T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİ OLMAYAN BİR KOLEKSİYON ÜZERİNE

Burak MERAL
Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİ OLMAYAN BİR KOLEKSİYON ÜZERİNE

Burak MERAL
Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **28/06/2017**

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

Burak MERAL tarafından Prof. Dr. Erdal EKİCİ yönetiminde hazırlanan ve **28/06/2017** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan "**Topoloji Olmayan Bir Koleksiyon Üzerine**" başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Erdal EKİCİ ……………………

Başkan

Yrd. Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ ……………………

Üye

Yrd. Doç. Dr. Sena ÖZEN ……………………

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:……..

Bu çalışma Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koodinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FYL-2016-810

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

YK

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Burak MERAL

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Erdal EKİCİ, gülen yüzleriyle yanımda olan değerli hocalarım Arş. Grv. Dr. Ayşenur TUNÇ'a ve Yrd. Doç. Dr. Sena ÖZEN'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Hayatımın her evresinde bana destek olan ve aldığım kararlarda yanımda olan, bana inanan ve güvenen sevgili babam Sedat MERAL, annem Suna MERAL ve ablam Meltem OVALIOĞLU'na, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koodinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FYL-2016-810.

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koodinasyon Birimine saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Erdal EKİCİ ve ben teşekkürlerimizi sunarız.

Burak MERAL

Çanakkale, Haziran 2017

ÖZET

TOPOLOJİ OLMAYAN BİR KOLEKSİYON ÜZERİNE

Burak MERAL
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Erdal EKİCİ
28/06/2017, 54

Sunulan yüksek lisans tezinde topoloji olmayan bir koleksiyon üzerine çalışılmıştır. Topoloji olmayan bu koleksiyon ve dönüşüm özellikleri araştırılmıştır. Topolojik uzaylar arasında tanımlı pr-kapalı fonksiyon ve topolojik uzaylar arasında tanımlı pr-kapalı fonksiyonun araştırmalarına yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Koleksiyon, Topoloji, pr-Kapalı Fonksiyon, Topoloji Olmayan

ABSTRACT

ON A COLLECTION WHICH IS NOT TOPOLOGY

Burak MERAL
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Science and Engineering
Chair for Mathematics Thesis of Master of Science
Advisor: Prof. Dr. Erdal EKİCİ
28/06/2017, 54

In the present thesis, a collection which is not topology was studied. This collection which is not topology and properties of maps are investigated. pr-closed functions between topological spaces and the investigations of pr-closed functions between topological spaces are considered.

Keywords: Collection, Topology, pr-Closed Function, Non-Topology

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Sunulan yüksek lisans tezinde topoloji olmayan bir koleksiyon üzerine çalışılmıştır.

Topoloji olmayan bu koleksiyon ve dönüşüm özellikleri araştırılmıştır.

Topolojik uzaylar arasında tanımlı pr-kapalı fonksiyon ve topolojik uzaylar arasında tanımlı pr-kapalı fonksiyonun araştırmalarına yer verilmiştir.

Yapılan çalışmalara bakıldığında uzayda koleksiyonlar üzerine önemli çalışmalar ortaya konmuştur.

Bunlardan bazıları; Ekici (2011); Caldas ve ark. (2009); Ekici (2009); Ekici (2008a); Ekici (2008b); Ekici (2008c); Ekici ve Jafari (2008); Ekici ve Noiri (2007); Ekici ve Jafari (2006); Ekici (2006); Ekici (2005a); Ekici (2005b); Ekici ve Caldas (2004);.Ekici (2003) olarak yer almaktadır.

Bu tezimiz yedi bölümden oluşmaktadır.

Sunulan tezin ilk bölümünde tezimizde kullanılan temel bilgiler, tanımlar ve teoremler sunulmaktadır.

İkinci bölümde tezimiz için temel olan tanım ve teoremler sunulmaktadır.

Üçüncü bölümde X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olmak üzere $g_1:X_1\rightarrow X_2$ fonksiyonunun pr-kapalı olma durumu çalışılmıştır.

δp-düzenli $T_{1/2}$ uzaylar ele alınarak, δönkararsız ve pr-kapalı fonksiyonlar ele alınarak araştırmalar yapılmıştır.

Dördüncü bölümde X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve

$$g_1:X_1\rightarrow X_2 \text{ ve } g_2:X_2\rightarrow X_3$$

fonksiyonlar olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olmak üzere $g_1:X_1\rightarrow X_2$ fonksiyonu ve $g_2:X_2\rightarrow X_3$ fonksiyonlarının M-önkapalı, pr-kapalı, kuvvetli δönaçık ve gδpr-kararsız olma durumları ile $g_1og_2:X_1\rightarrow X_3$ fonksiyonunun durumu çalışılmıştır.

Beşinci bölümde X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonunun pr-kapalı ve kümelerin gδpr-kapalı, gδpr-açık olma durumları çalışılmıştır.

Altıncı bölümde X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olmak üzere g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olması, ters görüntü ve X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi olmak üzere U alt kümesinin hemen hemen çekirdeği olan

$$\text{a-çek}(U)$$

üzerine çalışılmıştır.

Yedinci bölümde X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olmak üzere pr-kapalı fonksiyonların çeşitli özelikleri çalışılmıştır.

BÖLÜM 2
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesini alalım. U alt kümesinin içini

$$\text{iç}(U),$$

U alt kümesinin kapanışını

$$\text{kap}(U)$$

ile göstereceğiz.

TANIM 2. 1. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesini alalım.

$U \subset V$ ve V kümesi, X_1 uzayında açık olduğunda

$$\text{kap}(U) \subset V$$

oluyorsa U alt kümesi genelleştirilmiş kapalı küme olarak adlandırılır (Levine, 1970).

UYARI 2. 2. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi genelleştirilmiş kapalı küme ise g-kapalı olarak göstereceğiz (Levine, 1970).

TANIM 2. 3. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesini içeren tüm önkapalı kümelerin kesişimleri U kümesinin önkapanışı olarak adlandırılır (El-Deeb ve ark., 1983).

UYARI 2. 4. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesinin önkapanışını önkap(U) ile göstereceğiz.

TANIM 2. 5. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesinde içerilen tüm önaçık kümelerin birleşimi U kümesinin öniçi olarak adlandırılır (El-Deeb ve ark., 1983).

UYARI 2. 6. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesininin öniçini öniç(U) ile göstereceğiz.

TANIM 2. 7. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesini alalım.

U kümesi önaçık küme ise tümleyeni olan $X_1 - U$ kümesi önkapalı küme olarak adlandırılır (Mashhour ve ark., 1982).

TANIM 2.8. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesini alalım.

$$U = \text{iç}(\text{kap}(U))$$

ise U alt kümesine düzenli açık denir (Stone, 1937).

TANIM 2. 9. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesinin δiçi, U kümesinde içerilen tüm düzenli açık kümelerin birleşimi olarak tanımlanır (Velicko, 1968).

UYARI 2. 10. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesinin δiçini

$$\delta\text{iç}(U)$$

ile göstereceğiz.

TANIM 2. 11. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesini alalım.

U kümesi düzenli açık küme ise tümleyeni olan X_1-U kümesi düzenli kapalı küme olarak adlandırılır (Stone, 1937).

TANIM 2. 12. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere bir küme düzenli açık kümelerin birleşimi ise o küme δaçık küme olarak adlandırılır (Velicko, 1968).

TANIM 2. 13. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesini alalım.

U kümesi δaçık küme ise tümleyeni olan $X_1 - U$ kümesi δkapalı küme olarak adlandırılır (Velicko, 1968).

TANIM 2. 14. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi olmak üzere,

$$\delta\text{kap}(U) = \{x \in X_1 : U \cap \text{iç}(\text{kap}(V)) \neq \emptyset,\ V \in \varrho \text{ ve } x \in V\}$$

olarak tanımlanır.

Eğer

$$U = \delta\text{kap}(U)$$

olduğunda δkapalı küme olarak adlandırılır (Velicko, 1968).

UYARI 2. 15. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesinin δkapanışını

$$\delta\text{kap}(U)$$

ile göstereceğiz.

TANIM 2. 16. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi

$$U \subset \text{iç}(\delta\text{kap}(U))$$

oluyorsa X_1 uzayının U alt kümesi δönaçık olarak adlandırılır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

TANIM 2. 17. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesini alalım.

