T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VİSKOELASTİK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Ayşe FİDAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Temmuz - 2017

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Ayşe FİDAN tarafından yapılan "Viskoelastik Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı
Başkan:	Doç.Dr.	Erhan PİŞKİN
Üye :	Yrd.Doç.Dr.	Halis YILMAZ
Üye :	Yrd.Doç.Dr.	Mustafa MIZRAK

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 03/07/2017

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Doç.Dr.Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansım boyunca her türlü desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan ailem olmak üzere; deneyimi ve sorularıma ışık tutan akademik bilgisiyle tezimin hazırlanmasında bana destek olan danışmanım Doç. Dr. Erhan PİŞKİN' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu yüksek lisans çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (ZGEF.17.009) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

VİSKOELASTİK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe FİDAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

Bu tezin ilk bölümünde diferansiyel denklemler hakkında bilgi verilmiş olup basit anlamda blow up ve konkavlık karşılaştırılmıştır.

İkinci bölümde denklem hakkında bilgi verilecek olup çözümlerin patlaması ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde tez boyunca gerekli olan temel tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise zayıf dampig terim içeren viskoelastik denklem sisteminin pozitif başlangıç enerjisi için çözümlerinin patlaması çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Patlama, Viskoelastik denklem, Zayıf damping terim.

ABSTRACT

BLOW UP OF SOLUTIONS FOR A SYSTEM OF VISCOELASTIC EQUATION

MASTER THESIS

Ayşe FİDAN

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2017

In the first chapter of this thesis, differential equations are given, but in a simple sense, blow up and concavity are compared.

In the second chapter, the historical developments of the blow up of solutions are investigated.

In the third chapter, the basic definitions, theorems and inequalities that will be used in this thesis are provided.

The fourth chapter is weak damping terms that contain the blow up of solutions for a system of Viscoelastic wave equation for positive initial energy is studied.

Keywords: Blow up, Viscoelastic wave equation, Weak damping term.

KISALTMALAR VE SİMGELER

R^n	: n boyutlu Euclid uzayı
Ω	: R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	: Sürekli fonksiyonlar uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev uzayı
$L^p(\Omega)$	: p. mertebeden Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^m(\Omega)$	: Hilbert uzayı
Δ	: Laplace operatörü
∇	: Nabla operatörü (Gradiyent)

1. GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerde doğanın temel kanunlarının veya günlük hayatta karşılaştığımız birçok problemin adi veya kısmi diferansiyel denklemlerle modellenebilmesi çok önemlidir. Bu yüzden uygulamalı bilimlerde bir çok problem (ki bu fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanıyla ilgili problemler olabilir) diferansiyel operatörler içeren denklemlerle veya denklem sistemleri ile modellenebilmektedir.

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemler doğrusal denklemlere oranla gerçek dünya olaylarıyla daha bağlantılı ve doğrusal diferansiyel denklemler gerçek dünya ile ilgili birçok özelliği ifade etmekte yetersiz kaldığı için oluşturulan bu modellerin bir çoğu doğrusal olmayan diferansiyel denklemler olur.

Oluşturulan bu modellerde amaç öncelikle bu problemleri matematiksel ifadelerle formülize etmek, sonra da bu problemler için yaklaşık bir çözüm bulmak veya en azından çözümün davranışıyla ilgili bir fikre sahip olmak. Denklemin iyi tanımlı bir çözümünü bulmak için Hadamard kuralı gereği, varlık, teklik ve çözümün başlangıç değerine sürekli bağımlılığı araştırılmalıdır. Bu araştırmanın en güzel yanı çözümün sonlu veya sonsuz bir zamanda davranışı her ne kadar çözüm tam olarak bilinmese de çözüme yönelik bir fikre sahip olmamızı sağlamasıdır.

1.1. BLOW UP

Blow up matematik problemlerinde patlama anlamı taşır. Kabaca, doğrusal olmayan problemlerde zaman sonlu bir $T > 0$ limitine yaklaştığında problemdeki değişken veya değişkenlerin sonsuza gitmesidir. Değişkenlerin sonsuz büyümesinden dolayı da çözümler global olarak yok olur. Bu olay blow up (çözümün patlaması) veya global çözümlerin yokluğu olarak adlandırılır.

Blow up adi diferansiyel denklemlerde oldukça temel düzeyde gerçekleşmektedir. Basit bir örnekle ifade edecek olursak reel değişkenli

$$u = u(t)$$

için çözümün patlamasına adi diferansiyel denklemler için basit bir örnek verelim;

$$\begin{cases} u' = u^2(t), \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $u(t) = \frac{1}{2-t}$ dir. Bu örnek te $t \to 2^-$ için $u(t) \to \infty$ dır. Buna çözümün patlaması (blow up) denir. Buradan adi diferansiyel denklemler için çözümlerin patlaması kavramı genelleştirilebilir. ilk adım olarak $p > 1$ için $u'(t) = u^p(t)$ denklemini verebiliriz. Daha genel olarak

$$u'(t) = f(u)$$

denklemini verebiliriz. Burada f pozitif ve

$$\int_1^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty$$

koşulu altında süreklidir. Bu şart pozitif başlangıç koşuluyla herhangi bir çözümün sonlu zamanda blow-up olması için gerek ve yeter şarttır. Adi diferasiyel denklemlerdeki bu çalışmalar daha karmaşık problemler için araştırmacılara blow-up teorisinin gelişmesine ve ilerlemesine ilham kaynağı olmuştur.

Patlama konusu özellikle 1960' lı yıllarda; Kaplan (1963), Friedman (1965) ve Fujita (1966) tarafından bu konuda genel bir yaklaşım verildikten sonra aktif olarak daha kapsamlı araştırmalar yapılmıştır. Bu araştırmalarda temel olarak $f(u)$ doğrusal olmayan bir fonksiyondur. Bu durumda

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

parabolik ve

$$u_{tt} - \Delta u = f(u)$$

hiperbolik denklemleri için başlangıç sınır değer problemi ele alınmış ve bu problemin blow up ı için yeter koşullar elde edilmiştir.

Bu tezin son bölümünde konkavlık metodu yardımıyla denklemin çözümlerinin patlamasını göstereceğiz. Bu nedenle konkavlık metodunu inceleyelim.

$$u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = f(u)$$

şeklindeki damping ve kaynak terim içeren denklemlerin patlamasını Levine (1974), Kalantarov ve Ladyzhenskaya (1978) incelemiştir. Levine $g(u_t) = u_t$ şeklindeki doğrusal damping için denklemin patlamasını "Konkavlık metodu" olarak bilinen kendi metodu ile ele almıştır. Konkavlık metodunun temel fikri, problemin lokal çözümünün varlığı koşulu altında tanımlanan, denklemi ve sınır koşullarını temsil eden pozitif bir $F(t)$ fonksiyonelini oluşturmak ve daha sonra herhangi bir $\alpha > 0$ sayısı için t zamanına bağlı bir $F^{-\alpha}$ konkav fonksiyonu göstermektir. Bunun için

$$\frac{d^2F^{-\alpha}(t)}{dt^2} = -\alpha F^{-\gamma-2}(t)\left[FF'' - (1+\alpha)F'^2\right] \leq 0$$

olmalıdır. Bu da $\forall t \geq 0$ için

$$FF'' - (1+\alpha)F'^2 \geq 0$$

olması ile mümkündür.

Blow up zamanı ise $F(0) > 0$ ve $F'(0) > 0$ için

$$T < \frac{F(0)}{\alpha F'(0)}$$

şeklinde elde edilir. Bu metot Levine tarafından verildi ve bu metod geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Ayrıca $F^{-\alpha}$ konkav fonksiyon olduğundan

$$\frac{d^2F^{-\alpha}}{dt^2} \leq 0$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlar ve bu eşitsizlik için gerekli integrallerin alınması ile

$$F^{\alpha}(t) \geq \frac{F^{\alpha+1}(0)}{F(0) - t\alpha F'(0)}$$

eşitsizliği elde edilir. $F^{\alpha}(t)$ fonksiyonu bu yüzden $F'(0) > 0$ koşuluyla sonlu zamanda blow up olan bir fonksiyon ile alttan sınırlıdır. Böylece blow up

$$T^* = \frac{F(0)}{\alpha F'(0)} > 0$$

T^* zamanından önce veya tam T^* zamanında olmalıdır. Bu tartışma kendi başına $F(t)$ fonksiyonelinin gerçekten blow up olduğunu tespit etmez fakat kesinlikle gösterir ki çözüm klasik anlamda bütün zamanlar için var olamaz.

Fakat bu metod doğrusal olmayan damping $\left(g(u_t) = u_t\,|u_t|^{p-1}\right)$ ve kaynak terim $\left(f(u) = u\,|u|^{q-1}\right)$ içeren denklemlere uygulanamamaktadır.

Aynı zamanda Kalantarov ve Ladyzhenskaya 1978 yılında yayınlanan çalışmalarında Levine çalışmalarını temel alarak parabolik ve hiperbolik denklemlerinde blow up için

$$FF'' - (1+\alpha)F'^2 \geq -aF^2 - bFF'$$

"Genelleştirilmiş Konkavlık Metodunu" nun çözümlerinin var olmaması tartışmasına nasıl genişletileceğini gösterdiler.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Doğrusal olmayan hiperbolik ve parabolik denklemlerde başlangıç-sınır değer problemlerinin blow up ı üzerinde bir çok çalışma yapılmış ve günümüzde de üzerinde etkin olarak çalışılmaktadır.

Kirchhoff tipi viskoelastik dalga denkleminin basit formu;

$$u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right) \triangle u + \int_0^t g(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau + h(u_t) = f(u), \tag{2.1}$$

2012 yılında Li ve ark. 2015 yılında Jie ve Fei tarafından (2.1) denklemi üzerinde çok yaygın çalışılmış ve konkavlık metoduyla denklemin sonlu zamanda patladığı kanıtlanmıştır.

$M \equiv 1$ olduğunda denklemimiz aşağıdaki forma dönüşür;

$$u_{tt} - \triangle u + \int_0^t g(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau + h(u_t) = f(u). \tag{2.2}$$

2003 ve 2006 yıllarında Messaoudi, 2009 yılında Wang ve 2015 yılında Lu ve ark. tarafından (2.2) denkleminin varlığı ve sonlu zamanda patlaması çalışılmıştır.

Daha sonra (2.1) denklemi sistem olarak $M \equiv 1$ durumunda aşağıdaki forma dönüşür;

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + \int_0^t g_1(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau + u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - \triangle v + \int_0^t g_2(t-\tau) \triangle v(\tau)\, d\tau + v_t = f_2(u,v). \end{cases} \tag{2.3}$$

2009 yılında Han ve Wang (2.3) denklem sisteminin çözümünün varlığını ve patlamasını çalıştılar daha sonra 2010 yılında Messaoudi ve Houari bu çalışmaya ek olarak çözümün patlamasını geliştirdiler. 2010 yılında Houari bazı teknikler kullanarak çözümün patlamasını pozitif başlangıç enerjisi için geliştirdi.

2011 yılında Ma ve ark. keyfi pozitif başlangıç enerjisi için (2.3) probleminin çözümünün patlamasını çalıştılar.

2011 yılında Houari ve ark., 2015 ve 2017 yılllarında Pişkin tarafından (2.3) problemi çalışılmıştır.

2012 yılında Wu

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\|\bigtriangledown u\|_2^2 + \|\bigtriangledown v\|_2^2\right) \triangle u + \displaystyle\int_0^t g(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - M\left(\|\bigtriangledown u\|_2^2 + \|\bigtriangledown v\|_2^2\right) \triangle v + \displaystyle\int_0^t h(t-\tau) \triangle v(\tau)\, d\tau + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.4}$$

denklem sistemi için enerji azalmasını ve çözümün patlamasını çalışmıştır.

2013 yılında Li ve ark. güçlü damping terimli viskoelastik dalga denklem sisteminin

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\|\bigtriangledown u\|_2^2\right) \triangle u + \displaystyle\int_0^t g_1(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau - \Delta u_t = f_1(u,v), \\ v_{tt} - M\left(\|\bigtriangledown v\|_2^2\right) \triangle v + \displaystyle\int_0^t g_2(t-\tau) \triangle v(\tau)\, d\tau - \Delta v_t = f_2(u,v) \end{cases} \tag{2.5}$$

enerji azalmasını çalıştılar.

2014 yılında Liu ve ark. aynı denklem sisteminin enerji azalmasını ve çözümünün patlamasını çalıştılar.

Bu tez çalışmasında zayıf damping terimli viskoelastik dalga denklem sisteminin çözümlerinin keyfi pozitif başlangıç enerjisi için çözümlerinin patlaması Konkavlık metodu kullanılarak elde edilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, uzaylar ve eşitsizlikler yer almaktadır (Kesavan 1989, Evans 1998, Adams ve Fournier 2003, Brezis 2011, Pişkin 2017).

