



EGE ÜNİVERSİTESİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMEL CEBİRLER VE LOJİKLER ÜZERİNE

Tuğçe KALKAN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 17.08.2017

Bornova-İZMİR

2017

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

TEMEL CEBİRLER VE LOJİKLER ÜZERİNE

Tuğçe KALKAN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 17.08.2017

Bornova-İZMİR

2017

Tuğçe KALKAN tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “Temel Cebirler ve Lojikler Üzerine” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’ nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 17.08.2017 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Tahsin Öner

Raportör Üye : Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Mehmet Terziler

Üye : Doç. Dr. Aysun AYTAÇ

Aysun Aytaç

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Temel Cebirler ve Lojikler Üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

17 / 08 / 2017

İmzası

Tuğçe KALKAN

ÖZET**TEMEL CEBİRLER VE LOJİKLER ÜZERİNE**

KALKAN, Tuğçe

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Ağustos 2017, 45 sayfa

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılarak, konu ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında ön bilgi verildi.

İkinci bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde, temel cebirlere ait temel tanım ve kavramlar verilerek, kafeslerle olan ilişkisinden bahsedildi. Ayrıca, temel cebirlerin aksiyom sistemlerinin bağımsızlığı gösterildi ve bu aksiyomlara denk olan farklı imzalarda aksiyom sistemleri tanımlandı.

Dördüncü bölümde, ortomodüler kafeslere ve MV-cebirlerine ait tanımlar verilerek temel cebirlerle arasındaki bağlantıdan bahsedildi.

Beşinci bölümde, temel cebirlerin kongrüans ve süzgeç tanımları verildi.

Altıncı bölümde, gerektirme temel cebir (implication basic algebra) kavramı ve bazı özellikleri verilerek aksiyomlarının bağımsızlığı gösterildi.

Yedinci bölümde, bir temel cebirin herhangi bir aralığının temel cebir olduğu gösterildi.

Sekizinci bölümde, temel cebirlerde Yang-Baxter denklemlerinin çözümlerinden bahsedildi.

Anahtar sözcükler: Temel cebirler, antiton involüsyonlu kafesler.



ABSTRACT

ON BASIC ALGEBRAS AND LOGICS

KALKAN, Tuğçe

MSc in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Doç. Dr. Tahsin ÖNER

August 2017, 45 pages

This thesis consists of eight chapters.

In the first chapter , the topic of thesis was introduced and preliminary information about the studies which is related to the topic of thesis was given.

In the second chapter, some basic concepts was presented to ease readability of thesis.

In the third chapter, basic definitions and concepts which are belong to basic algebra was given and it was referred about relation with lattice. Also, indepenence of axiom systems of basic algebra was shown and axiom systems which are equal to this axiom systems in different signatures was defined.

In the fourth chapter, definitions which are belong to orthomodular lattices and MV-algebras was given and it was referred about relation with basic algebras.

In the fifth chapter, definitions of congruence and filter of basic algebras was given.

In the sixth chapter, the concept of implication basic algebra and its some properties were given and independence of axioms was proved.

In the seventh chapter, it was proved that any interval of a basic algebra is a basic algebra.

In the eighth chapter, the solutions of Yang-Baxter equations in basic algebras were mentioned.

Key words: Basic algebra; lattices with antitone involutions.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde çalışmalarımnda kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan, sabrını ve güler yüzünü esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Tahsin ÖNER'e ve çalışmamda bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren Araş. Gör. İbrahim ŞENTÜRK'e çok teşekkür ederim. Çalışmam süresince beni daima destekleyerek her zaman yanımda olan ve hayatımın her anında bana duydukları güven için sevgili annem Müzeyyen KALKAN ve babam Muharrem KALKAN'a ve tüm sevdiklerime yürekten teşekkür ederim.

Tuğçe KALKAN

Ağustos 2017



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
1. GİRİŞ	1
2. ÖNBİLGİLER	3
3. TEMEL CEBİR VE AKSİYOM SİSTEMİ.....	7
4. TEMEL CEBİRLER OLARAK ORTOMODÜLER KAFESLER VE MV- CEBİRLERİ	20
5. TEMEL CEBİRLERİN KONGRÜANS VE SÜZGEÇLERİ.....	23
6. TEMEL CEBİRLERİN GEREKTİRME BAĞLACI ÜZERİNE KISITLAMALARI.....	26
7. ARALIK TEMEL CEBİRLERİ	33
8. TEMEL CEBİRLERDE YANG-BAXTER DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE.....	39
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	45



1. GİRİŞ

Klasik mantığın kalkülüsünün cebirsel aksiyomlaştırılması Boole cebirleri, yani tek tümleyenli sınırlı kafesler tarafından verilir fakat tüm muhakemeler iki-değerli klasik lojik aracılığıyla tanımlanamayabilir. Yirminci yüzyılda benzer girişimler klasik olmayan lojiklerin cebirsel aksiyomlaştırılması, örneğin, sezgisel lojikler (Brouwer ve Heyting cebirleri), çok değerli lojikler (Łukasiewicz, Chang MV- cebirleri ve Post cebirleri), kuantum mekaniği lojiği (ortomodüler kafesler ve kısmi sıralı kümeler) ve fuzzy lojiği için yapıldı.

Kuantum mekaniği lojiğinin ortomodüler kafesler yardımıyla aksiyomlaştırılması 1940 yıllarında G. Birkhoff ve J. von Neumann tarafından bulundu.

Klasik olmayan lojiğin bir örneği olan J. Łukasiewicz'in çok değerli lojiğinin MV-cebirleri aracılığıyla verilen cebirsel semantiği 1950 yıllarında C. C. Chang tarafından tanımlandı.

Cebirsel açıdan kuantum mekaniği lojiği ile Łukasiewicz lojiğinin temel ortak özelliği, cebirsel benzerliklerinin, kafesinin her kesitinin bir antiton involüsyon ile donatılma özelliğine sahip sınırlı kafesler olmasıdır.

Bu gözlemler ışığında, kesit antiton involüsyonlu kafesler ve temel cebirler, yani kesit antiton involüsyonlu sınırlı kafeslerle birebir benzeyen $(2, 1, 0)$ tipli $(A; \oplus, \neg, 0)$ cebirlerin varyetesi ile çalışılmıştır.

Bu nedenle MV-cebirleri ve ortomodüler kafeslerin bir ortak genelleştirilmesi üzerine odaklanıldı ve sonuçlanan cebirlerin özellikleri incelendi.

Bu çalışmada, ikinci bölümde, temel cebirlere ve kafeslere ait bazı temel tanımlar ve kavramlar verilerek aralarındaki ilişkiye değinildi.

Üçüncü bölümde, temel cebir tanımı verilerek özellikleri incelendi. Temel cebirler ile kafesler arasındaki bağlantı incelendi. Temel cebirlerin aksiyomlarının bağımsızlığı gösterildi. Temel cebirler için farklı işlemler verildi ve aksiyom sistemi alternatif olarak bu işlemlerle tanımlandı. Temel cebirlerin aksiyom sistemine denk yeni sistemler tanımlandı.

Dördüncü bölümde, ortomodüler kafes ve MV- cebir tanımı verilerek, temel cebirlerle arasındaki bağlantı incelendi. Bir MV- cebiri bir temel cebir ile aynı tipe ve imzaya sahip olduğu için her MV- cebirinin bir temel cebir olup olmadığı araştırıldı.

Beşinci bölümde, temel cebirler için kongrüans, süzgeç ve monotonluk tanımı verilerek aralarındaki ilişki yorumlandı.

Altıncı bölümde, üçüncü bölümde bahsedilen gerektirme işlemi yerine farklı sembol kullanılarak gerektirme temel cebir tanımı verildi. Bu cebirin aksiyom sisteminin bağımsızlığı gösterildi.

Yedinci bölümde, bir temel cebirin herhangi bir alt aralığının tekrar temel cebir olup olmadığı araştırıldı ve bu aralığın temel cebir olması için gerekli işlemler tanımlandı. Ayrıca, bir sınırlı kafesin herhangi bir alt aralığı temel cebir olduğunda kafesin de temel cebir olduğu sonucuna varıldı.

Tezin son bölümü olan sekizinci bölümde, temel cebirlerde Yang-Baxter denklemlerinin çözümlerinden bahsedildi.

2. ÖN BİLGİLER

Burada, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla bazı tanım ve kavramlar verilmiştir [Davey and Priestley, 2002].

Tanım 2.1 Bir *birleştirmeli yarı kafes* (join-semilattices), her $x, y \in A$ için,

- (a) $x \vee x = x$,
- (b) $x \vee y = y \vee x$,
- (c) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

özdeşliklerini sağlayan bir $(A, \vee)$ grupoiddir.

Birleştirmeli yarı kafes, herhangi iki elemanın bir supremuma sahip olduğu $(A, \leq)$ posetidir; diğer bir deyişle, her $x, y \in A$ için,

- (i) $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$,
- (ii) $x \vee y := \sup(x, y)$

dir.

Tanım 2.2 Bir *kesiştirmeli-yarı kafes* (meet-semilattice), her $x, y \in A$ için,

- (a) $x \wedge x = x$,
- (b) $x \wedge y = y \wedge x$,
- (c) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

özdeşliklerini sağlayan bir $(A, \wedge)$ grupoiddir.

Kesiştirmeli yarı kafesler, herhangi iki elemanın bir infumuma sahip olduğu $(A, \leq)$ posetidir; diğer bir deyişle, her $x, y \in A$ için,

- (i) $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$,
- (ii) $x \wedge y := \inf(x, y)$

dir.

Bir *kafes* (lattice) aşağıdaki özellikler gerçekleşecek şekilde $(2, 2)$ tipinde bir $(A; \vee, \wedge)$ cebiridir:

- (a) $(A, \vee)$ bir birleştirmeli yarı kafes,
- (b) $(A, \wedge)$ bir kesiştirmeli yarı kafes,
- (c) her $x, y \in A$ için $(x \vee y) \wedge x = x$ ve $(x \wedge y) \vee x = x$.

