

**GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SAYI VE MATRİS DİZİLERİNİN ÜRETEÇ  
FONKSİYONLARI**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ  
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**AYDAN ZORÇELİK  
MAYIS 2017**

**MAYIS 2017**

**Yüksek Lisans - Matematik**

**AYDAN ZORÇELİK**

**Sayı ve Matris Dizilerinin**

**Üreteç Fonksiyonları**

**Gaziantep Üniversitesi**

**Matematik Bölümü**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**

**Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN**

**Aydan ZORÇELİK**

**Mayıs 2017**



© 2017 [Aydan ZORÇELİK]

T.C.  
GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Sayı ve Matris Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları

Öğrencinin, Adı Soyadı: Aydan ZORÇELİK

Tez Savunma Tarihi: 25 Mayıs 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığımı onaylarım.

Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Doç. Dr. Cafer AYDIN

Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

İmzası

**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Aydan ZORÇELİK**

## **ABSTRACT**

### **THE GENERATING FUNCTIONS OF NUMBER AND MATRIX SEQUENCES**

**ZORÇELİK, AYDAN**

**M.Sc. Thesis in Mathematics Department**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. Şükran UYGUN**

**May 2017**

**73 pages**

In this study, we define special integer sequences such as Fibonacci, Lucas, Pell, Pell Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sequences briefly and give some their basic properties. And then different generalizations of these sequences are obtained and the generating functions of these special integer sequences and their generalized sequences are given.

By using the above integer sequences polynomial and matrix sequences and also their generalized polynomial and matrix sequences are obtained and then their generating functions are found.

After that exponential generating functions are defined. And by using exponential generating functions some properties of Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sequences are found. Moreover, some properties of these sequences are obtained by using different type of generating functions.

**Keywords:** Special integer sequences, Generalized Integer and Matrix sequences, Generating Functions, Binet Formula.

## ÖZET

### SAYI VE MATRİS DİZİLERİNİN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

ZORÇELİK, AYDAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN

Mayıs 2017

73 sayfa

Bu çalışmada Fibonacci, Lucas, Pell, Pell Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas gibi özel sayı dizileri kısaca tanımlanıp temel bazı özellikleri verildi. Bu özel sayı dizilerinin ve çeşitli şekillerde elde edilmiş genelleştirilmiş dizilerinin üreteç fonksiyonları verilmiştir.

Yukarıda adı zikredilen sayı dizileri kullanılarak elde edilen polinom ve matris dizileri ve yine bu polinom ve matris dizilerinin çeşitli genelleştirilmesiyle oluşan polinom, matris dizileri tanımlanacak ve bu dizilerin üreteç fonksiyonları verilecektir.

Daha sonra üstel üreteç fonksiyonları tanımlanacak, bu üreteç fonksiyonları kullanarak Fibonacci, Lucas ve Jacobsthal, Jacobsthal Lucas sayı dizilerine ait çeşitli özellikler elde edilecektir. Ayrıca farklı tipteki üreteç fonksiyonları kullanılarak sayı dizilerine ait çeşitli özellikler elde edilecektir.

**Anahtar Kelimeler:** Özel sayı dizileri, Genelleştirilmiş Sayı ve Matris dizileri, Üreteç Fonksiyonları, Binet Formülü.



*Çok kıymetli aileme...*

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince desteğini, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve aynı zamanda kişiliğiyle de bana örnek olan saygıdeğer hocalarım:

- Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer Yüksek Lisans danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Şükran UYGUN'a,
- Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi öğretim üyelerinden saygıdeğer yüksek Lisans jüri başkanı hocam Doç. Dr. Cafer AYDIN'a,
- Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ana Bilim Dalı Başkanımız saygıdeğer Prof. Dr. Adil KILIÇ'a,
- Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü Müdürümüz ve aynı zamanda lisans eğitimimde Fizik hocam olan, saygıdeğer Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI'ya,
- Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü'ndeki tüm hocalarıma; lisans ve yüksek lisans hayatımdaki emeklerinden dolayı,
- Son olarak bu hayattaki en büyük destekçilerim, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak varoluşumdan bu günlere gelmemde ki en büyük pay sahibi olan sevgili anneciğim Yasemin ZORÇELİK ve babacığım Ercan ZORÇELİK'e kardeşlerime ve tüm sevdiklerime,

minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım ...

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

ABSTRACT .....	vi
ÖZET.....	vii
TEŞEKKÜR.....	ix
İÇİNDEKİLER .....	x
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xiii
BÖLÜM 1 .....	1
GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2 .....	6
2. ÇEŞİTLİ SAYI DİZİLERİ.....	6
2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları ve Üreteç Fonksiyonları.....	6
2.2. Pell ve Pell Lucas Sayıları ve Üreteç Fonksiyonları .....	9
2.3. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları ve Üreteç Fonksiyonları .....	9
BÖLÜM 3 .....	12
GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYI DİZİLERİ VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI.....	12
3.1. k-Fibonacci ve k-Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları .....	12
3.2. k-Pell ve k-Pell Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları .....	15
3.3. k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları .....	16
3.4. k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Sayı Dizilerinin İkinci Tanımı .....	17
3.5. Bi periodik Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları.....	23

3.6. Bi-periodik Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları.....	25
BÖLÜM 4 .....	27
POLİNOM DİZİLERİ VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI .....	27
4.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları ve Üreteç Fonksiyonları .....	27
4.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Polinomları ve Üreteç Fonksiyonları.....	28
4.3. Pell ve Pell Lucas Polinomları ve Üreteç Fonksiyonları .....	29
4.4. Bivariate Fibonacci ve Lucas Polinomları .....	29
4.5. Bivariate Pell ve Pell Lucas Polinomları .....	30
4.6. Bivariate Jacobsthal, Jacobsthal Lucas Polinomları ve Üreteç Fonksiyonları.....	31
BÖLÜM 5 .....	34
SAYI DİZİLERİYLE OLUŞTURULAN MATRİS DİZİLERİ VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI ...	34
5.1. $k$ -Fibonacci ve $k$ -Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları .....	34
5.2. $(s, t)$ Fibonacci ve $(s, t)$ Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları.....	36
5.3. $k$ -Jacobsthal ve $k$ -Jacobsthal Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları ....	38
5.4. $(s, t)$ Jacobsthal ve $(s, t)$ Jacobsthal Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları .....	41
5.5. Bi periodik Fibonacci ve Bi periodik Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları .....	44
5.6. Bi periodik Jacobsthal, Bi periodik Jacobsthal Lucas Matris Dizileri Fonksiyonları .....	46
5.7. Genelleştirilmiş $(s, t)$ Jacobsthal Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları .....	48
5.8. Bivariate Jacobsthal ve Bivariate Jacobsthal Lucas Polinom Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları.....	50
BÖLÜM 6 .....	52
ÜSTEL ÜRETEÇ FONKSİYONLARI .....	52

6.1. Fibonacci ve Lucas Özdeşlikleri İçin Üstel Üreteç Fonksiyonları.....	52
6.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Özdeşlikleri İçin Üstel Üreteç Fonksiyonları ....	54
BÖLÜM 7 .....	64
SAYI DİZİLERİ İÇİN BAZI ÖZEL ÜRETEÇ FONKSİYONLARI.....	64
7.1 Bazı Özel Fibonacci ve Lucas Üreteç Fonksiyonları .....	64
7.2 Bazı Özel Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Üreteç Fonksiyonları .....	66
BÖLÜM 8 .....	69
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	69
KAYNAKLAR .....	70

## SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

- $F_n$  : Fibonacci matris dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $L_n$  : Lucas matris dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $P_n$  : Pell matris dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $Q_n$  : Pell Lucas matris dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $J_n$  : Jacobsthal matris dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $C_n$  : Jacobsthal Lucas matris dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $f_n$  : Fibonacci sayı dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $l_n$  : Lucas sayı dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $p_n$  : Pell sayı dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $q_n$  : Pell Lucas sayı dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $j_n$  : Jacobsthal sayı dizisinin  $n$ -inci elemanı
- $c_n$  : Jacobsthal Lucas sayı dizisinin  $n$ -inci elemanı

## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Matematikte üreteç fonksiyonu (ing. generating function) verilen bir dizinin elemanları kullanılarak elde edilen bir kuvvet serisidir. Kullanım ve uygulama olanaklarına göre çeşitli üreteç fonksiyonları vardır. Örneğin adi üreteç fonksiyonu, üstel üreteç fonksiyonu, Lambert serisi, Bell serisi, ve Dirichlet serisi gibi... Her tip üreteç fonksiyonu bir dizi kullanılarak elde edilir.

Bir  $a = (a_n)$  dizisi için adi üreteç fonksiyonu şöyle tanımlanır:

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Bir  $a = (a_n)$  dizisi için üstel üreteç fonksiyonu ise

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

şeklinde verilir. Bir  $S$  örnek uzayı üzerinde negatif olmayan bir rassal değişken  $X$  için ( yani her  $s \in S$  için  $X(s) \geq 0$  )

$$G_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(X(s) = n) x^n$$

serisine olasılık üreteç fonksiyonu denir. Burada  $p$  harfi olasılık dağılımıdır.

Bir üreteç fonksiyonu, yalnızca biçimsel olarak bir kuvvet serisi olduğundan, her  $x$  değeri için yakınsak olmak zorunda değildir. Üreteç fonksiyonunun kullanıldığı bağlam ve örneğe göre kimi zaman uygun düşen  $x$  değerleri için yakınsaklığı araştırılabilir ve bu  $x$  değerleri için eşit olduğu fonksiyon yazılabilir. Örneğin; (1,1,1,...) dizisine karşılık gelen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

üreteç fonksiyonu,  $|x| < 1$  için  $\frac{1}{1-x}$  değerine eşittir. Örneğin, tam kare dizisi

$a = (a_n) = (n^2)$  için adi üreteç fonksiyonu;

$$G(n^2, x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^2}$$

ve aynı dizinin üstel üreteç fonksiyonu;

$$EG(n^2, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!} = x(x+1)e^x$$

şeklindedir. Bell serisi olarak tanımlanan üreteç fonksiyonu da,

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{2n} x^n = \frac{1}{1-p^2 x}$$

formülüyle verilir.

Çok değişkenli üreteç fonksiyonu negatif olmayan tamsayılarla hazırlanmış,  $r$  satır ve  $c$  sütun göstermek üzere satır toplamı  $t_1, \dots, t_r$  ve sütun toplamı  $s_1, \dots, s_c$  için I. J. Good 'ye göre  $x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r} y_1^{s_1} \dots y_c^{s_c}$  katsayıları için,

$$\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^c \frac{1}{1-x_i y_j}.$$

şeklinde verilir. Çeşitli kuvvet dizileri ile oluşturulan üreteç fonksiyonları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

$n^p$	$f(x)$	Seri
1	$\frac{x}{1-x}$	$x + x^2 + x^3 + \dots$
$n$	$\frac{x}{(1-x)^2}$	$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$
$n^2$	$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$	$x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \dots$
$n^3$	$\frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4}$	$x + 8x^2 + 27x^3 + \dots$

$n^4$	$\frac{x(x+1)(x^2+10x+1)}{(1-x)^5}$	$x + 16x^2 + 81x^3 + \dots$
-------	-------------------------------------	-----------------------------

Polinomlar adi üreteç fonksiyonlarının sonlu elemana sahip özel bir türüdür. Birçok sonlu dizi örneğin Poincaré polinomu, üreteç fonksiyonu olarak yorumlanır.

$|x| < 1$  için  $a = (1,1,1, \dots)$  sabit dizisinin adi üreteç fonksiyonu  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

şeklindedir ve sol taraf, sağ tarafın bir Maclaurin seri açılımıdır. Diğer dizilerin adi üreteç fonksiyonları bu eşitlikten çıkartılabilir. Örneğin;  $x \rightarrow ax$  yazarak sabit  $a$  değeri için  $(a_n) = (1, a, a^2, a^3, \dots)$  dizisi kullanılarak aşağıdaki gibi bir geometik seri elde edilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \frac{1}{1-ax}.$$

$x \rightarrow x^2$  yazarsak üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

şeklini alır.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  eşitliğinin iki tarafının da türevi alınarak ve  $n \rightarrow n-1$

değişimi yapılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

şeklinde bir üreteç fonksiyonu elde edilir. Ve yukardaki eşitliğin sağ tarafının üçüncü kuvvetinde serinin katsayıları üçgensel sayılar (triangular numbers) 1,3,6,10,15,21,... yani binom katsayılarıdır. Böylece üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$$

şeklinde yazılır. Genelleştirirsek,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-ax)^{k+1}}$$

sonucunu elde ederiz. (0,1,4,9,16, ...) tamkare sayıların dizisinin adi üreteç fonksiyonu, binom katsayılı üreteç fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak oluşturabilir. Şöyleki,

$$2 \binom{n+2}{2} - 3 \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0} = 2 \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3(n+1) + 1 = n^2$$

eşitliğinden tamkare sayıları elde ederiz. Bu katsayıları kullanarak oluşturulan serinin yani tamkare serisinin eşit olduğu fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G(n^2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

Adi üreteç fonksiyonları ancak ve ancak sabit katsayılı lineer yineleme dizisine sahipse bir rasyonel fonksiyon olarak ifade edilir. Örneğin; Catalan

sayılarından oluşan dizi için  $(a_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 4^n\right)$  adi üreteç fonksiyonu

$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$  şeklindeki rasyonel fonksiyonla verilir.

Literatürde üreteç fonksiyonları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Şöyle ki, Carlitz L. 1962'de bazı sayı dizilerinin kuvvetleri için üreteç fonksiyonları elde etmiştir. J. Riordan 1962'de Fibonacci dizilerinin kuvvetleri için üreteç fonksiyonları elde etmiştir. A. F. Horadam 1965'te bazı genelleştirilmiş sayı dizilerinin kuvvetleri için üreteç fonksiyonları elde etmiştir. I. Kolodner 1965'de genelleştirilmiş Fibonacci dizileri için üreteç fonksiyonları elde etmiştir. A.G. Shannon and A.F. Horadam 1971'de üçüncü mertebeden yineleme bağıntıları için üreteç fonksiyonları oluşturmuştur. Hoggatt ve Lind 1971'de, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşlikler elde etmek için adi üreteç fonksiyonlarını kullanmıştır. Ayriyeten, Gould genelleştirilmiş üreteç fonksiyonlarını çalışmıştır. Bro. J. M

Mahon, A. F. Horodam, (1987) Pell sayıları için adi ve üstel üreteç fonksiyonları çalışmıştır.

Ek olarak S. Falcon (2007), C. Bolat, H. Köse (2010), D. Jhala(2012), Catarino P. , Paulo Vasco P. ( 2013) ,Yayenie O. (2011), G. Bilgici (2014), S. Uygun (2013) vb. çeşitli özel tamsayı dizileri ve bunların çeşitli genelleştirmelerini kullanarak üreteç fonksiyonları oluşturmuşlardır. Bu kısım ile ilgili ayrıntılı bilgi Bölüm 3'te verilmiştir.