3.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 3.1.1. X vektör uzayı olsun. $\overrightarrow{x} \in X$ vektörünü $\|\overrightarrow{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$ ve $\forall a \in K$ için

(N_1) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0;\ \|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0;$

(N_2) $\|a\overrightarrow{x}\| = |a|\,\|\overrightarrow{x}\|;$

(N_3) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ (*üçgen eşitsizliği*)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir *normlu uzay* adı verilir, $\|\overrightarrow{x}\|$ gösterimine de $\overrightarrow{x}$ in normu denir.

$(X, \|.\|)$ normlu uzay olsun. Bu durumda $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$ için

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe normun oluşturduğu metrik denir.

Tanım 3.1.2. X normlu uzayındaki bir dizi (x_n) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_\epsilon$ olduğunda

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε na bağlı en az bir $n_\epsilon \in N$ doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.3. X normlu uzayındaki bir dizi (x_n) olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *yakınsak dizi* denir ve bu yakınsama

$$x_n \to x$$

ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. $(X, \|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise $(X, \|.\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.5. X vektör uzayında, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ iki norm olsun. c_1, $c_2 > 0$ sabitleri için

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları *denk norm*dur.

Tanım 3.1.6. K reel veya karmaşık bir vektör uzayı olsun.

$$(.,.) : X \times X \to K$$

fonksiyonu $\forall\ u, v \in X$ ve $a, b \in R$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

(i) $(u, u) \geq 0$; $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

(ii) $(u, v) = \overline{(v, u)}$ (burada $\overline{c}$, $c \in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

(iii) $(au + bv, w) = a\,(u, w) + b\,(v, w)$.

$K = R$ halinde $(u, v) = (v, u)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\| : X \to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım* denir.

Tanım 3.1.7. Bir $(X, (.,.))$ iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise $(X, (.,.))$ iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.1.8. R^n de bir nokta $x = (x_1, ..., x_n)$ olsun. Burada norm $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ve iç çarpım ise

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

dır.

Tanım 3.1.9. X normlu uzay üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi X in *dual uzayıdır*. X' veya X^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır. X' uzayının duali $(X')' = X''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve *ikinci dual* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.10. X normlu uzayındaki bir (x_n) dizisi

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisi *güçlü yakınsak* dizidir. Bu yakınsama $x_n \to x$ şeklindedir.

Tanım 3.1.11. (x_n), X normlu uzayındaki bir dizi olsun. Her $f \in X'$ için

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \to f(x)$$

sağlayacak şekilde $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *zayıf yakınsak dizi* denir ve $x_n \rightharpoonup x$ veya $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.12. (f_n), X normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Bu durumda

(a)

$$\|f_n - f\| \to 0$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *güçlü yakınsaktır* denir. $f_n \to f$ şeklinde yazılır.

(b) $\forall x \in X$ için

$$f_n(x) \to f(x)$$

şeklinde bir $f \in X'$ varsa (f_n) dizisine *zayıf* yakınsaktır* denir. $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.13. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ pozitif α_j lerin n-bileşenlisi ise α çoklu-indis olarak tanımlanır. $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ dereceye sahip olan x^α, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \partial/\partial x_j$ ise, o zaman

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. dereceden bir diferansiyel operatördür. $D^{(0,\dots,0)}u = u$ şeklindedir.

Tanım 3.1.14. Eğer $\phi \in C(\Omega)$, Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise, Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesinde de tek, sınırlı ve süreklidir. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ ile $0 \leq |\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha \phi$ lerin sınırlı ve düzgün sürekli olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. (Eğer Ω bölgesi sınırsız ise simgelerin yanlış kullanımı belirsizliğe yol açar; örneğin, $\overline{R^n} = R^n$ olsa bile $C^m\left(\overline{R^n}\right) \neq C^m(R^n)$ dır.) $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$, $C_B^m(\Omega)$ nin kapalı alt uzayıdır. Bu nedenle $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı da

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \phi(x)|$$

normu ile Banach uzayıdır.

3.2. Lebesgue Uzayı $(L^p(\Omega))$

Tanım 3.2.1. Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif gerçel sayı olsun. Ω da tanımlı ölçülebilir bütün u fonksiyonları sınıfı aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

$L^p(\Omega)$ *uzayı* denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

normuyla Banach uzaydır.

Tanım 3.2.2. Ω, R^n uzayında bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinde her kompakt altkümesinde p. kuvveti integrallenebilir bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L_{loc}^p(\Omega)$ uzayıdır.

Tanım 3.2.3. $vol\,(\Omega) = \int_\Omega 1dx < \infty$($\Omega$ bölgesi sınırlı), $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Bu durumda $u \in L^q\,(\Omega)$ ise $u \in L^p\,(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq c\,\|u\|_q$$

dır. Burada $c = (vol\,(\Omega))^{(1/p)-(1/q)}$ dır. Yani

$$L^q\,(\Omega) \hookrightarrow L^p\,(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.2.4. $L^2\,(\Omega)\,,$

$$(u,v) = \int_\Omega u\,(x)\,\overline{v\,(x)}dx$$

iç çarpımına göre Hilbert uzaydır.

Tanım 3.2.5. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|u\,(.)\|_X \in L^p\,(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) den X e tanımlanmış u fonksiyonlar uzayı $L^p\,(a,b;X)$ *uzayı*dır ve bu uzay

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u\,(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \underset{t\in(a,b)}{ess\sup}\,\|u\,(t)\|_X\,, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile Banach uzaydır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ şartıyla her bir c,d için $u \in L^p\,(c,d;X)$ ise, o zaman $u \in L^p\,(a,b;X)$ yazılır ve $p = 1$ için u *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 3.2.6. $[0,T]$ den X e tanımlanmış m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonlar uzayı $C^m\,([0,T]\,;X)$ *uzayı*dır ve

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m}\sup_{t\in[0,T]}\|D^\alpha u\,(t)\|_X$$

normu ile Banach uzaydır.

3.3. Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 3.3.1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu-indisi verilsin. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

ise $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α. *zayıf türevi* denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.3.2. Ω, R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir ve bu uzay

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty$$

normları ile Banach uzaydır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ dır.

Burada

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 3.3.3. $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ dır. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.4. $H^m(\Omega)$,

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile Hilbert uzaydır, burada $(u, v) = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx$ şeklinde $L^2(\Omega)$ deki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayında iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

dır ve norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx\right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Bir $\Omega \subset R^n$ bölgesinde tanımlanan Sobolev uzaylarının gömülme özelliği, Ω bölgesinin düzgünlüğüne bağlıdır. Bu özellikler, verilen bölgede sağlanan veya sağlanmayan geometrik koşullar ya da analitik koşullar türünden ifade edilir. Aşağıda bu geometrik özelliklerden biri olan koni özelliğinden bahsedilecektir.

Tanım 3.3.5. R^n de $B_{r_1}(x)$ ve x noktası dışında $B_{r_2}(y)$ açık yuvarlarını göz önüne alınırsa

$$K_x = B_{r_1}(x) \cap \{x + \lambda(z - x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$$

K_x e tepe noktası x olan *sonlu koni* denir. Ω, R^n de açık bir bölge olmak üzere, eğer Ω nın her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir sonlu K konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa, o zaman Ω bölgesi *koni koşulunu sağlar* denir.

Tanım 3.3.6. Sobolev Gömülme Teoremi. Ω, R^n de koni özeliğine sahip açık bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

(ı) $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(ıı) $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

dır. Ayrıca $p = 1$ ise

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

dır.

(ııı) $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

veya

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$$

dır.

Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

dır.

$W^{m,p}$ yerine $W_0^{m,p}$ uzayı alınırsa, Ω bölgesinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olur.

Teorem 3.3.7. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ gömülmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ olur.

Teorem 3.3.8. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ olur.

3.4. Eşitsizlikler

Lemma 3.4.1. (Cauchy Eşitsizliği). $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

dır.

Lemma 3.4.2. (Young Eşitsizliği). $\varepsilon > 0$, $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

Lemma 3.4.3. (Hölder Eşitsizliği). $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır. $p = 1$ ise $q = \infty$ ve $\|v\|_q = ess \sup_{\Omega} |v|$ alırız.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.4. (İnterpolasyon Eşitsizliği). $1 \leq p \leq q \leq r$ ve $0 < \lambda < 1$ için $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ ve

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda} \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\lambda}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.4.5. (Minkowski Eşitsizliği). $u, v \in L^p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.4.6. (Sobolev Eşitsizliği). $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset R^n$ açık olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L^{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

şeklindedir. Burada $C = C(p, n)$ dır.

$n > p$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C(\overline{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n - 1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.4.7. (Green Özdeşliği).

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\nabla u$ dır.

İspat. Tek boyutta

$$(vu_x)_x = v_x u_x + v u_{xx}$$

tir. Benzer şekilde daha yüksek boyutlarda da

$$\nabla\left(v\nabla u\right) = \nabla v \nabla u + v\Delta u,$$

$$v\Delta u = \nabla\left(v\nabla u\right) - \nabla v \nabla u$$

dır. Buradan integral alınırsa

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega \nabla\left(v\nabla u\right)dx - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

olur. Burada

$$\iiint ...dxdydz = \int_\Omega ...dx$$

olarak gösterilmiştir. Diverjans teoreminden $\int_\Omega \nabla F dx = \int_{\partial\Omega} F.nds$ olduğundan

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\nabla u.nds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx,$$

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde (4.1.1) denklem sisteminin çözümlerinin patlamasını elde edeceğiz.

4.1. Giriş

Bu bölümde doğrusal olmayan viskoelastik dalga denklem sistemi için

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right) \triangle u + \int_0^t g_1(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau + u_t \\ \quad = (p+1)\,|v|^{q+1}\,|u|^{p-1}\,u, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v_{tt} - M\left(\|\nabla v\|^2\right) \triangle v + \int_0^t g_2(t-\tau) \triangle v(\tau)\, d\tau + v_t \\ \quad = (q+1)\,|u|^{p+1}\,|v|^{q-1}\,v, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \quad u(x,t) = v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_0(x), \; v_t(x,0) = v_1(x), \; x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada Ω, R^n $(n = 1, 2, 3)$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırlı, sınırlı bir bölgedir. Burada $p > 1$, $q > 1$

$$s \geq 0, \; a > 0, \; b \geq 0, \; a + b > 0, \; \gamma > 0$$

için

$$M(s) = a + bs^\gamma$$

C^1 de negatif olmayan bir fonksiyon ve $g_i : R^+ \to R^+$ çekirdek fonksiyonudur.

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanılacak bazı varsayımlar ve lemmalar verilecektir.

Öncelikle aşağıdaki varsayımları verelim:

(A1) $g_i : R^+ \longrightarrow R^+$ $(i = 1, 2) \in C^1[0, \infty)$ fonksiyonu, $\forall t \geq 0$ için

$$1 - \int_0^\infty g_i(s)\, ds = l_i > 0,$$

$$l = \min\{l_1, l_2\},$$

$$g(t) = \max\{g_1(t), g_2(t)\},$$

şartlarını sağlayan negatif olmayan ve artmayan diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

(A2) $\forall t \geq 0$ için $g_i(t) \geq 0$, $g_i'(t) \leq 0$ dır.

(A3) $\forall v \in C^1[0,\infty)$ ve $\forall t > 0$ $(i = 1, 2)$ için

$$\int_0^t v(s) \int_0^s e^{\frac{(s-\tau)}{2}} g_i(s-\tau) v(\tau)\, d\tau ds \geq 0$$

dır.

Lemma 4.1.1. $\forall s \geq 0$, $a > 0$, $b \geq 0$, $a + b > 0$, $\gamma > 0$ için

$$M(s) = a + bs^\gamma$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{p+q+2}{2}\overline{M}(s) - \left[M(s) + \frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau\right] s \geq m_i s \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde $m_i > 0$ sabiti vardır.

$$\overline{M}(s) = \int_0^s M(\tau)\, d\tau$$

dır (Li, Hong ve Liu 2012).

