

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**TRANSFORMASYON GRAFLARDA ORTALAMA DÜŞÜK BAĞLANTILILIK  
VE KOMŞU İZOLE SAÇILIM SAYISI**

**Büşra AÇAN**

**Danışman  
Yrd. Doç. Dr. Ersin ASLAN**



**MANİSA-2017**

**Büşra AÇAN**

**TRANSFORMASYON GRAFLARDA ORTALAMA DÜŞÜK BAĞLANTILILIK VE KOMŞU  
İZOLE SAÇILIM SAYISI**

**2017**

## TEZ ONAYI

**Büşra AÇAN** tarafından hazırlanan "**GRAFLARDA ORTALAMA DÜŞÜK BAĞLANTILILIK DEĞERİ ÜZERİNE**"adlı tez çalışması 29/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

**Danışman**

**Yrd. Doç. Dr. Adı SOYADI**

Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**

**Prof. Dr. Mehmet SEZER**

Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**

**Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ**

Ege Üniversitesi

## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**Büşra AÇAN**



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
İÇİNDEKİLER .....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	II-III
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IV
TABLO DİZİNİ .....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Graf Teori ve Uygulama Alanları .....	1
1.2. Tanımlar .....	4
1.3. Transformasyon Graflar.....	6
2. KOMŞU İZOLE SAÇILIM SAYISI .....	7
2.1. Transformasyon Grafların Komşu İzole Saçılım Sayısı.....	12
3. AVERAGE LOWER CONNECTIVITY .....	16
3.1. Tanım ve Teoremler .....	16
3.2. Transformasyon Grafların Ortalama Düşük Bağlantılılık Değeri.....	19
4. SONUÇ .....	21
KAYNAKLAR .....	25
ÖZGEÇMİŞ .....	26

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$G$	Bağlantılı graf
$E(G)$	Bir $G$ grafının ayrıtlar kümesi
$V(G)$	Bir $G$ grafının tepeler kümesi
$n$	Bir $G$ grafının tepe sayısına bağlı seviyesi
$v$	Bir grafın tepesi
$e$	Bir grafın ayrıtı
$X$	Kesim kümesi
$ X $	Kesim kümesinin eleman sayısı
$\deg(V)$	$v$ tepesinin derecesi
$\Delta(G)$	Bir $G$ grafının en büyük tepe derecesi
$\delta(G)$	Bir $G$ grafının en küçük tepe derecesi
$I(G)$	Bir $G$ grafının tepe bütünlük sayısı
$\alpha(G)$	Bağımsızlık sayısı
$w(G/S)$	Etkilenmiş bileşen sayısı
$w(G-S)$	Bileşen sayısı
$m(G/S)$	Etkilenmiş en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı
$m(G-S)$	En büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı
$i(G_n / X)$	Bir $G$ grafından geriye kalan izole tepe sayısı
$k(G)$	Bağlantılılık sayısı
$sc(G)$	Saçılım sayısı
$\lambda(G)$	Ayrıtlar bağlantılılık sayısı
$NC(G)$	Komşu bağlantılılık sayısı
$NIS(G)$	Komşu izole dağılım sayısı
$VNC(G)$	Komşu tepe bağlantısı
$VNI(G)$	Komşu tepe bütünlük sayısı
$P_n$	$n$ tepeli yol graf

$C_n$	n tepeli çevre graf
$K_n$	n tepeli tam graf
$K_{1,n}$	n+1 tepeli yıldız graf
$W_{1,n}$	n+1 tepeli tekerlek graf
$G_n$	2n+1 tepeli gear graf
$G^{xyz}$	G transformasyon grafi
$P_n^{xyz}$	P transformasyon grafi
$C_n^{xyz}$	C transformasyon grafi
$P_n^{xyz}/X$	$P_n$ grafindan geriye kalan alt graf
$C_n^{xyz}/X$	$C_n$ grafindan geriye kalan alt graf

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 1.1. $C_5$ ve $P_5$ grafları .....	2
Şekil 1.2. $C_5$ grafinin transformasyonu $C_5^{-++}$ .....	6
Şekil 2.1. $P_5$ yol graf .....	7
Şekil 3.1. $P_3^{+++}$ grafinin $K_{av}(P_3^{+++})$ değeri.....	16



## TABLO DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Tablo 4.1. $P_n^{+++}$ yol grafının NIS ve $K_{av}$ değerleri.....	21
Tablo 4.2. $C_n^{+++}$ çevre grafının NIS ve $K_{av}$ değerleri .....	22
Tablo 4.3. $P_n^{-++}$ yol grafının NIS ve $K_{av}$ değerleri.....	23
Tablo 4.4. $C_n^{-++}$ çevre grafının NIS ve $K_{av}$ değerleri.....	23



## TEŞEKKÜR

Çalıőmamın her aőamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam SayınYrd. Doç. Dr. Ersin ASLAN' a, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aőamalarında yardımcı olan, desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili arkadaőım Ahım Arziye AKAR'a, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Büşra AÇAN  
Manisa, 2017



## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### TRANSFORMASYON GRAFLARDA ORTALAMA DÜŞÜK BAĞLANTILILIK VE KOMŞU İZOLE SAÇILIM SAYISI

Büşra AÇAN

Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ersin ASLAN

Bir ağın (iletişim, taşıma, internet,vb.) merkezleri ya da bağlantı hatları bazı durumlarda zarara uğrayabilir. Bu durumlar, ağda bazı sorunlar ortaya çıkmasına sebep olabilir. Burada en çok merak edilen soru ise; bir ağda iletişim durana kadar ağın ne kadar sürede nasıl dayanacağıdır. Zedelenebilirlik, iletişim ağında belli merkezlerin ya da bağlantıların zarar görmesinden sonra, iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücünün hesaplanmasına zedelenebilirlik değeri denir.

Bu ağın dayanıklılığını tanımlamak için graf teoride ilk olarak bağlantılılık değeri (connectivity) tanımlanmıştır.

Bu çalışmada bazı grafların transformasyon hallerinin ortalama düşük bağlantılılık değerleri ile komşu izole saçılım sayıları hesaplanmıştır. Son bölümde bu parametreler arasındaki ilişkiler gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler: Zedelenebilirlik, Bağlantılılık değeri, Ortalama Düşük Bağlantılılık Değeri, Transformasyon Graflar, Komşu İzole Saçılım Sayısı**  
2017, 26 sayfa

## **ABSTRACT**

**M.Sc. Thesis**

### **TRANSFORMATION OF THE GRAPHS AVERAGE LOWER CONNECTIVITY AND NEIGHBOR İZOLETED SCATTERING NUMBER**

**Büşra AÇAN**

**Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assis. Prof. Dr. Ersin ASLAN**

A network (communication, mobile, internet vb ) centers or connection lines may be damaged in some cases may come in. These situations can cause some extreme in the network to appear. Most curious here the question is ho long the network will last until communication is stopped. After damage to certain centers or badants in the network.