A. F. Horadam (1997), S. Falcon (2009), S. Halıcı, Z. Akyüz (2010) vb. çeşitli polinom dizileri ve bunların çeşitli genelleştirmelerini kullanarak üreteç fonksiyonları çalışmıştır. Bu kısım ile ilgili ayrıntılı bilgi Bölüm 4'te verilmiştir.

F. Koken, D. Bozkurt (2008), K. Uslu, S. Uygun (2013) ,Coskun, N. Taskara (2016), S. Uygun, E. Owusu (2013) vb. çeşitli matris dizileri ve bunların çeşitli genelleştirmelerini kullanarak üreteç fonksiyonları çalışmıştır. Bu kısım ile ilgili ayrıntılı bilgi Bölüm 5'te verilmiştir.

6. bölümde Fibonacci ve Lucas dizileri için çeşitli özdeşlikler üstel üreteç fonksiyonları kullanılarak verildikten sonra benzer şekilde Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizileri için çeşitli özdeşlikler üstel üreteç fonksiyonları kullanılarak elde edilmiştir.

7. bölümde Fibonacci ve Lucas dizileri için çeşitli üreteç fonksiyonları verildikten sonra benzer şekilde Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizileri için çeşitli üreteç fonksiyonları elde edilmiştir.

8. bölümde çalışmamızla ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

## BÖLÜM 2

### 2. ÇEŞİTLİ SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde literatürde önemli bir yere sahip bazı tamsayı dizilerinin tanımları verilecek ve temel özellikleri üzerinde durulacaktır.

#### 2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları ve Üreteç Fonksiyonları

Leonarda Fibonacci 12'inci yüzyılda yaşamış bir İtalyan matematikçidir. Fibonacci 1201 yılında "Liber Abaci" adlı bir kitap yazmıştır. Bu kitapta bulunan bir problem ortaçağ matematiğine katkıları olan Fibonacci'yi 600 yıl sonra, 19'uncu yüzyılın başlarında meşhur kılmıştır. Bu problem "Tavaşan Problemi"dir. Ergin bir tavşan çifti her ay yeni bir yavru çifti vermektedir. Bir yavru çifti bir ayda ergenliğe ulaşmaktadır. Yavru olan bir tavşan çiftinden 12 ay sonunda kaç tavşan çifti oluşur? Buna göre; her aydaki toplam tavşan çifti sayısı, kendinden önceki ilk iki aydaki tavşan çifti sayılarının toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre sırasıyla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... şeklinde olacaktır. Bu problem 19'uncu yüzyıldan sonra birdenbire popüler olmuş ve sorunun çözümü olan sayılar "Fibonacci sayıları" olarak adlandırılmıştır.

Fibonacci sayıları üç nedenden dolayı büyük önem arz etmektedir. Birincisi; dizinin ilk elemanlarının bitkilerde, böceklerde, çiçeklerde vb. kısacası birçok beklenmedik yerde tekrar tekrar karşımıza çıkmasıdır. İkinci neden olarak; dizinin bir terimi, kendinden önceki terime bölündüğünde yaklaşık olarak aynı değer çıkmasıdır. "Altın oran" denilen bu sayı; doğada, bitkilerde, çiçeklerde, ideal insan vücudunda, mimari eserlerde (Mısır Piramitleri vb.) ve birçok alanda görülebilir. Üçüncü olarak; bu sayıların, sayılar teorisinde çok ilginç özelliklerinin bulunmasıdır.

Başlangıç şartları  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$  şeklinde verilen;  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$  yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  tamsayı dizisine "Fibonacci sayı dizisi" denir.

Fibonacci dizisinin Binet formülü,  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ve  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere;

$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$  şeklindedir. Binet formülünden hareketle  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha$  olduğu görülür.

Buradaki  $\alpha = 1,6183398\dots$  sayısı “Altın Oran” olarak adlandırılmaktadır.

Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

şeklinde verilir (T. Koshy, 2001).

Fransız matematikçi Edward Lucas; başlangıç şartları için  $l_0 = 2$  ve  $l_1 = 1$  değerlerini kullanarak, “Lucas sayı dizileri”ni oluşturmuştur. Bu sayı dizisi de ciddi bir popülerite kazanmıştır. Çünkü, Fibonacci sayı dizileri ile arasında birçok ilginç bağıntı elde edilmiştir.  $l_0 = 2$  ve  $l_1 = 1$  olmak üzere;  $l_{n+1} = l_n + l_{n-1}$  yineleme bağıntısı ile verilen  $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$  tamsayı dizisine “Lucas sayı dizisi” denir. Lucas dizisinin

Binet formülü,  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ve  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere;  $l_n = \alpha^n + \beta^n$  şeklindedir.

Dizinin ardışık iki teriminin oranının sonsuz için limit değeri,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = \alpha$  dır. Bu

değer sayesinde Lucas sayı dizisi de en az Fibonacci sayı dizisi kadar önem kazanmıştır. Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir (T. Koshy, 2001).

V. E. Hoggatt ve D. A. Lind tarafından bulunan, Fibonacci ve Lucas sayıları için çeşitli formlarda yazılan üreteç fonksiyonları aşağıda verilmiştir:

$k, n, r$  pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n = \frac{1-x}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^n = \frac{1-2x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} x^n = \frac{x}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^2 x^n = \frac{4-7x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1}^2 x^n = \frac{1+7x-4x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+2}^2 x^n = \frac{9-2x-x^2}{1-2x-2x^2+x^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^3 x^n = \frac{x-2x^2+x^3}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^3 x^n = \frac{1-2x-x^2}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2}^3 x^n = \frac{1+5x-3x^2-x^3}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+3}^3 x^n = \frac{8+3x-4x^2-x^3}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n F_{n+1} F_{n+2} x^n = \frac{2x}{1-3x-6x^2+3x^3+x^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} x^n = \frac{F_k x}{1-L_k x + (-1)^k x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{kn+r} x^n = \frac{F_r + (-1)^r F_{k-r} x}{1-L_k x + (-1)^k x^2}$$

eşitlikleri elde edilmiştir.

## 2.2. Pell ve Pell Lucas Sayıları ve Üreteç Fonksiyonları

Başlangıç şartları  $p_0 = 0$  ve  $p_1 = 1$  olan;  $p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}$  yineleme bağıntısı ile verilen  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  tamsayı dizisine “Pell sayı dizisi” denir. Pell dizisinin Binet formülü,  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$  ve  $\beta = 1 - \sqrt{2}$  olmak üzere;  $p_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$  şeklindedir. Negatif indisli Pell sayı dizisi  $p_{-n} = (-1)^{n+1} p_n$  ile tanımlanır. Dizinin ardışık iki teriminin oranının sonsuz için limit değeri,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \alpha$  dır.

Pell sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2}$$

şeklindedir (Mahon, 1987).

Başlangıç şartları  $q_0 = 2$  ve  $q_1 = 1$  olan;  $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$  yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  şeklindeki tamsayı dizisine “Pell Lucas sayı dizisi” denir. Pell Lucas dizisinin Binet formülü,  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$  ve  $\beta = 1 - \sqrt{2}$  olmak üzere;  $q_n = \alpha^n + \beta^n$  şeklindedir. Negatif indisli Pell Lucas sayı dizisi,  $q_{-n} = (-1)^{n+1} q_n$  bağıntısıyla tanımlanır. Dizinin ardışık iki teriminin oranının sonsuz için limit değeri,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \alpha$  dır.

Pell Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^n = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$$

şeklindedir (Horadam, 1971).

## 2.3. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları ve Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde, Alman matematikçi Jacobsthal tarafından tanımlanan Jacobsthal sayıları tanıtılacaktır. Bilgisayarlardaki bazı mikro işlemciler, bir programın akışını değiştirmek için koşullu yönlendirmeler kullanırlar. Bu mikro işlemciler (dallı yönlendirenler) geçici olarak ilerideki yönlendirmeye atlatan komutlandırma yaparlar. Burada, 2 bit'in 4 olasılığı için 1 durumun, 3 bit'in 8 olasılığı için 3

durumun, 4 bit'in 16 olasılığı için 5 durumun, vb. durumları hariç bırakılarak diğerlerinin yararlı olduğu sonucuna varılmış ve hariç bırakılan bu durumların tam olarak Jacobsthal sayılarını verdiği görülmüştür (Horadam, 1996).

Başlangıç şartları  $j_0 = 0$ ,  $j_1 = 1$  olmak üzere;  $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}$  yineleme bağıntısı ile verilen  $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$  sayı dizisine “Jacobsthal sayı dizisi” denir.  $x^2 - x - 2 = 0$  karakteristik denkleminin kökleri; 2, -1 olmak üzere, Jacobsthal sayıları için Binet formülü,  $j_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$  şeklindedir. Dizinin ardışık iki teriminin birbirine oranının sonsuz için limit değeri,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j_{n+1}}{j_n} = 2$  dir.

Başlangıç şartları  $c_0 = 2$ ,  $c_1 = 1$  olmak üzere;  $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$  yineleme bağıntısı ile verilen  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  sayı dizisine “Jacobsthal Lucas sayı dizisi” denir. Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü,  $c_n = 2^n + (-1)^n$  olur. Dizinin ardışık iki teriminin birbirine oranının sonsuz için limit değeri,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 2$  şeklindedir. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin birçok önemli özelliği, Binet formülü kullanılarak elde edilebilir.

**Teorem 2.3.1.**  $m, n \geq 0$  herhangi iki tamsayı olsun. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları için,

- a)  $j_{n+1} = 2^n - j_n$
- b)  $j_{n-1} + j_n = 2^{n-1}$
- c)  $j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1} = 2j_n + (-1)^n$
- d)  $c_{n+1} = 2c_n - 3(-1)^n$
- e)  $c_n = j_{n+1} + 2j_{n-1}$
- f)  $j_{m+n} = j_m j_{n+1} + 2j_{m-1} j_n$

$$m = n \Rightarrow j_{2n} = j_n j_{n+1} + 2j_{n-1} j_n = j_n (j_{n+1} + 2j_{n-1}) = j_n c_n$$

**g)**  $9j_n = c_{n+1} + 2c_{n-1}$

**h)**  $c_n = 3j_n + 2(-1)^n$

**i)**  $3j_n + c_n = 2^{n+1}$

eşitlikleri geçerlidir (Horadam, 1996).

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizileri için üreteç fonksiyonları;

$$\sum_{i=1}^{\infty} j_i x^{i-1} = \frac{1}{1-x-2x^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{i-1} = \frac{1+4x}{1-x-2x^2}$$

veya

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_k x^k = \frac{x}{1-x-2x^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{2-x}{1-x-2x^2}$$

şeklinde verilir (Horadam, 1996).

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizileri için üstel üreteç fonksiyonları;

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_k \frac{x^k}{k!} = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!} = e^{2x} + e^{-x}$$

şeklinde verilir (Cook, 2013)

### BÖLÜM 3

## GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇEŞİTLİ SAYI DİZİLERİ VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, Pell, Pell Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas gibi sayı dizilerinin genelleştirilmiş dizilerinin tanımları verilip Binet formülleriyle birlikte üreteç fonksiyonları verilmiştir.

### 3.1. k-Fibonacci ve k-Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 3.1.1. k- Fibonacci sayıları:** Her  $k > 0$  ve  $n \geq 0$  tamsayıları için başlangıç şartları  $f_{k,0} = 0$ ,  $f_{k,1} = 1$  olmak üzere;

$$f_{k,n+2} = kf_{k,n+1} + f_{k,n}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{f_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine “k-Fibonacci dizisi” denir. Dizinin her bir elemanına da “k-Fibonacci sayısı” denir.  $k = 1$  alınırsa, Fibonacci

sayı dizisi elde edilir.  $r^2 = kr + 1$  fark denkleminin kökleri;  $r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$  ve

$r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$  olarak bulunur. k- Fibonacci sayıları için Binet formülü,

$$f_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \text{ şeklindedir.}$$

k-Fibonacci sayıları için; ardışık iki teriminin birbirine oranının sonsuz için limit değeri,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,n+1}}{f_{k,n}} = r_1$  şeklindedir. k-Fibonacci sayı dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{k,n} x^n = f_{k,0} + f_{k,1}x + f_{k,2}x^2 + \dots + f_{k,n}x^n + \dots$$

$$F_{k,n} = \sum_{i=0}^{\infty} f_{k,i} x^i = \frac{x}{1 - kx - x^2}$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıda  $m, n, r \geq 0$  tamsayıları için  $k$ -Fibonacci dizisine ait çeşitli formlarda elde edilen üreteç fonksiyonları verilmiştir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{k,n+1} x^n = \frac{1}{1-kx-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{k,mn} x^n = \frac{f_{k,m} x}{1-(r_1^m + r_2^m) + (-1)^m x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{k,mn+r} x^n = \frac{f_{k,r} - (-1)^m f_{k,r-m} x}{1-(r_1^m + r_2^m) + (-1)^m x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{k,2n} x^n = \frac{xk}{1-(k^2+2)x+x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{k,2n+1} x^n = \frac{(1-x)k}{1-(k^2+2)x+x^2}$$

(Bolat, 2010).

**Tanım 3.1.2.  $k$ -Lucas dizisi:** Her  $k > 0$  ve  $n \geq 0$  tamsayıları için başlangıç şartları  $l_{k,0} = 2$ ,  $l_{k,1} = k$  olmak üzere;

$$l_{k,n+2} = kl_{k,n+1} + l_{k,n}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{l_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine “ $k$ -Lucas dizisi” denir.  $k = 1$  alınır, Lucas dizisi elde edilir.  $k$ -Lucas sayıları için; ardışık iki teriminin birbirine oranının sonsuz için limit değeri,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{k,n+1}}{l_{k,n}} = r_1$  şeklindedir.  $k$ -Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_{k,i} x^i = l_{k,0} + l_{k,1}x + l_{k,2}x^2 + \dots + l_{k,n}x^n + \dots = \frac{2-kx}{1-kx-x^2}$$

şeklindedir (S. Falcon, 2011).

**Teorem 3.1.1:**  $\{f_{k,an+r}\}$  Aritmetik İndeksli k-Fibonacci Dizisinin Üreteç Fonksiyonu

$a$  ve  $r$  tamsayı ve  $0 \leq r \leq a-1$  olmak üzere,  $(f_{k,an+r})$  aritmetik indeksli k-Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu;  $f_{a,r}(k, x)$  ile gösterilsin.

Öyle ki,

$$f_{a,r}(k, x) = f_{k,r} + f_{k,r}x + f_{k,r}x^2 + \dots$$

şeklindedir.  $f_{a,r}(k, x)$  üreteç fonksiyonu Falcon ve Plaza tarafından,

$$f_{a,r}(k, x) = \frac{f_{k,r} + (-1)^r f_{k,a-r}x}{1 - l_{k,a}x + (-1)^a x^2}$$

şekilinde tanımlanır.