Kafesler herhangi iki elemanı bir supremum ve infimuma sahip olan $(A, \leq)$ posetidir; yani,

- (i) $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$,
- (ii) $x \vee y := \sup(x, y)$ ve $x \wedge y := \inf(x, y)$

dir.

Tanım 2.3 Bir $(A; \vee, \wedge)$ kafesi

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

ya da denk olarak

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

özdeşliğini sağlıyorsa *dağılmalı kafes* (distributive lattice) olarak adlandırılır.

Tanım 2.4 Bir $(A; \vee, \wedge)$ kafesi

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge (x \vee z))$$

özdeşliğine denk olan

$$x \leq z \Rightarrow (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$$

özdeşliğini sağlarsa *modüler* (modular) olarak adlandırılır.

Tanım 2.5 Bir $f : A \rightarrow A$ dönüşümü $x, y \in A$ için

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

özdeşliğini sağlarsa, o zaman f ye *izoton* (isotone) denir. Benzer şekilde,

$$x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

özdeşliği sağlanıyorsa, f ye *antiton* (antitone) denir.

Her $x \in A$ için

$$f(f(x)) = x$$

özdeşliği sağlanıyorsa, f ye bir *involüsyon* (involution) denir.

En büyük eleman 1 olan bir $(A, \leq)$ poseti verilsin. Her $a \in A$ için $[a, 1]$ aralığı üzerinde

$$(i) \text{ her } x \in [a, 1] \text{ için } f_a(f_a(x)) = x,$$

$$(ii) \text{ her } x, y \in [a, 1] \text{ için } x \leq y \Rightarrow f_a(y) \leq f_a(x)$$

olacak şekilde bir $f_a : [a, 1] \rightarrow [a, 1]$ antiton involüsyon dönüşümü vardır. Bu tez boyunca $f_a(x)$ yerine x^a notasyonunu kullanacağız. Böylece her $x \in [a, 1]$ için

$$x^{aa} = x \text{ ve } x \leq y \Rightarrow y^a \leq x^a$$

dir.

Tanım 2.6 $(A; \leq)$ bir poset olsun. $a \in A$ için $[a, 1]$ kapalı aralıkları, $(A; \leq)$ posetinin kesiti (section) ve $x \in [a, 1]$ için $x \mapsto x^a$ dönüşümü *kesit antiton involüsyon* (section antitone involution) olarak adlandırılır.

$(A; \leq)$ en büyük elemanı 1 olan $(A; \leq, (^a)_{a \in A}, 1)$ notasyonu ile temsil edilen kesit antiton involüsyon ile donatılmış bir posettir.

Tanım 2.7 $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge)$ en büyük elemanı 1 olan bir kafes olsun. Eğer $\mathcal{L}$ nin *üretilmiş poseti* (induced poset) $(L; \leq)$, kesit antiton involüsyonlu bir poset ise $(L; \vee, \wedge, (^a)_{a \in A}, 1)$ yapısı *kesit antiton involüsyonlu bir kafes* olarak adlandırılır.

Tanım 2.8 $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge, 1)$ en küçük elemanı 0 ve en büyük elemanı 1 olan bir kafes olsun. Eğer

$$x \wedge x' = 0 \text{ ve } x \vee x' = 1$$

olacak şekilde L nin $x \mapsto x'$ dönüşümü varsa, $\mathcal{L}$ ye *tümleyen* (complementation) ile donatılmış denir.

Tanım 2.9 Eğer

$$x'' = x \text{ ve } x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$$

olacak şekilde L nin bir $x \mapsto x'$ dönüşümü varsa, $\mathcal{L}$ ye bir *antiton involüsyonlu kafes* (lattice with an antitone involution) denir.

$\mathcal{L}$ bir antiton involüsyonlu kafes ise o zaman

$$(x \vee y)' = x' \wedge y' \text{ ve } (x \wedge y)' = x' \vee y'$$

De-Morgan yasaları gerçekleşir.

Tanım 2.10 $\mathcal{L}$ tümleyeni olan sınırlı ve antiton involüsyonlu bir kafes ise, $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ yapısına bir *ortokafes* (ortholattice) denir.

Tanım 2.11 Bir $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ ortokafesi

$$x \vee (x' \wedge (x \vee y)) = x \vee y$$

veya

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (x' \wedge y) = y$$

özdeşliğini sağlarsa *ortomodüler kafes* (orthomodular lattice) olarak adlandırılır.

Tanım 2.12 Tümleyeni olan bir dağılmalı kafese bir *Boole* ve $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ yapısına da bir *Boole cebiri* (Boolean algebra) denir.

Her Boole cebiri bir ortomodüler kafes ve dolayısıyla bir ortokafestir. Bir ortomodüler kafesin bir Boole cebiri olması için gerek ve yeter şart dağılmalı olmasıdır. Daha ayrıntılı bilgi [Beran, 1984] ve [Birkhoff, 1936] kaynaklarından elde edilir.

3. TEMEL CEBİR VE AKSİYOM SİSTEMİ

Chajda ve Emanovský [Chajda and Emanovský, 2004] tarafından yapılan çalışmalar ile ilk olarak ele alınmaya başlayan temel cebir kavramı farklı klasik olmayan lojikler için kullanılan önemli bir kavramdır.

Tanım 3.1 [Chajda,2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir cebir olsun; burada A boştan farklı bir küme; $\oplus$, A üzerinde ikili işlem, $\neg$, A üzerinde bir birli işlem ve 0 seçkin elemandır. Her $x, y, z \in A$ için aşağıdaki özdeşlikler gerçekleşir ise $\mathcal{A}$ ya bir *temel cebir* (basic algebra) denir.

$$(BA1) \quad x \oplus 0 = x,$$

$$(BA2) \quad \neg\neg x = x,$$

$$(BA3) \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x,$$

$$(BA4) \quad \neg(\neg(\neg(x \oplus y) \oplus y) \oplus z) \oplus (x \oplus z) = \neg 0.$$

Eğer, $\mathcal{A}$ değişme özelliğini sağlarsa değişmeli temel cebir olarak adlandırılır.

$$\neg 0 = 1 \text{ ile gösterelim.}$$

Lemma 3.2 [Chajda, 2015] Her $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ temel cebiri aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$(a) \quad x \oplus 1 = 1 = 1 \oplus x,$$

$$(b) \quad 0 \oplus x = x,$$

$$(c) \quad \neg x \oplus x = 1.$$

Teorem 3.3 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir olsun.

(a) $x \leq y$ eğer ve yalnız eğer $\neg x \oplus y = 1$ ile tanımlanan $\leq$ bağıntısı, A üzerinde en küçük ve en büyük elemanları, sırasıyla, 0 ve 1 olan bir kısmi sıralamadır.

$$(b) \quad x \leq y \Leftrightarrow \neg x \geq \neg y.$$

$$(c) \quad x \leq y \text{ ise } x \oplus z \leq y \oplus z \text{ ve } \neg x \oplus z \geq \neg y \oplus z \text{ dir.}$$

$$(d) \ y \leq x \oplus y.$$

Teorem 3.4 [Chajda, 2015] Her $\mathcal{A}=(A; \oplus, \neg, 0)$ temel cebiri için, $(A; \leq)$ poseti

$$x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y \text{ ve } x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$$

olmak üzere bir sınırlı kafestir.

Teorem 3.5 [Chajda, 2015] Herhangi bir $\mathcal{A}=(A; \oplus, \neg, 0)$ temel cebiri verilsin. O

zaman $\mathcal{L}(\mathcal{A})=(A; \vee, \wedge, (f_a)_{a \in A}, 0, 1)$

$$f_a(x) = \neg x \oplus a$$

olmak üzere kesit antiton involüsyonlu bir sınırlı kafestir.

Teorem 3.6 [Chajda, 2015] $\mathcal{L}=(L; \vee, \wedge, (f_a)_{a \in A}, 0, 1)$ kesit antiton involüsyonlu bir

sınırlı kafes olsun. O zaman $\mathcal{A}(\mathcal{L})=(L, \oplus, \neg, 0)$ atanmış cebiri (assigned algebra)

$$x \oplus y := (x^0 \vee y)^y \text{ ve } \neg x := x^0,$$

olmak üzere bir temel cebirdir.

Teorem 3.7 [Chajda, 2015] $\mathcal{L}=(L; \vee, \wedge, (f_a)_{a \in A}, 0, 1)$ kesit antiton involüsyonlu bir

sınırlı kafes ve $\mathcal{A}=(A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir olsun. O zaman $\mathcal{L}(\mathcal{A}(\mathcal{L}))=\mathcal{L}$ ve

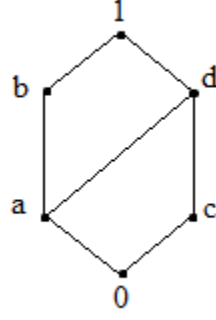
$\mathcal{A}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))=\mathcal{A}$ dir.

Temel cebirleri düşündüğümüzde, üretilmiş kafeslerin herhangi önemli kafes özdeşliğini sağlamasına gerek yoktur. Fakat değişmeli temel cebirlerde durum farklıdır.

Teorem 3.8 [Chajda, 2015] Her değişmeli temel cebirin üretilmiş kafesi (induced lattices) dağılmalıdır.

Örnek 3.9 Teorem 3.8 in tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Aşağıdaki kafesi göz önünde bulunduralım:



Şekil 1

Bu kafesin $0^0 = 1$, $a^0 = \neg a = a$, $b^0 = \neg b = b$, $c^0 = \neg c = c$, $d^0 = \neg d = d$, $1^0 = 0$ olmak üzere kesit antiton involüsyonlu ile bir kafes olduğu açıktır. Teorem 3.6 dan aşağıdaki işlemleri ile tanımlı $H = (\{0, a, c, b, d, 1\}; \oplus, \neg, 0)$ temel cebirini atayabiliriz.

