



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI  
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Enerji Sistemleri Mühendisliği Anabilim Dalı**

**GÖZENEKLİ ORTAM BOYUNCA AKAN AKIŞKANIN  
NON-LİNEER YÖRÜNGESİNİ BELİRLEMEDE FİNSLER  
GEOMETRİSİ KULLANMA**

**Derya ULUĞ**

**YÜKSEK LİSANS**

**TEZ DANIŞMANI**

**Yrd.Doç.Dr. Salim CEYHAN**

**BİLECİK, 2017**

**Ref. No: 10150966**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI  
ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü  
Enerji Sistemleri Mühendisliği Anabilim Dalı**

**GÖZENEKLİ ORTAM BOYUNCA AKAN AKIŞKANIN  
NON-LİNEER YÖRÜNGESİNİ BELİRLEMEDE FİNSLER  
GEOMETRİSİ KULLANMA**

**Derya ULUĞ  
YÜKSEK LİSANS**

**TEZ DANIŞMANI  
Yrd.Doç.Dr. Salim CEYHAN**

**BİLECİK, 2017**



**BILECİK SEYH EDEBALI  
UNİVERSİTESİ**

**Graduate School of Sciences  
Department of Department Name**

**FINSLER GEOMETRY FOR NONLINEAR PATH OF  
FLUIDS FLOW THROUGH POROUS MEDIA**

**Derya ULUĞ**

**Master Degree**

**THESIS Advisor**

**Yrd. Doç.Dr. Salim CEYHAN**

**BİLECİK, 2017**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS**

**JÜRİ ONAY FORMU**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 17/05/2017 tarih ve 26 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 06/06/2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Derya ULUĞ'un "Gözenekli Ortam Boyunca Akan Akışkanın Non-Linear Yörüngesini Belirlemede Finsler Geometrisi Kullanma" başlıklı tez çalışması Enerji Sistemleri Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği/ oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

**JÜRİ**

**ÜYE**

**(TEZ DANIŞMANI): Yrd.Doç.Dr. Salim CEYHAN**

**ÜYE : Yrd.Doç.Dr. Ömer Kadir MORGÜL**

**ÜYE : Yrd.Doç.Dr. Şenol AVCI**

**ONAY**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun  
..... tarih ve ..... sayılı kararı.

## TEŞEKKÜR

Tez çalıőmam sűresince bilgisini ve desteęini benden hiçbir zaman esirgemeyen deęerli danıőmanım Yrd. Doç. Dr. Salim CEYHAN'a ve maddi manevi her tűrlű desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme teőekkűrlerimi sunarım.



## ÖZET

Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca Darcy kanununa uyan Finsler geometrisi ile belirlenmiş akışkan akışının lineer olmayan yolları incelenmiştir. Homojen olmayan anizotropik gözenekli bir ortamdaki bir akışkan akışının doğrusal olmayan yollarını belirlemek için bir Finsler uzayındaki geodezikler kullanılır. Darcy akışkan akışının doğrultuya bağlı olması nedeniyle Riemannian ve Finsler geodezikleri arasında belirgin farklar oluşur. Fiziksel uzayda optimum olarak eğrilmiş bir yol (geodezik), homojen olmayan gözenekli ortam boyunca maksimum akışını veya en kısa taşınım süresini garanti eder. Homojen olmayan gözenekli bir ortam boyunca kararlı bir Darcy akışkan akışına uygulanan toplam direnci en aza indirmek için Fermat'ın varyasyonel prensibi kullanılır. Bu prensip yardımıyla bir akışkan akışının karşılaştığı direncin daha düşük olduğu bir bölgede bulunmasını sağlayacak şekilde bir yol çizdiği görülür. Bu yolun Finsler geometrisindeki geodeziklere karşı geldiği belirlenmiştir (Yajima & Nagahama, 2015). Bu çalışmada gözenekli ortamın hidrolik iletkenlik direncinin çeşitli fonksiyonel yapıları ele alınarak incelenmiş ve grafiksel olarak verilmiştir.

### **Anahtar Kelimeler:**

Homojen olmayan ortam boyunca Darcy akışı; Fermat varyasyonel prensibi; Finsler geometrisi.

## ABSTRACT

Nonlinear paths of the fluids flow determined by the Finsler geometry conforming to Darcy's law have been investigated through inhomogeneous porous media. Geodesics in a Finsler space are used to determine the nonlinear paths of a fluid flow in inhomogeneous anisotropic porous medium. Significant differences occur between the Riemannian and Finslerian geodesics due to the directional dependence of Darcy's flow of fluids. In an optimum path (a geodesic) in physical space, it guarantees the maximum flux or shortest transition time of the fluid through inhomogeneous porous medium. Fermat's variational principle is used to minimizing the total resistance through inhomogeneous porous medium. The fluid streamlines move between areas exposed to minimal resistance. Therefore, the path of Darcy's flows of fluid can be defined by geodesics in Finsler geometry (Yajima & Nagahamab, 2015). The various functional properties of the hydraulic conductivity of porous media are examined and given graphically. In this study, various functional structures of hydraulic resistance of the inhomogeneous porous media are examined and the results obtained are given graphically.

**Keywords:** Darcy's flow of fluids through inhomogeneous media; Fermat's variational principle; Finsler geometry.

## İÇİNDEKİLER

### JURİ ONAY SAYFASI

### TEŞEKKÜR

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IV
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	V
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI.....</b>	<b>4</b>
<b>3. GÖZENEKLİ ORTAMLAR .....</b>	<b>9</b>
3.1. Gözeneklilik ve Hidrolik İletkenlik.....	10
3.2. Hidrolik Yük.....	10
3.3. Darcy Yasası.....	11
<b>4. DARCY AKIŞININ HOMOJEN OLMAYAN ORTAM BOYUNCA FİNSLER METRİĞİ .....</b>	<b>13</b>
4.1. Homojen Olmayan Gözenekli Ortamlarda Akışın Sürekli Varyasyonel Yolları 13	
4.2. Homojen Olmayan Ortam Boyunca Darcy Akışının Finsler Metriği .....	15
4.3. Darcy Akışının Geometrik Yapısı ve Finsler Metrik Fonksiyonu .....	16
4.4. Darcy Akışının Finsler Geometrik Nesneleri Ve Akışkan Akışının Yolları....	18
<b>5. FİNSLER GEOMETRİSİ İLE ELDE EDİLEN DARCY AKIŞININ YOLLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ .....</b>	<b>21</b>
<b>6. SONUÇ VE ÖNERİLERİ.....</b>	<b>27</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>28</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. a) Elektron mikroskobunda çiçeğin taç yaprakları b) Ceviz yaprağının kesiti. .....	9
Şekil 3. 2.a) Deniz kumu b)Tahta. ....	9
Şekil 3. 3. Darcy'nin deney düzeneğinin temsili gösterimi. ....	11
Şekil 4. 1. Doğrusal olmayan Darcy akış için Fermat prensibi (Sieniutycz, 2007) ....	13
Şekil 4. 2. Darcy akışının iki boyutlu yolu $x_i = (x_1, x_2)$ koordinatları. ....	15
Şekil 5.1. Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemannyan geodezikleri (4.18) $\alpha = 1, \beta = -1$ . ....	22
Şekil 5.2. Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemannyan geodezikleri (4.18) $\alpha = 1, \beta = 0$ . ....	23
Şekil 5.3. Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemannyan geodezikleri (4.18) $\alpha = 1, \beta = 1$ . ....	24
Şekil 5.4. Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemannyan geodezikleri (4.18) $\alpha = -1, \beta = 0$ . ....	25
Şekil 5.5. Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemannyan geodezikleri (4.18) $\alpha = -1, \beta = -1$ . ....	26

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Kısaltmalar

- $\varepsilon$  : Gözeneklilik
- $V_a$  : Katı içindeki boşluk hacmi
- $V_k$  : Katı matris hacmini
- $H$  : Hidrolik yük
- $h$  : Basınç yükü
- $z$  : Bir referans düzeyine olan uzaklığını veren kot yükü
- $\Delta L$  : Akışın meydana geldiği yol
- $Q$  : Akım miktarını (debi,  $m^3/sn$ ),
- $A$  : Silindirik borunun kesit alanını ( $m^2$ ),
- $K$  : Hidrolik iletkenliği ( $m/sn$ ),
- $dh/dl$ : Hidrolik eğimi
- $V$  : Akışkanla hareket eden hacim ( $m^3$ )
- $I$  : Akışkan akımı
- $\rho$  : Hidrolik dirence karşılık gelen direnci
- $x^1$  : Dünya'nın yer yüzeyine yatay yönlendirmesi
- $x^2$  : Dünya'nın içine dikey yönlendirmesi

## 1. GİRİŞ

Evrendeki tüm canlı ve cansız varlıklar, iki nokta arasında hareket ederlerken enerji kayıplarını en aza indirgeyecek şekilde hareket ederler. Bu fizikte veya mekanikte enerjinin korunumu ilkesi olarak adlandırılır. Genellikle akışkanlar, ışınlar ve ses dalgaları, gözenekli homojen olmayan ortamlarda hareket etmektedirler ve gözenekli ortamdan kaynaklanan bir basınca veya yoğunluk farkına maruz kalırlar. Basıncın veya yoğunluk farkının en az olduğu yön doğrultusunda hareket ederler. Gözenekli ortam boyunca akışkanın basınç farkı ile akışkan akışı arasında doğrusal bir ilişki olduğunu deneysel çalışmalar sonucu modelleyen en eski yasa Henry Darcy(1856) tarafından ortaya çıkarılmıştır. Bu yasa, gözenekli ortamdaki sıvı hareketini anlamamıza yardımcı olan temel bir yasadır. Darcy Yasası, gözenekli ortamdaki akışkan akış oranının, iki kesit arasındaki hidrolik eğimle doğru orantılı olduğunu belirtmektedir.

Gözenekli ortamlarda akışkan akışı gözeneklerin şekline, tanecik çaplarına ve boşluklar arasındaki küçük akış kanallarının şekli gibi çeşitli gözeneklilik özelliklerine göre değişim göstermektedirler. Bu parametreler gözenekli ortamın akış iletkenliğinin bir ölçüsü olan geçirgenliği vermektedir. Doğal gözenekli ortamlarda katı bileşenin şekli düzgün geometriye sahip değildir. Katı kısmın hem şekli hem de gözenekli ortam içindeki dağılımı rastgeledir. Bütün bu özelliklere sahip olan gözenekli bir ortam içinde akışkanın aktığı boşlukları, onların yüzey alanlarını belirlemek ve mikroskobik boyutlarda hesap yapmak oldukça zordur (Baytaş, 2015). Gerçek gözenekli bir sistem, sonsuz sayıda sınırlı dar, düşey homojen katmanlar olarak değerlendirilir (Sieniutycz, 2007).

Darcy kanunu tarafında belirtilen akışkan akış hareketi, akışkan akış hızının hidrolik yük basıncıyla orantılı olduğunu belirtir (Yajima & Nagahamab, 2015). Akış ve hidrolik yük arasındaki orantı sabiti hidrolik iletkenliktir. Bu durumda, hidrolik iletkenlik homojen olmayan bir konuma bağlı olduğu için, akışkan akış çizgisi düz bir çizgi değildir (Yajima & Nagahamab, 2015). Hidrolik iletkenlik akışkanın değil, içinden geçtiği katı gözenekli malzemenin bir özelliğidir. Bu nedenle, farklı hidrolik iletkenlik ortamları altındaki çeşitli uygulama alanları için genelleştirilebilir bir model ortaya çıkarmak üzere çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Gözenekli ortam, sürekli ve daimî akış olarak kabul edilir (Baytaş, 2015) . Daimî ve sürekli akışta, iki bölgeyi birbirinden ayıran pürüzsüz bir ara yüzey üzerinden, hiçbir kaynağa ya da batma olmaksızın, bir akışın olduğu kabul edilmektedir. Gözenekli ortam boyunca akışkan akışın konuma bağlı bir hidrolik iletkenlik tarafından kıvrıldığını gösteren minimum süre Fermat prensibiyle formüle edilmiştir. Gözenekli ortamda akışkanın taşınması akış çizgisinin eğimi ile ilişkilendirilmektedir, bu yüzden rasyonel değişken prensibi için eğriliğin nicelik bakımından etkisine bakılmaktadır. Fermat'ın varyasyonel prensibi, fiziksel alanda optimal kavisli yolun, gözenekli ortam içerisindeki akışkanın maksimum akı veya en kısa geçiş süresini garanti edeceğini ifade eder. Homojen olmayan gözenekli bir ortamdaki bir akışkanın doğrusal olmayan kararlı yolları için minimum zamanın Fermat benzeri bir prensibi, akışkan akış çizgilerinin konuma bağlı hidrolik iletkenlik tarafından eğrildiğini göstermek için formüle edilmiştir. Sismik ışın teorisine benzer şekilde yani homojen olmayan ortamlar boyunca akışkan akışının seyahat zamanı veya akış yolunun hesaplanması Fermat'ın varyasyonel ilkesine dayanır ve çok sık başvurulan yöntemlerden biridir (Yajima & Nagahamab, 2015). Buradaki amaç, herhangi bir anda akan akışkanın en kısa geçiş süresi ve akışkanın yolunu tanımlayan yer koordinatlarının hesaplanmasıdır. Fermat'ın varyasyonel prensibine göre Darcy akışı olarak adlandırılan akışkan akışının non-lineer yörüngesi bir Finsler uzayında geodezikler ile tanımlanır. Homojen olmayan ortam için doğrultuya bağlı Darcy akışkanını Kropina metriği adı verilen özel bir Finsler metriğini verir.

Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanlar, Finsler uzayında geodezikler ile tanımlanır ve formüle edilir. Bu durumda, sapma eğrilik tansörü Darcy akışının yörüngesinin geodeziklerin sapması için Jacobi kararsız olduğunu ima eder (Yajima & Nagahamab, 2015) . Buna göre Darcy akışına doğrultu bağımlılığının etkisi Riemannian ve Finsler geodezikleri arasındaki farklarla gösterilir.

Bu çalışmada, homojen olmayan gözenekli bir ortam boyunca kararlı bir Darcy akışkan akışına uygulanan toplam direnci en aza indirmek için Fermat'ın varyasyonel prensibi kullanılmıştır. Akışkan daima yüksek basınç yükünden daha düşük basınç yükünün olduğu bir bölgeye doğru akmaktadır. Gerçekte toplam direnci minimize eden iki nokta arasında uzanan ışının nispeten büyük bir kısmı gözenekli ortamın daha az

yoğun olduğu bölgede kalır. Bu prensip yardımıyla bir akışkan akışının karşılaştığı direncin daha düşük olduğu bir bölgede bulunmasını sağlayacak şekilde bir yol çizdiği görülür. Bu yolun Finsler geometrisindeki geodeziklere karşı geldiği belirlenmiştir (Ochoa-Tapia, Valdes-Parada, & Alvarez-Ramirez, 2007). Bu çalışmanın amacı, homojen olmayan gözenekli bir ortamın hidrolik iletkenlik direncinin çeşitli fonksiyonel yapıları ele alınarak incelemek ve grafiksel olarak sunmaktır.



## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

İçinden bir akışkanı geçirebilen gözenekli bir ortamda enerji geçişi ve akışkan akışı konusu fizik, makine, otomotiv, uzay ve havacılık, malzeme bilimi gibi birçok uygulama alanlarını ilgilendirmektedir. Gözenekli ortamlar teknolojik gelişmeler ile birlikte bilim ve tıpta karşımıza çıktığı gibi günlük hayatımızın her sahasında da karşılaşmaktayız. Gözenekli ortam modüllerine, doğal gözenekli ortamlar olarak; deniz kumu, akciğerlerimizden gaz geçişi, petrol türevleri ya da sanayi atıklarının toprak tarafından emilmesi, uzay ve hava araçlarında aerodinamik yapı ile ısınmanın önüne geçilmesi, damarlarda kan akışı, jeotermal kaynaklardaki tuzlu suyun dolaşması gibi birçok örnek verilebilir. Gözenekli ortamda ölçülemeyen akış ve ortam özelliklerine yönelik çalışmalar mühendislik ve bilimin çok değişik alanlarını ilgilendirmektedir. Gözenekli ortamlarda akış problemlerine uygun olabilecek matematiksel modelin bulunması için hala çalışmalara devam edilmektedir.

Çoğu gözenekli katılar homojen olmayan ve anizotropiktir. İçinden akışkan akışının geçtiği gözenekli katılar gözeneklilik ve geçirgenlik bakımından çok farklı özellikler gösterebilmektedirler. Srinivasan (2016) ve arkadaşları tarafından yapılan makalede, ortamın homojen olmadığı, viskozite ve sürtünmenin basınca bağlı olduğunu kabul edilmiştir. Daha sonra, genelleştirilmiş Darcy ve Brinkman modelleri de dikkate alınarak, Srinivasan (2016) ve arkadaşları yüksek basınç gradyanlarından dolayı homojen olmayan gözenekli ortam boyunca iki farklı geçirgenlik dağılımı için dikdörtgen plaka içerisindeki akışkan akışını araştırmışlardır. Darcy ve Brinkman modellerini kullanan çözümlerin homojen olmamasına, yani geçirgenliğe ve dolayısıyla Darcy sayısına bağlı olarak ya büyük ölçüde farklı ya da hemen hemen aynı olabileceğini gözlemlemişlerdir (Srinivasan & Rajagopal, 2016) .

Nichele (2015) ve arkadaşları, kayalardaki petrol akış simülasyonları için Darcy-Brinkman denklemlerini araştırmışlardır. Darcy-Brinkman denklemi, petrol emilim problemlerinin yakınlık koşullarını da değerlendirmişlerdir. Sonuçlarda Darcy formülasyonunun Darcy-Brinkman denklemine göre daha sade ve kesinlik açısından tercih edildiğini göstermişlerdir (Nichele & Teixeira, 2015).

Gözenekli ortamdaki akışları modellemek için farklı yasalar kullanılmıştır. Bu akış modellerindeki bir diğer çalışma ise Marušić-Paloka (2012) ve arkadaşları tarafından, bir çatlakta oluşan akışın Brinkman ve Darcy yasalarına göre karşılaştırılmasıdır. Yaptıkları çalışmaların sonuçları incelendiğinde Brinkman yasasının kullanımını haklı çıkardığını belirtmişlerdir (Marušić-Paloka, Pazčanin, & Marušić, 2012).

Yajima (2011), bir sismik ışın yolu için elastik sabitlerin diferansiyel geometrik ifadeleri, Finsler geometrisine dayanarak zayıf anizotropik ortam için incelemiştir. m-root metriğindeki Finsler parametrelerini faz hız yüzeylerinden hesaplamışlardır. Dalga cephesinden gelen eliptik farklar Finsler parametreleri ile ifade edilebilir. Finsler parametreleri ile zayıf anizotropi parametrelerinden oluşan elastik sabitleri arasında bir korelasyon olduğunu bulunmuştur. Özellikle, Finsler parametresinin geometrik bir durumu, zayıf anizotropik parametrelerde bir sınırlandırma sağladığı bulunmuştur. (Yajima, Yamasakib, & Nagahamac, Finsler metric and elastic constants for weak anisotropic media, 2011).

Yeraltı sularının yapay beslenmesine farklı bir yaklaşım getiren Demir (2011), yüzey altı yöntemlerinden biri olan beslenme kuyularını kullanmıştır. Doğrusal Darcy Kanunu ve Kütle Korunumu İlkesi kullanılarak, belirli kabuller ve sınır şartlarında akiferlerde sürekli ve süreksiz besleme durumları için boyutsuz birer eşitlik elde edilmiştir. Besleme dönüşümü-zaman grafikleri çıkartılmıştır. Bu grafikler yardımıyla basınçlı ve basınçsız akiferlerin yapay beslenmesi kıyaslanmıştır (Demir, 2011).

Yajima ve arkadaşları (2009), anizotropik ortamdaki sismik ışın yolunun Finsler geometrisi ile belirlemiştir. Anizotropik homojen olmayan ortamdaki sismik ışın teorisi, Finsler geometrisi olarak adlandırılan lineer olmayan geometri temel alınarak incelenmiştir. İki boyutlu ışın yolu için, anizotropik ortamdaki sismik dalga cephesi, Finsler parametreleri ile geometrik olarak ifade edilmiştir. Gerçek bir kayanın elastikiyet(geçirgenlik) sabitlerini kullanarak, Finsler parametreleri kaya içinde yayılım gösteren bir dalga öncüsü olarak tahmin edilmektedir. Sonuç olarak, anizotropik parametreler, dalga cephesi şeklinin bir daire değil, bir üste doğru olarak adlandırılan dışbükey bir eğriyle ifade edildiğini gösterir. Gerçek kayanın pürüzlülük parametresi, dalga kenarı şeklinin bir fraktal eğriyle ifade edildiğini gösterir. Dalga önünün ve ışının

bir diklik yönünden, anizotropik ortamdaki sismik dalga cephesi ışın yolunun fraktal yapısıyla ilgili olduğu açıklanmıştır (Yajima & Nagahama, 2009).

Yajima ve arkadaşları (2007), Kawaguchi uzayına dayalı olarak, bir anizotropik ortamda sismik bir ışın yolu boyunca Zermelo'nun koşulları altında bir kırılmaya karşılık geldiğini açıklamışlardır. Kawaguchi uzayındaki özel bir fonksiyonu da bazı Finsler metriği ile (m-root metriği veya 1-form metriği) elde edilmiştir. Sismik ışının değişken bir problem gibi düşünüldüğünde, Snell yasası Euler vektöründen türetilmiş ve sismik dalga boyu, sismik Finsler metriği tarafından m-değerleri ile sınıflandırılmıştır. Ayrıca, Kawaguchi uzayı ile bir başka ışın teorisi arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır (Yajima & Nagahama, "Kawaguchispace, Zermelo's condition and seismic ray path Nonlinear Analysis, 2007).

Ochoa-Tapia ve arkadaşları (2007), uzaysal ortalama yöntemleri kullanılarak, homojen olmayan gözenekli ortamdaki kayma gerilmesini tanımlanmasında Newton'un viskozite yasasından Darcy benzer şekilde bir yasa türetmişlerdir. Süreklilik ve momentum denklemlerinin ortalaması alınarak Darcy yasasını üç denklem ile katkı sağlanmıştır: (i) klasik Darcy yasasına benzer şekilde, mikroskobik basınç gradyanlarına ve yer çekim kuvvetlerine bağlı bir terim; (ii) uzaysal porozite gradiyentleri tarafından indüklenen kesitli konvektif bir terim; (iii) kesirli bir Brinkman tipi düzeltme. Bu üç durum içinde, karşılık gelen geçirgenlik tensörleri temsil eden hücre içindeki bir kesirli sınır değer problemleri hesaplanmıştır (Ochoa-Tapia, Valdes-Parada, & Alvarez-Ramirez, 2007).

Darcy Kanununa yeni bir bakış açısı getiren Altunkaynak ve arkadaşları (2006), yeraltı suyu akım hızını, doğrusal olmayan dinamik iletkenlik parametresinin mesafesi ile değişimi şeklinde tanımlamıştır. Dinamik iletkenlik, hidrolik yük ile hidrolik iletkenliğin çarpımı olarak tanımlanır. Hidrolik eğim sıfırdan farklı olması durumunda yeraltı suyu akış hareketi oluşmayabilir. Yeraltı suyunun hareketinin oluşabilmesi için hidrolik eğimin belirli bir eşik değeri aşması gerektiğini matematiksel olarak ispat edilmiştir. Yeraltı suyu akım hızının hesaplanmasında hidrolik iletkenlik ile hidrolik eğim aynı anda değişmesi durumunda bu hesaplamanın mümkün olduğunu tanımlamıştır (Altunkaynak & Şen , 2006).

Finsler geometrisinin, anizotropik homojen olmayan ortamdaki sismik ışın teorisinin çalışması için verimli bir platform olduğu atıfta buldukları çalışmalardan referans alınmıştır. Bucatarua ve arkadaşları (2005), referans aldıkları çalışmalara istinaden, Finsler metriğinin, anizotropik homojen olmayan ortamdaki ışınlar ve dalga cepheleri için en optimal sonucu oluşturduğunu göstermişleridir. Elastik anizotropik homojen olmayan ortamlarda, ışınların ve dalga yüzeylerinin, faz-hız fonksiyonu tarafından indüklenen metriğe göre birbirine dik olduğunu kanıtlamışlardır. Elastik izotropik homojen olmayan ortamdaki ışınların ve dalga cephelerinin standart diklik özelliği bu formülasyona özel bir örnekle açıklanmıştır (Bucatarua & Slawinska, 2005).

Gürarlan (2004), iki boyutlu yeraltı suyu akımının modellenmesinde sonlu farklar hesap şeması kullanarak çözmüştür. Belirli sınır koşulları altında, değişken zemin özelliklerini içeren zamana bağlı kısmi diferansiyel denklemler, “ardışık aşırı rahatlama” tekniği kullanılarak çözülmüştür. Bazı örnekler geliştirilen çözüm modeli ile çözülmüş ve hidrolik yük değerleri açısından irdelenmiştir.

Bona ve arkadaşları (2002), Fermat'ın “hareket süresi” ilkesine dayanarak, mükemmel elastikiyet şartına göre bir sinyalin hızının belirlenmesinde yalnızca yönünün ve konumunun bir fonksiyonu olduğu incelemiştir. Yatay düzgün ve keyfi olarak anizotropik ortamda parametrik eğriler olarak ışın yollarının genel bir formülasyonu, ışın yollarını ve varış sürelerini hesaplamak için kullanmışlardır. Ortamın anizotropisi, boyutu, yönü ve şekli dikey ekseninde noktadan noktaya değişebilen temel dalga cepheleri ile tanımlamışlardır. Genel formülasyon örnek olarak yatay olarak üniform, eliptik olarak anizotropik bir ortam ile düzenlenmiştir.

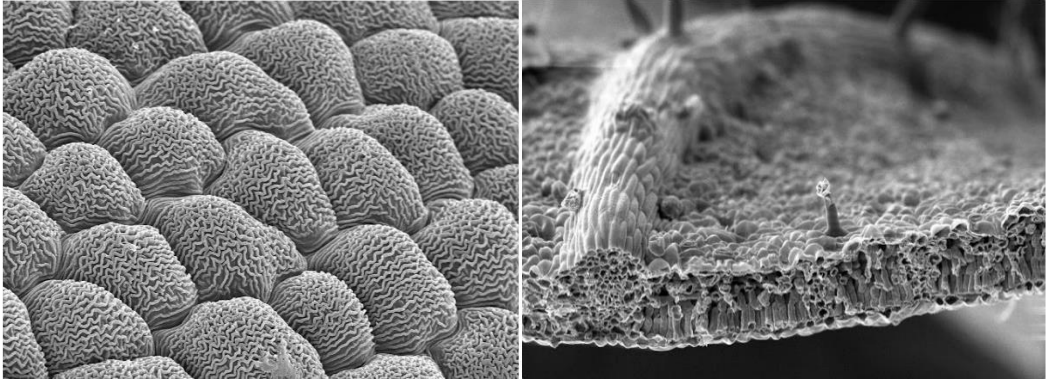
Sieniutycz (2000), ısı akışı için Fermat prensibine bir dinamik programlama yaklaşımı ile incelemiştir. Isı akışının sabit olduğu durumlarda, Fermat varyasyonel prensibinin doğrusal olmayan ısı iletiminin de yeterli olabileceği bu çalışmada araştırılmıştır (Sieniutycz, 2000). Fiziksel bir teorisin köklerini gözden geçirmişler ve teorisin minimum entropi üretiminin bir sonucu olarak ortaya çıktığı, termodinamik tersinmezlik ile tutarlı bir biçime dönüştürülmüştür. Minimum direnci açıklayan potansiyel fonksiyonlar, analitik ve sayısal yöntemlerle elde etmişlerdir. Termal ve optik ışınların yayılımı arasındaki farklar tartışılmış ve en basit optik ışınların

Riemmanyen geometrisi ile tanımlanabilmesine karşın, termal ışınlar için geçerli olan Finsler geometrisi olduğunu ortaya koymuşlardır (Sieniutycz S., 2000).



### 3. GÖZENEKLİ ORTAMLAR

Günlük hayatımızda, teknolojiye ve doğada her yerde karşılaşılan bir malzemeye gözenekli ortam olabilmesi için malzeme kendi boyutları ile karşılaştırıldığında içerisinde çok küçük ve birbiriyle bağlantılı boşluklar içermesi şeklinde tanımlanabilmektedir. En genel anlamıyla katı matris içinde bulunan boşluklar oluşturduğu ortama bir gözenekli ortam olarak ifade edilir. Bu katı matris içinde düzenli veya düzensiz bir dağılım gösteren boşluklardan geçen akışkan akışı, hücre zarındaki yayılım gibi mikroskobik düzeydeki akışkan akışını, sünger, kumaş parçası bitki hücre ve dokuları Şekil 3.1’de doğadaki örneklerinden olan deniz kumunu ve odun Şekil 3.2’de ya da daha büyük ölçeklerdeki petrol sahalarındaki petrol gibi bir çok örnek oluşturur. Akışkan (hava su vb. gibi) katı malzemenin bir ucundan girip öbür ucundan çıkabilmelidir. Ortam içinde birim zamanda bir akışkan akışı olmalıdır.



a)

b)

**Şekil 3.1.** a) Elektron mikroskobunda çiçeğin taç yaprakları b) Ceviz yaprağının kesiti ([https://ziraatyapma.blogspot.com.tr/2012\\_12\\_01\\_archive.html](https://ziraatyapma.blogspot.com.tr/2012_12_01_archive.html), 2017).



a)

b)

**Şekil 3. 2.a)** Deniz kumu b)Tahta (<https://it.wikipedia.org/wiki/Truciolato>, 2017).

Boşlukların büyüklükleri dikkate alındığında moleküler ölçekte olduğu gibi kilometrelerce büyüklükteki bir mağara kadar da olabilmektedirler. Boşlukların boyutları küçüldükçe akışkan ve katı matris arasındaki kuvvet daha önemli hale gelmektedir.