**Özel Durumlar:**

$a$  ve  $r$  nin farklı değerleri için elde edilen üreteç fonksiyonları;

- $a = 1, r = 0$  için üreteç fonksiyonu  $f_{1,0}(k, x) = \frac{x}{1 - kx - x^2}$
- $a = 2, r = 0$  için üreteç fonksiyonu  $f_{2,0}(k, x) = \frac{kx}{1 - (k^2 + 2)x + x^2}$
- $a = 2, r = 1$  için üreteç fonksiyonu  $f_{2,1}(k, x) = \frac{1 - x}{1 - (k^2 + 2)x + x^2}$
- $a = 3, r = 0$  için üreteç fonksiyonu  $f_{3,0}(k, x) = \frac{(k^2 + 1)x}{1 - (k^3 + 3k)x - x^2}$
- $a = 3, r = 1$  için üreteç fonksiyonu  $f_{3,1}(k, x) = \frac{1 - kx}{1 - (k^3 + 3k)x - x^2}$

şeklinde verilmiştir (Falcon, Plaza, 2012).

### **Teorem 3.1.2.** $\{l_{k,an+r}\}$ Aritmetik İndeksli k-Lucas Dizisinin Üreteç Fonksiyonu

$a$  ve  $r$  tamsayı ve  $0 \leq r \leq a-1$  olmak üzere,  $(l_{k,an+r})$  aritmetik indeksli k-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu;  $l(k, x; a, r)$  ile gösterilsin.

Öyle ki,

$$l(k, x; a, r) = l_{k,r} + l_{k,a+r}x + l_{k,2a+r}x^2 + l_{k,3a+r}x^3 + \dots$$

şeklindedir.  $l(k, x; a, r)$  üreteç fonksiyonu Falcon tarafından,

$$l(k, x; a, r) = \frac{l_{k,r} + (l_{k,a+r} + l_{k,a}l_{k,r})x}{1 - l_{k,a}x + (-1)^a x^2}$$

şekilinde tanımlanır.

#### **Özel Durumlar**

- $a = 1$  ve  $r = 0$  için üreteç fonksiyonu  $l(k, x; 1, 0) = \frac{2 - kx}{1 - kx - x^2}$
- $a = 2$  ve  $r = 0$  için üreteç fonksiyonu  $l(1, x; 2, 0) = \frac{2 - 3x}{1 - 3x + x^2}$
- $a = 2$  ve  $r = 1$  için üreteç fonksiyonu  $l(1, x; 2, 1) = \frac{1 + x}{1 - 3x + x^2}$

şeklinde verilir (Falcon, 2012).

### **3.2. k-Pell ve k-Pell Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları**

**Tanım 3.2.1. k- Pell sayıları:** Her  $k > 0$  reel sayısı ve  $n \geq 1$  tamsayısı için başlangıç şartları  $p_{k,0} = 0, p_{k,1} = 1$  olmak üzere;

$$p_{k,n+1} = 2p_{k,n} + kp_{k,n-1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan  $\{p_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine “k-Pell dizisi” denir.  $k = 1$  alınırsa, klasik Pell sayı dizisi elde edilir.  $r^2 = 2r + k$  fark denkleminin kökleri;

$r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$  ve  $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$  olarak bulunur.  $k$ -Pell için Binet formülü;

$$p_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \text{ şeklindedir.}$$

$k$ -Pell sayılarının üreteç fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$p_k(x) = \frac{-x}{1-2x-kx^2}.$$

**Tanım 3.2.2.  $k$ - Pell Lucas sayıları:** Her  $k > 0$  reel sayısı ve  $n \geq 1$  tamsayısı için başlangıç şartları  $q_{k,0} = 2$ ,  $q_{k,1} = 2$  olmak üzere;

$$q_{k,n+1} = 2q_{k,n} + kq_{k,n-1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan  $\{q_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine “ $k$ -Pell Lucas dizisi” denir.  $k = 1$  alınırsa, Pell Lucas sayı dizisi elde edilir.  $r^2 = 2r + k$  fark denkleminin kökleri;  $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$  ve  $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$  olarak bulunur.  $k$ -Pell Lucas sayıları için Binet formülü,  $q_{k,n} = r_1^n + r_2^n$  şeklindedir.  $k$ -Pell Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$q_k(x) = \frac{2-2x}{1-2x-kx^2}$$

(Catarino, Vasco, 2013).

### 3.3. $k$ -Jacobsthal ve $k$ -Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

$k$ -Jacobsthal ve  $k$ -Jacobsthal Lucas sayı dizileri için literatürde iki farklı tanım bulunmaktadır.

**Tanım 3.3.1.** Her  $k > 0$  reel sayısı ve  $n \geq 0$  tamsayısı için başlangıç şartları  $j_{k,0} = 0$  ve  $j_{k,1} = 1$  olmak üzere;

$$j_{k,n+2} = j_{k,n+1} + kj_{k,n}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan  $\{j_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine “ $k$ -Jacobsthal dizisi” denir.  $k = 1$  alınır; Fibonacci dizisi,  $k = 2$  alınır; klasik Jacobsthal dizisi elde edilir.

$x^2 = x + k$  fark denkleminin kökleri;  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4k}}{2}$  şeklindedir.

$k$ -Jacobsthal sayıları için Binet formülü,  $j_{k,n} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$  olur.  $i$  pozitif tamsayısı

olmak üzere,  $x_1^i x < 1$  ve  $x_2^i x < 1$  için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_{k,n} x^n = \frac{x}{1 - x - kx^2}$$

eşitliği ile elde edilir (Köken, Bozkurt, 2008).

**Tanım 3.3.2.** Her  $k > 0$  reel sayısı ve  $n \geq 0$  tamsayısı için başlangıç şartları  $c_{k,0} = 2$  ve  $c_{k,1} = 1$  olmak üzere;

$$c_{k,n+2} = c_{k,n+1} + kc_{k,n}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan  $\{c_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine “ $k$ -Jacobsthal Lucas dizisi” denir.  $k = 1$  alınır; Lucas dizisi,  $k = 2$  alınır; Jacobsthal Lucas dizisi elde edilir.

$k$ -Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü,  $c_{k,n} = x_1^n + x_2^n$  olur.  $i$  pozitif tamsayısı olmak üzere,  $x_1^i x < 1$  ve  $x_2^i x < 1$  için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n} x^n = \frac{2 - x}{1 - x - kx^2}$$

eşitliği ile elde edilir (Köken, Bozkurt, 2008).

### 3.4. $k$ -Jacobsthal ve $k$ -Jacobsthal Lucas Sayı Dizilerinin İkinci Tanımı

**Tanım 3.4.1.  $k$ -Jacobsthal dizisi:** Her  $k > 0$  reel sayısı ve  $n \geq 0$  tamsayısı için başlangıç şartları  $j_{k,0} = 0$ ,  $j_{k,1} = 1$  olmak üzere;

$$j_{k,n+2} = kj_{k,n+1} + 2j_{k,n}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan  $\{j_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine “ $k$ -Jacobsthal dizisi” denir.

$k = 1$  alınır, Jacobsthal dizisi elde edilir.  $x^2 = kx + 2$  karakteristik denkleminin

kökleri;  $x_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}$  şeklindedir.

$k$ -Jacobsthal sayıları için Binet formülü,

$$j_{k,n} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$$

şeklindedir.

**Teorem 3.4.1.**  $k$ -Jacobsthal sayı dizisinin  $J_{k,n}$  ile gösterilen üreteç fonksiyonu;

$$J_{k,n} = \sum_{n=0}^{\infty} j_{k,n} x^n = j_{k,0} + j_{k,1}x + j_{k,2}x^2 + \dots + j_{k,n}x^n + \dots = \frac{x}{1 - kx - 2x^2}$$

şeklindedir.

**İspat:**  $J_{k,n} = j_{k,0} + j_{k,1}x + j_{k,2}x^2 + \dots + j_{k,n}x^n + \dots$  üreteç fonksiyonunda eşitliğin her iki tarafını  $kx$  ve  $2x^2$  ile ayrı ayrı çarparsak,

$$kxJ_{k,n} = kj_{k,0}x + kj_{k,1}x^2 + kj_{k,2}x^3 + \dots + kj_{k,n}x^{n+1} + \dots$$

$$2J_{k,n}x^2 = 2j_{k,0}x^2 + 2j_{k,1}x^3 + 2j_{k,2}x^4 + \dots + 2j_{k,n}x^{n+2} + \dots$$

elde ederiz. Bu denklemleri üreteç fonksiyonu eşitliğinden çıkarırsak,

$$(1 - kx - 2x^2)J_{k,n} = x$$

istenilen elde edilir.

$n \geq 0$  bir tamsayı olmak üzere,  $k$ -Jacobsthal dizisi için negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^n j_{k,i} x^{-i} = \frac{-1}{x^n(x^2 - kx - 2)} \left[ -x^{n+1} + xj_{k,n+1} + 2j_{k,n} \right]$$

şeklinde verilir.

Yukarıdaki ifade  $n \rightarrow \infty$  için yeniden ifade edilirse,

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i} x^{-i} = \frac{x}{(x^2 - kx - 2)}$$

eşitliği sağlanır.

$r \geq 0$  bir tamsayı olsun.  $|x_1^k x_2^{r-k} x| < 1$  için  $k$ -Jacobsthal dizisinin  $r$ . kuvvetinden oluşan sayı dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i}^r x^i = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{1}{(r_1 - r_2)^k} \frac{1}{(r_2 - r_1)^{r-k}} \frac{1}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x}$$

eşitliği ile elde edilir.

$k$ -Jacobsthal sayı dizilerinin üstel üreteç fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} j_{k,n} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 8}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_1 x)^n - (r_2 x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 8}} (e^{r_1 x} - e^{r_2 x}) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. (Uygun, Eldoğan, 2016).

**Tanım 3.4.2.  $k$ -Jacobsthal Lucas dizisi:** Her  $k > 0$  reel sayısı ve  $n \geq 0$  tamsayısı için başlangıç şartları  $c_{k,0} = 2$ ,  $c_{k,1} = k$  olmak üzere;

$$c_{k,n+2} = k c_{k,n+1} + 2 c_{k,n}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{c_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine “ $k$ -Jacobsthal Lucas dizisi” denir.

Dizinin her bir elemanına da,  $k$ -Jacobsthal Lucas sayısı denir.  $k = 1$  alınırsa, Jacobsthal Lucas dizisi elde edilir.

**Teorem 3.4.2.**  $k$ -Jacobsthal Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu;

$$c_{k,0} + c_{k,1}x + c_{k,2}x^2 + \dots + c_{k,n}x^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i}x^i = \frac{2-kx}{1-kx-2x^2}$$

şeklindedir.

**İspat:**

$$\begin{aligned} \zeta_{k,n}(x) &= c_{k,0} + c_{k,1}x + c_{k,2}x^2 + c_{k,3}x^3 + \dots + c_{k,n}x^n \\ &= 2 + kx + \sum_{n=2}^{\infty} c_{k,n}x^n \\ &= 2 + kx + \sum_{n=2}^{\infty} (kc_{k,n-1} + 2c_{k,n-2})x^n \\ &= 2 + kx + k \sum_{n=2}^{\infty} c_{k,n-1}x^n + 2 \sum_{n=2}^{\infty} c_{k,n-2}x^n \\ &= 2 + kx + kx \sum_{n=2}^{\infty} c_{k,n-1}x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_{k,n-2}x^{n-2} \\ &= 2 + kx + kx \left( \sum_{p=0}^{\infty} c_{k,p}x^p - c_{k,0} \right) + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n}x^n \\ &= 2 - kx + kx \sum_{p=0}^{\infty} c_{k,p}x^p + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n}x^n \end{aligned}$$

elde edilen bu eşitlikten,

$$\zeta_{k,n}(x) = 2 - kx + kx\zeta_{k,n}(x) + 2x^2\zeta_{k,n}(x)$$

$$\zeta_{k,n}(x)(1 - kx - 2x^2) = 2 - kx$$

$$\zeta_{k,n}(x) = \frac{2 - kx}{(1 - kx - 2x^2)}$$

eşitliği elde edilir (Jhala vd., 2013).

$n \geq 0$  bir tamsayı olmak üzere  $k$ -Jacobsthal Lucas dizisi için negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^n c_{k,i} x^{-i} = \frac{-1}{x^n(x^2 - kx - 2)} [x c_{k,n+1} + 2c_{k,n}] + \frac{2x^2 - kx}{(x^2 - kx - 2)}$$

eşitliği ile verilir.

Yukarıdaki eşitlik  $n \rightarrow \infty$  için yeniden ifade edilirse,

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i} x^{-i} = \frac{2x^2 - kx}{(x^2 - kx - 2)}$$

eşitliği sağlanır.

$r \geq 0$  bir tamsayı olsun.  $|x_1^k x_2^{r-k} x| < 1$  için  $k$ -Jacobsthal Lucas dizisinin  $r$ . kuvvetinden oluşan sayı dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i}^r x^i = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{1}{1 - r_1^k r_2^{r-k} x}$$

şeklinde ifade edilir.

$k$ -Jacobsthal Lucas sayı dizilerinin üstel üreteç fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (r_1^n + r_2^n) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r_1 x)^n + (r_2 x)^n}{n!} \\ &= (e^{r_1 x} + e^{r_2 x}) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Uygun, Eldoğan, 2016).

**Teorem 3.4.9.**  $\{J_{k,an+r}\}$  Aritmetik İndeksli  $k$ - Jacobsthal Dizisinin Üreteç Fonksiyonu

$a$  ve  $r$  tamsayı ve  $0 \leq r \leq a-1$  olmak üzere,  $(J_{k,an+r})$  aritmetik indeksli  $k$ -

Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu;  $\mathfrak{J}_{a,r}(k, x)$  ile gösterilsin.

Öyle ki üreteç fonksiyonu,

$$\mathfrak{J}_{a,r}(k,x) = J_{k,r} + J_{k,a+r}x + J_{k,2a+r}x^2 + J_{k,3a+r}x^3 + \dots = \frac{J_{k,r} + (-2)^r J_{k,a-r}x}{(1 - j_{k,a}x + (-2)^a x^2)}$$

şeklinde verilir.

### Özel Durumlar

- $a = 1, r = 0$  için üreteç fonksiyonu,

$$\mathfrak{J}_{1,0}(k,x) = \frac{J_{k,0} + J_{k,1}x}{(1 - j_{k,1}x + (-2)x^2)} = \frac{x}{1 - kx - 2x^2}$$

- $a = 2, r = 0$  için üreteç fonksiyonu,

$$\mathfrak{J}_{2,0}(k,x) = \frac{J_{k,0} + (-2)^0 J_{k,2}x}{(1 - j_{k,2}x + (-2)^2 x^2)} = \frac{kx}{1 - (k^2 + 4)x + 4x^2}$$

- $a = 2, r = 1$  için üreteç fonksiyonu,

$$\mathfrak{J}_{2,1}(k,x) = \frac{J_{k,1} + (-2)^1 J_{k,1}x}{(1 - j_{k,2}x + (-2)^2 x^2)} = \frac{1 - 2x}{1 - (k^2 + 4)x + 4x^2}$$

- $a = 3, r = 0$  için üreteç fonksiyonu,

$$\mathfrak{J}_{3,0}(k,x) = \frac{J_{k,0} + (-2)^0 J_{k,3}x}{(1 - j_{k,3}x + (-2)^3 x^2)} = \frac{(k^2 + 2)x}{1 - (k^3 + 6k)x - 8x^2}$$

- $a = 3$  ve  $r = 1$  için üreteç fonksiyonu,

$$\mathfrak{J}_{3,1}(k,x) = \frac{J_{k,1} + (-2)^1 J_{k,2}x}{(1 - j_{k,3}x + (-2)^3 x^2)} = \frac{1 - 2kx}{1 - (k^3 + 6k)x - 8x^2}$$

- $a = 3$  ve  $r = 2$  için üreteç fonksiyonu,

$$\mathfrak{J}_{3,2}(k,x) = \frac{J_{k,2} + (-2)^2 J_{k,1}x}{(1 - j_{k,3}x + (-2)^3 x^2)} = \frac{k + 4x}{1 - (k^3 + 6k)x - 8x^2}$$

şeklinde verilir (Jhala, Rathore, Sisodiya, 2014).