İspat. $M(s) = a + bs^\gamma$ alınarak

$$\begin{aligned}
& \frac{p+q+2}{2}\overline{M}(s) - \left[M(s) + \frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau\right] s \\
= \; & \frac{p+q+2}{2}\left(\int_0^s M(\tau)\, d\tau\right) - \left[a + bs^\gamma + \frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau\right] s \\
= \; & \frac{p+q+2}{2}\left(\int_0^s (a + b\tau^\gamma)\, d\tau\right) - \left[as + bs^{\gamma+1} + \frac{(p+q+2)}{2} s\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau\right] \\
= \; & \frac{p+q+2}{2}\left[a\tau + \frac{b\tau^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right|_0^s - as - bs^{\gamma+1} - \frac{(p+q+2)}{2} s\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau \\
= \; & \frac{p+q+2}{2}\left(as + \frac{bs^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right) - as - bs^{\gamma+1} - \frac{(p+q+2)}{2} s\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau \\
= \; & \frac{(p+q+2)}{2}as + \frac{(p+q+2)}{2}\frac{bs^{\gamma+1}}{\gamma+1} - as - bs^{\gamma+1} - \frac{(p+q+2)}{2} s\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau \\
= \; & \left(\frac{p+q+2}{2} - 1\right) as + \left(\frac{p+q+2}{2(\gamma+1)} - 1\right) bs^{\gamma+1} - \frac{(p+q+2)}{2} s\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau \\
= \; & \frac{(p+q)}{2}as + \left(\frac{p+q+2-2\gamma-2}{2(\gamma+1)}\right) bs^{\gamma+1} - \frac{(p+q+2)}{2} s\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau \\
= \; & \frac{(p+q)}{2}as + \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)} bs^{\gamma+1} - \frac{(p+q+2)}{2} s\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(p+q)}{2}as + \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)}bs^{\gamma+1} \\ &\quad -\frac{(p+q+2)}{2}s\left[\int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau\right] \end{aligned}$$

(4.1.3) ten $a > 0$ ve $b \geq 0$ için $\int_0^\infty g(\tau)\,d\tau < \frac{p+q}{p+q+2}a$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{p+q+2}{2}\overline{M}(s) - \left[M(s) + \frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau\right]s \\ > \;& \frac{(p+q)}{2}as + \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)}bs^{\gamma+1} \\ & -\frac{(p+q+2)}{2}s\left[\frac{p+q}{p+q+2}a - \frac{1}{2}\left(\frac{p+q}{p+q+2}\right)a + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(\tau)\,d\tau\right] \\ = \;& \frac{(p+q)}{2}as + \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)}bs^{\gamma+1} \\ & -\frac{(p+q+2)}{2}s\left[\frac{p+q}{p+q+2}a - \frac{\left(\frac{p+q}{p+q+2}\right)a - \int_0^\infty g(\tau)\,d\tau}{2}\right] \\ = \;& \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)}bs^{\gamma+1} + \frac{(p+q+2)}{4}\left[\frac{p+q}{p+q+2}a - \int_0^\infty g(\tau)\,d\tau\right]s \\ & +\frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)}bs^{\gamma+1} - \frac{(p+q)}{2}as + \frac{(p+q+2)}{4}\left[\frac{p+q}{p+q+2}a - \int_0^\infty g(\tau)\,d\tau\right]s \\ = \;& \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)}bs^{\gamma+1} + \frac{(p+q+2)}{4}\left[\frac{p+q}{p+q+2}a - \int_0^\infty g(\tau)\,d\tau\right]s \end{aligned}$$

olur. $s \geq 0$, $a > 0$, $b \geq 0$, $a+b > 0$, $\gamma > 0$ ve $p+q > 2\gamma \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)}bs^{\gamma+1} > 0$ dan

$$\begin{aligned} & \frac{p+q+2}{2}\overline{M}(s) - \left[M(s) + \frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau\right]s \\ \geq \;& \frac{(p+q+2)}{4}\left[\frac{p+q}{p+q+2}a - \int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau\right]s \end{aligned}$$

basit bir hesaplamayla: $m < n \Rightarrow m < n - \frac{(n-m)}{2}$ Bu durumda, Lemma 4.1.1 in şartlarından $m_i = \frac{(p+q+2)}{4}\left[\frac{p+q}{p+q+2}a - \int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau\right]$ seçersek

$$\frac{p+q+2}{2}\overline{M}(s) - \left[M(s) + \frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau\right]s \geq m_i s$$

bulunur.

Şimdi $b > 0$ durumunu inceleyelim:

$$
\begin{aligned}
& \frac{p+q+2}{2}\overline{M}\left(s\right) - \left[M\left(s\right) + \frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau\right]s \\
= \;& \frac{\left(p+q\right)}{2}as + \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}bs^{\gamma+1} - \frac{\left(p+q+2\right)}{2}s\int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau \\
= \;& \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}bs^{\gamma+1} - \frac{\left(p+q+2\right)}{2}s\int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau \\
= \;& \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}bs^{\gamma+1} - \frac{\left(p+q+2\right)}{2}s\left[\int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau - \frac{1}{2}\int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau\right] \\
> \;& \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}bs^{\gamma+1} - \frac{\left(p+q+2\right)}{2}s\left[\frac{\left(p+q-2\gamma\right)b}{C_P^\gamma\left(p+q+2\right)\left(\gamma+1\right)}\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma}\right. \\
& \left. - \frac{\frac{\left(p+q-2\gamma\right)b}{C_P^\gamma\left(p+q+2\right)\left(\gamma+1\right)}\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau}{2}\right] \\
= \;& \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}bs^{\gamma+1} - \frac{\left(p+q+2\right)\left(p+q-2\gamma\right)b\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma}}{2C_P^\gamma\left(p+q+2\right)\left(\gamma+1\right)}s \\
& + \left[\frac{\left(p+q-2\gamma\right)b}{C_P^\gamma\left(p+q+2\right)\left(\gamma+1\right)}\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau\right] \\
= \;& \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}bs^{\gamma+1} - \frac{\left(p+q-2\gamma\right)b\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma}}{2C_P^\gamma\left(\gamma+1\right)}s \\
& + \left[\frac{\left(p+q-2\gamma\right)b}{C_P^\gamma\left(p+q+2\right)\left(\gamma+1\right)}\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau\right] \\
= \;& \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}bs\left(s^\gamma - \frac{\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma}}{C_P^\gamma}\right) \\
& + \frac{\left(p+q+2\right)s}{4}\left[\frac{\left(p+q-2\gamma\right)b}{C_P^\gamma\left(p+q+2\right)\left(\gamma+1\right)}\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau\right]
\end{aligned}
$$

$s = \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2$ alınıp, Lemma 4.2.2 ve Poincaré eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& \frac{p+q+2}{2}\overline{M}\left(\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\right) - \left[M\left(\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\right) + \frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau\right]\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 \\
> \;& \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}b\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\left(\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^{2\gamma} - \frac{1}{C_P^\gamma}\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma}\right) \\
& + \frac{\left(p+q+2\right)}{4}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\left[\frac{\left(p+q-2\gamma\right)b}{C_P^\gamma\left(p+q+2\right)\left(\gamma+1\right)}\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau\right] \\
\geq \;& \frac{\left(p+q-2\gamma\right)}{2\left(\gamma+1\right)}b\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\left(\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^{2\gamma} - \frac{1}{C_P^\gamma}\underbrace{\left\|u\left(t\right)\right\|_2^{2\gamma}}\right) \\
& + \frac{\left(p+q+2\right)}{4}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\left[\frac{\left(p+q-2\gamma\right)b}{C_P^\gamma\left(p+q+2\right)\left(\gamma+1\right)}\left\|u_0\right\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i\left(\tau\right)d\tau\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)} b \|\nabla u(t)\|_2^2 \left(\|\nabla u(t)\|_2^{2\gamma} - \frac{1}{C_P^\gamma} \underbrace{C_P^\gamma \|\nabla u(t)\|_2^{2\gamma}} \right) \\
&\quad + \frac{(p+q+2)}{4} \|\nabla u(t)\|_2^2 \left[\frac{(p+q-2\gamma)b}{C_P^\gamma (p+q+2)(\gamma+1)} \|u_0\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau \right] \\
&= \frac{(p+q-2\gamma)}{2(\gamma+1)} b \|\nabla u(t)\|_2^2 \left(\|\nabla u(t)\|_2^{2\gamma} - \|\nabla u(t)\|_2^{2\gamma} \right) \\
&\quad + \frac{(p+q+2)}{4} \|\nabla u(t)\|_2^2 \left[\frac{(p+q-2\gamma)b}{C_P^\gamma (p+q+2)(\gamma+1)} \|u_0\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau \right] \\
&= \frac{(p+q+2)}{4} \left[\frac{(p+q-2\gamma)b}{C_P^\gamma (p+q+2)(\gamma+1)} \|u_0\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau \right] \|\nabla u(t)\|_2^2
\end{aligned}
$$

olur. Burada $m_1 = \frac{(p+q+2)}{4}\left[\frac{(p+q-2\gamma)b}{C_P^\gamma(p+q+2)(\gamma+1)}\|u_0\|_2^{2\gamma} - \int_0^\infty g_i(\tau)\,d\tau\right]$ şeklinde yazılırsa Lemma 4.1.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Not 4.1.1. $M(s) = a + bs^\gamma$, $p > 1 + 2\gamma$, $q > 1 + 2\gamma$ ve $s \geq 0$, $a > 0$, $b \geq 0$, $a + b > 0$, $\gamma > 0$ olmak üzere;

$$
\int_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau < \begin{cases} \frac{p+q}{p+q+2} a, & a > 0,\ b \geq 0, \\ \frac{(p+q-2\gamma)b}{C_P^\gamma(p+q+2)(\gamma+1)} \|u_0\|_2^{2\gamma}, & b > 0, \end{cases} \tag{4.1.3}
$$

burada C_p Poincaré eşitsizliği sabitidir.

Lemma 4.1.2. Herhangi $g \in C^1$ ve $\phi \in H^1(0,T)$ için

$$
\int_\Omega \int_0^t g(t-\tau) \triangle \phi(\tau) \phi'(t)\, d\tau dx = -\frac{1}{2}(g' \circ \nabla\phi)(t) + \frac{1}{2} g(t) \|\nabla\phi\|^2 \tag{4.1.4}
$$

$$
= +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(g \circ \nabla\phi)(t) - \int_0^t g(\tau)\|\nabla\phi\|^2\, d\tau\right]
$$

dır(Rivera, Naso, Vuk 2004).

Lemma 4.1.3 (Konkavlık Metodu**).** $t > 0$, $\alpha > 0$ sabitleri için, $F(t)$ iki kez diferansiyellenebilen ve

$$
F''(t) F(t) - (1+\alpha)[F'(t)]^2 \geq 0 \tag{4.1.5}
$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $F(0) > 0$ ve $F'(0) > 0$ ise bu durumda öyle bir $T^* \leq \frac{F(0)}{\alpha F'(0)}$ zamanı vardır ki $\lim_{t \to T^*} F(t) = \infty$ olur (Levine 1974).

İspat. $\phi(t) = F^{-\alpha}(t)$ olsun. ϕ nin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \left(F^{-\alpha}(t)\right)' \\ &= -\alpha F^{-\alpha-1}(t) F'(t) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= \left(-\alpha F^{-\alpha-1}(t) F'(t)\right)' \\ &= -\alpha(-\alpha-1) F^{-\alpha-2}(t) \left[F'(t)\right]^2 - \alpha F^{-\alpha-1}(t) F''(t) \\ &= -\alpha F^{-\alpha-2}(t) \left[F''(t) F(t) - (1+\alpha)\left[F'(t)\right]^2\right] \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

olur. (4.1.7) eşitliğinden

$$F''(t) F(t) - (1+\alpha)\left[F'(t)\right]^2 \geq 0$$

kabülü göz önünde bulundurulursa

$$\phi''(t) \leq 0 \tag{4.1.8}$$

olur. Yani $\phi(t) = F^{-\alpha}(t)$ konkav fonksiyondur.

(4.1.6) eşitliğinde $\phi'(t)$ fonksiyonu negatiftir, dolayısıyla $\phi(t)$ azalan bir fonksiyondur.

$\phi(t)$ fonksiyonunun $(0, \phi(0))$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi

$$\phi(t) - \phi(0) = \phi'(0) \,.\, (t-0)$$

ise

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(0) + \phi'(0)(t-0) \\ &= F^{-\alpha}(0) - \alpha F^{-\alpha-1}(0) F'(0)\, t \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

olur. Bu teğet doğrusunun t eksenini kestiği nokta $(T^*, 0)$ ise

$$0 = F^{-\alpha}(0) - \alpha F^{-\alpha-1}(0) F'(0)\, T^*$$

olur. Buradan $T^* = \frac{F(0)}{\alpha F'(0)}$ bulunur.

Ayrıca (4.1.9) dan

$$F^{-\alpha}(t) = F^{-\alpha}(0) - \alpha F^{-\alpha-1}(0) F'(0) t,$$

$$\frac{1}{F^{\alpha}(t)} = \frac{1}{F^{\alpha}(0)} - \frac{\alpha F'(0) t}{F^{\alpha+1}(0)},$$

$$F^{\alpha}(t) = \frac{F^{\alpha+1}(0)}{F(0) - \alpha F'(0) t}$$

olur. O halde $t \to T_c^-$ iken $\phi(t) \to 0$ olur. Böylece $\lim_{t \to T_c^-} F(t) = \infty$ bulunur.

4.2. Çözümün Patlaması

Bu kısımda (4.1.1) probleminin çözümünün patlamasını Lemma 4.1.3 ten faydalanarak göstereceğiz. Bunu yapmak için önce aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau \left\|\nabla u\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t g_2(\tau)\,d\tau \left\|\nabla v\right\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left[(g_1 \circ \nabla u)(t) + (g_2 \circ \nabla v)(t)\right] - \int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

ve

$$\begin{aligned} I(t) &= M\left(\|\nabla u(t)\|^2\right)\|\nabla u\|^2 + M\left(\|\nabla v(t)\|^2\right)\|\nabla v\|^2 \\ &- (p+q+2)\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Ayrıca enerji fonksiyoneli:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{1}{2}\left[\overline{M}\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\overline{M}\left(\|\nabla v(t)\|_2^2\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau \left\|\nabla u\right\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^t g_2(\tau)\,d\tau \left\|\nabla v\right\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left[(g_1 \circ \nabla u)(t) + (g_2 \circ \nabla v)(t)\right] - \int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} (\phi \circ \psi)(t) &= \int_0^t \phi(t-\tau)\int_\Omega |\psi(t) - \psi(\tau)|^2\,dx\,d\tau \\ &= \int_0^t \phi(t-\tau)\left\|[\psi(t) - \psi(\tau)]\right\|^2 d\tau \end{aligned}$$

dır. Son olarak tanım kümemiz

$$W = \left\{(u,v) : (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\,,\; I(u,v) > 0\right\} \cup \{(0,0)\} \tag{4.2.4}$$

şeklindedir.

