partial_\alpha (\theta\theta) = 2\theta_\alpha \\ [\partial_\alpha, \theta^\beta] &= \delta_\alpha^\beta, \quad [\partial_\alpha, \theta_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta}\end{aligned}\tag{4.35}$$

Burada $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ şeklinde antisimetrik bir tensördür. Spinör türevinin ψ ve χ spinör değişkenlerine etkisi aşağıdaki şekildedir,

$$\partial_\alpha (\chi^\rho \psi^\sigma) = (\partial_\alpha \chi^\rho) \psi^\sigma - \chi^\rho \partial_\alpha \psi^\sigma\tag{4.36}$$

Spinör değişkenlerin bazı özellikler aşağıdaki şekildedir,

$$\begin{aligned}\psi_\alpha \chi_\beta &= -\chi_\beta \psi_\alpha \\ \psi\chi &= \chi\psi, \quad \bar{\psi}\chi = \bar{\chi}\psi, \quad \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi}\end{aligned}\tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma_\mu \chi &= -\bar{\chi}\gamma_\mu \psi, \quad \bar{\psi}\gamma_\mu \psi = 0 \\ \bar{\psi}\gamma_{\mu\nu} \chi &= -\bar{\chi}\gamma_{\mu\nu} \psi, \quad \bar{\psi}\gamma_{\mu\nu} \psi = 0 \\ \bar{\psi}\gamma_5 \gamma_\mu \chi &= \bar{\chi}\gamma_5 \gamma_\mu \psi, \quad \bar{\psi}\gamma_5 \chi = \bar{\chi}\gamma_5 \psi\end{aligned}\tag{4.38}$$

Eğer ψ ve χ spinörleri sırasıyla p ve q-form yapısında ise,

$$\psi_\alpha \wedge \chi_\beta = -(-1)^{p\cdot q} \chi_\beta \wedge \psi_\alpha\tag{4.39}$$

ifadesinin dikkate alınması gerekir.

Ek-C: BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF FORMÜLÜ VE İLGİLİ BAZI AÇILIMLAR

Baker-Campell-Hausdorff formülü,

$$e^A e^B = \exp \left(\begin{aligned} &A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} [A, [A, B]] \\ & - \frac{1}{12} [B, [A, B]] - \frac{1}{24} [B, [A, [A, B]]] \\ & - \frac{1}{720} \left([[[[A, B], B], B], B \right] + [[[[B, A], A], A], A \right) + \dots \end{aligned} \right) \quad (4.40)$$

Hadamard formülü,

$$\begin{aligned} e^A B e^{-A} &= B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \\ e^{-A} B e^A &= B + [B, A] + \frac{1}{2!} [[B, A], A] + \frac{1}{3!} [[[B, A], A], A] + \dots \end{aligned} \quad (4.41)$$

Zassenhaus açılımı,

$$e^{t(A+B)} = \left(\begin{aligned} &e^{tA} e^{tB} e^{-\frac{t^2}{2} [A, B]} e^{\frac{t^3}{3} (2[B, [A, B]] + [A, [A, B]])} \\ & e^{-\frac{t^4}{24} ([[[A, B], A], A] + 3[[A, B], A], B + 3[[A, B], B], B)} \dots \end{aligned} \right) \quad (4.42)$$

$[A, B] = sY$ ise,

$$\begin{aligned} e^A e^B &= e^{\exp(s)B} e^A \\ e^A e^B e^{-A} &= e^{\exp(s)B} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]} \quad ([A, B] = 0 \text{ ve } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \text{ ise}) \quad (4.44)$$

Diğer açılımlar,

$$\begin{aligned} e^A e^B e^{-A} &= \exp(e^A B e^{-A}) \\ &= \exp \left(B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} e^{-cA} d e^{cA} &= c d A - \frac{1}{2!} [cA, c d A] + \frac{1}{3!} [cA, [cA, c d A]] + \dots \\ e^{-cA} \delta e^{cA} &= c \delta A - \frac{1}{2!} [cA, c \delta A] + \frac{1}{3!} [cA, [cA, c \delta A]] + \dots \\ e^{-cA} \partial_a e^{cA} &= c \partial_a A - \frac{1}{2!} [cA, c \partial_a A] + \frac{1}{3!} [cA, [cA, c \partial_a A]] + \dots \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ek-Ç: TANJANT UZAYINDAN KOORDİNAT UZAYINA GEÇİŞ VE KOZMOLOJİK SABİTİ İÇEREN EINSTEIN ALAN DENKLEMİ