**Teorem3.4.11.**  $\{c_{k,an+r}\}$  Aritmetik İndeksli k-Jacobsthal Lucas Dizisinin Üreteç Fonksiyonu:

$a$  ve  $r$  tamsayı ve  $0 \leq r \leq a-1$  olmak üzere,  $\{c_{k,an+r}\}$  aritmetik indeksli k-Jacobsthal Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu;  $c(k, x, a, r)$  ile gösterilsin. Bu üreteç fonksiyonu;

$$c(k, x, a, r) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,aj+r} x^j = \frac{c_{k,r} + x(c_{k,a+r} - c_{k,a}c_{k,r})}{1 - c_{k,a}x + (-2)^a x^2}$$

eşitliği ile verilir.

### Özel Durumlar

- $r=0, a=1$  için üreteç fonksiyonu,

$$C(k, x, 1, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} x^j = \frac{2 - kx}{1 - kx - 2x^2}$$

- $r=0, a=2$  için üreteç fonksiyonu,

$$C(k, x, 2, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,2j} x^j = \frac{2 - (k^2 + 4)x}{1 - (k^2 + 4)x + 4x^2}$$

- $r=1, a=2$  için üreteç fonksiyonu,

$$C(k, x, 2, 1) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,2j+1} x^j = \frac{k + 2kx}{1 - (k^2 + 4)x + 4x^2}$$

şeklinde verilir (Uygun, 2016).

### 3.5. Bi periodik Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 3.5.1. Bi periodik Fibonacci Sayı Dizisi:**  $n \geq 2$  ve başlangıç şartları  $q_0 = 0, q_1 = 1$  olmak üzere,

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + 2q_{n-2} & , \quad n \text{ çift} \\ bq_{n-1} + 2q_{n-2} & , \quad n \text{ tek} \end{cases}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine “bi periodik Fibonacci sayı dizisi” denir.  $a = b = 1$  alırsak, klasik Fibonacci dizisini elde ederiz.  $x^2 - abx - ab = 0$  fark

denkleminin kökleri;  $\alpha = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2}$  ve  $\beta = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2}$  şeklinde

bulunur. Bi periodik Fibonacci sayı dizisi için Binet formülü,

$$q_n = \frac{a^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \text{ şeklinde bulunur.}$$

Burada,

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Bi periodik Fibonacci sayı dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$F(x) = \frac{x(1 + ax - x^2)}{1 - (ab + 2)x^2 + 4x^4}$$

şeklindedir (Yayenie, 2009).

**Tanım 3.5.2. Bi periodik Lucas Sayı Dizisi:**  $n \geq 2$  ve başlangıç şartları  $l_0 = 2$  ,  $l_1 = a$  olmak üzere,

$$l_n = \begin{cases} bl_{n-1} + l_{n-2} , & n \text{ çift} \\ al_{n-1} + l_{n-2} , & n \text{ tek} \end{cases}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine “bi periodik Lucas sayı dizisi”denir.

$a = b = 1$  alırsak, klasik Lucas dizisini elde ederiz. Bi periodik Lucas sayı dizisi için

Binet formülü ( $\alpha$  ve  $\beta$  yukardaki gibi tanımlı),

$$l_n = \frac{a^{\varepsilon(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)$$

şeklindedir.

Bi periodik Lucas sayı dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$L(x) = \frac{2 + ax - (ab + 2)x^2 + ax^3}{1 - (ab + 4)x^2 + x^4}$$

şeklindedir (Bilgici, 2014).

### 3.6. Bi periodik Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayı Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 3.6.1.** Bi periodik Jacobsthal Sayı Dizisi:  $n \geq 2$  ve başlangıç şartları  $J_0 = 2$ ,  $J_1 = 1$  olmak üzere,

$$J_n = \begin{cases} aJ_{n-1} + 2J_{n-2}, & n \text{ çift} \\ bJ_{n-1} + 2J_{n-2}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine “bi periodik Jacobsthal sayı dizisi” denir.  $a = b = 1$  alırsak, klasik Jacobsthal dizisini elde ederiz.  $x^2 - abx - 2ab = 0$

karakteristik denkleminin kökleri;  $\alpha = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 8ab}}{2}$  ve

$\beta = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 + 8ab}}{2}$  şeklinde bulunur.

Bi periodik Jacobsthal sayı dizisi için Binet formülü,

$$J_n = \frac{a^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)$$

şeklinde verilir. Bi periodik Jacobsthal sayı dizisi üreteç fonksiyonu;

$$J(x) = \frac{x(1 + ax - 2x^2)}{1 - (ab + 4)x^2 + 4x^4}$$

şeklindedir (Uygun, Owusu, 2016).

**Tanım 3.6.2. Bi periodik Jacobsthal Lucas Sayı Dizisi:**  $n \geq 2$  ve başlangıç şartları

$C_0 = 2$  ,  $C_1 = a$  olmak üzere,

$$C_n = \begin{cases} bC_{n-1} + 2C_{n-2} , & n \text{ çift} \\ aC_{n-1} + 2C_{n-2} , & n \text{ tek} \end{cases}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine “bi periodik Jacobsthal Lucas sayı dizisi” denir.  $a = b = 1$  seçersek, klasik Jacobsthal Lucassayı dizisini elde ederiz.

Bi periodik Jacobsthal Lucas dizisi için Binet formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$C_n = \frac{a^{\varepsilon(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} (\alpha^n + \beta^n) .$$

Bi periodik Jacobsthal Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu,

$$C(x) = \frac{2 + ax - (ab + 4)x^2 - 2ax^3}{1 - (ab + 4)x^2 + 4x^4}$$

şeklindedir (Uygun, Owusu, 2016).

## BÖLÜM 4

### POLİNOM DİZİLERİ VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, Pell, Pell Lucas gibi polinom dizilerinin tanımları verilip Binet formülleriyle birlikte üreteç fonksiyonları verilmiştir.

#### 4.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 4.1.1.**  $n \geq 1$  tamsayısı için;  $\{f_n(x)\}$  Fibonacci polinom dizisi, başlangıç şartları  $f_0(x) = 0$ ,  $f_1(x) = 1$  olmak üzere;

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_{n-1}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

**Tanım 4.1.2.**  $n \geq 1$  tamsayısı için;  $\{l_n(x)\}$  Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları  $l_0(x) = 2$ ,  $l_1(x) = x$  olmak üzere;

$$l_{n+1}(x) = xl_n(x) + l_{n-1}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Fibonacci ve Lucas polinomları için üreteç fonksiyonları;

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n = \frac{t}{1-xt-t^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)t^n = \frac{2-xt}{1-xt-t^2}$$

şeklinde verilir.

**Tanım 4.1.3.**  $n \geq 2$  tamsayısı için;  $\{b_n(x)\}$  genelleştirilmiş Fibonacci-Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları  $b_0(x) = 2b$ ,  $b_1(x) = s$  olmak üzere;

$$b_n(x) = xb_{n-1}(x) + b_{n-2}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Genelleştirilmiş Fibonacci-Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)t^n = \frac{2b(1-xt) + st}{(1-xt-t^2)}$$

(Singh, 2014).

#### 4.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Polinomları ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 4.2.1.**  $n \geq 0$  tamsayısı için;  $\{j_n(x)\}$  Jacobsthal polinom dizisi, başlangıç şartları  $j_0(x)=0$  ,  $j_1(x)=1$  olmak üzere;

$$j_{n+2}(x) = j_{n+1}(x) + 2xj_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

**Tanım 4.2.2.**  $n \geq 0$  tamsayısı için;  $\{c_n(x)\}$  Jacobsthal Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları  $c_0(x)=2$  ,  $c_1(x)=1$  olmak üzere;

$$c_{n+2}(x) = c_{n+1}(x) + 2xc_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Jacobsthal - Jacobsthal Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} j_i(x)y^{i-1} = (1-y-2xy^2)^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i(x)y^{i-1} = (1+4xy)(1-y-2xy^2)^{-1}$$

şeklinde verilmiştir (Horadam, 1997).

### 4.3. Pell ve Pell Lucas Polinomları ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 4.3.1.**  $n \geq 0$  tamsayısı için;  $\{P_n(x)\}$  Pell polinom dizisi, başlangıç şartları  $P_0(x) = 0$ ,  $P_1(x) = 1$  olmak üzere;

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

**Tanım 4.3.2.**  $n \geq 0$  tamsayısı için;  $\{Q_n(x)\}$  Pell Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları  $Q_0(x) = 2$ ,  $Q_1(x) = 2x$  olmak üzere;

$$Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) + Q_n(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

$\lambda^2 + 2x\lambda - 1 = 0$  fark denklemi kullanılarak kökler;  $\alpha = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $\beta = x - \sqrt{x^2 + 1}$  şeklinde bulunur. Pell ve Pell Lucas polinomu için Binet formülleri;

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

$$Q_n(x) = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde verilir.

Pell ve Pell Lucas polinomu için üreteç fonksiyonları;

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_{r+1}(x)y^r = \frac{1}{1-2xy-y^2},$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} Q_{r+1}(x)y^r = \frac{2x+2y}{1-2xy-y^2}$$

şeklinde verilir (Horadam, 1995).

### 4.4. Bivariate Fibonacci ve Lucas Polinomları

**Tanım 4.4.1.**  $x, y$  sıfırdan farklı reel sayı ve  $x^2 + 4y \neq 0$  olmak üzere bivariate Fibonacci polinom dizisi, başlangıç şartları  $f_0(x, y) = 0$ ,  $f_1(x, y) = 1$  olmak üzere,

$$f_n(x, y) = xf_{n-1}(x, y) + yf_{n-2}(x, y)$$

yineleme bağıntısıyla elde edilir.

Bu yineleme bağıntısından  $r^2 - xy r - 2y = 0$  fark denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri;

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4y}}{2}$$

şeklindedir. Bivariate Fibonacci polinom dizisi için Binet formülü,

$$f_n(x, y) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 4y})^n - (x - \sqrt{x^2 + 4y})^n}{\sqrt{x^2 + 4y}}$$

şeklindedir (Catalani, 2004).

**Tanım 4.4.2.**  $x, y$  sıfırdan farklı reel sayı ve  $x^2 + 4y \neq 0$  olmak üzere bivariate Lucas polinom dizisi başlangıç şartları  $L_0(x, y) = 2$ ,  $L_1(x, y) = x$  olmak üzere,

$$L_n(x, y) = xL_{n-1}(x, y) + yL_{n-2}(x, y)$$

yineleme bağıntısıyla elde edilir. Bivariate Lucas polinom dizisi için Binet formülü,

$$L_n(x, y) = (x + \sqrt{x^2 + 4y})^n + (x - \sqrt{x^2 + 4y})^n$$

şeklindedir (Catalani, 2004).

#### 4.5. Bivariate Pell ve Pell Lucas Polinomları

**Tanım 4.5.1.**  $x, y$  sıfırdan farklı reel sayı ve  $x^2 y^2 + 8y \neq 0$  olmak üzere bivariate Pell polinom dizisi, başlangıç şartları  $P_0(s, t) = 0$ ,  $P_1(s, t) = 1$  olmak üzere,

$$P_n(x, y) = 2xyP_{n-1}(x, y) + yP_{n-2}(x, y)$$

yineleme bağıntısıyla elde edilir. Bivariate Pell polinom dizisi için Binet formülü,

$$P_n(x, y) = \frac{(xy + \sqrt{x^2 y^2 + y})^n - (xy - \sqrt{x^2 y^2 + y})^n}{2\sqrt{x^2 y^2 + y}}$$

şeklindedir (Halıcı, 2010).

**Tanım 4.5.2.**  $x, y$  sıfırdan farklı reel sayı ve  $x^2y^2 + 8y \neq 0$  olmak üzere bivariate Pell Lucas polinom dizisi, başlangıç şartları  $Q_0(s, t) = 2$ ,  $Q_1(s, t) = 2xy$  olmak üzere,

$$Q_n(x, y) = 2xyQ_{n-1}(x, y) + yQ_{n-2}(x, y)$$

yineleme bağıntısıyla elde edilir. Bivariate Pell Lucas polinom dizisi için Binet formülü,

$$Q_n(x, y) = (xy + \sqrt{x^2y^2 + 8y})^n + (xy - \sqrt{x^2y^2 + 8y})^n$$

şeklindedir (Halıcı, 2010).

#### 4.6. Bivariate Jacobsthal, Jacobsthal Lucas Polinomları ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 4.6.1.**  $x, y$  sıfırdan farklı reel sayı ve  $x^2y^2 + 8y > 0$  olmak üzere bivariate Jacobsthal polinom dizisi, başlangıç şartları  $j_0(x, y) = 0$ ,  $j_1(x, y) = 1$  olmak üzere,

$$j_n(x, y) = xyj_{n-1}(x, y) + 2yj_{n-2}(x, y)$$

yineleme bağıntısıyla elde edilir. Bu yineleme bağıntısından fark denklemi  $r^2 - xyr - 2y = 0$  şeklinde elde edilir. Bu denklemin kökleri;

$$\alpha = \frac{xy + \sqrt{x^2y^2 + 8y}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{xy - \sqrt{x^2y^2 + 8y}}{2}$$

dir. Bivariate Jacobsthal polinom dizisi için Binet formülü,

$$j_n(x, y) = \frac{(xy + \sqrt{x^2y^2 + 8y})^n - (xy - \sqrt{x^2y^2 + 8y})^n}{\sqrt{x^2y^2 + 8y}}$$

şeklindedir.

$i$  pozitif bir tamsayı,  $|\alpha^i t| < 1$  ve  $|\beta^i t| < 1$  olmak üzere, bivariate Jacobsthal polinom dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n t^n = \frac{j_i t}{1 - c_i t + (-2y)^i t^2}$$

şeklinde verilir.

$n \geq 0$  için negatif kuvvetli bivariate Jacobsthal polinom dizileri için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{k=0}^n j_k t^{-k} = \frac{-1}{t^n(t^2 - xyt - 2y)} [-t^{n+1} - tj_{n+1} + 2tj_n]$$

şeklinde verilir.  $n \rightarrow \infty$  için yukarıdaki eşitlik yeniden ifade edilirse,

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_i t^{-i} = \frac{t}{(t^2 - xyt - 2y)}$$

eşitliği sağlanır.

$r$  pozitif bir tamsayı  $|\alpha^k \beta^{r-k}| < 1$  olmak üzere, bivariate Jacobsthal polinom dizisinin  $r$ . kuvvetiyle oluşturulan dizi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_i^r t^i = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{(-1)^{r-k}}{(\sqrt{x^2 y^2 + 8y})^r} \frac{1}{1 - \alpha^k \beta^{r-k} t}$$

şeklinde elde edilir (Uygun, 2017).