Şimdi enerji fonksiyonelinin artmayan bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

Lemma 4.2.1. $\forall t \geq 0$ için $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur. Yani

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{1}{2}\left[(g_1' \circ \nabla u)(t) + (g_2' \circ \nabla v)(t)\right] \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

dır. Ayrıca

$$E(t) \leq E(0) - \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right) d\tau. \tag{4.2.6}$$

yazılabilir.

İspat. (4.1.1) in ilk denklemini u_t ve ikinci denklemini v_t ile çarpıp Ω bölgesi üzerinde integral alınıp, (4.1.3) ve (A1)-(A2) varsayımlarını kullanarak (4.2.5) i elde edeceğiz.

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_\Omega [u_t u_{tt} + v_t v_{tt}]\, dx}_{I_1} - \underbrace{\int_\Omega \left[u_t M\left(\|\nabla u\|^2\right) \triangle u + v_t M\left(\|\nabla v\|^2\right) \triangle v\right] dx}_{I_2} \\ &+ \underbrace{\int_\Omega \left[u_t \int_0^t g_1(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau + v_t \int_0^t g_2(t-\tau) \triangle v(\tau)\, d\tau\right] dx}_{I_3} \\ &+ \underbrace{\int_\Omega [u_t u_t + v_t v_t]\, dx}_{I_4} \\ = &\underbrace{\int_\Omega \left[u_t (p+1) |v|^{q+1} |u|^{p-1} u + v_t (q+1) |u|^{p+1} |v|^{q-1} v\right] dx}_{I_5} \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

olur. Kolaylık olsun diye (4.2.7) nin terimlerini ayrı ayrı hesaplayalım:

I_1 için

$$\begin{aligned}\int_\Omega [u_t u_{tt} + v_t v_{tt}]\, dx &= \int_\Omega \left[\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(|u_t|^2 + |v_t|^2\right) dx\right] \\ &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |v_t|^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right),\end{aligned}$$

I_2 için; Green eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[u_t M\left(\|\nabla u\|^2\right) \triangle u + v_t M\left(\|\nabla v\|^2\right) \triangle v\right] dx \qquad (4.2.9)\\ =& \int_\Omega u_t M\left(\|\nabla u\|^2\right) \triangle u dx + \int_\Omega v_t M\left(\|\nabla v\|^2\right) \triangle v dx \\ =& -\int_\Omega M\left(\|\nabla u\|^2\right) \bigtriangledown u \bigtriangledown u_t dx - \int_\Omega M\left(\|\nabla v\|^2\right) \bigtriangledown v \bigtriangledown v_t dx \\ =& -\int_\Omega M\left(\|\nabla u\|^2\right) \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\bigtriangledown u|^2 dx - \int_\Omega M\left(\|\nabla v\|^2\right) \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\bigtriangledown v|^2 dx \\ =& -M\left(\|\nabla u\|^2\right)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 dx - M\left(\|\nabla v\|^2\right)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\bigtriangledown v|^2 dx \\ =& -\frac{1}{2}M\left(\|\nabla u\|^2\right)\frac{d}{dt}\|\bigtriangledown u\|^2 - \frac{1}{2}M\left(\|\nabla v\|^2\right)\frac{d}{dt}\|\bigtriangledown v\|^2 \\ =& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\overline{M}\left(\|\nabla u\|^2\right) + \overline{M}\left(\|\nabla v\|^2\right)\right],\end{aligned}$$

I_3 için; Green eşitliği uygulayalım

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[u_t \int_0^t g_1(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau + v_t \int_0^t g_2(t-\tau) \triangle v(\tau)\, d\tau\right] dx \qquad (4.2.10)\\ =& \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega u_t \triangle u(\tau)\, dx d\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega v_t \triangle v(\tau)\, dx d\tau \\ =& -\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u_t(t) \bigtriangledown u(\tau)\, dx d\tau - \int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v_t(t) \bigtriangledown v(\tau)\, dx d\tau \\ =& -\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u_t(t)\left[\bigtriangledown u(\tau) - \bigtriangledown u(t) + \bigtriangledown u(t)\right] dx d\tau \\ & -\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v_t(t)\left[\bigtriangledown v(\tau) - \bigtriangledown v(t) + \bigtriangledown v(t)\right] dx d\tau \\ =& -\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u_t(t)\left[\bigtriangledown u(\tau) - \bigtriangledown u(t)\right] dx d\tau - \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u_t(t) \bigtriangledown u(t)\, dx d\tau \\ & -\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v_t(t)\left[\bigtriangledown v(\tau) - \bigtriangledown v(t)\right] dx d\tau \\ & -\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v_t(t) \bigtriangledown v(t)\, dx d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int_0^t g_1(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\nabla u(\tau)-\nabla u(t)]^2 dxd\tau - \int_0^t g_1(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\nabla u(t)]^2 dxd\tau \\
& + \int_0^t g_2(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\nabla v(\tau)-\nabla v(t)]^2 dxd\tau - \int_0^t g_2(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\nabla v(t)]^2 dxd\tau \\
= & \int_0^t g_1(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\nabla u(\tau)-\nabla u(t)]^2 dxd\tau + \int_0^t g_1'(t-\tau)\frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla u(\tau)-\nabla u(t)]^2 dxd\tau \\
& - \int_0^t g_1'(t-\tau)\frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla u(\tau)-\nabla u(t)]^2 dxd\tau \\
& - \int_0^t g_1(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\nabla u(t)]^2 dxd\tau - \int_0^t g_1'(t-\tau)\frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla u(t)]^2 dxd\tau \\
& - \int_0^t g_1'(t-\tau)\frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla u(t)]^2 dxd\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\nabla v(\tau)-\nabla v(t)]^2 dxd\tau \\
& + \int_0^t g_2'(t-\tau)\frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla v(\tau)-\nabla v(t)]^2 dxd\tau - \int_0^t g_2'(t-\tau)\frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla v(\tau)-\nabla v(t)]^2 dxd\tau \\
& - \int_0^t g_2(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [\nabla v(t)]^2 dxd\tau - \int_0^t g_2'(t-\tau)\frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla v(t)]^2 dxd\tau \\
& - \int_0^t g_2'(t-\tau)\frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla v(t)]^2 dxd\tau \\
= & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega [\nabla u(\tau)-\nabla u(t)]^2 dxd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t g_1'(t-\tau)\int_\Omega [\nabla u(\tau)-\nabla u(t)]^2 dxd\tau \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega [\nabla u(t)]^2 dxd\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g_1'(t-\tau)\int_\Omega [\nabla u(t)]^2 dxd\tau \\
& +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega [\nabla v(\tau)-\nabla v(t)]^2 dxd\tau - \frac{1}{2}\int_0^t g_2'(t-\tau)\int_\Omega [\nabla v(\tau)-\nabla v(t)]^2 dxd\tau \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega [\nabla v(t)]^2 dxd\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g_2'(t-\tau)\int_\Omega [\nabla v(t)]^2 dxd\tau \\
= & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g_1\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}(g_1'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_1(\tau)\|\nabla u(t)\|^2 d\tau \\
& +\frac{1}{2}\int_0^t g_1'(\tau)\|\nabla u(t)\|^2 d\tau + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g_2\circ\nabla v)(t) - \frac{1}{2}(g_2'\circ\nabla v)(t) \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_2(\tau)\|\nabla v(t)\|^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g_2'(\tau)\|\nabla v(t)\|^2 d\tau \\
= & \frac{d}{dt}\Bigg[\frac{1}{2}\left((g_1\circ\nabla u)(t) + (g_2\circ\nabla v)(t)\right) \\
& -\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\|\nabla u(t)\|^2 d\tau + \int_0^t g_2(\tau)\|\nabla v(t)\|^2 d\tau\right)\Bigg] \\
& -\frac{1}{2}\left[(g_1'\circ\nabla u)(t) + (g_2'\circ\nabla v)(t)\right] + \frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1'(\tau)\|\nabla u(t)\|^2 d\tau + \int_0^t g_2'(\tau)\|\nabla v(t)\|^2 d\tau\right)
\end{aligned}$$

I_4 için

$$\begin{aligned}\int_\Omega [u_t u_t + v_t v_t]\, dx &= \int_\Omega \left[(u_t)^2 + (v_t)^2\right] dx \\ &= \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2, \qquad (4.2.11)\end{aligned}$$

I_5 için

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[u_t\,(p+1)\,|v|^{q+1}\,|u|^{p-1}\,u + v_t\,(q+1)\,|u|^{p+1}\,|v|^{q-1}\,v\right] dx \\ =\ &\int_\Omega (p+1)\,u_t\,|u|^p\,|v|^{q+1}\,u dx + \int_\Omega (q+1)\,v_t\,|v|^q\,u^{p+1} dx \\ =\ &\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^{p+1}\,|v|^{q+1}\,dx \qquad (4.2.12)\end{aligned}$$

dır. Bu ifadeler (4.2.7) de yazılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - \left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\overline{M}\left(\|\nabla u\|^2\right) + \overline{M}\left(\|\nabla v\|^2\right)\right)\right] \\ &+\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\left(g_1 \circ \bigtriangledown u\right)(t) + \left(g_2 \circ \bigtriangledown v\right)(t)\right)\right. \\ &\left.-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\,\|\bigtriangledown u(t)\|^2\, d\tau + \int_0^t g_2(\tau)\,\|\bigtriangledown v(t)\|^2\, d\tau\right)\right] \\ &-\frac{1}{2}\left[\left(g_1' \circ \bigtriangledown u\right)(t) + \left(g_2' \circ \bigtriangledown v\right)(t)\right] \\ &+\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1'(\tau)\,\|\bigtriangledown u(t)\|^2\, d\tau + \int_0^t g_2'(\tau)\,\|\bigtriangledown v(t)\|^2\, d\tau\right) \\ &+\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \\ =\ &\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^{p+1}\,|v|^{q+1}\,dx\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{1}{2}\left[\overline{M}\left(\|\nabla u\|^2\right) + \overline{M}\left(\|\nabla v\|^2\right)\right]\right. \\ &+\frac{1}{2}\left(\left(g_1 \circ \bigtriangledown u\right)(t) + \left(g_2 \circ \bigtriangledown v\right)(t)\right) - \frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\,\|\bigtriangledown u(t)\|^2\, d\tau + \int_0^t g_2(\tau)\,\|\bigtriangledown v(t)\|^2\, d\tau\right) \\ &\left.-\int_\Omega |u|^{p+1}\,|v|^{q+1}\,dx\right] \\ =\ &-\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \frac{1}{2}\left[\left(g_1' \circ \bigtriangledown u\right)(t) + \left(g_2' \circ \bigtriangledown v\right)(t)\right] \\ &-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1'(\tau)\,\|\bigtriangledown u(t)\|^2\, d\tau + \int_0^t g_2'(\tau)\,\|\bigtriangledown v(t)\|^2\, d\tau\right).\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+\frac{1}{2}\left[\overline{M}\left(\|\nabla u\|^2\right)+\overline{M}\left(\|\nabla v\|^2\right)\right] \\ &-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\|\nabla u(t)\|^2 d\tau+\int_0^t g_2(\tau)\|\nabla v(t)\|^2 d\tau\right) \\ &+\frac{1}{2}\left((g_1\circ\nabla u)(t)+(g_2\circ\nabla v)(t)\right)-\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}dx. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\|u_t\|^2+\|v_t\|^2+\frac{1}{2}\left[(g_1'\circ\nabla u)(t)+(g_2'\circ\nabla v)(t)\right] \\ &-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1'(\tau)\|\nabla u(t)\|^2 d\tau+\int_0^t g_2'(\tau)\|\nabla v(t)\|^2 d\tau\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\left[\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right]+\frac{1}{2}\left[(g_1'\circ\nabla u)(t)+(g_2'\circ\nabla v)(t)\right] \\ &-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1'(\tau)\|\nabla u(t)\|^2 d\tau+\int_0^t g_2'(\tau)\|\nabla v(t)\|^2 d\tau\right) \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

$$\begin{aligned} E(t)-E(0) &= -\int_0^t\left[\|u_s\|^2+\|v_s\|^2\right]ds+\frac{1}{2}\int_0^t\left[(g_1'\circ\nabla u)(s)+(g_2'\circ\nabla v)(s)\right]ds \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_0^t g_1'(\tau)\|\nabla u(t)\|^2 d\tau+\int_0^t g_2'(\tau)\|\nabla v(t)\|^2 d\tau\right)ds \\ &\leq -\int_0^t\left[\|u_s\|^2+\|v_s\|^2\right]ds. \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin $(0,t)$ aralığında integrali alınırsa

$$E(t)\leq E(0)-\int_0^t\left[\|u_s\|^2+\|v_s\|^2\right]ds \tag{4.2.15}$$

elde edilir.