$\oplus$	0	a	c	b	d	1
0	0	a	c	b	d	1
a	a	1	c	b	d	1
c	c	a	1	b	d	1
b	b	a	c	1	d	1
d	d	a	c	b	1	1
1	1	1	1	1	1	1

x	0	a	c	b	d	1
$\neg x$	1	a	c	b	d	0

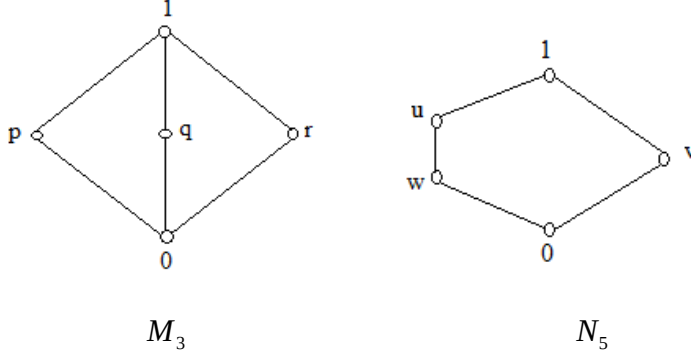
H nin değişmeli olmadığı aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$b \oplus d = (\neg b \vee d)^d = (b \vee d)^d = 1^d = \neg 1 \oplus d = 0 \oplus d = d$$

$$d \oplus b = (\neg d \vee b)^b = (d \vee b)^b = 1^b = \neg 1 \oplus b = 0 \oplus b = b$$

$$b \oplus d \neq d \oplus b$$

Fakat Şekil 1 deki üretilmiş kafes dağılmalıdır çünkü, M_3 - N_5 Teoremine göre, L kafesinin dağılmalı olması için gerek ve yeter şart $N_5 \mapsto L$ ya da $M_3 \mapsto L$ bir gömmesinin olmamasıdır.



Lemma 3.10 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir ve $\mathcal{L}(\mathcal{A})=(A;\vee,\wedge,(^a)_{a\in A},0,1)$, $\mathcal{A}$ nın üretilmiş kafesi olsun. O zaman

- (a) $(x \wedge y) \oplus z = (x \oplus z) \wedge (y \oplus z)$,
- (b) $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ dağılmalı ise $(x \vee y) \oplus z = (x \oplus z) \vee (y \oplus z)$

dir.

Uyarı 3.11 [Chajda, 2015] Bir temel cebir değişmeli ise o zaman

$$z \oplus (x \wedge y) = (z \oplus x) \wedge (z \oplus y)$$

özdeşliği gerçekleşir fakat değişmeli olmayan durumlarda doğru olmasına gerek yoktur.

Lemma 3.12 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir ve $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ atanmış kafesi olsun. O zaman

- (a) her $x, y \in A$ için $x \oplus y = (x \wedge y^0) \oplus y$,
- (b) x^0 ile y kıyaslanabilir ise, $x \oplus y = x \oplus (y \wedge x^0)$

dir.

Teorem 3.13 [Chajda, 2015] Bir $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ cebirinin değişmeli olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki iki koşulu sağlamasıdır:

$$(i) \quad x \leq y \text{ için, } (x^0)^{(y^0)} = y^x$$

$$(ii) \quad x \oplus (y \wedge x^0) = x \oplus y.$$

Yukarıdaki (i) ve (ii) koşulları birbirinden bağımsızdır.

Lemma 3.14 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$, Teorem 3.13 ün (i) koşulunu sağlayan bir temel cebir ve $x, y \leq a$, A nın elemanları olsun. O zaman

$$(a) \quad \text{Eğer } a^x = a^y \text{ ise } x = y,$$

$$(b) \quad a^{x \wedge y} = a^x \wedge a^y \text{ ve } a^{x \vee y} = a^x \vee a^y$$

dir.

Sonuç Teorem 3.15 [Chajda, 2015] Doğrusal sıralı (linearly order) bir temel cebirin değişmeli olması için Teorem 3.13 (i) koşulunun gerçekleşmesi bir gerek ve yeter koşuldur.

$\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir ve $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ nın üretilmiş kafesi olsun. Teorem 3.3 (b) den, $x, y \in A$ için $x \leq y$ ise $\neg y \leq \neg x$ dir. O zaman $\neg y \vee z \leq \neg x \vee z$ dir. Her $z \in A$ için $x \oplus z = (\neg x \vee z)^z \leq (\neg y \vee z)^z = y \oplus z$ dir. O halde her temel cebir aşağıdaki koşulu sağlar:

$$x \leq y \text{ ise } x \oplus z \leq y \oplus z.$$

Ayrıca $\mathcal{A}$ nın değişmeli olması durumunda $x \leq y \Rightarrow z \oplus x \leq z \oplus y$ koşulu gerçekleşir.

Tanım 3.16 [Chajda, 2015] Bir $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ temel cebir olsun.

$$x \leq y \Rightarrow z \oplus x \leq z \oplus y$$

gerektirmesi gerçekleşirse o zaman $\mathcal{A}$ ya *monoton* denir.

Her değişmeli temel cebir monotondur.

$\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ yapısının monoton olması için gerek ve yeter koşul her $z \in A$ için $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$ olmasıdır.

(BA1), (BA2), (BA3) ve (BA4) aksiyomlarının bağımsız olduğunu göstermek için bağımsızlık kavramını kısaca açıklayalım.

Verilen bir $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ formüller kümesinin bağımsız olduğunu göstermek için $i \neq j$ olmak üzere her $1 \leq j \leq n$ için her bir F_i formüllerini gerçekleyen fakat F_j formülü diğer formüllerin bir sonucu olan bir doğruluk değeri ataması bulmak yeterlidir.

Teorem 3.17 (BA1), (BA2), (BA3) ve (BA4) aksiyomları bağımsızdır.

Kanıt $B = \{0, 1\}$ kümesinin ele alalım.

Durum (1) $B=(B;\oplus,\neg,0)$ cebirsel yapısını göz önünde bulunduralım; burada $\oplus$ ikili işlemi her $x, y \in B$ için $x \oplus y = 0$ ile tanımlı ve $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$ dir.

(BA2), (BA3) ve (BA4) aksiyomlarını sağladığını fakat (BA1) aksiyomunu sağlamadığını gösterelim:

- (BA2) aksiyomu:

$x = 0$ için $\neg\neg 0 = \neg 0 = 0$ ve $x = 1$ için $\neg\neg 1 = \neg 0 = 1$ olduğuna göre (BA2) aksiyomu sağlanır.

- (BA3) aksiyomu:

$$\begin{aligned}\neg(\neg x \oplus y) \oplus y &= \neg 0 \oplus y \\ &= 0 \oplus y \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\neg(\neg y \oplus x) \oplus x &= \neg 0 \oplus x \\ &= 0 \oplus x \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğuna göre (BA3) aksiyomu sağlanır.

- (BA4) aksiyomu:

$$\begin{aligned}
\neg(\neg(\neg 0 \oplus y) \oplus z) \oplus (x \oplus z) &= \neg(\neg 0 \oplus z) \oplus (x \oplus z) \\
&= \neg 0 \oplus (x \oplus z) \\
&= 0 \oplus (x \oplus z) \\
&= 0 \\
&= \neg 0
\end{aligned}$$

olduğuna göre (BA4) aksiyomu sağlanır.

- (BA1) aksiyomu:

$$x=1 \text{ için } 1 \oplus 0 = 0 \neq 1.$$

Durum (2) Her $x, y \in B$ için $\oplus$ ve $\neg$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\neg$	0	1
0	1	1
1	1	1

(BA1), (BA3) ve (BA4) aksiyomlarını sağladığını fakat (BA2) aksiyomunu sağlamadığını gösterelim:

- (BA1) aksiyomu:

$x=0$ için $0 \oplus 0 = 0$ ve $x=1$ için $1 \oplus 0 = 1$ olduğuna göre (BA1) aksiyomu sağlanır.

- (BA3) aksiyomu:

$$\begin{aligned}
\neg(\neg x \oplus y) \oplus y &= \neg(1 \oplus y) \oplus y \\
&= \neg 1 \oplus y \\
&= 1 \oplus y \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\neg(\neg y \oplus x) \oplus x &= \neg(1 \oplus x) \oplus x \\
&= \neg 1 \oplus x \\
&= 1 \oplus x \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğuna göre, (BA3) aksiyomu sağlanır.

- (BA4) aksiyomu:

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg(1 \oplus y) \oplus z) \oplus (x \oplus z) &= \neg(1 \oplus z) \oplus (x \oplus z) \\
 &= 1 \oplus (x \oplus z) \\
 &= 1 \\
 &= \neg 0
 \end{aligned}$$

olduğuna göre, (BA4) aksiyomu sağlanır.

- (BA2) aksiyomu:

$x = 0$ için $\neg\neg 0 = \neg 1 = 1 \neq 0$ olduğuna göre bu aksiyom sağlanmaz.

Durum (3) Her $x, y \in B$ için $\oplus$ ve $\neg$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\neg$	0	1
	1	0

(BA1), (BA2) ve (BA4) aksiyomlarını sağladığını fakat (BA3) aksiyomunu sağlamadığını gösterelim:

- (BA1) aksiyomu:

$x = 0$ için $0 \oplus 0 = 0$ ve $x = 1$ için $1 \oplus 0 = 1$ olduğuna göre (BA1) aksiyomu sağlanır.

- (BA2) aksiyomu:

$x = 0$ için $\neg\neg 0 = \neg 1 = 0$ ve $x = 1$ için $\neg\neg 1 = \neg 0 = 1$ olduğuna göre (BA2) aksiyomu sağlanır.

