



EGE ÜNİVERSİTESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİJİTAL KHALİMSKY MANİFOLDLARI

Gökhan TEMİZEL

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İsmet KARACA

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi : 14.08.2017

Bornova-İZMİR

2017

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

DİJİTAL KHALİMSKY MANİFOLDLARI

GÖKHAN TEMİZEL

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmet KARACA

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.04.01

Sunuş Tarihi: 14.08.2017

Bornova-İzmir

2017

Gökhan TEMİZEL tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "Dijital Khalimsky Manifoldları" başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 14.08.2017 tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

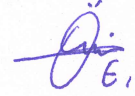
Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. İsmet KARACA



Raportör Üye : Doç. Dr. Özgür EGE



Üye : Prof. Dr. Urfat NURİYEV



EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**Dijital Khalimsky Manifoldları**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

14/08/2017



Gökhan TEMİZEL

ÖZET

DİJİTAL KHALİMSKY MANİFOLDLARI

TEMİZEL, Gökhan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmet KARACA

Ağustos 2017, 50 sayfa

Dijital Khalimsky manifoldları, Euclid geometrisindeki şekillerin dijital karşılıklarını belirlerken kullanılan, görüntü işleme ve bilgisayar grafikleri gibi alanlarda önemli bir yere sahip olan yapılardır. Bu tezde geometrik ve cebirsel topolojideki araçların dijital karşılıklarından faydalananarak Khalimsky manifoldlarını tanımlamak için var olan olasılıklar incelenecektir. Bu incelemeleri yapabilmek için gerekli olan temel bilgiler sunulacaktır. Khalimsky manifoldlarının farklı ancak küre gibi önemli bir yapıyı tanımlamada yetersiz kalan tanımları tanıtılacaktır. Ek işlemi tanıtılacak ve Khalimsky manifoldlarını tanımlamada kritik rol oynayan yakın komşulukların ve kesişimlerinin analizi bu işlem sayesinde yapılacaktır. Son olarak Khalimsky manifoldlarının tanımı verilerek, reel benzerlerine uygun olarak bir pozitif n sayısı için $\mathbb{Z}^n$ in içine gömülebileceği ispatlanacaktır.

Anahtar sözcükler: Khalimsky topolojisi, dijital manifold, ek işlemi, topolojik gömme.

ABSTRACT**DIGITAL KHALIMSKY MANIFOLDS**

TEMİZEL, Gökhan

MSc. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. İsmet KARACA

August 2017, 50 pages

Digital Khalimsky manifolds, which are used for determining the digital counterpart of images in Euclid geometry, play an important role in different areas such as image processing and computer graphics. In this thesis, the possibilities for defining digital Khalimsky manifold will be studied by taking advantage of the digital counterpart of the tools in geometric and algebraic topology. Basic information will be provided in order to make these studies. We will introduce different definitions of the digital Khalimsky manifolds, but this definitions are insufficient to describe sphere which is a very important structure. Join operator will be introduced and used to analyze the adjacency neighborhoods and their intersections, needed for identifying the digital Khalimsky manifold. Finally, we will give the definition of the digital Khalimsky manifolds and it will be proved that these manifolds can be embedded $\mathbb{Z}^n$ for some positive integer n like real analogues.

Key Words: Khalimsky topology, digital manifold, join operator, topological embedding.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama sürecimde bana yol gösteren, ilerlemeye çalıştığım yolda deneyimlerinden ve fikirlerinden her fırsatta faydalandığım danışman hocam sayın Prof. Dr. İsmet KARACA'ya ve yardıma ihtiyaç duyduğum her anda bana zaman ayırıp destek olan hocalarım sayın Doç. Dr. Özgür EGE'ye ve sayın Araş. Gör. Dr. Tane VERGİLİ'ye teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca en büyük destekçilerimden olan aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xvi
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	3
2.1 Topoloji ve En Küçük Komşuluk Uzayları	3
2.2 Dijital Topoloji	7
2.3 Khalimsky Topolojisi	14
2.4 Sürekli Fonksiyonların Genişlemeleri	17
2.5 Manifoldlar	19
3 YEREL SONLU VE YEREL SAYILABİLİR UZAYLAR	23
4 KHALİMSKY MANİFOLDLARINI TANIMLAMA DENEME- LERİ	27
4.1 Saf Khalimsky Manifoldları	27
4.2 Katı Khalimsky Manifoldları	28
4.3 Reel Benzerler	30
5 EK İŞLEMİ	34
5.1 Temel Özellikler	35
5.2 Ayrıştırılabilir Uzaylar	36
6 $\mathbf{Z}^n$ DEKİ KOMŞULUKLAR	39
6.1 Kesişimler	40

7	KHALİMSKY MANİFOLDLARI	42
8	SONUÇ	45
	KAYNAKLAR DİZİNİ	46
	ÖZGEÇMİŞ	50



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 (Ege and Karaca , 2015)2-yakınlık	8
2.2 (Ege and Karaca , 2015)4-yakınlık ve 8-yakınlık	9
2.3 (Ege and Karaca , 2015)6-yakınlık, 18-yakınlık ve 26-yakınlık	9
2.4 (Melin , 2008b)Khalimsky Doğrusu	15
2.5 (Melin , 2003)Khalimsky Düzlemi	15
2.6 (Tu , 2008)Sonsuz Silindir ve Tor	22
4.1 (Melin , 2009)Khalimsky Toru	29

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathcal{C}_X(B)$	B kümesinin kapanışı
$\mathcal{N}_X(B)$	B kümesinin en küçük komşuluğu
$AN_X(x)$	x noktasının yakın komşuluğu
$\mathcal{A}_X(x)$	x noktasına yakın olan noktaların kümesi
$\preceq$	Alexandrov-Birkhoff bağıntısı
$\simeq$	Homeomorfizma
$[f]$	f fonksiyonunun homotopi sınıfı
$\prod_1(X, x_0)$	X uzayının x_0 bazlı temel grubu
$[a, b]_{\mathbb{Z}}$	Khalimsky aralığı
$L(A)$	Khalimsky yayının boyu
$\rho_X(x, y)$	Yay metriği
T_m	n-boyutlu Khalimsky toru
M_X	X uzayının reel benzeri
$\vee$	Ek işlemi
$\langle \alpha, \beta \rangle$	α tane 0 dan ve β tane 1 den oluşan nokta

1 GİRİŞ

Günümüzde bilgisayar hayatımızın birçok alanında kullandığımız ve önemi gittikçe artan bir buluştur. Bilgisayarın artan bu önemi ile geometrik şekillerin bilgisayar ortamında gözlemlenebilme ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Dijital geometri de bu ihtiyaçtan doğmuştur ve bu şekillerin yani dijital şekillerin geometrisidir.

İnsanlar bilgisayarın icadından çok daha önce dijital nesneler çizmiştir. Binlerce yıllık mozaiklerde veya halılarda bu tarz şekiller görmek mümkündür. Bu nesneler ve bilgisayar ortamında çizilen şekiller arasında bir ilişki kurmak istenirse temelde aynı mantığın yattığı görülebilir. Binlerce yıl önce ya da günümüzde mantık aynıdır ve çalışılan alanı grid noktalarla veya karelerle, parçalara bölerek istenilen şekli oluşturmaktır. E.G. Johnston ve A. Rosenfeld (Johnston and Rosenfeld , 1970) yaptıkları yayında dijital şekilleri grid noktaların ve karelerin alt kümesi olarak ele almışlar ve bu şekiller arasındaki geometrik uygulamalar üzerinde çalışmışlardır.

Dijital geometri, klasik geometri de denilen Euclid geometrisindeki bir kavramı alıp onun dijital karşılığını bulma şeklinde çalışır. Dijital geometrideki temel kavramlar, Euclid geometrisindeki dijital karşılıkları var olabilen kavramlardır. Dijital geometri kökleri graf teorisi ve dijital topolojiye dayanan diskret geometrinin bir alt disiplini olarak da düşünülebilir. Bu tezin konusuna uygun olarak dijital topolojiyi kullanmamız gerekecektir. Dijital topolojide esas olarak kullanacağımız topoloji Efim Khalimsky'nin 1970'li yıllarda ortaya koyduğu Khalimsky topolojisidir. Khalimsky topolojisi reel doğru üzerindeki Euclid topolojisinin, tam sayılar kümesi üzerindeki dijital karşılığıdır.

Topolojik çarpım, yüzeyler, eğriler, temel grup ve homotopi gibi bazı temel topolojik kavramlar dijital şekiller, resimler ve grafikler üzerinde çalışırken önemli rol oynarlar. Laurence Boxer (Boxer , 2006a) yaptığı yayında bazı temel topolojik kavramların dijital karşılıkları üzerinde çalışmıştır. Dijital yüzeyler bilgisayar ortamında üç boyutlu şekiller oluşturulurken kullanılan bir kavramdır. İlk olarak 1980'li yıllarda çalışılan bu kavram hakkında D.G. Morganthaler ve A. Rosenfeld (Morgenthaler and Rosenfeld , 1981) yayın yapmışlardır. Yaptıkları bu çalışmada yüzeyleri voksel kümelerinden inşa etmişlerdir. M. Couprie ve G. Bertrand

(Couprie and Bertrand, 1998) ise çalışmalarında yüzeylerin birçok yolla tanımlanabileceğini belirtmiş ve kombinatorik topoloji yaklaşımı ile bir tanımlama yapmışlardır. Erik Melin (Melin , 2007) çalışmasında bu yüzeylerin özellikleri hakkında çalışmış ve sürekli Khalimsky fonksiyonlarının grafiğinin bir yüzey belirteceğini ileri sürmüştür.

Dijital yüzeyleri daha iyi kavrayabilmek için onları sınıflandırmak istediğimizde dijital manifoldları kullanırız. Erik Melin (Melin , 2009) de yerel olarak Khalimsky n -uzayı gibi davranan dijital manifoldlar hakkında çalışmış ve bu manifoldları sınıflandırmak için denemelerde bulunmuştur.

Bu tezde, tez konusu için temel kavramlar olan manifoldlar, dijital topoloji ve Khalimsky topolojisi gibi konuları tanıtılacaktır. Manifoldlar topolojik uzaylar olarak ele alınacağından gömme konusuna değinilecektir. Dijital olarak çalışmayı sağlayacak yerel sonlu uzaylara ve yerel sayılabilir uzaylara değinilecektir. $\mathbb{Z}^n$ deki komşuluklar hakkında bilgi verilip, bu komşulukların kesişiminin ve yakın komşulukların kesişiminin analizini yapmak için kullanılacak ek işlemi verilecektir. Son olarak Khalimsky manifoldlarını tanımlanıp, bazı sonuçlara değinilecektir.

2 ÖN BİLGİLER

2.1 Topoloji ve En Küçük Komşuluk Uzayları

Bir topolojik uzaydaki açık kümelerin sonlu bir ailesinin kesişiminin açık olduğu bilinmektedir. Ancak bu kümelerin keyfi bir ailesinin açık olması gerekmemektedir. Dijital ortamda inşa edilen bir topolojik uzay ise sonludur ve açık kümelerin herhangi bir ailesinin kesişimi bu tür uzaylarda açıktır.

Tanım 2.1.1. (Alexandrov , 1937) X bir topolojik uzay ve $\{A_j\}_{j \in J}$, X teki açık kümelerin herhangi bir ailesi olsun. $\bigcap_{j \in J} A_j$ açık bir küme ise X uzayına en küçük komşuluk uzayı denir.

Not 2.1.1. (Melin , 2003) Bir en küçük komşuluk uzayının alt uzayı yine bir en küçük komşuluk uzayıdır.

Örnek 2.1.1. $X = \{a, b, c, d\}$ üzerinde bazıları $\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, X$ olan bir τ topolojisi mevcut olsun. Bu topolojinin açıkları yukarıda verilen bazı haricinde $\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}$ kümeleridir ve (X, τ) uzayı bir en küçük komşuluk uzayıdır.

Tanım 2.1.2. (Melin , 2009) X bir topolojik uzay ve $B \subset X$ olsun. B nin kapanışı, B yi içeren tüm kapalı kümelerin kesişimidir ve $\mathcal{C}_X(B)$ ile gösterilir. Dual olarak B yi içeren tüm açık kümelerin kesişimini $\mathcal{N}_X(B)$ temsil eder. Bu küme her zaman açık olmak zorunda değildir, ancak bir en küçük komşuluk uzayı üzerinde çalışıyorsak bu küme açık olacaktır. Bu durumda $\mathcal{N}_X(B)$, B yi içeren en küçük komşuluk adını alır.

Tezin geri kalan kısmında kolaylık sağlaması adına $\mathcal{C}_X(B)$ ve $\mathcal{N}_X(B)$ yerine $\mathcal{C}(B)$ ve $\mathcal{N}(B)$ notasyonları kullanılacaktır. Aynı şekilde yine kolaylık sağlaması için tek elemanlı bir kümeden bahsedilirken $\mathcal{C}(\{x\})$ ve $\mathcal{N}(\{x\})$ yerine $\mathcal{C}(x)$ ve $\mathcal{N}(x)$ notasyonları kullanılacaktır.

Not 2.1.2. (Melin , 2004b) X ve Y en küçük komşuluk uzayları olmak üzere

$$\mathcal{N}_{X \times Y}(x, y) = \mathcal{N}_X(x) \times \mathcal{N}_Y(y)$$

eşitliği vardır.

Not 2.1.3. (Melin , 2009) X bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. $y \in \mathcal{N}(x)$ olması için gerek ve yeter şart $x \in \mathcal{C}(y)$ olmasıdır.

İspat. $y \in \mathcal{N}(x)$ olsun. O halde N_i ler X de x elemanını içeren tüm açıklar olmak üzere $y \in \bigcap N_i$ dir. Tüm N_i ler y ve x i içerdiğinden tümleyenleri hem y yi hem de x i içermeyiz. N_i ler x i içeren tüm açıklar olduğundan x i içermeyen her kapalının y yi de içermediği söylenebilir. O halde y yi içeren tüm kapalılar x i de içermek zorundadır. Kapanışın tanımından $x \in \mathcal{C}(y)$ olur. Diğer yön benzer şekilde sonuçlandırılır.

Bir en küçük komşuluk uzayında bir $x \in X$ için $\mathcal{N}(x) = \{x\}$ ise yani $\{x\}$ açık ise bu x noktasına *açık nokta* denir. $\mathcal{C}(x) = \{x\}$ ise yani $\{x\}$ kapalı ise bu x noktasına *kapalı nokta* denir. Eğer x noktası ya açık ya da kapalı nokta ise *saf nokta* olarak adlandırılır, ne açık ne de kapalı bir nokta ise de *karişik nokta* adını alır (Melin , 2009).

Bir topolojik uzayda sadece $\emptyset$ ve uzayın kendisi hem açık hem de kapalı kümeler ise bu uzaya *bağlantılıdır* denir. Bir topolojik uzayın *bağlantılı bileşeni* ise kapsama bağıntısına göre maksimal olan bağlantılı alt uzaydır (Melin , 2009).

Lemma 2.1.1. (Melin , 2008a) X bağlantılı bir en küçük komşuluk uzay olsun. O halde her $x, y \in X$ için $x = x_0, y = x_n$ ve her $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için $\{x_i, x_{i+1}\}$ bağlantılı olacak şekilde sonlu bir $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ dizisi vardır.

İspat. $x \in X$ ve Y, x ile sonlu bir dizi ile bağlı olan noktaların kümesi olsun. Bu durumda $x \in Y$ olacağından Y boştan farklıdır. Keyfi bir $y \in Y$ elemanını alalım. O halde $\mathcal{N}(y) \subset Y$ ve $\overline{\{y\}} \subset Y$ olur. O halde Y hem açık, hem de kapalı bir kümedir. X bağlantılı ve Y hem açık, hem kapalı, hem de boştan farklı bir küme olduğundan $X = Y$ dir.

Lemma 2.1.2. (Melin , 2003) X bir en küçük komşuluk uzay ve $y \in \mathcal{N}(x)$ olsun. O halde X de x den başlayıp y de biten bir yol vardır.

İspat.

$$\begin{aligned} \phi : I &\rightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} x, & t = 0 \\ y, & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $V \subset X$ açık alt küme olsun. O halde 3 durum söz konusudur.

1. DURUM: $x \in V$ ise V açık küme ve $\mathcal{N}(x)$, x i içeren en küçük komşuluk olduğundan $\mathcal{N}(x) \subset V$ olur. Dolayısıyla $y \in V$ olur. O halde $\phi^{-1}(V) = I$ olur.

2. DURUM: $y \in V$ ve $x \notin V$ olsun. O halde $\phi^{-1}(V) = (0, 1]$ olur.

3. DURUM: $y \notin V$ olsun. y , x in en küçük komşuluğunda olduğundan $x \notin V$ olur. O halde $\phi^{-1}(V) = \emptyset$ olur.

O halde ϕ süreklidir. Yani X de x den başlayıp, y de biten bir yol vardır.

Teorem 2.1.1. (Melin , 2003) Bir en küçük komşuluk uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart uzayın yol bağlantılı olmasıdır.

Tanım 2.1.3. (Melin , 2009) X bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. $\{x, y\}$, X in bağlantılı bir alt uzayı ise x ve y yakındır denir.

Not 2.1.4. (Melin , 2009) X bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. x ve y nin yakın olması için gerek ve yeter şart $y \in \mathcal{N}(x)$ ya da $x \in \mathcal{N}(y)$ olmasıdır.

İspat. x ve y , X de yakın olan iki nokta olsun. Bu durumda $\{x, y\}$ bağlantılıdır. O halde ispatta alt uzay topolojisine geçilerek farklı durumlar incelenecektir. Bu durumlar $\{x, y\}$ kümesinin bağlantılı olması göz önüne alınarak oluşturulacaktır.