**Tanım 4.6.2.**  $x, y$  sıfırdan farklı reel sayı ve  $x^2 y^2 + 8y > 0$  olmak üzere bivariate Jacobsthal Lucas polinom dizisi başlangıç şartları  $c_0(x, y) = 2$ ,  $c_1(x, y) = xy$  olmak üzere,

$$c_n(x, y) = xyc_{n-1}(x, y) + 2yc_{n-2}(x, y)$$

yineleme bağıntısıyla elde edilir. Bu yineleme bağıntısından  $r^2 - xyr - 2y = 0$  elde edilir. Bu denklemin kökleri;

$$\alpha = \frac{xy + \sqrt{x^2 y^2 + 8y}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{xy - \sqrt{x^2 y^2 + 8y}}{2}$$

dir. Bivariate Jacobsthal Lucas polinom dizisi için Binet formülü,

$$c_n(x, y) = (xy + \sqrt{x^2 y^2 + 8y})^n + (xy - \sqrt{x^2 y^2 + 8y})^n$$

şeklindedir.

$i$  pozitif bir tamsayı ve  $|\alpha^i t| < 1$  ve  $|\beta^i t| < 1$  olmak üzere, bivariate Jacobsthal Lucas polinom dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{in} t^n = \frac{2 + t(\sqrt{x^2 y^2 + 8y}) j_i}{1 - c_i t + (-2y)^i t^2}$$

şeklinde verilir.

$n \geq 0$  için negatif kuvvetli bivariate Jacobsthal Lucas polinom dizileri için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{k=0}^n c_k t^{-k} = \frac{-1}{t^n (t^2 - xyt - 2y)} [t c_{n+1} + 2y c_n] + \frac{2t^2 - xyt}{(t^2 - xyt - 2y)}$$

şeklinde verilir.  $n \rightarrow \infty$  için yukarıdaki eşitlik yeniden ifade edilirse,

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{-i} = \frac{2t^2 - xyt}{t^2 - xyt - 2y}$$

eşitliği sağlanır.

$r$  pozitif bir tamsayı  $|\alpha^k \beta^{r-k} t| < 1$  olmak üzere, bivariate Jacobsthal Lucas polinom dizisinin  $r$ . kuvvetiyle oluşturulan dizi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^r t^i = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{1}{1 - \alpha^k \beta^{r-k} t}$$

şeklinde elde edilir (Uygun, 2017).

## BÖLÜM 5

### SAYI DİZİLERİYLE OLUŞTURULAN MATRİS DİZİLERİ VE ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas gibi çeşitli matris dizilerinin genelleştirilmiş matris dizileri tanımlanıp üreteç fonksiyonları tanımlanmıştır.

#### 5.1. $k$ -Fibonacci ve $k$ -Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümdeki bilgiler H. Cıvcıv'in makalesindeki sonuçlar  $k$ -Fibonacci ve  $k$ -Lucas sayı dizilerine uyarlanarak elde edilmiştir.

**Tanım 5.1.1.**  $k > 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları için başlangıç şartları  $F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve

$F_1 = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$F_{n+1} = kF_n + F_{n-1}$$

ile tanımlanan  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  matris dizisine “ $k$ -Fibonacci matris dizisi” denir. Aşağıda verilen ifade,  $k$ -Fibonacci matris dizileri ile  $k$ -Fibonacci sayı dizileri arasındaki bir bağıntıyı vermektedir.

$k$ -Fibonacci matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$F_n = \begin{bmatrix} F_{k,n+1} & F_{k,n} \\ F_{k,n} & F_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için  $k$ -Fibonacci matris dizisinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^n F_{k,i} x^{-i} = -\frac{1}{x^n(x^2-kx-1)} [xF_{k,n+1} + F_{k,n}] + \frac{1}{x^2-kx-1} [xF_{k,1} + (x^2-kx)F_{k,0}]$$

şeklinde verilir.

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$  olacak şekilde yukarıdaki ifadenin sonsuz için toplam formülü,

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_{k,i} x^{-i} = \frac{1}{x^2 - kx - 1} [x F_{k,1} + (x^2 - kx) F_{k,0}]$$

şeklinde olur.

**Tanım 5.1.2.**  $k > 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları için başlangıç şartları  $L_0 = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & -k \end{bmatrix}$  ve

$$L_1 = \begin{bmatrix} k^2 + 2 & k \\ k & 2 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$L_{n+1} = kL_n + L_{n-1}$$

ile tanımlanan  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  matris dizisine “ $k$ -Lucas matris dizisi” denir. Aşağıda verilen ifade,  $k$ -Fibonacci matris dizileri ile  $k$ -Fibonacci sayı dizileri arasındaki bir bağıntıyı vermektedir.

$k$ -Lucas matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$L_n = \begin{bmatrix} L_{k,n+1} & L_{k,n} \\ L_{k,n} & L_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için  $k$ -Lucas matris dizisinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^n L_{k,i+1} x^{-i} = -\frac{1}{x^n (x^2 - kx - 1)} [x L_{k,n+2} + L_{k,n+1}] + \frac{1}{x^2 - kx - 1} [x L_{k,2} + (x^2 - kx) L_{k,1}]$$

şeklinde verilir.

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$  olacak şekilde yukarıdaki ifadenin sonsuz için toplam formülü,

$$\sum_{i=0}^{\infty} L_{k,i+1} x^{-i} = -\frac{1}{x^2 - kx - 1} [x L_{k,2} + (x^2 - kx) L_{k,1}]$$

şeklinde olur.

## 5.2. $(s, t)$ Fibonacci ve $(s, t)$ Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

Bu kısımda Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin iki değişkene bağlı yeni bir genelleştirmesini tanımlayacağız.

**Tanım 5.2.1.**  $s^2 + 4t > 0$  olacak şekildeki  $s > 0$ ,  $t \neq 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları için başlangıç şartları  $f_0(s, t) = 0$ ,  $f_1(s, t) = 1$  olmak üzere,

$$f_{n+1}(s, t) = sf_n(s, t) + tf_{n-1}(s, t)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{f_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sayı dizisine “ $(s, t)$  Fibonacci sayı dizisi” denir.  $s = t = 1$  alınırsa, Fibonacci sayı dizisi elde edilir.

**Tanım 5.2.2.**  $s^2 + 4t > 0$  olacak şekildeki  $s > 0$ ,  $t \neq 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları için başlangıç şartları  $l_0(s, t) = 2$  ve  $l_1(s, t) = s$  olmak üzere,

$$l_{n+1}(s, t) = sl_n(s, t) + tl_{n-1}(s, t)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{l_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sayı dizisine “ $(s, t)$  Lucas sayı dizisi” denir.  $s = t = 1$  alınırsa, Lucas sayı dizisi elde edilir.

$(s, t)$  Fibonacci ve  $(s, t)$  Lucas sayı dizileri kısaca  $f_n, l_n$  sembolleriyle,  $(s, t)$  Fibonacci ve  $(s, t)$  Lucas matris dizileri  $F_n, L_n$  sembolleriyle gösterilecektir.

**Tanım 5.2.3.**  $s^2 + 4t > 0$  olacak şekildeki  $s > 0$ ,  $t \neq 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları için başlangıç şartları  $F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $F_1 = \begin{bmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$F_{n+1}(s, t) = sF_n(s, t) + tF_{n-1}(s, t)$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanan  $\{F_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  matris dizisine “ $(s, t)$  Fibonacci matris dizisi” denir. Aşağıda verilen ifade Fibonacci matris dizileri ile  $(s, t)$  Fibonacci sayı dizileri arasındaki bir bağıntıyı vermektedir:

$(s, t)$  Fibonacci matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$F_n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ tf_n & t f_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için  $(s, t)$  Fibonacci matris dizisinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{k=0}^n F_k x^{-k} = -\frac{1}{x^n(x^2-sx-t)} [xF_{n+1} + tF_n] + \frac{1}{x^2-sx-t} [xF_1 + (x^2-sx)F_0]$$

şeklinde olur.

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{s + \sqrt{s^2 + 4t}}{2}$  olacak şekilde, yukarıdaki ifadesinin sonsuz için limiti

alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^{-k} = \frac{1}{x^2-sx-t} [xF_1 + (x^2-sx)F_0]$$

şeklinde olur.

**Tanım 5.2.4.**  $s^2 + 4t > 0$  olacak şekildeki  $s > 0$ ,  $t \neq 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları için

başlangıç şartları  $L_0 = \begin{bmatrix} s & 2 \\ 2t & -s \end{bmatrix}$  ve  $L_1 = \begin{bmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$L_{n+1}(s, t) = sL_n(s, t) + tL_{n-1}(s, t)$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanan  $\{L_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  matris dizisine “ $(s, t)$  Lucas matris dizisi” denir. Aşağıda verilen teorem Lucas matris dizileri ile  $(s, t)$  Lucas sayı dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir:

$(s, t)$  Lucas matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$L_n = \begin{bmatrix} l_{n+1} & l_n \\ tl_n & tl_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için  $(s, t)$  Lucas matris dizisinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{k=0}^n L_{k+1} x^{-k} = -\frac{1}{x^n(x^2-sx-t)} [xL_{n+2} + tL_{n+1}] + \frac{1}{x^2-sx-t} [xL_2 + (x^2-sx)L_1]$$

şeklinde olur.

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{s + \sqrt{s^2 + 4t}}{2}$  olacak şekilde, yukarıdaki ifadesinin sonsuz için limiti alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_{k+1} x^{-k} = -\frac{1}{x^2 - sx - t} [xL_2 + (x^2 - sx)L_1]$$

şeklinde olur.

$(s, t)$  Fibonacci sayı dizisi için  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{s + \sqrt{s^2 + 4t}}{2}$  olacak şekilde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} x^{-k} = \frac{x(sx + 4)}{x^2 - sx - t}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{-k} = \frac{2x(x - s)}{x^2 - sx - t}$$

negatif kuvvetli üreteç fonksiyon formülleri geçerlidir (Civciv, 2008).

### 5.3. $k$ -Jacobsthal ve $k$ -Jacobsthal Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 5.3.1.**  $k > 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları için başlangıç şartları  $J_{k,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve

$J_{k,1} = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$J_{k,n+1} = kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{J_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  matris dizisine “ $k$ -Jacobsthal matris dizisi” denir. Aşağıda verilen ifade  $k$ -Jacobsthal matris dizileri ile  $k$ -Jacobsthal sayı dizileri arasındaki bir bağıntıyı vermektedir:

$k$ -Jacobsthal matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$J_{k,n} = \begin{bmatrix} j_{k,n+1} & 2j_{k,n} \\ j_{k,n} & 2j_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için  $k$ -Jacobsthal matris dizisinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^n J_{k,i} x^{-i} = -\frac{1}{x^n(x^2-kx-2)} [xJ_{k,n+1} + 2J_{k,n}] + \frac{1}{x^2-kx-2} [xJ_{k,1} + (x^2-kx)J_{k,0}]$$

şeklinde olur.

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$  olacak şekilde, yukarıdaki ifadesinin sonsuz için limiti alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{\infty} J_{k,i} x^{-i} = \frac{1}{x^2-kx-2} [xJ_{k,1} + (x^2-kx)J_{k,0}]$$

şeklinde olur.

$k$ -Jacobsthal sayı dizisi için  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$  olacak şekilde,

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i+1} x^{-i} = \frac{x^2}{x^2-kx-2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} j_{k,i} x^{-i} = \frac{x}{x^2-kx-2}$$

negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu formülleri geçerlidir (Uygun, Eldoğan, 2016).

**Tanım 5.3.2.**  $k > 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları için başlangıç şartları  $C_{k,0} = \begin{bmatrix} k & 4 \\ 2 & -k \end{bmatrix}$  ve

$C_{k,1} = \begin{bmatrix} k^2 + 4 & 2k \\ k & 4 \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$C_{k,n+1}(s, t) = kC_{k,n} + 2C_{k,n-1}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{C_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  matris dizisine “ $k$ -Jacobsthal Lucas matris dizisi” denir. Aşağıda verilen ifade  $k$ -Jacobsthal Lucas matris dizileri ile  $k$ -Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasındaki bir bağıntıyı vermektedir:

$k$ -Jacobsthal Lucas matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$C_{k,n} = \begin{bmatrix} c_{k,n+1} & 2c_{k,n} \\ c_{k,n} & 2c_{k,n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için  $k$ -Jacobsthal Lucas matris dizisinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^n C_{k,i+1} x^{-i} = -\frac{1}{x^n(x^2-kx-2)} [xC_{k,n+2} + 2C_{k,n+1}] + \frac{1}{x^2-kx-2} [xC_{k,2} + (x^2-kx)C_{k,1}]$$

şeklinde olur.

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$  olacak şekilde, yukarıdaki ifadesinin sonsuz için limiti alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_{k,i+1} x^{-i} = -\frac{1}{x^2-kx-2} [xC_{k,2} + (x^2-kx)C_{k,1}]$$

şeklinde olur.

$k$ -Jacobsthal Lucas sayı dizisi için  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$  olacak şekilde,

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i+1} x^{-i} = \frac{x(kx+4)}{x^2-kx-2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i} x^{-i} = \frac{2x(x-k)}{x^2-kx-2}$$

formülleri geçerlidir (Uygun, Eldoğan, 2016).

#### 5.4. $(s,t)$ Jacobsthal ve $(s,t)$ Jacobsthal Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 5.4.1.**  $n \geq 1$  ve  $s^2 + 8t > 0$  olacak şekildeki  $s > 0$  ve sıfırdan farklı  $t$  tamsayıları için başlangıç şartları  $j_0(s,t) = 0$ ,  $j_1(s,t) = 1$  olmak üzere,

$$j_{n+1}(s,t) = sj_n(s,t) + 2tj_{n-1}(s,t)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{j_n(s,t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sayı dizisine “ $(s,t)$  Jacobsthal sayı dizisi” denir.  $s = t = 1$  alınırsa, Jacobsthal sayı dizisi elde edilir.

**Tanım 5.4.2.**  $n \geq 1$  ve  $s^2 + 8t > 0$  olacak şekildeki  $s > 0$  ve sıfırdan farklı  $t$  tamsayıları için başlangıç şartları  $c_0(s,t) = 2$ ,  $c_1(s,t) = s$  olmak üzere,

$$c_{n+1}(s,t) = sc_n(s,t) + 2tc_{n-1}(s,t)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{c_n(s,t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sayı dizisine “ $(s,t)$  Jacobsthal Lucas sayı dizisi” denir.  $s = t = 1$  alınırsa, Jacobsthal Lucas sayı dizisi elde edilir.