The network in the middle of the communicaation until the communication is interrupted can be damaged without calculating your strength. In order to define the vulnerability of this network .

In this study, connectivity of linkage value and avarege lower connectivity value, the adjacent peak number transformations of the graphs and the average lower connectivity values were found.

**Keywords: Vulnerability, Scattering number, Transformation Graph, Neighbor Izoleted Scattering Number**

**2017, 26 pages**

# 1.GİRİŞ

## 1.1 Graf Teori ve Uygulama Alanları

Graf teori uygulamaları modern hayatın karmaşık ve geniş kapsamlı birçok problemin çözümü için kullanılmaktadır. Bu uygulamalar; ekonomi, yönetim bilimi, satış pazarlama, bilgi iletimi, taşıma planlaması gibi alanları kapsamaktadır. Ayrıca kimya, elektrik mühendisliği, mimarlık gibi sayısal alanlarda da uygulamaları vardır. Graf teorisi problemleri tanımlama ve yapısal olarak ilişkileri belirlemede de faydalıdır. Graf teori için önemli konulardan biri de zedelenebilirlik kavramıdır. Bir iletişim ağında belli merkezlerin ya da bağlantıların zarar görmesinden sonra, iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücünün hesaplanmasına zedelenebilirlik değeri denir. Zedelenebilirlik kavramını aşağıdaki örnek üzerinden rahatça anlayabiliriz.

Örneğin, Manisa ilinin su şebeke ağı, çeşitli su şebekesi merkezlerinden (depo/baraj) ve merkezleri birbirine bağlayan borulardan oluşmaktadır. Bu şekilde Manisa ilinin su ihtiyacı karşılanmaktadır. Bu şebekenin bazı merkezlerinde ya da borularda zarar meydana geldiğinde oluşan zararın araştırılması gerekmektedir. Oluşan zararı incelemek için aşağıdaki soruların yanıtı aranmalıdır. Sorulabilecek bazı sorular şunlardır:

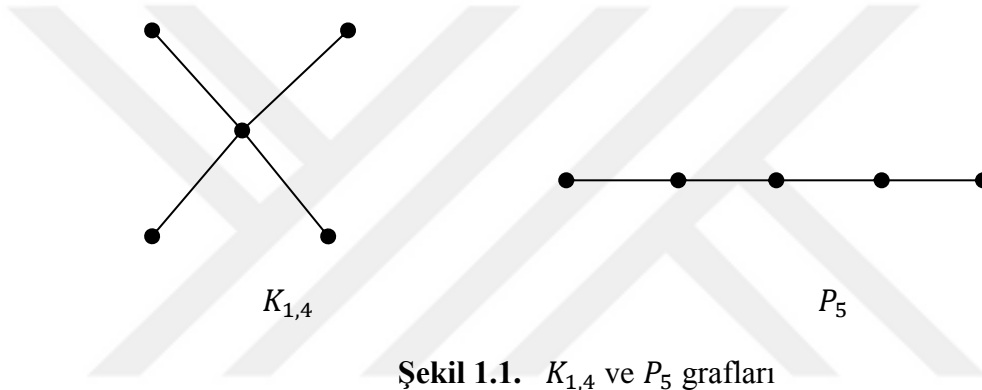
1. Zarar görmüş olan su şebekesi merkezlerinin ve onlara komşu olan merkezlerin sayısı kaçtır?
2. Su şebekesi zarar gördüğünde kaç alt şebekeye ayrılmıştır?
3. Su dağıtımının kendi içerisinde devam ettiği alt şebeke sayısı kaçtır?
4. Su dağıtımının kendi içerisinde devam ettiği en çok elemana sahip alt şebekenin eleman sayısı kaçtır?
5. Zarar gören şebekelere komşu olan şebekedeki elemanların sayısı kaçtır?
6. İşlevini yerine getiremeyen şebekedeki eleman sayısı kaçtır?
7. Su şebekesini eski haline getirmek için ne kadar süre gereklidir?
8. Zarar gören şebekedeki elemanlara ve onlara bitişik olan şebekelerdeki elemanlar ağdan çıkarıldığında, zarara uğrayan su şebekesindeki elemanların sayısı kaçtır?
9. Buradaki her bir sorunun yanıtı ağın uğradığı zarar hakkında bilgi verecektir.

Yukarıdaki ilk olarak merak edilen soru “Zarar görmüş olan su şebekesi merkezlerinin ve onlara komşu olan merkezlerin sayısı kaçtır?” sorusudur. Bu sorunun yanıtı için bir ağ, merkezler tepelere ve bağlantılar ayrıtlara denk gelecek şekilde graf ile modellenir ve bu ağı tasvir eden bir  $G$  grafının zedelenebilirlik değerini incelemek için bağlantılılık sayısı (connectivity) tanımlanmıştır .

**Tanım 1.1.** Bağlantılı (connected) bir  $G$  grafını bağlantısız bir graf ya da izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan atılan minimum tepe sayısına bağlantılılık sayısı (connectivity) denir ve  $k(G)$  ile gösterilir [7].

$$k(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\}$$

Burada, bağlantılılık sayısının zedelenebilirlik için gerekli olup olmadığı sorulur ise yukarıdaki diğer sorulardan da görülebileceği gibi, tek başına bağlantılılık sayısına bağlı kalarak bir grafın zedelenebilirlik değerini ölçmenin yeterli olmayacağı açıktır. Bu durumu örneğin Şekil 1.1’de 5 tepeli  $K_{1,4}$  yıldız grafi ve 5 tepeli  $P_5$  yol grafını ele alalım.



Şekil 1.1.  $K_{1,4}$  ve  $P_5$  grafları

$K_{1,4}$  ve  $P_5$  graflarından görüleceği gibi  $k(K_{1,4}) = k(P_5) = 1$  olur. Her iki grafın bağlantılılık sayısı 1 olduğundan, bu iki graf arasında bağlantılılık sayısı ayırt edici bir ölçüm olmayacaktır. Bu yüzden Şekil 1.1’deki grafların zedelenebilirliği için başka ölçümlere ihtiyacımız olacaktır. Buradan hareketle yukarıda soruları yanıtlamak için bazı önemli zedelenebilirlik ölçümleri tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları: bağlantılılık sayısı (connectivity), tepe bütünlük değeri (integrity), saçılım sayısı (scattering) dır. Bu parametrelerin tanımını aşağıda verilecektir.