Lemma 4.2.2 $g_i(t)$, $(A1)-(A2)$ varsayımlarını sağlayan bir fonksiyon ve $H(t)$ iki kez diferansiyellenebilir sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall t\in[0,T_0)$ için

$(u(x,t), v(x,t))$, (4.1.1) probleminin çözümü

$$\begin{cases} H''(t) + H'(t) > 2\int_0^t g(t-\tau) \int_\Omega [\nabla u(\tau,x) \nabla u(t,x) + \nabla u(\tau,x) \nabla u(t,x)]\, dx d\tau \\ H(0) > 0,\ H'(0) > 0 \end{cases} \tag{4.2.16}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $H(t)$ fonksiyonu $[0, T_0)$ aralığında kesinlikle artandır(Wang 2009).

İspat.

Aşağıdaki yardımcı diferansiyel denklemi alalım:

$$\begin{cases} h''(t) + h'(t) = 2\int_0^t g(t-\tau) \int_\Omega [\nabla u(\tau,x) \nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x) \nabla v(t,x)]\, dx d\tau \\ h(0) = H(0),\ h'(0) = 0. \end{cases}$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü homojen ve özel çözümlerin toplamıdır. Yani $h(t) = h_h + h_p$ dır.

Şimdi homojen kısmın çözümünü bulalım:

$$r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r+1) = 0,\ r_1 = 0;\ r_2 = -1$$

den

$$h_h = c_1 + c_2 e^{-t}$$

dır.

Şimdi h_p yi değişen parametreler yöntemi ile bulalım

$$\begin{cases} c_1' + c_2' e^{-t} = 0 \\ c_1'.0 + c_2' e^{-t} = 2\int_0^t g(t-\tau) \int_\Omega [\nabla u(\tau,x) \nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x) \nabla v(t,x)]\, dx d\tau \end{cases}$$

dır. Buradan c_2 yi bulalım

$$c_2' = -2e^t \int_0^t g(t-\tau) \int_\Omega [\nabla u(\tau,x) \nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x) \nabla v(t,x)]\, dx d\tau$$

bir sonraki adımda $(0,t)$ aralığında integral alacağımız için karışıklığı önlemek amacıyla t yerine ζ yazarsak

$$c_2' = -2\int_0^\zeta e^\zeta g(\zeta-\tau) \int_\Omega [\nabla u(\tau,x) \nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x) \nabla v(t,x)]\, dx d\tau$$

olur. Her iki tarafın $(0,t)$ aralığında integrali alınarak

$$c_2 = -2\int_0^t \int_0^\zeta e^\zeta g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta$$

bulunur.

Şimdi c_1 i bulalım

$$\begin{aligned} c_1^{'} &= -c_2^{'} e^{-t} = 2\int_0^t g(t-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau \\ &= 2\int_0^\zeta g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau \end{aligned}$$

her iki tarafın $(0,t)$ aralığında integrali alınarak

$$c_1 = 2\int_0^t \int_0^\zeta g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta$$

bulunur. Böylece homojen kısmın çözümü

$$\begin{aligned} h_p &= c_1 + c_2 e^{-t} \\ &= 2\int_0^t \int_0^\zeta g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \\ &\quad -2e^{-t}\int_0^t \int_0^\zeta e^\zeta g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \\ &= 2\int_0^t \int_0^\zeta g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \\ &\quad -2\int_0^t \int_0^\zeta e^{\zeta-t} g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \\ &= 2\int_0^t \int_0^\zeta \left(1-e^{\zeta-t}\right) g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \end{aligned}$$

olur. Diferansiyel denklemin çözümü $h(t) = h_h + h_p$ olduğundan

$$\begin{aligned} h(t) &= c_1 + c_2 e^{-t} \\ &\quad +2\int_0^t \int_0^\zeta \left(1-e^{\zeta-t}\right) g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

olur. Ayrıca $h(0) = c_1 + c_2$ dir.

$$\begin{aligned} h^{'}(t) &= -c_2 e^{-t} \\ &\quad +\frac{d}{dt} 2\int_0^t \int_0^\zeta \left(1-e^{\zeta-t}\right) g(\zeta-\tau) \int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \end{aligned}$$

ise $h'(0) = -c_2$ dir. Başlangıç koşullarından $h'(0) = 0$ idi. $h'(0) = -c_2 = 0$ ise $c_2 = 0$ olur. $h(0) = c_1 + c_2$ den $c_1 = \ h(0)$ olur. c_1 ve c_2 yi (4.2.17) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned} h(t) &= h(0) + 0.e^{-t} \\ &\quad +2\int_0^t\int_0^\zeta \left(1-e^{\zeta-t}\right) g(\zeta-\tau)\int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \\ &= h(0) \\ &\quad +2\int_0^t\int_0^\zeta \left(1-e^{\zeta-t}\right) g(\zeta-\tau)\int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)\right] dxd\tau d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2\int_0^t\int_0^\zeta e^{\zeta-t} g(\zeta-\tau)\int_\Omega \left[\nabla u(\tau,x)\nabla u(\zeta,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(\zeta,x)\right] dxd\tau d\zeta \\ &= 2e^{-t}\int_0^t\int_0^\zeta e^{\zeta} g(\zeta-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau,x)\nabla u(\zeta,x)\, dxd\tau d\zeta \\ &\quad +2e^{-t}\int_0^t\int_0^\zeta e^{\zeta} g(\zeta-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau,x)\nabla v(\zeta,x)\, dxd\tau d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^\zeta &= e^{\frac{\zeta}{2}+\frac{\zeta-\tau}{2}+\frac{\tau}{2}} \\ &= e^{\frac{\zeta}{2}}.e^{\frac{\zeta-\tau}{2}}.e^{\frac{\tau}{2}} \end{aligned}$$

yerine yazalım.

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2e^{-t}\int_0^t\int_0^\zeta e^{\frac{\zeta}{2}}.e^{\frac{\zeta-\tau}{2}}.e^{\frac{\tau}{2}} g(\zeta-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau,x)\nabla u(\zeta,x)\, dxd\tau d\zeta \\ &\quad +2e^{-t}\int_0^t\int_0^\zeta e^{\frac{\zeta}{2}}.e^{\frac{\zeta-\tau}{2}}.e^{\frac{\tau}{2}} g(\zeta-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau,x)\nabla v(\zeta,x)\, dxd\tau d\zeta \\ &= 2e^{-t}\int_\Omega\int_0^t e^{\frac{\zeta}{2}}\nabla u(\zeta,x)\int_0^\zeta e^{\frac{\zeta-\tau}{2}} g(\zeta-\tau)\, e^{\frac{\tau}{2}}\nabla u(\tau,x)\, d\tau d\zeta dx \\ &\quad +2e^{-t}\int_\Omega\int_0^t e^{\frac{\zeta}{2}}\nabla v(\zeta,x)\int_0^\zeta e^{\frac{\zeta-\tau}{2}} g(\zeta-\tau)\, e^{\frac{\tau}{2}}\nabla v(\tau,x)\, d\tau d\zeta dx \end{aligned}$$

$(A2)$ den

$$h'(t) \geq 0$$

her $t \in [0, T_0)$ için olur.

$$\begin{aligned} h^{'}(t) &\geq 0 \Rightarrow \int_0^t h^{'}(t)\,dt \geq \int_0^t 0dt \\ &\Rightarrow h(t) - h(0) \geq 0 \\ &\Rightarrow h(t) \geq h(0) \end{aligned}$$

Yardımcı diferansiyel denklemimizden $h(0) = H(0)$ olduğundan $h(t) \geq h(0) = H(0)$ olur. Lemma 4.2.1 den $H'(0) > 0$ idi.

Yardımcı denklemimizden $h'(0) = 0$ ise $H'(0) > 0 = h'(0)$ buradan $H'(0) > h'(0)$ olur. $t = 0$ için göstermiş olduk.

Şimdi $t > 0$ için yani $H^{'}(t) > h^{'}(t)$ olduğunu çelişki yöntemiyle göstereceğiz.

Öncelikle $t > 0$ için $H^{'}(t) > h^{'}(t)$, $t > 0$ eşitsizliğinin doğru olmadığını varsayalım, bu da aşağıdaki gibi bir t_0 zamanının

$$t_0 = min\left\{t > 0 : H^{'}(t) = h^{'}(t)\right\}$$

olduğu anlamına gelir.

Lemma 4.2.2 ve yardımcı denklemimizin çözümünden, $t_0 > 0$ ve $H^{'}(t_0) > h^{'}(t_0)$ koşullarını kullanarak ispata başlayalım.

$$\begin{cases} H^{''}(t) + H^{'}(t) > 2\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega [\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)]\,dxd\tau \\ H(0) > 0, H^{'}(0) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^{''}(t) + h^{'}(t) = 2\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega [\nabla u(\tau,x)\nabla u(t,x) + \nabla v(\tau,x)\nabla v(t,x)]\,dxd\tau \\ h(0) = H(0)\,,\ h^{'}(0) = 0 \end{cases}$$

eşitsizliklerin sağ tarafı eşit olduğundan

$$H^{''}(t) + H^{'}(t) > h^{''}(t) + h^{'}(t)$$

yardımcı diferansiyel denklemden

$$\begin{aligned} h(0) &= H(0) \text{ ise } H(0) - h(0) = 0 \\ H^{'}(0) &> h^{'}(0) \text{ ise } H^{'}(0) - h^{'}(0) > 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{yardımcı denklemden } h^{'}(0)=0 \\ \text{Lemma 4.2.2 den } H^{'}(0)>0\end{array}\right\}$$

ise

$$H^{'}(0)>h^{'}(0) \text{ ise } H^{'}(0)-h^{'}(0)>0$$

olur.

$$\left\{\begin{array}{c}H^{''}(t)+H^{'}(t)>h^{''}(t)+h^{'}(t) \\ H(0)-h(0)=0 \\ H^{'}(0)-h^{'}(0)>0\end{array}\right. \tag{4.2.18}$$

Bu denklemi çözelim.

$H^{''}(t)-h^{''}(t)+H^{'}(t)-h^{'}(t)>0$ eşitsizliğini $H^{'}(t)-h^{'}(t)\neq 0$ a bölelim.

$$\frac{H^{''}(t)-h^{''}(t)}{H^{'}(t)-h^{'}(t)}+\frac{H^{'}(t)-h^{'}(t)}{H^{'}(t)-h^{'}(t)}>0$$

$$\frac{H^{''}(t)-h^{''}(t)}{H^{'}(t)-h^{'}(t)}+1>0$$

$(0,t_0)$ aralığında integral alalım.

$$\int_0^{t_0}\frac{H^{''}(t)-h^{''}(t)}{H^{'}(t)-h^{'}(t)}dt+\int_0^{t_0}1dt>0$$

$$ln\left[H^{'}(t)-h^{'}(t)\right|_0^{t_0}+[t|_0^{t_0}>0$$

ise

$$ln\left[H^{'}(t_0)-h^{'}(t_0)\right]-ln\left[H^{'}(0)-h^{'}(0)\right]+[t_0-0]>0,$$

$$\begin{aligned} & ln\frac{H^{'}(t_0)-h^{'}(t_0)}{H^{'}(0)-h^{'}(0)} \\ > & -t_0 \text{ ise } \frac{H^{'}(t_0)-h^{'}(t_0)}{H^{'}(0)-h^{'}(0)} \\ > & e^{-t_0}\end{aligned}$$

$H^{'}(t_0)-h^{'}(t_0)>e^{-t_0}\left(H^{'}(0)-h^{'}(0)\right)$ eşitsizliğin sağ tarafı (4.2.18) den pozitiftir.

$H^{'}(t_0)-h^{'}(t_0)>0$ ise $H^{'}(t_0)>h^{'}(t_0)$ olur. Halbuki biz eşit kabul etmiştik. Çelişki elde ettik. O halde $H^{'}(t_0)>h^{'}(t_0)$ dır.

$H'(t) > h'(t)$, $t \geq 0$ için sağlanır. Böylece $H(t)$ kesinlikle artandır.

Lemma 4.2.3. $(u_0, v_0) \in \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \times \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$, $(u_1, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ve

$$\int_\Omega (u_0 u_1 + v_0 v_1)\, dx \geq 0 \tag{4.2.19}$$

başlangıç koşulları altında (4.1.1) probleminin $(u(t), v(t))$ lokal çözümü $[0, T)$ aralığında

$$I(u(t), v(t)) < 0,$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $[0, T)$ aralığında $H(t) = \|u(t,.)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2$ kesinlikle artandır.

