



**EGE ÜNİVERSİTESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TENDON VE LİGAMAN**

**MALZEME MODELİ OLUŞTURULMASI**

**Burak Atakan**

**Tez Danışmanı : Yrd.Doç. Dr. Samim DÜNDAR**

**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Sunuş Tarihi : 03.08.2017**

**Bornova-İZMİR**

**2017**



**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**TENDON VE LİGAMAN  
MALZEME MODELİ OLUŞTURULMASI**

**Burak ATAKAN**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Samim DÜNDAR**

**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Sunuş Tarihi : 03.08.2017**

**Bornova-İZMİR**

**2017**



Burak ATAKAN tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan “Tendon ve ligaman malzeme modeli oluşturulması” başlıklı bu alışma E Lisansüstü Eğitim ve ėretim Yönetmeliėi ile E Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve ėretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 03.08.2017 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri yeleri:**

**Jüri Bařkanı : .Yrd.Doç.Dr. Samim DÜNDAR**

**Raportör ye : Prof.Dr. Hasan YILDIZ**

**ye : Prof.Dr. Mehmet ZOR**

**İmza**





## EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

### ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi / Doktora Tezi olarak sunduğum “Tendon ve ligaman malzeme modeli oluşturulması” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

03/08/2017

İmzası



Adı-Soyadı

Burak ATAKAN



## ÖZET

# TENDON VE LİGAMAN MALZEME MODELİ OLUŞTURULMASI

ATAKAN, Burak

Yüksek Lisans Tezi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Samim DÜNDAR

Temmuz 2017, 84 sayfa

Bu tezde iskelet sistemi ile kasları bir arada tutan tendon ve ligaman parçalarının malzeme modellemesi araştırılmış ve bilgisayar destekli mühendislik programları yardımıyla farklı modellerin verdiği sonuçlar incelenerek yorumlanmıştır.

Malzeme modellemesi yapılırken, tendon ve ligamanlar eksenel kuvvetlere maruz bırakılarak reaksiyon olarak gerilme-gerinim eğrileri elde edilmiştir. Ardından Mooney-Rivlin ve Ogden malzeme modeli katsayılarını elde etmek için eğri uydurma yöntemleri kullanılmıştır.

Malzeme modellemesi, bilgisayar destekli mühendislik programları ile sonlu elemanlar modeli yardımıyla oluşturulmuş ve Ogden ile Mooney-Rivlin modelinin verdiği sonuçlar yorumlanmıştır.

**Anahtar sözcükler:** Tendon, hiperelastik malzeme modelleme, sonlu elemanlar yöntemi, Mooney-Rivlin, Ogden.



**ABSTRACT**

**CONSTITUTIVE MODELING OF  
TENDON AND LIGAMENTS**

ATAKAN, Burak

MSc in Mechanical Eng.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Samim DÜNDAR

July 2017, 84 pages

In this thesis, tendons and ligaments that holds skeletal and muscular system together are investigated with the help of hyperelastic material models and results of different material models are interpreted with the help of computer aided engineering programs.

Axial forces are applied to tendons and ligaments in order to obtain stress-strain curve while doing constitutive modelling. After that, curve fitting methods are used to get the Mooney-Rivlin and Ogden constants.

Constitutive model is formed by finite element model with the help of computer aided engineering programs and results of Mooney-Rivlin and Ogden models are interpreted.

**Anahtar sözcükler:** Tendon, Hyperelastic material modeling, sonlu Finite Element Method, Mooney-Rivlin material model, Ogden material model.



## TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince kıymetli görüşlerinden yararlandığım ve yakın ilgisini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Hasan Yıldız'a, tezin biçimlenmesinde değerli katkılarını aldığım Yrd. Doç. Mahmut Pekedis'e ve tezim boyunca bana danışmanlık yapan Yrd. Doç. Dr. Samim Dünder'a teşekkürü bir borç bilirim.





## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| ÖZET .....                                         | vii |
| ABSTRACT .....                                     | ix  |
| TEŞEKKÜR .....                                     | xi  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                              | xvi |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                            | xix |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....               | xx  |
| 1. GİRİŞ .....                                     | 1   |
| 2. TENDON VE LİGAMANLARIN ANATOMİSİ .....          | 3   |
| 2.1 Tendon ve Ligamanların İç Düzeni .....         | 4   |
| 3. MEKANİK YAPININ DENKLEMLERLE ÇÖZÜMLENMESİ ..... | 7   |
| 3.1 Hooke Kanunu .....                             | 7   |
| 3.2 Kayma Bileşenleri .....                        | 9   |
| 3.3 Esneklik Modülü .....                          | 10  |
| 3.4 Matris ve Tensör Gösterimi .....               | 11  |
| 3.5 Hooke Kanunu'nun Tersine Fonksiyonları .....   | 13  |
| 3.6 Katılık Tensörü .....                          | 13  |
| 3.7 Deformasyon Gradyanı .....                     | 15  |

## İÇİNDEKİLER (devam)

|                                                        | <u>Sayfa</u> |
|--------------------------------------------------------|--------------|
| 3.8 Green Gerinim Tensörü .....                        | 16           |
| 4. MALZEME MODELİNİN OLUŞTURULMASI .....               | 19           |
| 4.1 Nonlineer Elastisite .....                         | 20           |
| 4.2 Viskoelastisite .....                              | 21           |
| 4.3 Hiperelastik Malzeme Modelleme .....               | 24           |
| 4.3.1 Farklı hiperelastik malzeme modelleri .....      | 24           |
| 4.3.1.1 Mooney-Rivlin malzeme modeli .....             | 25           |
| 4.3.1.2 Ogden malzeme modeli .....                     | 29           |
| 4.3.1.3 Polinom malzeme modeli.....                    | 30           |
| 4.3.1.4 Neo-Hookean malzeme modeli.....                | 30           |
| 4.3.1.5 Yeoh malzeme modeli .....                      | 30           |
| 4.3.1.6 Arruda ve Boyce malzeme modeli.....            | 31           |
| 5. DENEYSEL YÖNTEMLERLE KATSAYILARIN ÇIKARILMASI ..... | 32           |
| 5.1 Test Aşaması .....                                 | 32           |
| 5.2 Test Sonuçları .....                               | 36           |
| 6. FARKLI MODELLERİN ANALİZİ .....                     | 43           |
| 6.1 Sonlu Elemanlar Modelinin Oluşturulması.....       | 43           |

**İÇİNDEKİLER (devam)**Sayfa

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| 6.2 Sınır Koşullarının Girilmesi ..... | 45 |
| 6.3 Analiz Sonuçları .....             | 46 |
| 7. SONUÇ VE TARTIŞMA .....             | 51 |
| 8. ÖNERİLER.....                       | 53 |
| KAYNAKLAR DİZİNİ.....                  | 54 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                         | 58 |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

| <u>Şekil</u>                                                                                                              | <u>Sayfa</u> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1.1 Hiperelastik bir malzemenin gerilme-gerinim eğrisi .....                                                              | 1            |
| 2.1 Tendonların ve ligamanların görünüşü .....                                                                            | 3            |
| 2.2 Tendonların iç yapısının görünüşü .....                                                                               | 4            |
| 2.3 Fibrillerin yük altındaki ve dinlenirkenki halleri .....                                                              | 5            |
| 2.4 Fasikül içerisindeki fibrillerin dalgalı yapısı .....                                                                 | 6            |
| 3.1 1 yönünde gerilmeye maruz kalan katı bir cisimdeki deformasyon .....                                                  | 7            |
| 3.2 1 ve 2 yönünde kuvvete maruz kalan katı bir cisimdeki deformasyon....                                                 | 8            |
| 4.1 Hiperelastik malzeme modellerken izlenebilecek yöntemler ve alt modeller .....                                        | 19           |
| 4.2 Tendonun iç yapısının grafiğe bağlı değişimi.....                                                                     | 20           |
| 4.3 Viskoelastik bir malzemede yükleme ve boşalma döngüleri yapılması sonucu elde edilen gerilme-deformasyon grafiği..... | 21           |
| 4.4 Woo ve meslektaşlarının(1981) farklı çekme hızları ile yaptıkları deneylerin sonuçları .....                          | 23           |
| 5.1 Çekme cihazına yerleştirilmiş bir numunenin test edilmesi .....                                                       | 32           |
| 5.2 İki parçaya ayrılmış bovine tendonunun görüntüsü.....                                                                 | 33           |
| 5.3 Kolz ve meslektaşlarının 2015 yılında yaptığı çalışmada kullandıkları kesme yöntemi .....                             | 34           |

## ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

| <u>Sekil</u>                                                                        | <u>Sayfa</u> |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 5.4 Papyon yöntemi ile orta kısmı zayıflatılmış bovine tendonunun görüntüsü .....   | 34           |
| 5.5 Çekme cihazı yardımı ile eksenel yüklemeye maruz bırakılan tendon numunesi..... | 35           |
| 5.6 Numune 1'e ait gerilme-gerinim test sonuçları .....                             | 36           |
| 5.7 Numune 1'e ait gerilme-gerinim test sonuçları(Hiperelastik bölge).....          | 37           |
| 5.8 Numune 2'e ait gerilme-gerinim test sonuçları .....                             | 37           |
| 5.9 Numune 2'e ait gerilme-gerinim test sonuçları(Hiperelastik bölge).....          | 38           |
| 5.10 Numune 3'e ait gerilme-gerinim test sonuçları .....                            | 38           |
| 5.11 Numune 3'e ait gerilme-gerinim test sonuçları(Hiperelastik bölge).....         | 39           |
| 5.12 Numune 4'e ait gerilme-gerinim test sonuçları .....                            | 39           |
| 5.13 Numune 4'e ait gerilme-gerinim test sonuçları(Hiperelastik bölge).....         | 40           |
| 5.14 Hiperelastik bölgede numunelerin gerilme-gerinim test sonuçları .....          | 40           |
| 5.15 Hiperelastik bölgedeki ortalama değerlerin gerilme-gerinim grafiği .....       | 41           |
| 6.1 Tendon ve tutucu küplerin 3D katı modeli.....                                   | 43           |
| 6.2 Ogden malzeme modelinin ANSYS'e aktarılması.....                                | 44           |
| 6.3 Mooney-Rivlin malzeme modelinin ANSYS'e aktarılması.....                        | 44           |
| 6.4 3D katı modelinin meshlenmiş hali.....                                          | 45           |

## ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

| <u>Şekil</u> | <u>Sayfa</u>                                                                  |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 6.5          | Modele verilen sınır koşullarının ANSYS'te gösterimi ..... 46                 |
| 6.6          | Mooney-Rivlin modeli ile yapılan analizden alınan gerilme sonucu .... 47      |
| 6.7          | Mooney-Rivlin modeli ile yapılan analizden alınan deformasyon sonucu ..... 47 |
| 6.8          | Modelin ortasından alınan kesitte görülen gerilme değerleri ..... 48          |
| 6.9          | Ogden modeli ile yapılan analizden alınan gerilme sonucu ..... 49             |
| 6.10         | Ogden modeli ile yapılan analizden alınan deformasyon sonucu..... 49          |
| 6.11         | Modelin ortasından alınan kesitte görülen gerilme değerleri(Ogden) ... 50     |
| 7.1          | Deneyssel veri ile Mooney-Rivlin malzeme modelinin karşılaştırması.. 51       |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

| <u>Çizelge</u>                                             | <u>Sayfa</u> |
|------------------------------------------------------------|--------------|
| 5.1 Tendon numunelerinin boyutları .....                   | 36           |
| 5.2 Mooney-Rivlin malzeme modellerine ait katsayılar ..... | 41           |
| 5.3 Ogden malzeme modellerine ait katsayılar.....          | 42           |



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| <u>Simgeler</u> | <u>Açıklama</u>                 |
|-----------------|---------------------------------|
| $\sigma$        | Gerilme (MPa)                   |
| $\epsilon$      | Gerinim (mm/mm)                 |
| $F$             | Kuvvet (N)                      |
| $E$             | Elastisite modülü               |
| $\nu$           | Poisson oranı                   |
| $\delta$        | Yer değiştirme (mm)             |
| $\gamma$        | Kayma gerinmesi (mm/mm)         |
| $\tau$          | Kayma gerilmesi (MPa)           |
| $G$             | Kayma modülü (GPa)              |
| $K$             | Esneklik modülü (GPa)           |
| $I$             | Birim matris                    |
| $C_{ij}$        | Katılık matrisi                 |
| $R$             | Rotasyon tensörü                |
| $U$             | Gerinme tensörü                 |
| $G(t)$          | Zamana bağlı boşalma fonksiyonu |
| $S(\tau)$       | Kayma gerilmesi fonksiyonu      |
| $t$             | Süre (saniye)                   |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

| <u>Simgeler</u>    | <u>Açıklama</u>                                           |
|--------------------|-----------------------------------------------------------|
| $\varphi$          | Helmholtz enerji fonksiyonu                               |
| $E$                | Green gerinim tensörü                                     |
| $q$                | Euler sabiti                                              |
| $W$                | Şekil değiştirme enerji fonksiyonu                        |
| $I_1, I_2, I_3$    | Değişmezler (Invariant)                                   |
| $\lambda$          | Şekil değiştirme oranı                                    |
| $\text{tr}()$      | Matrisin diagonal elemanlarının toplamı (Trace of Matrix) |
| MCL                | Orta Çapraz bağlar (Medial Cruciate Ligament)             |
| <u>Kısaltmalar</u> |                                                           |
| ŞDEF               | Şekil değiştirme enerji fonksiyon                         |