**Tanım 1.2.**  $G$  bir graf ve  $G$  nin herhangi bir alt kümesi  $S$ , kesim küme olsun.  $G - S$  grafindaki kalan bileşen sayısı,  $w(G - S)$  olmak üzere  $G$  grafın scattering sayısı

$$sc(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G - S) - |S| : S \subset V(G) \text{ ve } w(G - S) > 1\}$$

olarak tanımlanır [11].

**Tanım 1.3.** Bir  $G$  grafından,  $S \subseteq V(G)$  tepeler kümesi atıldığında, geriye kalan  $G - S$  grafının en büyük boyutlu bileşenin tepesi sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere,  $G$  grafının tepesi bütünlüğü sayısı

$$I(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G - S)\} \text{ 'dir.}$$

Herhangi bir ağa karşılık gelen bir  $G$  grafında tepesi bütünlüğü ve tepesi bağlantılılığı değeri var olan grafa zedelenebilirlik değeri ölçmektedir. Bu iki ölçüm, graftan atılan tepelerin komşuları üzerindeki etkiyle ilgilenebilir. Bu ağdaki merkezlerin zarar görmesi sonucunda, bu merkezlerin komşularının da etkilendiği bir ağ casus ağı (spy network) olarak adlandırılır. Çünkü, bir casus ağı ele geçirildiğinde, bu casus ağı ile etkileşimde olan kişilerin de güvenliği artık tehlikeydedir. Bu nedenle var olan graf bu ağı temsil ettiğinden, sadece tepeleri yerine, tepelerle birlikte bu tepelere komşu olan tepelerde graftan atılır. Buradan hareketle, komşu bütünlüğü kavramı, Cozzens ve Wu tarafından 1996 yılında tanımlanmıştır.

Tanım için ilk olarak birkaç bilgiye gereksinim vardır.  $G$  grafının herhangi bir  $u$  tepesinin açık komşuluğu,  $N(u) = \{v \in V(G) | v \neq u, u \text{ ve } v \text{ komşu}\}$  ve kapalı komşuluğu,  $N[u] = \{u\} \cup N(u)$  şeklinde tanımlanır.  $N[u]$  kapalı komşuluğu graftan atılan  $u$  tepesine karşılık gelen tanım subverted tepedir. Tüm tepeleri subverted olan  $X = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  kümesine,  $G$  grafının subversion stratejisi denir.  $G/X$ ,  $X$  kümesinin tüm tepeleri graftan atıldıktan sonra geriye kalan grafi  $c(G/X)$  ise geriye kalan bu graftaki en büyük bileşenin tepesi sayısını ifade eder.  $X$  kümesindeki tüm tepeler, graftan subverted edildiğinde geriye kalan graf, bağlantısız bir graf, bir klik ya da boş graf olabilir [6].

Casus ağları ile ilgili güvenlik açıkları parametreleri aşağıdaki gibidir.

**Tanım 1.4.**  $G$  grafının komşu tepesi bağlantı değeri, alt stratejisi  $X$  tepelerinin alt stratejisi olmak üzere

$$VNC(G) = \min_{X \subseteq V(G)} \{|X|\}$$

Şeklinde ifade edilir [3].

**Tanım 1.5.** Herhangi bir  $G$  grafından tepelere komşu olan  $X \subseteq V(G)$  tepeler kümesi atıldığında, geriye kalan  $G - X$  grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı  $m(G - X)$  olmak üzere,  $G$  grafının komşu tepe bütünlük sayısı

$$VNI(G) = \min_{X \subseteq V(G)} \{|X| + m(G - X)\}$$

şeklinde ifade edilir [3].

**Tanım 1.6.** Herhangi bir  $G$  grafında tepe varolan tepelerin ve bu tepelere komşu olan diğer bağlantılı tepelerin dağılım sayısını bulmak için komşu tepe dağılım sayısı

$$VNS(G) = \max\{w(G/X) - |X| : c \geq 1\}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki  $w(G/X)$ ;  $G$  grafından atılan kesim kümesi olan  $X$  için yani  $G/X$ , bağlı bileşen sayısını ifade eder [3].

## 1.2. TANIMLAR

**Tanım 1.2.1.** Bir  $G$  grafının bazı tepe veya tepelerini graftan çıkardığımızda grafın bileşenlerinin sayısı artıyorsa bu kümeye  $G$  grafının kesim kümesi denir ve  $S$  ile gösterilir kesim kümesinin eleman sayısı ise  $|S|$  ile gösterilir [11].

**Tanım 1.2.2.** Herhangi bir  $G$  grafının bir  $v$  tepesine bağlı ayrıtların sayısına, o tepenin derecesi denir ve  $\deg(v)$  ile gösterilir [11] .

**Tanım 1.2.3.** Bir  $G$  grafının bir  $v$  tepesine bağlı ayrıtların sayısı sıfır ise o tepeye izole tepe denir [11] .

**Tanım 1.2.4.**  $G$  bir graf ve  $G$  nin tepeler kümesi  $V(G)$  olsun.  $S \subseteq V(G)$  olmak üzere  $S$  kümesindeki hiçbir tepe çifti  $G$  grafında bir ayrıtla birleştirilmemiş ise bu kümeye bağımsız küme denir. Bir  $G$  grafının birden fazla bağımsız kümesi olabilir. Bu kümeler içinde en çok elemana sahip olan kümenin eleman sayısına da grafın bağımsızlık sayısı denir  $\alpha(G)$  ile gösterilir. [7] .

**Tanım 1.2.5.** Bir grafın tepe dereceleri içinde en küçüğüne grafın minimum tepe derecesi denir ve  $\delta(G)$  ile gösterilir [11].

**Tanım 1.2.6.** Bir grafın tepe dereceleri içinde en büyüğüne grafın maksimum tepe derecesi denir ve  $\Delta(G)$  ile gösterilir [11].

**Tanım 1.2.7.** [4]  $G_1$  ve  $G_2$  iki graf olsun. İki grafın birleşimi (union)  $G = G_1 \cup G_2$ , tepeler kümesi  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  ve ayrıtlar kümesi  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ 'dir [4] .

**Tanım 1.2.8.**Başlangıç ve bitiş tepeleri tek dereceli olup diğer tepeleri iki dereceli olan grafa yol graf (path graph) denir.  $n$  bir tam sayı olmak üzere  $P_n$  şeklinde gösterilir [11].

**Tanım 1.2.9.** Herhangi bir grafın tüm tepelerinin derecesi iki ise bu grafa çevre graf denir ve  $C_n$  ile gösterilir [11].

**Tanım 1.2.10.**  $n + 1$  tepeli bir grafın  $n$  tane tepesinin derecesi bir ve merkez tepesindeki derecesi  $n$  olmak üzere  $n + 1$  tepeli grafa yıldız (star) graf denir.  $K_{1,n}$  ile gösterilir [11] .