U kümesi δönaçık küme ise tümleyeni olan $X_1 - U$ kümesi δönkapalı küme olarak adlandırılır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

TANIM 2. 18. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayındaki U kümesini içeren δönkapalı kümelerin tümünün kesişimi U kümesinin δönkapanışı olarak adlandırılır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

TANIM 2. 19. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayındaki U kümesinde içerilen δönaçık kümelerin tümünün birleşimi U kümesinde δöniçi olarak adlandırılır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

TANIM 2. 20. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi $U \subset V$ ve V kümesi X_1 uzayında açık küme durumunda

$$\text{önkap}(U) \subset V$$

oluyorsa U kümesine genelleştirilmiş p-kapalı küme denir (Maki ve ark., 1996).

UYARI 2. 21. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi genelleştirilmiş p-kapalı küme ise U alt kümesini gp-kapalı olarak göstereceğiz (Maki ve ark., 1996).

TANIM 2. 22. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi $U \subset V$ ve V kümesi X_1 uzayında düzenli açık küme olduğunda

$$\text{kap}(U) \subset V$$

oluyorsa U kümesine düzenli genelleştirilmiş kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993).

UYARI 2. 23. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi düzenli genelleştirilmiş kapalı küme ise U alt kümesini rg-kapalı olarak göstereceğiz (Palaniappan ve Rao, 1993).

TANIM 2. 24. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi $U \subset V$ ve V kümesi X_1 uzayında düzenli açık küme olması durumda

$$\text{önkap}(U) \subset V$$

oluyorsa U kümesine düzenli genelleştirilmiş önkapalı küme veya genelleştirilmiş öndüzenli kapalı küme (Noiri, 1998; Gnanambal, 1997) denir.

UYARI 2. 25. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi düzenli genelleştirilmiş önkapalı küme veya genelleştirilmiş öndüzenli kapalı küme ise U alt kümesini

gpr-kapalı

olarak göstereceğiz (Noiri, 1998; Gnanambal, 1997).

TANIM 2. 26. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi $U\subset V$ ve V kümesi X_1 uzayında açık küme olduğunda

$$\delta\text{önkap}(U)\subset V$$

oluyorsa U kümesine genelleştirilmiş δönkapalı küme denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

UYARI 2. 27. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi genelleştirilmiş δönkapalı küme ise U alt kümesini

gδp-kapalı

olarak göstereceğiz (Ekici ve Noiri, 2006a).

TANIM 2. 28. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi $U\subset V$ ve V kümesi X_1 uzayında düzenli açık küme olduğunda

$$\delta\text{önkap}(U)\subset V$$

olduğunda U kümesine genelleştirilmiş δpdüzenli kapalı küme denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

UYARI 2. 29. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi genelleştirilmiş δpdüzenli kapalı küme ise U alt kümesini gδpr-kapalı olarak göstereceğiz (Ekici ve Noiri, 2006b).

TEOREM 2. 30. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi gδpr-açık olması için gerek ve yeter koşul $V\subset U$ ve V kümesi düzenli kapalı küme ise

$$V\subset \delta\text{öniç}(U)$$

dır (Ekici ve Noiri,2006b).

TANIM 2. 31. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

X_2 uzayının her V δönkapalı kümesi için X_1 uzayında $g_1^{-1}(V)$ δönkapalı ise X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonuna δönkararsız denir (Ekici, 2004).

TANIM 2. 32. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayında her $g\delta$pr-kapalı küme δönkapalı olduğunda X_1 uzayına

δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay

denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

TANIM 2. 33. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

X_1 uzayındaki her U önkapalı kümesi için X_2 uzayında g_1(U) önkapalı oluyor ise X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonuna M-önkapalı denir (Mashhour ve ark., 1984).

TANIM 2. 34. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

X_1 uzayındaki her δönaçık U kümesi için g_1(U), X_2 uzayında δönaçık olduğunda X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonuna kuvvetli δönaçık denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

TANIM 2. 35. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

X_2 uzayının her $g\delta$pr-kapalı V kümesi için g_1^{-1}(V) fonksiyonu X_1 uzayında $g\delta$pr-kapalı ise X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonuna $g\delta$pr-kararsız denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

UYARI 2. 36. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere U alt kümesi için aşağıdakiler geçerlidir (Ekici ve Noiri, 2006b).

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{kapalı} & \rightarrow & \text{g-kapalı} & \rightarrow & \text{rg-kapalı} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{önkapalı} & \rightarrow & \text{gp-kapalı} & \rightarrow & \text{gpr-kapalı} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\delta\text{önkapalı} & \rightarrow & g\delta\text{p-kapalı} & \rightarrow & g\delta\text{pr-kapalı}
\end{array}
$$

TANIM 2. 37. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayındaki düzenli kapalı her U kümesi ve her $x \in X_1 - U$ noktası için $x \in A$ ve $U \subset B$ öyleki A ve B ayrık δönaçık kümeleri var olduğunda X_1 uzayının U alt kümesi hemen hemen δp-düzenli olarak adlandırılır (Ekici ve Noiri, 2006b).

TANIM 2. 38. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere ve X_1 uzayının U alt kümesi olmak üzere X_1 uzayının δönaçık kümeleri tarafından oluşturulan U alt kümesinin her

$$\{V\alpha : \alpha \in U\}$$

örtüsü için

$$U \subset \cup\{\delta\text{önkap}(V\alpha) : \alpha \in \Lambda_0\}$$

öyleki Λ nin Λ_0 sonlu alt kümesi var ise X_1 uzayının U alt kümesi X_1'e göre δönkapalı olarak adlandırılır (Ekici ve Noiri, 2006b).

TEOREM 2.39. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi olmak üzere X_1 uzayı hemen hemen δp-düzenli ve X_1 uzayının U alt kümesi X_1' e göre δönkapalı ise X_1 uzayının U alt kümesi gδpr-kapalıdır (Ekici ve Noiri, 2006b).

TANIM 2. 40. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi olmak üzere U alt kümesini bulunduran tüm düzenli açık kümelerin kesişimi U nun hemen hemen çekirdeği olarak adlandırılır (Ekici ve Noiri, 2006b).

UYARI 2. 41. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi olmak üzere U alt kümesinin hemen hemen çekirdeğini

a-çek(U)

olarak göstereceğiz (Ekici ve Noiri, 2006b).

TEOREM 2. 42. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesinin gδpr-kapalı olması için gerek ve yeter koşul

$$\delta\text{önkap}(U) \subset \text{a-çek}(U)$$

dır (Ekici ve Noiri, 2006b).

TEOREM 2. 43. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere aşağıdaki koşullar X_1 uzayı için dektir (Ekici ve Noiri, 2006b).

(a) X_1 uzayı δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay

(b) Her tek nokta kümesi ya düzenli kapalıdır ya da δönaçıkdır.

TANIM 2. 44. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

X_2 uzayının her kapalı U kümesi için $g_1^{-1}(U)$ fonksiyonu X_1 uzayında gδpr-kapalı ise X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonuna

gδpr-sürekli

denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

TEOREM 2. 45. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu δp-gδpr-sürekli ve X_2 uzayı

δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay

ise X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu gδpr-kararsızdır (Ekici ve Noiri, 2006b).

UYARI 2. 46. X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi genelleştirilmiş δpdüzenli kapalı küme ise U alt kümesini gδpr-kapalı olarak göstereceğiz (Ekici ve Noiri, 2006b).

BÖLÜM 3
KAPALI DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olmak üzere $g_1:X_1\to X_2$ fonksiyonunun pr-kapalı olma durumu çalışılmıştır.

δp-düzenli $T_{1/2}$ uzaylar ile birlikte δönkararsız ve pr-kapalı fonksiyonlar ele alınarak araştırmalar yapılmıştır.

TANIM 3. 1. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere

$$g_1(U)\subset V$$

iken

$$g_1(U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(V)$$

oluyorsa X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonuna pr-kapalı denir.

TEOREM 3. 2. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayı δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi ve X_2 uzayı δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U)\subset V$ alalım.

Bu durumda $g_1(U)\subset V$ iken

$$g_1(U)\subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$g_1(U)\subset V$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$X_2 - V$$

$$\subset X_2 - g_1(U)$$

elde ederiz.