İspat. (4.1.1) probleminin lokal çözümü $(u(t), v(t))$ ve

$$I(t) = M\left(\|\nabla u(t)\|^2\right)\|\nabla u\|^2 + M\left(\|\nabla v(t)\|^2\right)\|\nabla v\|^2 - (p+q+2)\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}\, dx < 0,$$

olmak üzere basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} H(t) &= \|u(t,.)\|_2^2 + \|v(t,.)\|_2^2 \\ &= \int_\Omega |u(t)|^2\, dx + \int_\Omega |v(t)|^2\, dx \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

den

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}H(t) = \int_\Omega u u_t dx + \int_\Omega v v_t dx \tag{4.2.21}$$

ve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}H(t) \\ =\ & \int_\Omega |u_t|^2\, dx + \int_\Omega u u_{tt} dx + \int_\Omega |v_t|^2\, dx + \int_\Omega v v_{tt} dx \\ =\ & \int_\Omega |u_t|^2\, dx + \int_\Omega |v_t|^2\, dx \\ & + \int_\Omega u\left[M\left(\|\nabla u\|^2\right) \triangle u - \int_0^t g_1(t-\tau) \triangle u(\tau)\, d\tau - u_t + (p+1)|v|^{q+1}|u|^{p-1}u\right] dx \\ & + \int_\Omega v\left[M\left(\|\nabla v\|^2\right) \triangle v - \int_0^t g_2(t-\tau) \triangle v(\tau)\, d\tau - v_t + (q+1)|u|^{p+1}|v|^{q-1}v\right] dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \int_\Omega |v_t|^2\,dx}_{>0} + \int_\Omega uM\left(\|\nabla u\|^2\right)\triangle\,udx \\
&\quad -\int_\Omega u\int_0^t g_1(t-\tau)\triangle\,u(\tau)\,d\tau dx - \int_\Omega uu_tdx + \int_\Omega u(p+1)|v|^{q+1}|u|^{p-1}udx \\
&\quad +\int_\Omega vM\left(\|\nabla v\|^2\right)\triangle\,vdx - \int_\Omega v\int_0^t g_2(t-\tau)\triangle\,v(\tau)\,d\tau dx \\
&\quad -\int_\Omega vv_tdx + \int_\Omega v(q+1)|u|^{p+1}|v|^{q-1}vdx \\
&\geq \int_\Omega M\left(\|\nabla u\|^2\right)u\triangle\,udx - \int_\Omega\int_0^t g_1(t-\tau)\,u\triangle\,u(\tau)\,d\tau dx \\
&\quad -\int_\Omega uu_tdx + \int_\Omega (p+1)|v|^{q+1}|u|^{p-1}udx \\
&\quad +\int_\Omega M\left(\|\nabla v\|^2\right)v\triangle\,vdx - \int_\Omega\int_0^t g_2(t-\tau)\,v\triangle\,v(\tau)\,d\tau dx \\
&\quad -\int_\Omega vv_tdx + \int_\Omega (q+1)|u|^{p+1}|v|^{q-1}vdx
\end{aligned} \tag{4.2.22}
$$

(4.2.22) de birinci, ikinci, beşinci ve altıncı terimlere Green eşitliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left[M\left(\|\nabla u\|^2\right)|\nabla u|^2 + M\left(\|\nabla v\|^2\right)|\nabla v|^2\right]dx + \int_\Omega (p+q+2)|u|^{p+1}|v|^{q+1}dx \\
&\quad -\int_\Omega (uu_t+vv_t)\,dx + \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u(t)\,dxd\tau \\
&\quad +\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\nabla v(t)\,dxd\tau \\
&= \underbrace{-I(u,v)}_{>0} - \int_\Omega (uu_t+vv_t)\,dx + \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u(t)\,dxd\tau \\
&\quad +\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\nabla v(t)\,dxd\tau \\
&> -\int_\Omega (uu_t+vv_t)\,dx + \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u(t)\,dxd\tau \\
&\quad +\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\nabla v(t)\,dxd\tau \\
&= -\frac{1}{2}\frac{dH}{dt} + \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u(t)\,dxd\tau \\
&\quad +\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\nabla v(t)\,dxd\tau
\end{aligned}
$$

eşitsizlikler düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d^2H}{dt^2} &> -\frac{1}{2}\frac{dH}{dt}+\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u(t)\,dxd\tau \\
&+\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\nabla v(t)\,dxd\tau \\
\frac{1}{2}\frac{d^2H}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dH}{dt} &> \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla u(t)\,dxd\tau \\
&+\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\nabla v(t)\,dxd\tau .
\end{aligned}$$

Lemma 4.2.2 den Lemma 4.2.3 ün ispatı tamamlanır.

Böylece $H(t)=\|u(t,.)\|_2^2+\|v(t,.)\|_2^2$, $[0,T)$ üzerinde kesinlikle artandır.

Teorem 4.2.1 $(A1)-(A3)$ varsayımları altında, $(u_0,v_0)\in\left(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)\times\left(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$ ve $(u_1,v_1)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ başlangıç koşullarıyla ve

$$E(0)>0, \tag{4.2.23}$$

$$I(u_0,v_0)<0, \tag{4.2.24}$$

$$\int_\Omega (u_0u_1+v_0v_1)\,dx\geq 0, \tag{4.2.25}$$

$$\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\geq\frac{(p+q+2)\,\eta}{\min\{m_1,m_2\}}E(0), \tag{4.2.26}$$

şartları sağlansın. Böylece (4.1.1) probleminin çözümü $T<\infty$ zamanında patlar. Yani

$$\lim_{t\to T^-}\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)=\infty,$$

dır. Burada η, Ω üzerinde Poincaré eşitsizliği sabitidir.

Lemma 4.2.4. $(u_0,v_0)\in\left(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)\times\left(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$ ve $(u_1,v_1)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ başlangıç koşullarıyla ve Teorem 4.2.1 in varsayımları sağlanırsa, (4.1.1) probleminin çözümü $(u(x,t),v(x,t))$ olmak üzere $\forall\ t\in[0,T)$ için

$$I(u(t,x),v(t,x))<0, \tag{4.2.27}$$

$$\|u(t)\|^2+\|v(t)\|^2\geq\frac{(p+q+2)\,\eta}{\min\{m_1,m_2\}}E(0), \tag{4.2.28}$$

sağlanır.

İspat. Lemmamızın ispatını çelişki yöntemiyle ispatlayacağız. Öncelikle (4.2.27) nin $[0, T)$ aralığında doğru olmadığını kabul edelim. Bu aşağıdaki gibi bir t_1 zamanının

$$t_1 = \min\{t \in (0, T) : \; I(u, v) = 0\} > 0, \tag{4.2.29}$$

olduğu anlamına gelir.

$I(u, v) < 0$ den, $[0, t_1)$ aralığında ve Lemma 4.2.3 ile $H(t) = \|u(t, .)\|_2^2 + \|v(t, .)\|_2^2$, $[0, t_1)$ aralığında kesinlikle artandır ki bu,

$$\begin{aligned} H(t) &= \|u(t, .)\|_2^2 + \|v(t, .)\|_2^2 \\ &> \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \\ &\geq \frac{(p + q + 2)\eta}{\min\{m_1, m_2\}} E(0) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan $H(t) = \|u(t, .)\|_2^2 + \|v(t, .)\|_2^2$, $[0, t_1)$ üzerinde süreklidir. Böylece aşağıda verilen eşitsizlik elde edilir.

$$H(t_1) = \|u(t_1, .)\|_2^2 + \|v(t_1, .)\|_2^2 \geq \frac{(p + q + 2)\eta}{\min\{m_1, m_2\}} E(0). \tag{4.2.30}$$

Diğer yandan, (4.2.13) enerji fonksiyonelinden

$$\begin{aligned} E(t_1) &= \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{1}{2}\left[\overline{M}\left(\|\nabla u\|^2\right) + \overline{M}\left(\|\nabla v\|^2\right)\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\|\nabla u(t_1)\|^2 d\tau + \int_0^t g_2(\tau)\|\nabla v(t_1)\|^2 d\tau\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left((g_1 \circ \nabla u)(t_1) + (g_2 \circ \nabla v)(t_1)\right) - \int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1} dx \end{aligned}$$

ve (4.2.6) dan

$$E(t_1) \leq E(0) - \int_0^t \left[\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right] d\tau$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t_1) + \int_0^t \left[\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right] d\tau \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right)}_{>0} + \frac{1}{2}\left[\overline{M}\left(\|\nabla u\|^2\right) + \overline{M}\left(\|\nabla v\|^2\right)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\|\bigtriangledown u(t_1)\|^2 d\tau+\int_0^t g_2(\tau)\|\bigtriangledown v(t_1)\|^2 d\tau\right)\\
&+\frac{1}{2}\left((g_1\circ\bigtriangledown u)(t_1)+(g_2\circ\bigtriangledown v)(t_1)\right)\\
&-\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}dx+\underbrace{\int_0^t\left[\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right]d\tau}_{>0}\\
\geq\ & \frac{1}{2}\left[\overline{M}\left(\|\triangledown u\|^2\right)+\overline{M}\left(\|\triangledown v\|^2\right)\right]\\
&-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\|\bigtriangledown u(t_1)\|^2 d\tau+\int_0^t g_2(\tau)\|\bigtriangledown v(t_1)\|^2 d\tau\right)\\
&-\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}dx
\end{aligned}
$$

olur. $I(u,v)=M\left(\|\nabla u(t)\|^2\right)\|\nabla u\|^2+M\left(\|\nabla v(t)\|^2\right)\|\nabla v\|^2-(p+q+2)\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}dx$ idi $I(u,v)=0$ kabulünden $\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}dx$ yerine

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}dx &= \frac{1}{p+q+2}\left[M\left(\|\nabla u(t_1)\|^2\right)\|\nabla u\|^2+M\left(\|\nabla v(t_1)\|^2\right)\|\nabla v\|^2\right]\\
&= \frac{1}{p+q+2}\left[\frac{p+q+2}{2}\overline{M}\left(\|\triangledown u(t_1)\|^2\right)+\frac{p+q+2}{2}\overline{M}\left(\|\triangledown v(t_1)\|^2\right)\right.\\
&\quad -\frac{p+q+2}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\int_\Omega\|\bigtriangledown u(t_1)\|^2 d\tau+\int_0^t g_2(\tau)\int_\Omega\|\bigtriangledown v(t_1)\|^2 d\tau\right)\\
&\quad \left.-M\left(\|\nabla u(t_1)\|^2\right)\|\nabla u(t_1)\|^2-M\left(\|\nabla v(t_1)\|^2\right)\|\nabla v(t_1)\|^2\right]
\end{aligned}
$$

yazılabilir. O halde eşitsizliğimiz

$$
\begin{aligned}
(p+q+2)E(0) \geq\ & \frac{p+q+2}{2}\overline{M}\left(\|\triangledown u(t_1)\|^2\right)+\frac{p+q+2}{2}\overline{M}\left(\|\triangledown v(t_1)\|^2\right)\\
&-\frac{p+q+2}{2}\left(\int_0^t g_1(\tau)\|\bigtriangledown u(t_1)\|^2 d\tau+\int_0^t g_2(\tau)\|\bigtriangledown v(t_1)\|^2 d\tau\right)\\
&-M\left(\|\nabla u(t_1)\|^2\right)\|\nabla u(t_1)\|^2-M\left(\|\nabla v(t_1)\|^2\right)\|\nabla v(t_1)\|^2\\
\geq\ & \frac{p+q+2}{2}\overline{M}\left(\|\triangledown u(t_1)\|^2\right)\\
&-\left[M\left(\|\nabla u(t_1)\|^2\right)+\frac{p+q+2}{2}\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right]\|\triangledown u(t_1)\|^2\\
&+\frac{p+q+2}{2}\overline{M}\left(\|\triangledown v(t_1)\|^2\right)\\
&-\left[M\left(\|\nabla v(t_1)\|^2\right)+\frac{p+q+2}{2}\int_0^t g_2(\tau)d\tau\right]\|\bigtriangledown v(t_1)\|^2
\end{aligned}
$$

yazılır. Lemma 4.1.1 den

$$
\frac{p+q+2}{2}\overline{M}(s)-\left[M(s)+\frac{p+q+2}{2}\int_0^\infty g_i(\tau)d\tau\right]s\geq m_i s,\forall s\geq 0
$$

idi. O halde eşitsizliğimiz

$$\begin{aligned} & (p+q+2)\, E(0) \\ \geq\ & m_1 \left\| \nabla u(t_1) \right\|^2 + m_2 \left\| \triangledown v(t_1) \right\|^2 \\ \geq\ & \min\{m_1, m_2\} \left[\left\| \nabla u(t_1) \right\|^2 + \left\| \triangledown v(t_1) \right\|^2 \right] \end{aligned}$$

olur. Poincaré eşitsizliği ile birlikte

$$\begin{aligned} (p+q+2)\, E(0) &\geq \min\{m_1, m_2\} \frac{1}{\eta} \left[\left\| u(t_1) \right\|^2 + \left\| v(t_1) \right\|^2 \right] \\ H(t_1) &= \left\| u(t_1) \right\|^2 + \left\| v(t_1) \right\|^2 \leq \frac{(p+q+2)\,\eta}{\min\{m_1, m_2\}} E(0) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda her $t \in [0, T)$ için çelişki elde ettik. Lemma 4.2.4 ün ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.1 in İspatı

Teoremi 1974 de Levine tarafından literatüre geçen konkavlık metodu ile ispatlayacağız.