**Tanım 5.4.3.**  $n \geq 1$  ve  $s^2 + 8t > 0$  olacak şekildeki  $s > 0$  ve sıfırdan farklı  $t$  tamsayıları için başlangıç şartları  $J_0(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $J_1(s,t) = \begin{bmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$J_{n+1}(s,t) = sJ_n(s,t) + 2tJ_{n-1}(s,t)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{J_n(s,t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  matris dizisine “ $(s,t)$  Jacobsthal matris dizisi” denir. Aşağıda verilen ifade  $(s,t)$  Jacobsthal matris dizileri ile  $(s,t)$  Jacobsthal sayı dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir:

$(s,t)$  Jacobsthal matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$J_n(s,t) = \begin{bmatrix} j_{n+1}(s,t) & 2j_n(s,t) \\ tj_n(s,t) & 2tj_{n-1}(s,t) \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için  $(s, t)$  Jacobsthal matris dizisinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{k=0}^n J_k(s, t)x^{-k} = -\frac{1}{x^n(x^2 - sx - 2t)} [xJ_{n+1}(s, t) + 2tJ_n(s, t)] \\ + \frac{1}{x^2 - sx - 2t} [xJ_1(s, t) + (x^2 - sx)J_0(s, t)]$$

şeklindedir.

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{s + \sqrt{s^2 + 8t}}{2}$  olacak şekilde, yukarıdaki ifadesinin sonsuz için limiti alınır,

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k(s, t)x^{-k} = \frac{1}{x^2 - sx - 2t} [xJ_1(s, t) + (x^2 - sx)J_0(s, t)]$$

elde edilir.

$(s, t)$  Jacobsthal sayı dizisi için  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{s + \sqrt{s^2 + 8t}}{2}$  olacak şekilde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_{k+1}(s, t)x^{-k} = \frac{x^2}{x^2 - sx - 2t}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} j_k(s, t)x^{-k} = \frac{x}{x^2 - sx - 2t}$$

sonsuz için toplam formülleri geçerlidir.

**Tanım 5.4.4.**  $n \geq 1$  tamsayısı ve  $s^2 + 8t > 0$  olacak şekildeki  $s > 0$  ve sıfırdan farklı  $s$  ve  $t$  tamsayıları için başlangıç şartları  $C_0 = \begin{bmatrix} s & 4 \\ 2t & -2s \end{bmatrix}$  ve  $C_1 = \begin{bmatrix} s^2 + 2t & 2s \\ st & 4t \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$C_{n+1}(s, t) = sC_n(s, t) + 2tC_{n-1}(s, t)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan  $\{C_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  matris dizisine “ $(s, t)$  Jacobsthal Lucas matris dizisi” denir. Aşağıda verilen ifade  $(s, t)$  Jacobsthal Lucas matris dizileri ile  $(s, t)$  Jacobsthal Lucas sayı dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir:

$(s, t)$  Jacobsthal Lucas matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$C_n(s, t) = \begin{bmatrix} c_{n+1}(s, t) & 2c_n(s, t) \\ tc_n(s, t) & 2tc_{n-1}(s, t) \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için  $(s, t)$  Jacobsthal Lucas matris dizisinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_{k+1}(s, t)x^{-k} &= -\frac{1}{x^n(x^2-sx-2t)} [xC_{n+2}(s, t) + 2tC_{n+1}(s, t)] \\ &+ \frac{1}{x^2-sx-2t} [xC_2(s, t) + (x^2-sx)C_1(s, t)] \end{aligned}$$

elde edilir.

$x > \frac{s + \sqrt{s^2 + 8t}}{2}$  olacak şekilde, yukarıdaki ifadesinin sonsuz için limiti alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}(s, t)x^{-k} = -\frac{1}{x^2-sx-2t} [xC_2(s, t) + (x^2-sx)C_1(s, t)]$$

şeklinde olur.

$(s, t)$  Jacobsthal Lucas sayı dizisi için  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > \frac{s + \sqrt{s^2 + 4t}}{2}$  olacak şekilde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(s, t)x^{-k} = \frac{x(sx + 4)}{x^2 - sx - 2t}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(s, t)x^{-k} = \frac{2x(x - s)}{x^2 - sx - 2t}$$

sonsuz için toplam formülleri geçerlidir (Uslu, Uygun, 2016).

## 5.5. Bi periodik Fibonacci ve Bi periodik Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 5.5.1.** Bi periodik Fibonacci matris dizisi,  $n \geq 2$  tamsayısı için başlangıç

şartları  $F_0(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $F_1(a,b) = \begin{bmatrix} b & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$F_n(a,b) = \begin{cases} aF_{n-1}(a,b) + F_{n-2}(a,b), & n \text{ çift} \\ bF_{n-1}(a,b) + F_{n-2}(a,b), & n \text{ tek} \end{cases}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.  $a = b = 1$  seçersek, klasik Fibonacci matrisdizisini elde ederiz.

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ tek} \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases} \text{ olmak üzere,}$$

Bi periodik Fibonacci matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$F_n(a,b) = \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n+1} & \frac{b}{a} q_n \\ q_n & \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

Bi periodik Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_i(a,b)x^i = \frac{1}{1-(ab+2)x^2+x^4} \begin{bmatrix} 1+bx-x^2 & \frac{b}{a}x+bx^2-\frac{b}{a}x^3 \\ x+ax^2-x^3 & 1-(ab+1)x^2+bx^3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

Bi periodik Fibonacci dizisi için  $x$  in negatif değerleri için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k(a,b)x^{-k} = \frac{1}{1-(ab+2)x^2+x^4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{F_{n-1}(a,b)}{x^{n-1}} - \frac{F_{n+1}(a,b)}{x^{n-3}} + \frac{F_n(a,b)}{x^n} - \frac{F_{n+2}(a,b)}{x^{n+2}} \\ +x^4F_0(a,b) + x^3F_1(a,b) \\ -x^2[(ab+1)F_0(a,b) - aF_1(a,b)] - x[(F_1(a,b) - bF_0(a,b))] \end{array} \right\}$$

şeklindedir.

**Tanım 5.5.2.** Bi periodik Lucas matris dizisi,  $n \geq 2$  tamsayısı için başlangıç şartları

$$L_0(a,b) = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2\frac{a}{b} & -a \end{bmatrix} \text{ ve } L_1(a,b) = \begin{bmatrix} a^2 + 2\frac{a}{b} & a \\ \frac{a^2}{b} & 2\frac{a}{b} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$L_n(a,b) = \begin{cases} aL_{n-1}(a,b) + L_{n-2}(a,b), & n \text{ tek} \\ bL_{n-1}(a,b) + L_{n-2}(a,b), & n \text{ çift} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.  $a = b = 1$  seçersek, klasik Lucas matris dizisini elde ederiz.

Bi periodik Lucas matris dizisinin  $n$ . elemanı,

$$L_n(a,b) = \begin{bmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{n+1} & l_n \\ \frac{a}{b} l_n & \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

Bi periodik Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{i=0}^{\infty} L_i(a,b)x^i = \frac{1}{1 - (ab+2)x^2 + x^4} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ \frac{a}{b}B_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = a + \left(a^2 + 2\frac{a}{b}\right)x + ax^2 - 2\frac{a}{b}x^3$$

$$B_2 = 2 + ax - (ab+2)x^2 + ax^3$$

$$C_2 = -a + 2\frac{a}{b}x + (3+ab)ax^2 - \left(a^2 + 2\frac{a}{b}\right)x^3$$

şeklinde verilir.  $x$  in negatif değerleri için üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k(a,b)x^{-k} = \frac{1}{1 - (ab+2)x^2 + x^4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{L_{n-1}(a,b)}{x^{n-1}} - \frac{L_{n+1}(a,b)}{x^{n-3}} + \frac{L_n(a,b)}{x^n} - \frac{L_{n+2}(a,b)}{x^{n+2}} + \\ x^4 L_0(a,b) + x^3 L_1(a,b) - x^2 [(ab+1)L_0(a,b) - bF_1(a,b)] \\ - x[L_1(a,b) - aL_0(a,b)] \end{array} \right\}$$

veya

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k(a,b)x^{-k} = \frac{1}{1-(ab+2)x^2+x^4} \begin{bmatrix} D & E \\ \frac{a}{b}E & F \end{bmatrix}$$

$$D = ax^3 + \left(a^2 + 2\frac{a}{b}\right)x^2 - ax + 2\frac{a}{b}$$

$$E = 2x^3 + ax^2 + (ab+2)x + a$$

$$F = -ax^3 + 2\frac{a}{b}x^2 - (a^2b+3a)x - a^2 + 2\frac{a}{b}$$

şeklinde verilir (Coşkun, Taşkara, 2016).

## 5.6. Bi periodik Jacobsthal, Bi periodik Jacobsthal Lucas Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 5.6.1** Bi-periodik Jacobsthal matris dizisi  $n \geq 2$  tamsayısı için başlangıç

şartları  $J_0(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $J_1(a,b) = \begin{bmatrix} b & 2\frac{a}{b} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$J_n(a,b) = \begin{cases} aJ_{n-1}(a,b) + 2J_{n-2}(a,b), & n \text{ çift} \\ bJ_{n-1}(a,b) + 2J_{n-2}(a,b), & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$n$ . bi periodik Jacobsthal matris dizisinin elemanı; bi periodik Jacobsthal dizisinin elemanlarını kullanarak;

$$J_n(a,b) = \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} j_{n+1} & 2\frac{b}{a} j_n \\ j_n & 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} j_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

Bi periodik Jacobsthal matris dizisinin binet formülü,

$$J_n(a,b) = A\{(\alpha^n - \beta^n)\} + B\left(\alpha^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} - \beta^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}\right)$$

$$A = \frac{[J_1(a, b) - bJ_0(a, b)]^{\xi(n)} [aJ_1(a, b) - 2J_0(a, b) - abJ_0(a, b)]^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\alpha - \beta)}$$

$$B = \frac{b^{\xi(n)} J_0(a, b)}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} (\alpha - \beta)}$$

$$\alpha = \frac{ab + \sqrt{a^2 b^2 + 8ab}}{2}, \quad \beta = \frac{ab - \sqrt{a^2 b^2 + 8ab}}{2}$$

olarak verilir.

Bi-periodik Jacobsthal dizisi için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_k(a, b)x^i = \frac{1}{1 - (ab+2)x^2 + x^4} \begin{cases} 1 + bx - 2x^2 & 2\frac{b}{a}x + 2bx^2 - 4\frac{b}{a}x^3 \\ x + ax^2 - 2x^3 & 1 - (ab+2)x^2 + 2bx^3 \end{cases}$$

şeklinde verilir.

**Tanım 5.6.2.** Bi periodik Jacobsthal Lucas matris dizisi  $n \geq 2$  tamsayısı için

başlangıç şartları  $C_0(a, b) = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2\frac{a}{b} & -a \end{bmatrix}$  ve  $C_1(a, b) = \begin{bmatrix} a^2 + 4\frac{a}{b} & 2a \\ \frac{a^2}{b} & 4\frac{a}{b} \end{bmatrix}$  olmak üzere,

$$C_n(a, b) = \begin{cases} bC_{n-1}(a, b) + 2C_{n-2}(a, b), & n \text{ çift} \\ aC_{n-1}(a, b) + 2C_{n-2}(a, b), & n \text{ tek} \end{cases}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

$n$ . bi periodik Jacobsthal Lucas matris dizisinin elemanı; bi periodik Jacobsthal Lucas dizisinin elemanlarını kullanarak;

$$C_n(a, b) = \begin{bmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} c_{n+1} & 2c_n \\ \frac{a}{b} c_n & 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} c_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

Bi periodik Lucas matris dizisinin binet formülü,

$$C_n(a, b) = A\{\alpha^n - \beta^n\} + B\left(\alpha^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} - \beta^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}\right)$$

$$A = \frac{\{C_1(a, b) - aC_0(a, b)\}^{\xi(n)} \left\{ \begin{array}{l} bC_1(a, b) - 2C_0(a, b) \\ -abC_0(a, b) \end{array} \right\}^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\alpha - \beta)}$$

$$B = \frac{a^{\xi(n)} C_0(a, b)}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} (\alpha - \beta)}$$

şeklindedir.

Bi periodik Jacobsthal Lucas matris dizisinin  $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$  için üreteç fonksiyonu;

$$\frac{C_0(a, b) + C_1(a, b)x + \{bC_1(a, b) - (ab + 2)C_0(a, b)\}x^2 + \{2aC_0(a, b) - 2C_1(a, b)\}x^3}{1 - (ab + 4)x^2 + 4x^4}$$

veya

$$\frac{1}{1 - (ab + 4)x^2 + 4x^4} \begin{bmatrix} X & Y \\ \frac{a}{2b}Y & Z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ \frac{a}{2b}Y & Z \end{pmatrix}$$

$$X = a + \left(a^2 + 4\frac{a}{b}\right)x + 2ax^2 - 8\frac{a}{b}x^3,$$

$$Y = 4 + 2ax - (2ab + 8)x^2 + 4ax^3$$

$$Z = -a + 4\frac{a}{b}x + (6a + a^2b)x^2 - \left(2a^2 + 8\frac{a}{b}\right)x^3$$

matris formu ile verilebilir.

### 5.7. Genelleştirilmiş (s,t) Jacobsthal Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 5.7.1.**  $a, b \in R$ ,  $s > 0$ ,  $t \neq 0$ ,  $s^2 + 8t > 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları olmak üzere, genelleştirilmiş (s,t) Jacobsthal sayı dizisi  $\{g_n(s, t)\}_{n \in N}$ , başlangıç şartları  $g_0(s, t) = a$  ve  $g_1(s, t) = bs$  olmak üzere,

$$g_{n+1}(s, t) = sg_n(s, t) + 2tg_{n-1}(s, t)$$

şeklinde tanımlanır. Karakteristik denklemini  $x^2 = sx + 2t$  şeklindedir.

**Tanım 5.7.2.**  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$ ,  $t \neq 0$ ,  $s^2 + 8t > 0$  ve  $n \geq 1$  tamsayıları olmak üzere, genelleştirilmiş  $(s, t)$  Jacobsthal matris dizisi  $\{G_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , başlangıç şartları

$$G_0(s, t) = \begin{bmatrix} bs & 2a \\ at & (b-a)s \end{bmatrix} \text{ ve } G_1(s, t) = \begin{bmatrix} bs^2 + 2at & 2bs \\ bst & 2at \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$G_{n+1}(s, t) = sG_n(s, t) + 2tG_{n-1}(s, t)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Tanımlar kullanılarak,

$$a = 2 \text{ ve } b = 1 \Rightarrow \begin{cases} g_n(s, t) = c_n(s, t) \\ G_n(s, t) = C_n(s, t) \end{cases}$$

$$a = b = 1 \Rightarrow \begin{cases} g_n(s, t) = j_{n+1}(s, t) \\ G_n(s, t) = J_{n+1}(s, t) \end{cases}$$

elde edilir.

$n \geq 0$  tamsayısı için, genelleştirilmiş  $(s, t)$  Jacobsthal matris dizisinin elemanları; genelleştirilmiş  $(s, t)$  Jacobsthal sayı dizisinin elemanları kullanılarak,

$$G_n(s, t) = \begin{bmatrix} g_{n+1}(s, t) & 2g_n(s, t) \\ tg_n(s, t) & 2tg_{n-1}(s, t) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Genelleştirilmiş Jacobsthal matris dizilerinin negatif kuvvetli üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{k=0}^n G_k(s, t)x^{-k} = \frac{1}{x^n(x^2 - sx - 2t)} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{G_1(s, t) - \beta G_0(s, t)}{\alpha - \beta} \right) (x^{n+1} - \alpha^{n+1})(x - \beta) \\ - \left( \frac{G_1(s, t) - \alpha G_0(s, t)}{\alpha - \beta} \right) (x^{n+1} - \beta^{n+1})(x - \alpha) \end{array} \right\}$$

şeklinde bir toplam formülü ile verilir.