Tanımdan X_2 uzayında her gδpr-kapalı küme δönkapalı olduğunda X_2 uzayının δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay olduğunu elde ederiz.

Bu durumda $X_2 - V$ gδpr-kapalı olduğundan

Bunu ele alırsak

$$\delta\text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset X_2 - g_1(U)$$

olduğuna ulaşırız.

$$\delta\text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset X_2 - g_1(U)$$

olduğundan

$$X_2 - \delta\text{öniç}(V)$$

$$\subset X_2 - g_1(U)$$

elde ederiz.

O halde buradan

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayı δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay olduğunu ve U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ ele aldığımızda

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 3. 3. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayı hemen hemen δp-düzenli ve X_2 uzayındaki her küme X_2' ye göre δönkapalı olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ise X_1 uzayındaki her önkapalı U kümesi için $g_1(U)$ X_2 uzayında δönaçıkdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayı hemen hemen δp-düzenli ve X_2 uzayındaki her küme X_2' ye göre δönkapalı olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ise X_1 uzayındaki her önkapalı U kümesi için $g_1(U)$ X_2 uzayında δönaçık olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme alalım.

X_2 bir küme ve ϱ_2 bir topolojik uzay olmak üzere X_2 uzayının U alt kümesi olmak üzere X_2 uzayı hemen hemen δp-düzenli ve X_2 uzayının U alt kümesi X_2' e göre δönkapalı olduğunu göz önüne alalım.

O halde X_2 uzayı hemen hemen δp-düzenli ve X_2 uzayının U alt kümesi X_2' e göre δönkapalı olduğunu ve

$$g_1(U) \subset g_1(U)$$

olduğunu biliyoruz.

Bunu ele alırsak X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğu için

$$g_1(U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(g_1(U))$$

olduğunu elde ederiz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğunda

$$g_1(U) \subset g_1(U)$$

aldığımızda

$$g_1(U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(g_1(U))$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla $g_1(U)$ X_2 uzayında δönaçıktır.

TEOREM 3. 4. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ve δönkararsız olsun.

$$\delta\text{önkap}(V) \subset \text{a-çek}(V)$$

ve

$$\delta\text{önkap}(X_2 - V) \subset \text{a-çek}(X_2 - V)$$

olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında $g\delta$pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında $g\delta$pr-kapalı olduğunu göstermeliyiz.

X_2 bir küme ve ϱ topolojik uzay olmak üzere

$$\delta\text{önkap}(V) \subset \text{a-çek}(V)$$

olduğunu biliyoruz.

Hipotezden

$$\delta\text{önkap}(V)$$

$$\subset \text{a-çek}(V)$$

olduğundan ve

$$\delta\text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset \text{a-çek}(X_2 - V)$$

olduğundan yararlanacağız.

X_1, X_2 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve $g_1^{-1}(V) \subset U$ alalım.

O halde buradan $g_1^{-1}(V) \subset U$ olduğunu bilerek buradan

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(V)$$

olduğuna ulaşırız.

$X_1 - g_1^{-1}(V)$ ‘i kullanırsak

$$X_1 - U \subset g_1^{-1}(X_2 - V)$$

elde ederiz.

Bundan dolayı

$$g_1(X_1 - U) \subset (X_2 - V)$$

olduğuna ulaşırız ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğundan

$$g_1(X_1 - U)$$
$$\subset \delta \text{öniç}(X_2 - V)$$

elde ederiz.

$$g_1(X_1 - U)$$

$$\subset \delta \text{öniç}(X_2 - V)$$

olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla

$$g_1(X_1 - U)$$
$$\subset X_2 - \delta \text{önkap}(V)$$

olur.

g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1 - U$$
$$\subset g_1^{-1}(X_2 - \delta \text{önkap}(V))$$

ulaşırız.

$$X_1 - U$$
$$\subset g_1^{-1}(X_2 - \delta \text{önkap}(V))$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğunu elde ederiz ve dolayısıyla $g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)) \subset U$ olur.

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğunu ve $g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)) \subset U$ olduğunu kullanırsak;

ayrıca,

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V))$$

$$\subset \delta \text{önkap}(g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)))$$

$$= g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğu için

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V))$$

$$\subset \delta \text{önkap}(g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)))$$

$$= g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

ifadesini kullanırsak

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık, δönkap(V)$\subset$a-çek(V) ve δönkap($X_2 - V$)$\subset$a-çek($X_2 - V$) ele aldık.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olduğunu, $g_1(U) \subset V$ ele aldığımızda

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

ulaştık.

O halde X_1 uzayındaki $g_1^{-1}(V)$ gδpr-kapalıdır

BÖLÜM 4
BİLEŞKE İŞLEMLERİ

Dördüncü bölümde X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ ve $g_2:X_2\rightarrow X_3$ fonksiyonlar olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olmak üzere $g_1:X_1\rightarrow X_2$ fonksiyonu ve $g_2:X_2\rightarrow X_3$ fonksiyonlarının M-önkapalı, pr-kapalı, kuvvetli δönaçık ve gδpr-kararsız olma durumları ile $g_1og_2:X_1\rightarrow X_3$ fonksiyonunun durumu çalışılmıştır.

TEOREM 4. 1. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

$g_1:X_1\rightarrow X_2$ fonksiyonu M-önkapalı ve $g_2:X_2\rightarrow X_3$ fonksiyonu pr-kapalı olsun. $g_1og_2:X_1\rightarrow X_3$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_1og_2 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_3 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere

$$g_2og_1(U)\subset V$$

ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu M-önkapalı ve X_2 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu pr-kapalı olsun.

$$g_2og_1(U)\subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$g_2og_1\ (U)\subset V$$

alalım.

Buradan

$$g_2(g_1(U))\subset V$$

elde ederiz.

X_2 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu pr-kapalı olduğu için

$$g_2(g_1(U))\subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğuna ulaşırız.

Yani

$$g_2og_1\ (U) \subset \delta \text{öniç}(V)$$

elde etmiş oluruz.

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonu M-önkapalı ve g_2:$X_2 \rightarrow X_3$ fonksiyonu pr-kapalı olduğunu ve g_2og_1 (U)$\subset$V ele aldığımızda g_2og_1 (U)$\subset$ δöniç(V) olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2og_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 4.2. X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonu pr-kapalı ve g_2:$X_2 \rightarrow X_3$ fonksiyonu kuvvetli δönaçık ve gδpr-kararsız olsun.

g_2og_1:$X_1 \rightarrow X_3$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2og_1 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ve X_2 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu kuvvetli δönaçık, gδpr-kararsız olsun.

$$g_2og_1(U) \subset \delta \text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için

$$g_2og_1(U) \subset V$$

alalım.

Buradan

$$g_2(g_1(U)) \subset V$$

olduğuna ulaşırız ve bunu kullanırsak

$$g_1(U) \subset g_2^{-1}(V)$$

olduğunu elde ederiz.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğundan

$$g_1(U)$$
$$\subset \delta öniç(g_2^{-1}(V))$$

olduğunu elde ederiz.

O halde

$$g_2(g_1(U))$$
$$\subset g_2(\delta öniç(g_2^{-1}(V)))$$

olur ve bundan dolayı

$$g_2 o g_1(U)$$
$$\subset \delta öniç(g_2(g_1^{-1}(V)))$$

olduğuna ulaşırız.

Buradan

$$g_2 o g_1(U) \subset \delta öniç(V)$$

olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

$g_1:X_1 \to X_2$ fonksiyonu pr-kapalı ve $g_2:X_2 \to X_3$ fonksiyonu kuvvetli δönaçık ve gδpr-kararsız olduğunu ve $g_2 o g_1(U) \subset V$ ele aldığımızda $g_2 o g_1(U) \subset \delta öniç(V)$ olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı $g_2 o g_1$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 4.3. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli kapalı olsun. X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli kapalı olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ alalım.

Bu durumda $g_1(U) \subset V$ iken

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Hipotez X_1 uzayındaki U önkapalı kümesinin görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında düzenli kapalı olduğunu söyler.