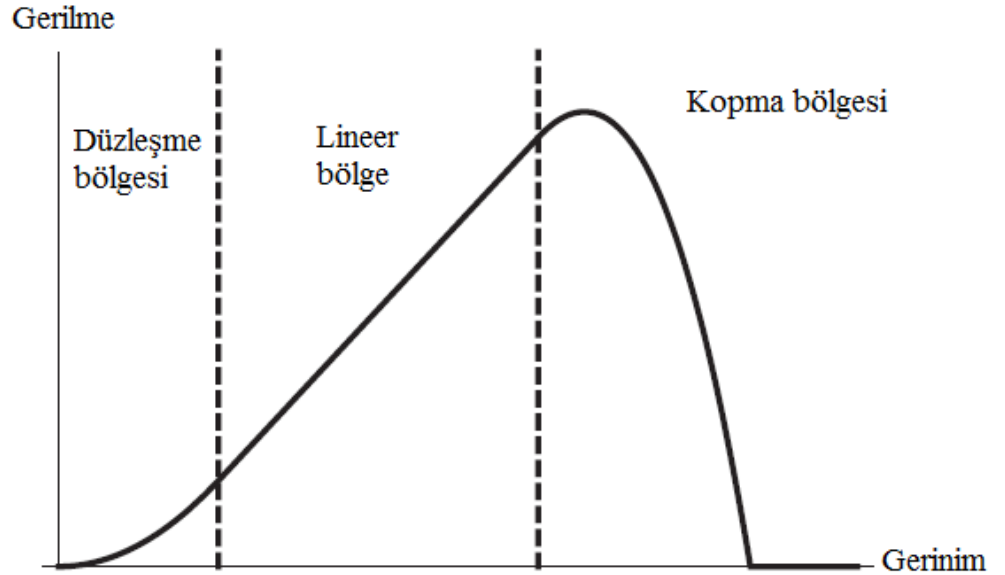


## 1. GİRİŞ

Mühendislik ile tıp bilimlerinin ortak konularda çalışıldığı bu zaman diliminde, mühendislik bilimi klasik metaller ve polimerler dışında birçok malzeme ile çalışmaktadır. Mühendislik bilimi günlük genel soruların yanı sıra oldukça karmaşık ve spesifik sorulara cevap vermektedir. Bu tezde üzerine çalışılan biyomekanik konular, anatomi ile mühendisliğin birbirine karıştığı dallardan biridir.

Tendon ve ligamanlar vücudu bir arada tutan yumuşak dokulardır. Diz, omuz gibi eklemleri bir arada tutarak hareketin iletimini sağlayan bu dokular birçok yaralanmada zarar gören yapılardır. Hareket kapasitesinin ve kalitesinin kontrolünü sağlamak için bu yapıların tıbbi özelliklerinin yanı sıra mühendislik özelliklerinin de bilinmesi gerekmektedir.

Yumuşak dokular gerilme ile gerinim arasındaki ilişkinin birden fazla bölümde incelenmesini gerektirmektedir. Bu tip malzemelere hiperelastik malzeme adı verilmektedir. Elastik davranışın sabit bir elastisite modülüne bağlanamadığı ve bölgelere göre farklı elastisite modüllerine sahip olan tendon ve ligamanlar, canlı dokulara sahip olduğu için metaller gibi incelenemezler. Ayrıca doğaları itibariyle ekstrem koşullarda çalışmamakta ve genellikle sınırlı yüklemelere maruz tutulmaktadırlar.