**Tanım 1.2.11.**  $n$  tepeli bir çevre grafın, her bir tepesine komşu olacak şekilde merkezine bir tepe eklenmesiyle oluşan grafa tekerlek graf denir.  $W_{1,n}$  ile gösterilir [11].

**Tanım 1.2.12.**Bir  $G$  grafının her bir tepesi, grafın diğer tepelerine komşu ise buna komşu graf (complete graph) denir ve  $n$  tepeli bir tam graf  $K_n$  ile gösterilir [11] .

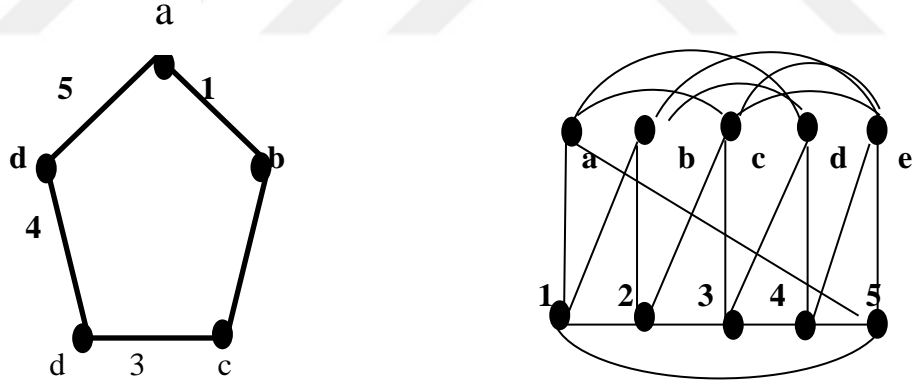
### 1.3. TRANSFORMASYON GRAFLAR

Bu bölümde öncelikle  $G^{xyz}$  transformasyon grafinin tanımı verilmiştir. Daha sonra var olan  $G$  grafinin örnekleri olarak  $P_n$  ve  $C_n$  graflarının transformasyon hali olan  $P_n^{+++}$ ,  $P_n^{-++}$ ,  $C_n^{+++}$ ,  $C_n^{-++}$  graflarının komşu izole saçılım sayıları hesaplanmıştır.

**Tanım 1.3.1**  $G = (V(G), E(G))$  bir graf ve  $x, y, z$  değerleri  $+$  veya  $-$  değerlerini alabilen üç değişken olsun.  $G^{xyz}$  transformasyon grafinin tepeler kümesi  $V(G) \cup E(G)$  olan ve  $\alpha, \beta \in V(G) \cup E(G)$  olmak üzere  $\alpha$  ve  $\beta$  nın  $G^{xyz}$  de komşu olması için gerek ve yeter koşul [5]:

1.  $\alpha, \beta \in V(G)$  olmak üzere  $\alpha$  ve  $\beta$ ,  $x = +$  ise  $G$  de komşudur;  $\alpha$  ve  $\beta$ ;  $x = -$  ise  $G$  de komşu değildir.
2.  $\alpha, \beta \in E(G)$  olmak üzere  $\alpha$  ve  $\beta$ ,  $y = +$  ise  $G$  de komşudur;  $\alpha$  ve  $\beta$ ;  $y = -$  ise  $G$  de komşu değildir.
3.  $\alpha \in V(G), \beta \in E(G)$  olmak üzere  $\alpha$  ve  $\beta$ ,  $z = +$  ise  $G$  de ilişkilidir;  $\alpha$  ve  $\beta$ ;  $z = -$  ise  $G$  de ilişkili değildir.

Bunu örnek parametremiz,  $C_5$  grafinin transformasyon hali olan  $C_5^{-++}$  grafında Şekil 1.2.'de gösterelim



Şekil 1.2.  $C_5$  grafinin transformasyonu  $C_5^{-++}$

## 2. KOMŞU İZOLE SAÇILIM SAYISI

Bir  $G$  grafinin bağlantılık sayısı ve scattering sayısının tanımında, graftan sadece zarar gören tepeler ve bu tepelere bağlı olan ayrıtlar silinmektedir. Ancak komşu izole saçılım sayısı; grafta bazı merkezler zarar gördüğünde, bu merkezlerin kapalı komşuluğunun da zarar gördüğünü kabul ederek, izole tepe sayısı ile graftan atılan tepe sayısı bulunup, maximum değerinin alınmasına dayanır.

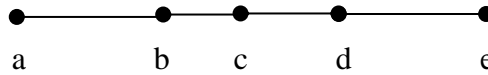
**Tanım 2.1.**  $G$  bir graf ve  $G$  nin herhangi bir alt strateji kümesi  $X$  olsun.  $G/X$  grafindaki kalan izole bileşen sayısı,  $i(G/X)$  olmak üzere  $G$  grafinin komşu izole saçılım sayısı

$$NIS(G) = \max\{i(G/X) - |X| : i(G/X) \geq 1\}$$

olarak tanımlanır [3].

Bu tezde ikinci bölümde  $P_n^{+++}$ ,  $C_n^{+++}$ ,  $P_n^{-++}$ ,  $C_n^{-++}$  transformasyon grafları hakkında komşu izole saçılım sayıları incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise grafların bağlantılılık değerleri ele alınıp, parametreleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Yapılan işlemler sonucunda elde edilen transformasyon grafların ortalama düşük bağlantılılık değerleri incelenmiştir. Son bölümde ise ikinci ve üçüncü bölümdeki parametreler yardımıyla ortalama düşük bağlantılılık değeri ve komşu izole saçılım sayılarının karşılaştırılması yapılmıştır.

Aşağıdaki örnekte Şekil 2.1 de verilen  $P_5$  grafinin komşu izole kalan dağılım sayısının nasıl hesaplandığı adım adım gösterilmiştir.



Şekil 2.1.  $P_5$  yol graf

- $|X_1| = \{c\}$  için  $i(P_5/X) = \{a, e\}$  olduğundan  $NIS(P_5) = 2 - 1 = 1$  dir.  
 $|X_2| = \{a\}$  için  $i(P_5/X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.  
 $|X_3| = \{b\}$  için  $i(P_5/X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.  
 $|X_4| = \{d\}$  için  $i(P_5/X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.  
 $|X_5| = \{e\}$  için  $i(P_5/X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.  
 $|X_6| = \{a, b\}$  için  $i(P_5/X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.  
 $|X_8| = \{a, d\}$  için  $i(P_5/X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.

$|X_{11}| = \{b, d\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.

$|X_{12}| = \{b, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.

$|X_{15}| = \{d, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan bu kümeler incelenmez.