1. DURUM: Alt uzay topolojisindeki açık kümeler $\emptyset$ ve X olsun. Bu durumda ana topolojide x i içerip y yi içermeyen ya da y yi içerip x i içermeyen bir açık yoktur. O halde $y \in \mathcal{N}(x)$ ve $x \in \mathcal{N}(y)$ dir.

2. DURUM: Alt uzay topolojisindeki açık kümeler $\emptyset$, $\{x\}$ ve X olsun. Bu durumda ana topolide y yi içerip de x i içermeyen bir açık yoktur. O halde $x \in \mathcal{N}(y)$ dir.

3. *DURUM*: Alt uzay topolojisindeki açık kümeler $\emptyset$, $\{y\}$ ve X olsun. Bu durumda ana topolojide x i içerip de y yi içermeyen bir açık yoktur. O halde $y \in \mathcal{N}(x)$ dir.

Diğer yön benzer şekilde sonuçlandırılır.

Not 2.1.5. (Melin , 2009) X bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. x ve y nin yakın olabilmesi için gerek ve yeter şart $y \in \mathcal{N}(x) \cup \mathcal{C}(x)$ olmasıdır.

İspatı bir önceki ispata benzer şekilde gösterilebilir.

X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x in yakın komşuluğu $\mathcal{N}(x) \cup \mathcal{C}(x)$ kümesidir ve $AN_X(x)$ ile gösterilir. x e yakın olan noktaların kümesi ise $AN_X(x) \setminus \{x\}$ tir ve $\mathcal{A}_X(x)$ ile gösterilir (Melin , 2009).

X bir en küçük komşuluk uzayı, $A, B \subset X$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. a ve b yakın olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ var ise A ve B yakındır denir. Denk koşul olarak $\mathcal{A}(A) \cap B \neq \emptyset$ veya $A \cap \mathcal{A}(B) \neq \emptyset$ ise A ve B yakındır denir (Melin , 2007).

$AN_X(x)$ ve $\mathcal{A}_X(x)$ notasyonları yerine kolaylık sağlaması amacıyla $AN(x)$ ve $\mathcal{A}(x)$ notasyonları tezin geri kalanında kullanılacaktır.

Not 2.1.6. (Melin , 2004b) En küçük komşuluk uzayı X in T_0 -uzayı olabilmesi için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ için $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ iken $x = y$ olmasıdır.

Tanım 2.1.4. (Alexandrov , 1937) X bir en küçük komşuluk uzayı ve $x, y \in X$ olsun. $x \preceq y \Rightarrow y \in \mathcal{N}(x)$ şeklinde tanımlanan bağıntıya Alexandrov-Birkhoff ön sıralama bağıntısı denir. Bu bağıntı yansıma ve geçişme özelliklerini her zaman sağlar. Ek olarak uzay, T_0 -uzayı ise bağıntı sıralama bağıntısı haline gelir.

Not 2.1.7. (Melin , 2003) $y \in \mathcal{N}(x)$ ise $\mathcal{N}(y) \subset \mathcal{N}(x)$ dir. Benzer şekilde $x \in \mathcal{C}(y)$ ise $\mathcal{C}(x) \subset \mathcal{C}(y)$ dir.

İspat. $y \in \mathcal{N}(x)$ ise $x \preceq y$ dir. $\mathcal{N}(y) = \{p \in X : y \preceq p\}$ ve Alexandrov-Birkhoff bağıntısı geçişmeli olduğundan her $p \in \mathcal{N}(y)$ için $x \preceq p$,

yani $p \in \mathcal{N}(x)$ olur. O halde $\mathcal{N}(y) \subset \mathcal{N}(x)$ dir. Diğer durum duallikten gelmektedir.

Not 2.1.8. (Melin , 2003) $\{\mathcal{N}(x) \in \mathcal{P}(X) : x \in X\}$, X üzerindeki topoloji için baz olarak kabul edilebilir.

İspat. $\bigcup_{x \in X} \mathcal{N}(x) = X$ olduğu açıktır. Her $\mathcal{N}(y)$, $\mathcal{N}(z)$ ve her $x \in \mathcal{N}(y) \cap \mathcal{N}(z)$ için $x \in \mathcal{N}(x) \subset \mathcal{N}(y) \cap \mathcal{N}(z)$ olacağından bazdır.

2.2 Dijital Topoloji

Dijital topoloji, bilinen anlamdaki topolojik kavramların ve özelliklerin dijital ortamdaki karşılıklarını bulmayı amaçlayan topolojinin bir dalıdır. Topolojinin bu dalı sayesinde, üzerinde çalışılan topolojik nesnelerin dijital ortamdaki karşılıkları ve bu ortamdaki özellikleri incelenebilmektedir.

Kafes noktası her bir koordinatı tam sayı olan bir noktadır. $\mathbf{I}_k$, k -boyutlu Euclid uzayındaki bir sınırlı kübün kafes noktalarının kümesi olsun. O halde $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\mathbf{I}_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) | x_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k\}$$

kümesine *dijital resim* denir. $\mathbf{I}_k$ üzerinde tanımlı olan bir metrik ise şu özellikleri sağlar;

- Eğer $p, q \in \mathbf{I}_k$ farklı noktalarsa $d_k(p, q) \geq 1$ dir.
- $p, q \in \mathbf{I}$ olsun. p ve q nun komşu noktalar olması için gerek ve yeter şart $d_k(p, q) = 1$ olmasıdır

(Rosenfeld , 1986).

Tanım 2.2.1. (Han , 2005) (Herman , 1993) Bir dijital görüntü $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ (n bir pozitif tam sayı) ve κ , X in elemanları arasında bir yakınlık bağıntısı olmak üzere (X, κ) ikilisidir.

Bir dijital görüntünün var olabilmesi için öncelikle bir yakınlık bağıntısı olması gerektiği tanımdan anlaşılabilir. Aşağıda yakınlık bağıntısı tanımlanacak ve örneklendirilecektir.

Tanım 2.2.2. (Boxer , 2006b) κ , $1 \leq \kappa \leq n$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı ve $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_0, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ iki farklı nokta olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise p ve q c_κ -yakındır.

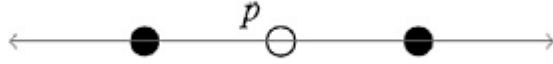
- (i) $|p_i - q_i| = 1$ olacak şekilde en fazla κ tane indis vardır.
- (ii) $|p_i - q_i| \neq 1$ olacak şekilde her j indisi için $p_j = q_j$

olmalıdır.

Bu tanımda c_κ , $p \in \mathbb{Z}^n$ noktasında yakın olan noktaların sayısını göstermektedir. κ ise yakınlık bağıntılarını temsil eder. $\mathbb{Z}^n$ deki bu bağıntılar $c_t^n = \frac{n!}{(n-t)!t!}$ olmak üzere şu şekilde tanımlanmıştır (Han , 2004).

$$\kappa \in \{2n(n \geq 1), 3^n - 1(n \geq 2), \sum_{t=0}^{r-2} c_t^n \cdot 2^{n-t} - 1(2 \leq r \leq n-1, n \geq 3)\}$$

Bu bağıntıya göre $\mathbb{Z}$ deki tek yakınlık bağıntısı 2-yakınlıktır. Yani $\mathbb{Z}$ deki bir noktaya yakınlık bağıntısı ile bağlı 2 farklı nokta mevcuttur. $\mathbb{Z}^2$ de ise 4-yakınlık ve 8-yakınlık bağıntıları gözlemlenebilirken, $\mathbb{Z}^3$ te de 6-yakınlık, 18-yakınlık ve 26-yakınlık bağıntıları vardır.

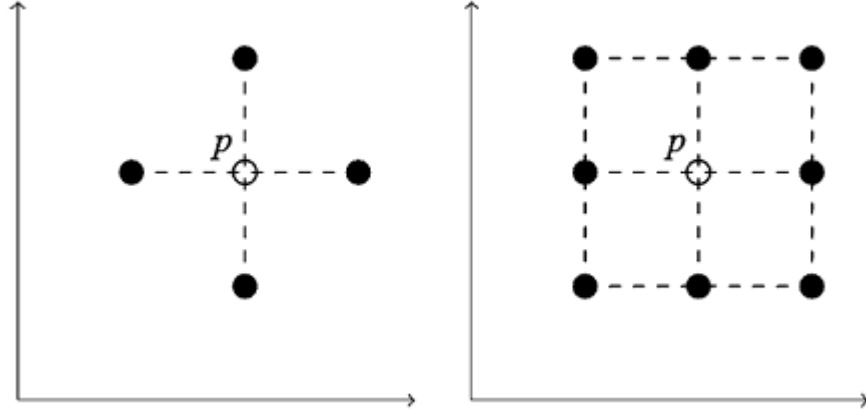


Şekil 2.1: (Ege and Karaca , 2015)2-yakınlık

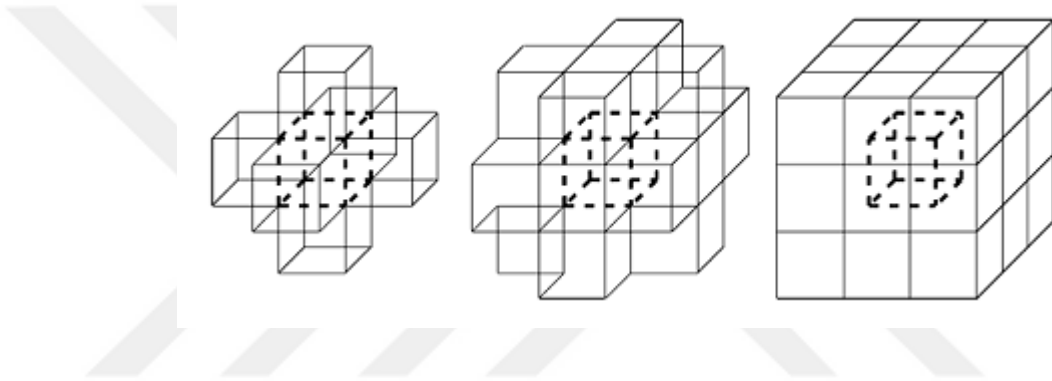
Tanım 2.2.3. (Boxer , 1999) $\mathbb{Z}^n$ deki bir p noktasının bir κ -komşusu, o noktaya κ -yakın olan bir noktadır.

Örneğin, $\mathbb{Z}$ deki her noktaya komşu olan iki nokta mevcuttur. $p \in \mathbb{Z}$ elemanına yakın olan noktalar $p - 1$ ve $p + 1$ dir.

Tanım 2.2.4. (Herman , 1993) Bir X dijital görüntüsünün κ -bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her farklı $x, y \in X$ noktası için $x = x_0, y = x_r$ ve $i = 0, 1, \dots, r - 1$ iken x_i ile x_{i+1} κ -komşu olacak şekilde $\{x_0, x_1, \dots, x_r\} \subset X$ kümesinin var olmasıdır.



Şekil 2.2: (Ege and Karaca , 2015) 4-yakınlık ve 8-yakınlık



Şekil 2.3: (Ege and Karaca , 2015) 6-yakınlık, 18-yakınlık ve 26-yakınlık

Örneğin $\mathbb{Z}^+$, 2-bağlantılı bir uzaydır.

Dijital düzlem, $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki tam sayı koordinatlara sahip noktaların kümesidir ve $\mathbb{Z}^2$ ile gösterilir. (Eckhardt and Latecki, 1994) Genel olarak bir *dijital uzay* ise, V bir noktalar kümesi ve π , V üzerinde yansımalı olmayan, simetrik bir ikili bağıntı olmak üzere (V, π) ikilisidir. Buradaki bağıntı yakınlık bağıntısıdır. (Melin , 2008b) Örneğin $(\mathbb{Z}, 2)$, 2-yakınlıkla donatılmış bir dijital uzaydır.

Tanım 2.2.5. (Rosenfeld , 1986) $X \subseteq \mathbf{I}_k$ ve $Y \subseteq \mathbf{I}_m$ dijital görüntüler ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun $x_0 \in X$ noktasında dijital sürekli olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\epsilon \geq 1$ için $x \in X$ olmak üzere $d_k(x_0, x) \leq \delta$ iken $d_m(f(x_0), f(x)) \leq \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta \geq 1$ sayısının var olmasıdır. Eğer f her $x \in X$ noktasında sürekli ise f e dijital sürekli bir

fonksiyon denir.

Teorem 2.2.1. (Rosenfeld , 1986) $X \subseteq \mathbb{Z}^{k_0}$, $Y \subseteq \mathbb{Z}^{k_1}$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) f dijital sürekli bir fonksiyondur.
- (ii) X te k_0 -komşu olan her $p, q \in X$ noktaları için ya $f(p) = f(q)$ dur ya da $f(p)$ ve $f(q)$ k_1 -yakındır.
- (iii) X in k_0 -bağlantılı her alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü k_1 -bağlantılıdır.

İspat. $(i \Rightarrow ii)$ f dijital sürekli, p ile q k_0 -komşu olsun ve özel olarak $\epsilon = 1$ alalım. f dijital sürekli olduğundan $d_{k_0}(p, q) \leq \delta$ iken $d_{k_1}(f(p), f(q)) \leq 1$ olacak şekilde öyle bir $\delta \geq 1$ sayısı vardır. Bu durumda metriğin tanımından $d_{k_1}(f(p), f(q)) = 1$ veya $d_{k_1}(f(p), f(q)) = 0$ olur. O halde ya $f(p) = f(q)$ dur ya da $f(p)$ ve $f(q)$ k_1 -komşudur.

$(ii \Rightarrow i)$ p ile q k_0 -komşu ve $f(p)$ ile $f(q)$ k_1 -komşu olsun. O halde $d_{k_0}(p, q) = 1$ ve $d_{k_1}(f(p), f(q)) = 1$ dir. Yani her $\epsilon \geq 1$ için $\delta = 1$ seçilirse f fonksiyonu dijital sürekli olur.

$(i \Rightarrow iii)$ f dijital sürekli bir fonksiyon ve $A \subset X$, k_0 -bağlantılı olsun. $a, b \in f(A)$ alalım. $a = f(p)$ ve $b = f(q)$ olacak şekilde $p, q \in A$ vardır. A k_0 -bağlantılı olduğundan $p = x_0, q = x_r$ ve $i = 0, 1, \dots, r - 1$ iken x_i ile x_{i+1} k_0 -komşu olacak şekilde $\{x_0, x_1, \dots, x_r\} \subset A$ vardır. (ii) şikkından x_i ile x_{i+1} k_0 -komşu iken $f(x_i)$ ile $f(x_{i+1})$ in k_1 -komşu olduğu bilinmektedir. O halde görüntüler eşit geldiğinde kümeden çıkarmak üzere $\{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_r)\} \subset f(A)$ kümesi $a = f(x_0) = f(p), b = f(x_r) = f(q)$ ve $i = 0, 1, \dots, r - 1$ iken $f(x_i)$ ile $f(x_{i+1})$ in k_1 -komşu olduğu bir kümedir. Yani $f(A)$ k_1 -bağlantılıdır.

$(iii \Rightarrow ii)$ f , X in k_0 -bağlantılı kümesini, k_1 -bağlantılı bir kümesine götürsün. $p, q \in X$ k_0 -komşu olsun. O halde $\{p, q\}$ k_0 -bağlantılıdır. Hipotezden $\{f(p), f(q)\}$ da k_1 -bağlantılı kümedir. O halde ya $f(p) = f(q)$ dur ya da $f(p)$ ile $f(q)$ k_1 -komşudur.

Örnek 2.2.1.

$$f : [0, 2]_{\mathbb{Z}} \rightarrow [0, 4]_{\mathbb{Z}}$$

$$x \mapsto x^2$$

fonksiyonu 2-bağlantılı $\{0, 1, 2\}$ kümesini 2-bağlantılı olmayan $\{0, 1, 4\}$ kümesine resmeder. O halde f dijital sürekli bir fonksiyon değildir.

Örnek 2.2.2.

$$\begin{aligned} f : [0, n]_{\mathbb{Z}} &\rightarrow [0, n]_{\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

fonksiyonu, 2-bağlantılı her alt kümeyi, yine 2-bağlantılı bir alt kümeye götüreceğinden dijital sürekli bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.6. (Boxer , 1999) $X \subseteq \mathbb{Z}^{k_0}, Y \subseteq \mathbb{Z}^{k_1}$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. κ_0 -yakınlık bağıntısı $\mathbb{Z}^{k_0}$ da ve κ_1 -yakınlık bağıntısı $\mathbb{Z}^{k_1}$ da tanımlansın. X in κ_0 -bağlantılı her alt kümesinin f altındaki görüntüsü κ_1 -bağlantılı ise f e (κ_0, κ_1) -sürekli denir.

Önerme 2.2.1. (Boxer , 1999) Bileşke işlemi dijital sürekliliği korur.

İspat. $f : X \rightarrow Y$ (κ_0, κ_1) -sürekli ve $g : Y \rightarrow Z$ (κ_1, κ_2) -sürekli olsun. κ_0 -bağlantılı $A \subset X$ kümesini ele alalım. $g \circ f(A) = g(f(A))$ dır. $f(A)$, f (κ_0, κ_1) -sürekli olduğundan κ_1 -bağlantılıdır. g (κ_1, κ_2) -sürekli olduğundan da $g(f(A))$ κ_2 -bağlantılıdır. O halde $g \circ f : X \rightarrow Z$ (κ_0, κ_2) -sürekli dir.