Şekil 1.1 Hiperelastik bir malzemenin gerilme-gerinim eğrisi

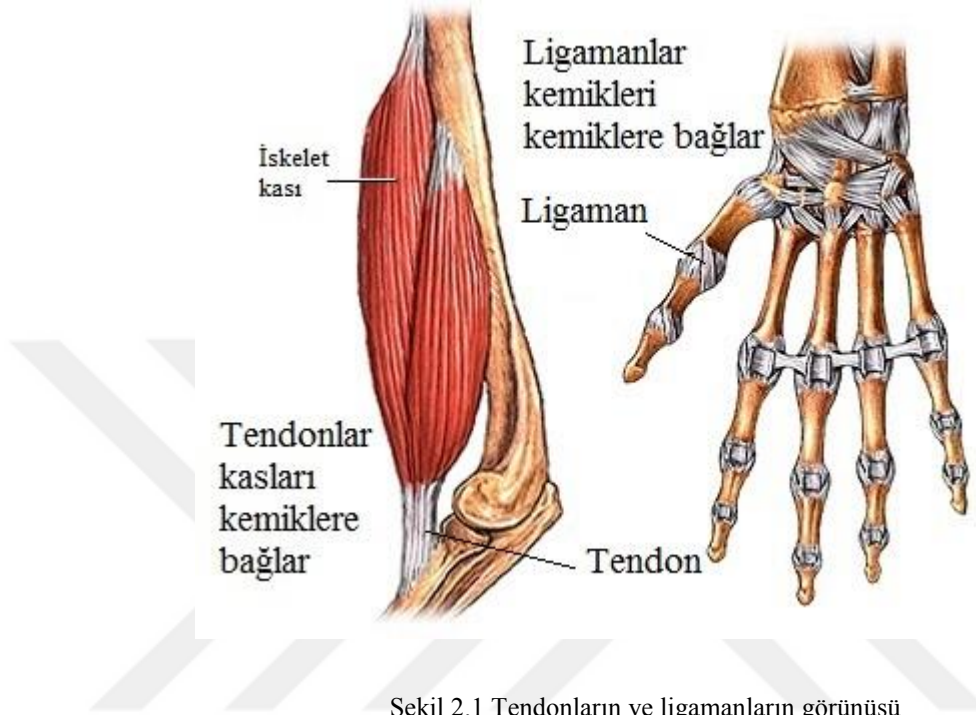
Bu çalışmada hiperelastik malzemelerin çekme davranışları üzerinde durulmuştur. Şekil 1.1’de görüldüğü üzere, kademeli bir çekme diyagramına

sahip olan tendon ve ligamanlar birden çok kritik özelliğe sahiptir. Kompozit bir yapıda olması, içerisinde oldukça yüksek oranda su bulundurması ve sıcaklığa bağlı olarak yapısının değişebilmesi bu özelliklerden bazılarıdır.



## 2. TENDON VE LİGAMANLARIN ANATOMİSİ

Tezde incelenen tendon ve ligaman isimli yapılar yumuşak dokulardır. Ligamanlar kemikleri kemiklere, tendonlar ise kemikleri kaslara bağlayan kollajen bazlı yapılardır.



Şekil 2.1 Tendonların ve ligamanların görünüşü

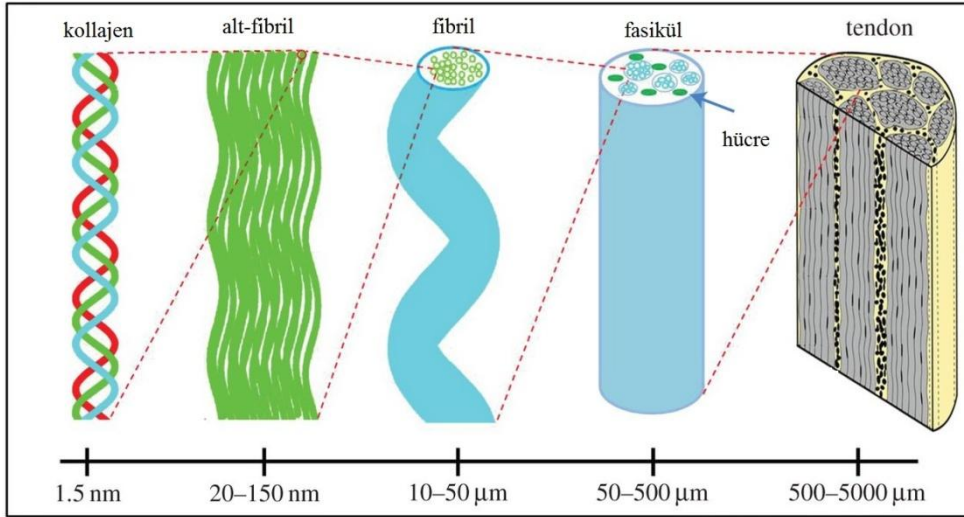
Tendon ve ligamanlar içyapı olarak kaslara benzer yapılardır (Şekil 2.1). Ligamanlar kemikleri kemiklere bağlarken, eklemlerin doğru şekilde çalışmasını ve stabilitesini sağlar. Diğer yandan tendonlar kemikleri kaslara bağlayarak kaslardan iskelete yük akışını sağlarlar.