Einsten-Hilbert eylemi, kozmolojik terim ve kütle terimi ile aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned}
 S &= S_{EH} + S_{Kozm} + S_{Kütle} \\
 &= -\frac{1}{4\kappa} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \frac{\Lambda}{8\kappa} \int \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + \int L_m *1 \\
 &= -\frac{1}{4\kappa} \int \left(\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{\Lambda}{2} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d - 4\kappa L_m *1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Şimdi yukarıdaki eylemi uzay-zaman indislerinde yazalım. Einstein-Hilbert terimi,

$$R^{ab} = \frac{1}{2} R^{ab}_{ef} e^e \wedge e^f, \quad R = R^{ab}_{ef} \delta^e_a \delta^f_b \tag{4.48}$$

$$e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = \sqrt{-g} \varepsilon^{abcd} d^4x \tag{4.49}$$

$$\varepsilon_{abcd} \varepsilon^{abef} = -2! (\delta^e_c \delta^f_d - \delta^f_c \delta^e_d) \tag{4.50}$$

denklemleri yardımıyla uzay zaman indislerinde aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\begin{aligned}
 S_{EH} &= -\frac{1}{4\chi} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d = -\frac{1}{4\kappa} \int \varepsilon_{abcd} \left(\frac{1}{2} R^{ab}_{ef} e^e \wedge e^f \right) \wedge e^c \wedge e^d \\
 &= -\frac{1}{8\kappa} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab}_{ef} \left(\varepsilon^{efcd} \sqrt{-g} d^4x \right) \\
 &= -\frac{1}{8\kappa} \int R^{ab}_{ef} \left\{ -2 (\delta^e_a \delta^f_b - \delta^f_b \delta^e_a) \right\} \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Kozmolojik terim Denklem (4.49) ve $\varepsilon_{abcd} \varepsilon^{abcd} = -4!$ ifadesi sayesinde aşağıdaki yapıda yazılabilir,

$$\begin{aligned}
 S_{Kozm} &= \int \frac{\Lambda}{8\kappa} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = \int \frac{\Lambda}{8\kappa} \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{abcd} \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \int -\frac{3\Lambda}{\kappa} \sqrt{-g} d^4x
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Kütle terimi ise $*1 = -\sqrt{-g}d^4x$ eşitliği yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$S_{\text{Kütle}} = \int L_m *1 = -\int L_m \sqrt{-g}d^4x \quad (4.53)$$

Denklem (4.51), Denklem (4.52) ve Denklem (4.53) sonuçlar bir araya getirildiğinde toplam eylem aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 6\Lambda - 2\kappa L_m) \quad (4.54)$$

Einstein alan denklemi, $\delta_g S = 0$ şartı ve $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ eşitliği dikkate alınarak eylemin metriğe göre varyasyonu alındığında,

$$\begin{aligned} \delta_g S &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta \left\{ \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 6\Lambda - 2\kappa L_m) \right\} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left\{ \delta\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 6\Lambda) + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\kappa \delta(\sqrt{-g} L_m) \right\} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + 3\Lambda g_{\mu\nu} - \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + 3\Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (4.56)$$

Burada $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum veya enerji-stres tensörü olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.57)$$

Ek-D: MAXWELL-WEYL HAREKET DENKLEMLERİ

İşlem karmaşıklıklarından kurtulmak için Denklem (3.70)'deki eylem üzerinde aşağıdaki gibi bir isimlendirme yapılır,

$$S = \underbrace{\int \frac{1}{8\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge \mathcal{J}^{cd}}_A + \underbrace{\frac{1}{4} f \wedge *f}_B - \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{D}\phi \wedge *\mathcal{D}\phi}_C + \underbrace{\frac{\lambda}{4} \phi^4 *1}_D \quad (4.58)$$

Hareket denklemleri için ayar alanlarına ve $\phi(x)$ alanına göre varyasyon alacağız.