### 3.1. Gözeneklilik ve Hidrolik İletkenlik

Gözenekli ortamlarda boşluklar homojen veya homojen olmayan şekilde dağılmaktadırlar. Doğal gözenekli ortam içinde bulunan boşlukların büyük bir kısmı düzensiz ve dağınık bir yapı sergilemektedirler. Gözenekli ortamın, mikroskobik özellikleri gözenek yapısının değişkenliğinin düzensizliğinden ve rastgele oluşundan etkilenir. Gözeneklilik, ortamdaki boşluk hacminin malzemenin toplam hacmine oranı olarak bilinir. Gözeneklilik, “  $\varepsilon$  ” şeklinde gösterilip aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\varepsilon = \frac{V_a}{V_a + V_k} \quad (3.1)$$

$V_a$ , katı içindeki boşluk hacmi ve  $V_k$  ise katı matris hacmini göstermektedir (Baytaş, 2015). En önemli gözenek yapısı değişkenleri gözeneklilik, geçirgenlik ve akış yatağı olarak bilinir.

Geçirgenlik (hidrolik iletkenlik),  $K$ , gözenekli ortamda içerisinden gaz, hava, sıvı, akım vb. akışkanların geçebilmesine karşı elverişliliğinin bir ölçüsü veya malzeme içinden akışkanın geçme kolaylığının bir ölçüsüdür. Gözenekli ortamlardaki akışkan akışını geçirebilme veya iletebilme yeteneği ile ölçülebilmekte ve ortamı oluşturan tanelerin çapı, tane şekli ve dizilişi gibi temel özelliklere bağlı olan geçirgenlik ile tanımlanmaktadır. Geçirgenlik akışkanın özelliği değil içinden akışkan geçen bir gözenekli ortamın geometrisine bağlıdır (Kulga, 2010). Geçirgenlik gözenekli ortamın kütle geçiş özelliği ile ifade edilirken, gözeneklilik ve bu durumda makroskobik akış yatağı yapısı gözenekli ortamın özelliğini temsil eder.

### 3.2. Hidrolik Yük

Hidrolik yük ( $H$ ), bir piyezometrenin tabanındaki noktanın üzerinde oluşan pozitif basınç yükü ( $\square$ ) ile bu noktanın belirli bir referans düzeyine olan uzaklığını veren kot yükünün ( $z$ ) toplamına eşittir ( $H = \square + z$ ) (Gültekin, 2015).



A ve B seviyeleri arasındaki fark  $\Delta h$  ise zeminin giriş - C ve çıkış - D noktaları arasındaki hidrolik eğim  $\Delta h/\Delta L$  olarak ifade edilebilir. Hidrolik gradyan, iki nokta arasındaki enerji farkı ile ilgilidir. Gözenekli ortamda akışkan akışı sırasında en fazla enerji kaybı akışkanın gözenekli ortamlarla veya katı matris sürtünmesi sonucu meydana gelir (Sieniutycz, 2007).

Şekil 3.3. yardımı ile Darcy denkleminin ilk hali denklem 3.2'deki gibi yazılabilir.

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dl} \quad (3.2)$$

Burada  $Q$ , akım miktarını (debi,  $m^3/sn$ ),  $A$ , silindirik borunun kesit alanını ( $m^2$ ),  $K$ , hidrolik iletkenliği ( $m/sn$ ) ve  $dh/dl$ , hidrolik eğimi vermektedir.

Darcy yaptığı çalışma ile gözenekli bir malzemedeki akışkan akışının hidrolik gradyanı ile gözenekli ortamı tanımlayan hidrolik iletkenliğe ( $K$ ) bağlı olduğunu ortaya koymuştur. Darcy yasası, sızıntı ivmelenmesi ve akışın en uygun taşınımını içermektedir. Bu nedenden dolayı sürtünme ihmal edilmektedir (Sieniutycz, 2007). Mühendislik uygulamalarında borulardaki hidrolik yük kaybını hacimsel akış oranı cinsinden açıklamak için Darcy yasası çok tercih edilir.



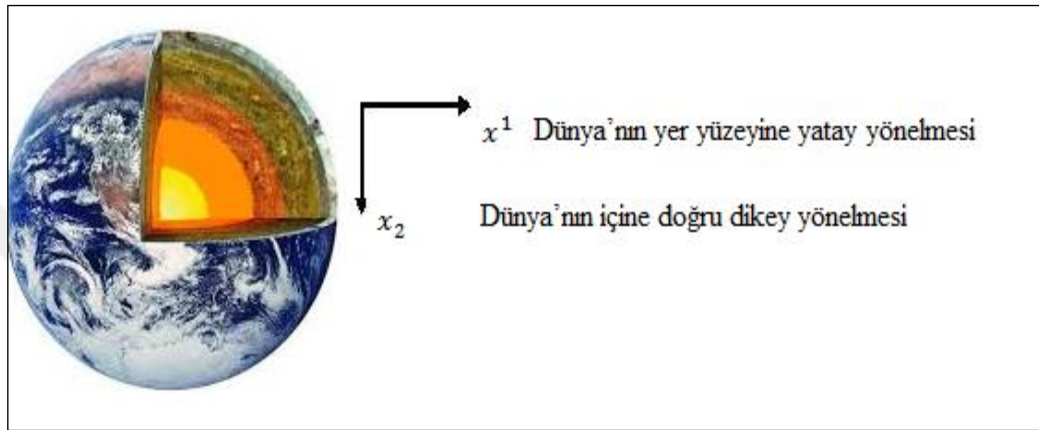
Homojen olmayan gözenekli bir ortamdaki akışkan akışının doğrusal olmayan kararlı yolları için minimum sürede yolunu tamamlaması akışkan akış çizgilerinin konumuna bağlı hidrolik iletkenlik tarafından eğildiğini göstermektedir ve Fermat benzeri bir prensip ile formüle edilmesine olanak sağlamıştır. Bu prensip, Darcy'nin akışkan akışlarındaki kararlı nonlineer yörüngelerinin optimal yolunu açıklar. Bu prensibe göre, homojen olmayan ortamlarda doğrusal olmayan akışın yörüngesi, yatay düzgün ve keyfi parametrik eğriler olan akış yollarını ve varış sürelerini hesaplamakta kullanılan genel bir fonksiyondur. Bununla birlikte, gözenekli ortamdan azami akışkan akışına neden olan ve bu ortamdaki akışın kalma süresini mümkün olduğunca kısa tutan yolun minimum dirence sahip olması sağlanmış olur.

Ortamın anizotropisi metrik tansörün yöne bağımlılığıyla uyumludur. Bu Finsler uzayı adı verilen Riemyen olmayan anizotropik ortam için ışın teorisinin kullanılabilmesi akışkan teorisinde de kullanılabilmesi anlamına gelir. Öklidyen olmayan ışın teorisi için kristaller ve kayalar gibi anizotropik ortamlar ışın yörüngesinin bir geometrik özelliğiyle bağlantılıdır (Yajima & Nagahamab, 2015).

Ortamın anizotropik olması durumunda dikey eksenindeki boyutu, yönü ve şekli noktadan noktaya değişebilen temel dalga cepheleleri ile tanımlanır. Şekil 4.1'de sıvı kütle akışına dik kesitiyle  $dl$  uzunluğu boyunca aktarılır. Dikey kesit alanı,  $l$  ile değişebilen  $A$  alanına sahiptir, bu hacim farkı  $dV = A dl$  şeklinde gösterilmektedir. Burada  $V$  hacmi, akışkanla hareket eden hacim üzerine ilave edilmektedir, bu durumda  $x$  ve  $y$  sıvının akışı ve Lagrange koordinatları olup, uzayda sabit bir alana akmak yerine akışkanın hareketine ilave yapılır. Akışkan akımı  $I = dQ/dt$ 'yi, sistem tarafından birim zaman başına aktarılan akışkanın miktarı (kütle veya hacim) olarak verilmektedir. Homojen olmayan ortam boyunca akım  $I$  korunan bir özellik kabul edilmiştir ( $I = I_1 = I_2$ ). Sistemin kararlı akış koşullarında olduğu yani, debinin zamanla değişmediği kabul edilir. Ayrıca burada hidrolik dirence karşılık gelen  $\rho$  direnci kullanılmaktadır.

## 4.2. Homojen Olmayan Ortam Boyunca Darcy Akışının Finsler Metriği

Bu çalışmada, homojen olmayan bir gözenekli ortam boyunca akan Darcy akışının iki boyutlu yolu incelendi.  $(x^i) = (x^1, x^2)$  koordinatları dünyanın iç kısmının bir kesit alanının yerel koordinatları olarak alındı. Burada,  $x^1$ , dünyanın yüzeyine yatay yönelimi ve  $x^2$ , dünyanın içine doğru dikey yönelimi gösteren koordinatları Şekil 4.2'de tanımlanmaktadır.



Şekil 4. 2. Darcy akışının iki boyutlu yolu  $(\mathbf{x}^i) = (x^1, x^2)$  koordinatları.

Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanın yolu, iki sabit  $x_a$  ve  $x_b$  noktaları arasındaki toplam direnci minimuma indirgeyen Fermat'ın varyasyonel prensibi kullanılarak ve  $p = l^2 \rho / A$  alınarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir

$$\delta J = \delta \int_{x_a}^{x_b} p dl = \delta \int_{x_a}^{x_b} \frac{\rho l^2}{A} dl = 0. \quad (4.1)$$

Burada  $A$ ,  $l$  ve  $I$ , sırasıyla, akışa dik olan akış tüpünün değişken kesit alanı, akışın uzunluğu ve bir sistemden geçen toplam akışan akısıdır.  $\rho$ , Darcy kanunu tarafından verilen  $k$  iletkenliğinin çarpmaya göre tersi veya direncidir (Yajima & Nagahamab, 2015):

$$v^i = k(x^j) \frac{\partial u}{\partial x^i} \quad (4.2)$$

Burada  $v^i$  akışkanın akış hızı ve  $u = H$  hidrolik yüküdür (hareket eden suyun hızı ile akımın meydana geldiği iki nokta arasındaki enerji seviyesi farkıdır).  $k$ :

geçirgenlik, gözenekli ortamın akış iletkenliği/direncin bir ölçüsüdür. Denklem (3.2)'de ilk hali verilen Darcy akışı, Sieniutycz (2007)'nin yaptığı çalışmada iki veya daha yüksek boyutlu akışkan akışı için, denklem (4.1) ve (4.2) ile tanımlanmıştır.  $\rho$ , genel olarak hem  $x^1$  hem de  $x^2$ 'nin bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir:  $\rho(x^i) = (x^1, x^2)$ .

### 4.3. Darcy Akışının Geometrik Yapısı ve Finsler Metrik Fonksiyonu

Yukarıdaki koşullara dayanarak, bir Darcy akışının Finsler metriği aşağıdaki adımlar takip edilerek türetilmiştir (Yajima & Nagahamab, 2015). Yerel koordinatları  $(x^i) = (x^1, x^2)$  olan M, Dünya'nın iç kesitine karşılık gelen iki boyutlu bir manifold (çok katmanlı) olmak üzere  $(x^i, y^i)$  yerel koordinatları TM teğet demeti üzerinde tanımlanmıştır. Burada  $y^i = dx^i/dt$  ve  $t$  zamandır.  $dl = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} dt$  eşitliği (4.1) varyasyonel denklemde yerine yazıldığında:

$$\delta J = \delta \int_{t_a}^{t_b} \frac{l^2 \rho x^i}{A} \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} dt = 0. \quad (4.3)$$

Fermat'ın varyasyonel prensibi Darcy akışkan akışının yolunun şeklini belirler. Darcy akışının yolu ile yatay  $x^1$  eksenindeki açı  $\theta$  ile verilirse:

$$y' \equiv \tan \theta = \frac{dx^2}{dx^1} = \frac{y^2}{y^1}, \quad (4.4)$$

$$\cos \theta = \frac{dx^1}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{dx^2}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}}. \quad (4.5)$$

Akı tüpünün  $x^2$  ekseninde sabit alanı  $A_0$  ile gösterildiğinde, akışa dikey değişken alan,  $A = A_0 \cos \theta$  ile ifade edilir. Bu durumda, (4.5)'ten  $A$  kesit alanının akışkanın akış yönüne bağlı olduğu görülür ve

$$A(y^i) = \frac{A_0 y^1}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (4.6)'nın  $y^i$ 'ye bağımlılığı, Darcy akışının Finsler geometrisi ile formüle edilebileceğini gösterir (Sieniutycz, 2007). Denklem (4.3) ve (4.6)'dan Darcy akışının temel fonksiyonu denklem (4.7) ile aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$L(x^i, y^i) = \frac{I^2 \rho(x^i)}{A_0} \left\{ \frac{(y^1)^2 + (y^2)^2}{y^1} \right\}. \quad (4.7)$$

Denklem (4.7) ile verilen Finsler metriği  $y^i$ 'ye göre 1. dereceden homojendir. Dolayısıyla denklem (4.7), Finsler uzayındaki temel fonksiyonun homojenlik koşulunu karşılamaktadır. (Sieniutycz, 2007)'e göre korunumlu akı düşünüldüğünde akım yani,  $I$  sabittir:  $I=I_0$ , (4.7)'deki Finsler fonksiyonu denklem (4.8)'deki gibi yeniden yazılırsa:

$$L(x^i, y^i) = K_0 \rho(x^i) \left\{ \frac{(y^1)^2 + (y^2)^2}{y^1} \right\}. \quad (4.8)$$

Burada  $K_0 = I_0^2 / A_0$  olarak yazılmıştır. Denklem (4.8)'de Finsler fonksiyonunun bir Kropina metriği olduğu görülmektedir:

$$L(x^i, y^i) = \frac{\alpha^2}{\beta}. \quad (4.9)$$

Burada,  $\alpha = (\alpha_{ij}(x^k)y^i y^j)^{1/2}$  Riemanniyen metrik ve  $\beta = b_i(x^j)y^i$ , 1-formdur. Denklem (4.9)'da Finsler fonksiyonu (4.8)'de yerine koyarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\alpha_{ij} = K_0 \rho(x^k) \delta_{ij}, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 0. \quad (4.10)$$

İki boyutlu Minkowski uzayı metrik fonksiyonu ele alındığında:

$$\bar{L}(y^i) = K_0 \left\{ \frac{(y^1)^2 + (y^2)^2}{y^1} \right\}. \quad (4.11)$$

Daha sonra Finsler fonksiyonu denklem (4.8)'de yeniden yazılabilir:

$$L = \rho(x^i) \bar{L}. \quad (4.12)$$

Bu çalışmada, direnç ( $\rho$ ),  $\rho(x^1) = e^{\alpha x^1 + \beta x^2}$  olarak kabul edilir. Bu durumda Darcy akışının Finsler fonksiyonu,  $\bar{L}$  (4.11)'in konform dönüşümüyle elde edilir:

$$L(x^i, y^i) = e^{\alpha x^1 + \beta x^2} \left\{ K_0 \frac{(y^1)^2 + (y^2)^2}{y^1} \right\}. \quad (4.13)$$

#### 4.4. Darcy Akışının Finsler Geometrik Nesneleri Ve Akışkan Akışımın Yolları

Darcy akışımın Kropina metriğinin geometrik nesnelere ele alalım. İlk önce, metrik tensör tanımından

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial y^i \partial y^j}, \quad (4.14)$$

$$g_{ij} = (K_0 \rho)^2 \begin{bmatrix} 1 + 3y'^2 & 4y'^3 \\ -4y'^3 & 2(1 + 3y'^2) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

elde ederiz.