Tanım 2.2.7. (Boxer , 2005) $X \subseteq \mathbb{Z}^{k_0}, Y \subseteq \mathbb{Z}^{k_1}$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. κ_0 -yakınlık bağıntısı $\mathbb{Z}^{k_0}$ da ve κ_1 -yakınlık bağıntısı $\mathbb{Z}^{k_1}$ da tanımlansın. Biyektif $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu (κ_0, κ_1) -sürekli ve $f^{-1} : Y \rightarrow X$ fonksiyonu (κ_1, κ_0) -sürekli ise f e dijital izomorfizma denir. Bu durumda X ve Y , (κ_0, κ_1) -izomorfiktir.

Örnek 2.2.3.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, -y) \end{aligned}$$

şeklindeki dönüşüm $\mathbb{Z}^2$, 4-yakınlık ile donatılmış iken bir dijital izomorfizmdir.

Tanım 2.2.8. (Boxer , 1994) $f, g : X \rightarrow Y$ iki sürekli dijital fonksiyon olsun. Bir pozitif m tamsayısı için

$$\begin{aligned} F : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} &\rightarrow Y \\ F(x, 0) &= f(x) \\ F(x, m) &= g(x) \end{aligned}$$

olacak şekilde F dijital sürekli fonksiyonu varsa f ve g ye Y de dijital homotopdur denir. F fonksiyonuna da dijital homotopi denir.

Önerme 2.2.2. (Boxer , 1994) Dijital homotopi, dijital sürekli fonksiyonlar arasında bir denklik bağıntısıdır.

İspat. $f : X \rightarrow Y$ dijital sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için $F(x, t) = f(x)$ şeklinde tanımlanan $F : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir. Üstelik $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, m) = f(x)$ olduğundan f ile f arasında bir dijital homotopidir.

$f, g : X \rightarrow Y$ dijital homotop olan iki dijital sürekli fonksiyon olsun. O halde $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, m) = g(x)$ olacak şekilde $F : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu vardır. $G(x, t) = F(x, m - t)$ fonksiyonu tanımlansın. G fonksiyonu süreklidir ve $G(x, 0) = g(x)$, $G(x, m) = f(x)$ olduğundan g ve f arasında bir dijital homotopidir.

$f, g, h : X \rightarrow Y$ üç dijital sürekli fonksiyon, f ile g ve g ile h dijital homotop olsun. O halde $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, m_0) = g(x)$, $G(x, 0) = g(x)$ ve $G(x, m_1) = h(x)$ olacak şekilde $F : X \times [0, m_0] \rightarrow Y$ ve $G : X \times [0, m_1] \rightarrow Y$ dijital sürekli fonksiyonları vardır.

$$\begin{aligned} H : X \times [0, m_0 + m_1]_{\mathbb{Z}} &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} F(x, t), & t \in [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \\ G(x, t - m_0), & t \in [m_0, m_0 + m_1]_{\mathbb{Z}} \end{cases} \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. H fonksiyonu süreklidir ve $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, m_0 + m_1) = h(x)$ olduğundan f ile h arasında dijital homotopidir.

Tanım 2.2.9. (Boxer , 1994) $r : X \rightarrow Y$ dijital sürekli fonksiyon olsun. $Y \subset X$ ve her $y \in Y$ için $r(y) = y$ ise r ye dijital retraksion denir.

Örnek 2.2.4. (Boxer , 1994) $\mathbf{I}_k$ kafes noktalarının kümesi ve $\mathbf{0}_k \in \mathbf{I}_k$ tüm koordinatları sıfır olan noktayı gösterebilir. $0 < p < k$ için $r(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ şeklinde tanımlanan $r : \mathbf{I}_k \rightarrow \mathbf{I}_p \times \{\mathbf{0}_{m-p}\}$ fonksiyonu bir dijital retraksiyondur.

Tanım 2.2.10. (Boxer , 1994) Bir X dijital görüntüsü için birim dönüşüm, sabit fonksiyona dijital homotop ise X dijital büzülebilirdir denir.

Teorem 2.2.2. (Boxer , 1994) X dijital büzülebilir bir uzay ve Y , X in dijital retraksiyonu olsun. O halde Y dijital büzülebilirdir.

İspat. X dijital büzülebilir bir uzay olsun. O halde sabit bir $x_0 \in X$ için $F(x, 0) = x$ ve $F(x, 1) = x_0$ olacak şekilde $F : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ dijital sürekli fonksiyonu vardır. $r : X \rightarrow Y$ dijital retraksiyon olsun.

$$\begin{aligned} G : Y \times [0, m]_{\mathbb{Z}} &\rightarrow Y \\ (y, t) &\mapsto r(F(y, t)) \end{aligned}$$

şeklinde G fonksiyonunu tanımlayalım. G fonksiyonu dijital sürekli ve $G(y, 0) = y$, $G(y, 1) = y_0$ olduğundan Y dijital büzülebilirdir.

Bir noktalı dijital görüntü, X bir dijital görüntü ve $x_0 \in X$ olmak üzere (X, x_0) ikilisidir. $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ dijital sürekli bir fonksiyon ve $f(x_0) = y_0$ ise f e noktalı dijital sürekli fonksiyon denir. $f : X \rightarrow Y$ ve $g : X \rightarrow Y$ iki noktalı dijital sürekli fonksiyon ve $H : X \times [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow Y$, f ile g arasında dijital homotopi olsun. Her $t \in [0, m]_{\mathbb{Z}}$ için $H(x_0, t) = y_0$ ise H noktalı dijital homotopidir. f ve g arasında bir noktalı dijital homotopi var ise f ve g aynı noktalı dijital homotopi sınıfına aittir denir (Boxer , 1999).

$f : [0, m]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, $(2, \kappa)$ -sürekli fonksiyonuna dijital κ -yol denir. $f(0) = f(m)$ ise f e dijital κ -loop denir. Bir f loopunun dijital homotopi sınıfı $[f]_X$ ile gösterilir. $f : [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$, $g : [0, m_1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ ve $f(m_0) = g(0)$ olacak şekilde X de iki dijital κ -yol olsun. $(f \cdot g)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} (f \cdot g) : [0, m_0 + m_1]_{\mathbb{Z}} &\rightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} f(t), & t \in [0, m_0]_{\mathbb{Z}} \\ g(t - m_0), & t \in [m_0, m_0 + m_1]_{\mathbb{Z}} \end{cases} \end{aligned}$$

(Khalimsky , 1987a).

Tanım 2.2.11. (Boxer , 1999) (X, x_0) bir noktalı dijital görüntü ve $\prod_1(X, p)$, $[f]_X$, p noktasındaki loop sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda çarpım işlemi

$$[f]_X \cdot [g]_X = [f \cdot g]_X$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.3. (Boxer , 1999) $\prod_1(X, x_0)$, $\cdot$ işlemi altında bir grup teşkil eder. Bu gruba (X, x_0) in temel grubu denir.

2.3 Khalimsky Topolojisi

Khalimsky topolojisi tam sayılar doğrusu üzerinde tanımlanan bir topolojidir. Dijital ortamda kullanılan bu topoloji 1960'lı yıllarda Efim Khalimsky tarafından ortaya atılmıştır. Khalimsky'nin yaptığı yayınlar Rusça olduğu için, kendi adını taşıyan bu yeni topoloji uzun süre Sovyetler Birliği dışına çıkamamıştır. Daha sonraları yapılan İngilizce yayınlar sayesinde dünyada tanınan bu topolojiyi kullanarak dijital geometride var olan bazı problemler üzerinde çalışmıştır.

Tanım 2.3.1. (Khalimsky , 1987b) (Khalimsky, Kopperman and Meyer , 1990)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \text{en yakın tam sayı,} & x \neq n + \frac{1}{2} \\ \text{en yakın çift tam sayı,} & x = n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

örten ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon altında x çift tam sayı ise ters görüntüsü $[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$, x tek tam sayı ise ters görüntüsü $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ olacaktır. Bu durumda f fonksiyonu sürekli olduğundan, x çift tam sayı ise $\{x\}$ kümesi kapalı bir küme ve x tek tam sayı ise $\{x\}$ kümesi açık bir küme olacaktır. Bu kümelerin oluşturduğu topolojiye $\mathbb{Z}$ üzerindeki Khalimsky topolojisi denir.

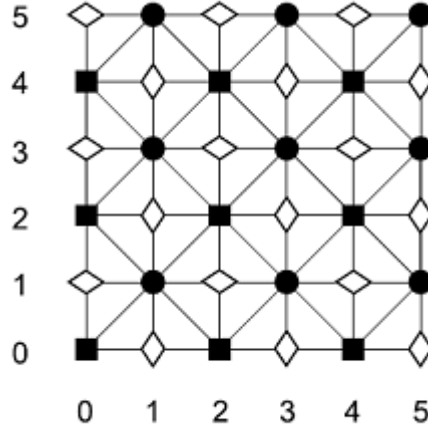
Khalimsky düzlemi iki tane Khalimsky doğrusunun çarpımı sonucunda elde edilir. Daha genel bir şekilde düşünülecek olursa Khalimsky n -uzayı, çarpım topolojisi ile birlikte $\mathbb{Z}^n$ dir (Melin , 2005).

Khalimsky düzlemi üzerindeki çarpım topolojisinin bazı aşağıdaki şekildedir (Melin , 2005).

$$\beta = \{(0, 0), \pm(0, 1), \pm(1, 0), \pm(1, 1), \pm(-1, 1)\}$$



Şekil 2.4: (Melin , 2008b)Khalimsky Doğrusu



Şekil 2.5: (Melin , 2003)Khalimsky Düzlemi

Khalimsky doğrusu bir en küçük komşuluk uzayıdır. Khalimsky doğrusunda tek noktalar açık noktalar iken çift noktalar kapalı noktalardır. Buna göre $\mathcal{N}(2k + 1) = \{2k + 1\}$ iken $\mathcal{N}(2k) = \{2k - 1, 2k, 2k + 1\}$ olur. Khalimsky düzleminde ise iki koordinatı birden tek olan noktalar açık noktalar ve iki koordinatı birden çift olan noktalar kapalı noktalardır. Bu noktalar Khalimsky düzlemindeki saf noktalardır. Bir koordinatı tek, diğer koordinatı çift olan noktalar ise karışık noktalar olarak adlandırılır. $q \in \mathbb{Z}^2$ karışık bir nokta olmak üzere $\mathcal{A}(q) = \{x \in \mathbb{Z}^2 : \|q - x\|_1 = 1\}$ iken $p \in \mathbb{Z}^2$ saf bir nokta olmak üzere $\mathcal{A}(p) = \{x \in \mathbb{Z}^2 : \|p - x\|_\infty = 1\}$ dir. Bir topolojik uzayın $T_{1/2}$ -uzayı olabilmesi için tek noktalı kümelerin ya açık ya da kapalı kümeler olması gerekmektedir. Yukarıda verilen bilgilere dayanarak Khalimsky doğrusunun $T_{1/2}$ -uzayı olduğu ancak Khalimsky düzleminin $T_{1/2}$ -uzayı olmadığı söylenebilir (Melin , 2004a).

p , Khalimsky düzlemindeki bir nokta olsun. p noktası için $\|q - p\|_\infty = 1$ olacak şekilde q noktasına p nin saf l^∞ -komşusu denir. $p = (p_1, p_2)$ bir karışık

nokta ise $(p_1, p_2 + 1)$, $(p_1, p_2 - 1)$, $(p_1 + 1, p_2)$ ve $(p_1 - 1, p_2)$ olmak üzere 4 tane saf l^∞ -komşusuna sahiptir. Buna karşın $p = (p_1, p_2)$ bir saf nokta ise $(p_1, p_2 + 1)$, $(p_1, p_2 - 1)$, $(p_1 + 1, p_2)$, $(p_1 - 1, p_2)$, $(p_1 + 1, p_2 + 1)$, $(p_1 - 1, p_2 - 1)$, $(p_1 + 1, p_2 - 1)$ ve $(p_1 - 1, p_2 + 1)$ olmak üzere 8 tane saf l^∞ -komşusuna sahiptir. p nin açık komşularının oluşturduğu kümeyi $ON(p) = \{x \in \mathcal{A}(p) : x \text{ açık}\}$ ve kapalı komşularının oluşturduğu kümeyi $CN(p) = \{x \in \mathcal{A}(p) : x \text{ kapalı}\}$ temsil eder. p noktasındaki çift koordinatların sayısı m ve tek koordinatların sayısı n olmak üzere $card(ON(p)) = 2^m$ ve $card(CN(p)) = 2^n$ dur. $PN(p) = ON(p) \cap CN(p)$, p noktasının saf komşularının oluşturduğu kümedir (Melin , 2004a).

Tanım 2.3.2. (Melin , 2009) $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \leq b$ olsun. $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ aralığına Khalimsky aralığı denir ve $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ ile gösterilir. a ve b noktaları aralığın bitiş noktaları olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.3. (Melin , 2009) X topolojik uzayındaki bir Khalimsky yayı, Khalimsky aralığına izomorf olan X in bir alt uzayıdır. Eğer X deki herhangi iki nokta bir Khalimsky yayının bitiş noktaları ise bu uzaya Khalimsky yay bağlantılı denir. Bir Khalimsky yayı A nın uzunluğu $card(A) - 1$ şeklinde tanımlanır ve $L(A)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.3.1. (Melin , 2009) Bir T_0 en küçük komşuluk uzayının bağlantılı olabilmesi için gerek ve yeter şart bu uzayın Khalimsky yay bağlantılı olmasıdır.

X topolojik uzayı T_0 ve bağlantılı en küçük komşuluk uzayı ise bu teorem X deki herhangi iki noktayı bağlayan en kısa yayın sonlu sayıda nokta içerdiğini söyler.

Tanım 2.3.4. (Melin , 2009) $\rho_X(x, y) = \min(L(A); A \subset X, x \text{ ve } y \text{ yi içeren Khalimsky yayı})$ şeklinde X üzerinde tanımlı metriğe yay metriği denir.

Not 2.3.1. (Melin , 2008a) Y , X in bir alt uzayı olsun. Y üzerinde tanımlı olan yay metriği X üzerindeki yay metriğinin kısıtlanışına eşit olmak zorunda değildir. Ancak her $x, y \in Y$ için $\rho_X(x, y) \leq \rho_Y(x, y)$ eşitsizliği mevcuttur.

Önerme 2.3.1. (Melin , 2008a) X bir en küçük komşuluk uzayı ve $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O halde f , yay metriğine göre Lip-1 fonksiyonudur.

İspat. $x, y \in X$ ve A , x ile y yi bağlayan en kısa Khalimsky yayı olsun. O halde A ile bir Khalimsky aralığı $I = [a, b]_{\mathbb{Z}}$ arasında $\eta : I \rightarrow A$ şeklinde bir izomorfizma vardır. f ile η sürekli olduğundan $f \circ \eta : I \rightarrow \mathbb{Z}$ de sürekli ve Lip-1 fonksiyondur. O halde $|f(x) - f(y)| \leq L(A) = \rho(x, y)$ olur. Yani f , yay metriğine göre Lip-1 fonksiyondur.

Not 2.3.2. (Melin , 2008a) x ve y , Khalimsky doğrusundaki iki nokta olsun. $\rho(x, y) = |x - y|$ dir.

Khalimsky yaylarının, Khalimsky aralıklarına izomorf olduğu verilmişti. Khalimsky aralığındaki noktalar ya açık ya da kapalı noktalar olduğundan, bir yay üzerindeki noktalar da yaya göre açık ya da kapalı noktalardır (Melin , 2008a).

X bağlantılı bir T_0 en küçük komşuluk uzayı ve x ile y , X te iki farklı nokta olsun. x ile y arasında x in açık nokta olduğu bir Khalimsky yayı var ise x e, y ye göre açık nokta denir. Benzer şekilde x ile y arasında x in kapalı nokta olduğu bir Khalimsky yayı var ise x e, y ye göre kapalı nokta denir (Melin , 2008a).

2.4 Sürekli Fonksiyonların Genişlemeleri

X bağlantılı bir T_0 en küçük komşuluk uzayı ve $A \subset X$ olsun. $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ sürekli fonksiyonunu $f' : X \rightarrow \mathbb{Z}$ sürekli fonksiyonuna genişletilebilir mi? Bu bölümde bu soruya cevap aranacaktır.

Tanım 2.4.1. (Melin , 2008a) X bağlantılı bir T_0 en küçük komşuluk uzayı ve $A \subset X$ olsun. $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu A daki iki farklı x ve y noktaları için aşağıdaki koşullardan birini sağlıyorsa x ve y noktalarına göre X de güçlü Lip-1 fonksiyonu denir.

$$(1) \quad |f(x) - f(y)| < \rho(x, y) \text{ ya da}$$

$$(2) \quad |f(x) - f(y)| = \rho(x, y) \text{ ve } x, y \text{ ye göre açık(kapalı) ise } f(x) \text{ tek(çift).}$$

Eğer f fonksiyonu A daki her farklı noktalar çiftine göre X te güçlü Lip-1 fonksiyonu ise X e göre güçlü Lip-1 fonksiyonu denir.

Önerme 2.4.1. (Melin , 2008a) X bağlantılı bir T_0 en küçük komşuluk uzayı ve $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun sürekli olması için gerek ve

yeter şart f fonksiyonunun X e göre güçlü Lip-1 fonksiyonu olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$) f sürekli bir fonksiyon ve x ile y , X deki iki farklı nokta olsun. x , y ye göre kapalı olacak şekilde bu iki noktayı bağlayan en kısa Khalimsky yayı da A olsun. O halde bir Khalimsky aralığı $I = [a, b]_{\mathbb{Z}}$ ve A arasında $\eta : I \rightarrow A$ izomorfizması vardır. Bu durumda $f \circ \eta$ da sürekli olur. f sürekli olduğundan yay metriğine göre Lip-1 fonksiyonudur. O halde ya $|f(x) - f(y)| < \rho(x, y)$ dir ya da $|f(x) - f(y)| = \rho(x, y)$ ve $\eta^{-1}(x)$, $f(x)$ in paritesini belirlediğinden x , y ye göre açık(kapalı) ise $f(x)$ tektir(çifttir). O halde f , X e göre güçlü Lip-1 fonksiyonudur.