ω^{ab} ayar alanına göre varyasyon aşağıdaki şekildedir,

$$\begin{aligned} \delta_\omega A &= \frac{1}{4\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} \delta \mathcal{J}^{ab} \wedge \mathcal{J}^{cd} \\ &= \frac{1}{4\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} \left(\mathcal{D} \delta \omega^{ab} + 2\gamma \phi^2 \delta \omega^{[a} \wedge B^{b]} \right) \wedge \mathcal{J}^{cd} \\ &= \mathcal{D}(\dots) + \frac{1}{4\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} \delta \omega^{ab} \wedge \mathcal{D} \mathcal{J}^{cd} - \frac{1}{2\kappa} \phi^2 \varepsilon_{abcd} \delta \omega^{ab} \wedge \mathcal{J}^{[c} \wedge B^{d]} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \varepsilon_{abcd} \delta \omega^{ab} \wedge \left\{ \mathcal{D}(\phi^2 F^{cd}) - \phi^2 \mathcal{J}^{[c} \wedge B^{d]} \right\} \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\delta_\omega B = 0, \quad \delta_\omega C = 0, \quad \delta_\omega D = 0 \quad (4.60)$$

e^a ayar alanına göre varyasyon için iç çarpım ile ilgili bazı ifadeler aşağıdaki şekildedir,

$$\begin{aligned} \delta_e *1 &= \delta e^a \wedge *e_a \\ \delta_e *e^a &= \delta e^b * (e^a \wedge e_b) = \delta e^b \wedge i_b *e^a \\ \delta_e *e^a &= \delta e_b \wedge *e^{ab} \\ \delta_e *e^{ab} &= \delta e_c \wedge *e^{abc} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ayrıca $*G = G_{\mu_1 \dots \mu_p} *e^{\mu_1 \dots \mu_p}$ olmak üzere, bu ifadenin e^a alanına göre varyasyonu aşağıdaki şekilde verilir,

$$\delta_e *G = \delta e^\alpha \wedge i_\alpha *G \quad (4.62)$$

Bu temelden hareketle ilgili Lagranjiyenin e^a ayar alanına göre varyasyon ile takip eden sayfadaki denklemler elde edilir,

$$\begin{aligned}
\delta_e A &= \frac{1}{4\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} \delta \mathcal{J}^{ab} \wedge \mathcal{J}^{cd} \\
&= \frac{1}{2\kappa} \phi^2 \varepsilon_{abcd} \left(-\frac{1}{2} \delta e^{[a} \wedge e^{b]} \right) \wedge \mathcal{J}^{cd} \\
&= -\frac{1}{2\kappa} \phi^2 \varepsilon_{abcd} \delta e^a \wedge e^b \wedge \mathcal{J}^{cd}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
\delta_e B &= \delta \left(\frac{1}{4} f \wedge *f \right) = -\frac{1}{4} \delta e^c \wedge i_c f \wedge *f + \frac{1}{4} f \wedge \delta e^c \wedge i_c *f \\
&= -\frac{1}{4} \delta e^c \wedge \left\{ i_c \left(\frac{1}{2} f_{ab} e^{ab} \right) \wedge *f - f \wedge i_c \left(\frac{1}{2} f_{ab} *e^{ab} \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \delta e^c \wedge \left\{ \frac{1}{2} f_{ab} (i_c e^a \wedge e^b - e^a \wedge i_c e^b) \wedge *f - \frac{1}{2} f \wedge f_{ab} *e^{ab} \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \delta e^c \wedge \left\{ \frac{1}{2} f_{ab} (\delta_c^a e^b - e^a \delta_c^b) \wedge *f - \frac{1}{2} f \wedge f^{ab} *e_{abc} \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \delta e^c \wedge \left(f_{cb} e^b \wedge *f - \frac{1}{2} f \wedge f^{ab} *e_{abc} \right) \\
&= -\frac{1}{4} \delta e^c \wedge \left(f_{cb} e^b \wedge *f - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} f^{ab} e^d \wedge f \right)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\delta_e C &= \delta \left(-\frac{1}{2} \mathcal{D}\phi \wedge * \mathcal{D}\phi \right) = \frac{1}{2} \delta e^c \wedge i_c \mathcal{D}\phi \wedge * \mathcal{D}\phi - \frac{1}{2} \mathcal{D}\phi \wedge \delta e^c \wedge i_c * \mathcal{D}\phi \\
&= \frac{1}{2} \delta e^c \wedge (i_c \mathcal{D}\phi \wedge * \mathcal{D}\phi + \mathcal{D}\phi \wedge i_c * \mathcal{D}\phi) \\
&= \frac{1}{2} \delta e^c \wedge (i_c e^b \mathcal{D}_b \phi \wedge * \mathcal{D}\phi + \mathcal{D}\phi \wedge i_c * (e^b \mathcal{D}_b \phi)) \\
&= \frac{1}{2} \delta e^c \wedge [\delta_c^b \mathcal{D}_b \phi \wedge * \mathcal{D}\phi + \mathcal{D}\phi \wedge i_c * e^b \mathcal{D}_b \phi] \\
&= \frac{1}{2} \delta e^c \wedge [\mathcal{D}_c \phi \wedge * \mathcal{D}\phi + \mathcal{D}\phi \wedge * (e_a \wedge e_c) \mathcal{D}^a \phi]
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
\delta_e D &= \delta \left(\frac{\lambda}{4} \phi^4 *1 \right) \\
&= \delta \left\{ \frac{\lambda}{4} \phi^4 \left(\frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right) \right\} \\
&= \frac{\lambda}{4} \phi^4 \delta e^c \wedge \left(\frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^d \right) \\
&= \delta e^c \wedge \left(\frac{\lambda}{4} \phi^4 *e_c \right)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