Metrik  $g = \det(g_{ij})$ 'in belirleyicisi,

$$g_{ij} = 2(K_0 \rho)^4 (1 + y'^2)^3 \quad (4.16)$$

dolayısıyla, Darcy akışımın metrik tensörü pozitif tanımlıdır. Buna göre aşağıdaki notasyonu kullanarak:

$$\eta(y') = \frac{1}{(1 + y'^2)^3}. \quad (4.17)$$

Akı tüpünün kesit alanı  $A$  değişmezse, yani  $A$  sabitse, metrik tensör Riemannian forma indirgenir, yani metrik tensör yalnız manifold üzerindeki noktaya bağlıdır,

$$g_{ij} = g_{ij}(x^k):$$

$$g_{ij} = (\tilde{K}_0 \rho)^2 \delta_{ij}, \quad (4.18)$$

burada,  $\tilde{K} = I_0^2/A$  sabittir. Diğ er bir Finsler geometrik nesnesi, Cartan tensörünü ele aldığımızda:

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} \quad (4.19)$$

Darcy akışı için yerel katsayılar  $C_{ijk}$ 'dir,

$$\begin{aligned} C_{111} &= -6(K_0\rho)^2 \frac{y^4}{y^1}, & C_{112} &= C_{121} = C_{211} = -\frac{1}{y} C_{111}, \\ C_{122} &= C_{212} = C_{221} = -\frac{1}{y^2} C_{111}, & C_{222} &= -\frac{1}{y^3} C_{111} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ayrıca, konneksiyon katsayıları tanımlanırsa,

$$\gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \quad (4.21)$$

Denklem (4.15) kullanılarak iki boyutlu Finsler uzayı için konneksiyon katsayıları:

$$\gamma_{11}^1 = \eta(y') [\omega(y') \tilde{\rho}_{,1} - 2y'^3 (1 + 3y'^4) \tilde{\rho}_{,2}], \quad (4.22)$$

$$\gamma_{12}^1 = \gamma_{21}^1 = q(y') [4(y'^3 \tilde{\rho}_{,1} + (1 + 3y'^4) \tilde{\rho}_{,2})], \quad (4.23)$$

$$\gamma_{22}^1 = -2q(y') [(1 + 3y'^4) \tilde{\rho}_{,1} + 2y'^3 \tilde{\rho}_{,2}], \quad (4.24)$$

$$\gamma_{11}^2 = r(y') \gamma_{12}^1, \quad (4.25)$$

$$\gamma_{12}^2 = \gamma_{21}^2 = r(y') \gamma_{22}^1, \quad (4.26)$$

$$\gamma_{22}^2 = \eta(y') [-4y'^3 (1 + 3y'^2) \tilde{\rho}_{,1} + \omega(y') \tilde{\rho}_{,2}]. \quad (4.27)$$

Bu işlemler yapıldığında,  $\omega(y') = 1 + 3y'^2 + 3y'^4 - 7y'^6$ ,

$$q(y') = \frac{1+3y'^2}{(1+y'^2)^3}, \quad r(y') = -\frac{1+3y'^4}{2(1+3y'^2)}, \quad (4.28)$$

ve

$$\tilde{\rho}_{,i} = \frac{\partial \log \rho}{\partial x^i}. \quad (4.29)$$

Konneksiyon katsayılarının  $K_0$ 'a bağımlı olmadığı görülebilir. Daha sonra, geodezik denklemler

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i(x^j, y^j) = 0, \quad (4.30)$$

ile ifade edilir.  $G^i = \gamma_{jk}^i y^j y^k / 2$ , denklem (4.22) ile (4.27) arasında yazıldığında, Darcy akış geodezikleri aşağıdaki fonksiyonlar gibi tanımlanır:

$$G^1 = \frac{1}{2(1+y^2)} [(1-y^2)\tilde{\rho}_{,1} + 2y^2\tilde{\rho}_{,2}](y^1)^2, \quad (4.31)$$

$$G^2 = \frac{1}{4(1+y^2)} [(4y')\tilde{\rho}_{,1} + (-1 + 4y^2 + y'^4)\tilde{\rho}_{,2}](y^1)^2. \quad (4.32)$$

Sieniutycz (2007)'nin çalışmasına dayanarak, direnç değişiminin  $\rho$  üstel bir formda verildiği incelenmiştir:  $\rho(x^1) = e^{\alpha x^1}$ . Bu çalışmada, direnç değişiminin  $\rho$  üstel formu:  $\rho(x^1, x^2) = e^{\alpha x^1 + \beta x^2}$  şeklinde ele alınmıştır. Daha sonra, denklem (4.31) ve (4.32)'nin yalnızca  $y^i$ 'ye bağlı olduğu belirlenmiştir. Darcy akışının geodezik olarak akışın yolu Şekil 4.1'de gösterilmektedir. Sieniutycz (2007)'nin çalışmasında, başlangıç koşulları, sırasıyla,  $x^1(0) = x^2(0) = 0$ ,  $y^1(0) = 1$ ,  $y^2(0) = -2$  ve  $x^1(0) = x^2(0) = 0$ ,  $y^1(0) = 1$ ,  $y^2(0) = -1$  olarak alınmış, başlangıç koşullarından ilki  $\alpha = 1$  durumunda direncin monoton olarak arttığı ve ikinci başlangıç koşulu  $\alpha = -1$  durumun da ise direncin monoton olarak azaldığı verilmiştir. Her iki durumda da Finsler ve Riemaniyen geodezikler arasındaki farkın zamanla büyüdüğü gösterilmiştir.

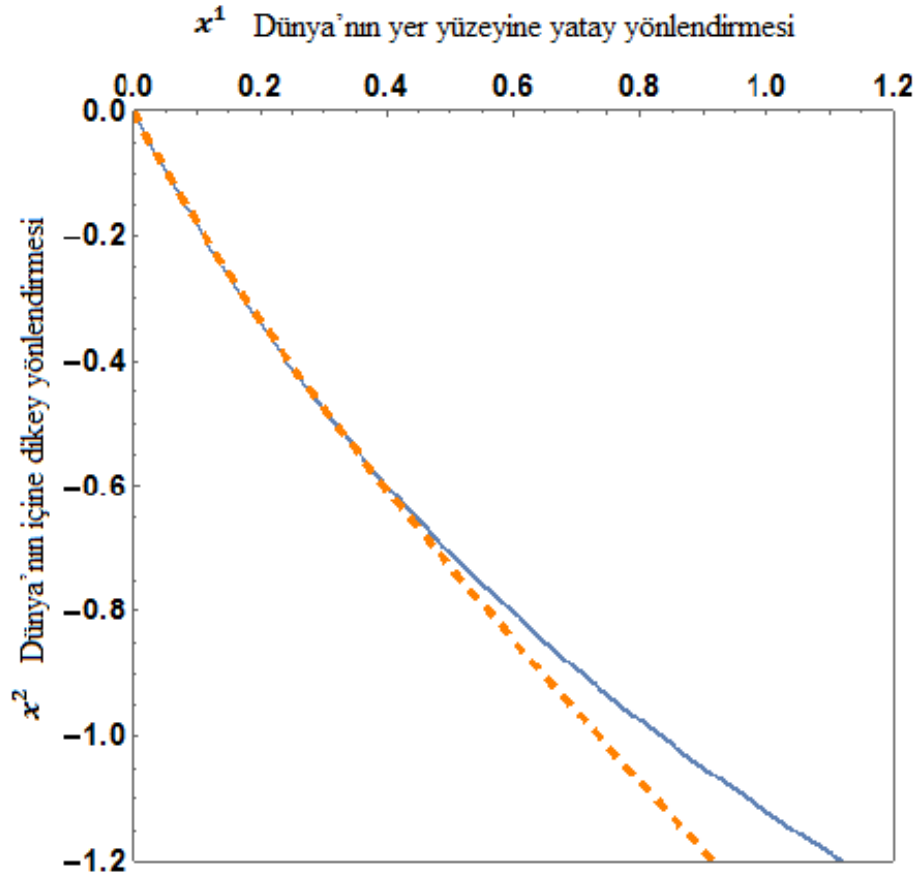
## 5. FINSLER GEOMETRİSİ İLE ELDE EDİLEN DARCY AKIŞININ YOLLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ

Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanın kütle akısının düzgün olmayan bir dağılım göstermesine, hidrolik direnç ve gözenekliliğinin yerel değişimlerinin neden olduğunu göstermektedir (Yajima & Nagahamab, 2015). Akışkanlar daima yüksek basınç yükünden daha düşük basınç yükünün olduğu bir bölgeye doğru akmaktadır. Diğer bir deyişle, homojen olmayan gözenekli ortamlarda akış yolu, şeklinin daha düşük dirençli bölgelerdeki akışkanın en uzun kalış süresine karşılık gelen şeklini sağlayan yönde kıvrılmasına neden olur.

Homojen olmayan gözenekli bir ortam boyunca kararlı bir Darcy akışkan akışına uygulanan toplam direnci en aza indirmek için Fermat'ın varyasyonel prensibi kullanılmıştır (Yajima & Nagahamab, 2015). Darcy akışının ve sismik ışın yörüngesinin varyasyonel prensibi arasındaki ilişki olduğu görülebilir.

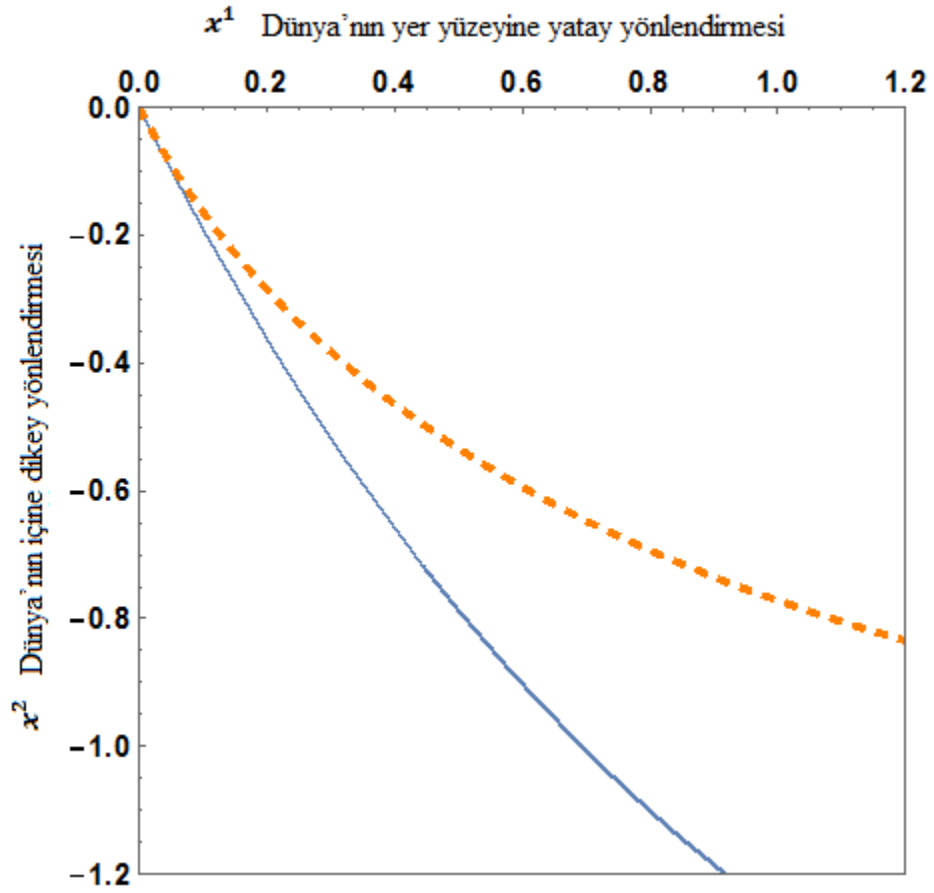
Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanlar, Finsler uzayında geodezikler ile tanımlanır ve formüle edilir. Ortamın anizotropisi metrik tansörün yöne bağımlılığıyla uyur. Bu Finsler uzayı adı verilen Riemanniyen olmayan bir uzayda tanımlanan anizotropik ortam için ışın teorisi anlamına gelir (Yajima & Nagahamab, 2015). Bu yüzden, Darcy akışının doğrultu bağımlılığının etkisi Riemanniyen ve Finsler geodezikleri arasındaki farklarla gösterilir.

Kesintisiz eğriler Finsler geodezikleri ve kesikli eğriler ise Riemanniyen geodezikleri olarak belirlenmiştir. Başlangıç koşulu olarak  $x^1(0) = x^2(0) = 0$ ,  $y^1(0) = 1$ ,  $y^2(0) = -2$ ,  $t = 20$  sn alınmıştır ve Euler-Langrange denklemleri (4.30), bu koşul altında hem Finslerian hem de Riemanniyen durumları için Mathematica sembolik işlemci yardımıyla çözülmüştür. Bu çözümlere ait Darcy akışkan akışının çeşitli durumlar için nonlinear yörüngeleri aşağıdaki grafiklerde verilmiştir:



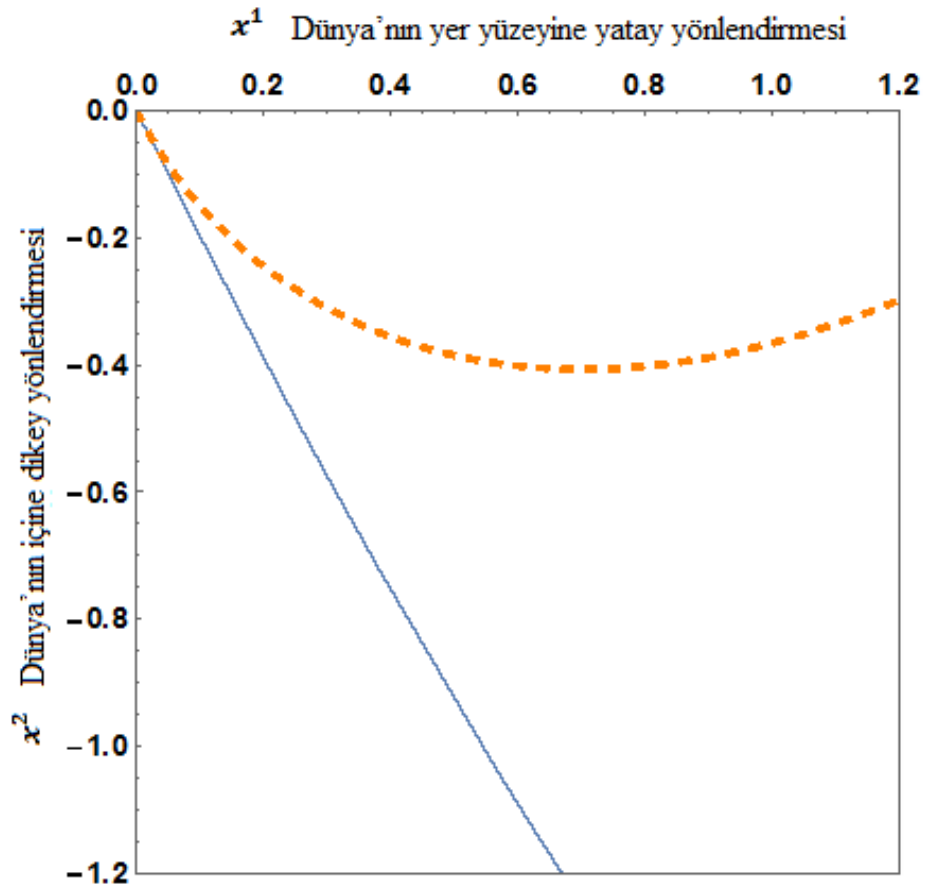
**Şekil 5.1.** Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemanniyen geodezikleri (4.18)  $\alpha = 1, \beta = -1$ .