($\Leftarrow$) f , X e göre güçlü Lip-1 fonksiyonu olsun. Her $x \in X$ elemanı için $\mathcal{N}_X(x) \subset f^{-1}(N_{\mathbb{Z}}(f(x)))$ olduğunu göstermek yeterlidir. $y \in \mathcal{N}(x)$ olsun. Bu durumda y ile x yakın olacağından $\{x, y\}$, x ile y yi bağlayan bir Khalimsky yayıdır ve $y \in \mathcal{N}(x)$ olduğundan x , y ye göre kapalıdır. $f(x)$ in paritesine göre iki durumda incelensin. $f(x)$ tek ise x , y ye göre kapalı ve f fonksiyonu, X göre güçlü Lip-1 fonksiyonu olduğundan $|f(x) - f(y)| < \rho(x, y) = 1$ dir. O halde $f(y) = f(x) \in N_{\mathbb{Z}}(f(x))$ olur. $f(x)$ çift ise benzer şekilde f fonksiyonu, X göre güçlü Lip-1 fonksiyonu olduğundan $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y) = 1$ dir. $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(f(x)) = \{f(x-1), f(x), f(x+1)\}$ olduğundan $f(y) \in N_{\mathbb{Z}}(f(x))$ olur. O halde f süreklidir.

Önerme 2.4.2. (Melin , 2008a) X bağlantılı bir T_0 en küçük komşuluk uzayı, $A \subset X$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu X e göre güçlü Lip-1 fonksiyonu olsun. O halde f fonksiyonu, $f' : X \rightarrow \mathbb{Z}$ e genişletilebilir. Üstelik f' de X e göre güçlü Lip-1 fonksiyonu olur.

Teorem 2.4.1. (Melin , 2008a) X bağlantılı bir T_0 en küçük komşuluk uzayı, $A \subset X$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ bir fonksiyon olsun. f in $f' : X \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonuna genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart f in X e göre güçlü Lip-1 fonksiyonu olmasıdır.

Teorem 2.4.2. (Melin , 2008a) X bir en küçük komşuluk uzayı, $A \subset X$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ bir fonksiyon olsun. f in $f' : X \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonuna genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart f in X e göre güçlü Lip-1 fonksiyonu olmasıdır.

2.5 Manifolddar

Manifolddar sezgisel olarak yüksek boyutlara sahip olabilecek eğriler veya yüzeyler gibi düşünülebilir. Buradan her manifoldun, kabaca söylemek gerekirse bir noktayı tanımlamak için ihtiyaç duyulan bağımsız parametrelerin sayısı olan boyuta sahip olduğu söylenilebilir.

n -boyutlu bir manifold, Euclid uzayı $\mathbb{R}^n$ de biçimlendirilen bir nesne olarak da düşünülebilir. 1-boyutlu manifoldlar genellikle eğriler olarak adlandırılır. En bilinen örneği olarak reel doğru verilebilir. Aynı zamanda çemberler, parabol ve herhangi bir $y = f(x)$ şeklindeki sürekli bir fonksiyonun grafiği de 1-boyutlu manifold örneği olarak düşünülebilir. 2-boyutlu manifoldlar yüzeylerdir. Bu manifoldlar için kullanılan yaygın örnekler düzlemler ve kürelerdir. Ayrıca silindirler, elipsoidler ve paraboloidler 2-boyutlu manifoldlara örnek olarak verilebilir.

Tanım 2.5.1. (Lee , 2000) n -boyutlu manifold, n -boyutlu yerel Euclid uzayı olan ikinci sayılabilir bir Hausdorff uzaydır.

Örnek 2.5.1. (Tu , 2008) $\mathbb{R}$ 'nin her açık alt kümesi bir manifolddur.

$\mathbb{R}$ bir Hausdorff uzaydır. Hausdorff uzayı olma kalıtsal bir özellik olduğundan $\mathbb{R}$ nin her açık alt kümesi Hausdorff uzaydır. Benzer şekilde $\mathbb{R}$ bir ikinci sayılabilir olduğundan ve ikinci sayılabilir uzay olma kalıtsal bir özellik olduğundan $\mathbb{R}$ nin her açık alt kümesi ikinci sayılabilir uzaydır. Son olarak $\mathbb{R}$ nin herhangi bir açık alt kümesindeki her nokta için komşuluk bu kümenin kendisi olarak seçilirse, üzerindeki birim fonksiyon homeomorfizma olduğundan $\mathbb{R}$ nin bir açık alt kümesine homeomorf olmuş olur. Yani $\mathbb{R}$ nin herhangi bir açık alt kümesindeki her noktanın $\mathbb{R}$ nin bir açık alt kümesine homeomorf olacak şekilde bir komşuluğu vardır. O halde $\mathbb{R}$ nin her açık alt kümesi bir manifolddur.

Örnek 2.5.2. (Tu , 2008) $M = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ bir topolojik manifold değildir.

M bir topolojik manifold olamaz, çünkü $p = (0,0)$ noktasının

komşuluğunda $\mathbb{R}^n$ in bir açık alt kümesine homeomorfizma tanımlanamaz. p noktasının komşuluğuna U , $\mathbb{R}^n$ in herhangi bir açık alt kümesine G densin. Kabul edilsin ki $h : U \rightarrow G$ bir homeomorfizma olsun. Bu durumda $h' : U - \{p\} \rightarrow G - \{h(p)\}$ de homeomorfizma olmalı. Ancak $U - \{p\}$ 'nin 4 bağlantılı bileşeni var iken $G - \{h(p)\}$ 'nin $n = 1$ için 2 bağlantılı bileşeni vardır ve $n \geq 2$ için bağlantılıdır. Bu yüzden h' homeomorfizma değildir. O halde M bir topolojik manifold olamaz.

Lemma 2.5.1. (Lee , 2000) *Bir n -manifoldun herhangi bir açık alt kümesi de bir n -manifolddur.*

İspat. *M bir n -manifold ve G, M nin bir açık alt kümesi olsun. Her $q \in G$ için M bir n -manifold olduğundan $\mathbb{R}^n$ in bir açık alt kümesine homeomorf olan M de bir komşuluk vardır. G üzerindeki alt uzay topolojisine geçildiğinde her $q \in G$ elemanı için bir açık bulunmuş olur. Homeomorfizmaların kısıtlanması da homeomorfizma olduğundan her $q \in G$ için $\mathbb{R}^n$ in bir açık alt kümesine homeomorf olan bir komşuluk bulunabilir. Öyleyse G , n -boyutlu yerel Euclid uzayıdır. Hausdorff uzayı ve ikinci sayılabilir uzay olma özellikleri kalıtsal özellikler olduğundan G , hem Hausdorff uzayı hem de ikinci sayılabilir uzayıdır. Sonuç olarak bir n -manifoldun herhangi bir açık alt kümesi de bir n -manifolddur.*

Lemma 2.5.2. (Lee , 2000) *M bir m -manifold ve N bir n -manifold ise $M \times N$ bir $(m+n)$ -manifolddur.*

İspat. *$x \in M \times N$ olsun. x , $m \in M$ ve $n \in N$ olacak şekilde $x = (m, n)$ şeklinde yazılabilir. M bir m -manifold olduğundan $m \in M$ in, $\mathbb{R}^m$ in bir A açık alt kümesine homeomorf olan bir U komşuluğu vardır. Benzer şekilde N bir n -manifold olduğundan $n \in N$ in, $\mathbb{R}^n$ in bir B açık alt kümesine homeomorf olan bir V komşuluğu vardır. O halde $U \times V \simeq A \times B$ olur. $U \times V$, $x \in M \times N$ in bir komşuluğu, $A \times B \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ olduğundan $M \times N$ bir $(m+n)$ -boyutlu yerel Euclid uzayıdır. Hausdorff uzaylarının çarpımı yine Hausdorff uzayı ve ikinci sayılabilir uzayların çarpımı yine ikinci sayılabilir uzaylar olduğundan $M \times N$ hem Hausdorff uzayıdır hem de ikinci sayılabilir uzayıdır. O halde $M \times N$, $(m+n)$ -boyutlu manifolddur.*

Yerel Euclid uzayının tanımından M topolojik uzayındaki her noktanın $\mathbb{R}^n$ in bir açık alt kümesine homeomorf olan bir komşuluğunun var olması gerektiği bilinmektedir. M deki bu komşuluğa U , homeomorfizmaya da ϕ diyelim. (U, ϕ) ikilisine *harita* denir. Bir topolojik uzayın (U, ϕ) ve (V, ψ) gibi iki haritasının C^∞ -uyumlu olabilmesi için

$$\begin{aligned}\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) &\rightarrow \phi(U \cap V) \\ \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) &\rightarrow \psi(U \cap V)\end{aligned}$$

C^∞ -fonksiyonu olmalıdır (Tu , 2008).

Tanım 2.5.2. (Tu , 2008) Bir yerel Euclid uzayı üzerindeki atlas $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ olacak şekildeki ikişer olarak C^∞ -uyumlu haritaların bir koleksiyonudur ve $\varphi = \{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}_{\alpha}$ ile gösterilir.

Not 2.5.1. (Tu , 2008) Bir haritanın bir atlas ile uyumlu olabilmesi için o haritanın atlastaki tüm haritalarla uyumlu olabilmesi gerekmektedir.

Lemma 2.5.3. (Tu , 2008) $\{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}$ bir atlas olsun. (V, θ) ve (W, σ) , $\{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}$ atlası ile uyumlu ise, birbirleriyle de uyumludur.

Bir yerel Euclid uzayındaki M atlası eğer daha büyük bir atlas tarafından içerilmiyorsa *maksimal atlastır*. Maksimal atlas ile birlikte M manifolduna *smooth manifold* denir. (Tu , 2008)

Lemma 2.5.4. (Tu , 2008) Her atlas bir tek maksimal atlas tarafından içerilir.

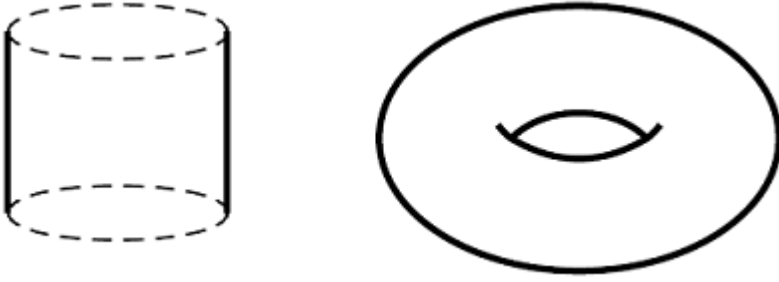
İspat. $\varphi = \{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}$ bir atlas olsun. Bu atlası φ deki tüm haritalar ile ve birbirleriyle uyumlu olan her (V_i, θ_i) haritası eklensin. Yeni elde edilen atlası, başka bir harita daha eklemek istenilirse, bu harita aynı zamanda φ deki tüm haritalarla da uyumlu olmak zorunda olduğundan zaten yeni elde edilen atlası dahildir. O halde yeni elde edilen atlas maksimal atlastır.

Yeni elde edilen atlas M ve M' , φ yi içeren başka bir maksimal atlas olsun. O halde M' ndeki tüm haritalar φ ile uyumludur. φ ile uyumlu tüm haritalar M de olduğundan $M' \subseteq M$ olur. Üstelik M' maksimal kabul edildiğinden $M = M'$ olur. Yani φ yi içeren maksimal atlas tektir.

Not 2.5.2. (Tu , 2008) Bir topolojik uzay Hausdorff uzayı, ikinci sayılabilir uzay ve bir atlası sahip ise *smooth manifold*dur.

Önerme 2.5.1. *(Tu , 2008) $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, m -boyutlu M manifoldu üzerinde bir atlas ve $\{(V_i, \theta_i)\}$ n -boyutlu N manifoldu üzerinde bir atlas olsun. $\{(U_\alpha \times V_i, \phi_\alpha \times \theta_i)\}$ şeklindeki haritalar koleksiyonu da $M \times N$ üzerinde bir atlas olur.*

Örnek 2.5.3. *(Tu , 2008) S^1 ve $\mathbb{R}$ üzerinde atlaslar olan iki manifolddur. O halde $S^1 \times \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı sonsuz silindir ve $S^1 \times S^1$ şeklinde tanımlı tor üzerinde de atlaslar vardır. Her atlas bir maksimal atlas tarafından içerildiğinden sonsuz silindir ve tor birer smooth manifolddur.*



Şekil 2.6: (Tu , 2008) Sonsuz Silindir ve Tor

3 YEREL SONLU VE YEREL SAYILABİLİR UZAYLAR

Bir bilgisayarda sonsuz çoklukta veri depolayabilmek imkansızdır. Bu yüzden bir noktanın sonsuz bir komşuluğa sahip olduğu uzaylar bilgisayar uygulamalarında tercih edilmez. Bu sebeplerden dolayı daha kullanışlı yeni kavramlar ortaya atılmıştır. Bu kavramlar üzerinde çalışmadan önce, bu kavramlarla ilgili ispatları anlamayı kolaylaştıracak bazı kavramlardan bahsedilecektir.

A ve B birer küme olsun. A ve B nin *eşit denklkte* olması için gerek ve yeter şart A dan B ye birebir ve örten bir fonksiyon olmasıdır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere bir A kümesi $\mathbb{N}$ ile eşit denklkte ise A ya *numaralandırılabilir* denir. Bir A kümesinin *sayılabilir* olması için gerek ve yeter şart o kümenin numaralandırılabilir olmasıdır (Willard , 1970).

Lemma 3.0.1. (Ilgaz , 1987) $\{A_1, A_2, \dots\}$ birbirinden ayrık numaralandırılabilir kümelerin sınıfı olsun. O halde $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ de numaralandırılabilir.

İspat. $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$$

.

.

.

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}$$

.

.

.

olsun. O halde

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \text{ olur.}$$

$$f : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$a_{ij} \mapsto (i, j)$$

birebir ve örten bir fonksiyondur. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ numaralandırılabilir olduğundan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ de numaralandırılabilir.

Tanım 3.0.1. (Melin , 2009) Bir en küçük komşuluk uzayındaki her noktanın sonlu yakın komşuluğu varsa bu uzaya yerel sonlu uzay denir. Eğer sayılabilir yakın komşuluğu varsa da yerel sayılabilir uzay denir.

Önerme 3.0.1. (Melin , 2009) X yerel sonlu bir uzay olsun. X bağlantılı bir küme ise sayılabilir.

İspat. X in T_0 -uzayı olmadığını kabul edilsin. O halde aynı komşulukta olan noktaların aynı denklik sınıfında olduğu $\tilde{X}$ bölüm uzayından bahsedilebilir. Bu durumda $\tilde{X}$ uzayı şu şekilde yazılsın.

$$\tilde{X} = \{[x_1], [x_2], \dots\}$$

Buradaki denklik sınıfları aynı komşulukta olan noktalardan oluşur. X bir yerel sonlu uzay olduğundan her $x \in X$ için bir sonlu yakın komşuluk vardır. O halde bu denklik sınıfları sonlu sayıda eleman içermektedir. Sonlu bir küme sayılabilir ve bu durumda da numaralandırılabilir. Numaralandırılabilir kümelerin herhangi birleşimi de numaralandırılabilir olduğundan ve denklik sınıflarının birleşimi X i verdiği için X de numaralandırılabilir. O halde X sayılabilir. X , T_0 -uzayı olsun. X aynı zamanda en küçük komşuluk uzayı ve bağlantılı olduğundan, X Khalimsky yay bağlantılıdır. O halde X uzayı üzerinde yay metriğinden söz edilebilir. Bir $x \in X$ için $B_n(x) = \{y \in X : p_x(x, y) \leq n\}$ açık yuvarı ele alınsın. n üzerinden yerel sonluluğu esas alarak tümevarım yapılsın. $n = 0$ için $B_n(0) = \{y \in X : p_x(x, y) \leq 0\} = \{x\}$ sonludur. n için doğru kabul edilsin. Yani $B_n(x)$ sonlu olsun. Bir Khalimsky yayı $[a, b]_{\mathbb{Z}}$ Khalimsky aralığına homeomorf olduğundan ve her $c, c + 1 \in [a, b]_{\mathbb{Z}}$ 2-yakın olduğundan Khalimsky yayındaki noktalar da ikişerli olarak birbirine yakındır. $B_{n+1}(x)$ sonlu mu? $B_n(x)$ 'in sonlu olduğu kabul edildi.

$$B_{n+1}(x) = B_n(X) \cup \{y \in X : p_x(x, y) = n + 1\}$$

Yani n boyundaki Khalimsky yaylarına sadece tek nokta eklenerek elde edilen yayların içerdiği farklı noktalar $B_n(x)$ kümesine dahil edilecektir. Khalimsky

yaylarındaki noktalar ikişerli olarak yakın olduğundan eklenecek tek nokta x i içeren yaydaki en az 1 noktaya yakın olacaktır. Eklenecek nokta yakın olacağından yakın komşulukta olacaktır. Bu nokta bitiş noktalarından birine yakın olursa, o noktaların komşuluğu sonlu olduğundan sonlu sayıda nokta eklenebilir. Eğer bitiş noktalarının arasındaki 2 noktaya yakınsa sonlu iki kümenin kesişimi yine sonlu olacağından yine sonlu sayıda nokta eklenebilir. O halde $B_{n+1}(x)$ sonludur. X Khalimsky yay bağlantılı olduğundan her x i bitiş noktası kabul eden bir Khalimsky yayı mevcuttur. $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(x) = X$ ve sayılabilir kümelerin birleşimi sayılabilir olduğundan X sayılabilirdir.