- (BA4) aksiyomu:

$x = y = 0$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned}
\neg(\neg(\neg(0 \oplus 0) \oplus 0) \oplus z) \oplus (0 \oplus z) &= \neg(\neg(\neg 0 \oplus 0) \oplus z) \oplus (0 \oplus z) \\
&= \neg(\neg(1 \oplus 0) \oplus z) \oplus (0 \oplus z) \\
&= \neg(\neg 1 \oplus z) \oplus (0 \oplus z) \\
&= \neg(0 \oplus z) \oplus (0 \oplus z) \\
&= 1 \\
&= \neg 0
\end{aligned}$$

$x = y = 1$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned}
\neg(\neg(\neg(1 \oplus 1) \oplus 1) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) &= \neg(\neg(\neg 0 \oplus 1) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
&= \neg(\neg(1 \oplus 1) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
&= \neg(\neg 0 \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
&= \neg(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
&= 1 \\
&= \neg 0
\end{aligned}$$

$x = 0$ ve $y = 1$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned}
\neg(\neg(\neg(0 \oplus 1) \oplus 1) \oplus z) \oplus (0 \oplus z) &= \neg(\neg(\neg 1 \oplus 1) \oplus z) \oplus (0 \oplus z) \\
&= \neg(\neg(0 \oplus 1) \oplus z) \oplus (0 \oplus z) \\
&= \neg(\neg 1 \oplus z) \oplus (0 \oplus z) \\
&= \neg(0 \oplus z) \oplus (0 \oplus z) \\
&= 1 \\
&= \neg 0
\end{aligned}$$

$x = 1$ ve $y = 0$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned}
\neg(\neg(\neg(1 \oplus 0) \oplus 0) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) &= \neg(\neg(\neg 1 \oplus 0) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
&= \neg(\neg(0 \oplus 0) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
&= \neg(\neg 0 \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
&= \neg(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
&= 1 \\
&= \neg 0
\end{aligned}$$

O halde (BA4) sağlanır.

- (BA3) aksiyomu:

$x = 1$ ve $y = 0$ için

$$\begin{aligned}
\neg(\neg x \oplus y) \oplus y &= \neg(\neg 1 \oplus 0) \oplus 0 \\
&= \neg(0 \oplus 0) \oplus 0 \\
&= \neg 0 \oplus 0 \\
&= 1 \oplus 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\neg(\neg y \oplus x) \oplus x &= \neg(\neg 0 \oplus 1) \oplus 1 \\
&= \neg(1 \oplus 1) \oplus 1 \\
&= \neg 0 \oplus 1 \\
&= 1 \oplus 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğuna göre (BA3) aksiyomu sağlanmaz.

Durum (4) Her $x, y \in B$ için $\oplus$ ve $\neg$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\neg$	0	1
0	1	0
1	0	1

(BA1), (BA2) ve (BA3) aksiyomlarını sağladığını fakat (BA4) aksiyomunu sağlamadığını gösterelim:

- (BA1) aksiyomu:
 $x = 0$ için $0 \oplus 0 = 0$ ve $x = 1$ için $1 \oplus 0 = 1$ olduğuna göre (BA1) aksiyomu sağlanır.
- (BA2) aksiyomu:
 $x = 0$ için $\neg\neg 0 = \neg 0 = 0$ ve $x = 1$ için $\neg\neg 1 = \neg 1 = 1$ olduğuna göre (BA2) aksiyomu sağlanır.
- (BA3) aksiyomu:
 $x = y = 0$ ve $x = y = 1$ alt durumu açıktır.

$x = 0$ ve $y = 1$ alt durumu için

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg x \oplus y) \oplus y &= \neg(\neg 0 \oplus 1) \oplus 1 \\
 &= \neg(0 \oplus 1) \oplus 1 \\
 &= \neg 1 \oplus 1 \\
 &= 1 \oplus 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg y \oplus x) \oplus x &= \neg(\neg 1 \oplus 0) \oplus 0 \\
 &= \neg(1 \oplus 0) \oplus 0 \\
 &= \neg 1 \oplus 0 \\
 &= 1 \oplus 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

olduğuna göre aksiyom bu alt durum için gerçekleşmiş olur.

$x = 1$ ve $y = 0$ alt durumu yukarıdaki benzer şekilde gerçekleştirilebilir.

- (BA4) aksiyomu:

$x = y = 1$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg(\neg(1 \oplus 1) \oplus 1) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) &= \neg(\neg(\neg 1 \oplus 1) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
 &= \neg(\neg(1 \oplus 1) \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
 &= \neg(\neg 1 \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
 &= \neg(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus z) \\
 &= 1 \\
 &\neq 0 \\
 &= \neg 0
 \end{aligned}$$

O halde (BA4) aksiyomu gerçekleşmez.

Teorem 3.18 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ yapısı (BA1), (BA3), (BA4)

aksiyomlarını sağlayan $(2,1,0)$ tipinde bir temel cebir olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

- (a) $\mathcal{A}$, (BA2) aksiyomunu sağlar,

(b) $\mathcal{A}$, $0 \oplus x = x$ ve $\neg\neg 0 = 0$ özdeşliklerini sağlar.

Sonuç Teorem 3.19 [Chajda, 2015] $(2,1,0)$ tipinde bir $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ yapısının temel cebir olması için gerek ve yeter koşul (BA3) ve (BA4) aksiyomlarının sağlanması ve aşağıdaki özdeşliklerin gerçekleşmesidir:

$$(BA1+) \quad x \oplus 0 = x = 0 \oplus x,$$

$$(BA2-0) \quad \neg\neg 0 = 0,$$

$$(BA3-) \quad \neg 0 \oplus x = \neg 0.$$

Bir $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$, temel cebirinde aşağıdaki işlemleri tanımlayabiliriz:

$$x \rightarrow y = \neg x \oplus y, \quad x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y).$$

Bir temel cebir

$$\neg x = x \rightarrow 0, \quad x \oplus y = (x \rightarrow 0) \rightarrow y,$$

ya da

$$x \oplus y = \neg(\neg x \odot \neg y)$$

olduğundan, alternatif olarak $(\rightarrow, 0)$ imzası ile tanımlanabilir [Chajda, 2015].

O halde (BA1)-(BA4) temel cebir aksiyomlarını sadece gerektirme bağlacını kullanarak yeniden aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

- (BA1)-(BA2) aksiyomları: $(x \rightarrow 0) \rightarrow 0 = x$

$$\begin{aligned} (x \rightarrow 0) \rightarrow 0 &= \neg x \rightarrow 0 \\ &= \neg\neg x \oplus 0 \\ &= x \oplus 0 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x \rightarrow 0) \rightarrow 0 &= \neg x \rightarrow 0 \\
&= \neg \neg x \oplus 0 \\
&= \neg \neg x \\
&= x
\end{aligned}$$

- (BA3) aksiyomu: $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$

$$\begin{aligned}
(x \rightarrow y) \rightarrow y &= (\neg x \oplus y) \rightarrow y \\
&= \neg(\neg x \oplus y) \oplus y \\
&= \neg(\neg y \oplus x) \oplus x \\
&= (\neg y \oplus x) \rightarrow x \\
&= (y \rightarrow x) \rightarrow x
\end{aligned}$$

- (BA4) aksiyomu : $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z \rightarrow (x \rightarrow z) = 0 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
(((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) &= (((\neg x \oplus y) \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow (\neg x \oplus z) \\
&= ((\neg(\neg x \oplus y) \oplus y) \rightarrow z) \rightarrow (\neg x \oplus z) \\
&= (\neg(\neg(\neg x \oplus y) \oplus y) \oplus z) \rightarrow (\neg x \oplus z) \\
&= \neg(\neg(\neg(\neg x \oplus y) \oplus y) \oplus z) \oplus (\neg x \oplus z) \\
&= \neg 0 \\
&= \neg 0 \oplus 0 \\
&= 0 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

4. TEMEL CEBİRLER OLARAK ORTOMODÜLER KAFESLER VE MV-CEBİRLERİ

Her temel cebir alternatif olarak bir kesit antiton involüsyonlu sınırlı kafes olarak göz önünde bulundurulabilir. Şimdi $\mathcal{A}$ temel cebirinin bir x elemanı için $\neg x$ değillemesinin $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ indirgenmiş kafesinde x in tümleyeni olduğu inceleyeceğiz.

Lemma 4.1 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir ve $x \in A$ için olsun. $\neg x$ in $\mathcal{L}(\mathcal{A})=(A;\vee,\wedge,(^a)_{a \in A},0,1)$ üretilmiş kafesinde x in bir tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $x \oplus x = x$ özdeşliğinin sağlamasıdır.

Sonuç Teorem 4.2 [Chajda, 2015] Eğer $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ temel cebiri $x \oplus x = x$ özdeşliğini sağlarsa, o zaman $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ indirgenmiş kafesi bir ortokafestir.

Her $\mathcal{L}=(L;\vee,\wedge,\perp,0,1)$ ortomodüler kafesin kesit antiton involüsyonlu kafes olduğuna daha önce değinilmişti; burada $a \in L$ ve $x \in [a,1]$ için her kafesinin involüsyonu $x^a = x^\perp \vee a$ dır. Ayrıca ortomodülerlik yasasına göre

$$x \wedge x^a = x \wedge (x^\perp \vee a) = a \text{ ve } x \vee x^a = x \vee x^\perp \vee a = 1$$

dır. Böylece x^a , $[a,1]$ aralığında x in tümleyenidir. O halde bir $\mathcal{L}=(L;\vee,\wedge,\perp,0,1)$ ortomodüler kafesini bir $\mathcal{A}(L)=(L;\oplus,\neg,0)$ temel cebirine dönüştürmek için aşağıdaki tanımlamaları yapabiliriz:

$$\neg x = x^\perp \text{ ve } x \oplus y = (x^0 \vee y)^y = (x^\perp \vee y)^\perp \vee y = (x \wedge y^\perp) \vee y.$$

Teorem 4.3 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir ve $\mathcal{L}(\mathcal{A})=(A;\vee,\wedge,(^a)_{a \in A},0,1)$ üretilmiş kafes olsun. O zaman $(A;\vee,\wedge,\neg,0,1)$ yapısının ortomodüler kafes olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A}$ yapısının aşağıdaki özdeşliği sağlamasıdır:

$$y \oplus (x \wedge y) = y$$

veya, denk olarak,

$$x \leq y \Rightarrow y \oplus x = y .$$

MV-cebir kavramı, 1950 lerin sonlarında Chang [Chang,1958] ve [Chang,1959] tarafından çok değerli Łukasiewicz lojisinin aksiyomları için bir cebirsel araç olarak tanıtıldı. Orijinal tanım birkaç yazar tarafından basitleştirildi. Mundici [Mundici,1996] tarafından verilen tanımlama aşağıdaki gibidir:

Tanım 4.4 [Chajda, 2015] $(2,1,0)$ tipinde bir $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlarsa o zaman bir *MV- cebiri* olarak adlandırılır:

$$(MV1) \quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z ,$$

$$(MV2) \quad x \oplus y = y \oplus x ,$$

$$(MV3) \quad x \oplus 0 = x ,$$

$$(MV4) \quad \neg\neg x = x ,$$

$$(MV5) \quad x \oplus \neg 0 = \neg 0, \text{ burada } 1 = \neg 0 \text{ dır,}$$

$$(MV6) \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x .$$

Bir MV- cebiri bir temel cebir ile aynı tipe ve imzaya sahiptir. Bu nedenle bir MV- cebirinin bir temel cebir olup olmadığını araştıralım.