- $|X_7| = \{a, c\}$  için  $i(P_5 / X) = 1$  olduğundan  $NIS(P_5) = 1 - 2 = -1$   
 $|X_9| = \{a, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 1$  olduğundan  $NIS(P_5) = 1 - 2 = -1$   
 $|X_{10}| = \{b, c\}$  için  $i(P_5 / X) = 1$  olduğundan  $NIS(P_5) = 1 - 2 = -1$   
 $|X_{13}| = \{c, d\}$  için  $i(P_5 / X) = 1$  olduğundan  $NIS(P_5) = 1 - 2 = -1$   
 $|X_{14}| = \{c, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan  $NIS(P_5) = 1 - 2 = -1$
- $|X_{16}| = \{a, b, c\}$  için  $i(P_5 / X) = e$  olduğundan  $NIS(P_5) = 1 - 3 = -2$   
 $|X_{17}| = \{a, b, d\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{18}| = \{a, b, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{19}| = \{b, c, d\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{20}| = \{b, c, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{21}| = \{b, d, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{22}| = \{c, d, e\}$  için  $i(P_5 / X) = a$  olduğundan  $NIS(P_5) = 1 - 3 = -2$   
 $|X_{23}| = \{a, d, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{24}| = \{a, c, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{25}| = \{a, c, d\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.
- $|X_{26}| = \{a, b, c, d\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{27}| = \{a, b, c, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{28}| = \{b, c, d, e\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{29}| = \{c, d, e, a\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.  
 $|X_{30}| = \{d, e, a, b\}$  için  $i(P_5 / X) = 0$  olduğundan incelenmez.

bulunur.

Sonuç olarak;

$$NIS(P_5) = \max_{1 \leq i \leq 30} \{i(P_5 / X) - |X_i|\} = 1$$



$$NIS(G) \leq VNS(G)$$

bulunur [3,9].

**Teorem 2.8.** Herhangi bir  $G$  grafi için [3],

$$NIS(G) \geq 1 - VNI(G).$$

**Teorem 2.9.**  $G$  bir graf ve  $G$ 'nin bütünlük kümesini içeren  $r$  alt grafın maximum derecesi ise

$$NIS(G) \geq r + 1 - I(G)$$

$I(G)$  ise  $G$  grafının kesim kümesini ifade eder [3].

Aşağıda bazı özel grafların komşu izole saçılım sayıları veren teoremler verilecektir.

**Teorem 2.10.**  $P_n$  yol grafi  $n \geq 3$  olsun. Buradan

$$NIS(P_n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 0, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

bulunur [3].

**Teorem 2.11.**  $T_{k,d}$  grafi,  $d$  derinliğindeki  $k \geq 2$  ağacı verilsin. Buradan

$$NIS(T_{k,d}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k^{d+2} + 1}{k^2 + 1}, & d \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{k^{d+2} - 2k^2 + k - 2}{k^2 + 1}, & d \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{k^{d+2} - 1}{k^2 + 1}, & d \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{k^{d+4} - k^{d+2} - k^3 + k}{k^4 - 1}, & d \equiv 3 \pmod{4}. \end{array} \right\}$$

bulunur [3].

**Teorem 2.12.**  $C_{m,n}$  kuyruklu yıldızı ile birlikte  $m, n \geq 2$  ise,

$$NIS(C_{m,n}) = \begin{cases} n, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ n-1, & m \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

bulunur [3].

**Teorem 2.13.**  $C_n$  çevre graf olmak üzere  $n \geq 4$  ise,

$$NIS(C_n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ -1, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

bulunur [3].

**Teorem 2.14.**  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  k parçalı tam grafi ise,

$$NIS(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} - 2$$

bulunur [3].

**Teorem 2.15.**  $Ge_n$  gear grafi ise

$$NIS(Ge_n) = n - 1$$

bulunur [3].

**Teorem 2.16.** [3]  $W_{1,n}$  tekerlek grafi,  $n \geq 4$  ise,

$$NIS(W_{1,n}) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ -1, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

## 2.1.Transformasyon Grafların Komşu İzole Saçılım Sayısı

Bu bölümde,  $P_n^{+++}$ ,  $C_n^{+++}$ ,  $P_n^{-++}$ ,  $C_n^{-++}$  grafları transformasyon graflar olmak üzere bu grafların komşu izole dağılım sayıları incelenecektir.

**Teorem 2.1.1.**  $P_n^{+++}$ ,  $P_n$  yol grafinin transformasyon grafi olmak üzere

$n \geq 5$  için ;

$$\text{NIS}(P_n^{+++}) = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 0, & n \equiv 0,2 \pmod{3} \end{cases}$$

**İspat 2.1.1.**  $P_n^{+++}$  transformasyon grafi,  $V(G) \cup E(G)$  tepeler ve ayrıtlar kümesine sahiptir.  $X \subseteq V(P_n^{+++})$ ,  $P_n^{+++}$  grafinin bir kesim küme stratejisi ve  $|X|=r$  graftan atılan tepe sayısı olsun. İspat  $n$  tepe sayısına bağlı olarak iki durumda incelenmelidir.

**Durum 1.**  $n \equiv 1 \pmod{3}$  olsun.  $|X|=r$  tepe seçilirse geriye kalan tepe sayısı

$$i(P_n^{+++}/X) \leq r + 1 \text{ olur.}$$

Buradan

$$i(P_n^{+++}/X) - |X| \leq r + 1 - r = 1 \text{ elde edilir.}$$

Kolayca görülür ki  $r = \frac{n-1}{3}$  seçildiğinde  $i(P_n^{+++}/X) = \frac{n+2}{3}$  olur. Tanımdan;

$$\text{NIS}(P_n^{+++}) = \frac{n+2}{3} - \frac{n-1}{3} = 1$$

elde edilir.

**Durum 2.**  $n \equiv 0,2 \pmod{3}$  olsun.  $|X|=r$  tepe seçilirse izole tepe sayısı en fazla  $r$  tanedir.

Tanımdan

$$i(P_n^{+++}/X) - |X| \leq r - r = 0 \text{ elde edilir.}$$

Açıktır ki  $n \equiv 0(\text{mod}3)$  olduğunda ;

$$r = \frac{n}{3} \text{ tane tepe graftan atılırsa } i(P_n^{+++}/X) = \frac{n}{3} \text{ olur.}$$

$$\text{Tanım gereği } NIS(P_n^{+++}) = \frac{n}{3} - \frac{n}{3} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$n \equiv 2(\text{mod}3)$  olduğunda;

$$r = \frac{n-2}{3} \text{ tane tepe graftan atılırsa } i(P_n^{+++}/X) = \frac{n-2}{3} \text{ olur.}$$

Buradan

$$NIS(P_n^{+++}) = \frac{n-2}{3} - \frac{n-2}{3} = 0$$

elde edilir.