Önerme 3.0.2. (Melin , 2009) Bir en küçük komşuluk uzayı X in sayılabilir olması için gerek ve yeter şart yerel sayılabilir ve sayılabilir çoklukta bağlantılı bileşene sahip olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ X en küçük komşuluk uzayı ve sayılabilir uzay olsun. O halde her $x \in X$ in yakın komşuluğu X in bir alt kümesi olacağından sayılabilir olur. O halde X yerel sayılabilir uzaydır. Aynı şekilde bağlantılı bileşenler de X 'in alt kümelerinden oluşacağından bağlantılı bileşen sayısı sayılabilir.

$(\Leftarrow)$ X yerel sayılabilir uzay ve sayılabilir sayıda bağlantılı bileşene sahip olsun. X bağlantılı ise ispat önerme 3.0.1. e benzer şekilde yapılır. X bağlantılı olmasın. O halde X in sayılabilir sayıda bağlantılı bileşeni vardır. Her bileşen sayılabilir mi? X in bir bileşeni X_1 olsun. Her $x \in X_1$ için sayılabilir bir yakın komşuluk vardır ve bu komşuluk bağlantılı bileşenin içinde kalır. Bu bileşen bağlantılı ve yerel sayılabilir olduğundan sayılabilir. Bileşeni keyfi olarak seçtiğimiz için X in her bileşeni sayılabilir. O halde X sayılabilir.

Önerme 3.0.3. (Melin , 2009) X bir en küçük komşuluk uzayı, $S \subseteq X$ açık noktaların kümesi ve $T \subseteq X$ kapalı noktaların kümesi olsun. X bir T_0 -uzayı ve yerel sonlu bir uzay ise $X = \mathcal{C}(S) = \mathcal{N}(T)$ dir.

İspat. İspat yapılırken eşitliğin sadece $X = \mathcal{C}(S)$ kısmı gösterilecektir. Diğer kısım duallikten gelecektir. S , X deki açık noktaların kümesini gösterebilir. $y_0 \in X$ olsun. $\mathcal{N}(y_0)$ tek elemanlı bir küme ise $y_0 \in S$ olur. $\mathcal{N}(y_0)$ tek elemanlı bir küme olmasın. X bir yerel sonlu uzay olduğundan y_0 in sonlu bir yakın komşuluğu vardır. $\mathcal{N}(y_0) \subset AN(y_0)$ olduğundan $\mathcal{N}(y_0)$ da sonludur. $\mathcal{N}(y_0)$ in

eleman sayısı $k \geq 0$ olmak üzere $k + 1$ olsun. Bir $y_k \in \mathcal{N}(y_0)$ seçilsin. İlk önce $\mathcal{N}(y_0)$ da olmayan hiçbir elemanın $\mathcal{N}(y_k)$ da olamayacağı gösterilsin. $1 \leq i \leq k$ için $y_i \in \mathcal{N}(y_0)$ olsun. Bu durumda $y_0 \preccurlyeq y_i$ olur. Böylece $\mathcal{N}(y_i) \subset \mathcal{N}(y_0)$ dır. Yani $X - \mathcal{N}(y_0)$ daki hiçbir eleman $\mathcal{N}(y_0)$ daki herhangi bir elemanın en küçük komşuluğunda olamaz. Şimdi $\mathcal{N}(y_0)$ daki bir noktanın açık olduğu yani en küçük komşuğunun tek elemanlı olduğu gösterilsin. X, T_0 -uzayı olduğundan Alexandrov-Birkhoff bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır. Bu yüzden elemanlar karşılaştırılabilir. Yani indisleme uygun şekilde yapılırsa $\mathcal{N}(y_k) \subset \mathcal{N}(y_{k-1}) \subset \dots \subset \mathcal{N}(y_1) \subset \mathcal{N}(y_0)$ şeklinde bir zincir elde edilebilir. Üstelik $y_1 \in \mathcal{N}(y_0)$ ve X, T_0 -uzayı olduğundan $y_0 \notin \mathcal{N}(y_1)$ dir. Benzer şekilde inşa devam ettirildiğinde $\mathcal{N}(y_k)$ nın kendisinden başka bir elemanı içermeyeceği elde edilir. $y_k \in \mathcal{N}(y_0)$ olduğundan $y_0 \in \mathcal{C}(y_k)$ olur. Böylece X den seçilen keyfi bir noktanın ya açık nokta ya da bir açık noktanın kapanışında olduğu elde edilir.

4 KHALİMSKY MANİFOLDLARINI TANIM-LAMA DENEMELERİ

Bu bölümde iki farklı tanım aracılığıyla Khalimsky manifoldları araştırılmaya başlanacaktır. Bölümün sonunda bu tanımların yetersiz kalacağı görülecektir. İlk olarak verilen tanım manifold tanımını çok geniş olarak ele alırken, ikinci tanım ise gereğinden fazla kısıtlayacaktır.

4.1 Saf Khalimsky Manifoldları

Tanım 4.1.1. (Melin , 2009) X bir topolojik uzay olsun. X sayılabilir bir uzay ve X in, her U_i , $\mathbb{Z}^n$ in bir açık alt kümesine homeomorf olacak şekilde $(U_i)_{i \in \Lambda}$ açık örtüsü var ise X e n -boyutlu saf Khalimsky manifoldu denir.

Örnek 4.1.1. (Melin , 2009) $m \geq n$ olmak üzere $\mathbb{Z}^n$ m -boyutlu saf Khalimsky manifoldudur.

$\mathbb{Z}$ sayılabilir bir küme ve sayılabilir kümelerin sayılabilir sayıdaki çarpımı sayılabilir olduğundan $\mathbb{Z}^n$ sayılabilir. Her $x \in \mathbb{Z}^n$ için $x \in U_i$ açığı alınsın.

$$\begin{aligned} \phi : U_i &\rightarrow U_i \times \{1\}^{m-n} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $U_i \subseteq \mathbb{Z}^n$ açık ve $\{1\} \subseteq \mathbb{Z}$ açık olduğundan $U_i \times \{1\}^{m-n} \subseteq \mathbb{Z}^m$ açıktır. ϕ nin homeomorfizma olduğu gösterilsin. ϕ nin biyektif olduğu açıktır. U_i de birbirine yakın olan herhangi bir p ve q noktaları için $\phi(p)$ ve $\phi(q)$ da farklı olan koordinat sayısı ϕ nin tanımından dolayı değişmeyeceğinden görüntüler de yakındır. O halde ϕ süreklidir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : U_i \times \{1\}^{m-n} &\rightarrow U_i \\ (x_1, \dots, x_n, 1, \dots, 1) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ters fonksiyonun da sürekli olduğu gösterilebilir. Her $x \in \mathbb{Z}^n$ için bir U_i açığı alındığından $\mathbb{Z}^n = \bigcup U_i$ dir ve U_i ler $\mathbb{Z}^m$ in bir açık alt kümesine homeomorf olduğundan $\mathbb{Z}^n$ m -boyutlu saf Khalimsky manifoldudur.

Örnek 4.1.2. (Melin , 2009) J boştan farklı sayılabilir bir indeks kümesi olsun. J tane $[1, 3]_{\mathbb{Z}}$ Khalimsky aralığı alınsın ve açık 1 noktasına yapıştırılsın. Elde edilen uzay $\bigcup_{j \in J} [1, 3]_{\mathbb{Z}}$ ile gösterilebilir. Bu uzay J indeks kümesi ve $[1, 3]_{\mathbb{Z}}$ Khalimsky aralığı sayılabilir olduğundan sayılabilirdir. J tane $[1, 3]_{\mathbb{Z}}$ ile bu uzay örtülür ve birim dönüşüm ile $\mathbb{Z}$ in $[1, 3]_{\mathbb{Z}}$ açık alt kümesine bu aralıklar homeomorf kılınabilir. Öyleyse $\bigcup_{j \in J} [1, 3]_{\mathbb{Z}}$, 1-boyutlu saf Khalimsky manifoldudur. 1-boyutlu manifoldlar eğri olarak düşünüldüğünde her nokta en fazla iki noktaya yakın olmalıdır. Bu uzayda ise 1 noktası J tane 2 noktasına yakındır.

Saf Khalimsky manifoldu tanımı bir önceki örnekteki gibi garip manifoldlar ortaya çıkardığından pek kullanışlı değildir.

4.2 Katı Khalimsky Manifoldları

Tanım 4.2.1. (Melin , 2009) X bir topolojik uzay olsun. X sayılabilir bir uzay ve her $x \in X$ için $AN_X(x)$ ile $AN_{\mathbb{Z}^n}(p)$ homomorf olacak şekilde $p \in \mathbb{Z}^n$ var ise X e n -boyutlu katı Khalimsky manifoldu denir.

Önerme 4.2.1. (Melin , 2009) Katı Khalimsky manifoldların boyutu tektir.

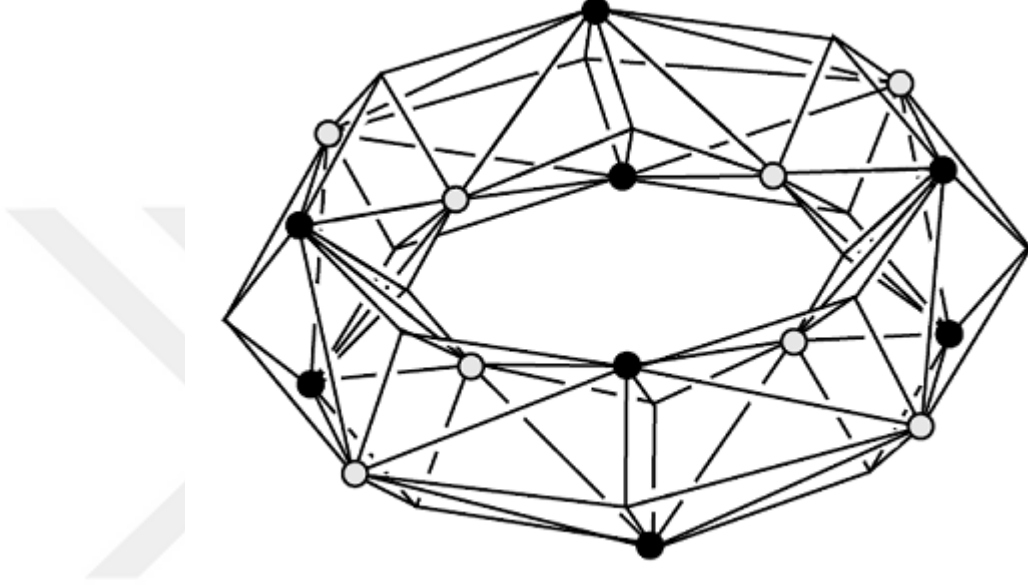
İspat. S , m ve n boyutlu bir katı Khalimsky manifoldu olsun. O halde bir $s \in S$ için $AN_S(s) \simeq AN_{\mathbb{Z}^n}(p)$ ve $AN_S(s) \simeq AN_{\mathbb{Z}^m}(q)$ olacak şekilde $p \in \mathbb{Z}^n$ ve $q \in \mathbb{Z}^m$ vardır. Homeomorfizma bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan $AN_{\mathbb{Z}^n}(p) \simeq AN_{\mathbb{Z}^m}(q)$ olur. O halde $\mathcal{A}(p) \simeq \mathcal{A}(q)$ dur. Bu durumda $\mathcal{A}(p)$ ve $\mathcal{A}(q)$ deki açık noktalar ile kapalı noktaların sayısı birbirine eşittir. Yani p_e ve q_e , p ve q daki çift koordinatların sayısını ve p_o ve q_o , p ve q daki tek koordinatların sayısını göstermek üzere $2^{p_e} = 2^{q_e}$ ve $2^{p_o} = 2^{q_o}$ dur. Bu durum ise $m = n$ olması ile mümkündür.

Tanım 4.2.2. (Melin , 2009) $m \geq 4$ bir çift sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_m$ sonlu uzayına Khalimsky çemberi denir.

İki Khalimsky çemberinin çarpımından Khalimsky 2-toru elde edilir. Khalimsky 2-toru, 2 den büyük iki çift tam sayı ile parametrelendirilir.

Khalimsky 2-torunu elde etmenin başka bir yolu, Khalimsky düzleminde bir dikdörtgen ele alarak reel düzlemde tor elde edilirken kullanılan yapıştırımlarla aynı şekilde yapıştırımları yapmaktır.

Tanım 4.2.3. (Melin , 2009) Bir Khalimsky n -toru T_m , $m \in (2\mathbb{Z})^n$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $m_i \geq 4$ olmak üzere $T_m = \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ dir. Buradaki $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ n 'lisine tor kabul edilebilir n 'li denir.



Şekil 4.1: (Melin , 2009)Khalimsky Toru

Önerme 4.2.2. (Melin , 2009) m ve m' tor kabul edilebilir n 'li ve n' 'li ler olsun. T_m ve $T_{m'}$ torlarının homeomorf olabilmeleri için gerek ve yeter şart $n = n'$ ve tüm içeriklerin sırasıyla birbirine eşit olmasıdır.

Reel uzaydaki bağlantılı 1-boyutlu manifold ya çemberdir ya da reel doğrudur. Katı Khalimsky manifoldları için de aynı sonuç verilebilir.

Önerme 4.2.3. (Melin , 2009) Bağlantılı 1-boyutlu katı Khalimsky manifoldu ya Khalimsky çemberidir ya da Khalimsky doğrusudur.

İspat. X bağlantılı 1-boyutlu katı Khalimsky manifoldu, $x \in X$ keyfi bir nokta ve y ile z , X teki farklı noktalar olmak üzere $\mathcal{A}(x) = \{y, z\}$ olsun. Bu durumda X sayılabilir ve her $x \in X$ için $AN_X(x) \simeq AN_{\mathbb{Z}}(p)$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{Z}$ vardır. $AN_X(x) = \{x, y, z\}$ ve $AN_{\mathbb{Z}}(p) = \{p-1, p, p+1\}$ olduğundan y ve z ya

açık ya da kapalı noktalar. $X \setminus \{x\}$ in bağlantılı olduğunu kabul edilsin. O halde $X \setminus \{x\}$ yay bağlantılı olacağından y ve z yi bağlayan bir Khalimsky yayı A vardır ve y ile z ya açık ya da kapalı noktalar olduğundan $\text{card}(A)$ tektir. O halde $J = A \cup \{x\}$ bir Khalimsky çemberidir. $X \neq J$ olsun. O halde X bağlantılı olduğundan $w, j \in J$ ye yakın olacak şekilde bir $w \in X \setminus J$ vardır. Bu durumda $\text{card}(\mathcal{A}(j)) > 2$ olur ancak X , 1-boyutlu olduğundan bu mümkün değildir. O halde $X = J$ dir. Yani X Khalimsky çemberidir. $X \setminus \{x\}$ bağlantılı olmasın. $y \in B_1$ ve $z \in B_2$ olacak şekilde $X \setminus \{x\} = B_1 \cup B_2$ olarak iki bağlantılı bileşenin birleşimi şeklinde yazılsın. x açık ise $m = 0$ ve x kapalı ise $m = 1$ olmak üzere B_1 ve B_2 nin $[m, \infty[_{\mathbb{Z}}$ ye homeomorf olduğu gösterilirse ispat biter. B_1 de tek komşusu olan nokta tek nokta y noktasıdır. $y = y_m$ ve y_{m+1} , y nin komşusu olsun. Benzer şekilde bir $k > m$ sayısı için de y_{k+1} de y_k nin komşusu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi : [m, \infty[_{\mathbb{Z}} &\rightarrow \{y_k : k \geq m\} \subset B_1 \\ k &\mapsto y_k \end{aligned}$$

sürekli dönüşümünü tanımlansın. Bu dönüşüm tanımından dolayı birebir ve örten bir dönüşümdür. Üstelik tersi de sürekli. O halde φ homeomorfizmadır. $B_1 \neq \{y_k : k \geq m\}$ olsaydı. B_1 bağlantılı olduğundan bazı noktaların en az 3 komşusu olabilirdi ancak B_1 , 1-boyutlu olduğundan bu imkansızdır. O halde $B_1 = \{y_k : k \geq m\}$ ve $B_1 \simeq [m, \infty[_{\mathbb{Z}}$ olur. Benzer şekilde $B_2 \simeq [m, \infty[_{\mathbb{Z}}$ olduğu gösterilebilir. O halde $X \simeq \mathbb{Z}$ olur.

4.3 Reel Benzerler

Reel benzerler tahmin edileceği üzere dijital Khalimsky manifoldlarının reel uzaydaki karşılıklarıdır. Saf Khalimsky manifoldları $\mathbb{Z}^n$ in içine gömülen bir uzay olarak düşünülebilir. Bu durumda saf Khalimsky manifoldlarının reel benzerlerinin $\mathbb{R}^n$ in içine gömülebileceği söylenebilir. Ancak katı Khalimsky manifoldları $\mathbb{Z}^n$ in içine gömülemediğinden bu düşünce ile reel benzerleri inşa edilemez. Katı Khalimsky manifoldunun reel benzerini inşa edebilmek için, bu manifoldun her komşuluğuna karşı $\mathbb{R}^n$ in uygun parçaları belli bir kurala göre bir reel manifold oluşturacak şekilde yapıştırılmalıdır (Melin , 2009).