Her MV- cebiri (BA1)-(BA3) aksiyomlarını sağlar. (BA4) aksiyomu için aşağıdaki gözlemlerde bulunabiliriz.

$$x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y \text{ ve } x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$$

olmak üzere, her MV- cebirinin bir sınırlı $(A;\vee,\wedge,0,1)$ kafesine neden olmasını ve her $a \in A$ ve $x \in [a,1]$ için

$$x \mapsto x^a = \neg x \oplus a$$

dönüşümünün, $[a,1]$ aralığında bir antiton involüsyon olmasını kullanabiliriz.

O halde $\mathcal{A}$ MV- cebiri için $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (A; \vee, \wedge, ({}^a)_{a \in A}, 0, 1)$ yapısı kesit antiton involüsyonlu bir kafestir ve Teorem 3.6 dan bir temel cebirdir.

Lemma 4.5 [Chajda, 2015] Her MV- cebiri, üretilmiş kafesi dağılmalı olan bir temel cebirdir.

Yukarıdaki lemmanın önemli bir sonucu temel cebirlerin çok-değerli Łukasiewicz lojiklerinin aksiyomlaştırılmasını yansıtmaları olarak ifade edilebilir. Ayrıca Teorem 4.3 ile birlikte, temel cebirler ortomodüler kafeslerin ve MV- cebirlerinin genel bir aksiyomlaştırılmasını verir. Böylece çok-değerli Łukasiewicz lojiklerinde olduğu gibi kuantum mekaniği lojiklerinin bir cebirsel aksiyomlaştırılmasını da verir.

Teorem 4.6 [Kolařík, 2013] Bir temel cebirin MV- cebiri olması için gerek ve yeter şart birleşmeli olmasıdır.

5. TEMEL CEBİRLERİN KONGRÜANS VE SÜZGEÇLERİ

Bir cebir üzerindeki her kongrüans $[1]_\theta$ çekirdeğiyle tek türlü belirlenir; yani θ, ϕ bu cebir üzerinde $[1]_\theta = [1]_\phi$ olacak şekilde iki kongrüans ise o zaman $\theta = \phi$ dir. Bu durum temel cebirlerde de geçerlidir. Bu nedenle temel cebir üzerinde bir kongrüans tanımlamak için sadece çekirdeğini tanımlamamız gerekir.

Tanım 5.1 [Chajda, 2015] $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir ve $F \subseteq A$ olsun. Eğer $1 \in F$ ve her $a, b, c \in A$ için

$$(F1) \ a \in F \text{ ve } a \rightarrow b \in F \text{ ise } b \in F,$$

$$(F2) \ a \geq b \text{ olmak üzere } a \rightarrow b \in F \text{ ise } (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c) \in F$$

özdeşlikleri sağlanıyorsa F ye $\mathcal{A}$ da bir *süzgeç* denir.

Bir *uyumlu süzgeç* (compatible filter)

$$(F3) \ a \rightarrow b \in F \text{ ve } b \rightarrow a \in F \text{ ise } (c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b) \in F$$

koşulunu sağlayan bir süzgeçtir.

$\mathcal{A}$ da tüm süzgeçlerin kümesini $F(\mathcal{A})$ ve tüm uyumlu süzgeçlerin kümesini $CF(\mathcal{A})$ ile gösterelim.

Lemma 5.2 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}$ bir temel cebir ve $1 \in F \subseteq A$ olsun. O zaman

(a) $F \in F(\mathcal{A})$ ise $F, (A; \leq)$ de bir sıra süzgeçtir (order filter).

(b) $\mathcal{A}$ değişmeli ise F in (F1) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart F in $\odot$ altında kapalı bir sıra süzgeç olmasıdır.

(c) $\mathcal{A}$ bir MV- cebiri ise $F \in F(\mathcal{A})$ olması için gerek ve yeter şart F in (F1) koşulunu sağlamasıdır.

Tanım 5.3 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}$ nın bir *sağ kongrüansı*, her $a, b \in \theta$ ve $c \in A$ için

$$(a, b) \in \theta \Rightarrow (a \rightarrow c, b \rightarrow c) \in \theta$$

koşulunu sağlayan A üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

$Con_r(\mathcal{A})$ ile $\mathcal{A}$ üzerinde sağ kongrüansların kümesini gösterelim. Her $\theta \in Con_r(\mathcal{A})$ için

$$(a, b) \in \theta \Leftrightarrow (-a, -b) \in \theta$$

dir.

Lemma 5.4 [Chajda, 2015] Her $\mathcal{A}$ temel cebiri için $Con_r(\mathcal{A}) \subseteq Con(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ dır.

Eğer $\mathcal{A}$ değişmeli veya ortomodüler ise o zaman $Con_r(\mathcal{A}) = Con(\mathcal{A})$ dır.

Teorem 5.5 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}$ bir temel cebir ve $F \in F(\mathcal{A})$ olsun.

$$(a, b) \in \theta(F) \Leftrightarrow a \rightarrow b \in F \text{ ve } b \rightarrow a \in F$$

ile tanımlı $\theta(F)$ bağıntısı, $[1]_{\theta(F)} = F$ olmak üzere $\mathcal{A}$ üzerinde bir sağ kongrüanstır. Eğer F bir uyumlu süzgeç ise $\theta(F)$, $\mathcal{A}$ üzerinde bir kongrüanstır.

Lemma 5.6 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}$ bir temel cebir ve $F \in F(\mathcal{A})$ olsun. Her $a, b \in A$ için aşağıdaki koşullar denktir:

- (a) $(a, b) \in \theta(F)$
- (b) $c \geq a, b$ ve $c \rightarrow a, c \rightarrow b \in F$ olacak şekilde $c \in A$ vardır.
- (c) $f \geq a, g \geq b$ ve $f \rightarrow a = g \rightarrow b$ olacak şekilde $f, g \in F$ vardır.
- (d) $f \geq -a, g \geq -b$ ve $f \odot a = g \odot b$ olacak şekilde $f, g \in F$ vardır.

Süzgeçler ve uyumlu süzgeçler ideal terimler altında kapalı alt kümeler olarak karakterize edilebilir.

Teorem 5.7 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}$ bir temel cebir ve $1 \in F \subseteq A$ olsun. $F \in F(\mathcal{A})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} t_1(x, y_1, y_2) &= (y_1 \rightarrow (y_2 \rightarrow x)) \rightarrow x, \\ t_2(x_1, x_2, x_3, y) &= (((y \rightarrow x_1) \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \end{aligned}$$

ideal terimleri altında kapalı olmasıdır.

Bir süzgecin uyumlu olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} t_3(x_1, x_2, x_3, y) &= (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (y \rightarrow x_3))) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3))), \\ t_4(x_1, x_2, y_1, y_2) &= ((y_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow (y_2 \rightarrow x_2)) \end{aligned}$$

ideal terimleri altında kapalı olmasıdır.

Sonuç Teorem 5.8 [Chajda, 2015] θ bir sağ kongrüans (kongrüans) olsun. O zaman $[1]_\theta$, $\theta([1]_\theta) = \theta$ olacak şekilde bir süzgeç (uyumlu süzgeç) dir.

Teorem 5.9 [Chajda, 2015] Her $\mathcal{A}$ temel cebiri için $\theta \mapsto [1]_\theta$ ve $F \mapsto \theta(F)$ dönüşümleri, $Con_r(\mathcal{A}) = (Con_r(\mathcal{A}), \subseteq)$ ve $F(\mathcal{A}) = (F(\mathcal{A}), \subseteq)$ kafesleri ve $Con(\mathcal{A}) = (Con(\mathcal{A}), \subseteq)$ ve $CF(\mathcal{A}) = (CF(\mathcal{A}), \subseteq)$ kafesleri arasında karşılıklı olarak ters izomorfizmlerdir.

Sonuç Teorem 5.10 [Chajda, 2015] Her $\mathcal{A}$ temel cebiri için $Con(\mathcal{A})$, $Con(\mathcal{L}(\mathcal{A}))$ nin alt kafesi olan $Con_r(\mathcal{A})$ nin bir alt kafesidir. Böylece $CF(\mathcal{A})$, dağılmalı kafes olan $F(\mathcal{A})$ nin alt kafesidir.

Bir temel cebirin $x \leq y \Rightarrow z \oplus x \leq z \oplus y$ özdeşliğini sağlaması durumunda monoton olduğunu biliyoruz. Her değişmeli temel cebir monotondur. Monoton temel cebir durumunda, $b \leq a$ kabul ederek (F3) şartını sadeleştirebileceğimizi ve Teorem 5.7 de t_4 terimini atlayabileceğimizi göstereceğiz.