**Teorem 2.1.2.**  $C_n^{+++}$ ,  $C_n$  çevre grafinin transformasyon grafi olmak üzere;

$$NIS(C_n^{+++}) = \begin{cases} 0 & n \equiv 0(\text{mod}3) \\ -1, & \text{diğer durum} \end{cases}$$

**İspat 2.1.2.**  $C_n^{+++}$  transformasyon grafi,  $V(G) \cup E(G)$  tepeler ve ayrıtlar kümesine sahiptir.  $X$ ,  $C_n^{+++}$  grafinin kapalı komşuluğunun kesim stratejisi olsun. İspat tepe sayısına bağlı olarak iki durumda incelenmelidir.

**Durum 1.**  $n \equiv 0(\text{mod}3)$  için  $C_n^{+++}$  grafindan  $|X|=r$  tepe seçildiğinde grafta geriye kalan izole tepe sayısı en fazla  $r$  tanedir. Bu durumda

$$i(C_n^{+++}/X) - |x| \leq r - r = 0$$

olur.

$X = \frac{n}{3}$  seçildiğinde  $r = \frac{n}{3}$  olur. Buradan;

$$NIS(C_n^{+++}) = \frac{n}{3} - \frac{n}{3} = 0.$$

**Durum 2.**  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  için  $C_n^{+++}$  grafından atılan kesim küme sayısı  $r$  olsun, izole kalan tepe sayısı en fazla  $r - 1$  dir.

$$NIS = i(C_n^{+++}/X) - |X| \leq r - 1 - r = -1 \text{ dir.}$$

Bu durumda  $|X| = i(C_n^{+++}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$  seçilirse  $i = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  olup

$$NIS(C_n^{+++}) = -1 \text{ elde edilir.}$$

**Teorem 2.1.3.**  $P_n^{-++}$ ,  $P_n$  yol grafının transformasyon grafi olmak üzere,

$$NIS(P_n^{-++}) = \begin{cases} 0, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ -1, & \text{diğer durum} . \end{cases}$$

**İspat 2.1.3.**  $P_n^{-++}$  grafının teoremdeki şarta göre iki durumda incelenir.

**Durum 1.**  $n \equiv 2 \pmod{4}$  için  $X$  kümesinin kapalı komşuluğu  $P_n^{-++}$  grafından atıldığında grafta geriye kalan izole tepe sayısı en fazla  $r$  tanedir. Yani  $i/(P_n^{-++}/X) \leq r$ .

Bu durumda  $i/(P_n^{-++}/X) \leq r - r = 0$  dır. Yani

$$NIS(P_n^{-++}) \leq 0.$$

Kolayca görülebilir ki  $|X| = \frac{n+2}{4}$  seçildiğinde ;  $i(P_n^{-++}/X) = \frac{n+2}{4}$  olup

$$NIS(P_n^{-++}) = \frac{n+2}{4} - \frac{n+2}{4} = 0 \text{ elde edilir.}$$

**Durum 2.**  $n = 1,3,4$  için  $P_n^{-++}$  transformasyon grafi için  $|X| = r$  tepe seçilirse graftan geriye kalan izole tepe sayısı  $r - 1$  tanedir.

Bu durumda  $i(P_n^{-++}/X) \leq r - 1 - r = -1$  dir.

Ardından  $|X| = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + 1$  seçilirse  $i(P_n^{-++}) = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$  olup

$$NIS(P_n^{-++}) = -1$$

elde edilir.

**Teorem 2.1.4.**  $C_n$  n tepeli bir çevre grafının  $C_n^{-++}$  hali olmak üzere;

$$NIS(C_n^{-++}) = \begin{cases} n & \equiv 0 \pmod{3} \\ -1, & \text{diğer durum} \end{cases}$$

**İspat 2.1.4.**  $C_n^{-++}$  transformasyon grafi,  $V(G) \cup E(G)$  tepeler ve ayrıtlar kümesine sahiptir.

$X$ ,  $C_n^{-++}$  grafının kapalı komşuluğunun kesim kümesi olsun ve bu ispatı iki durumda inceleyelim.

**Durum 1.**  $n \equiv 0 \pmod{3}$  için  $C_n^{-++}$  grafından  $|X|=r$  tepe seçildiğinde graftan geriye kalan izole tepe sayısı en fazla  $r$  tanedir. Buradan

$$i(C_n^{-++}/X) - |X| = r - r = 0 \text{ olur.}$$

$X = \frac{n}{3}$  seçildiğinde  $r = \frac{n}{3}$  olur. Buradan;

$$NIS(C_n^{-++}) = \frac{n}{3} - \frac{n}{3} = 0.$$

**Durum 2.**  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  için  $C_n^{-++}$  grafında seçilen kesim küme stratejisi  $r$  ise grafta geriye izole kalan tepe sayısı en fazla  $r - 1$  dir.

$$NIS(C_n^{-++}) = i(C_n^{-++}/X) - |X| \leq r - 1 - r = -1 \text{ dir.}$$

Buradan  $|X| = i(C_n^{-++}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$  seçilirse  $i(C_n^{-++}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  olup

$$NIS(C_n^{-++}) = -1 \text{ elde edilir.}$$

### 3. AVERAGE LOWER CONNECTIVITY (Ortalama Düşük Bağlantılılık Değeri)

Bu bölümde öncelikle ortalama alttan sınır bağlantılılık değeri tanımı ve daha önceden bilinen teoremler verilecektir.

#### 3.1 Tanım ve Teoremler

$G = (V, E)$  grafının bir  $v$  tepesine ait  $s_v(G)$  ile gösterilen ortalama alttan sınır bağlantılılık değeri,  $v$  tepesini içeren en küçük kesim kümesinin sayısı olarak tanımlanır. Bir çizgenin  $K_{av}(G)$  ile gösterilen ortalama düşük bağlantılılık değeri

$$K_{av}(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} s_v(G)}{|V(G)|} \text{ dır.}$$

Şimdi  $P_3^{+++}$  grafının  $K_{av}(P_3^{+++})$  değerini tüm tepeler için inceleyelim



Şekil 3.1.  $P_3^{+++}$  grafının  $K_{av}(P_3^{+++})$  değeri

- $|X_a| = \{a, c\}$  için  $K_{av}(P_3^{+++}) = 2$
- $|X_b| = \{b, 1\}$  için  $K_{av}(P_3^{+++}) = 2$
- $|X_c| = \{c, 2\}$  için  $K_{av}(P_3^{+++}) = 2$
- $|X_1| = \{1, c\}$  için  $K_{av}(P_3^{+++}) = 2$
- $|X_2| = \{2, b\}$  için  $K_{av}(P_3^{+++}) = 2$
- $|X_3| = \{3, b\}$  için  $K_{av}(P_3^{+++}) = 2$

olduğundan  $|X_a| + |X_b| + |X_c| + |X_1| + |X_2| + |X_3| = 12$  ise

$$K_{av}(P_3^{+++}) = \frac{12}{6} = 2.$$

**Teorem 3.1.1.**  $G$ , bir bağlantılı graf ise,

$$K_{av}(G) < K(G) + 2$$

olarak bulunur [2].