## 5.8. Bivariate Jacobsthal ve Bivariate Jacobsthal Lucas Polinom Matris Dizileri ve Üreteç Fonksiyonları

**Tanım 5.8.1.**  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $x^2y^2 + 8y > 0$  ve  $n \geq 2$  tamsayıları olmak üzere

bivariate Jacobsthal matris polinom dizisinin  $n$  elemanı;  $J_0(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve

$J_1(x, y) = \begin{bmatrix} xy & 2 \\ y & 0 \end{bmatrix}$  başlangıç şartları kullanılarak,

$$J_n(x, y) = xyJ_{n-1}(x, y) + 2yJ_{n-2}(x, y)$$

yineleme bağıntısı ile elde edilir:

Aşağıdaki ifade, bivariate Jacobsthal matris polinom dizisi ile bivariate Jacobsthal sayı dizisi arasındaki bağıntıyı vermektedir:

$n$  pozitif tamsayı olmak üzere,

$$J_n(x, y) = \begin{bmatrix} j_{n+1}(x, y) & 2j_n(x, y) \\ yj_n(x, y) & 2yj_{n-1}(x, y) \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

$n \geq 0$  tamsayısı için bivariate Jacobsthal matris polinom dizisinin üreteç fonksiyonu;

$$J = \sum_{k=1}^n j_k(x, y)t^k = \frac{1}{1 - xyt - 2yt^2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ yt & 1 - xyt \end{bmatrix}$$

olur.

**Tanım 5.8.2.**  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $x^2y^2 + 8y > 0$  ve  $n \geq 2$  tamsayıları olmak üzere

Bivariate Jacobsthal Lucas matris polinom dizisinin  $n$ . elemanı  $C_0(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve

$C_1(x, y) = \begin{bmatrix} xy^2 + 4y & 2xy \\ xy^2 & 4y \end{bmatrix}$  başlangıç şartları kullanılarak,

$$C_n(x, y) = xyC_{n-1}(x, y) + 2yC_{n-2}(x, y)$$

yineleme bağıntısı ile elde edilir.

Aşağıdaki ifade, bivariate Jacobsthal Lucas matris polinom dizisi ile bivariate Jacobsthal Lucas sayı dizisi arasındaki bağıntıyı vermektedir:

$n$  pozitif tamsayı olmak üzere,

$$C_n(x, y) = \begin{bmatrix} c_{n+1}(x, y) & 2c_n(x, y) \\ yc_n(x, y) & 2yc_{n-1}(x, y) \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

$n \geq 0$  tamsayısı için bivariate Jacobsthal Lucas matris polinom dizisinin üreteç fonksiyonu;

$$C = \sum_{k=1}^n c_k(x, y)t^k = \frac{1}{1 - xyt - 2yt^2} \begin{pmatrix} 1 + xyt(y-1) & 2xyt^2 \\ txy^2 & 1 + yt(4-x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.



## BÖLÜM 6

### ÜSTEL ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Üstel fonksiyonlar radyoaktif azalma bakterisi artışı, bileşik faiz ve olasılık teorisi gibi birçok alanda karşımıza çıkan önemli bir fonksiyondur.  $e = 2.718\dots$  transandental sabiti doğal logaritmalar için taban oluşturur.  $e^x$  için Maclaurin seri açılımı,

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!} + \dots + \frac{(x)^n}{n!} + \dots$$

şeklindedir.

#### 6.1. Fibonacci ve Lucas Özdeşlikleri İçin Üstel Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarında görülen çeşitli özdeşlikleri elde etmek için üstel üreteç fonksiyonları kullanacağız. Fibonacci sayıları  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ve

$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  olmak üzere;  $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$  Binet formülüne sahiptir.

$$e^{\alpha t} = 1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \frac{(\alpha t)^4}{4!} + \dots + \frac{(\alpha t)^n}{n!} + \dots$$

eşitliği kullanılarak,

$$\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = (1-1) + \frac{(\alpha - \beta)t}{1!} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)t^2}{2!} + \frac{(\alpha^3 - \beta^3)t^3}{3!} + \frac{(\alpha^4 - \beta^4)t^4}{4!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{t^n}{n!}$$

ifadesiyle edilir. Benzer şekilde,

$$e^{\alpha t} + e^{\beta t} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \frac{t^n}{n!}$$

eşitliği görülebilir.

**Lemma 6.1.1**  $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$  ve  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$  serileri verilsin.

İki serinin çarpımı,

$$A(t)B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

$$A(t)B(-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde verilir.

**Teorem 6.1.2.**  $n$  pozitif tamsayı ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k = f_{2n}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{t^n}{n!}$  ve  $B(t) = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$  olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= \left( \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \right) (e^t) = \left( \frac{e^{(\alpha+1)t} - e^{(\beta+1)t}}{\alpha - \beta} \right) = \left( \frac{e^{\alpha^2 t} - e^{\beta^2 t}}{\alpha - \beta} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} \frac{t^n}{n!} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

ifadesinden,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k = f_{2n}$$

istenilen elde edilir.

**Teorem 6.1.3.**  $m, n$  pozitif tamsayılar ise,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k = (-1)^{n+1} f_n$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_{2k} = f_n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k l_{n-k} = 2^n f_n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k f_{n-k} = \frac{1}{5} (2^n l_n - 2)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} l_k l_{n-k} = 2^n l_n + 2$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{mk} l_{mn-mk} = 2^n f_{mn}$$

eşitlikleri de uygun  $A(t)$  ve  $B(t)$  seçimleri ile ispatlanabilir (Church, 1973).

## 6.2. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Özdeşlikleri İçin Üstel Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümdeki, çalışmalarla ilgili bir makale yazıp, incelenmek üzere bir dergiye göndermiş bulunmaktayız.

Jacobsthal sayıları,

$$j_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

Binet formülüne sahiptir.

Jacobsthal Lucas sayıları,

$$c_n = \alpha^n + \beta^n = 2^n + (-1)^n$$

Binet formülüne sahiptir.

Üstel fonksiyonun seri açılımından,

$$e^{2t} = 1 + \frac{2t}{1!} + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^4}{4!} + \dots + \frac{(2t)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^n}{n!}$$

$$e^{-t} = 1 + \frac{(-t)}{1!} + \frac{(-t)^2}{2!} + \frac{(-t)^3}{3!} + \frac{(-t)^4}{4!} + \dots + \frac{(-t)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

yazılır. Bunları kullanarak,

$$\frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} j_n \frac{t^n}{n!} \text{ ve } e^{2t} + e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

eşitlikleri elde edilir.

**Teorem 6.2.1.**  $n$  pozitif tamsayı ise,

$$\mathbf{a)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_k 2^{n-k} = j_{2n}$$

$$\mathbf{b)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k 2^{n-k} = c_{2n}$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} j_n \frac{t^n}{n!}$  ve  $B(t) = e^{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!}$  olarak seçilirse,

$$A(t)B(t) = \left( \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \right) \left( e^{2t} \right) = \left( \frac{e^{(\alpha+2)t} - e^{(\beta+2)t}}{\alpha - \beta} \right) = \left( \frac{e^{\alpha^2 t} - e^{\beta^2 t}}{\alpha - \beta} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\alpha^2 t})^n - (e^{\beta^2 t})^n}{\alpha - \beta} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n} \frac{t^n}{n!}$$

$$A(t)B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n} \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\alpha^k - \beta^k}{(\alpha - \beta)} 2^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_k 2^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

Eğer benzer şekilde,  $A(t) = e^{\alpha t} + e^{\beta t}$  ve  $B(t) = e^{2t}$  olarak seçilirse;

$$\begin{aligned}
 A(t)B(t) &= e^{(\alpha+2)t} + e^{(\beta+2)t} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\alpha^2 t})^n + (e^{\beta^2 t})^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \frac{t^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k + \beta^k) 2^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k 2^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}
 \end{aligned}$$

istenilen elde edilir.

**Teorem 6.2.2.**  $n \geq 0$  tamsayısı için,

$$\mathbf{a)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} j_k = (-1)^{n+1} j_n$$

$$\mathbf{b)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} c_k = (-1)^n c_n$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$  ve  $B(t) = e^{-t}$  olarak seçilirse,

$$A(t)B(t) = \left( \frac{e^{(\alpha-1)t} - e^{(\beta-1)t}}{\alpha - \beta} \right) = \left( \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta t)^n - (-\alpha t)^n}{(\alpha - \beta)n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} j_n \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} j_n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} (-1)^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} j_k \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.3.**  $n \geq 0$  tamsayısı için,

$$\mathbf{a)} \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \binom{n}{k} j_{2k} = j_n$$

$$\mathbf{b)} \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \binom{n}{k} c_{2k} = c_n$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = \frac{e^{\alpha^2 t} - e^{\beta^2 t}}{\alpha - \beta}$  ve  $B(t) = e^{-2t}$  olarak seçilirse,

$$A(t)B(t) = \left( \frac{e^{(\alpha^2 - 2)t} - e^{(\beta^2 - 2)t}}{\alpha - \beta} \right) = \left( \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} J_n \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\alpha^{2k} - \beta^{2k}}{\alpha - \beta} (-2)^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^{n-k} j_{2k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.4.**  $n \geq 0$  tamsayısı için,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_k c_{n-k} = 2^n j_n$$

eşitlikliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$  ve  $B(t) = e^{\alpha t} + e^{\beta t}$  olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= \left( \frac{e^{2\alpha t} - e^{2\beta t}}{\alpha - \beta} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n j_n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} (\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_k c_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.5.**  $n \geq 0$  tamsayısı için,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_k j_{n-k} = \frac{1}{9} (2^n c_n - 2)$$

eşitlikliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = B(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$  olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= \left( \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \right)^2 = \frac{1}{9} (e^{2\alpha t} + e^{2\beta t} - 2e^t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n c_n - 2) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} \left( \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\alpha - \beta} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_k j_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.6.**  $n \geq 0$  tamsayısı için,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k c_{n-k} = 2^n c_n + 2$$

eşitlikliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = B(t) = e^{\alpha t} + e^{\beta t}$  olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= (e^{\alpha t} + e^{\beta t})^2 = e^{2\alpha t} + e^{2\beta t} + 2e^t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n c_n + 2) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} (\alpha^k + \beta^k) (\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k c_{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.7.**  $m, n$  pozitif tamsayılar ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{mk} c_{mn-k} = 2^n j_{mn}$$

eşitlikliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = \frac{e^{\alpha^m t} - e^{\beta^m t}}{\alpha - \beta}$  ve  $B(t) = e^{\alpha^m t} + e^{\beta^m t}$  olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= \frac{e^{2\alpha^m t} - e^{2\beta^m t}}{\alpha - \beta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n j_{mn} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{mk} c_{mn-nk} \right) \frac{t^n}{n!}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.8.**  $m, n$  pozitif tamsayılar ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{mk} j_{mn-nk} = \frac{1}{9} (2^n c_{mn} - 2c_m^n)$$

eşitlikliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = B(t) = \frac{e^{\alpha^m t} - e^{\beta^m t}}{\alpha - \beta}$  olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{mn} - \beta^{mn})t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{mn} - \beta^{mn})t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{mk} j_{mn-nk} \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \left( \frac{e^{\alpha^m t} - e^{\beta^m t}}{\alpha - \beta} \right)^2 = \frac{1}{9} (e^{2\alpha^m t} + e^{2\beta^m t} - 2e^{(\alpha^m + \beta^m)t}) \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (2^n c_{mn} - 2c_m^n) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.9.**  $m, n$  pozitif tamsayılar ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_{mk} j_{m(n-k)} = 2^n j_{mn}$$

eşitlikliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = e^{\alpha^m t} + e^{\beta^m t}$  ve  $B(t) = \frac{e^{\alpha^m t} - e^{\beta^m t}}{\alpha - \beta}$  olarak seçilirse,

$$A(t)B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{mn} + \beta^{mn})t^n}{n!} \left( \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{mn} - \beta^{mn})t^n}{n!} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_{mk} j_{m(n-k)} \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{e^{2\alpha^m t} - e^{2\beta^m t}}{\alpha - \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (\alpha^{mn} - \beta^{mn}) t^n}{(\alpha - \beta) n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n j_{mn} \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.10.**  $m, n$  pozitif tamsayılar ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_{mk} c_{mn-mk} = 2^n c_{mn} - 2c_m^n$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = B(t) = e^{\alpha^m t} + e^{\beta^m t}$  olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
A(t)B(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_{mk} c_{mn-mk} \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= (e^{\alpha^m t} + e^{\beta^m t})^2 = e^{2\alpha^m t} + e^{2\beta^m t} - 2e^{(\alpha^m + \beta^m)t} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n c_{mn} - 2c_m^n) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.11.**  $n, r$  pozitif tamsayılar ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} j_{k+r} = j_{2n+r}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $A(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$ ,  $B(t) = e^{2t}$  olarak seçilir ve

$$D_t^r A(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n+r} \frac{t^n}{n!}$$

formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
D_t^r A(t)B(t) &= e^{2t} D_t^r \left( \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha^r e^{(\alpha+2)t} - \beta^r e^{(\beta+2)t}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^r e^{\alpha^2 t} - \beta^r e^{\beta^2 t}}{\alpha - \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n+r} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r} \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{k+r} 2^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

seri eşitliklerinden istenen elde edilir.

**Teorem 6.2.12.**  $m, n, r$  pozitif tamsayılar ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{4mk+r} 2^{2m(n-k)} = c_{2m}^n j_{2m+4mr}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{4mk+r} 2^{n-k} \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= D_t^r A(t)B(t) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ (\alpha^{4m})^r e^{(\alpha^{4m}t)} - (\beta^{4m})^r e^{(\beta^{4m}t)} \right] e^{(2^{2m}t)} \\
&= \frac{\alpha^{4mr}}{\alpha - \beta} e^{(\alpha^{4m+2^{2m}}t)} - \frac{\beta^{4mr}}{\alpha - \beta} e^{(\beta^{4m+2^{2m}}t)} \\
&= \frac{\alpha^{4mr}}{\alpha - \beta} e^{(\alpha^{4m+(-\alpha\beta)^{2m}}t)} - \frac{\beta^{4mr}}{\alpha - \beta} e^{(\beta^{4m+(-\alpha\beta)^{2m}}t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{4mr}}{\alpha - \beta} e^{\alpha^{2m}(\alpha^{2m} + \beta^{2m})t} - \frac{\beta^{4mr}}{\alpha - \beta} e^{\beta^{2m}(\alpha^{2m} + \beta^{2m})t} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \alpha^{4mr} e^{\alpha^{2m} C_{2m} t} - \beta^{4mr} e^{\beta^{2m} C_{2m} t} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2mn+4mr} c_{2m}^n t^n}{\alpha - \beta n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2mn+4mr} c_{2m}^n t^n}{\alpha - \beta n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2m}^n J_{2mn+4mr} \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$[D_t^r A(t)]B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{4mk+r} 2^{2m(n-k)} \right) \frac{t^n}{n!}$$

(Uygun, Zorçelik, 2017).