Katı Khalimsky manifoldları yerel olarak sonludur. O halde açık noktaların kapanışlarının birleşimleri şeklinde yazılabilirler. $p \in \mathbb{Z}^n$ açık bir nokta ise kapanışı $\mathcal{C}(p) = \{x \in \mathbb{Z} : \|x - p\|_\infty \leq 1\}$ dir. Bu yüzden $C_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\|_\infty \leq 1\}$ kübünün, $\mathcal{C}(p)$ 'nin reel benzeri olma ihtimali vardır. O halde bu formdaki küplerin, Khalimsky manifoldlarının reel benzerlerini inşa edebilmek için kullanılabileceği gösterilmelidir (Melin , 2009).

X bir n-boyutlu katı Khalimsky manifoldu olsun. $x \in X$ açık noktasını ele alınsın. $\mathcal{C}(x)$ i bir $p \in \mathbb{Z}^n$ için $\mathcal{C}(p)$ ile tanımlansın. O halde her $y \in \mathcal{C}(x)$ bir $q \in \mathcal{C}(p)$ ile tanımlanmış olur. Şimdi de bir $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ için q_i tek olduğunda $I_{q_i} = (q_i - 1, q_i + 1)$ ve q_i çift olduğunda $I_{q_i} = \{q_i\}$ olmak üzere $R(q) = \prod_{i=1}^n I_{q_i}$ tanımlansın. Böylece C_p kübü, $R(q)$ kümeleri tarafından $C_p = \bigcup_{q \in \mathcal{C}(p)} R(q)$ şeklinde oluşturulur (Melin , 2009).

Örnek 4.3.1. (Melin , 2009) $p = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$ açık noktasını ele alınsın. p noktasının kapanışı

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(p) &= \{x \in \mathbb{Z}^2 : \|x - p\|_\infty \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}^2 : \sup\{\|x_n - p_n\|, n \in \{0, 1\}\} \leq 1\} \\ &= \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (0, 0), (2, 2), (2, 0), (0, 2)\} \end{aligned}$$

dır. Bu kapanışın reel benzeri olan C_p kübü

$$\begin{aligned} q_1 = (1, 1) \text{ için } R(q_1) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = (0, 2) \times (0, 2) \\ q_2 = (1, 0) \text{ için } R(q_2) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = (0, 2) \times \{0\} \\ q_3 = (0, 1) \text{ için } R(q_3) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = \{0\} \times (0, 2) \\ q_4 = (1, 2) \text{ için } R(q_4) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = (0, 2) \times \{2\} \\ q_5 = (2, 1) \text{ için } R(q_5) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = \{2\} \times (0, 2) \\ q_6 = (0, 0) \text{ için } R(q_6) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = \{0\} \times \{0\} \\ q_7 = (2, 2) \text{ için } R(q_7) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = \{2\} \times \{2\} \\ q_8 = (2, 0) \text{ için } R(q_8) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = \{2\} \times \{0\} \\ q_9 = (0, 2) \text{ için } R(q_9) &= \prod_{i=1}^n I_{q_i} \subset \mathbb{R}^n = \{0\} \times \{2\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\bigcup_{q_i \in \mathcal{C}(p)} R_{q_i} = [0, 2] \times [0, 2] \text{ dir.}$$

Tanım 4.3.1. (Melin , 2009) n -boyutlu katı Khalimsky manifoldunun reel benzeri

$$M_X = \coprod (C_p : p \in X \text{ açık nokta})/\omega$$

bölüm uzayı olarak tanımlanır. Burada M_X , hücreleri tarafından bölüntülere ayrılmıştır. Yani $M_X = \bigcup_{x \in X} R(x)$ dir ve X bu bölüntü altında M_X den elde edilen bir bölüm uzayıdır.

Önerme 4.3.1. (Melin , 2009) X bir n -boyutlu katı Khalimsky manifoldu olsun. $A \subset X$ açık bir alt küme ise $\bigcup_{x \in A} R(x)$, M_X te açıktır. $B \subset X$ herhangi bir alt küme olsun, o halde $\bigcup_{x \in \mathcal{C}(B)} R(x) = \overline{\bigcup_{x \in B} R(x)}$ dir.

Önerme 4.3.2. (Melin , 2009) X n -boyutlu katı Khalimsky manifoldu ise M_X n -boyutlu reel manifolddur.

Örnek 4.3.2. (Melin , 2009) $\mathbb{Z}^n$ in reel benzeri $\mathbb{R}^n$, Khalimsky çemberinin S^1 ve Khalimsky torunununki de T dir.

Önerme 4.3.3. (Melin , 2009) X , n -boyutlu katı Khalimsky manifoldu olsun. M_X 'in kompakt olması için gerek ve yeter şart X in sonlu olmasıdır.

Yukarıda verilen örneklerde Khalimsky çemberinin reel benzerinin S^1 ve Khalimsky torunun reel benzerinin T olduğu belirtilmişti. Benzer şekilde reel benzeri S^2 olan 2-boyutlu katı Khalimsky manifolduna Khalimsky küresi denilebilirdi. Ancak bu bölümde ulaşılabilecek sonuçlar bu çıkarımın yanlış olacağını gösterecektir. Yüzeyler için topolojik bir invaryant olan Euler karakteristiği bu çıkarımı çürütmek için kullanılacaktır (Melin , 2009).

Önerme 4.3.4. (Melin , 2009) $M_X = S^2$ olacak şekilde 2-boyutlu katı Khalimsky manifoldu yoktur.

İspat. Küre kompakt bir topolojik uzaydır. O halde $M_X = S^2$ olacak şekildeki 2-boyutlu katı Khalimsky manifoldu varsa sonlu olmalıdır. 2-boyutlu sonlu katı Khalimsky manifoldu X için M_X in Euler karakteristiğini hesaplınsın. N , X teki açık noktaların sayısı olsun. 2-boyutlu bir katı Khalimsky manifoldunda

bir açık noktanın reel benzeri kare şeklinde bir bölgedir. M_X bu bölgeler yardımıyla parçalara ayrılırsa, M_X reel, 2-boyutlu ve kompakt olduğundan, Euler karakteristiği

$$\chi(M_X) = (\text{Köşelerin sayısı}) - (\text{Kenarların sayısı}) + (\text{Bölgelerin Sayısı})$$

denklemleri ile bulunabilir. Her kenar iki tane açık noktanın reel benzerini sınırladığından $2N$ sayıda kenar vardır. Benzer şekilde her nokta dört tane açık noktanın reel benzeri olan bölgelerin köşesi olacağından köşe sayısı N dir. O halde $\chi(M_X) = N - 2N + N = 0$ olur. Ancak kürenin Euler karakteristiği 2 olduğundan reel benzeri küre olacak şekilde 2-boyutlu katı Khalimsky manifoldu yoktur.

Sonuç 4.3.1. *(Melin , 2009) X sonlu, 2-boyutlu katı Khalimsky manifoldu ise M_X ya tordur ya da Klein şişesidir.*

5 EK İŞLEMİ

$\mathbb{Z}^n$ deki yakın komşulukların dijital Khalimsky manifoldlarının tanımlanmasında önemli bir rolü vardır ve dolayısıyla bu komşulukların ve kesişimlerinin yapısı iyi anlaşılmalıdır. Bu yüzden, bu bölümde yakın komşulukların ve bu komşulukların kesişimlerinin anlaşılmasında yardımcı olacak olan ek işlemi tanımlanacaktır.

Tanım 5.0.1. (Melin , 2009) X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. X ve Y ’nin eki $X \vee Y$ ile gösterilen, X ve Y ’nin ayrık birleşimleri üzerinde tanımlanan bir topolojik uzaydır. Bu topolojik uzayda açıklar aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(i) $A \cap X, X$ te açık ve $A \cap Y = \emptyset$ veya

(ii) $A \cap X = X$ ve $A \cap Y, Y$ de açık ise $A, X \vee Y$ de açıktır.

Kapalı kümeler ise benzer şekilde;

(i) $B \cap X, X$ te kapalı ve $B \cap Y = Y$ veya

(ii) $B \cap X = \emptyset$ ve $B \cap Y, Y$ de kapalı ise, $B, X \vee Y$ de kapalıdır, şeklinde tanımlanır.

X ve Y iki en küçük komşuluk uzayı olsun. $x \in X$ için $\mathcal{N}_{X \vee Y}(x) = \mathcal{N}_X(x)$ iken, $y \in Y$ için $\mathcal{N}_{X \vee Y}(y) = \mathcal{N}_Y(y) \cup X$ tir. O halde iki en komşuluk uzayının ekinin yine bir en küçük komşuluk uzayı olduğu söylenebilir. $X \vee Y$ en küçük komşuluk uzayı olduğundan üzerinde Alexandrov-Birkhoff ön sıralama bağıntısından söz edilebilir. Her $x \in X$ ve herhangi bir $y \in Y$ için ek işlemi tanımından $\mathcal{N}_{X \vee Y}(y) = \mathcal{N}_Y(y) \cup X$ olduğundan $x \in \mathcal{N}_{X \vee Y}(y)$ dir (Melin , 2009).

İki bağlantılı ve yerel sonlu uzayın eki yerel sonlu olmak zorunda değildir. Uzaylar sonlu ve yerel sayılabilirse veya sadece sayılabilirse, bu iki uzayın eki yerel sonlu olur. İki uzayın ekinin yerel sayılabilir olması için ise ikisi de hem bağlantılı hem de yerel sayılabilir olmalıdır (Melin , 2009).

Notasyonda kolaylık olması açısından tek noktalı $\{p\}$ kümesi için $\{p\} \vee X$ yerine $p \vee X$ notasyonu kullanılacaktır.

5.1 Temel Özellikler

Önerme 5.1.1. (Melin , 2009) Ek işlemi en küçük komşuluk uzayları X, Y ve Z için aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (i) $X = \emptyset \vee X = X \vee \emptyset$ (birim eleman)
- (ii) $(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$ (birleşme özelliği)
- (iii) $(X \vee Y)' = Y' \vee X'$

Önerme 5.1.2. (Melin , 2009) X ve Y en küçük komşuluk uzayı olsun.

- (i) $X \vee Y$ nin T_0 -uzayı olması için gerek ve yeter şart X ve Y nin T_0 -uzayı olmasıdır.
- (ii) $X \vee Y$ nin kompakt olması için gerek ve yeter şart Y nin kompakt olmasıdır.
- (iii) $X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ ise $X \vee Y$ bağlantılıdır.

İspat. (i)($\Leftarrow$) X ve Y , T_0 -uzayı olsun. İlk olarak X in $X \vee Y$ de açık olduğu gösterilsin. $X \cap X = X$ ve ek işleminin tanımı gereği X ve Y ayrık olduklarından $X \cap Y = \emptyset$ olduğundan $X, X \vee Y$ de açıktır. $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. Bu durumda X , x i içeren bir açık iken y yi içermeyiz. Alınacak iki eleman aynı kümede olduğunda kabulden X ve Y , T_0 -uzayı olduğundan özellikler sağlanır. $X \vee Y$, T_0 -uzayıdır.

($\Rightarrow$) $X \vee Y$, T_0 -uzayı olsun. $x_1, x_2 \in X$ için bu elemanlardan bir tanesini içerip de diğerini içermeyen bir açık bulunabilir. Benzer sonuç Y uzayı için de geçerlidir. O halde X ve Y , T_0 -uzayıdır.

(ii)($\Rightarrow$) Y kompakt bir uzay olmasın. $\{A_i\}_{i \in I}$, Y nin sonlu bir alt örtüsü olmayan açık örtüsü olsun. Her $i \in I$ için $B_i = A_i \cup X$ şeklinde tanımlansın. $B_i \cap X = (A_i \cup X) \cap X = X$ ve $B_i \cap Y = (A_i \cup X) \cap Y = A_i \subset Y$ açık olduğu için $\{B_i\}_{i \in I}$, $X \vee Y$ nin sonlu bir alt örtüsü olmayan açık örtüsüdür. O halde $X \vee Y$ kompakt değildir. Karşıt ters özelliğinden $X \vee Y$ kompakt ise Y kompakttır.

($\Leftarrow$) Y kompakt bir uzay olsun. $\{B_i\}_{i \in I}$, $X \vee Y$ nin açık örtüsü olsun. Her $i \in I$ için $B_i \subset X \vee Y$ açık olduğundan ya $B_i \cap Y = \emptyset$ dir ya da $B_i \cap Y \subset Y$ açıktır. Bu durumda açık örtünün elemanlarını $B_i \cap Y$ şeklinde kısıtlanırsa $\{B_i \cap Y\}$, Y nin açık örtüsü olur. Y kompakt olduğundan bu açık örtünün sonlu bir örtüsü vardır. $B_i \cap Y \neq \emptyset$ olduğunda $B_i, X \vee Y$ de açık olduğundan $B_i \cap X = X$ olacağı

için bu sonlu açık örtüdeki elemanlar $X \vee Y$ nin açık alt örtüsüdür. O halde $X \vee Y$ kompakttır.

(iii) $X \vee Y$ topolojik uzayında $\emptyset$ ve $X \cup Y$ den başka hem açık hem de kapalı olan başka bir küme olmadığı gösterilirse ispat biter. $A \neq \emptyset, X \cup Y$ ve $A \subset X \vee Y$ olsun. İspat durumlara ayrılsın. Açık olma kuralının ilk şartı kullanılsın. Yani $A \cap X, X$ te açık ve $A \cap Y = \emptyset$ olsun. $A \cap X \neq \emptyset$ ve X te kapalı olduğunu kabul edilsin. $A \cap Y \neq Y$ iken A kapalı olamaz. $A \cap X = \emptyset$ olduğunda A, X te açıktır ve $A \cap Y = \emptyset$ olduğundan A, Y de kapalıdır. Yani A nın, $X \vee Y$ de kapalı olması beklenir. Ancak bu durumda $A = \emptyset$ olduğundan bu durum söz konusu değildir. Şimdi açık olma kuralının ikinci şartı ele alınsın. $A \cap X = X$ ve $A \cap Y, Y$ de açık olsun. $A \cap Y \neq Y$ ve Y de kapalı olduğunu kabul edilsin. $A \cap X \neq \emptyset$ olduğundan A kapalı olamaz. $A \cap Y = Y$ olduğunda A, Y de açıktır ve $A \cap X = X$ olduğundan A, X te kapalıdır. Yani A kapalıdır. Ancak bu durum $A = X \cup Y$ durumunda mümkün olduğu için bağlantılılığı bozmaz. Böylece $\emptyset$ ve $X \cup Y$ hariç hem açık hem de kapalı küme olmadığı gösterilmiş oldu. O halde $X \vee Y$ bağlantılıdır.

Not 5.1.1. (Melin , 2009) X ve Y topolojik uzaylar olsun. X ve Y aynı anda boştan farklı uzaylar ise $X \vee Y, T_1$ -uzayı olamaz.

Örnek 5.1.1. (Melin , 2009) $\mathbb{R} \vee S^1$ kompakt bir T_0 -uzayıdır ancak T_1 -uzayı değildir. $x \in S^1$ ve $y \in \mathbb{R}$ alınırsa, x in y yi içermeyen bir açık komşuluğu yoktur.

5.2 Ayrıştırılabilir Uzaylar

Tanım 5.2.1. (Melin , 2009) $Z = X \vee Y$ iken $X = \emptyset$ veya $Y = \emptyset$ ise Z ayrıştırılamazdır, aksi halde ayrıştırılabilir.

Not 5.2.1. (Melin , 2009) Yerel sonlu ayrıştırılabilir en küçük komşuluk uzayları sonludur. Yani $y \in Y$ iken $X \subset \mathcal{N}_Z(y)$ dir, bu nedenle $Z = X \vee Y$ yerel sonlu ise X sonludur. Dual olarak X boştan farklı olduğundan Y sonludur.

Önerme 5.2.1. (Melin , 2009) En küçük komşuluk uzayı Z ayrıştırılabilir ise her $x, y \in Z$ için $x, y \in AN(z)$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır.

İspat. $Z = X \vee Y$ şeklinde ayrıştırılabilir bir uzay olsun. İspat durumlara ayrılsın. $x, y \in X$ olsun. Bu durumda her $z \in Y$ için $x, y \in \mathcal{N}(z)$ olacağından $x, y \in AN(z)$ dir. $x, y \in Y$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $x, y \in \mathcal{C}(z)$ olacağından $x, y \in AN(z)$ dir. $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. Bu durumda $z = y$ seçilirse $x \in \mathcal{N}(y)$ olacağından $x, y \in AN(y)$ dir. O halde her $x, y \in Z$ için $x, y \in AN(z)$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır.