B^{ab} ayar alanına göre varyasyon neticesinde aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$\begin{aligned}\delta_B A &= \frac{1}{4\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} \delta \mathcal{J}^{ab} \wedge \mathcal{J}^{cd} = \frac{1}{2\kappa} \phi^2 \varepsilon_{abcd} (\mathcal{D} \delta B^{ab}) \wedge \mathcal{J}^{cd} \\ &= \mathcal{D}(\dots) + \frac{1}{2\kappa} \phi^2 \varepsilon_{abcd} \delta B^{ab} \wedge \mathcal{D}(\phi^2 \mathcal{J}^{cd})\end{aligned}\quad (4.67)$$

$$\delta_B B = 0, \quad \delta_B C = 0, \quad \delta_B D = 0 \quad (4.68)$$

χ ayar alanına göre varyasyon ile aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$\delta_\chi A = \frac{1}{4\kappa\gamma} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge \delta \mathcal{J}^{cd} = \frac{1}{\kappa} \delta \chi \wedge (\phi^2 \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge B^{cd}) \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}\delta_\chi B &= \delta \left(\frac{1}{4} f \wedge *f \right) = \frac{1}{4} (\delta \mathcal{D} \chi \wedge * \mathcal{D} \chi + \mathcal{D} \chi \wedge \delta * \mathcal{D} \chi) \\ &= \frac{1}{4} (\mathcal{D} \delta \chi \wedge * \mathcal{D} \chi + \mathcal{D} \chi \wedge * \mathcal{D} \delta \chi) = \frac{1}{2} (\mathcal{D} \delta \chi \wedge * \mathcal{D} \chi) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{D} (\delta \chi \wedge * \mathcal{D} \chi) + \frac{1}{2} \delta \chi \wedge \mathcal{D} * f\end{aligned}\quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}\delta_\chi C &= \delta \left(-\frac{1}{2} \mathcal{D} \phi \wedge * \mathcal{D} \phi \right) = -\frac{1}{2} \delta \mathcal{D} \phi \wedge * \mathcal{D} \phi - \frac{1}{2} \mathcal{D} \phi \wedge \delta * \mathcal{D} \phi \\ &= -\frac{1}{2} \delta \mathcal{D} \phi \wedge * \mathcal{D} \phi - \frac{1}{2} \mathcal{D} \phi \wedge * \delta (\mathcal{D} \phi) = -\delta \mathcal{D} \phi \wedge * \mathcal{D} \phi \\ &= \delta \chi \phi \wedge * \mathcal{D} \phi\end{aligned}\quad (4.71)$$

$$\delta_e D = 0 \quad (4.72)$$

ϕ alanına göre varyasyon aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$\delta_\phi A = \frac{1}{4\kappa\mu} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge \delta \mathcal{J}^{cd} = \delta \phi \left(\frac{1}{\kappa} \phi \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge F^{cd} \right) \quad (4.73)$$

$$\delta_\phi B = 0 \quad (4.74)$$

$$\delta_\phi C = \delta \left(-\frac{1}{2} \mathcal{D} \phi \wedge * \mathcal{D} \phi \right) = -\mathcal{D} \delta \phi \wedge * \mathcal{D} \phi = \mathcal{D} (-\delta \phi * \mathcal{D} \phi) + \delta \phi \mathcal{D} * \mathcal{D} \phi \quad (4.75)$$

$$\delta_\phi D = \delta \left(\frac{\lambda}{4} \phi^4 * 1 \right) = \delta \phi (\lambda \phi^3 * 1) \quad (4.76)$$