Ortopedik tedavide, iyileşmelerinin zorluğu sebebiyle onarımları ile ilgili yeni yöntemler aranmaktadır. Tedavilerinin zorluğu, bu dokuların kendilerine has bir yapısı olması ve tedavi sonrası mekanik özelliklerini korumasının zor olmasından kaynaklanmaktadır.

Bütün biyomekanik dokular gibi, tendon ve ligamanlar da mekanik davranışlarını etkileyen hiyerarşik bir bünyeye sahiptir. Ayrıca tendon ve ligamanlar; yaralanma, hastalık veya egzersizlerin mekanik yapılarında oluşturduğu durumlara adapte olabilirler. Dolayısıyla, tendon ve ligamanlar yapı itibari ile değişkenlik ve uyum gösterebilen dokulardır.

## 2.1 Tendon ve Ligamanların İç Düzeni

İlk olarak, tendon ve ligamanların kollajen bazlı içyapısı vurgulanmalıdır. Tendonlar iç içe birçok ipliksi yapının bir araya gelmesi ile oluşan yapılardır. Kollajen bu hiyerarşide en alt bileşeni oluşturur.



Şekil 2.2 Tendonların içyapısının görünüşü

Şekil 2.2’de tendonların hiyerarşik içyapısı gösterilmektedir. Bu iki bağ doku alt lif bazlı alt yapılardan oluşurlar. Bu yapılar küçükten büyüğe; fasiküller (50-500 mikrometre), fibriller (10-50 nanometre), alt-fibriller (20-1500 nanometre) ve son olarak da kollajen moleküller (1,5 nanometre) olarak sıralanabilir. Bu seviyede tendon ve ligamanların mekanik davranışını belirleyen yapı fibril kıvrımlarıdır. Fibril kıvrımlarının dalgalı halde oluşu, tüm yumuşak dokular gibi tendon ve ligamanların da gerilme – gerinim ilişkisinin nonlineer olmasını sağlar (Kastelic,1978).

Tendonların yapısal özellikleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

- Tendonlar kollajen fibriller içerir.(I tipi)
- Tendonlar proteoglikan matrisler halindedir.
- Paralel sıralar halinde düzenlenmiş fibroblastlardan oluşurlar.

Tendonların temel fonksiyonları ve görevleri maddeler halinde aşağıda sıralanmıştır.

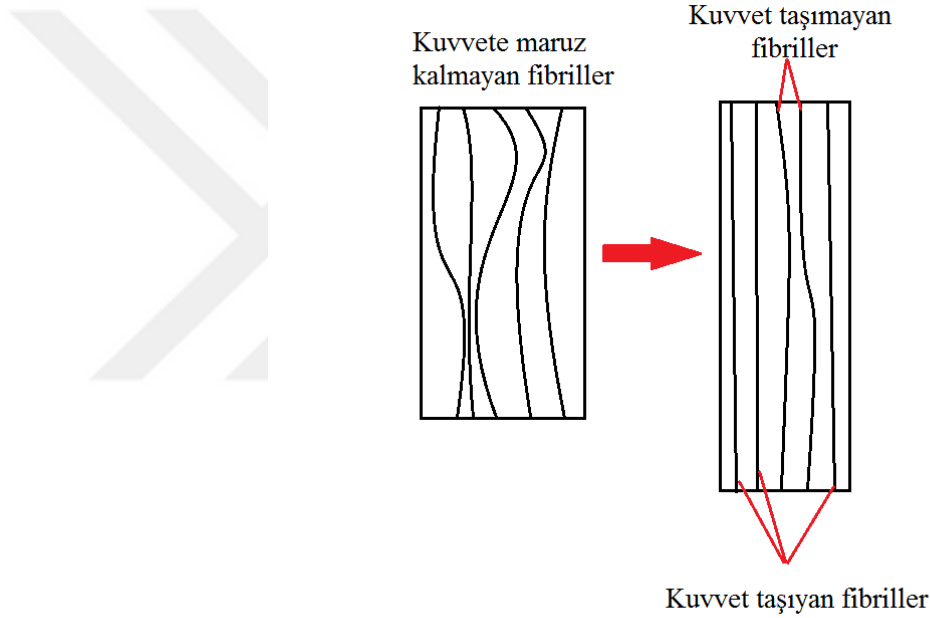
- Tendonlar kemikler ile kaslar arasındaki çeki kuvvetlerini taşırlar
- Kemik etrafına kasnağa sarılır bir şekilde tutunduğu takdirde bası kuvveti taşıyabilirler.