Bu önermenin tersi doğru değildir. Sıradaki örnek tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 5.2.1. (Melin , 2009) $X = \{a_1, a_2, b, c_1, c_2\}$ kümesi $\mathcal{N}(a_1) = \{a_1\}$, $\mathcal{N}(a_2) = \{a_2\}$, $\mathcal{N}(b) = \{a_1, b\}$, $\mathcal{N}(c_1) = \{a_1, a_2, b, c_1\}$ ve $\mathcal{N}(c_2) = \{a_1, a_2, c_2\}$ yi baz kabul eden topoloji ile donatılmış olsun. Bu topolojiye göre a_1 ve a_2 açık noktalar iken, c_1 ve c_2 kapalı noktalardır. $X = A \vee C$ şeklinde ayrıştırılabildiği varsayılın. $a_1 \in A$ olmalıdır. Eğer $a_1 \in C$ olsaydı $A \cap \{a_1\} = \emptyset$ ve $C \cap \{a_1\} = \{a_1\}$ olacağından a_1 noktası açık olmazdı. a_2 de aynı sebepten dolayı A da olmalıdır. $c_1 \in C$ olmalı. Eğer $c_1 \in A$ olsaydı $A \cap \{c_1\} = \{a_1\}$ ve $C \cap \{c_1\} = \emptyset$ olacağından c_1 noktası kapalı olamazdı. c_2 de aynı sebepten dolayı C de olmalıdır. Ancak b ne A nın elemanı olabilir, ne de C nin elemanı olabilir. Eğer A nın elemanı olsaydı $\{a_1, a_2, b, c_1\} \cap A = \{a_1, a_2, b\} = A$ ancak $\{a_1, a_2, b, c_1\} \cap C = \{c_1\} \subset C$ açık olmadığından $\{a_1, a_2, b, c_1\}$ açık olmazdı. Eğer C nin elemanı olsaydı $\{a_1, b, c_1, c_2\} \cap C = \{b, c_1, c_2\} = C$ ancak $\{a_1, b, c_1, c_2\} \cap A = \{a_1\} \subset A$ kapalı olmadığından $\{a_1, b, c_1, c_2\}$ kapalı olamazdı.

Teorem 5.2.1. (Melin , 2009) X bir en küçük komşuluk uzayı olsun. Y ve $\tilde{Y}$ boştan farklı ve ayrıştırılamaz iken $X = Y \vee Z$ ve $X = \tilde{Y} \vee \tilde{Z}$ ise $Y = \tilde{Y}$ ve $Z = \tilde{Z}$ dir.

İspat. X bir en küçük komşuluk uzayı ve Y ve $\tilde{Y}$ ayrıştırılamaz ve boştan farklı iken $X = Y \vee Z$ ve $X = \tilde{Y} \vee \tilde{Z}$ şeklinde ayrıştırılabiliyor olsun. $Y \neq \tilde{Y}$ ve $p \in Y \setminus \tilde{Y}$ olduğu kabul edilsin. Eğer $q \in \tilde{Y} \setminus Y$ olsaydı, $q \in Z$ olurdu. q nun Z üzerindeki topolojiye göre bir kapanışı var olduğundan $\mathcal{C}_X(q) \subset Z$ olur. $q \in \tilde{Y}$ ve $p \in \tilde{Z}$ olduğundan $p \in \mathcal{C}_X(q) \subset Z$ olur. Ancak $p \in Y$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $\tilde{Y} \subset Y$ dir. $B = Y \setminus \tilde{Y}$ olsun. Keyfi olarak $a \in \tilde{Y}$ ve $b \in B$ seçilsin. $b \in X$ olduğundan $b \in \tilde{Z}$ olacaktır. O halde $a \in \mathcal{N}_X(b)$

dir. Böylece Y alt uzayına geçildiğinde $a \in \mathcal{N}_Y(b)$ olur. Ek işleminde açıkların tanımını kullanarak $\mathcal{N}_Y(b) = \mathcal{N}_B(b) \cup \tilde{Y}$ elde edilir. O halde $Y, Y = \tilde{Y} \vee B$ şeklinde ayrıştırılabilir. Y ayrıştırılamaz olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $Y = \tilde{Y}$.

Sonuç 5.2.1. (Melin , 2009) X yerel sonlu en küçük komşuluk uzayı ise Y_i ler boştan farklı ve ayrıştırılamaz olmak üzere $X = Y_1 \vee \dots \vee Y_n$ şeklinde tek türlü yazılır.

Not 5.2.2. (Melin , 2009) $n > 1$ için X ayrıştırılabilir ise X sonludur.

Not 5.2.3. (Melin , 2009) Ek işleminde sadeleştirme kuralı yoktur. Yani $A \vee X = B \vee X$ iken $A \simeq B$ değildir.

Teorem 5.2.2. (Melin , 2009) X en küçük komşuluk uzayı olsun. $X = Y_1 \vee \dots \vee Y_n$ olacak şekilde sonlu sayıda yerel sonlu $Y_1, \dots, Y_n$ uzaylarının var olduğunu kabul edilsin. A ve B en küçük komşuluk uzayları olmak üzere

(i) $X \vee A \simeq X \vee B$ ise $A \simeq B$ dir.

(ii) $A \vee X \simeq B \vee X$ ise $A \simeq B$ dir.

İspat. Y bir en küçük komşuluk uzayı olsun. Y deki açık zinciri, farklı nokta çiftlerinin sonlu dizisi olarak her $0 \leq i \leq n-1$ için $y_{i+1} \in \mathcal{N}_Y(y_i)$ olacak şekilde $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ olarak tanımlansın. Burada açık zincirin boyu n , başlangıcı ise y_0 dır.

$$h_Y : Y \longrightarrow \mathbb{N} \cap \{\infty\}$$

$$y \longmapsto h_Y(y) = \sup\{n : n, y \text{ den başlayan açık zincirlerin boyu}\}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın. X in yapısından dolayı her $x \in X$ için $h_{X \vee A}(x)$ sonludur. Üstelik her $a \in A$ için her $x \in X, x \in \mathcal{N}_{X \vee A}(a)$ olduğundan $h_{X \vee A}(a) \geq 1 + \sup_{x \in X} h_{X \vee A}(x)$ olur. Ayrıca X e ek olan küme ne olursa olsun X deki elemanların en küçük komşuluğu ek olan kümeyle kesişmediğinden dolayı her $x \in X$ için $\sup_{x \in X} h_{X \vee A}(x) = \sup_{x \in X} h_{X \vee B}(x)$ dir. $\varphi : X \vee A \rightarrow X \vee B$ zinciri zincire resmeden bir homeomorfizm olsun. O halde her $x \in X \vee A$ için $h_{X \vee A}(x) = h_{X \vee B}(\varphi(x))$ ve her $a \in A$ için $h_{X \vee B}(\varphi(a)) \geq 1 + \sup_{x \in X} h_{X \vee B}(x)$ olur. O halde $\varphi(X) = X$ ve $\varphi(A) = B$ dir. Böylece $A \simeq B$ olur.

Not 5.2.4. (Melin , 2009) $n = 1$ durumunda ya da her Y_i sonlu iken X yerel sonludur.

6 $\mathbb{Z}^n$ DEKİ KOMŞULUKLAR

Bu bölümde $\mathbb{Z}^n$ deki komşulukların yapısına odaklanılacaktır. Bu komşuluklar Khalimsky manifoldlarının tanımlanmasında yardımcı bir rol üstlenecektir. Bir yakın komşuluk genel olarak $p = (0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)$ şeklinde bir noktanın komşuluğu olarak nitelendirilebilir. Bunun sebebi koordinatların permütasyonunun ve bir çift vektör ile öteleme yapmanın $\mathbb{Z}^n$ üzerinde homeomorfizma olmasıdır. $p \in \mathbb{Z}^{\alpha+\beta}$ olsun, p noktası α , 0 ların sayısını ve β , 1 lerin sayısını temsil etmek üzere $\langle \alpha, \beta \rangle$ şeklinde gösterilebilir (Melin , 2009).

Notasyonda bize kolaylık sağlaması için $\mathcal{N}(p) = \mathcal{N}(\langle \alpha, \beta \rangle)$ yerine sadece $\mathcal{N}\langle \alpha, \beta \rangle$ notasyonu kullanılacaktır.

$\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}^{\alpha+\beta}$ olsun. Khalimsky topolojisine göre tek noktalar açık ve çift noktalar kapalı noktalar olduğu için $\mathcal{N}\langle \alpha, \beta \rangle = [-1, 1]_{\mathbb{Z}}^{\alpha} \times \{1\}^{\beta}$ ve $\mathcal{C}\langle \alpha, \beta \rangle = \{0\}^{\alpha} \times [0, 2]_{\mathbb{Z}}^{\beta}$ olacaktır. Böylelikle p noktasının komşuluk kümesi $\mathcal{A}\langle \alpha, \beta \rangle = ([-1, 1]_{\mathbb{Z}}^{\alpha} \times \{1\}^{\beta} \cup \{0\}^{\alpha} \times [0, 2]_{\mathbb{Z}}^{\beta}) \setminus (\{0\}^{\alpha} \times \{1\}^{\beta})$ olur (Melin , 2009).

Not 6.0.1. (Melin , 2009) Bir $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}^{\alpha+\beta}$ için $\text{card}(\mathcal{N}\langle \alpha, \beta \rangle) = 3^{\alpha}$ iken $\text{card}(\mathcal{C}\langle \alpha, \beta \rangle) = 3^{\beta}$ 'dir. Böylelikle $\text{card}(\mathcal{A}\langle \alpha, \beta \rangle) = 3^{\alpha} + 3^{\beta} - 2$ olur.

Örnek 6.0.1. (Melin , 2009) $\langle 1, 1 \rangle \in \mathbb{Z}^2$ için

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{N}\langle 1, 1 \rangle) &= \text{card}([-1, 1]_{\mathbb{Z}} \times \{1\}) \\ &= \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1)\} = 3^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{C}\langle 1, 1 \rangle) &= (\{0\} \times [0, 2]_{\mathbb{Z}}) \\ &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\} = 3^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{A}\langle 1, 1 \rangle) &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (-1, 1)\} \\ &= 3^1 + 3^1 - 2 \end{aligned}$$

olduğundan $\text{card}(\mathcal{A}\langle \alpha, \beta \rangle) = 3^{\alpha} + 3^{\beta} - 2$ eşitliği sağlanır.

$\mathcal{A}\langle\alpha, \beta\rangle = (\mathcal{N}\langle\alpha, \beta\rangle \cup \mathcal{C}\langle\alpha, \beta\rangle) \setminus \{\langle\alpha, \beta\rangle\}$ eşitliği göz önüne alındığında $\mathcal{A}\langle\alpha, \beta\rangle \simeq \mathcal{A}\langle\alpha, 0\rangle \vee \mathcal{A}\langle 0, \beta\rangle$ olduğu söylenebilir. Böylece $AN\langle\alpha, \beta\rangle \simeq \mathcal{A}\langle\alpha, 0\rangle \vee \langle\alpha, \beta\rangle \vee \mathcal{A}\langle 0, \beta\rangle$ olduğu gözlemlenebilir.

Önerme 6.0.1. (Melin , 2009) *Khalimsky uzayındaki bir saf noktanın yakın komşuluğu ayrıştırılamaz. Yani $\mathcal{A}\langle\alpha, 0\rangle$ ve $\mathcal{A}\langle 0, \beta\rangle$ ayrıştırılamaz.*

İspat. İspat durumlara ayrılsın. $\alpha = 1$ için $\langle 1, 0\rangle = 0$ noktasıdır. $\mathcal{N}(0) = \{-1, 0, 1\}$ ve $\mathcal{C}(0) = 0$ olduğundan $\mathcal{A}(0) = \{-1, 1\}$ olur. Bu küme bağlantılı değildir. Bu küme ayrıştırılabilir olsaydı, bağlantılı olmalıydı. O halde $\mathcal{A}\langle 1, 0\rangle$ ayrıştırılabilir değildir. $\alpha > 1$ için $\langle\alpha, 0\rangle = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{\alpha \text{ tane}}$ noktasıdır. $\mathcal{A}\langle\alpha, 0\rangle = ([-1, 1]_{\mathbb{Z}}^{\alpha} \cup \{0\}^{\alpha}) \setminus \{0\}^{\alpha}$ 'dır. Bu komşuluktaki $x = (-1, 0, 0, \dots, 0)$ ve $y = (1, 0, 0, \dots, 0)$ noktaları arasındaki en kısa Khalimsky yayını oluşturan noktalar $(-1, 0, 0, \dots, 0), (-1, 1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (1, 1, 0, \dots, 0)$ ve $(1, 0, 0, \dots, 0)$ noktalarıdır. Yani bu noktalar arasındaki en kısa Khalimsky yayının uzunluğu 4 tür. Khalimsky uzayındaki saf noktaların yakın komşulukları T_0 -uzayı ve en küçük komşuluk uzayı olduğundan, $\rho(x, y) > 2$ olduğu için $\mathcal{A}\langle\alpha, 0\rangle$ ayrıştırılamaz. Benzer şekilde $\mathcal{A}\langle 0, \beta\rangle$ nın da ayrıştırılamaz olduğu görülebilir.

Sonuç 6.0.1. (Melin , 2009) *Bir noktanın yakın komşuluğunun*

$$AN\langle\alpha, \beta\rangle \simeq \mathcal{A}\langle\alpha, 0\rangle \vee \langle\alpha, \beta\rangle \vee \mathcal{A}\langle 0, \beta\rangle$$

şeklinde tek türlü ayrışımı vardır.

6.1 Kesişimler

Bu bölümde $\mathbb{Z}^n$ deki komşulukların kesişimlerinin yapısının analizi yapılacaktır. $p = \langle\alpha, \beta\rangle$ ve $q \in \mathcal{A}(p)$ olsun. $q, 1 \leq \gamma \leq \alpha$ iken $q = \langle\alpha - \gamma, \beta + \gamma\rangle$ olarak kabul edilsin ve bu durum $q \in \mathcal{N}(p)$ olduğunda da geçerlidir. $A = \mathcal{A}(p)$ ve $B = \mathcal{A}(q)$ olsun. Bu durumda A ve B nin kesişimi

$$\begin{aligned} C_1 &= ([-1, 1]_{\mathbb{Z}}^{\alpha-\gamma} \times \{1\}^{\beta+\gamma}) \setminus \{q\} \\ C_2 &= (\{0\}^{\alpha} \times [0, 2]_{\mathbb{Z}}^{\beta}) \setminus \{p\} \\ S &= (\{0\}^{\alpha-\gamma} \times [0, 1]_{\mathbb{Z}}^{\gamma} \times \{1\}^{\beta}) \setminus \{p, q\} \end{aligned}$$

olmak üzere $A \cap B = C_1 \cup S \cup C_2$ şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} C_1 &= \mathcal{N}(q) \setminus \{q\} \\ C_2 &= \mathcal{C}(p) \setminus \{p\} \\ S &= (\mathcal{C}(q) \cap \mathcal{N}(p)) \setminus \{p, q\} \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcut olup C_1 , C_2 ve S ayrık olduğundan $A \cap B \simeq C_1 \vee S \vee C_2$ olduğu söylenebilir. $C_1 \simeq \mathcal{A}\langle\alpha - \gamma, 0\rangle$ olduğunu göstermek kolaydır.

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{A}\langle\alpha - \gamma, 0\rangle &\rightarrow C_1 \\ (x_1, \dots, x_{\alpha-\gamma}) &\mapsto (x_1, \dots, x_{\alpha-\gamma}, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

bir dijital izomorfizma olduğundan $C_1 \simeq \mathcal{A}\langle\alpha - \gamma, 0\rangle$ dır. Benzer şekilde $C_2 \simeq \mathcal{A}\langle 0, \beta\rangle$ ve $S \simeq S_\gamma = [0, 1]_{\mathbb{Z}}^\gamma \setminus \{(1, 1, \dots, 1), (0, 0, \dots, 0)\}$ olduğu gösterilebilir (Melin , 2009).

Lemma 6.1.1. (Melin , 2009) $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ve $1 \geq \gamma \geq \alpha$ iken $p = \langle\alpha, \beta\rangle$ ve $q = \langle\alpha - \gamma, \beta - \gamma\rangle$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ayrışımalar tektir.

$$\begin{aligned} AN_{\mathcal{A}(p)}(q) &\simeq \mathcal{A}\langle\alpha - \gamma, 0\rangle \vee q \vee S_\gamma \vee \mathcal{A}\langle 0, \beta\rangle \\ AN_{\mathcal{A}(q)}(p) &\simeq \mathcal{A}\langle\alpha - \gamma, 0\rangle \vee S_\gamma \vee p \vee \mathcal{A}\langle 0, \beta\rangle \end{aligned}$$

7 KHALİMSKY MANİFOLDLARI

Katı Khalimsky küresinin var olmadığı daha önceki bölümlerde açıklanmıştı, ancak küre önemli bir geometrik yapıdır. Bu nedenle katı Khalimsky manifoldu tanımı, Khalimsky küresi tanımlanabilecek şekilde revize edilecektir.

Tanım 7.0.1. (*Melin , 2009*) X sayılabilir bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $AN(x)$ ile $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ homeomorf olacak şekilde $p \in \mathbb{Z}^{n+1}$ ve $q \in \mathcal{A}(p)$ var ise X e n -boyutlu Khalimsky manifoldu denir.

Önerme 7.0.1. (*Melin , 2009*) Her katı Khalimsky n -manifoldu bir Khalimsky n -manifoldudur.

İspat. S bir katı Khalimsky n -manifoldu olsun. Bir $r = \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}^n$ alınsın. $p = \langle \alpha + 1, \beta \rangle, q = \langle \alpha, \beta + 1 \rangle \in \mathbb{Z}^{n+1}$ olacak şekilde p ve q elemanları seçilsin.

$$\begin{aligned} AN_{\mathbb{Z}^n}(r) &\simeq \mathcal{A}\langle \alpha, 0 \rangle \vee r \vee \mathcal{A}\langle 0, \beta \rangle \\ &\simeq \mathcal{A}\langle \alpha, 0 \rangle \vee q \vee S_1 \vee \mathcal{A}\langle 0, \beta \rangle \simeq AN_{\mathcal{A}(p)}(q). \end{aligned}$$

Not 7.0.1. (*Melin , 2009*) Her 1-boyutlu Khalimsky manifoldu, katı Khalimsky manifoldudur.