Bulunan ifadeler toparlandığında hareket denklemleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir,

$$\mathcal{D}(\phi^2 F^{cd}) - \phi^2 \mathcal{J}^{[c}_e \wedge B^{ed]} = 0 \quad (4.77)$$

$$\left(-\frac{\phi^2}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge e^d + \left[\mathcal{D}_c \phi \wedge * \mathcal{D} \phi + \mathcal{D} \phi \wedge * (e_a \wedge e_c) \mathcal{D}^a \phi \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(f_{cb} e^b \wedge * f - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} f^{ab} e^d \wedge f \right) + \frac{\lambda}{2} \phi^4 * e_c \right) = 0 \quad (4.78)$$

$$\mathcal{D}(\phi^2 \mathcal{J}^{cd}) = 0 \quad (4.79)$$

$$\frac{\phi^2}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge B^{cd} + \frac{1}{2} \mathcal{D} * f + \phi * \mathcal{D} \phi = 0 \quad (4.80)$$

$$\frac{\phi}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge F^{cd} + \mathcal{D} * \mathcal{D} \phi + \lambda \phi^3 * 1 = 0 \quad (4.81)$$

Ek-E: MAXWELL-WEYL GENİŞLETİLMİŞ EINSTEIN ALAN DENKLEMİ

Denklem (3.70)'te belirtilen Maxwell-Weyl Lagranjiyeninin $e^a(x)$ alanına göre varyasyonundan elde edilen Denklem (3.74) üzerinde aşağıdaki gibi isimlendirme yapılır,

$$\left\{ \underbrace{-\frac{\phi^2}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge e^d}_{E1} + \underbrace{\left[\mathcal{D}_c \phi \wedge * \mathcal{D} \phi + \mathcal{D} \phi \wedge * (e_a \wedge e_c) \mathcal{D}^a \phi \right]}_{E2} \right. \\ \left. - \underbrace{\frac{1}{2} \left(f_{cb} e^b \wedge * f - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} f^{ab} e^d \wedge f \right)}_{E3} + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \phi^4 * e_c}_{E4} \right\} = 0 \quad (4.82)$$

Yukarıdaki bütün parçalar sağdan e^v ile çarpılır ve Denklem (1.86), Denklem (4.4) ve Hodge dual operatörünün bazı özellikleri kullanıldığında sırasıyla aşağıdaki neticeler elde edilir,