Teoremden X_1 uzayının U alt kümesi $g\delta$pr-açık olması için gerek ve yeter koşul $M \subset U$ ve M kümesi düzenli kapalı küme ise

$$M \subset \delta\text{öniç}(U)$$

Olduğunu elde ederiz.

Bu teoremi ele aldığımızda, $g_1(U) \subset V$ olduğunu biliyoruz. $g_1(U)$ düzenli kapalı ve V kümesi X_2 uzayında $g\delta$pr-açık olduğu için $g_1(U) \subset \delta$öniç(V) olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi Y üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli kapalı olduğunu ve U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ ele aldığımızda, Teorem 2. 30 'dan da yararlanarak $g_1(U) \subset \delta$öniç(V) olduğunu elde ettik dolayısıyla X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

UYARI 4.4. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun. X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli kapalı olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğunu teorem. 4. 3.'de gördük.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olsun.

Bu durumda X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli kapalı olduğunu vermez.

ÖRNEK 4. 5. $X_1 = \{a, b, c, d\}$, $\varrho = \{X_1, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ olsun.

$g_1 : X_1 \rightarrow X_1$ tanımlı fonksiyon $g_1(a) = b$, $g_1(b) = b$, $g_1(c) = b$, $g_1(d) = b$ durumunda pr-kapalıdır.

Her önkapalı U kümesi için görüntüsü olan $g_1(U)$ düzenli kapalı olmaz.

TEOREM 4.6. X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

$g_1:X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonu X_1 uzayındaki her U önkapalı kümesi için görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında düzenli açıktır ve $g_2:X_2 \rightarrow X_3$ fonksiyonu kuvvetli δönaçık ve $g\delta$pr-kararsız olsun.

$g_2 o g_1:X_1 \rightarrow X_3$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı $g_2 o g_1$ fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_3 uzayında $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu X_1 uzayındaki her U önkapalı kümesi için görüntüsü olan $g_1(U)$ X_2 uzayında düzenli açıktır ve X_2 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu kuvvetli δönaçık, $g\delta$pr-kararsız olsun.

$$g_2 o g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için $g_2 o g_1(U) \subset V$ alalım.

Buradan

$$g_2(g_1(U)) \subset V$$

olduğuna ulaşırız ve bunu kullanırsak

$$g_1(U) \subset g_2^{-1}(V)$$

olduğunu elde ederiz.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olsun. X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğunu biliyoruz.

Bunu ele alırsak, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu X_1 uzayındaki her önkapalı U kümesi için $g_1(U)$ düzenli açık olduğundan

$$g_1(U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(g_2^{-1}(V))$$

olduğunu elde ederiz. g_2 fonksiyonunu ele alırsak

$$g_2(g_1(U))$$

$$\subset g_2(\delta\text{öniç}(g_2^{-1}(V)))$$

olduğunu görürüz ve

$$g_2 o g_1(U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(g_2(g_2^{-1}(V)))$$

olduğuna ulaşırız.

O halde $g_2 o g_1$ (U) $\subset \delta$öniç(V) elde etmiş oluruz.

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve g_1: $X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonu X_1 uzayındaki her U önkapalı kümesi için görüntüsü olan g_1(U) X_2 uzayında düzenli açık olduğunda g_2:$X_2 \rightarrow X_3$ fonksiyonu kuvvetli δönaçık ve gδpr-kararsız olduğunu ve

$$g_2 o g_1(U) \subset V$$

ele aldığımızda

$$g_2 o g_1(U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı $g_2 o g_1$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

BÖLÜM 5
ALT KÜMELER

Beşinci bölümde X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonunun pr-kapalı ve kümelerin gδpr-kapalı, gδpr-açık olma durumları çalışılmıştır.

TEOREM 5.1. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu her X_1 uzayı için pr-kapalı olsun. X_2 uzayındaki her gδpr-kapalı, gδpr-açık küme δönkapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu her X_1 uzayı için pr-kapalı olsun.

X_2 uzayındaki her gδpr-kapalı, gδpr-açık küme δönkapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olsun ve $X_1=X_2$ alalım. X_1 uzayı üzerinde elemanları V, X_1, $\emptyset$ olan topolojiyi ve X_1 uzayından X_1 uzayına tanımlı birim dönüşümü, ι_x fonksiyonunu ve $\iota_x(V) \subset V$ alalım.

O halde

$$\iota_x(X_1 - V) \subset X_1 - V$$

ulaşırız.

Hipotezden ι_x pr-kapalı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\iota_x(X_1 - V)$$
$$\subset \delta\text{öniç}(X_1 - V)$$

olduğunu elde ederiz.

Buradan

$$\iota_x(X_1 - V)$$
$$\subset \delta\text{öniç}(X_1 - V)$$

olduğu için

$$\delta\text{önkap}(V)$$
$$\subset \iota_x(V)$$

olur.

O halde δönkap(V) $\subset$ ι_x(V) elde ederiz.

ι_x birim fonksiyon olduğu için

$$\delta \text{önkap}(V) \subset V$$

olduğunu elde ederiz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu her X_1 uzayı için pr-kapalı olduğunu ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve X_1=X_2 olduğunu, X_1 uzayı üzerinde elemanları V, X, $\emptyset$ olan topolojiyi ve X_1 uzayından X_1 uzayına tanımlı birim dönüşüm olan, ι_x fonksiyonunu ve ι_x(V)$\subset$V aldığımızda

$$\delta \text{önkap}(V) \subset \iota_x(V)$$

olduğunu elde ettik.

Bundan dolayı V kümesi X_2 uzayında δönkapalıdır.

TEOREM 5.2. X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun. $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonu M-önkapalı ve $g_2{:}X_2 \rightarrow X_3$ fonksiyonu X_2 uzayındaki her önkapalı V kümesi için g_2(V) düzenli açık olsun.

$g_2 o g_1{:}X_1 \rightarrow X_3$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı $g_2 o g_1$ fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu M-önkapalı ve X_2 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu X_2 uzayındaki her önkapalı V kümesi için g_2(V) düzenli açık olsun.

$$g_2 o g_1(U) \subset \delta \text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$g_2 o g_1(U) \subset V$$

alalım.

Buradan $g_2(g_1(U)) \subset V$ olduğunu elde ederiz.

X_2 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_3 uzayında düzenli açık olsun. X_2 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu pr-kapalı olduğunu biliyoruz.

Bunu ele alırsak, X_2 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu X_3 uzayındaki her önkapalı V kümesi için $g_2(V)$ düzenli açık olduğu için;

$$g_2(g_1(U)) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğuna ulaşırız.

Yani $g_2 o g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$ elde etmiş oluruz.

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

$g_1{:}X_1 \to X_2$ fonksiyonu M-önkapalı ve $g_2{:}X_2 \to X_3$ fonksiyonu X_2 uzayındaki her önkapalı V kümesi için $g_2(V)$ düzenli açık olduğunu ve

$$g_2 o\, g_1(U) \subset V$$

ele aldığımızda

$$g_2 o g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı $g_2 o g_1$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 5.3. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayındaki her $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık kümenin δönkapalı olması için gerek ve yeter koşul her X_1 uzayı için X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

Gerek Koşul: X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_2 uzayında $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ alalım. Bu durumda

$$g_1(U) \subset V$$

iken

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

X_2 uzayındaki her gδpr-kapalı, gδpr-açık küme δönkapalı olsun. $g_1(U)\subset V$ olduğunu biliyoruz

Buradan

$$X_2-V\subset X_2-g_1(U)$$

elde ederiz.

Hipotez X_2-V δönkapalı olduğunu söyler.

Dolayısıyla

$$\delta\text{önkap}(X_2-V)$$

$$\subset X_2-g_1(U)$$

elde ederiz.

$$\delta\text{önkap}(X_2-V)$$

$$\subset X_2-g_1(U)$$

olduğu için $g_1(U)\subset$ δöniç(V) olur.

Buradan $g_1(U)\subset$ δöniç(V) olduğunu elde ederiz.

O halde X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

Yeter Koşul: X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu her X_1 uzayı için pr-kapalı olsun. X_2 uzayındaki her gδpr-kapalı, gδpr-açık küme δönkapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olsun ve $X_1=X_2$ alalım.