Tendonların anatomik özelliklerinde değinilen I tipi kollajenlerin yapıları aşağıda belirtilmiştir.

- Tendonların %86'sını oluştururlar. (Kuru haldeyken)
- %33 glisin, %15 prolin ve %15 hidroksiprolin'den oluşurlar.

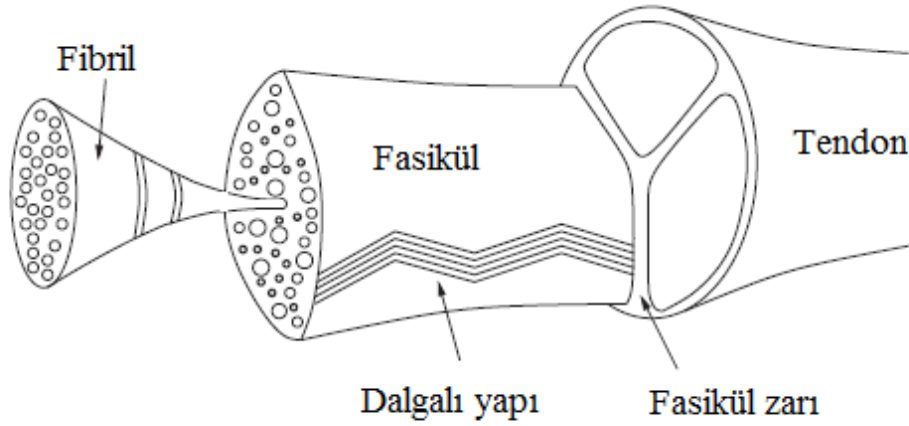
Tendonlara benzer yapıda olan ligamanların anatomik özellikleri ise aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Tendonların temel yapısına benzerler.
- Tendonlara oranla kollajen fibriller daha az hacim kaplar.
- Proteoglikan matrisi tendonlara göre daha fazla yüzdededir.



Şekil 2.3 Fibrillerin yük altındaki ve dinlenirkenki halleri

Fibriller genellikle dalgalı ve dağınık bir şekilde bulunmaktadır. Şekil 2.3'de görüldüğü üzere kuvvet taşımaya başladıkça düzleşmeye başlarlar. Bu yapıların geometrik sıralanışı ligamanlar ve tendonlar arasında farklılık gösterebilir. Örnek olarak patellartendon içerisindeki yapılar boylamasına sıralanırken, ön çapraz bağlar içerisindeki yapılar spiral halinde sıralanır. Ayrıca fasikül içerisindeki fibriller boylamasına bir yapıda olmasına rağmen kendi içerisinde spiral olarak sıralanabilir.



Şekil 2.4 Fasikül içerisindeki fibrillerin dalgalı yapısı

İki durumda da fibriller fasikül'ün kesit alanı içerisinde farklı şekillerde dalgalar halinde bulunabilir (Şekil 2.4). Bu karmaşık yapı, mekanik davranışa anisotropi, viskoelastisite ve nonlinear özellikler olarak yansıyarak tendonlar ile ligamanlar arasında farklılığa sebep olabilir. Bu fibriller arasındaki hiyerarşik yapının mekanik performans üzerindeki etkisi net olarak anlaşılmış değildir.

Bu mekanik özellikleri anlamak için öncelikle viskoelastiteyi göz ardı ederek elastik özelliklerin modele etkisi anlaşılmalıdır. Elastik modeller düşük ve aşırı yüksek şekil değiştirme hızlarında geçerli modellerdir. Tendon ve ligamanların tek eksenli çeki yükü altındaki gerilme-şekil değiştirme davranışları, ilk olarak katılığın artması ile nonlinear bir başlangıç yaptıktan sonra kopmaya kadar lineer bir şekilde devam etmesi olarak karakterize edilebilir. Birçok yazar bu davranış ile paralel şekilde çalışmalar yapmıştır fakat daha karmaşık şekil değiştirmeler için şekil değiştirme enerji fonksiyonları (SDEF) baz alınarak modelleme yapılır.

Birçok nonlinear SDEF yumuşak dokuların mekanik davranışları incelenirken kullanılmasına rağmen sadece küçük bir kısmı tendon ve ligamanlar üzerine odaklanmıştır. Çoğunlukla SDEF tendon ve ligamanları modellemek için yeterli olmasına rağmen büyük bir kısmı deneylerle direk ölçülebilir değişkenler içermemektedir. Bu durum tendon ve ligamanların davranışını anlamakta anahtar olan özellikleri ve önem sıralamasını kısıtlamaktadır. Deneysel sonuçlarla elde edilen değişkenlerin kullanılabilirdiği mikro yapısal modeller, tendon ve ligamanları analiz etmek için daha uygundur (Hollister, 2002).