Teorem 5.11 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}$ bir monoton temel cebir olsun. Her $F \in F(\mathcal{A})$ süzgeci için aşağıdakiler denktir:

- (a) F bir uyumlu süzgeçtir.
- (b) F , t_3 terimi altında kapalıdır.
- (c) Her $a, b, c \in A$ için $a \rightarrow b \in F$ ve $a \geq b$ ise $(c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b) \in F$

Eğer $\mathcal{A}$ değişmeli ise $F(\mathcal{A}) = CF(\mathcal{A})$ dir.

6. TEMEL CEBİRLERİN GEREKTİRME BAĞLACI ÜZERİNE KISITLAMALARI

Bölüm 3 de belirtildiği gibi, $x \rightarrow y = \neg x \oplus y$ olmak üzere $\mathcal{A}=(A; \oplus, \neg, 0)$ temel cebiri $\{\rightarrow, 0\}$ imzası ile alternatif olarak göz önünde bulundurulabilir. Kuantum mekaniği lojiğinde $\rightarrow$ operatörünün lojikel gerektirme bağlacı rolünü oynadığını belirtelim. Bu konuda pek çok çalışma yapılmıştır [Abbott, 1967] ve [Chajda and Halas, 2005].

Kısalık için $\rightarrow$ yerine $\circ$ sembolünü kullanacağız.

Tanım 6.1 [Chajda, 2015] *Gerektirme temel cebir* (2) tipindeki aşağıdaki özelliklerin sağlandığı bir $(A; \circ)$ cebiridir:

$$(I1) \quad (x \circ x) \circ x = x,$$

$$(I2) \quad (x \circ y) \circ y = (y \circ x) \circ x,$$

$$(I3) \quad (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) = x \circ x.$$

İlk olarak gerektirme temel cebirlerin birkaç özelliğini vereceğiz. Özellikle her temel cebirin bir cebirsel sabit 1 e sahip olduğunu gösterelim.

Lemma 6.2 [Chajda, 2015] $(A; \circ)$ bir gerektirme temel cebir olsun. O zaman bir cebirsel sabiti olan $1 \in A$ elemanı vardır ve $(A; \circ)$ aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

$$(a) \quad x \circ x = 1,$$

$$(b) \quad x \circ 1 = 1,$$

$$(c) \quad 1 \circ x = x,$$

$$(d) \quad ((x \circ y) \circ y) \circ y = x \circ y,$$

$$(e) \quad y \circ (x \circ y) = 1.$$

Teorem 6.3 (I1), (I2), (I3) aksiyomları bağımsızdır.

Kanıt İki elemanlı $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, \circ)$ grupoidini göz önünde bulunduralım.

Durum (1) $\circ$ ikili işlemi, $x \circ y = 0$ olacak şekilde tanımlansın.

(I2) ve (I3) aksiyomlarının sağlandığını fakat (I1) aksiyomunun sağlanmadığını gösterelim:

- (I2) aksiyomu:

$$(x \circ y) \circ y = 0 \circ y \\ = 0$$

ve

$$(y \circ x) \circ x = 0 \circ x \\ = 0$$

olduğuna göre (I2) aksiyomu sağlanır.

- (I3) aksiyomu:

$$\begin{aligned} (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) &= ((0 \circ y) \circ z) \circ 0 \\ &= (0 \circ z) \circ 0 \\ &= 0 \circ 0 \\ &= 0 \\ &= 0 \circ 0 \\ &= x \circ x \end{aligned}$$

olduğuna göre (I3) aksiyomu sağlanır.

- (I1) aksiyomu:

$$x=1 \text{ için } (1 \circ 1) \circ 1 = 0 \circ 1 = 0 \neq 1$$

Durum (2) $\circ$ ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\circ$	0	1
0	0	0
1	1	1

(I1) ve (I3) aksiyomlarının sağlandığını fakat (I2) aksiyomunun sağlanmadığını gösterelim:

- (I1) aksiyomu:

$x = 0$ için $(0 \circ 0) \circ 0 = 0 \circ 0 = 0$ ve $x = 1$ için $(1 \circ 1) \circ 1 = 1 \circ 1 = 1$ olduğuna göre (I1) aksiyomu sağlanır.

- (I3) aksiyomu:

$x = 1$ ve $y = 0$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) &= (((1 \circ 0) \circ 0) \circ z) \circ (1 \circ z) \\ &= ((1 \circ 0) \circ z) \circ (1 \circ z) \\ &= (1 \circ z) \circ (1 \circ z) \\ &= 1 \circ 1 \\ &= x \circ x \end{aligned}$$

$x = 0$ ve $y = 1$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) &= (((0 \circ 1) \circ 1) \circ z) \circ (0 \circ z) \\ &= ((0 \circ 1) \circ z) \circ (0 \circ z) \\ &= (0 \circ z) \circ (0 \circ z) \\ &= 0 \circ 0 \\ &= x \circ x \end{aligned}$$

$x = y = 0$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) &= (((0 \circ 0) \circ 0) \circ z) \circ (0 \circ z) \\ &= ((0 \circ 0) \circ z) \circ (0 \circ z) \\ &= (0 \circ z) \circ (0 \circ z) \\ &= 0 \circ 0 \\ &= x \circ x \end{aligned}$$

$x = y = 1$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} (((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) &= (((1 \circ 1) \circ 1) \circ z) \circ (1 \circ z) \\ &= ((1 \circ 1) \circ z) \circ (1 \circ z) \\ &= (1 \circ z) \circ (1 \circ z) \\ &= 1 \circ 1 \\ &= x \circ x \end{aligned}$$

olduğuna göre (I3) aksiyomu sağlanır.

- (I2) aksiyomu:

$x=1$ ve $y=0$ için,

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ y &= (1 \circ 0) \circ 0 \\ &= 1 \circ 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(y \circ x) \circ x &= (0 \circ 1) \circ 1 \\ &= 0 \circ 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğuna göre (I2) aksiyomu sağlanmaz.

Durum (3) $\circ$ ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\circ$	0	1
0	0	0
1	0	1

(I1) ve (I2) aksiyomlarının sağlandığını fakat (I3) aksiyomunun sağlanmadığını gösterelim:

- (I1) aksiyomu:

$x=0$ için $(0 \circ 0) \circ 0 = 0 \circ 0 = 0$ ve $x=1$ için $(1 \circ 1) \circ 1 = 1 \circ 1 = 1$ olduğuna göre (I1) aksiyomu sağlanır.

- (I2) aksiyomu:

$x=y=1$ ve $x=y=0$ için eşitlik zaten sağlanır.

$x=1$ ve $y=0$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ y &= (1 \circ 0) \circ 0 \\ &= 0 \circ 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(y \circ x) \circ x &= (0 \circ 1) \circ 1 \\
&= 0 \circ 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$x=0$ ve $y=1$ alt durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned}
(x \circ y) \circ y &= (0 \circ 1) \circ 1 \\
&= 0 \circ 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(y \circ x) \circ x &= (1 \circ 0) \circ 0 \\
&= 0 \circ 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğuna göre (I2) sağlanır.

- (I3) aksiyomu:

$x=1$ ve $y=0$ için,

$$\begin{aligned}
(((x \circ y) \circ y) \circ z) \circ (x \circ z) &= (((1 \circ 0) \circ 0) \circ z) \circ (1 \circ z) \\
&= ((0 \circ 0) \circ z) \circ (1 \circ z) \\
&= (0 \circ z) \circ (1 \circ z) \\
&= 0 \circ (1 \circ z) \\
&= 0 \\
&\neq 1 \\
&= 1 \circ 1 \\
&= x \circ x
\end{aligned}$$

olduğuna göre (I3) sağlanmaz.

Teorem 6.4 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir olsun. $\circ$ ikili işlemi,

$x \circ y = \neg x \oplus y$ ile tanımlansın. O zaman, $(A;\circ)$ bir gerektirme temel cebiridir.

Lemma 6.5 [Chajda, 2015] $(A;\circ)$ bir gerektirme temel cebiri olsun. A üzerinde $\leq$ ikili bağıntısı

$$x \leq y \Leftrightarrow x \circ y = 1$$

ile tanımlansın. O zaman $\leq$ bağıntısı her $x \in A$ için $x \leq 1$ olacak şekilde A üzerinde bir kısmi sıralamadır. Ayrıca her $x, y, z \in A$ için

$$z \leq x \circ z \text{ ve } x \leq y \Rightarrow y \circ z \leq x \circ z$$

dir.

Uyarı 6.6 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir ve $x \circ y = \neg x \oplus y$ olsun.

O zaman $(A;\circ)$ gerektirme temel cebirinin üretilmiş kısmi sıralaması, Teorem 3.3 de tanımlanan $\mathcal{A}$ nın kısmi sıralaması ile çakışır.

Teorem 6.7 [Chajda, 2015] $(A;\circ)$ bir gerektirme temel cebiri ve $\leq$, bu cebirin üretilmiş kısmi sıralaması olsun. O zaman $(A;\leq)$

$$x \vee y = (x \circ y) \circ y$$

olmak üzere en büyük elemanı 1 olan bir birleştirmeli yarı kafestir.

Teorem 6.8 [Chajda, 2015] $(A;\circ)$ bir gerektirme temel cebiri ve $(A;\vee)$, bu cebirin üretilmiş yarı kafesi olsun. Her $p \in A$ için, $[p,1]$ aralığı

$$\text{her } x, y \in [p,1] \text{ için } x^p = x \circ p \text{ ve } x \wedge_p y = ((x \circ p) \vee (y \circ p)) \circ p$$

olmak üzere $x \mapsto x^p$ antiton involüsyon ile $([p,1]; \vee, \wedge_p, {}^p)$ bir kafestir.