X_1 uzayı üzerinde elemanları V, X_1, $\emptyset$ olan topolojiyi ve X_1 uzayından X_1 uzayına tanımlı birim dönüşümü, ι_x fonksiyonunu ve $\iota_x(V)\subset V$ alalım.

O halde

$$\iota_x(X_1-V)\subset X_1-V$$

ulaşırız.

Hipotezden ι_x pr-kapalı olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla

$$\iota_x(X_1-V)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(X_1-V)$$

olduğunu elde ederiz.

Buradan

$$\iota_x(X_1-V)=X_2-\iota_x(V)$$

olduğu ve

$$\delta\text{önkap}(V)\subset\iota_x(V)$$

olur.

O halde δönkap(V) $\subset$ ι_x(V) olur. ι_x birim fonksiyon olduğu için

$$\delta\text{önkap}(V)\subset V$$

olduğunu elde ederiz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu her X_1 uzayı için pr-kapalı olduğunu ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve X_1=X_2 olduğunu, X_1 uzayı üzerinde elemanları V, X, $\emptyset$ olan topolojiyi ve X_1 uzayından X_1 uzayına tanımlı birim dönüşüm olan, ι_x fonksiyonunu ve $\iota_x(V)\subset V$ aldığımızda

$$\delta\text{önkap}(V)\subset\iota_x(V)$$

olduğunu elde ettik.

Bundan dolayı V kümesi X_2 uzayında δönkapalıdır.

TEOREM 5.4. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olsun. X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun ve X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U)\subset V$ alalım. Bu durumda

$$g_1(U)\subset V$$

iken

$$g_1(U)\subset\delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$g_1(U) \subset V$ olduğunu biliyoruz.

Bunu ele aldığımızda

$$X_2 - V \subset X_2 - g_1(U)$$

olduğunu elde ederiz.

Hipotez X_1 uzayındaki U önkapalı kümesinin görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında düzenli açık olduğunu söyler.

O halde $X_2 - g_1(U)$ düzenli kapalı olur.

Buradan

$$\delta \text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset \delta \text{önkap}(X_2 - g_1(U))$$

olduğuna ulaşırız.

Buradan

$$\delta \text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset X_2 - g_1(U)$$

olduğunu elde ederiz.

$$\delta \text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset X_2 - g_1(U)$$

olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla

$$g_1(U) \subset \delta \text{öniç}(V))$$

olur.

Buradan $g_1(U) \subset \delta$öniç(V) olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olduğunu ve U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ ele aldığımızda,

$$g_1(U) \subset \delta \text{öniç}(V)$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 5.5. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalı olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve $g_1^{-1}(V)\subset U$ alalım.

O halde buradan $g_1^{-1}(V)\subset U$ olduğunu kullanacağız.

Buradan

$$X_1-U\subset X_1-g_1^{-1}(V)$$

olduğuna ulaşırız.

$X_1-g_1^{-1}(V)$ ‘i kullanırsak

$$X_1-U \subset g_1^{-1}(X_2-V)$$

elde ederiz.

Bundan dolayı $g_1(X_1-U)\subset(X_2-V)$ olduğuna ulaşırız ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğundan

$$g_1(X_1-U)$$
$$\subset \delta\text{öniç}(X_2-V)$$

elde ederiz.

$$g_1(X_1-U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(X_2-V)$$

olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla

$$g_1(X_1-U)$$
$$\subset X_2-\delta\text{önkap}(V)$$

olur.

g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1-U$$
$$\subset g_1^{-1}(X_2-\delta\text{önkap}(V))$$

ulaşırız.

$$X_1 - U$$

$$\subset g_1^{-1}(X_2 - \delta \text{önkap}(V)))$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)) \subset U$$

olduğunu elde ederiz ve dolayısıyla

$$g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)) \subset U$$

olur.

Ayrıca,

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V))$$

$$\subset \delta \text{önkap}(g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)))$$

$$= g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğu için

$$\delta \text{önkap}\ (g_1^{-1}(V)) \subset U$$

elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olduğunda, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olduğunu, $g_1(U) \subset V$ ele aldığımızda

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

ulaştık.

O halde X_1 uzayındaki $g_1^{-1}(V)$ fonksiyonu gδpr-kapalıdır.

BÖLÜM 6
EK ÖZELLİKLER

Altıncı bölümde X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olmak üzere g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olması, ters görüntü ve X_1 bir küme ve ϱ bir topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi olmak üzere U alt kümesinin hemen hemen çekirdeği olan a-çek(U) üzerine çalışılmıştır.

TEOREM 6.1. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayında her küme gδpr-kapalı olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalı olsun.

X_1 uzayının U önkapalı kümesi için görüntüsü olan g_1(U), X_2 uzayında δönaçıktır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayının U önkapalı kümesi için görüntüsü olan g_1(U), X_2 uzayında δönaçık olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, X_2 uzayında her küme gδpr-kapalı olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalı olsun. $g_1(U)\subset g_1(U)$ olduğunu biliyoruz.

Bunu ele alırsak X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğu için

$$g_1(U)\subset \delta\text{öniç}(g_1(U))$$

olduğunu elde ederiz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğunda $g_1(U)\subset g_1(U)$ aldığımızda

$$g_1(U)\subset \delta\text{öniç}(g_1(U))$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla g_1(U) X_2 uzayında δönaçıktır.

TEOREM 6.2. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı, V kümesi X_2 uzayında kapalı ve açık olsun. $g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1, \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında düzenli açık küme, V kümesi X_2 uzayında kapalı, açık küme olmak üzere ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız, pr-kapalı olsun ve $g_1^{-1}(V) \subset U$ alalım.

$$g_1^{-1}(V) \subset U$$

olduğunu biliyoruz.

O halde $g_1^{-1}(V) \subset U$ olduğunu kullanırız.

Buradan

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(V)$$

olduğu sonucu çıkar. $X_1 - g_1^{-1}(V)$ 'i kullanırsak

$$X_1 - U \subset g_1^{-1}(X_2 - V)$$

elde ederiz.

Bundan dolayı

$$g_1(X_1 - U) \subset (X_2 - V)$$

olduğuna ulaşırız ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğundan

$$g_1\ (X_1 - U)$$

$$\subset \delta \text{öniç}(X_2 - V)$$

elde ederiz.

Dolayısıyla

$$g_1(X_1 - U)$$

$$\subset X_2 - \delta \text{önkap}(V)$$

olur. g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1 - U$$

$$\subset g_1^{-1}\ (X_2 - \delta \text{önkap}(V))$$

ulaşırız.

$$X_1 - U$$

$$\subset g_1^{-1}(X_2 - \delta \text{önkap}(V))$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğunu elde ederiz ve dolayısıyla

$$g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)) \subset U$$

olur.

Ayrıca,

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V))$$

$$\subset \delta \text{önkap}(g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)))$$

$$= g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğu için

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında kapalı, açık küme ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı,δönkararsız olduğunda $g_1(V) \subset U$ aldığımızda

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayındaki $g_1^{-1}(V)$ fonksiyonu $g\delta$pr-kapalıdır

TEOREM 6. 3. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında açık olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık küme ve $g_1(U)\subset V$ alalım.

Bu durumda

$$g_1(U)\subset V$$

iken

$$g_1(U)\subset \delta \text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Hipotezden X_1 uzayındaki U önkapalı kümesinin görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında açık olduğunu biliyoruz.

O halde $g_1(U)$ δönaçık oluğuna ulaşırız.

Buradan $g_1(U)\subset \delta$öniç(V) olduğunu elde ederiz.

$g_1(U)$ δönaçık olduğundan $g_1(U)\subset \delta$öniç(V) olduğunu elde etmiş oluruz..

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde τ_1 topolojisi X_2 üzerinde τ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında açık olduğunu ve U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık küme ve $g_1(U)\subset V$ ele aldığımızda

$$g_1(U)\subset \delta \text{öniç}(V)$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 6.4. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

V kümesi X_2 uzayında $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık küme olmak üzere X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli kapalı ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında $g\delta$pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun $g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında $g\delta$pr-kapalı olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında düzenli açık küme ve V kümesi X_2 uzayında $g\delta$pr-kapalı, $g\delta$pr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız olsun ve $g_1^{-1}(V)\subset U$ alalım.