## BÖLÜM 7

### SAYI DİZİLERİ İÇİN BAZI ÖZEL ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

#### 7.1. Bazı Özel Fibonacci ve Lucas Üreteç Fonksiyonları

Hoggatt ve Bicknell matris metodları kullanarak,  $n$  pozitif tamsayısı için,

$$\sum_{i=0}^{2n+2} \binom{2n+2}{i} f_i^2 = 5^n l_{2n+2}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} f_i^2 = 5^n f_{2n+1}$$

eşitliklerini elde etmiştir. D. Lind tarafından benzer olarak,  $n$  pozitif tamsayısı için,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k = 1^n f_{2n}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{3k} = 2^n f_{2n}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{4k} = 3^n f_{2n}$$

eşitliklerini elde edilmiştir. Matris metodları kullanarak yeni ilginç çeşitli sonuçlar elde edilmiştir:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}; \quad n=0,1,2, \dots$$

Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonunu kullanarak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k = \frac{x}{1-x-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k \right) x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left( \frac{x}{1-x} \right)^n \\
&= \frac{1}{1-x} \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \left( \frac{x}{1-x} \right) - \left( \frac{x}{1-x} \right)^2} \\
&= \frac{x}{1-3x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^n \\
&\sum_{k=0}^n f_k x^k = f_{2n}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{2k} \right) x^n = \frac{x}{1-5x+5x^2}$$

elde edilir. Fibonacci sayılarının özellikleri kullanılarak yapılan bazı cebirsel işlemlerden sonra aşağıdaki sonuçlar Hoggatt tarafından elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\frac{3-2x}{1-3x+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k+2} x^k \\
\frac{x-x^2}{1-3x+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} x^k \\
\frac{3x^2-10x^4}{1-15x^2+25x^4} &= \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k+2} x^{2k+2} 5^k \\
\frac{x(1-5x^2)}{1-15x^2+25x^4} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} x^{2k+1} 5^k \\
\frac{x-2x^2}{1-5x+5x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k^2 \right) x^n \\
\frac{x+x^2}{1-3x+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k+1} x^{k+1}
\end{aligned}$$

$$\frac{x}{1-3x+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} x^k$$

$$\frac{x(1+5x^2)}{1-15x^2+25x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k+1} 5^k x^{2k+1}$$

$$\frac{5x^2}{1-15x^2+25x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} 5^k x^{2k}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} f_{2k} = 5^n f_{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} f_{2k} = 5^n l_{2n+1}$$

(Hoggatt, 1971).

## 7.2 Bazı Özel Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Üreteç Fonksiyonları

Jacobsthal sayı dizisi ile oluşturulan karakteristik denklemin kökleri;

$\alpha = 2$  ve  $\beta = -1$  kullanılarak,  $j_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$  ve  $c_n = \alpha^n + \beta^n$  Binet formülleri

tanımlanmıştır. Köklerin;  $\alpha\beta = -2$  ve  $\alpha^2 = \alpha + 2$  eşitliklerini sağlar.

Bunları kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_k 2^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} 2^{n-k} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k 2^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta^k 2^{n-k} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ (\alpha + 2)^n - (\beta + 2)^n \right] = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \alpha^{2n} - \beta^{2n} \right] \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_k 2^{n-k} = j_{2n}$$

elde edilir.

Benzer şekilde aşağıdaki teoremler elde edilebilir:

**Teorem 7.2.1.**  $n$  pozitif tamsayı ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{3k} 4^{n-k} = 3^n j_{2n}$$

eşitliğı sağlanır.

**İspat:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{3k} 4^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\alpha - \beta} 4^{n-k} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^3)^k 4^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\beta^3)^k 4^{n-k} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(\alpha^3 + 4)^n - (\beta^3 + 4)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(\alpha^2 + 2\alpha + 4)^n - (\beta^2 + 2\beta + 4)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(\alpha + 2 + 2\alpha + 4)^n - (\beta + 2 + 2\beta + 4)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(3\alpha + 6)^n - (3\beta + 6)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(3\alpha^2)^n - (3\beta^2)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(3\alpha^2)^n - (3\beta^2)^n] \\ &= 3^n \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\ &= 3^n j_{2n} \end{aligned}$$

olduğundan, istenen eşitlik sağlanır.

**Teorem 7.2.2.**  $n$  pozitif tamsayı ise,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{4k} 4^{n-k} = 5^n j_{2n}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j_{4k} 4^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\alpha^{4k} - \beta^{4k}}{\alpha - \beta} 4^{n-k} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^4)^k 4^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\beta^4)^k 4^{n-k} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(\alpha^4 + 4)^n - (\beta^4 + 4)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(\alpha + 2)^2 + 4)^n - (\beta + 2)^2 + 4)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(\alpha^2 + 4\alpha + 4 + 4)^n - (\beta^2 + 4\beta + 4 + 4)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(5\alpha + 10)^n - (5\beta + 10)^n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [(5\alpha^2)^n - (5\beta^2)^n] \\ &= 5^n \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = 5^n j_{2n} \end{aligned}$$

olduğundan istenen eşitlik sağlanır.

## BÖLÜM 8

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle çeşitli sayı dizilerinin (Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas, Pell, Pell Lucas gibi) ve genelleştirilmeleriyle oluşan sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları verilmiştir. Ek olarak bu sayı dizilerinden oluşan polinom dizileri ve genelleştirilmiş polinom dizilerinin üreteç fonksiyonları verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada çeşitli matris dizilerinin (Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas gibi) ve genelleştirilmeleriyle oluşan matris dizilerinin üreteç fonksiyonları verilmiştir. Üstel ve farklı üreteç fonksiyonları tanımlandıktan sonra çeşitli sayı dizilerinin birtakım özellikleri elde edilmiştir.

Çalışmamızla ilgili “The Bivariate Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Polynomial Matrix Sequences“ ve “Exponential Generating of Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Identities“ adlı iki makale çalışmamız incelenmek üzere iki farklı dergiye gönderilmiştir. Ayrıca “Notes on the Bivariate Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Polynomial Matrix Sequences “ adlı çalışmamız “International Conference on Mathematics and Mathematics Education” adlı sempozyumda sunulmuştur.

## KAYNAKLAR

- Bilgici, G. (2014). Two Generalizations of Lucas Sequence. *Applied Mathematics and Computation*, **245**, 526-538.
- Bolat, C., Köse, H. (2010). On the properties of k-Fibonacci Numbers. *Int.J.Contemp. Math. Sciences*. **22(5)**, 1097-1105.
- Carlitz, L. (1962). Generating Functions for Powers of Certain Sequences of Numbers. *Duke Math J.* **29**, 521-537.
- Carlitz, L. (1969). Generating Functions. *Fibonacci Quarterly*. **7.4**, 359-393.
- Catalani, M. (2004). Some Formulae for Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials, <http://front.math.ucdavis.edu.math.CO/0406323>.
- Catalani, M. (2004). Generalized Bivariate Fibonacci Polynomials, <http://front.math.ucdavis.edu.math.CO/0211366>.
- Catarino, P., Paulo, V. P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k-Pell-Lucas Sequence. *Applied Mathematical Sciences*. **7(98)**, 4867 – 4873.
- Catarino, P., Vasco P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k-Pell Lucas Sequence. *Applied Mathematical Sciences*. **7 (98)**, 4867-4873.
- Catarino, P. (2014). On some identities for k-Fibonacci sequence. *Int. Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. **9(1)**, 37-42.
- Church, C. A., Bicknell, M. (1973). Exponential Generating Functions for Fibonacci Numbers. *Fibonacci Quarterly*. **11(3)**, 275-281.
- Civciv, H., Türkmen, R. (2008). On the (s,t) Fibonacci matrix sequence. *Ars Combinatoria*. **87**, 161-173.
- Civciv, H., Turkmen, R. (2008). Notes on the (s,t) Lucas and Lucas matrix sequences, *ARS Combinatoria*. **89**, 271-285.
- Civciv, H. (2009). Fibonacci ve Lucas Matris dizileri ve Özellikleri, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- Cook, C.K., Bacon, M.R. (2013). Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers satisfying higher order recurrence relations. *Annales Mathematicae et Informaticae*. **41**, 27-39.

- Coskun, A., Taskara, N. (2016). The Matrix sequences in terms of Bi-periodic Fibonacci numbers. arXiv:163.07487v2 [math.NT], Accessed by 04.04.2016.
- Coskun, A., Yılmaz, N., Taskara N. (2016). A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas Matrix Sequences, arXiv:1604.00766v1 [math.NT], Accessed by 04.04.2016.
- Edson, M., Yayenie, O. (2009). A New Generalization of Fibonacci Sequences and The Extended Binet's Formula. *INTEGERS Electron. J. Comb. Number Theory*. **9**, 639-654.
- Falcon, S. (2007). On the Fibonacci k-Numbers. *Chaos, Solitons&Fractals*. **32(5)**, 1615-1624.
- Falcon, S.(2009). Plaza A. On k-Fibonacci Numbers of Arithmetic Indexes. *Applied Mathematics and Computation*. **208(1)**, 180-185.
- Falcon, S.(2011). On the k-Lucas numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. **6(21)**, 1039-1050.
- Falcon, S. (2012). On the k-Lucas Numbers of Arithmetic Indexes. *Applied Mathematics*. **03(10)**, 1202-1206.
- Halıcı, S., Akyüz Z. (2010). On Some Formulae for Bivariate Pell Polynomials. *Far East J. Appl. Math.* **41(2)**, 101-110.
- Hoggatt, V.E.Jr. (1969). Fibonacci and Lucas Numbers. Boston: Houghton-Mifflin.
- Hoggatt, V.E.Jr. (1971). Some Special Fibonacci and Lucas Generating Functions. *Fibonacci Quarterly*. **9(2)**, 121-133.
- Horadam, A.F. (1965), Generating Functions for Powers of Certain Generalized Sequences of Numbers. *Duke Math. J.* **32**, 437-446.
- Horadam, A.F. (1965). Basic Properties of a Certain Sequence of Numbers. *The Fibonacci Quarterly*. **3(2)**, 161-176.
- Horadam, A.F. (1971). Pell identities. *The Fibonacci Quart.* **9(3)**, 245-263.
- Horadam, A.F.(1997). Jacobsthal Representation Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*. **35(2)**, 137-1.
- Horadam, A.F. (1996). Jacobsthal Representation Numbers. *The Fibonacci Quarterly*. **37(2)**, 40-54.
- Jhala, D., Sisodiya, K., Rathore, G.P.S. (2013). On Some Identities for k-Jacobsthal Numbers. *Int. Journal of Math. Analysis*. **7(12)**, 551-556.
- Jhala, D. (2014). Some properties of the k-Jacobsthal Lucas sequence. *International Journal of Modern Sciences and Engineering Technology (IJMSET)*. **1(3)**, 87-92.

- Jhala, D., Rathore, G.P.S., Sisodiya, K. (2014). Some Properties of k-Jacobsthal Numbers with Arithmetic Indexes. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory* **2**(4), 119-124.
- Koken, F., Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal Numbers by Matrix Methods. *Int. Jour. Contemp. Math Sciences*. **3**(13), 605-614.
- Koken, F., Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal-Lucas Numbers by Matrix Methods. *Int. Jour. Contemp. Math Sciences*. **3**(13), 1629-1633.
- Kolodner, I. (1965). On a Generating Function Associated with Generalized Fibonacci Numbers, *The Fibonacci Quarterly*. **3**(4), 272-279.
- Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley-Interscience Publication.
- Mahon, Bro. J. M., Horodam, A. F. (1987). Ordinary Generating Functions For Pell Numbers. *The Fibonacci Quarterly*. **25**(1), 45-56.
- Mahon, Bro. J. M., Horodam, A.F. (1987). Exponential Generating Functions For Pell Numbers, *The Fibonacci Quarterly*. **25**(3), 194-203.
- Riordan, J. (1962). Generating Functions for Powers of Fibonacci Numbers. *Duke Math J. V.* **29**, 5-12.
- Shannon, A.G., Horadam, A.F. (1971), Generating Functions for Powers of Third-Order Recurrence Sequences. *Duke Math. J.* **38**, 791-794.
- Silva, A., Hogatt, V.E. (1980). Generalized Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*. **18**(4), 290-300.
- Singh, M., Gupta, Y., Sikhwal, O. (2014), Generalized Fibonacci – Lucas polynomials and its Properties *Global Journal of Mathematical Analysis*. **2**(3), 160-168.
- Sloane, N. J. A. (1973). A Handbook of Integer Sequences. New York: Academic Press.
- Uslu K., Uygun S. (2013). The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences. *ARS Combinatoria*. **108**, 13-22.
- Uygun, S. (2015). The (s,t)-Jacobsthal and (s,t)-Jacobsthal Lucas Sequences. *Applied Mathematical Sciences*. **70**(9), 3467-3476.
- Uygun, S., Eldogan, H. (2016). k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas Matrix Sequences. *International Mathematical Forum*. **11**(3), 145-154.
- Uygun, S. (2016). On the k-Jacobsthal Lucas Numbers of Arithmetic Indexes. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. **11**(4), 173 – 183.

- Uygun, S., Owusu, E. (2016). A New Generalization of Jacobsthal Numbers (Bi-Periodic Jacobsthal Sequences). *Journal of Mathematical Analysis*. **7(5)**, 28-39.
- Uygun, S., Owusu, E. (2017). A New Generalization of Jacobsthal Lucas Numbers (Bi-Periodic Jacobsthal Lucas Sequences) (submitted).
- Uygun, S., Owusu, E. (2017). A Note on Bi-Periodic Jacobsthal Lucas Sequence, (submitted).
- Uygun, S., Owusu E. (2017). Matrix Representation of Bi-Periodic Jacobsthal Sequence, arXiv:1702.00604v1 [math.CO], Accessed by 02.02.2017.
- Uygun, S., Uslu, K. (2016). The (s,t)-Generalized Jacobsthal Matrix Sequences. *Computational Analysis*. **155**, 325-336.
- Uygun, S. (2017). The Bivariate Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Polynomial Sequences. (submitted).
- Uygun, S., Zorçelik, A. (2017). The Bivariate Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Polynomial Matrix Sequences. International Conference in Mathematics and Mathematics Education-ICMME-2017. Harran University, Şanlıurfa.
- Uygun, S., Zorçelik, A. (2017). The Bivariate Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Polynomial Matrix Sequences (submitted).
- Uygun, S., Zorçelik, A. (2017). Exponential Generating of Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Identities. (submitted).
- Vajda, S. (1989). Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section. New York: John Wiley and Sons.
- Walton, J.E., Horadam, A.F. (1971). Some Properties of Certain Generalized Fibonacci Matrices. *The Fibonacci Quarterly*. **9(3)**, 264-276.
- Weisstein, Eric W. (1891). 2006-05-15, "[Jacobsthal Number](http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html)", Wolfram [Mathworld](http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html), [online], <http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html>, Retrieved 2007-10-03
- Yayenie, O. (2011). A Note on Generalized Fibonacci sequence. *Appl. Math. Comput.* **217**, 5603-5611.