$$\begin{aligned} E1 \wedge e^v &= -\frac{\phi^2}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} \wedge e^d \wedge e^v \\ &= -\frac{\phi^2}{\kappa} \varepsilon_{abcd} \mathcal{J}^{ab} e^e \wedge e^f \wedge e^d \wedge e^v \\ &= \frac{\phi^2}{\kappa} \mathcal{J}^{ab}{}_{ef} (\varepsilon_{abcd} \varepsilon^{efvd}) \sqrt{-g} d^4 x \\ &= \frac{2\phi^2}{\kappa} \left(\mathcal{J}^v{}_c - \frac{1}{2} \delta^v{}_c \mathcal{J} \right) \sqrt{-g} d^4 x \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} E2 \wedge e^v &= \left\{ \mathcal{D}_c \phi \wedge * \mathcal{D} \phi + \mathcal{D} \phi \wedge * (e_a \wedge e_c) \mathcal{D}^a \phi \right\} \wedge e^v \\ &= \left\{ \mathcal{D}_c \phi * (e_r \mathcal{D}^r \phi) + \frac{1}{2} \mathcal{D}^a \phi e^b \mathcal{D}_b \phi \wedge * (e_a \wedge e_c) \right\} \wedge e^v \\ &= \left\{ \frac{1}{3!} \mathcal{D}_c \phi (\mathcal{D}^r \phi) \varepsilon_{rstu} e^s \wedge e^t \wedge e^u + \frac{1}{2} \mathcal{D}^a \phi \mathcal{D}_b \phi \varepsilon_{acgh} e^b \wedge e^g \wedge e^h \right\} \wedge e^v \\ &= \left\{ \frac{1}{3!} \mathcal{D}_c \phi (\mathcal{D}^r \phi) \varepsilon_{rstu} \varepsilon^{stuv} + \frac{1}{2} \mathcal{D}^a \phi \mathcal{D}_b \phi \varepsilon_{acgh} \varepsilon^{bghv} \right\} \sqrt{-g} d^4 x \\ &= 2 \left\{ \mathcal{D}^v \phi \mathcal{D}_c \phi - \frac{1}{2} \delta^v{}_c (\mathcal{D}^b \phi \mathcal{D}_b \phi) \right\} \sqrt{-g} d^4 x \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned}
E3 \wedge e^v &= -\frac{1}{2} \left(f_{cb} e^b \wedge *f - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} f^{ab} e^d \wedge f \right) \wedge e^v \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ f_{cb} e^b \wedge * \left(\frac{1}{2} f_{mn} e^{mn} \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} f^{ab} e^d \wedge \left(\frac{1}{2} f_{rs} e^r \wedge e^s \right) \right\} \wedge e^v \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} f_{cb} e^b \wedge f^{mn} * e_{mn} - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcd} f^{ab} f_{rs} e^d \wedge e^r \wedge e^s \right\} \wedge e^v \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} f_{cb} f^{mn} e^b \wedge \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{mnrs} e^r \wedge e^s \right) - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcd} f^{ab} f_{rs} e^d \wedge e^r \wedge e^s \right\} \wedge e^v \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} f_{cb} f^{mn} \varepsilon_{mnrs} e^b \wedge e^r \wedge e^s \wedge e^v - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcd} f^{ab} f_{rs} e^d \wedge e^r \wedge e^s \wedge e^v \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} f_{cb} f^{mn} \varepsilon_{mnrs} \varepsilon^{brsv} + \frac{1}{4} f^{ab} f_{rs} \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{rsvd} \right) \sqrt{-g} d^4 x \\
&= -\frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{2} f_{cb} f^{mn} (\delta^b_m \delta^v_n - \delta^b_n \delta^v_m) \\ & -\frac{1}{4} f^{ab} f_{rs} \left\{ \delta^r_a (\delta^s_b \delta^v_c - \delta^s_c \delta^v_b) - \delta^r_b (\delta^s_a \delta^v_c - \delta^s_c \delta^v_a) \right. \\ & \quad \left. + \delta^r_c (\delta^s_a \delta^v_b - \delta^s_b \delta^v_a) \right\} \end{aligned} \right] \sqrt{-g} d^4 x \\
&= -\frac{1}{2} \left(-f_{cb} f^{bv} - \frac{1}{2} f^{ab} f_{ab} \delta^v_c + f^{av} f_{ac} \right) \sqrt{-g} d^4 x \\
&= \left(f_{cb} f^{bv} + \frac{1}{4} f^{ab} f_{ab} \delta^v_c \right) \sqrt{-g} d^4 x
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
E4 \wedge e^v &= \frac{\lambda}{2} \phi^4 * e_c \wedge e^v = \frac{\lambda}{2} \phi^4 \left(\frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^d \right) \wedge e^v \\
&= \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{3!} \right) \phi^4 \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{abdv} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{3!} \right) \phi^4 (3! \delta^v_c) \sqrt{-g} d^4 x \\
&= \frac{\lambda}{2} \phi^4 \delta^v_c \sqrt{-g} d^4 x
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Bu neticeler Denklem (4.82)'de yerine yazılır ve düzenlenirse aşağıdaki yapı elde edilir,

$$\mathcal{J}^a_b - \frac{1}{2} \delta^a_b \mathcal{J} = -\frac{\kappa}{2} \phi^{-2} \left\{ \begin{aligned} & 2\mathcal{D}^a \phi \mathcal{D}_b \phi - \delta^a_b \left(\mathcal{D}^c \phi \mathcal{D}_c \phi - \frac{\lambda}{2} \phi^4 \right) \\ & + \left(f^{ac} f_{cb} + \frac{1}{4} \delta^a_b f^{cd} f_{cd} \right) \end{aligned} \right\} \tag{4.87}$$