Hipotez X_1 uzayındaki önkapalı kümesinin görüntüsünün X_2 uzayında düzenli kapalı olduğunu biliyoruz.

O halde

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(V)$$

elde ederiz.

Buradan g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1 - U \subset g_1^{-1}(X_2 - V)$$

O halde buradan $X_1 - U \subset g_1^{-1}(X_2 - V)$ olduğuna ulaşırız. g_1 fonksiyonunu kullanırsak

$$g_1(X_1 - U) \subset X_2 - V$$

olur.

O halde

$$g_1(X_1 - U)$$

$$\subset \delta \text{öniç}(X_2 - V)$$

elde ederiz.

Dolayısıyla

$$g_1(X_1 - U)$$

$$\subset \delta \text{öniç}(X_2 - V)$$

ele alacağız.

Buradan

$$X_1 - U$$

$$\subset g_1^{-1}(X_2 - \delta \text{önkap}(V))$$

ulaşırız.

Buradan

$$X_1 - U$$

$$\subset X_1 - g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğunu elde ederiz ve dolayısıyla

$$g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)) \subset U$$

olur.

Ayrıca,

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V))$$

$$\subset \delta \text{önkap}(g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)))$$

$$= g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğu için

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli kapalı olduğunu, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve $g_1(V) \subset U$ aldığımızda

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

olduğunu elde ediyoruz.

O halde X_1 uzayındaki $g_1^{-1}(V)$ fonksiyonu gδpr-kapalıdır.

TEOREM 6.5. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ve δönkararsız olsun.

$$\delta \text{önkap}(V) \subset \text{a-çek}(V)$$

ve

$$\delta \text{önkap}(X_2 - V) \subset \text{a-çek}(X_2 - V)$$

olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-açıktır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-açık olduğunu göstermeliyiz.

X_1 bir küme ve ϱ_1 bir topolojik uzay olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesinin gδpr-kapalı olması için gerek ve yeter koşul δ-önkap(U)$\subset$a-çek(U) olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla δönkap(V)$\subset$a-çek(V) olduğundan ve

$$\delta \text{önkap}(X_2 - V) \subset \text{a-çek}(X_2 - V)$$

olduğundan bu ifadaeleri ele alacağız.

O halde U kümesi X_1 uzayında düzenli açık küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız, pr-kapalı olsun ve $g_1^{-1}(V) \subset U$ alalım.

O halde $g_1^{-1}(V) \subset U$ olduğun kullanacağız.

Buradan

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(V)$$

elde ederiz.

Buradan g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1 - U \subset g_1^{-1}(X_2 - V)$$

olduğuna ve sonrasında g_1 fonksiyonunu kullanırsak

$$g_1(X_1 - U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(X_2 - V)$$

olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun. V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere;

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ve δönkararsız olsun.

δönkap(V)$\subset$a-çek(V) ve δönkap($X_2 - V$)$\subset$a-çek($X_2 - V$) olmak üzere

$$\delta\text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

olduğununa ulaşırız.

Dolayısıyla $g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalıdır.

Benzer yolla $g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-açık olduğu görülür.

TEOREM 6.6. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayındaki her V kümesi için δönkap(V)$\subset$a-çek(V) olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ise X_1 uzayındaki her U önkapalı kümesi için g_1(U) X_2 uzayında δönaçıktır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayındaki her V kümesi için

$$\delta\text{önkap}(V) \subset \text{a-çek}(V)$$

olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ise X_1 uzayındaki her önkapalı U kümesi için g_1(U) X_2 uzayında δönaçık olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme alalım.

X_1 bir küme ve ϱ topoloji olmak üzere X_1 uzayının U alt kümesi için

$$\delta\text{-önkap}(U) \subset \text{a-çek}(U)$$

ifadesini ele alacağız.

O halde

$$g_1(U) \subset g_1(U)$$

olduğunu biliyoruz.

Bunu ele alırsak X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğu için $g_1(U) \subset \delta$öniç$(g_1(U))$ olduğunu elde ederiz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olduğundan ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğunda $g_1(U) \subset g_1(U)$ aldığımızda

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(g_1(U))$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla $g_1(U)$ X_2 uzayında δönaçıktır.

TEOREM 6.7. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında δönaçık olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun. X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ alalım. Bu durumda

$$g_1(U) \subset V$$

iken

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Hipotez X_1 uzayındaki U önkapalı kümesinin görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında δönaçık olduğunu söyler.

Buradan

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu elde ederiz.

Böylece

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğuna ulaşırız.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında δönaçık olduğunu ve U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve

$$g_1(U) \subset V$$

ele aldığımızda

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

BÖLÜM 7
DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ

Yedinci bölümde X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olmak üzere pr-kapalı fonksiyonların çeşitli özelikleri çalışılmıştır.

TEOREM 7.1. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-açıktır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

$g_1^{-1}(X_2-V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalı olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve $g_1^{-1}(X_2-V)\subset U$ alalım.

O halde buradan $g_1^{-1}(X_2-V)\subset U$ olduğunu kullanacağız. Buradan

$$X_1-U\subset X_1-g_1^{-1}(X_2-V)$$

olduğuna ulaşırız.

$X_1-g_1^{-1}(X_2-V)$ ‘i kullanırsak

$$X_1-U \subset g_1^{-1}(V)$$

elde ederiz.

Bundan dolayı $g_1(X_1-U)\subset(V)$ olduğuna ulaşırız ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğundan

$$g_1(X_1-U)\subset \delta\text{öniç}(V)$$

elde ederiz.

Dolayısıyla

$$g_1(X_1-U)$$
$$\subset X_2-\delta\text{önkap}(X_2-V)$$

olur.

g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1 - U$$
$$\subset g_1^{-1}(X_2 - \delta\text{önkap}(X_2 - V))$$

ulaşırız.

$$g_1^{-1}(X_2 - \delta\text{önkap}(X_2 - V))$$
$$= X_1 - g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V))$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$X_1 - U$$
$$\subset X_1 - g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V))$$

olduğunu elde ederiz ve dolayısıyla

$$g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V)) \subset U$$

olur.

Ayrıca,

$$\delta\text{önkap}(g_1^{-1}(X_2 - V))$$
$$\subset \delta\text{önkap}(g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V)))$$
$$= g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V))$$

olduğu için

$$\delta\text{önkap}\,(g_1^{-1}(X_2 - V)) \subset U$$

elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olduğunda, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olduğunu, $g_1^{-1}(X_2 - V) \subset U$ ele aldığımızda

$$\delta\text{önkap}\,(g_1^{-1}(X_2 - V)) \subset U$$

ulaştık.

O halde X_1 uzayındaki $g_1^{-1}(V)$ fonksiyonu gδpr-açıktır.

TEOREM 7.2. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 de her küme gδpr-kapalı olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonunda X_1 uzayındaki her önkapalı U kümesi için $g_1(U)$ X_2 uzayında düzenli kapalı olsun. X_1 uzayının U önkapalı kümesi için görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında δönaçıktır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayının U önkapalı kümesi için görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında δönaçık olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme, $g_1(U)$ X_2 uzayında düzenli kapalı küme ve $g_1(U)\subset V$, alalım.

Teorem 2. 30. X_1 uzayının U alt kümesi gδpr-açık olması için gerek ve yeter koşul $M\subset U$ ve M kümesi düzenli kapalı küme ise $M\subset$ δöniç(U) olduğunu söylemektedir.

Bu teoremi ele aldığımızda $g_1(U)\subset V$, $g_1(U)$ düzenli kapalı ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-açık olduğundan $g_1(U)\subset$ δöniç(V) elde ederiz.

O halde X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır. $g_1(U)\subset g_1(U)$ olduğunu biliyoruz.

Bunu ele alırsak X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğu için

$$g_1(U)\subset \delta\text{öniç}(g_1(U))$$

olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonunda X_1 uzayındaki her önkapalı U kümesi için $g_1(U)$ X_2 uzayında düzenli kapalı olduğunda

$$g_1(U)\subset g_1(U)$$

aldığımızda

$$g_1(U)\subset \delta\text{öniç}(g_1(U))$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla $g_1(U)$ X_2 uzayında δönaçıktır.