Yardımcı bir fonksiyon tanımlayalım:

$$\begin{aligned} F(t) &= \left\| u(t) \right\|^2 + \left\| v(t) \right\|^2 + \int_0^t \left(\left\| u(\tau) \right\|^2 + \left\| v(\tau) \right\|^2 \right) d\tau \\ &\quad + (t_2 - t) \left(\left\| u_0 \right\|^2 + \left\| v_0 \right\|^2 \right) + \beta (t_3 + t)^2 \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

burada t_2, t_3 ve β pozitif sabitler olup daha sonra tanımlanacak.

Fonksiyonumuzun bir ve iki kez türevlerini alalım.

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2 \int_\Omega (u u_t + v v_t)\, dx + \int_0^t \int_\Omega (u u_\tau + v v_\tau)\, dx d\tau - \left\| u_0 \right\|^2 - \left\| v_0 \right\|^2 \\ &\quad - \left(\left\| u_0 \right\|^2 + \left\| v_0 \right\|^2 \right) + 2\beta (t_3 + t), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} F'(t) = \int_\Omega (u u_t + v v_t)\, dx + \int_0^t \int_\Omega (u u_\tau + v v_\tau)\, dx d\tau + \beta (t_3 + t) \tag{4.2.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F''(t) &= \int_\Omega \left(u_t^2+v_t^2\right)dx+\int_\Omega (uu_{tt}+vv_{tt})\,dx+\int_\Omega (uu_t+vv_t)\,dx+\beta \\
&= \|u_t\|^2+\|v_t\|^2+\int_\Omega M\left(\|\nabla u\|^2\right)u\Delta u dx \\
&\quad -\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega u\bigtriangleup u(\tau)\,dxd\tau \\
&\quad -\int_\Omega (uu_t+vv_t)\,dx+(p+1)\int_\Omega |v|^{q+1}|u|^{p+1}\,dx \\
&\quad +\int_\Omega M\left(\|\nabla v\|^2\right)v\bigtriangleup v dx+\int_\Omega (uu_t+vv_t)\,dx+\beta \\
&\quad -\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega v\bigtriangleup v(\tau)\,dxd\tau \\
&\quad +(q+1)\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx
\end{aligned}$$

elde ederiz. Green teoreminden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F''(t) &= \|u_t\|^2+\|v_t\|^2-\int_\Omega M\left(\|\nabla u\|^2\right)\bigtriangledown u\bigtriangledown u dx \\
&\quad +\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u\bigtriangledown u(\tau)\,dxd\tau \\
&\quad -\int_\Omega M\left(\|\nabla v\|^2\right)\bigtriangledown v\bigtriangledown v dx+\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v\bigtriangledown v(\tau)\,dxd\tau \\
&\quad +(p+q+2)\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx+\beta \\
&= \|u_t\|^2+\|v_t\|^2-M\left(\|\nabla u\|^2\right)\int_\Omega (\bigtriangledown u)^2\,dx \\
&\quad +\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u\left(\bigtriangledown u(\tau)-\bigtriangledown u(t)+\bigtriangledown u(t)\right)dxd\tau \\
&\quad -M\left(\|\nabla v\|^2\right)\int_\Omega (\bigtriangledown v)^2\,dx+\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v\left(\bigtriangledown v(\tau)-\bigtriangledown v(t)+\bigtriangledown v(t)\right)dxd\tau \\
&\quad +(p+q+2)\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx+\beta \\
&= \|u_t\|^2+\|v_t\|^2-M\left(\|\nabla u\|^2\right)\|\bigtriangledown u\|^2+\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u\left(\bigtriangledown u(\tau)-\bigtriangledown u(t)\right)dxd\tau \\
&\quad +\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u\bigtriangledown u(t)\,dxd\tau-M\left(\|\nabla v\|^2\right)\|\bigtriangledown v\|^2 \\
&\quad +\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v\left(\bigtriangledown v(\tau)-\bigtriangledown v(t)\right)dxd\tau+\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v\bigtriangledown v(t)\,dxd\tau \\
&\quad +(p+q+2)\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}\,dx+\beta
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
F''(t) \quad > \quad & 2\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)-2M\left(\|\nabla u\|^2\right)\|\bigtriangledown u\|^2 \\
& +2\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u\left(\bigtriangledown u(\tau)-\bigtriangledown u(t)\right)dxd\tau \\
& +2\int_0^t g_1(t-\tau)\|\bigtriangledown u(t)\|^2 d\tau-2M\left(\|\nabla v\|^2\right)\|\bigtriangledown v\|^2 \\
& +2\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v\left(\bigtriangledown v(\tau)-\bigtriangledown v(t)\right)dxd\tau \\
& +2\int_0^t g_2(t-\tau)\|\bigtriangledown v(t)\|^2 d\tau \\
& +2(p+q+2)\int_\Omega |u|^{p+1}|v|^{q+1}dx+2\beta \qquad (4.2.33)
\end{aligned}$$

Dördüncü ve altıncı terimlere Young eşitsizliği uygulayalım:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u\left(\bigtriangledown u(\tau)-\bigtriangledown u(t)\right)dxd\tau \\
= \quad & -\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown u\left(\bigtriangledown u(t)-\bigtriangledown u(\tau)\right)dxd\tau \\
\geq \quad & -\left[\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega (\bigtriangledown u)^2 dxd\tau+\frac{1}{4}\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \left(\bigtriangledown u(t)-\bigtriangledown u(\tau)\right)^2 dxd\tau\right] \\
= \quad & -\int_0^t g_1(\tau)\|\bigtriangledown u\|^2 d\tau-\frac{1}{4}(g_1\circ\bigtriangledown u)(t)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v\left(\bigtriangledown v(\tau)-\bigtriangledown v(t)\right)dxd\tau \\
= \quad & -\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \bigtriangledown v\left(\bigtriangledown v(t)-\bigtriangledown v(\tau)\right)dxd\tau \\
\geq \quad & -\left[\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega (\bigtriangledown v)^2 dxd\tau+\frac{1}{4}\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \left(\bigtriangledown v(t)-\bigtriangledown v(\tau)\right)^2 dxd\tau\right] \\
= \quad & -\int_0^t g_2(\tau)\|\bigtriangledown v\|^2 d\tau-\frac{1}{4}(g_2\circ\bigtriangledown v)(t)
\end{aligned}$$

olur.

Bunlar (4.2.33) te yerine yazılırsa ve (4.2.13) ten

$$
\begin{aligned}
F''(t) \geq\ & (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)-2M\left(\|\nabla u\|^2\right)\|\triangledown u\|^2 \\
& -(p+q+2)\int_0^t g_1(\tau)\|\triangledown u\|^2 d\tau+\left(p+q+\frac{3}{2}\right)(g_1\circ\triangledown u)(t) \\
& -2M\left(\|\nabla v\|^2\right)\|\triangledown v\|^2-\int_0^t g_2(\tau)\|\triangledown v\|^2 d\tau+\left(p+q+\frac{3}{2}\right)(g_2\circ\triangledown v)(t) \\
& -2(p+q+2)E(t)+(p+q+2)\overline{M}\left(\|\nabla u(t)\|^2\right)+(p+q+2)\overline{M}\left(\|\nabla v(t)\|^2\right)+2\beta \\
\geq\ & (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+(p+q+2)\overline{M}\left(\|\nabla u(t)\|^2\right) \\
& -2M\left(\|\nabla u\|^2\right)\|\triangledown u\|^2 \\
& -(p+q+2)\int_0^t g_1(\tau)\|\triangledown u\|^2 d\tau+(p+q+2)\overline{M}\left(\|\nabla v(t)\|^2\right) \\
& -2M\left(\|\nabla v\|^2\right)\|\triangledown v\|^2 \\
& -\int_0^t g_2(\tau)\|\triangledown v\|^2 d\tau-2(p+q+2)E(t)+2\beta \\
=\ & (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\
& +2\left[\frac{(p+q+2)}{2}\overline{M}\left(\|\nabla u(t)\|^2\right)-M\left(\|\nabla u\|^2\right)\|\triangledown u\|^2-\frac{(p+q+2)}{2}\int_0^t g_1(\tau)\|\triangledown u\|^2 d\tau\right] \\
& +2\left[\frac{(p+q+2)}{2}\overline{M}\left(\|\nabla v(t)\|^2\right)-M\left(\|\nabla v\|^2\right)\|\triangledown v\|^2-\frac{(p+q+2)}{2}\int_0^t g_2(\tau)\|\triangledown v\|^2 d\tau\right] \\
& -2(p+q+2)E(t)+2\beta \\
\geq\ & (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+2m_1\|\nabla u\|^2+2m_2\|\nabla v\|^2-2(p+q+2)E(t)+2\beta \\
\geq\ & (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+2\min\{m_1,m_2\}\left[\|\nabla u(t)\|^2+\|\nabla v(t)\|^2\right] \\
& -2(p+q+2)E(t)+2\beta
\end{aligned} \tag{4.2.34}
$$

olur. (4.2.15) dikkate alınarak

$$
-E(t)\geq -E(0)+\int_0^t\left[\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right]d\tau
$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik (4.2.34) te yazılırsa

$$
\begin{aligned}
F''(t) \geq\ & (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+2\min\{m_1,m_2\}\left[\|\nabla u(t)\|^2+\|\nabla v(t)\|^2\right] \\
& +2(p+q+2)\left(-E(0)+\int_0^t\left[\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right]d\tau\right)+2\beta \\
=\ & (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+2\min\{m_1,m_2\}\left[\|\nabla u(t)\|^2+\|\nabla v(t)\|^2\right] \\
& -2(p+q+2)E(0)+2(p+q+2)\int_0^t\left[\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right]d\tau+2\beta
\end{aligned} \tag{4.2.35}
$$

olur. Sobolev Poincaré eşitsizliği uygulanırsa:

$$\begin{aligned} F''(t) &\geq (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+2\min\{m_1,m_2\}\frac{1}{\eta}\left(\|u(t)\|^2+\|v(t)\|^2\right) \\ &\quad -2(p+q+2)E(0)+2(p+q+2)\int_0^t\left[\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right]d\tau+2\beta \end{aligned}$$

olur. Lemma 4.2.3. ve (4.2.26) dan

$$\begin{aligned} F''(t) &\geq (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)+2\min\{m_1,m_2\}\frac{1}{\eta}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right) \\ &\quad -2(p+q+2)\left[E(0)-\int_0^t\left[\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right]d\tau\right]+2\beta \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.2.37}$$

olduğu görülür. Buradan $\forall t\in(0,T)$ için $F''(t)>0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} F''(t) &> 0 \text{ ise } \int_0^t F''(t)\,dt>0 \text{ ise } \left[F'(t)\right|_0^t>0 \text{ ise } F'(t)-F'(0)>0 \text{ ise } F'(t)>F'(0), \\ F'(0) &> 0 \text{ olduğundan } F'(t)>0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(t) &> 0 \text{ ise } \int_0^t F'(t)\,dt>0 \text{ ise } \left[F(t)\right|_0^t>0 \text{ ise } F(t)-F(0)>0 \text{ ise } F(t)>F(0), \\ F(0) &> 0 \text{ olduğundan } F(t)>0 \end{aligned}$$

Buradan $F'(t)\geq 0$ ve $F(t)\geq 0$. Böylece $F'(t)$ ve $F(t)$ fonksiyonlarının $[0,T)$ aralığında kesin artan olduğunu elde ederiz.

Şimdi t_1, t_2 ve β pozitif sabitlerini tanımlayalım.

Teoremin koşullarından (4.2.26) dan $\|u_0\|_2^2+\|v_0\|_2^2>\frac{2(p+q+2)\eta}{\min\{m_1,m_2\}+p+q+2}E(0)$ olduğundan

$$\min\{m_1,m_2\}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)-(p+q+2)\eta E(0)>0.$$

Böylece, β yı yeterince küçük seçersek

$$\beta(p+q+2)<\min\{m_1,m_2\}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)-(p+q+2)\eta E(0) \tag{4.2.38}$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} F''(t) &\geq (p+q+4)\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right) \\ &\quad +2(p+q+2)\int_0^t \left[\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right] d\tau+(p+q+4)\beta. \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

t_3 ü

$$\frac{p+q}{2}\left(\int_\Omega (u_0u_1+v_0v_1)\,dx+\beta t_3\right) > \|u_0\|^2+\|v_0\|^2 \tag{4.2.40}$$

olacak şekilde yeterince büyük seçebiliriz.