Şekil 5.1. incelendiğinde,  $\alpha = 1, \beta = -1$  durumun da direncin monoton olarak arttığı, dolayısıyla Darcy akışkan akışının dünya yüzeyine doğru yöneldiği görülmektedir.



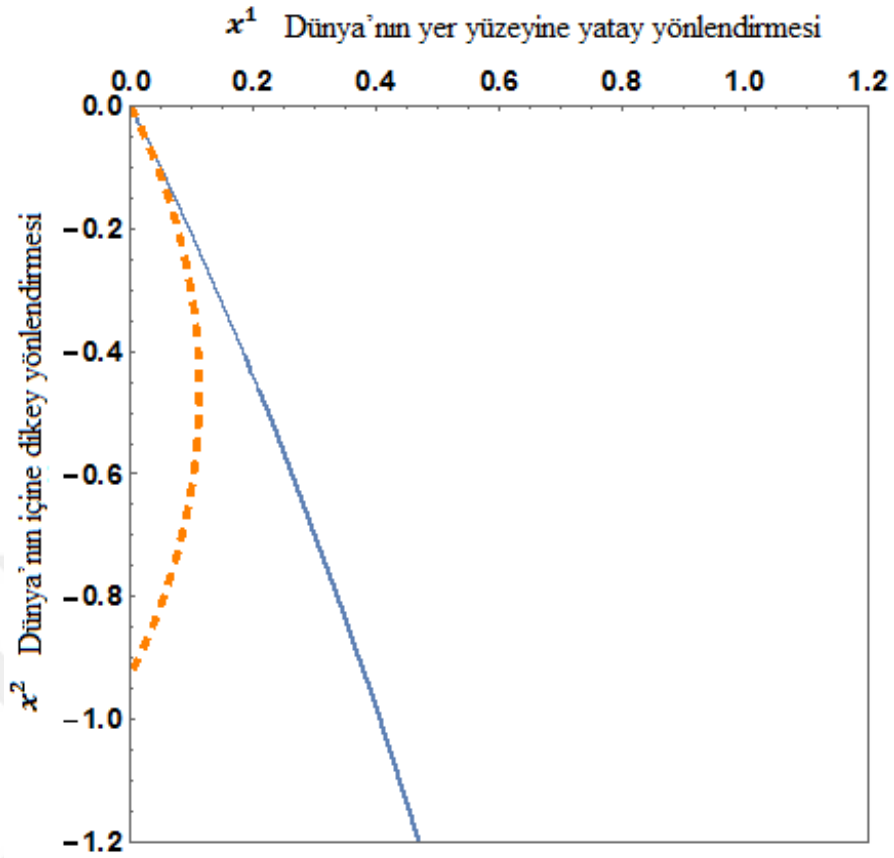
**Şekil 5.2.** Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemannyan geodezikleri (4.18)  $\alpha = 1, \beta = 0$ .

Şekil 5.2. incelendiğinde,  $\alpha = 1, \beta = 0$  durumunda direncin monoton olarak arttığı belirlenmiştir. Dolayısıyla akışın dünyanın içine doğru yöneldiği görülmektedir.



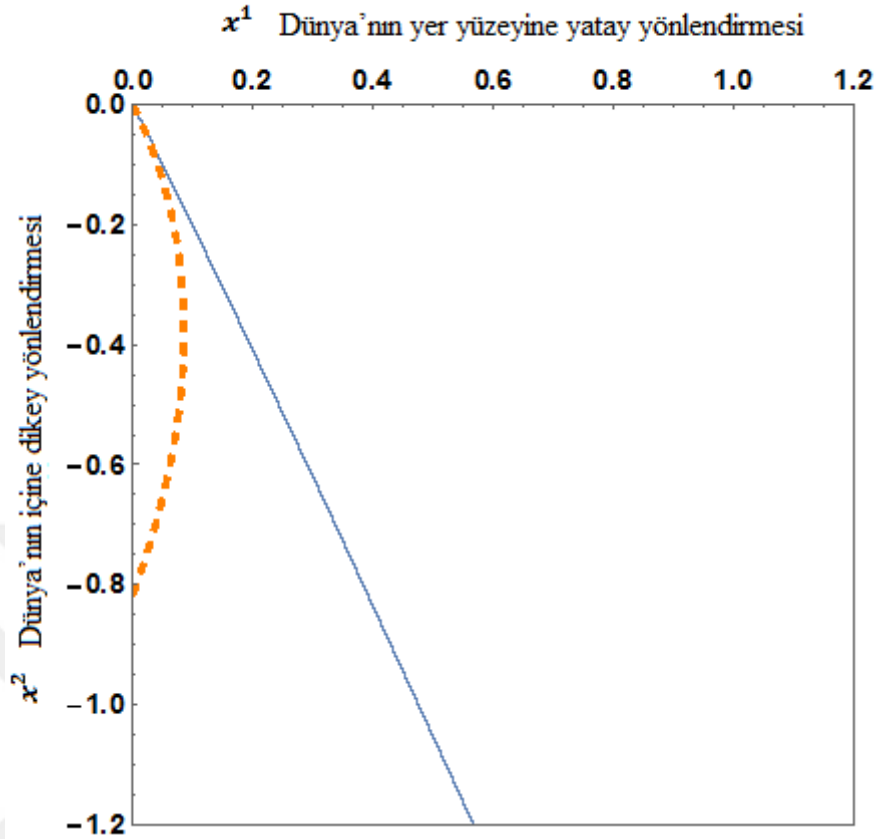
Şekil 5.3. Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemanniyen geodezikleri (4.18)  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ .

Şekil 5.3. incelendiğinde,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  durumunda  $x_2 > x_1$  olduğu yerlerde direnci monoton olarak azalacağından Darcy akışkan akışının dünyanın iç kısmına doğru daha az dirençle karşılaştığı için yöneldiği görülmektedir.



**Şekil 5.4.** Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemanniyen geodezikleri (4.18)  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$ .

Şekil 5.4. incelendiğinde,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$  durumunda direnç monoton olarak azalmaktadır. Dolayısıyla Darcy akışkan akışı dünyanın içine doğru hızla ilerlemektedir.



**Şekil 5.5.** Kesintisiz eğri Finsler geodezikleri (4.8), Kesikli eğri Riemanniyen geodezikleri (4.18)  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1$ .

Şekil 5.5. incelendiğinde,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1$  durumunda, başlangıçta akışkanın aşağı yönlü hızı yatay hızının iki katı olmasını da gözönüne alırsak,  $x_2 > x_1$  olduğu yerlerde direnç monoton olarak artacağından Darcy akışkan akışının oldukça yavaş dünyanın yüzeyine doğru yöneleceği söylenebilir.

Bu grafiklerdeki farklılıklar, Finslerian ve Reimaniyen geodezikler arasındaki farklılıklardan kaynaklandığını söyleyebiliriz. Finslerian ve Riemanien geodezikler arasındaki farkların zamanla arttığı kolayca görülmektedir.

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLERİ

Bu çalışmada, homojen olmayan gözenekli ortamlardaki Darcy akışının doğrusal olmayan akış yollarının belirlenmesinde Finsler geometrisi kullanılarak incelenmiştir. Gerçekte toplam direnci minimize eden iki nokta arasında uzanan ışının nispeten büyük bir kısmı gözenekli ortamın daha az yoğun olduğu bölgede kalır. Bu prensip yardımıyla bir akışkan akışının karşılaştığı direncin daha düşük olduğu bir bölgede bulunmasını sağlayacak şekilde bir yol çizdiği görülür. Gerçekte toplam direnci minimize eden iki nokta arasında uzanan ışının nispeten büyük bir kısmı gözenekli ortamın daha az yoğun olduğu bölgede kalır. Bu yüzden, Darcy akışının doğrultu bağımlılığının etkisi Riemannyan ve Finsler geodezikleri arasındaki farklarla gösterilir. Darcy akışının ve sismik ışın yörüngesinin varyasyonel prensibi arasındaki ilişki olduğu görülebilir. Bu yüzden, Darcy akışının doğrultu bağımlılığının etkisi Riemannyan ve Finsler geodezikleri arasındaki farklarla gösterilir.

Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanlar, Finsler uzayında geodezikler ile tanımlanabilir ve formüle edilebilir. Darcy akışının yön bağımlılığının etkisi, Finsler uzayındaki geodeziklerle geometrik olarak gösterilebilir. Bu tez çalışmasında, direnç değişimi  $\rho(x^1, x^2) = e^{\alpha x^1 + \beta x^2}$  şekilde alınmıştır. Ortaya çıkan değişik direnç durumlarında Darcy akışkan akışının belli bir başlangıç koşulları altında doğrusal olmayan yolların grafikleri verilmiştir. Bu grafiklere bakarak homojen olmayan gözenekli ortamlarda Darcy akışkan akışının yörüngesinin Finsler geometrisi kullanılarak daha doğru bir şekilde elde edilebileceği söylenebilir.

## KAYNAKLAR

- Altunkaynak, A., & Şen , Z., "Doğrusal olmayan yeraltı suyu akım hızının dinamik iletkenlik değişimi ile tanımlanması", *İstanbul Teknik Üniversitesi dergisi/dmühendislik*, 5:1:251-260 (2006).
- Baytaş, C. A., "*Taşınım ile Isı Geçişi*", *Nobel Akademik Yayıncılık*, İstanbul (2015).
- Bona, A., & Slawinski , A. M., "Raypaths as Parametric Curves İn Anisotropic, Nonuniform Media: Differential-Geometry Approach", *Slawinski Nonlinear Analysis*, 51:983-994 (2002).
- Bucatarua, I., & Slawinskia, A. M., "Generalized Orthogonality Between Rays and Wave fronts İn Anisotropic Inhomogeneous Media", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 6: 111-121(2005).
- Demir, F., "Durağan yeraltı suyu akım şartlarında beslenme kuyularının hidrolik hesaplama yöntemleri", *İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 87(2011).
- Gürarlan G., "Düzensiz Sonlu Fark Hesap Şeması Kullanılarak İki Boyutlu Yeraltı Suyu Akımının Modellenmesi", *Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 77 (2004).
- <https://it.wikipedia.org/wiki/Truciolato>. (2017, Şubat).
- [https://ziraatyapma.blogspot.com.tr/2012\\_12\\_01\\_archive.html](https://ziraatyapma.blogspot.com.tr/2012_12_01_archive.html). (2017, Şubat).
- Kulga, İ. B. "Gözenekli ortam ve komşu akışkan tabakadan oluşan bileşik sistemde akışın analitik olarak incelenmesi" *İstanbul Teknik Üniversitesi, Enerji Bilim ve Teknoloji Enstitüsü, Yüksek Lisans*, s. 87 (2010).
- Marušić-Paloka, E., Paz'anin, I., Marušić, S. Comparison between Darcy and Brinkman laws in a fracture. *Applied Mathematics and Computation*, 218: 7538-7545(2012).

**KAYNAKLAR (Devam ediyor)**

- Nichele, J., Teixeira, D. A., "Evaluation of Darcy–Brinkman equation for simulations of oil flows in rocks" *Journal of Petroleum Science and Engineering* , 134:76-78(2015).
- Ochoa-Tapia, J. A., Valdes-Parada, J. F., Alvarez-Ramirez, J., "A fractional-order Darcy's law" *Physica A*, 374:1-4(2007)..
- Sieniutycz S.," Dynamic programming approach to a Fermat type principle for heat flow" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43:3453-3468(2000).
- Sieniutycz, S., "A variational theory for frictional flow of fluids" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:1278-1287 (2007).
- Srinivasan, S., Rajagopal, K., "On the flow of fluids through inhomogeneous porous media due to high pressure gradients" *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 78:112-120(2016).
- Yajima , T., & Nagahama, H.,"Finsler geometry of seismic ray path in anisotropic media", *Proceeding of The Royal Society A*, 465:1763-1777, (2009).
- Yajima , T., & Nagahamab, H., "Finsler geometry for nonlinear path of fluids flow through", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 25:1-8 (2015).
- Yajima, T., & Nagahama, H., "Kawaguchispace, Zermelo's condition and seismic ray path", *Nonlinear Analysis. Real World Applications*, 8: 130-135(2007).
- Yajima, T., Yamasakib, K., Nagahamac, H., "Finsler metric and elastic constants for weak anisotropic media", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12:3177-3184 (2011).