Sonuç Teorem 6.9 [Chajda, 2015] $(A;\circ)$ bir gerektirme temel cebiri ve $\leq$, bu cebirin üretilmiş kısmi sıralaması olsun. O zaman $(A;\leq)$, her $p \in A$ için $[p,1]$ aralığı bir $([p,1]; \oplus_p, \neg_p, p)$ temel cebir olmak üzere en büyük elemanı 1 olan bir birleştirmeli yarı kafestir; burada

$$\text{her } x, y \in [p,1] \text{ için } x \oplus_p y = (x \circ p) \circ y \text{ ve } \neg_p x = x \circ p$$

dir.

$([p,1]; \oplus_p, \neg_p, p)$ yapısına *aralık temel cebiri* (interval basic algebra) denir.

Teorem 6.8, bir gerektirme temel cebirinin yarı kafes yapısını tanımladığını ifade eder. Teorem 6.8 in tersi de doğrudur.

Teorem 6.10 [Chajda, 2015] $(A; \vee, 1)$, her $p \in A$ için $[p, 1]$ aralığı $x \mapsto x^p$ antiton involüsyon ile bir kafes olacak şekilde en büyük elemanı 1 olan bir birleştirmeli yarı kafes ve $x \circ y = (x \vee y)^y$ olsun. O zaman, $(A; \circ)$ bir gerektirme temel cebiridir.

Teorem 6.11 [Chajda, 2015] $(A; \circ)$ en küçük elemanı 0 olan bir gerektirme temel cebiri olsun. $\neg x = x \circ 0$ ve $x \oplus y = (x \circ 0) \circ y$ işlemleri tanımlansın. O zaman $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir ve $x \circ y = \neg x \oplus y$ dir.

Sonuç Teorem 6.12 [Chajda, 2015] $(A; \circ)$ bir değişmeli gerektirme temel cebiri ve $(A; \vee)$, $(A; \circ)$ nin üretilmiş yarı kafesi olsun. O zaman

- (a) her $p \in A$ için $([p, 1]; \oplus_p, \neg_p, p)$ aralık temel cebiri bir değişmeli temel cebirdir.
- (b) her $p \in A$ için $([p, 1], \vee, \wedge_p)$ aralık kafesi dağılmalıdır.

7. ARALIK TEMEL CEBİRLERİ

$\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir ve $a \leq b$ olmak üzere $a, b \in A$ olsun. Bu bölümde, A nın bir $[a,b]$ aralığının tekrar bir temel cebir olup olmayacağı sorusuna yanıt arayacağız. $0, 1 \in A$ olduğuna göre incelememizi sadece $[0,b]$ ya da $[a,1]$ aralıklarına da indirgeyebiliriz.

Teorem 7.1 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir olsun. $\leq$, $\mathcal{A}$ nın üretilmiş sıralaması ve $a \in A$ olsun. $[a,1]$ aralığı üzerinde $\neg_a$ ve $\oplus_a$ işlemleri

$$\neg_a x = \neg x \oplus a, \quad x \oplus_a y = \neg(\neg x \oplus a) \oplus y$$

ile tanımlansın. O zaman $([a,1]; \oplus_a, \neg_a, a)$ bir temel cebirdir.

Her $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ temel cebiri (üretilmiş sıralamaya göre) bir kafes olduğundan ve herhangi bir $[a,1]$ aralığı için $\neg_a$ ve $\oplus_a$ işlemleri, A nın $\neg$ ve $\oplus$ işlemleri aracılığıyla ifade edilebildiği için $a \leq b$ olmak üzere $a, b \in A$ olma durumunda $\neg_a$ ve $\neg_b$ ya da $\oplus_a$ ve $\oplus_b$ işlemleri arasındaki ilişki, yukarıdaki teoremden $([a,1]; \oplus_a, \neg_a, a)$ yapısının bir temel cebir olması ile ifade edilebilir ve $[b,1], [a,1]$ aralığı içinde bir aralıktır. Bu nedenle aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç Teorem 7.2 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir, $a, b \in A$ ve $a \leq b$ olsun. O zaman her $x, y \in [b,1]$ için

$$\neg_b x = \neg_a x \oplus_a b \quad \text{ve} \quad x \oplus_b y = \neg_a(\neg_a x \oplus_a b) \oplus_a y$$

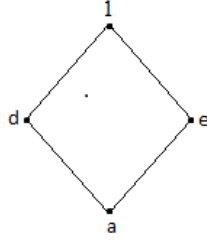
dir.

$\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ ile üretilen $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ tam kafesi A nın aralıklarından birleştirildiği için *karmaşık birleşim koşulu* (patchwork condition) olarak adlandırılır.

Şimdi problemin tersini düşünelim. $\mathcal{L}=(L;\vee,\wedge,0,1)$ bir sınırlı kafes olsun ve $[a,1]$ aralığı üzerinde (her $a \in L$ için olmasına gerek yoktur) $([a,1]; \oplus_a, \neg_a, a)$

temel cebiri tanımlansın. $(L; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir ve $([a, 1]; \oplus_a, \neg_a, a)$, L nin aralık temel cebiri olacak şekilde $\oplus$ ve $\neg$ işlemlerini olduğunu aşağıdaki örnekle gösterelim:

Örnek 7.3 $\mathcal{A}_c = (A; \oplus, \neg, c)$ temel cebirini göz önünde bulunduralım. Üretilmiş kafesi



Şekil 2

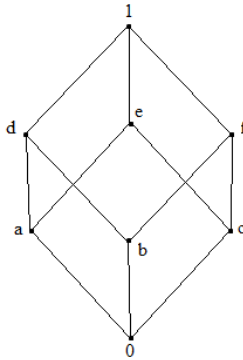
ile gösterilebilir. $\oplus$ ve $\neg$ işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$\oplus$	a	d	e	1
a	a	d	e	1
d	d	1	e	1
e	e	d	1	1
1	1	1	1	1

x	a	d	e	1
$\neg x$	1	d	e	a

Tablo 1

Aşağıdaki kafesi göz önünde bulunduralım:



Şekil 3

$\oplus$ ve $\neg$ işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın:

$\oplus$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	a	b	c	d	e	f	1
a	a	a	d	f	d	e	1	1
b	b	d	b	e	d	1	f	1
c	c	e	f	c	1	e	f	1
d	d	d	d	1	d	1	1	1
e	e	e	1	f	1	e	1	1
f	f	1	f	e	1	1	f	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\neg x$	1	f	e	d	c	b	a	0

Tablo 2

$A = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ için $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebirdir. Fakat $\mathcal{A}_c$,

$\mathcal{A}$ nın aralık temel cebiri değildir çünkü karmaşık birleşim koşulu sağlanmaz:

$$\begin{aligned}
 d \oplus_a e &= \neg(\neg d \oplus a) \oplus e \\
 &= \neg(c \oplus a) \oplus e \\
 &= \neg e \oplus e \\
 &= b \oplus e \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ve

$$d \oplus e = e$$

olduğuna göre, $d \oplus_a e \neq d \oplus e$ elde edilir.

$\oplus$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	a	b	c	d	e	f	1
a	a	1	b	c	d	e	f	1
b	b	a	1	c	d	e	f	1
c	c	a	b	1	d	e	f	1
d	d	a	b	c	1	e	f	1
e	e	a	b	c	d	1	f	1
f	f	a	b	c	d	e	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\neg x$	1	a	b	c	d	e	f	1

Tablo 3

Karşıt olarak, eğer A üzerinde $\oplus$ ve $\neg$ işlemleri Tablo 3 deki gibi tanımlanır ise o zaman bir temel cebir elde ederiz ve karmaşık birleşim koşulu sağladığı aşağıdaki durumlardan elde edilir:

Durum I:

$$\begin{aligned}
 d \oplus_a e &= \neg(\neg d \oplus a) \oplus e \\
 &= \neg(d \oplus a) \oplus e \\
 &= \neg a \oplus e & d \oplus e &= e \\
 &= a \oplus e \\
 &= e
 \end{aligned}$$

Durum II:

$$\begin{aligned}
 a \oplus_a d &= \neg(\neg a \oplus a) \oplus d \\
 &= \neg(a \oplus a) \oplus d \\
 &= \neg 1 \oplus d \\
 &= 0 \oplus d \\
 &= d
 \end{aligned}
 \qquad a \oplus d = d$$

Durum III:

$$\begin{aligned}
 a \oplus_a e &= \neg(\neg a \oplus a) \oplus e \\
 &= \neg(a \oplus a) \oplus e \\
 &= \neg 1 \oplus e \\
 &= 0 \oplus e \\
 &= e
 \end{aligned}
 \qquad a \oplus e = e$$

Durum IV:

$$\begin{aligned}
 d \oplus_a 1 &= \neg(\neg d \oplus a) \oplus 1 \\
 &= \neg(d \oplus a) \oplus 1 \\
 &= \neg a \oplus 1 \\
 &= a \oplus 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}
 \qquad d \oplus 1 = 1$$

Durum V:

$$\begin{aligned}
 e \oplus_a 1 &= \neg(\neg e \oplus a) \oplus 1 \\
 &= \neg(e \oplus a) \oplus 1 \\
 &= \neg a \oplus 1 \\
 &= a \oplus 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}
 \qquad e \oplus 1 = 1$$

Şimdi bir $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ aralık temel cebirinin bir başka aralık alt cebirini elde etmek için $[0,b]$ alt aralığı üzerinde tanımlanacak işlemleri ifade etmeye çalışalım. $[a,1]$ üst aralığı da benzer şekilde temsil edilebilir.

Teorem 7.4 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir olsun. $\leq$, A nın üretilmiş sıralaması ve $b \in A$ olsun. $[0,b]$ aralığı üzerinde $\neg^b$, $\oplus^b$ işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\neg^b x = \neg(x \oplus b), \quad x \oplus^b y = \neg(\neg(x \oplus (y \oplus \neg b)) \oplus \neg b)$$

O zaman $([0,b]; \oplus^b, \neg^b, 0)$ bir temel cebirdir.