Önerme 7.0.2. (*Melin , 2009*) Bağlantılı 1-boyutlu Khalimsky manifoldu ya Khalimsky çemberidir ya da Khalimsky doğrusudur.

Örnek 7.0.1. (*Melin , 2009*) Herhangi bir $c \in \mathbb{Z}^n$ için

$$\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^n}(c) = \{p : \rho_{\mathbb{Z}^n}(c, p) = 1\}$$

kümesi her $x \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^n}(c)$ için $AN_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^n}(c)}(x) \simeq AN_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^n}(c)}(x)$ olduğundan bir dijital Khalimsky manifoldudur. Eğer c bir saf nokta ise $\rho_{\mathbb{Z}^n}(c, p) = \|c - p\|_\infty$ olduğundan bir r pozitif tam sayısı için

$$S(c, r) = \{p : \|c - p\|_\infty = r\}$$

bir dijital Khalimsky manifoldudur ve bu manifold r yarıçaplı küredir. c karışık nokta ise genellikle $\rho_{\mathbb{Z}^n}(c, p) \neq \|c - p\|_\infty$ olduğundan $S(c, r)$ dijital Khalimsky manifoldu olmak zorunda değildir.

Önerme 7.0.3. (Melin , 2009) *Khalimsky manifoldunun boyutu tektir. Bir Khalimsky manifoldunda boyut herhangi bir noktanın yakın komşuluğu ile tanımlanır.*

İspat. X , m ve n boyutlu bir dijital Khalimsky manifoldu olsun. O halde bir $x \in X$ için hem öyle bir $p \in \mathbb{Z}^m$ vardır ki $q \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^m}(p)$ olmak üzere $AN_X(x) \simeq AN_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{m+1}}(p)}(q)$, hem de öyle bir $\tilde{p} \in \mathbb{Z}^n$ vardır ki $\tilde{q} \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^n}(\tilde{p})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} AN_X(x) &\simeq AN_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(\tilde{p})}(\tilde{q}) \\ \Rightarrow AN_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{m+1}}(p)}(q) &\simeq AN_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(\tilde{p})}(\tilde{q}) \\ \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{m+1}}(p) \cap \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{m+1}}(q) &\simeq \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(\tilde{p}) \cap \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(\tilde{q}) \end{aligned}$$

olur. $p = \langle \alpha, \beta \rangle$, $q = \langle \alpha - \gamma, \beta + \gamma \rangle$, $p = \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle$ ve $q = \langle \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}, \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} \rangle$ alınsın. $\alpha + \beta = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ olduğunu göstermek ispatı tamamlamak için yeterli olacaktır.

$\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{m+1}}(p) \cap \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{m+1}}(q) \simeq \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(\tilde{p}) \cap \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(\tilde{q})$ olduğundan

$$\mathcal{A}\langle \alpha - \gamma, 0 \rangle \vee S_\gamma \vee \mathcal{A}\langle 0, \beta \rangle \simeq \mathcal{A}\langle \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}, 0 \rangle \vee S_{\tilde{\gamma}} \vee \mathcal{A}\langle 0, \tilde{\beta} \rangle$$

olur. $\mathcal{A}\langle \alpha - \gamma, 0 \rangle \simeq \mathcal{A}\langle \tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}, 0 \rangle$ olsun. $\beta \neq \tilde{\beta}$ olursa, ya $\beta = 0$ ve $\tilde{\beta} = 1$ ya da $\beta = 1$ ve $\tilde{\beta} = 0$ olur. $\beta = 0$ ve $\tilde{\beta} = 1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\gamma = 2$ ve $\tilde{\gamma} = 1$ olacağından $\alpha - 2 = \alpha - 1$ olur ve buradan $\alpha + \beta = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ gelir. Yani $m = n$. Diğer durumlar aynı şekilde sonuçlandırılabilir.

Reel uzaydaki kompakt n -boyutlu manifoldların bir s tamsayısı için $\mathbb{R}^s$ in içine gömülebildiği bilinmektedir. Sıradaki teorem bu özelliğin Khalimsky uzayındaki karşılığıdır.

Teorem 7.0.1. (Melin , 2009) *Her sonlu Khalimsky n -manifoldu bir s tamsayısı için $\mathbb{Z}^s$ in içine gömülebilir.*

İspat. X sonlu Khalimsky n -manifoldu ve $p_1, p_2, \dots, p_m \in X$ olmak üzere $\{\mathcal{N}_X(p_i)\}_{i=1}^m$, X üzerindeki topoloji için alt baz olsun. X sonlu Khalimsky manifoldu olduğundan $\psi_i : AN_X(p_i) \rightarrow AN_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(q_i)}(r_i)$ bir homeomorfizmadır. $AN_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(q_i)}(r_i) \subset \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(q_i)$ olduğundan ve ψ_i dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan, $\varphi_i : \mathcal{N}_X(p_i) \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(q_i)$ dönüşümü, $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}^{n+1}}(q_i)$ 'nin bir açık alt kümesi için homeomorfizmdir. $\mathcal{N}_X(p_i) \subset X$ olduğundan, $\varphi_i, f_i : X \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$

sürekli dönüşümüne genişletilebilir.

$$\begin{aligned} \lambda_i : X &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \begin{cases} 2i + 1, & x \in \mathcal{N}_X(p_i) \\ 2i, & x \notin \mathcal{N}_X(p_i) \end{cases} \end{aligned}$$

fonksiyonu alınsın. $\lambda_i^{-1}(\{2i + 1\}) = \mathcal{N}_X(p_i)$ ve $\lambda_i^{-1}(\mathcal{N}(\{2i\})) = X$ olduğundan λ_i süreklidir. f_i ve λ_i sürekli olduğundan $g_i = (f_i, \lambda_i)$ şeklindeki dönüşüm de süreklidir. O halde g dönüşümü $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) : X \rightarrow (\mathbb{Z}^{n+2})^m$ şeklinde alınrsa g de süreklidir.

$x, y \in X$, $x \neq y$ ve $x \in \mathcal{N}_X(p_i)$ olsun. $y \in \mathcal{N}_X(p_i)$ ise ψ_i homeomorfizma olduğundan $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y)$ ve dolayısıyla $g(x) \neq g(y)$ olur. $y \notin \mathcal{N}_X(p_i)$ ise $\lambda_i(x) \neq \lambda_i(y)$ olacağından yine $g(x) \neq g(y)$ olur. Yani g injektif bir dönüşümdür.

$g^{-1} : g(X) \rightarrow X$ dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için $g(\mathcal{N}_X(p_i))$ lerin açık olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Keyfi bir p_i elemanı seçilip, sabit tutulsun. $1 \leq j \leq m$ ve $j \neq i$ için $Z_j = \mathbb{Z}^{n+2}$ ve $Z_i = \mathbb{Z}^{n+1} \times \{2i + 1\}$ olsun. $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_m \subset (\mathbb{Z}^{n+2})^m$ açıktır. Her $x \in \mathcal{N}_X(p_i)$ için $g(x) \in Z$ olacağından, $g(\mathcal{N}_X(p_i)) \subset Z$ olur. O halde $g(X) \cap Z = g(\mathcal{N}_X(p_i)) \cap Z = g(\mathcal{N}_X(p_i))$ açık olur. Böylece g^{-1} süreklidir. O halde g gömme dönüşümüdür.

8 SONUÇ

Çalışmadaki asıl amaç dijital Khalimsky manifoldlarını tanımlayabilmektir. Tezde, bu tanımlama sürecinde gerekli olan en küçük komşuluk uzayları, dijital ve Khalimsky topolojisi ve manifoldlar gibi kavramlar tanıtıldı. Yerel sonlu ve yerel sayılabilir uzaylar hakkında bilgi verildi ve ardından tanımlama sürecine geçildi.

İlk olarak saf Khalimsky manifoldu tanımlaması yapıldı. Bu tanım çok tuhaf uzayları manifold olarak kabul ettiğinden sonuçlara ulaşmak zordu. Bu yüzden bir diğer tanım olan katı Khalimsky manifoldu tanımı ortaya atıldı. Ancak bu tanım sayesinde birçok sonuca ulaşılmasına karşın, herhangi bir katı Khalimsky manifoldunun reel benzerinin küre olmaması ve kürenin görüntü işleme sürecinde önemli bir rol oynaması bizi yeni bir tanımlama yapmaya itti. Böylece en kullanışlı dijital Khalimsky manifoldu tanımına ulaşıldı.

Süreç sonucunda elde edilen tanım sayesinde 1-boyutlu dijital Khalimsky manifoldları sınıflandırıldı, bu manifoldların boyutları tanımlandı ve reel benzerlerine uygun olarak gömme teoremi ispatlandı. Bu sonuçların ardından bazı problemler türetilir. 2 veya daha yüksek boyuttaki dijital Khalimsky manifoldlarının sınıflandırılması hala açık bir problemdir. Ayrıca gömme teoreminde, eğer varsa boyutun sınırından bahsedilebilip bahsedilemeyeceği de çözümlenememiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alexandrov P.**, 1937, Diskrete Räume. Mat. Sb. 2(44), pp. 501-519.
- Alexandrov P. and Hoph H.**, 1935, Topologie 1. Springer, Berlin.
- Birkhoff G.**, 1937, Rings of Sets. Duke Math J. 3(3), pp. 443-454.
- Boxer, L.**, 1993, A Classical Construction for the Digital Fundamental Group. Journal of Mathematical Imaging and Vision 10, pp. 51-62.
- Boxer, L.**, 1994, Digitally Continuous Functions. Pattern Recognition Letters 15, pp. 833-839.
- Boxer, L.**, 2006a, Digital Products, Wedges and Covering Spaces. Journal of Mathematical Imaging and Vision 25, pp. 159-171.
- Boxer, L.**, 2006b, Homotopy Properties of Sphere-Like Digital Images. Journal of Mathematical Imaging and Vision 24, pp. 167-175.
- Boxer, L.**, 2005, Properties of Digital Homotopy. Journal of Mathematical Imaging and Vision 22, pp. 19-26.
- Ciria J.C., De Miguel A., Domínguez E., Francés A.R., Quintero A.**, 2004, A Maximum Set of $(26, 6)$ -connected in Digital Surfaces. In: Klette, R. and Žunić, J. (eds.) Combinatorial Image Analysis. Lectures Notes in Computer Science, vol.3322, pp. 291-306. Springer, Berlin.
- Couprie M. and Bertrand G.**, 1998, Simplicity Surfaces: a New Definition of Surfaces in $\mathbb{Z}^3$. SPIE Vision Geometry, VII, vol.3454, pp. 40-51.
- Daragon X., Couprie M. and Bertrand G.**, 2005, Derived Neighborhoods and Frontier Orders. Discrete Appl. Math. 147(2-3) pp. 227-243.
- Eckhardt, U. and Latceki, L.**, 1994, Digital Topology, in Current Topics in Pattern Recognition Research, Research Trends, Council of Scientific Information, Vilayil Gardens, Trivandrum, India.
- Ege, Ö. and Karaca İ.**, 2015, Digital Homotopy Fixed Point Theory. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353, pp. 1029-1033

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Evako A.V., Kopperman R. and Mukhin Y.V.**, 1996, Dimensional Properties of Graphs and Digital Spaces. *J. Math. Imaging Vis.* 6(2-3), pp. 109-119.
- Han, S.E.**, 2004, An Extended Digital (κ_0, κ_1) -continuity. *J. Appl. Math. Comput.* 16(1-2), pp. 445-452.
- Han, S.E.**, 2005, Non-product Property of the Digital Fundamental Group. *Inf. Sci.* 171, pp. 73-91.
- Herman, G.**, 1998, Geometry of Digital Spaces. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, Cambridge.
- Herman, G.**, 1993, Oriented Surfaces in Digital Spaces. *CVGIP, Graphical Models and Image Processing* 55, pp. 381-396.
- Herman, G. and Webster D.**, 1983 A Topological Proof of a Surface Tracking Algorithm. *Comput. Vis. Graph. Image Process.* 23, pp. 162-177.
- Ilgaz, Z.A.**, 1987, Genel Topolojiye Giriş. Marmara Üniversitesi Yayın No: 446.
- Johnston, E.G. and Rosenfeld, A.**, 1970, Geometrical Operations on Digital Pictures. *Picture Processing and Psychopictorics*, pp. 217-240. Academic Press, New York.
- Kenmochi, Y., Imiya, A. and Ichikawa, A.**, 1997, Discrete Combinatorial Geometry. *Pattern Recogn.* 30, pp. 1719-1728.
- Khalimsky, E.D.**, 1988, Finite, Primitive and Euclidean Spaces. *J. Appl. Math. Simul.* 1(3), MR MR964806 (90g:54026), pp. 177-196.
- Khalimsky, E.**, 1987a, Motion, Deformation and Homotopy in Finite Spaces. *Proceedings IEEE Intl. Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, pp. 227-234.
- Khalimsky, E.**, 1987b, Topological Structure in Computer Science. *Journal of Applied Math. and Simulations* Vol. 1, pp. 25-40.
- Khalimsky, E., Kopperman, R. and Meyer, P.R.**, Computer Graphics and Connected Topologies on Finite Ordered Sets. *Topol. Appl.* 36, pp 1-17.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Klette, R.**, 2002, Topologies on the Planar Orthogonal Grid. In: 6th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'02), pp. 354–357.
- Kopperman, R.**, 1994, The Khalimsky Line as a Foundation for Digital Topology. In: Ying-Lie, O., et al. (eds.) Shape in Picture. NATO ASI, vol. 126, Springer, Berlin pp. 3-20.
- Kopperman, R., Meyer, P.R. and Wilson, R.G.**, 1991, A Jordan Surface Theorem for Three-dimensional Digital Spaces. Discrete Comput. Geom. 6(2), MR 92f:68185 pp. 155-161.
- Kovalevsky, V.A.**, 1989, Finite Topology as Applied to Image Analysis. Comput. Vis. Graph. Image Process 46, pp. 141–161.
- Lee, J.M.**, 2000, Introduction to Topological Manifolds. Springer-Verlag, New York.
- Massey, W.S.**, 1991, A Basic Course in Algebraic Topology. Graduate Texts in Mathematics, vol.127. Springer, New York MR MR1095046 (92c:55001).
- Melin, E.**, 2003, Connectedness and Continuity in Digital Spaces with the Khalimsky Topology. Project Report, Uppsala University, Department of Mathematics.
- Melin, E.**, 2008a, Continuous Extension in Topological Digital Spaces. Appl. Gen. Topol. 9, pp. 51-61.
- Melin, E.**, 2008b, Digital Geometry and Khalimsky Spaces. Uppsala Dissertations in Mathematics 54, Uppsala University.
- Melin, E.**, 2009, Digital Khalimsky Manifolds. Journal of Mathematical Imaging and Vision 33, pp. 267-280.
- Melin, E.**, 2007, Digital Surfaces and Boundaries in Khalimsky Spaces. J. Math. Imaging Vision, 28, pp. 169-177.
- Melin, E.**, 2004a, Digitization in Khalimsky Spaces. U.U.D.M. Report 2004:51 ISSN 1101-3591.
- Melin, E.**, 2005, Extension of Continuous Function in Digital Spaces with the Khalimsky Topology. Topology Appl. 153, pp. 52-65.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Melin, E.**, 2004b, How to Find a Khalimsky-Continuous Approximation of a Real-Valued function. In Klette and Žunić, Combinatorial Image Analysis, Lecture Notes in Computer Science, vol.3322, Springer, Berlin, pp. 351-365.
- Melin, E.**, 2007, Locally Finite Spaces and the Join Operator. In: Banon, G., Barrera, J. (eds.) Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing (Rio de Janeiro, Brazil) ISMM, pp. 63–74.
- Morgenthaler, D.G. and Rosenfeld, A.**, 1981, Surfaces in Three-Dimensional Digital Images. Information and Control 51, pp. 227-247.
- Munkres, J.R.**, 2000, Topology. Prentice Hall, New York.
- Rosenfeld, A.**, 1986, Continuous Function on Digital Pictures. Pattern Recognition Letters 4, pp. 177-184.
- Tu, L.W.**, 2008, An Introduction to Manifolds. Springer-Verlag, New York.
- Willard, S.**, 1970, General Topology. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Yung Kong, T.**, 2003, The Khalimsky Topologies are Precisely Those Simply Connected Topologies on $\mathbb{Z}^n$ Whose Connected Sets Include All $2n$ -connected Sets but no $(3n - 1)$ -disconnected Sets. Theor. Comput. Sci. 305, pp. 221–235.
- Yung Kong, T. and Khalimsky, E.D.**, 1990, Polyhedral Analogs of Locally Finite Topological Spaces. In: General Topology and Applications (Middletown, CT, 1988) (New York). Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol.123, Dekker, New York MR MR1057635 (91e:54106) pp. 153-164.

ÖZGEÇMİŞ

04.08.1990 yılında İzmir’de doğdu. İlköğrenimini Buca’da ve ortaöğrenimini İzmir’de Bornova Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2009 yılında kayıt olduğu Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2015 yılında mezun olup aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı.

Katıldığı Bilimsel Etkinlikler

- 27-29 Nisan 2017 tarihleri arasında Çankaya Üniversitesi tarafından düzenlenen ‘ International Workshop On Mathematical Methods In Engineering (MME2017) ’ etkinliğinde poster sunmuştur.
- 11-15 Mayıs 2017 tarihleri arasında İstanbul Medeniyet Üniversitesi ve İstanbul Ticaret Üniversitesi tarafından düzenlenen ‘ 4rd International Conference On Recent Advances In Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2017) ’ etkinliğinde poster sunmuştur.

Projeler

- Dijital Khalimsky Manifoldları, Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Fonu Projesi, 16 FEN 052, Proje Araştırmacısı, 2016.