**EK-1:** Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanlar, Finsler uzayında geodezikler,  $\alpha = \mathbf{1}$ ,  $\beta = -\mathbf{1}$

$L[x1\_ ,x2\_ ,y1\_ ,y2\_ ]:=\rho[x1,x2]*K0*((y1^2+y2^2)/y1)$

" $g_{ij}=1/2\partial^2L/(\partial y^i\partial y^j)$  metrik tansöründe aşağıdaki hesaplamalar yapılır:";

" $g_{11}=L_1*L_1+L*L_{11}$  ;

$g_{12}=L_1*L_2+L*L_{12}=g_{21}$ ;

$g_{22}=L_2*L_2+L*L_{22}$ ;"

$g11=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y1,2\}]]$ ;

$g12=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1,y2]]$ ;

$g21=g12$ ;

$g22=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y2,2\}]]$ ;

$g=\text{Simplify}[\{\{g11, g12\},\{g21,g22\}\}]$ ;

$g_{inv}=\text{Simplify}[\text{Inverse}[g]]$ ;

" $g_{ij}$  metrik tansörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";

$\text{Simplify}[\text{Det}[g]]$ ;

"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";

$g11x1=D[g11,x1]$ ; $g11x2=D[g11,x2]$ ;

$g12x1=D[g12,x1]$ ; $g12x2=D[g12,x2]$ ;

$g21x1=D[g21,x1]$ ; $g21x2=D[g21,x2]$ ;

$g22x1=D[g22,x1]$ ; $g22x2=D[g22,x2]$ ;

$\Gamma_{111}=\text{Simplify}[1/2*g_{inv}[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*g_{inv}[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2])]$ ;

$\Gamma_{112}=\text{Simplify}[1/2*g_{inv}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*g_{inv}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2])]$ ;

$\Gamma_{121}=\Gamma_{112}$ ;

$\Gamma_{122}=\text{Simplify}[1/2*g_{inv}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*g_{inv}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2])]$ ;

$\Gamma_{211}=\text{Simplify}[1/2*g_{inv}[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*g_{inv}[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2])]$ ;

$\Gamma_{212}=\text{Simplify}[1/2*g_{inv}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*g_{inv}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2])]$ ;

$\Gamma_{221}=\Gamma_{212}$ ;

$\Gamma_{222}=\text{Simplify}[1/2*g_{inv}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*g_{inv}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2])]$ ;

" $G^i=1/2 \Gamma^i_{jk} y^j y^k$ ;  $i,j,k=1,2$ , ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";

$G1=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{111}*y1*y1+\Gamma_{112}*y1*y2+\Gamma_{121}*y2*y1+\Gamma_{122}*y2*y2)(y1^2(2y1y2\rho(0,1)[x1,x2]+(y1^2-y2^2)\rho(1,0)[x1,x2]))/(2(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])]$

$G2=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{211}*y1*y1+\Gamma_{212}*y1*y2+\Gamma_{221}*y2*y1+\Gamma_{222}*y2*y2)((-y1^4+4y1^2y2^2+y2^4)\rho(0,1)[x1,x2]+4y1^3y2\rho(1,0)[x1,x2])/(4(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])]$

" $\rho[x_1,x_2]=e^{\alpha x_1+\beta x_2}$  alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi:";  
 SetAttributes[ $\beta$ ,Constant];SetAttributes[ $\alpha$ ,Constant];  
 $\rho[x_1,x_2]=\text{Exp}[\alpha*x_1+\beta*x_2]$ ;  
 $\rho(1,0)[x_1,x_2]=D[\rho[x_1,x_2],x_1]$ ;  
 $\rho(0,1)[x_1,x_2]=D[\rho[x_1,x_2],x_2]$ ;  
 $G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}$   
 $G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}$   
 $(E^{-x_1-\alpha x_2-\beta(x_1^2)[t]^2} (2 E^{x_1+\alpha x_2+\beta x_1 x_2[t]+Ex_1+\alpha x_2+\beta \alpha ((x_1^2)[t]^2-(x_2^2)[t]^2)))/(2$   
 $((x_1^2)[t]^2+(x_2^2)[t]^2))$   
 $(E^{-x_1-\alpha x_2-\beta(4 Ex_1+\alpha x_2+\beta \alpha (x_1^3)[t]^3 x_2^{2[t]+Ex_1+\alpha x_2+\beta \beta -(x_1^4)[t]^4+4 (x_1^2)[t]^2$   
 $(x_2^2)[t]^2+(x_2^4)[t]^4)))/(4 ((x_1^2)[t]^2+(x_2^2)[t]^2))$

$\alpha=1;\beta=-1$ ;  
 $eq1=\text{Simplify}[x_1''[t]==-2*G1]$ ;  
 $eq2=\text{Simplify}[x_2''[t]==-2*G2]$ ;  
 $iv=\{x_1[0]==0,x_2[0]==0,x_1'[0]==1.0,x_2'[0]==-2.0\}$ ;  
 $Fs=\text{NDSolve}\{\{eq1,eq2,iv\},\{x_1,x_2\},\{t,0,20\}\}$ ;

$\text{Finsler11}=\text{ParametricPlot}[\text{Evaluate}\{\{x_1[t]/.Fs[[1,1]],x_2[t]/.Fs[[1,2]]\},\{t,0,20\},\text{AxesOrigin->\{0,0\},\text{PlotRange->\{0,1.2\},\{0,-1.4\}\}]$ ;

"RIEMANNIAN DURUMU İNCELEME";  
 "If the cross-sectional area A of flux tube does not change, namely A is a constant, the metric tensor is reduced to the Riemannian form  $g_{ij}=g_{ij}(x^k)=(K_0\rho)^2\delta_{ij}$ ,  $K_0=\text{Subscript}[I,0]^2/A$  is a constant.";  
 $g=\text{Subscript}[K,0]^2*\rho[x_1,x_2]^2*\text{IdentityMatrix}[2]$ ;  
 $g\text{inv}=\text{Simplify}[\text{Inverse}[g]]$ ;  
 " $g_{ij}$  metrik tensörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";  
 $\text{Simplify}[\text{Det}[g]]$ ;  
 "Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";  
 $g11x1=D[g[[1,1]],x_1]$ ;  
 $g11x2=D[g[[1,1]],x_2]$ ;  
 $g12x1=D[g[[1,2]],x_1]$ ;  
 $g12x2=D[g[[1,2]],x_2]$ ;  
 $g21x1=D[g[[2,1]],x_1];g21x2=D[g[[2,1]],x_2]$ ;  
 $g22x1=D[g[[2,2]],x_1];g22x2=D[g[[2,2]],x_2]$ ;

$\Gamma_{11}=\text{Simplify}[1/2*g\text{inv}[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x_1]+D[g[[1,1]],x_1]-D[g[[1,1]],x_1]+1/2*g\text{inv}[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x_1]+D[g[[1,2]],x_1]-D[g[[1,1]],x_2])]$ ;  
 $\Gamma_{12}=\text{Simplify}[1/2*g\text{inv}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x_1]+D[g[[1,1]],x_2]-D[g[[1,2]],x_1]+1/2*g\text{inv}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x_1]+D[g[[1,2]],x_2]-D[g[[1,2]],x_2])]$ ;  
 $\Gamma_{21}=\Gamma_{12}$ ;  
 $\Gamma_{22}=\text{Simplify}[1/2*g\text{inv}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x_2]+D[g[[2,1]],x_2]-D[g[[2,2]],x_1]+1/2*g\text{inv}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x_2]+D[g[[2,2]],x_2]-D[g[[2,2]],x_2])]$ ;  
 $\Gamma_{21}=\text{Simplify}[1/2*g\text{inv}[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x_1]+D[g[[1,1]],x_1]-D[g[[1,1]],x_1]+1/2*g\text{inv}[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x_1]+D[g[[1,2]],x_1]-D[g[[1,1]],x_2])]$ ;  
 $\Gamma_{22}=\text{Simplify}[1/2*g\text{inv}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x_1]+D[g[[1,1]],x_2]-D[g[[1,2]],x_1]+1/2*g\text{inv}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x_1]+D[g[[1,2]],x_2]-D[g[[1,2]],x_2])]$ ;

```

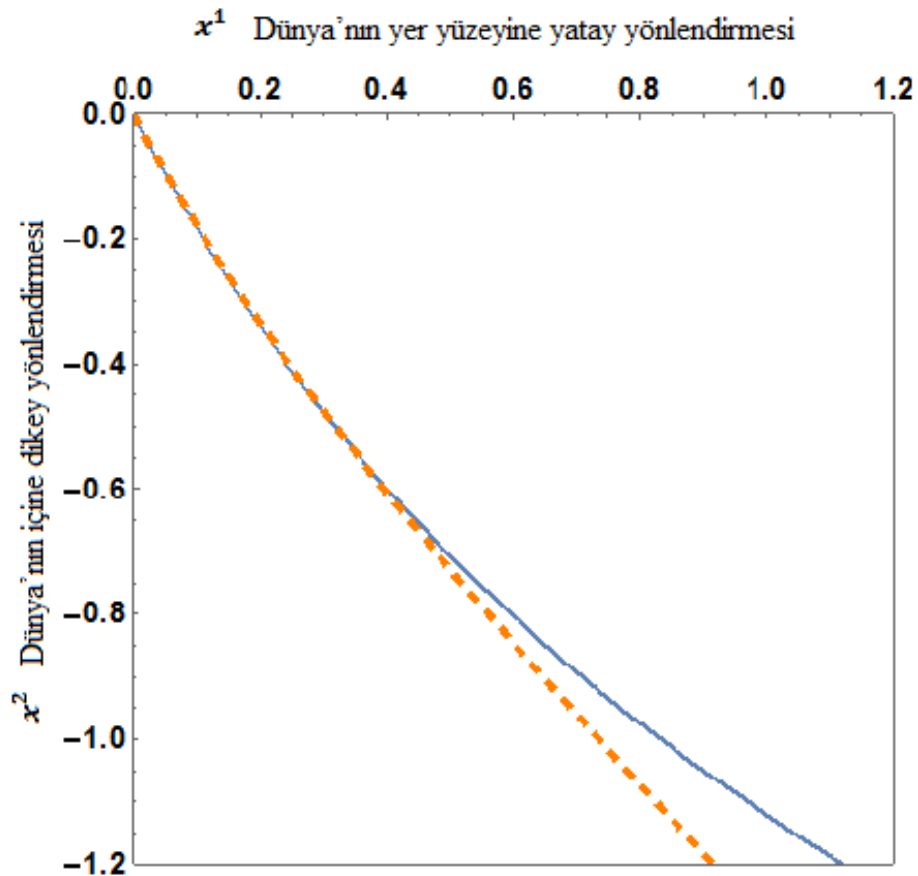
Γ221=Γ212;
Γ222=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-
D[g[[2,2]],x1])+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2]);
"Gi=1/2 Γjki yj yk; i,j,k=1,2, ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";
G1=Simplify[1/2*(Γ111*y1*y1+Γ112*y1*y2+Γ121*y2*y1+Γ122*y2*y2)];
G2=Simplify[1/2*(Γ211*y1*y1+Γ212*y1*y2+Γ221*y2*y1+Γ222*y2*y2)];
"ρ[x1,x2]=eαx1+βx2 alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi:";
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
eq1=Simplify[x1''[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2''[t]==-2*G2];
Rs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

```

```

Riemann11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/.Rs[[1,1]],x2[t]/.Rs[[1,2]]},{t,0,20},Axes
Origin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}},PlotStyle->{Orange,Dashed,Thick}];
sonuc=Show[Finsler11,Riemann11,Frame->True,Method->{"AxesInFront"-
>False,"ScalingFunctions"->None},FrameTicks->{{All,None},{None,All}}]

```



**EK-2:** Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanlar, Finsler uzayında geodezikler,  $\alpha = \mathbf{1}$ ,  $\beta = \mathbf{0}$

$$L[x1\_ ,x2\_ ,y1\_ ,y2\_ ]:=\rho[x1,x2]*K0*((y1^2+y2^2)/y1)$$

" $g_{ij}=1/2\partial^2L/(\partial y^i\partial y^j)$  metrik tansöründe aşağıdaki hesaplamalar yapılır:";

$$"g_{11}=L_1*L_1+L*L_{11} ;$$

$$g_{12}=L_1*L_2+L*L_{12}=g_{21};$$

$$g_{22}=L_2*L_2+L*L_{22};";$$

$$g11=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y1,2\}]]];$$

$$g12=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1,y2]]];$$

$$g21=g12;$$

$$g22=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y2,2\}]]];$$

$$g=\text{Simplify}[\{\{g11, g12\},\{g21,g22\}\}];$$

$$g_{\text{inv}}=\text{Simplify}[\text{Inverse}[g]];$$

" $g_{ij}$  metrik tansörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";

$$\text{Simplify}[\text{Det}[g]];$$

"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";

$$g11x1=D[g11,x1];g11x2=D[g11,x2];$$

$$g12x1=D[g12,x1];g12x2=D[g12,x2];$$

$$g21x1=D[g21,x1];g21x2=D[g21,x2];$$

$$g22x1=D[g22,x1];g22x2=D[g22,x2];$$

$$\Gamma_{111}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2])];$$

$$\Gamma_{112}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{121}=\Gamma_{112};$$

$$\Gamma_{122}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{211}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2])];$$

$$\Gamma_{212}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{221}=\Gamma_{212};$$

$$\Gamma_{222}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2])];$$

" $G^i=1/2 \Gamma_{jk}^i y^j y^k$ ,  $i,j,k=1,2$ , ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";

$$G1=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{111}*y1*y1+\Gamma_{112}*y1*y2+\Gamma_{121}*y2*y1+\Gamma_{122}*y2*y2)(y1^2(2y1y2\rho(0,1)[x1,x2]+(y1^2-y2^2)\rho(1,0)[x1,x2]))/(2(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])$$

$$G2=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{211}*y1*y1+\Gamma_{212}*y1*y2+\Gamma_{221}*y2*y1+\Gamma_{222}*y2*y2)((-y1^4+4y1^2y2^2+y2^4)\rho(0,1)[x1,x2]+4y1^3y2\rho(1,0)[x1,x2))/(4(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])$$

" $\rho[x1,x2]=e^{\alpha x^1+\beta x^2}$  alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi:";

```

SetAttributes[β,Constant];SetAttributes[α,Constant];
ρ[x1,x2]=Exp[α*x1+β*x2];
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}
(E-x1 α-x2 β (x1α)[t]2 (2 Ex1 α+x2 β β x1'[t] x2'[t]+Ex1 α+x2 β α ((x1α)[t]2-(x2α)[t]2)))/(2
((x1α)[t]2+(x2α)[t]2))
(E-x1 α-x2 β (4 Ex1 α+x2 β α (x1α)[t]3 x2α[t]+Ex1 α+x2 β β -(x1α)[t]4+4 (x1α)[t]2
(x2α)[t]2+(x2α)[t]4)))/(4 ((x1α)[t]2+(x2α)[t]2))

```

```

α=1;β=0;
eq1=Simplify[x1''[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2''[t]==-2*G2];
iv={x1[0]==0,x2[0]==0,x1'[0]==1.0,x2'[0]==-2.0};
Fs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

```

```

Finsler11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/.Fs[[1,1]],x2[t]/.Fs[[1,2]]},{t,0,20},AxesOri
gin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}}];

```

```

"RIEMANNIAN DURUMU İNCELEME";
"If the cross-sectional area A of flux tube does not change, namely A is a constant, the
metric tensor is reduced to the Riemannian form  $g_{ij}=g_{ij}(x^k)=(K_0\rho)^2\delta_{ij}$ ,  $K_0=\text{Subscript}[I,
0]^2/A$  is a constant.";
g=Subscript[K, 0]2*ρ[x1,x2]2*IdentityMatrix[2];
ginv=Simplify[Inverse[g]];
"  $g_{ij}$  metrik tensörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";
Simplify[Det[g]];
"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";
g11x1=D[g[[1,1]],x1];
g11x2=D[g[[1,1]],x2];
g12x1=D[g[[1,2]],x1];
g12x2=D[g[[1,2]],x2];
g21x1=D[g[[2,1]],x1];g21x2=D[g[[2,1]],x2];
g22x1=D[g[[2,2]],x1];g22x2=D[g[[2,2]],x2];