TEOREM 7. 3. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

Her $y\in X_2$ için $\{y\}$ düzenli kapalı ya da δönaçık olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi ve her y∈X_2 için {y} düzenli kapalı ya da δönaçık olsun.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz. Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ alalım.

Bu durumda $g_1(U) \subset V$ iken

$$g_1(U) \subset \delta \text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$g_1(U) \subset V$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$X_2 - V \subset X_2 - g_1(U)$$

elde ederiz.

Her y∈X_2 için {y} düzenli kapalı ya da δönaçık olduğunu ele alacağız.

Bu durumda $X_2 - V$ gδpr-kapalı olduğunu biliyoruz.

Bunu ele alırsak

$$\delta \text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset X_2 - g_1(U)$$

olduğuna ulaşırız.

$$\delta \text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset X_2 - g_1(U))$$

olduğundan

$$\delta \text{önkap}(X_2 - V)$$

$$\subset X_2 - g_1(U))$$

Bu ifadeyi kullanırsak;

o halde buradan

$$g_1(U) \subset \delta \text{öniç}(V)$$

olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun. X_2 uzayı δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay olduğunu ve U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U)\subset V$ ele aldığımızda $g_1(U)\subset \delta$öniç(V) olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 7.4. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-açıktır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

$g_1^{-1}(X_2-V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalı olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve $g_1^{-1}(X_2-V)\subset U$ alalım. O halde buradan

$$g_1^{-1}(X_2-V)\subset U$$

olduğunu kullanacağız.

Buradan

$$X_1-U$$
$$\subset X_1-g_1^{-1}(X_2-V)$$

olduğuna ulaşırız.

$X_1-g_1^{-1}(X_2-V)$ ‘i kullanırsak

$$X_1-U \subset g_1^{-1}(V)$$

elde ederiz.

Bundan dolayı $g_1(X_1-U)\subset(V)$ olduğuna ulaşırız ve X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olduğundan

$$g_1(X_1-U)\subset \delta\text{öniç}(V)$$

elde ederiz.

Dolayısıyla

$$g_1(X_1-U)$$

$$\subset X_2 - \delta\text{önkap}(X_2 - V)$$

olur.

g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1 - U$$

$$\subset g_1^{-1}(X_2 - \delta\text{önkap}(X_2 - V))$$

ulaşırız.

$$X_1 - U$$

$$\subset g_1^{-1}(X_2 - \delta\text{önkap}(X_2 - V))$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V))$$

olduğunu elde ederiz ve dolayısıyla

$$g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V)) \subset U$$

olur.

Ayrıca,

$$\delta\text{önkap}(g_1^{-1}(X_2 - V))$$

$$\subset \delta\text{önkap}(g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V)))$$

$$= g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2 - V))$$

olduğu için δönkap $(g_1^{-1}(X_2 - V)) \subset U$ elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olduğunda, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olduğundan $g_1^{-1}(X_2 - V) \subset U$ ele aldığımızda

$$\delta\text{önkap}\ (g_1^{-1}(X_2 - V)) \subset U$$

ulaştık.

O halde X_1 uzayındaki $g_1^{-1}(V)$ fonksiyonu gδpr-açıktır.

TEOREM 7. 5. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1 : X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_2 uzayında her küme gδp-kapalı olsun ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı alalım. X_1 uzayının U önkapalı kümesi için görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında δönaçıktır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayının U önkapalı kümesi için görüntüsü olan $g_1(U)$, X_2 uzayında δönaçık olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, X_2 uzayında her küme gδp-kapalı olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalı olsun. $g_1(U) \subset g_1(U)$ olduğunu biliyoruz.

Bunu ele alırsak X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğu için $g_1(U) \subset \delta$öniç$(g_1(U))$ olduğunu elde ederiz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğunda $g_1(U) \subset g_1(U)$ aldığımızda

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(g_1(U))$$

olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla $g_1(U)$ X_2 uzayında δönaçıktır.

TEOREM 7.6. X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

$g_1:X_1 \to X_2$ fonksiyonu pr-kapalı ve $g_2:X_2 \to X_3$ fonksiyonu kuvvetli δönaçık ve δp-gδpr-sürekli olsun.

X_3 uzayı δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay olsun. $g_2 o g_1:X_1 \to X_3$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun.

X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı $g_2 o g_1$ fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme ve V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı ve X_2 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu kuvvetli δönaçık, δp-gδpr-sürekli olsun.

X_3 uzayı δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay olsun.

$$g_2 o g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

X_2 bir küme ve ϱ bir topolojik uzay olmak üzere ve g_2: $X_2 \rightarrow X_3$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_2 uzayından X_3 uzayına tanımlı g_2 fonksiyonu δp- gδpr-sürekli ve X_3 uzayı δp-düzenli $T_{1/2}$ uzay olduğunu ele alacağız.

Buradan g_2 fonksiyonunun gδpr-kararsız olduğuna ulaşırız.

O halde $g_2 o g_1(U) \subset V$ alalım.

Buradan

$$g_2(g_1(U)) \subset V$$

olduğuna ulaşırız ve bunu kullanırsak

$$g_1(U) \subset g_2^{-1}(V)$$

olduğunu elde ederiz.

X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalı olduğundan

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(g_2^{-1}(V))$$

olduğunu elde ederiz.

O halde

$$g_2(g_1(U))$$

$$\subset g_2(\ \delta\text{öniç}(g_2^{-1}(V)))$$

olur ve bundan dolayı

$$g_2 o g_1(U)$$

$$\subset \delta\text{öniç}(g_2(g_2^{-1}(V)))$$

olduğuna ulaşırız.

Buradan

$$g_2 o g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu elde etmiş oluruz.

X_1, X_2, X_3 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi, X_3 üzerinde ϱ_3 topolojisi olsun. g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonu pr-kapalı ve g_2:$X_2 \rightarrow X_3$ fonksiyonu kuvvetli δönaçık ve δp-gδpr-sürekli olduğundan $g_2 o g_1(U) \subset V$ ele aldığımızda $g_2 o g_1(U) \subset \delta$öniç(V) olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_3 uzayına tanımlı $g_2 o g_1$ fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 7. 7. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

V kümesi X_2 uzayında kapalı, açık küme olmak üzere X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık ve X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

$g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalı olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için V kümesi X_2 uzayında kapalı, açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve

$$g_1^{-1}(V) \subset U$$

alalım.

O halde buradan $g_1^{-1}(V) \subset U$ olduğunu kullanacağız.

Buradan

$$X_1 - U \subset X_1 - g_1^{-1}(V)$$

olduğuna ulaşırız. $X_1 - g_1^{-1}(V)$ 'i kullanırsak

$$X_1 - U \subset g_1^{-1}(X_2 - V)$$

elde ederiz.

Bundan dolayı

$$g_1(X_1 - U) \subset (X_2 - V)$$

olduğuna ulaşırız ve X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olduğundan

$$g_1(X_1 - U)$$
$$\subset \delta\text{öniç}(X_2 - V)$$

elde ederiz.

$$g_1(X_1 - U)$$
$$\subset \delta\text{öniç}(X_2 - V)$$

olduğunu biliyoruz.

Dolayısıyla

$$g_1(X_1-U)$$

$$\subset X_2-\delta \text{önkap}(V)$$

olur.

g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1-U$$

$$\subset g_1^{-1}(X_2-\delta \text{önkap}(V))$$

ulaşırız.

$$X_1-U$$

$$\subset g_1^{-1}(X_2-\delta \text{önkap}(V))$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$X_1-U \subset X_1-g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğunu elde ederiz ve dolayısıyla

$$g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)) \subset U$$

olur.

Ayrıca,

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V))$$

$$\subset \delta \text{önkap}(g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V)))$$

$$= g_1^{-1}(\delta \text{önkap}(V))$$

olduğu için

$$\delta \text{önkap}\,(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve V kümesi X_2 uzayında kapalı, açık küme olduğunda, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında düzenli açık olduğundan, $g_1(U)\subset V$ ele aldığımızda

$$\delta \text{önkap}(g_1^{-1}(V)) \subset U$$

ulaştık.

O halde X_1 uzayındaki $g_1^{-1}(V)$ fonksiyonu $g\delta$pr-kapalıdır.