**Teorem 3.1.2.**  $G$ , bir bağlantılı graf ise,

$$K_{av}(G) \leq K(G) + 2$$

olarak bulunur [2].

**Teorem 3.1.3.**  $G$ , bir bağlantılı graf ise,

$$K_{av}(G) \leq K_{av}(G + e)$$

olarak bulunur [2].

**Teorem 3.1.4.**  $G$ , bir  $k$  –bağlantılı ve  $k$  –düzenli graf ise,

$$K_{av}(G) = k$$

olarak bulunur [2].

**Teorem 3.1.5.**  $G$ , bir bağlantılı graf ise,

$$K_{av}(G) \leq \delta(G) + 2$$

olarak bulunur [2].

**Teorem 3.1.6.**  $T$ ,  $n$  tepeli bir ağaç ve derecesi 1 olan tepeler  $k$  olmak üzere,

$$K_{av}(T) \leq \frac{n+k}{n}$$

olarak bulunur [2].

**Teorem 3.1.7.**  $K_{r,s}$ , iki parçalı tam graf ise,

$$K_{av}(K_{r,s}) = \begin{cases} \frac{s^2 + sr + r}{r + s}, & s < r ; \\ r, & r = s \end{cases}$$

olarak bulunur [2].

**Teorem 3.1.8.**  $W_n$ , tekerlek grafi ise,

$$K_{av}(W_n) = 3$$

olarak bulunur [2].

**Teorem 3.1.9**  $G_r$ , gear grafi ise,

$$K_{av}(G_r) = \frac{5r + 3}{2r + 1}$$

olarak bulunur [2].

### 3.2 Transformasyon Grafların Ortalama Düşük Bağlantılılık Değeri

Bu kısımda öncelikle,  $P_n^{+++}$ ,  $C_n^{+++}$ ,  $P_n^{-++}$ ,  $C_n^{-++}$  transformasyon grafların ortalama düşük bağlantılılık değerleri hesaplanmıştır.

**Teorem 3.2.1.**  $P_n$  yol graf olmak üzere

$$K_{av}(P_n^{+++}) = \frac{4n}{2n-1}.$$

**İspat 3.2.1.**  $P_n^{+++}$  grafının tepe derecesi  $|V(P_n^{+++})| = 2n - 1$  dir. Transformasyon grafın tepeler kümesini  $V(T(P_n)) = V(V_1) \cup V(V_2)$  olarak ayrıştıralım. Burada ;  $V_1$  tepeler kümesi 2 dereceli tepelerden oluşsun. (2 tepeden oluşur);  $V_2$  tepeler kümesi 3 ve 4 dereceli tepelerden oluşsun. (2n-3 tepeden oluşur.)

$v \in V_1$  ise  $s_v = 3$  olacaktır.

Bu durum  $V_2$  in iki tepesi içinde geçerlidir.  $v \in V_2$  ise  $s_v = 2$  dir. Bu durum  $V_2$  nin 2n-3 tepesi için geçerlidir.

$$\frac{\sum_{v \in V(G)} S_{V(G)}}{|V(G)|} = \frac{2 \times 3 + (2n-3) \times 2}{2n-1} = \frac{4n}{2n-1} \text{ olur.}$$

**Teorem 3.2.2.**  $C_n^{+++}$  transformasyon graf ise,

$$K_{av}(C_n^{+++}) = 4.$$

**İspat 3.2.2.**  $C_n^{+++}$  grafının tepeler kümesi  $V(C_n^{+++}) = V(V_1) \cup (V_2)$  olsun.  $V_1$  tepeler kümesi  $C_n^{+++}$  grafi için  $C_n$  in oluşturduğu küme olsun. Bu kümedeki tüm tepeler  $n - 1$  dereceli tepelerden oluşsun.  $V_2$  tepeler kümesi ise 4 dereceli tepelerden oluştuğundan tanım gereği ;

$$\frac{\sum_{v \in V(G)} S_{V(G)}}{|V(G)|} = \frac{4 \times 2n}{2n} = 4 \text{ elde edilir.}$$

**Teorem 3.2.3.**  $P_n^{-++}$  transformasyon graf ise,

$$K_{av}(P_n^{-++}) = \frac{8n-10}{2n-1}.$$

**İspat 3.2.3.**  $P_n^{-++}$  grafının tepe sayısı  $|V(P_n^{-++})| = 2n - 1$  dir.  $P_n^{-++}$  grafi için seçilen lokal bağımsızlık kümesi  $s_v$  olsun.  $P_n^{-++}$  grafından 6 tepe için lokal bağımsızlık sayısı 3, geriye kalan tepelerin sayıları 4 tür.

Buna göre tanımdan

$$\frac{\sum_{v \in V(G)} S_{V(G)}}{|V(G)|} = \frac{6 \times 3 + (2n - 7) \times 4}{2n - 1} = \frac{8n - 10}{2n - 1}$$

olduğu açıkça görülür.

**Teorem 3.2.4.**  $C_n^{-++}$  transformasyon graf olmak üzere  $n > 4$  olsun.

$$K_{av}(C_n^{-++}) = 4.$$

**İspat 3.2.4.**  $C_n^{-++}, C_n$  grafının transformasyon grafi olsun ve bu kümenin tepeler kümesini  $V(C_n^{-++}) = V(V_1) \cup (V_2)$  şeklinde ayrıştıralım.

Burada  $V_1, C_n^{-++}$  grafi için  $C_n$  grafının tepelerinin oluşturduğu küme olsun. Bu kümedeki tüm tepeler  $n - 1$  dereceli tepelerden oluşsun.  $V_2$  tepeler kümesi ise 4 dereceli, tepelerden oluştuğundan tanımdan

$$\frac{\sum_{v \in V(G)} S_{V(G)}}{|V(G)|} = \frac{4 \times 2n}{2n} = 4 \text{ elde edilir.}$$

#### 4.SONUÇ

Bu bölümde, 2 ve 3. bölümdeki elde edilen sonuçlar karşılaştırılıp tablo halinde verilmiştir.