```

```

Γ111=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-
D[g[[1,1]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]));
Γ112=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-
D[g[[1,2]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]));
Γ121=Γ112;
Γ122=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-
D[g[[2,2]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2]));
Γ211=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-
D[g[[1,1]],x1]+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]));
Γ212=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-
D[g[[1,2]],x1]+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]));
Γ221=Γ212;

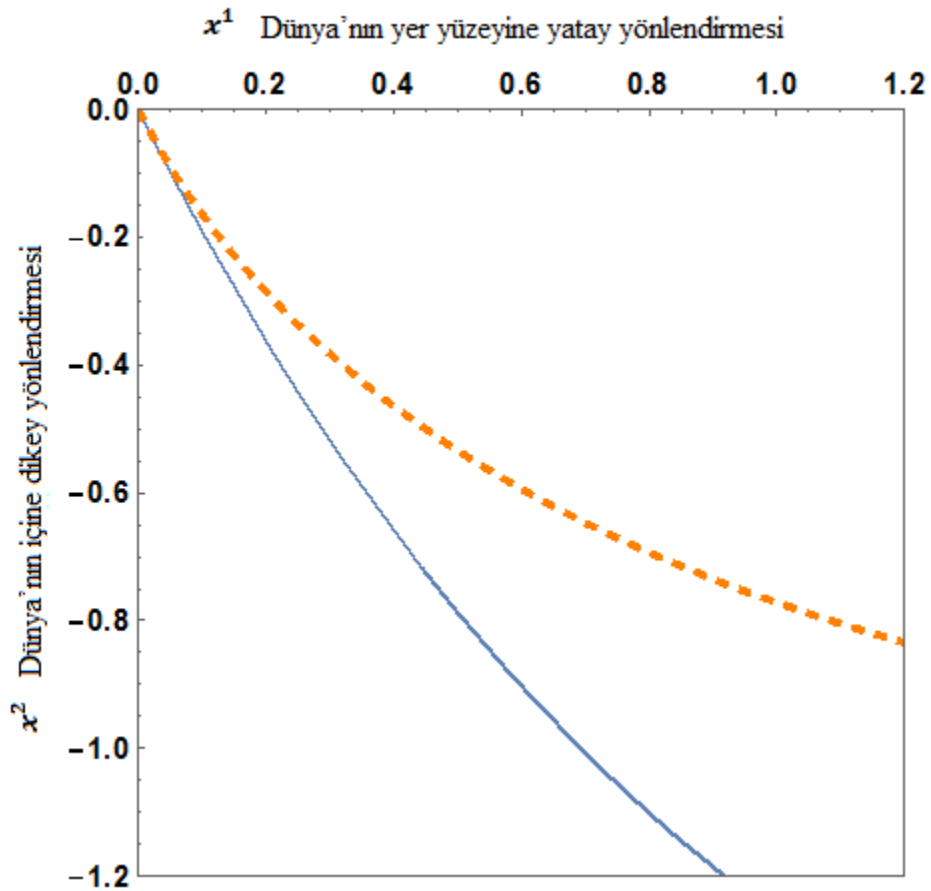
```

```

Γ222=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-
D[g[[2,2]],x1])+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2));
"Gi=1/2 Γijk yj yk; i,j,k=1,2, ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";
G1=Simplify[1/2*(Γ111*y1*y1+Γ112*y1*y2+Γ121*y2*y1+Γ122*y2*y2)];
G2=Simplify[1/2*(Γ211*y1*y1+Γ212*y1*y2+Γ221*y2*y1+Γ222*y2*y2)];
"ρ[x1,x2]=eαx1+βx2 alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi.";
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
eq1=Simplify[x1''[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2''[t]==-2*G2];
Rs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

Riemann11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/Rs[[1,1]],x2[t]/Rs[[1,2]]},{t,0,20},Axes
Origin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}},PlotStyle->{Orange,Dashed,Thick}];
sonuc=Show[Finsler11,Riemann11,Frame->True,Method->{"AxesInFront"-
>False,"ScalingFunctions"->None},FrameTicks->{{All,None},{None,All}}]

```



**EK-3:** Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanlar, Finsler uzayında geodezikler,  $\alpha = \mathbf{1}$ ,  $\beta = \mathbf{1}$

$$L[x1\_ ,x2\_ ,y1\_ ,y2\_ ]:=\rho[x1,x2]*K0*((y1^2+y2^2)/y1)$$

" $g_{ij}=1/2\partial^2L/(\partial y^i\partial y^j)$  metrik tansöründe aşağıdaki hesaplamalar yapılır:";

$$"g_{11}=L_1*L_1+L*L_{11} ;$$

$$g_{12}=L_1*L_2+L*L_{12}=g_{21};$$

$$g_{22}=L_2*L_2+L*L_{22};";$$

$$g_{11}=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y1,2\}]]];$$

$$g_{12}=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1,y2]]];$$

$$g_{21}=g_{12};$$

$$g_{22}=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y2,2\}]]];$$

$$g=\text{Simplify}[\{\{g_{11}, g_{12}\},\{g_{21},g_{22}\}\}];$$

$$g_{\text{inv}}=\text{Simplify}[\text{Inverse}[g]];$$

" $g_{ij}$  metrik tansörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";

$$\text{Simplify}[\text{Det}[g]];$$

"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";

$$g_{11x1}=D[g_{11},x1];g_{11x2}=D[g_{11},x2];$$

$$g_{12x1}=D[g_{12},x1];g_{12x2}=D[g_{12},x2];$$

$$g_{21x1}=D[g_{21},x1];g_{21x2}=D[g_{21},x2];$$

$$g_{22x1}=D[g_{22},x1];g_{22x2}=D[g_{22},x2];$$

$$\Gamma_{111}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2])];$$

$$\Gamma_{112}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{121}=\Gamma_{112};$$

$$\Gamma_{122}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{211}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2])];$$

$$\Gamma_{212}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{221}=\Gamma_{212};$$

$$\Gamma_{222}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2])];$$

" $G^i=1/2 \Gamma_{jk}^i y^j y^k$ ,  $i,j,k=1,2$ , ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";

$$G1=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{111}*y1*y1+\Gamma_{112}*y1*y2+\Gamma_{121}*y2*y1+\Gamma_{122}*y2*y2)(y1^2(2y1y2\rho(0,1)[x1,x2]+(y1^2-y2^2)\rho(1,0)[x1,x2]))/(2(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])$$

$$G2=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{211}*y1*y1+\Gamma_{212}*y1*y2+\Gamma_{221}*y2*y1+\Gamma_{222}*y2*y2)((-y1^4+4y1^2y2^2+y2^4)\rho(0,1)[x1,x2]+4y1^3y2\rho(1,0)[x1,x2))/(4(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])$$

" $\rho[x1,x2]=e^{\alpha x^1+\beta x^2}$  alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi.";

```

SetAttributes[β,Constant];SetAttributes[α,Constant];
ρ[x1,x2]=Exp[α*x1+β*x2];
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}
(E-x1 α-x2 β (x1α)[t]2 (2 Ex1 α+x2 β β x1'[t] x2'[t]+Ex1 α+x2 β α ((x1α)[t]2-(x2α)[t]2)))/(2
((x1α)[t]2+(x2α)[t]2))
(E-x1 α-x2 β (4 Ex1 α+x2 β α (x1α)[t]3 x2α[t]+Ex1 α+x2 β β -(x1α)[t]4+4 (x1α)[t]2
(x2α)[t]2+(x2α)[t]4)))/(4 ((x1α)[t]2+(x2α)[t]2))

```

```

α=1;β=1;
eq1=Simplify[x1''[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2''[t]==-2*G2];
iv={x1[0]==0,x2[0]==0,x1'[0]==1.0,x2'[0]==-2.0};
Fs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

```

```

Finsler11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/.Fs[[1,1]],x2[t]/.Fs[[1,2]]},{t,0,20},AxesOri
gin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}}];

```

```

"RIEMANNIAN DURUMU İNCELEME";
"If the cross-sectional area A of flux tube does not change, namely A is a constant, the
metric tensor is reduced to the Riemannian form  $g_{ij}=g_{ij}(x^k)=(K_0\rho)^2\delta_{ij}$ ,  $K_0=\text{Subscript}[I,
0]^2/A$  is a constant.";
g=Subscript[K, 0]2*ρ[x1,x2]2*IdentityMatrix[2];
ginv=Simplify[Inverse[g]];
"  $g_{ij}$  metrik tensörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";
Simplify[Det[g]];
"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";
g11x1=D[g[[1,1]],x1];
g11x2=D[g[[1,1]],x2];
g12x1=D[g[[1,2]],x1];
g12x2=D[g[[1,2]],x2];
g21x1=D[g[[2,1]],x1];g21x2=D[g[[2,1]],x2];
g22x1=D[g[[2,2]],x1];g22x2=D[g[[2,2]],x2];

```

```

Γ111=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-
D[g[[1,1]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]));
Γ112=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-
D[g[[1,2]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]));
Γ121=Γ112;
Γ122=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-
D[g[[2,2]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2]));
Γ211=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-
D[g[[1,1]],x1]+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]));
Γ212=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-
D[g[[1,2]],x1]+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]));
Γ221=Γ212;

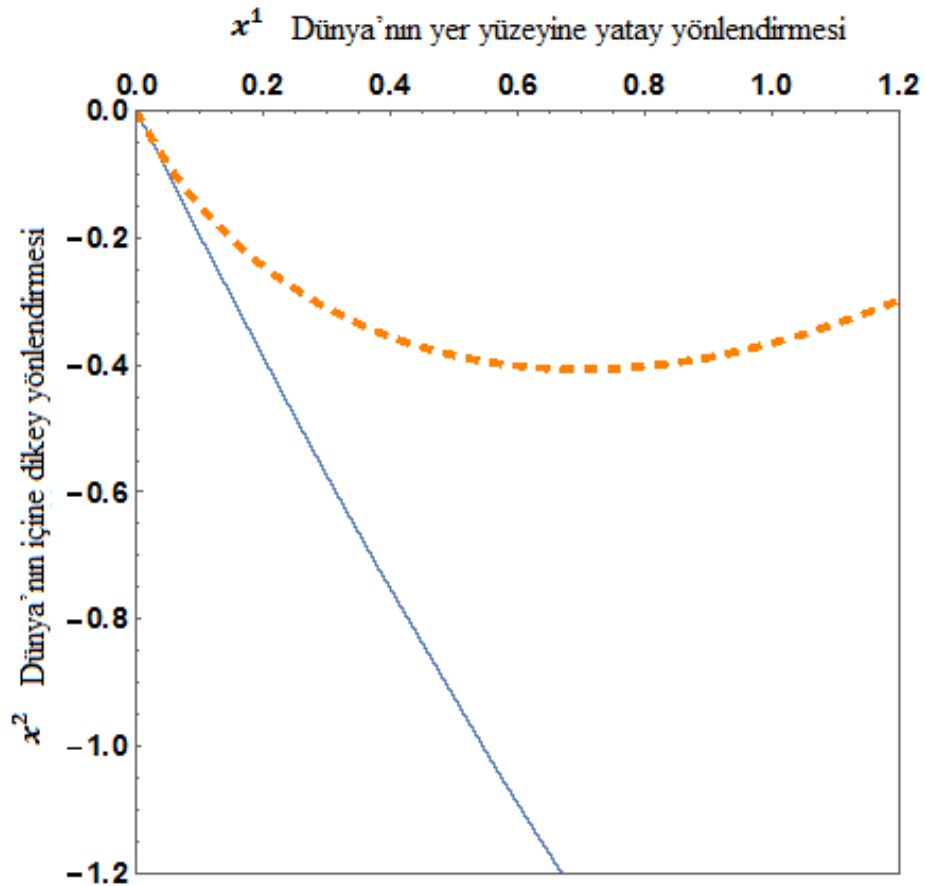
```

```

Γ222=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-
D[g[[2,2]],x1])+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2));
"Gi=1/2*Γijk*yj*yk;i,j,k=1,2, ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";
G1=Simplify[1/2*(Γ111*y1*y1+Γ112*y1*y2+Γ121*y2*y1+Γ122*y2*y2)];
G2=Simplify[1/2*(Γ211*y1*y1+Γ212*y1*y2+Γ221*y2*y1+Γ222*y2*y2)];
"ρ[x1,x2]=eαx1+βx2 alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi.";
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
eq1=Simplify[x1''[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2''[t]==-2*G2];
Rs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

Riemann11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/.Rs[[1,1]],x2[t]/.Rs[[1,2]]},{t,0,20},Axes
Origin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}},PlotStyle->{Orange,Dashed,Thick}];
sonuc=Show[Finsler11,Riemann11,Frame->True,Method->{"AxesInFront"-
>False,"ScalingFunctions"->None},FrameTicks->{{All,None},{None,All}}]

```



**EK-4:** Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanlar, Finsler uzayında geodezikler,  $\alpha = -1, \beta = 0$

$$L[x1\_ ,x2\_ ,y1\_ ,y2\_ ]:=\rho[x1,x2]*K0*((y1^2+y2^2)/y1)$$

"g<sub>ij</sub>=1/2∂<sup>2</sup>L/(∂y<sup>i</sup>∂y<sup>j</sup>) metrik tansöründe aşağıdaki hesaplamalar yapılır:";

$$"g_{11}=L_1*L_1+L*L_{11} ;$$

$$g_{12}=L_1*L_2+L*L_{12}=g_{21};$$

$$g_{22}=L_2*L_2+L*L_{22};";$$

$$g11=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y1,2\}]]];$$

$$g12=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1,y2]]];$$

$$g21=g12;$$

$$g22=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y2,2\}]]];$$

$$g=\text{Simplify}[\{\{g11, g12\},\{g21,g22\}\}];$$

$$g_{\text{inv}}=\text{Simplify}[\text{Inverse}[g]];$$

"g<sub>ij</sub> metrik tansörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";

$$\text{Simplify}[\text{Det}[g]];$$

"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";

$$g11x1=D[g11,x1];g11x2=D[g11,x2];$$

$$g12x1=D[g12,x1];g12x2=D[g12,x2];$$

$$g21x1=D[g21,x1];g21x2=D[g21,x2];$$

$$g22x1=D[g22,x1];g22x2=D[g22,x2];$$

$$\Gamma_{111}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1]+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]));$$

$$\Gamma_{112}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1]+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]));$$

$$\Gamma_{211}=\Gamma_{112};$$

$$\Gamma_{122}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1]+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2]));$$

$$\Gamma_{211}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1]+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]));$$

$$\Gamma_{212}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1]+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]));$$

$$\Gamma_{221}=\Gamma_{212};$$

$$\Gamma_{222}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1]+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2]));$$

"G<sup>i</sup>=1/2Γ<sup>ijk</sup>y<sup>j</sup>y<sup>k</sup>; i,j,k=1,2, ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";

$$G1=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{111}*y1*y1+\Gamma_{112}*y1*y2+\Gamma_{121}*y2*y1+\Gamma_{122}*y2*y2)(y1^2(2y1y2\rho(0,1)[x1,x2]+(y1^2-y2^2)\rho(1,0)[x1,x2]))/(2(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])$$

$$G2=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{211}*y1*y1+\Gamma_{212}*y1*y2+\Gamma_{221}*y2*y1+\Gamma_{222}*y2*y2)((-y1^4+4y1^2y2^2+y2^4)\rho(0,1)[x1,x2]+4y1^3y2\rho(1,0)[x1,x2])/(4(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])$$

```

"ρ[x1,x2]=eαx1+βx2 alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi:";
SetAttributes[β,Constant];SetAttributes[α,Constant];
ρ[x1,x2]=Exp[α*x1+β*x2];
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}
(E-x1 α-x2 β (x11)2 (2 Ex1 α+x2 β β x1'[t] x2'[t]+Ex1 α+x2 β α ((x11)2-(x21)2))/((x11)2+(x21)2))
(E-x1 α-x2 β (4 Ex1 α+x2 β α (x11)3 x21[t]+Ex1 α+x2 β β -(x11)4+4 (x11)2 (x21)2+(x21)4))/((x11)2+(x21)2))

```

```

α=-1;β=0;
eq1=Simplify[x1''[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2''[t]==-2*G2];
iv={x1[0]==0,x2[0]==0,x1'[0]==1.0,x2'[0]==-2.0};
Fs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