TEOREM 7. 8. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayındaki keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü olan g_1(U), X_2 uzayında önaçık olsun.

X uzayından Y uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun. X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonunun pr-kapalı olduğunu göstereceğiz.

Bunun için; U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ alalım.

Bu durumda

$$g_1(U) \subset V$$

iken

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Hipotez X_1 uzayındaki U önkapalı kümesinin görüntüsü olan g_1(U), X_2 uzayında önaçık olduğunu söyler.

Bunu ele alırsak

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

olduğunu elde ederiz.

g_1(U) önaçık olduğundan

$$g_1(U) \subset \delta\text{öniç}(V)$$

elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında keyfi önkapalı kümelerin görüntüsü X_2 uzayında önaçık olduğunu ve U kümesi X_1 uzayında önkapalı küme, V kümesi X_2 uzayında gδpr-kapalı, gδpr-açık küme ve $g_1(U) \subset V$ ele aldığımızda $g_1(U) \subset \delta$öniç(V) olduğunu elde ettik.

Dolayısıyla X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı g_1 fonksiyonu pr-kapalıdır.

TEOREM 7. 9. X_1, X_2 topolojik uzaylar ve g_1:$X_1 \rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

V kümesi X_2 uzayında kapalı, açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olsun. $g_1^{-1}(V)$, X_1 uzayında gδpr-açıktır.

İSPAT:

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1:X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

$g_1^{-1}(X_2-V)$, X_1 uzayında gδpr-kapalı olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için V kümesi X_2 uzayında kapalı, açık küme olmak üzere X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve $g_1^{-1}(X_2-V)\subset U$ alalım.

O halde buradan

$$g_1^{-1}(X_2-V)\subset U$$

olduğunu kullanacağız.

Buradan

$$X_1-U\subset X_1-g_1^{-1}(X_2-V)$$

olduğuna ulaşırız.

$X_1-g_1^{-1}(X_2-V)$ 'i kullanırsak

$$X_1-U \subset g_1^{-1}(V)$$

elde ederiz.

Bundan dolayı

$$g_1(X_1-U)\subset(V)$$

olduğuna ulaşırız ve pr-kapalı olduğundan

$$g_1(X_1-U)\subset \delta\text{öniç}(V)$$

elde ederiz.

Dolayısıyla

$$g_1(X_1-U)$$
$$\subset X_2- \delta\text{önkap}(X_2-V)$$

olur.

g_1^{-1} fonksiyonunu kullanırsak

$$X_1-U$$

$$\subset g_1^{-1}(X_2- \delta\text{önkap}(X_2-V))$$

ulaşırız.

$$g_1^{-1}(X_2- \delta\text{önkap}(X_2-V))$$

$$=X_1-g_1^{-1}(\,\delta\text{önkap}(X_2-V))$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$X_1-U \subset X_1-g_1^{-1}(\,\delta\text{önkap}(X_2-V))$$

olduğunu elde ederiz ve dolayısıyla

$$g_1^{-1}(\,\delta\text{önkap}(X_2-V))\subset U$$

olur.

Ayrıca,

$$\delta\text{önkap}(g_1^{-1}(X_2-V))$$

$$\subset \delta\text{önkap}(g_1^{-1}(\delta\text{önkap}(X_2-V)))$$

$$= g_1^{-1}(\,\delta\text{önkap}(X_2-V))$$

olduğu için δönkap $(g_1^{-1}(X_2-V)) \subset U$ elde etmiş oluruz.

X_1, X_2 topolojik uzaylar ve $g_1{:}X_1\rightarrow X_2$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere X_1 üzerinde ϱ_1 topolojisi, X_2 üzerinde ϱ_2 topolojisi olsun.

X_1 uzayında U kümesi düzenli açık ve V kümesi X_2 uzayında kapalı, açık küme olduğunda, X_1 uzayından X_2 uzayına tanımlı olan g_1 fonksiyonu δönkararsız ve pr-kapalı olduğundan $g_1^{-1}(X_2-V)\subset U$ ele aldığımızda

$$\delta\text{önkap}\,(g_1^{-1}(X_2-V)) \subset U$$

ulaştık.

O halde X_1 uzayındaki $g_1^{-1}(V)$ fonksiyonu gδpr-açıktır.

KAYNAKLAR

Caldas M., Ekici E., Jafari S., Moshokoa S. P., 2009. On weakly BR-closed functions between topological spaces, Mathematical Communications, 14(1), 67-73

Ekici E., 2003. Nearly continuous multifunctions, Acta Mathematica Universitatis Comenianane, Vol. LXXII, 2, pp, 229-235

Ekici E., 2004. (δ-pre, s)-continuous functions. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) (27), 237-251

Ekici E., Caldas M., 2004. Slightly γ-Continuous functions, Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, (3s.) v. 22(2), 63-74

Ekici E., 2005a. Generalization of perfectly continuous, regular set-connected and clopen functions, Acta Mathematica Hungarica, 107(3), 193-206

Ekici E., 2005b. On γ-Urysohn spaces, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 11(2), pp. 219-226

Ekici E., Noiri T., 2006a. On a generalization of normal, almost normal and mildly normal spaces-I. Mathematica Moravica, 10: 9-20

Ekici E., Noiri T., 2006b. On a generalization of normal, almost normal and mildly normal spaces-II, Filomat, 20:2, 67-80

Ekici E., Jafari, S., 2006. On E-sets and F-sets and decompositions of α-continuty, quasi-continuty and A-continuty, Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., Vol. 49,65-73

Ekici E., 2006. On almost and weak forms of nearly continuous multifunctions, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 9(2), 109-120

Ekici E., Noiri T., 2007. On separation axioms and sequences, Mathematica Moravica, Vol. 11, 39-46

Ekici E., 2008a. On (LC, s)-continuous functions, Chaos, Solitons and Fractals, 38, 430-438

Ekici E., 2008b. On e-open sets, DP^*-sets and DPE^*-sets and decompositions of continuity, Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 33, Number 2A, 269-282

Ekici E., 2008c. On locally closedness and continuity, Chaos, Solitions and Fractals, 36, 1244-1255

Ekici E., Jafari S., 2008. On DS^*-sets and decompositions of continuous functions, Filomat, 22:2, 65-73

Ekici E., 2009. On e^*-open sets and $(D.S)^*$-sets, Mathematica Moravica, Vol. 13-1, 29-36

Ekici E.,2011. Generalized hyperconnectedness, Acta Mathematica Hungarica, 133(1-2),

140-147

El-Deeb S.N., Hasanein I.A., Mashhour A.S. ve T. Noiri, 1983. On p-regular spaces. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie. 27 (75) : 311-315.

Gnanambal Y., 1997. On generalized preregular closed sets in topological spaces. Indian J. Pure Appl. Math., 28: 351-360

Levine N., 1970. Generalized closed sets in topology, Rend. Circ. Mat. Palermo. (2), 19: 89-96

Maki H., Umehara J., Noiri T., 1996. Every topological space is pre-$T_{1-2,}$ Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math. 17: 33-42

Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E., El-Deeb S. N., 1982. On precontinuous and weak precontinuous mappings. Proc. Math. Phys. Soc. Egypt. 53: 47-53

Mashhour A. S., Abd El-Monsef M. E., Hasanein I. A., 1984. On pretopogical spaces. Bull. Math. Soc. Math. R. S. R., 28 :76, 39-45

Noiri T., 1998. Almost p-regular spaces and some functions. Acta Math. Hungar, 79: 207-216

Palaniappan N., Rao K. C., 1993. Regular generalized closed sets. Kyungpook Math. J., 33: 211-219

Raychaudhuri S., Mukherjee N., 1993. On δ-almost continuity and δ-preopen sets. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 21: 357-366

Stone M. H., 1937. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans.

Amer. Math. Soc., 41: 375-381

Velicko N. V., 1968. H-closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Transl., 78: 103-108

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Burak MERAL

Doğum Yeri : Balıkesir-Bandırma

Doğum Tarihi : 05.08.1993

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2011-2015)

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI -Diğer

b) Bildiriler -Uluslararası -Ulusal: 2nd İnternational Conference On Computational Mathematics and Engineering Sciences-Cmes2017

c) Katıldığı Projeler: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi

İLETİŞİM

E-posta Adresi: b.meral5@hotmail.com