Teorem 7.5 [Chajda, 2015] $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir temel cebir olsun. $\leq$, A nın üretilmiş sıralaması, $a \leq b$ olmak üzere $a, b \in A$ olsun. $[a,b]$ aralığı üzerinde $\neg_a^b$, $\oplus_a^b$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\neg_a^b x = \neg(\neg(\neg x \oplus a) \oplus (\neg b \oplus a)) \oplus a,$$

$$x \oplus_a^b y = \neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\neg x \oplus a) \oplus (\neg(\neg y \oplus a) \oplus (\neg b \oplus a)))) \oplus a) \oplus a) \oplus (\neg b \oplus a)) \oplus a$$

O zaman $\mathcal{A}(a,b) = ([a,b]; \oplus_a^b, \neg_a^b, a)$ bir temel cebirdir.

8. TEMEL CEBİRLERDE YANG-BAXTER DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Bu bölümde, temel cebirlerde küme-teorik Yang-Baxter denklemlerinin sonuçlarını inceleyeceğiz. k bir cisim olsun ve k cismi üzerinde tensör çarpım tanımlansın. V k uzayı için $\tau: (v \otimes w) \rightarrow w \otimes v$ ile tanımlı büküm dönüşümünü $\tau: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ ile, V uzayının birim dönüşümünü $I: V \rightarrow V$ ile gösterelim. $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ k -lineer dönüşümü için $R^{12} = R \otimes I$, $R^{23} = I \otimes R$, $R^{13} = (I \otimes \tau)(R \otimes I)(\tau \otimes I)$ olsun.

Tanım 8.1 [Nichita,2015] Bir Yang-Baxter işlemi tersinir $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ k -lineer dönüşümüdür ve aşağıdaki Yang-Baxter denklemini sağlar:

$$R^{12} \circ R^{23} \circ R^{12} = R^{23} \circ R^{12} \circ R^{23} \quad (1)$$

Eğer R (1) denklemini sağlarsa, $R \circ \tau$ ve $\tau \circ R$ aşağıdaki kuantum Yang-Baxter denklemini sağlar:

$$R^{12} \circ R^{13} \circ R^{23} = R^{23} \circ R^{13} \circ R^{12} \quad (2)$$

Lemma 8.2 [Nichita,2015] (1) ve (2) denklemleri birbirine denktir.

Küme-teorik Yang-Baxter denklemi ve temel cebirler arasındaki ilişkiyi göstermek için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 8.3 [Nichita,2015] X bir küme ve $S: X \times X \rightarrow X \times X$, $S(u, v) = (u', v')$ bir dönüşüm olsun. S dönüşümü,

$$\begin{aligned} S^{12} &= X \times X \times X \rightarrow X \times X \times X, S^{12}(u, v, w) = (u', v', w), \\ S^{23} &= X \times X \times X \rightarrow X \times X \times X, S^{23}(u, v, w) = (u, v', w'), \\ S^{13} &= X \times X \times X \rightarrow X \times X \times X, S^{13}(u, v, w) = (u', v, w') \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S^{12} \circ S^{13} \circ S^{23} = S^{23} \circ S^{13} \circ S^{12}$$

denkleminde denk olan

$$S^{12} \circ S^{23} \circ S^{12} = S^{23} \circ S^{12} \circ S^{23}$$

denklemini sağlarsa küme-teorik Yang-Baxter denklemi için bir çözümdür.

Lemma 8.4 $(A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir olsun. $S(x, y) = (\neg y, \neg x)$ küme-teorik Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür.

Kanıt: S^{12} ve S^{23} aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$S^{12}(x, y, z) = (\neg y, \neg x, z)$$

$$S^{23}(x, y, z) = (x, \neg z, \neg y)$$

Her $(x, y, z) \in A \times A \times A$ için $S^{12} \circ S^{23} \circ S^{12} = S^{23} \circ S^{12} \circ S^{23}$ denkleminin gerçekleştiğini gösterelim. (BA2) yi kullanarak;

$$\begin{aligned} S^{12} \circ S^{23} \circ S^{12}(x, y, z) &= S^{12}(S^{23}(S^{12}(x, y, z))) \\ &= S^{12}(S^{23}(\neg y, \neg x, z)) \\ &= S^{12}(\neg y, \neg z, \neg \neg x) \\ &= S^{12}(\neg y, \neg z, x) \\ &= (\neg \neg z, \neg \neg y, x) \\ &= (z, y, x) \\ &= (z, \neg \neg y, \neg \neg x) \\ &= S^{23}(z, \neg x, \neg y) \\ &= S^{23}(\neg \neg z, \neg x, \neg y) \\ &= S^{23}(S^{12}(x, \neg z, \neg y)) \\ &= S^{23}(S^{12}(S^{23}(x, y, z))) \\ &= S^{23} \circ S^{12} \circ S^{23}(x, y, z) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S(x, y) = (\neg y, \neg x)$ temel cebirlerde küme-teorik Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür.

Lemma 8.5 $(A; \oplus, -, 0)$ bir temel cebir ve $a \in A$ olsun. $f_a : x \rightarrow x^a := -x \oplus a$ dönüşümü $[a, 1]$ aralığı üzerinde antiton involüsyondur. $S(x, y) = (y^a, x^a)$ küme-teorik Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür.

Kanıt: S^{12} ve S^{23} aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} S^{12}(x, y, z) &= (y^a, x^a, z) \\ S^{23}(x, y, z) &= (x, z^a, y^a) \end{aligned}$$

Her $(x, y, z) \in A \times A \times A$ için $S^{12} \circ S^{23} \circ S^{12} = S^{23} \circ S^{12} \circ S^{23}$ denkleminin gerçekleştiğini gösterelim.

Teorem 3.4 den $(x^a)^a = (-x \oplus a)^a = -(-x \oplus a) \oplus a = x \vee a = x$ olmasını kullanarak,

$$\begin{aligned} S^{12} \circ S^{23} \circ S^{12}(x, y, z) &= S^{12}(S^{23}(S^{12}(x, y, z))) \\ &= S^{12}(S^{23}(y^a, x^a, z)) \\ &= S^{12}(y^a, z^a, (x^a)^a) \\ &= S^{12}(y^a, z^a, x) \\ &= ((z^a)^a, (y^a)^a, x) \\ &= (z, y, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{23} \circ S^{12} \circ S^{23}(x, y, z) &= S^{23}(S^{12}(S^{23}(x, y, z))) \\ &= S^{23}(S^{12}(x, z^a, y^a)) \\ &= S^{23}((z^a)^a, x^a, y^a) \\ &= S^{23}(z, x^a, y^a) \\ &= (z, (y^a)^a, (x^a)^a) \\ &= (z, y, x) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S(x, y) = (y^a, x^a)$ temel cebirlerde küme-teorik Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür.

Lemma 8.6 $(A; \oplus, -, 0)$ bir temel cebir olsun. $S(x, y) = (x \oplus y, 0)$ küme-teorik Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür.

Kanıt: S^{12} ve S^{23} aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$S^{12}(x, y, z) = (x \oplus y, 0, z)$$

$$S^{23}(x, y, z) = (x, y \oplus z, 0)$$

Her $(x, y, z) \in A \times A \times A$ için $S^{12} \circ S^{23} \circ S^{12} = S^{23} \circ S^{12} \circ S^{23}$ denkleminin gerçeklendiğini gösterelim. Lemma 3.2 (b) yi kullanarak;

$$\begin{aligned} S^{12} \circ S^{23} \circ S^{12}(x, y, z) &= S^{12}(S^{23}(S^{12}(x, y, z))) \\ &= S^{12}(S^{23}(x \oplus y, 0, z)) \\ &= (x \oplus y, 0 \oplus z, 0) \\ &= (x \oplus y, z, 0) \\ &= (x \oplus y \oplus z, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{23} \circ S^{12} \circ S^{23}(x, y, z) &= S^{23}(S^{12}(S^{23}(x, y, z))) \\ &= S^{23}(S^{12}(x, y \oplus z, 0)) \\ &= S^{23}(x \oplus y \oplus z, 0, 0) \\ &= (x \oplus y \oplus z, 0 \oplus 0, 0) \\ &= (x \oplus y \oplus z, 0, 0) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $S(x, y) = (x \oplus y, 0)$ temel cebirlerde küme-teorik Yang-Baxter denkleminin bir çözümüdür.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbott, J. C., 1967, Semi-Boolean algebras, *Mat. Vestnik*, (4): 177-198pp.

Beran, L., 1984, *Orthomodular Lattices, Algebraic Approach*, Academia, Prague.

Birkhoff, G. And von Neumann, J., 1936, The logic of quantum mechanics, *Ann. Math.*, (37): 823-843pp.

Chajda, I., 2015, Basic algebras, logics, trends and applications, *Asian-European Journal of Mathematics*, (81): 5502040-1/5502040-46.

Chajda, I. and Emanovský, P., 2004, Bounded lattices with antitone involutions and properties of MV-algebras, *Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications*, (24): 32-42pp.

Chajda, I. and Halaš, R., 2005, An implication in orthologic, *Int. J. Theor. Phys.*, (44): 735-744pp.

Chang, C. C., 1958, Proof of an axiom of Łukasiewicz, *Trans. Amer. Math. Soc.*, (88): 467-490pp.

Chang, C. C., 1959, A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, (93): 74-90pp.

Davey, B.A and Priestley, H.A., 2002, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press.

Kolařík, M., 2013, Independence of the axiomatic systems for MV-algebras, *Math. Slovaca*, (63): 1-4pp.

Mundici, D., 1996, Uncertainty measures in MV- algebras and states of AFC^{*}-algebras, *Notas Soc. Matem. Chil*, (15): 42-54pp.

Nichita, 2015, F.F. Yang-Baxter Equations, Computational Methods and

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Applications. *Axioms*, (4): 423-435pp.



ÖZGEÇMİŞ

Tuğçe Kalkan, 05.09.1992 tarihinde Antalya’da dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Antalya’da tamamladı. 2015 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Teorik Matematik Ağırlıklı Lisans programından mezun oldu. Halen Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Tezli Yüksek Lisans Programında Yüksek Lisans öğrenimini sürdürmektedir.