Bu son ifadeyi uzay-zaman indisleri ile yazabilmek için F^{ab} eğrilğine ait ifadeleri aşağıdaki şekilde bulabiliriz,

$$F^{ab} = e^\mu_a e^\nu_b F^{ab} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu}_{\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (4.88)$$

Şeklinde yazabiliriz, ayrıca aynı ifade aşağıdaki biçimde yazılabilir,

$$\begin{aligned} e^\mu_a e^\nu_b F^{ab} &= e^\mu_a e^\nu_b \left(\mathcal{D}B^{ab} - \frac{1}{2} e^a \wedge e^b \right) \\ &= e^\mu_a e^\nu_b \left(\frac{1}{2} \mathcal{D}_{[\rho} B_{\sigma]}^{ab} - \frac{1}{4} e_{[\rho}^a e_{\sigma]}^b \right) dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= \frac{1}{2} \left(e^\mu_a e^\nu_b \mathcal{D}_{[\rho} B_{\sigma]}^{ab} - \frac{1}{2} (\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho) \right) dx^\rho \wedge dx^\sigma \end{aligned} \quad (4.89)$$

Ve son iki netice karşılaştırılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir,

$$F^{\mu\nu}_{\rho\sigma} = e^\mu_a e^\nu_b \mathcal{D}_{[\rho} B_{\sigma]}^{ab} - \frac{1}{2} (\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho) \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} F^\mu_\rho &= F^{\mu\nu}_{\rho\nu} = e^\mu_a e^\nu_b \mathcal{D}_{[\rho} B_{\nu]}^{ab} - \frac{1}{2} (\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\nu - \delta^\mu_\nu \delta^\nu_\rho) \\ &= e^\mu_a e^\nu_b \mathcal{D}_{[\rho} B_{\nu]}^{ab} - \frac{3}{2} \delta^\mu_\rho \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$F = F^\mu_\mu = e^\mu_a e^\nu_b \mathcal{D}_{[\mu} B_{\nu]}^{ab} - 6 \quad (4.92)$$

Denklem (4.87)'nin sol tarafı $\mathcal{J}^{ab} = R^{ab} + 2\mu\phi^2 F^{ab}$ dikkate alınarak açıldığında Denklem (4.93)'teki ifade elde edilir,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu_\alpha \mathcal{J} &= R^\mu_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu_\alpha R + 2\mu\phi^2 \left(F^\mu_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu_\alpha F \right) \\ &= R^\mu_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu_\alpha R + 3\mu\phi^2 \delta^\mu_\alpha + 2\mu\phi^2 \left\{ e^\mu_a e^\nu_b \mathcal{D}_{[\alpha} B_{\nu]}^{ab} - \frac{1}{2} \delta^\mu_\alpha (e^\rho_a e^\sigma_b \mathcal{D}_{[\rho} B_{\sigma]}^{ab}) \right\} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Denklem (4.93), Denklem (4.87)'de yerine yazıldığında ise Denklem (4.94) elde edilir,

$$R^\mu{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha R + 3\mu\phi^2 \delta^\mu{}_\alpha = -2\mu\phi^2 T(B)^\mu{}_\alpha - \kappa\phi^{-2} \left\{ T(\phi)^\mu{}_\alpha + \frac{1}{2} T(f)^\mu{}_\alpha \right\} \quad (4.94)$$

Buradaki alanların açık ifadesi ise aşağıdaki şekildedir,

$$\begin{aligned} T(B)^\mu{}_\alpha &= e^\mu{}_a e^\nu{}_b \mathcal{D}_{[\alpha} B_{\nu]}{}^{ab} - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha \left(e^\rho{}_a e^\sigma{}_b \mathcal{D}_{[\rho} B_{\sigma]}{}^{ab} \right) \\ T(\phi)^\mu{}_\alpha &= \mathcal{D}^\mu \phi \mathcal{D}_\alpha \phi - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\alpha \left(\mathcal{D}^\gamma \phi \mathcal{D}_\gamma \phi - \frac{\lambda}{2} \phi^4 \right) \\ T(f)^\mu{}_\alpha &= f_{\beta\alpha} f^{\mu\beta} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\alpha f^{\gamma\delta} f_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Ek-F: SÜPER MAXWELL WEYL LAGRANJİYENİ

Aşağıda verildiği gibi Denklem (3.88)'de sadece paranez içindeki terimleri dikkate alacağız.