(4.2.31), (4.2.32) ve (4.2.40) dan

$$\begin{aligned} t_2 &> \frac{\|u_0\|^2+\|v_0\|^2}{\frac{p+q}{2}\left(\int_\Omega (u_0u_1+v_0v_1)\,dx+\beta t_3\right)} \\ &= \frac{F(0)}{\frac{p+q}{2}\frac{F'(0)}{2}} \\ &= \frac{4}{p+q}\frac{F(0)}{F'(0)}. \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

Şimdi

$$\begin{aligned} A &= \|u(t)\|^2+\|v(t)\|^2+\int_0^t \left[\|u(\tau)\|^2+\|v(\tau)\|^2\right] d\tau+\beta(t_3+t)^2, \\ B &= \frac{1}{2}F'(t)=\int_\Omega (uu_t+vv_t)\,dx+\int_0^t\int_\Omega (uu_\tau+vv_\tau)\,dxd\tau+\beta(t_3+t), \\ C &= \|u_t(t)\|^2+\|v_t(t)\|^2+\int_0^t \left[\|u_\tau(\tau)\|^2+\|v_\tau(\tau)\|^2\right] d\tau+\beta \end{aligned}$$

olsun. (4.2.32) ve basit bir hesaplamayla, $\forall\ s\in R$ için

$$\begin{aligned} As^2-2Bs+C &= \left[\|u(t)\|^2+\|v(t)\|^2+\int_0^t \left[\|u(\tau)\|^2+\|v(\tau)\|^2\right] d\tau+\beta(t_3+t)^2\right] s^2 \\ &\quad -2\left[\int_\Omega (uu_t+vv_t)\,dx+\int_0^t\int_\Omega (uu_\tau+vv_\tau)\,dxd\tau+\beta(t_3+t)\right] s \\ &\quad +\|u_t(t)\|^2+\|v_t(t)\|^2+\int_0^t \left[\|u_\tau(\tau)\|^2+\|v_\tau(\tau)\|^2\right] d\tau+\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
As^2-2Bs+C &= \|u(t)\|^2 s^2-2s\int_\Omega uu_t dx+\|u_t(t)\|^2+\|v(t)\|^2 s^2 \\
&\quad -2s\int_\Omega vv_t dx+\|v_t(t)\|^2+s^2\int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \\
&\quad -2s\int_0^t\int_\Omega uu_\tau dx d\tau+\int_0^t \|u_\tau(\tau)\|^2 d\tau \\
&\quad +s^2\int_0^t \|v(\tau)\|^2 d\tau-2s\int_0^t\int_\Omega vv_\tau dx d\tau \\
&\quad +\int_0^t \|v_\tau(\tau)\|^2 d\tau+s^2\beta(t_3+t)^2-2s\beta(t_3+t)+\beta \\
&= \int_\Omega \left(s^2(u(t))^2-2suu_t+(u_t(t))^2\right)dx \\
&\quad +\int_\Omega \left(s^2(v(t))^2-2svv_t+(v_t(t))^2\right)dx \\
&\quad +\int_0^t\int_\Omega \left(s^2(u(\tau))^2-2suu_\tau+(u_\tau(\tau))^2\right)dx d\tau \\
&\quad +\int_0^t\int_\Omega \left(s^2(v(\tau))^2-2svv_\tau+(v_\tau(\tau))^2\right)dx d\tau \\
&\quad +\beta\left(s^2(t_3+t)^2-2s(t_3+t)+1\right) \\
&= \int_\Omega (su(t)-u_t(t))^2 dx+\int_\Omega (sv(t)-v_t(t))^2 dx \\
&\quad +\int_0^t\int_\Omega (su(\tau)-u_\tau(\tau))^2 dx d\tau \\
&\quad +\int_0^t\int_\Omega (sv(\tau)-v_\tau(\tau))^2 dx d\tau+\beta(s(t_3+t)-1)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bunun daima sıfırdan büyük olması için reel köklerinin olmaması gerekir. Reel kök olmaması için de $\Delta<0$ olması gerekir ki bu;

$$4B^2-4AC\leq 0,$$

$$B^2-AC\leq 0$$

demektir.

Her $t\in[0,T)$ için (4.1.1) probleminin çözümü (u,v) olmak üzere

$$\begin{aligned}
F(t) &\geq A \text{ ise } A\leq F(t) \\
F''(t) &\geq (p+q+4)C \ \text{ ise } C\leq \frac{F''(t)}{(p+q+4)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B^2 - AC &\geq \left(\frac{1}{2}F'(t)\right)^2 - F(t)\frac{F''(t)}{(p+q+4)} \\
(p+q+4)\left(B^2 - AC\right) &\geq \frac{(p+q+4)}{4}\left(F'(t)\right)^2 - F(t)F''(t) \\
F(t)F''(t) - \frac{(p+q+4)}{4}\left(F'(t)\right)^2 &\geq -(p+q+4)\left(B^2 - AC\right) \\
&\geq (p+q+4)\left(AC - B^2\right)
\end{aligned}$$

düzenlemeler yapılırsa

$$F(t)F''(t) - \frac{(p+q+4)}{4}\left(F'(t)\right)^2 \geq 0$$

ve $\alpha = \frac{p+q}{4} > 0$, $\frac{p+q+4}{4} > 1$ alınırsa

$$F(t)F''(t) - (1+\alpha)\left(F'(t)\right)^2 \geq 0$$

elde ederiz. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(F^{-\alpha}(t)\right) &= -\alpha F^{-\alpha-1}F' < 0, \\
\frac{d^2}{dt^2}\left(F^{-\alpha}(t)\right) &= -\alpha(-\alpha-1)F^{-\alpha-2}F'F' - \alpha F^{-\alpha-1}F'' \\
&= \alpha(\alpha+1)F^{-\alpha-2}\left(F'\right)^2 - \alpha F^{-\alpha-1}F'' \\
&= -\alpha F^{-\alpha-2}\left[F''F - (1+\alpha)\left(F'\right)^2\right]
\end{aligned}$$

olur. Her $t \in [0,T)$ aralığı içinde $F^{-\alpha-2} > 0$ ve $F''F - (1+\alpha)\left(F'\right)^2 > 0$ olduğundan

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(F^{-\alpha}(t)\right) < 0$$

olur. O halde $F^{-\alpha}$ fonksiyonu konkav olur.

$F^{-\alpha}$ konkav fonksiyon olduğundan

$$\frac{d^2F^{-\alpha}}{dt^2} \leq 0$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlar ve bu eşitsizlik için gerekli integrallerin alınması ile

$$F^{\alpha}(t) \geq \frac{F^{\alpha+1}(0)}{F(0) - t\alpha F'(0)}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $F(0) > 0$ koşuluyla sonlu bir $T > 0$ zamanı mevcuttur ve bu zaman

$$T = \frac{F(0)}{\alpha F'(0)} > 0$$

dır. Burada

$$\alpha = \frac{p+q}{4}$$

olduğundan

$$t \to T \leq \frac{4}{p+q} \frac{F(0)}{F'(0)} \leq t_2$$

olur. Buradan

$$\lim_{t \to T^-} \|u\|^2 + \|v\|^2 + \int_0^t \left(\|u_\tau(\tau, x)\|^2 + \|v_\tau(\tau, x)\|^2 \right) d\tau = \infty,$$

$$\lim_{t \to T^-} \|u\|^2 + \|v\|^2 = \infty$$

dır. Böylece Teorem 4.2.1 in ispatı tamamlandı.

.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada (4.1.1) probleminin çözümlerinin patlaması Konkavlık metodundan faydalanılarak gösterilmiştir. Çözümlerin patlaması farklı metotlar kullanılarak çalışılabilir. Ayrıca (4.1.1) probleminin enerji azalması, üstel büyümesi gibi matematiksel özellikleri de çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J. J. F., Sobolev Spaces. *Academic Press.* New York. (2003).

Brezis H., Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations. *Springer.* (2011).

Evans L. C., "Partial differential equations", *Graduate Studies in Mathematics, vol.* 19. (1998).

Friedman A., "Remarks on nonlinear parabolic equations, applications of nonlinear partial differential aquations in mathematical physics", *Amer. Math. Soc.*, 3-23, (1965).

Fujita H., "On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$", *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math.*, 13: 109-124, (1966).

Han X., Wang M., "Global existence and blow-up of solutions for a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source", *Nonlinear Anal.*, 7, 5427-5450 (2009).

Jie L. ve Fei L., "Blow-up of solution for an integro-differential equation with arbitrary positive initial energy", *Boundary Value Problems,* 2015:96, (2015).

Kalantarov V. K., Ladyzhenskaya O. A., "The occurance of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type", *J. Soviet Math.*, 10: 53-70, (1978).

Kaplan S., "On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations", *Comm. Pure Appl. Math.,* 16: 305-330, (1963).

Kesavan S., "Topics in functional analysis and applications", *John Wiley Sons,* India. (1989).

Levine H. A., "Instability and nonexistence of global solution to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = Au + F(u)$", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192, 1-21 (1974).

Li G., Hong L. ve Liu W., "Global nonexistence of solutions for viscoelastic wave equations of kirchhoff type with high energy", *Journal of Function Spaces and Applications,* (2012).

Li G., Hong L. ve Liu W., "Exponential energy decay of solutions for a system of viscoelastic wave equations of kirchhoff type with strong damping", *Applicable Analysis,* 92, 5, 1046-1062 (2013).

Li G., Hong L. ve Liu W., "General decay and blow-up of solutions for a system of viscoelastic equations of kirchhoff type with strong damping", *Journal of Function Spaces,* 10.1155-284809 (2014).

Lu Y., Fei L., Zhenhua G., "Lower bounds for blow up time of a nonlinear viscoelastic wave equation", *Boundary Value Problems,* 219, 1-6, (2015).

Ma J., Mu C. ve Zeng R., "A blow up result for viscoelastic equations with arbitrary positive initial energy", *Boundary Value Problems,* 2011:6, (2011).

Messaoudi S.A., "Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation", *Math. Nach,* 260, 58-66 (2003).

Messaoudi S.A., "Blow up of solutions with positive initial energy in a nonlinear viscoelastic wave equations", *J. Math. Anal. Appl.,* 320, 902-915 (2006).

Messaoudi S.A., Said-Houari B. , "Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms", *J. Math. Anal. Appl.*, 365, 277-287 (2010).

Munoz Rivera J. E., Naso M., Vuk E., "Asymptotic behavior of the energy for electromagnetic system with memory", *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 25, 819-841, (2004).

Pişkin E., "Global nonexistence of solutions for a system of viscoelstic wave equations with weak damping terms", *Malaya J. Mat.*, 168-174, 3(2) (2015).

Pişkin E., "A lower bound for the blow up time of a system of viscoelastic wave equations with nonlinear damping and source terms", *J. Nonlinear Funct. Anal.*, 1-9, 2017 (2017).

Pişkin E., Sobolev Uzayları, *Seçkin Yayıncılık,* (2017).

Said-Houari B., "Global nonexistence of positive initial-energy solutions of nonlinear wave equations with damping and source terms", *Differential Integral Equations,* 23, 79-92 (2010).

Said- Houari B., Messaoudi S. A., Guesmia A., "General decay of solutions of a nonlinear system of viscoelastic wave equations", *NoDEA-Nonlinear Diff.,* 18, 659-684 (2011).

Wang Y., "A global nonexistence theorem for viscoelastic equations with arbitrary positive initial energy", *Appl. Math. Lett.,* 22, 1394-1400 (2009).

Wu S., "On decay and blow-up of solutions for a system of nonlinear wave equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 394, 360-377 (2012).

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Diyarbakır'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2014 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. 2015 yılında Ziya Gökalp Eğitim Fakültesinden Pedogojik Formasyon Eğitimi aldım. 2015 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım.

Çalışmaları

Makaleler

• E. Pişkin, A. Fidan, Blow up of Solutions for Viscoelastic Wave Equations of Kirchhoff Type with Arbitrary Positive Initial Energy (Dergiye Gönderildi).

Bildiriler

• E. Pişkin, A. Fidan, Global nonexistence of solutions for a system of viscoelastic wave equations with weak damping, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2016), 12-14 May 2016, Fırat University, Elazığ, Turkey, pp 336.

• E. Pişkin, A. Fidan, Blow up of solutions for Viscoelastic wave equations with arbitrary positive initial energy, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2017), 11-13 May 2017, Harran University, Şanlıurfa, Turkey.

• E. Pişkin, A. Fidan, Viskoelastik Dalga Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması, 12. Ankara Matematik Günleri, 25-26 Mayıs 2017, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Projeler

• Viskoelastik Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması (ZGEF.16.011) (Proje Yürütücüsü: Doç. Dr. Erhan Pişkin, Araştırmacı: Ayşe Fidan).

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Ayşe FİDAN
ÖĞRENCİ NO	15804009
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2016-2017
YARIYIL	☐ Güz☒Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Viskoelastik Denklem Sisteminin Çözümlerinin Patlaması
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma SınavıSonrası
SAYFA SAYISI	63
BENZERLİK ORANI	%16
RAPORLAMA TARİHİ	04/07/2017

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 63 sayfalık kısmına ilişkin, 04/07/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *turnitin*adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %16 ‘dır.

Uygulanan filtrelemeler:

☒ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☒ Kaynakça hariç,
☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Ayşe FİDAN

04/07/2017	05/07/2017
Doç.Dr. Erhan PİŞKİN	Doç.Dr. Bilal ÇEKİÇ
Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı** V.