- Tablo 4.1’ de  $P_n$  yol grafinin transformasyonu olan  $P_n^{+++}$  yol grafinin komşu izole saçılım sayıları (NIS) verilmiştir.

n	$NIS(P_n^{+++})$	$K_{av}(P_n^{+++})$
5	0	20/9
6	0	24/11
8	0	32/15
9	0	36/17
11	0	48/21
12	0	52/25
14	0	60/29
15	0	68/33
17	0	72/37
18	0	76/41

Tablo 4.1

Tablo 4.1 incelendiğinde, Teorem 2.1.1.’in herhangi bir  $n \geq 5$  değeri için

$$NIS(P_n^{+++}) = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 0, & n \equiv 0,2 \pmod{3} \end{cases}$$

olacağı açıkça görülür. Buna göre  $P_n^{+++}$  grafi için  $n$  sayısı farklı değerler alırken  $NIS(P_n^{+++})$  değerinin aynı değeri aldığı zaman,  $K_{av}(P_n^{+++})$  değerinin farklı değer alması sonucunda daha ayırt edici olduğu açıkça görülür.

- Tablo 4.2’ de  $C_n^{+++}$  transformasyon grafinin komşu izole saçılım sayıları (NIS) ve ortalama düşük bağlantılılık değerleri ( $K_{av}$ ) verilmiştir.

n	$NIS(C_n^{+++})$	$K_{av}(C_n^{+++})$
5	-1	4
7	-1	4
8	-1	4
10	-1	4
11	-1	4
13	-1	4
14	-1	4
16	-1	4
17	-1	4
19	-1	4

Tablo 4.2

Tablo 4.2 incelendiğinde, Teorem 2.1.2.’in herhangi bir  $n \geq 5$  değeri için

$$NIS(C_n^{+++}) = \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \\ -1, \text{ diğer durum} \end{cases}$$

olacağı açıkça görülür. Buna göre  $C_n^{+++}$  grafi için  $n$  sayısı farklı değerler alırken  $K_{av}(C_n^{+++})$  değerinin aynı değeri aldığı zaman,  $NIS(C_n^{+++})$  değerinin her bir  $n$  değeri için farklı değer alması ayırt ediciliğini gösterir.  $C_n^{+++}$  grafi için ortalama düşük bağlantılılık değeri sabit bir değer aldığından, NIS parametresi  $C_n^{+++}$  grafi için daha ayırt edicidir.

- Tablo 4.3’ de  $P_n$  yol grafinin transformasyonu olan  $P_n^{-++}$  grafinin komşu izole saçılım sayıları (NIS) verilmiştir.

n	$NIS(P_n^{-++})$	$K_{av}(P_n^{-++})$
5	-1	30/9
6	0	38/11
7	-1	46/13
8	-1	54/15
9	-1	62/17
10	0	70/19
11	-1	78/21
12	-1	86/23
13	-1	94/25
14	0	102/27

Tablo 4.3

Tablo 4.3 incelendiğinde, , Teorem 2.1.3. görülür ki  $NIS(P_n^{-++})$  ve  $K_{av}(P_n^{-++})$  ölçümünün değeri n değerine bağlıdır fakat

$$NIS(P_n^{-++}) = \begin{cases} 0, n \equiv 2(mod4) \\ -1, diğer durum . \end{cases}$$

durumuna bakarak NIS değeri sadece bu şarta bağlı kalarak ayırt edicidir, bir diğer taraftan  $K_{av}(P_n^{-++})$  değerinin bütün n değerleri için farklı bir değer aldığı açıkça görüldüğünden ortalama düşük bağlantılılık değerinin ayırt ediciliği daha fazladır.

- Tablo 4.4’ de  $C_n$  yol grafinin transformasyonu olan  $C_n^{-++}$  grafinin komşu izole saçılım sayıları (NIS) verilmiştir.

n	$NIS(C_n^{-++})$	$K_{av}(C_n^{-++})$
5	-1	4
6	0	4
7	-1	4
8	-1	4
9	0	4
10	-1	4
11	-1	4
12	0	4
13	-1	4
14	-1	4

Tablo 4.4

Tablo 4.4 incelendiğinde, Teorem 2.1.4. den herhangi bir  $n \geq 5$  değeri için

$$NIS(C_n^{-++}) = \begin{cases} n & \equiv 0 \pmod{3} \\ -1, & \text{diğer durum} \end{cases}$$

olacağı açıkça görülür. Buna göre  $C_n^{-++}$  grafi için  $n$  sayısı farklı değerler alırken  $NIS(P_n^{+++})$  değerinin her bir  $n$  değeri için farklı değer aldığı,  $K_{av}$  değerinin ise aynı değer aldığı açıkça görülür ve NIS değerinin daha ayırt edici olduğu açıkça görülür.



## KAYNAKLAR

- [1] Aslan E. A Measure of Graphs Vulnerability: Edge Scattering Number. Bulletin of The International Mathematical Virtual Institute. 2014, 53-60.
- [2] Aslan E. The Average Lower Connectivity of Graphs. Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics Volume. 2014, 4 s.
- [3] Aslan E. Neighbour Isolated Scattering Number of Graphs. Science 41 (2015), 423-431
- [4] Aslan, E. Graflar ve Zedelenebilirlik Ölçümleri. Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalı, İzmir, 2007, 52 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [5] Bacak-Turan, G. Graflarda Zedelenebilirlik Ölçümleri. Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalı, İzmir, 2010, 52 s. (Doktora Tezi).
- [6] Barefoot, C.A and Entringer, H.R., Vulnerability in graphs:A comparative survey. J. Combin. Math. Combin. Comput., 25-33 s.
- [7] Bondy, J. A., Murty, U.S.R Graph Theory with Applications. Elsevier Science Publishing, New York, USA, 1976, 264 s.
- [8] Chen, J. , Meng, J. Maximally Edge-Connectivity of a Transformation Graph  $G^{+-}$ , Journal of East China Normal University (Natural Science )5, 2006, 83-85 s.
- [9] Cozzens, M. B. , Wu, S. Y., Vertex–neighbor-integrity of trees, Ars Combinatoria 43, 1996, 169-180 s.
- [10] Gunther, G., Neighbor connectivity in regular graphsi Discrete Applied Mathematics, 11, 1985, 233-243 s.
- [11] Harary, F. , Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1969, 274s.
- [12] Jung, H. A. On a Class of Posets and the Corresponding Comparability Graphs. Journal of Combinatorial Theory Series B. 1978, 24(2), 125-133
- [13] Xu, L. , Wu, B. The transformation graph  $G^{xyz}$  when  $xyz = - + +$ , Discrete Mathematics 308, 2008, 5144-5148 s.
- [14] Wei, Z., Li, Y., Zhang, J. Edge-neighbor-scattering number of graphs. Ars Combinatoria. 2007, 85, 271-277.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Adı Soyadı : Büşra AÇAN

Doğum Yeri ve Yılı : İzmir, 1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : busra\_acan92@hotmail.com

## **Eğitim Durumu**

Lise : Şemikler Anadolu Lisesi, 2010

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik Bölümü, Devam Etmekte

Pedagojik Formasyon : Celal Bayar Üniversitesi, 2015