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \phi^2 \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge F^{cd} + 4\phi^2 \bar{\Xi} \gamma_5 \wedge \Psi \quad (4.96)$$

Bu Lagranjiyendeki terimleri açarsak,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa} \int \left\{ \phi^2 \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge \mathcal{D}B^{cd} - \frac{1}{2} \phi^2 \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - \frac{1}{2} \phi^2 \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge (\bar{\xi} \sigma^{cd} \wedge \psi) \right\} \\ &\quad + 4\phi^2 \mathcal{D}\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi + 4\phi^2 \bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge \Psi \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int \left\{ -\frac{1}{2} \phi^2 (\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - 8\bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge \mathcal{D}\psi) + \mathcal{D}(\phi^2 \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge B^{cd}) \right\} \\ &\quad - \mathcal{D}\phi^2 \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge B^{cd} - \frac{1}{2} \phi^2 \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge (\bar{\xi} \sigma^{cd} \wedge \psi) + 4\phi^2 \mathcal{D}\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi \end{aligned} \quad (4.97)$$

elde edilir. Buradaki son terimi Denklem (3.87)'deki beşinci Bianchi özdeşliği ve

$\gamma_5 \sigma_{ab} = \frac{i}{2} \varepsilon_{abcd} \sigma^{cd}$ eşitliğini kullandığımızda aşağıdaki gibi açabiliriz,

$$\begin{aligned} 4\phi^2 \mathcal{D}\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi &= \mathcal{D}(4\phi^2 \bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi) - 4\mathcal{D}\phi^2 \bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi + 4\phi^2 \bar{\xi} \gamma_5 \wedge \mathcal{D}\Psi \\ &= \mathcal{D}(4\phi^2 \bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi) - 4\mathcal{D}\phi^2 \bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi - i\phi^2 R^{ab} \wedge (\bar{\xi} \gamma_5 \sigma_{ab} \wedge \psi) \\ &= \mathcal{D}(4\phi^2 \bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi) - 4\mathcal{D}\phi^2 \bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi + \frac{1}{2} \phi^2 \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge (\bar{\xi} \sigma^{cd} \wedge \psi) \end{aligned} \quad (4.98)$$

Bu ifade Denklem (4.97)'de yerine yazılır ve tam türevler ihmal edilirse eylem aşağıdaki biçimi alır,

$$S = -\frac{1}{4\kappa} \int \left\{ \phi^2 (\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d - 8\bar{\psi} \wedge e_a \gamma^a \gamma_5 \wedge \mathcal{D}\psi) \right\} \\ 2\phi \mathcal{D}\phi (\varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge B^{cd} + 4\bar{\xi} \gamma_5 \wedge \Psi) \quad (4.99)$$

Burada süper kütleçekiminin anlatıldığı bölümdeki işlemler dikkate alındığında yukarıdaki Lagranjiyenin $\mathcal{D}\phi=0$ şartında sMW(1,3) grubunun yerel dönüşümleri altında değişmez kaldığı görülecektir.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

- [1] Cebecioğlu O., **Kibaroğlu S.**, Gauge Theory of Maxwell-Weyl Group, *Physical Review D*, DOI: 10.1103/PhysRevD.90.084053.



ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve ortaokul öğrenimini İstanbul'da, lise öğrenimini Kocaeli'de tamamladı. Daha sonra sırası ile 2005 - 2007 yılları arasında Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Teknolojisi ve Programlama bölümünü, 2008 - 2011 yılları arasında Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik bölümünü, 2011 - 2013 yılları arasında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik bölümü Matematiksel Fizik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimini tamamladı ve 2013 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik bölümünde Matematiksel Fizik Ana Bilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı. Doktora tezinin bir kısmının Tübitak tarafından desteklenmesi sayesinde, Mayıs 2016 - Şubat 2017 tarihleri arasında Polonya'da Wrocław Üniversitesi Teorik Fizik Enstitüsü'nde araştırmacı olarak yer aldı. Bunların dışında 2007 - 2011 yılları arasında bir yazılım firmasında yazılım uzmanı olarak çalıştı.