```

```

Finsler11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/.Fs[[1,1]],x2[t]/.Fs[[1,2]]},{t,0,20},AxesOrigin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}}];

```

"RIEMANNIAN DURUMU İNCELEME";  
 "If the cross-sectional area A of flux tube does not change, namely A is a constant, the metric tensor is reduced to the Riemannian form  $g_{ij}=g_{ij}(x^k)=(K_0\rho)^2\delta_{ij}$ ,  $K_0=\text{Subscript}[I, 0]^2/A$  is a constant.";

```

g=Subscript[K, 0]2*ρ[x1,x2]2*IdentityMatrix[2];
ginv=Simplify[Inverse[g]];
"gij metrik tensörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";
Simplify[Det[g]];
"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";
g11x1=D[g[[1,1]],x1];
g11x2=D[g[[1,1]],x2];
g12x1=D[g[[1,2]],x1];
g12x2=D[g[[1,2]],x2];
g21x1=D[g[[2,1]],x1];g21x2=D[g[[2,1]],x2];
g22x1=D[g[[2,2]],x1];g22x2=D[g[[2,2]],x2];

```

```

Γ111=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]);
Γ112=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]);
Γ121=Γ112;
Γ122=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2]);
Γ211=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]);
Γ212=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]);

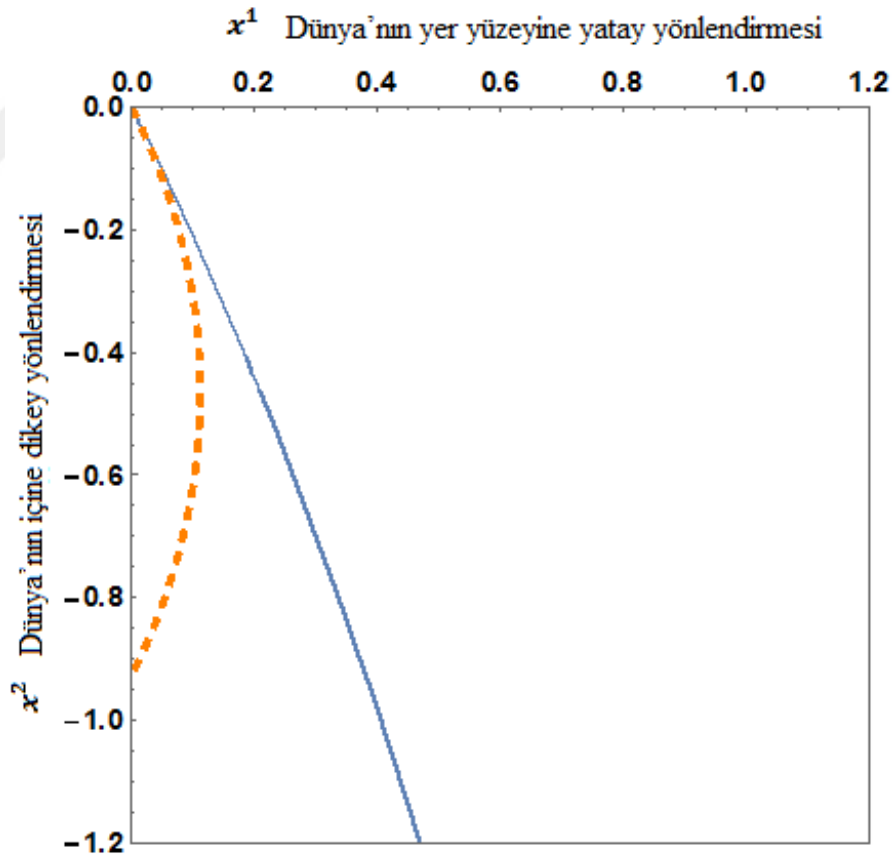
```

```

Γ221=Γ212;
Γ222=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-
D[g[[2,2]],x1])+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2]);
"Gi=1/2 Γjki yj yk; i,j,k=1,2, ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";
G1=Simplify[1/2*(Γ111*y1*y1+Γ112*y1*y2+Γ121*y2*y1+Γ122*y2*y2)];
G2=Simplify[1/2*(Γ211*y1*y1+Γ212*y1*y2+Γ221*y2*y1+Γ222*y2*y2)];
"ρ[x1,x2]=eαx1+βx2 alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi:";
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
eq1=Simplify[x1''[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2''[t]==-2*G2];
Rs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

Riemann11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/.Rs[[1,1]],x2[t]/.Rs[[1,2]]},{t,0,20},Axes
Origin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}},PlotStyle->{Orange,Dashed,Thick}];
sonuc=Show[Finsler11,Riemann11,Frame->True,Method->{"AxesInFront"-
>False,"ScalingFunctions"->None},FrameTicks->{{All,None},{None,All}}]

```



**EK-5:** Homojen olmayan gözenekli ortam boyunca akan akışkanlar, Finsler uzayında geodezikler,  $\alpha = -1, \beta = -1$

$$L[x1\_ ,x2\_ ,y1\_ ,y2\_ ]:=\rho[x1,x2]*K0*((y1^2+y2^2)/y1)$$

" $g_{ij}=1/2\partial^2L/(\partial y^i\partial y^j)$  metrik tansöründe aşağıdaki hesaplamalar yapılır:";

$$"g_{11}=L_1*L_1+L*L_{11} ;$$

$$g_{12}=L_1*L_2+L*L_{12}=g_{21};$$

$$g_{22}=L_2*L_2+L*L_{22};";$$

$$g_{11}=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y1,2\}]]];$$

$$g_{12}=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y1]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y1,y2]]];$$

$$g_{21}=g_{12};$$

$$g_{22}=\text{Simplify}[D[L[x1,x2,y1,y2],y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],y2]+L[x1,x2,y1,y2]*D[L[x1,x2,y1,y2],\{y2,2\}]]];$$

$$g=\text{Simplify}[\{\{g_{11}, g_{12}\},\{g_{21},g_{22}\}\}];$$

$$g_{\text{inv}}=\text{Simplify}[\text{Inverse}[g]];$$

" $g_{ij}$  metrik tansörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";

$$\text{Simplify}[\text{Det}[g]];$$

"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";

$$g_{11x1}=D[g_{11},x1];g_{11x2}=D[g_{11},x2];$$

$$g_{12x1}=D[g_{12},x1];g_{12x2}=D[g_{12},x2];$$

$$g_{21x1}=D[g_{21},x1];g_{21x2}=D[g_{21},x2];$$

$$g_{22x1}=D[g_{22},x1];g_{22x2}=D[g_{22},x2];$$

$$\Gamma_{111}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2])];$$

$$\Gamma_{112}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{121}=\Gamma_{112};$$

$$\Gamma_{122}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{211}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-D[g[[1,1]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2])];$$

$$\Gamma_{212}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-D[g[[1,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2])];$$

$$\Gamma_{221}=\Gamma_{212};$$

$$\Gamma_{222}=\text{Simplify}[1/2*g_{\text{inv}}[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-D[g[[2,2]],x1])+1/2*g_{\text{inv}}[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2])];$$

" $G^i=1/2 \Gamma_{jk}^i y^j y^k$ ,  $i,j,k=1,2$ , ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";

$$G1=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{111}*y1*y1+\Gamma_{112}*y1*y2+\Gamma_{121}*y2*y1+\Gamma_{122}*y2*y2)(y1^2(2y1y2\rho(0,1)[x1,x2]+(y1^2-y2^2)\rho(1,0)[x1,x2]))/(2(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])$$

$$G2=\text{Simplify}[1/2*(\Gamma_{211}*y1*y1+\Gamma_{212}*y1*y2+\Gamma_{221}*y2*y1+\Gamma_{222}*y2*y2)((-y1^4+4y1^2y2^2+y2^4)\rho(0,1)[x1,x2]+4y1^3y2\rho(1,0)[x1,x2))/(4(y1^2+y2^2)\rho[x1,x2])$$

" $\rho[x1,x2]=e^{\alpha x^1+\beta x^2}$  alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi:";

```

SetAttributes[β,Constant];SetAttributes[α,Constant];
ρ[x1,x2]=Exp[α*x1+β*x2];
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]}
(E-x1 α-x2 β (x1α)[t]2 (2 Ex1 α+x2 β β x1'[t] x2'[t]+Ex1 α+x2 β α ((x1α)[t]2-(x2α)[t]2)))/(2
((x1α)[t]2+(x2α)[t]2))
(E-x1 α-x2 β (4 Ex1 α+x2 β α (x1α)[t]3 x2'[t]+Ex1 α+x2 β β -(x1α)[t]4+4 (x1α)[t]2
(x2α)[t]2+(x2α)[t]4)))/(4 ((x1α)[t]2+(x2α)[t]2))

```

```

α=-1;β=-1;
eq1=Simplify[x1"[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2"[t]==-2*G2];
iv={x1[0]==0,x2[0]==0,x1'[0]==1.0,x2'[0]==-2.0};
Fs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

```

```

Finsler11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/.Fs[[1,1]],x2[t]/.Fs[[1,2]]},{t,0,20},AxesOri
gin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}}];

```

"RIEMANNIAN DURUMU İNCELEME";

"If the cross-sectional area A of flux tube does not change, namely A is a constant, the metric tensor is reduced to the Riemannian form  $g_{ij}=g_{ij}(x^k)=(K_0\rho)^2\delta_{ij}$ ,  $K_0=\text{Subscript}[I, 0]^2/A$  is a constant.";

```

g=Subscript[K, 0]2*ρ[x1,x2]2*IdentityMatrix[2];
ginv=Simplify[Inverse[g]];
"gij metrik tensörün pozitif tanımlı olduğunun ispatı";
Simplify[Det[g]];
"Cristoffel katsayılarının hesabı: (21) nolu denklemden";
g11x1=D[g[[1,1]],x1];
g11x2=D[g[[1,1]],x2];
g12x1=D[g[[1,2]],x1];
g12x2=D[g[[1,2]],x2];
g21x1=D[g[[2,1]],x1];g21x2=D[g[[2,1]],x2];
g22x1=D[g[[2,2]],x1];g22x2=D[g[[2,2]],x2];

```

```

Γ111=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-
D[g[[1,1]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]));
Γ112=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-
D[g[[1,2]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]));
Γ121=Γ112;
Γ122=Simplify[1/2*ginv[[1,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-
D[g[[2,2]],x1]+1/2*ginv[[1,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2]));
Γ211=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,1]],x1]+D[g[[1,1]],x1]-
D[g[[1,1]],x1]+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,1]],x1]+D[g[[1,2]],x1]-D[g[[1,1]],x2]));
Γ212=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x1]+D[g[[1,1]],x2]-
D[g[[1,2]],x1]+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x1]+D[g[[1,2]],x2]-D[g[[1,2]],x2]));

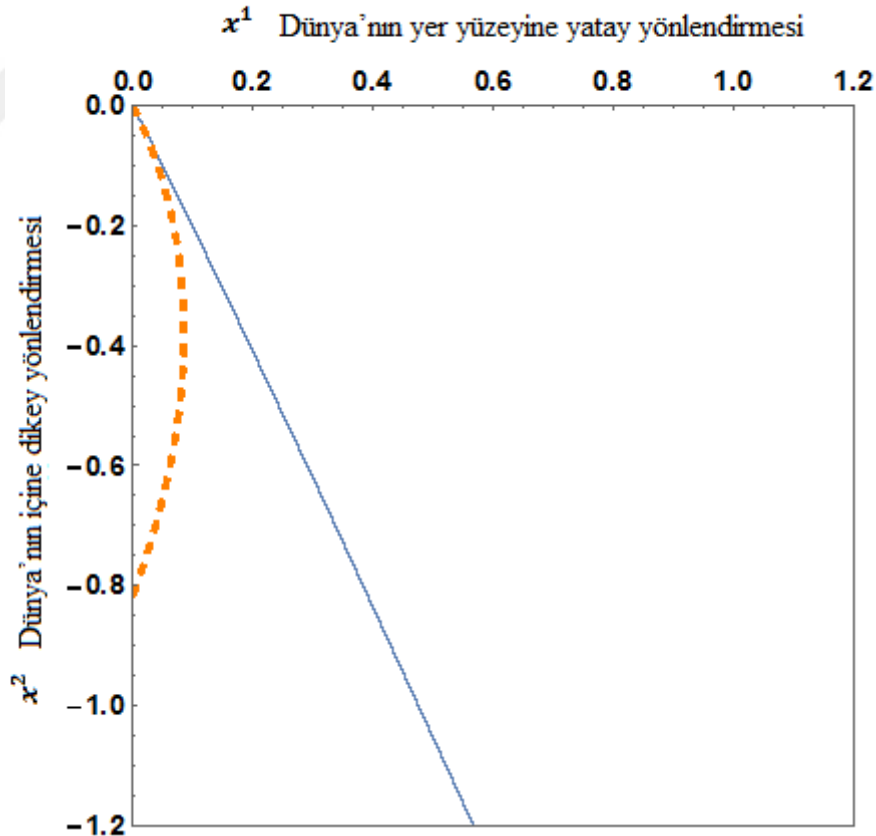
```

```

Γ221=Γ212;
Γ222=Simplify[1/2*ginv[[2,1]]*(D[g[[1,2]],x2]+D[g[[2,1]],x2]-
D[g[[2,2]],x1])+1/2*ginv[[2,2]]*(D[g[[2,2]],x2]+D[g[[2,2]],x2]-D[g[[2,2]],x2));
"Gi=1/2 Γjki yj yk; i,j,k=1,2, ifadesinden Spray katsayıları bulunacak.";
G1=Simplify[1/2*(Γ111*y1*y1+Γ112*y1*y2+Γ121*y2*y1+Γ122*y2*y2)];
G2=Simplify[1/2*(Γ211*y1*y1+Γ212*y1*y2+Γ221*y2*y1+Γ222*y2*y2)];
"ρ[x1,x2]=eαx1+βx2 alınarak Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi elde edildi:";
ρ(1,0)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x1];
ρ(0,1)[x1,x2]=D[ρ[x1,x2],x2];
G1=G1/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
G2=G2/.{y1->x1'[t],y2->x2'[t]};
eq1=Simplify[x1''[t]==-2*G1];
eq2=Simplify[x2''[t]==-2*G2];
Rs=NDSolve[{eq1,eq2,iv},{x1,x2},{t,0,20}];

Riemann11=ParametricPlot[Evaluate[{x1[t]/.Rs[[1,1]],x2[t]/.Rs[[1,2]]},{t,0,20},Axes
Origin->{0,0},PlotRange->{{0,1.2},{0,-1.4}},PlotStyle->{Orange,Dashed,Thick}];
sonuc=Show[Finsler11,Riemann11,Frame->True,Method->{"AxesInFront"-
>False,"ScalingFunctions"->None},FrameTicks->{{All,None},{None,All}}]

```



## ÖZGEÇMİŞ



### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Derya ULUĞ

### Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Dumlupınar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi

Bildiği Yabancı Dil : İngilizce

### İş Deneyimi

Çalıştığı Kurum : Bilecik Ş.E. Üniversitesi (Makine Mühendisliği -Uzman  
2013-2016)

: Hürriyet Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi ( Uçak  
Gövde/ Motor Öğretmeni 2016- Halen)

### İletişim Bilgileri

E-mail :deryaulug84@gmail.com

**Haziran, 2017**