### 3. MEKANİK YAPININ DENKLEMLERLE ÇÖZÜMLENMESİ

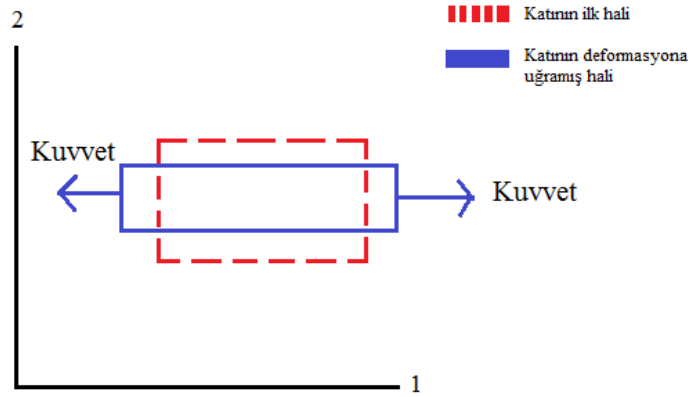
Bahsi geçen yumuşak dokuların çözümlenmesi için çok çeşitli malzeme modellemesi yapılmıştır. Malzeme modellemesinin yapılabilmesi için ise gerilme ve gerinme kanunlarının detaylı incelenmesi gerekmektedir.

#### 3.1 Hooke Kanunu

Hooke kanunu bir cisme uygulanan bası ya da çeki kuvvetinin (**F**) miktarı ile bu kuvvete karşılık gelen uzamanın (**X**) oranlı olduğunu belirten yasadır. Bu yasa adını 17. yüzyılda fizik üzerine çalışmalar yapan Robert Hooke'dan almıştır. İlk defa bu kanundan 1676 yılında bahsetmiştir.

Bu kanunu anlamak için ilk olarak basit tek eksenli çekme ya da basma durumu incelenmelidir. Bu durumdaki ilişki aşağıdaki formülasyonla gösterilebilir;

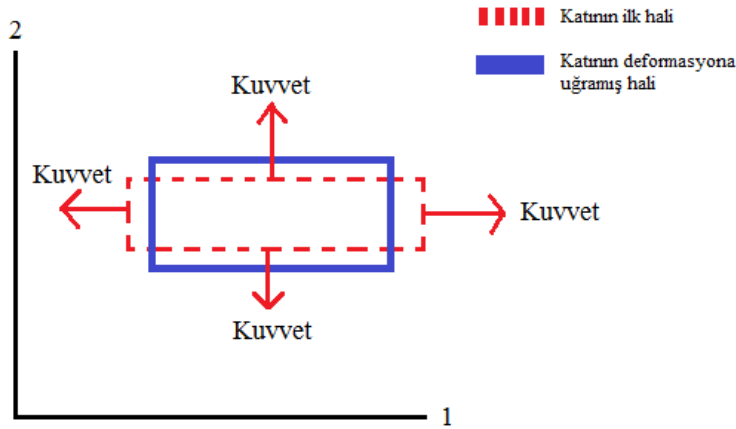
$$\sigma = E\epsilon$$



Şekil 3.1 1 yönünde gerilmeye maruz kalan katı bir cisimdeki deformasyon

Gerilme ve gerinim birinci dereceden fonksiyonlar halinde incelendiği için formül lineer bir şekilde ilerlemektedir. Gerinim birimsiz olduğu için, elastisite modülü gerilmeyle aynı birim içermektedir. Bir sonraki adımda tansörel ifade açılarak, koordinat eksenlerine göre ayrı ayrı yazılmıştır. İlk olarak bası ve çeki durumunu 1 yönünde incelenirse, gerilme ve gerinim 1 yönünde olur (Şekil 3.1). Böylece formül aşağıdaki şekle dönüşmektedir;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{11}$$



Şekil 3.2 1 ve 2 yönünde kuvvete maruz kalan katı bir cisimdeki deformasyon

Formülün bir miktar daha ayrıntılı olması için 2 yönünde gerilme eklenir. Diğer ekseninde gerilme olması durumunda, 2 yönünde eklenen herhangi bir gerilme, 1 yönündeki gerinimin azalmasını sağlayacaktır (Şekil 3.2). Formül bu duruma göre modifiye edilirse aşağıdaki şekli almaktadır;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{11} - B \cdot \sigma_{22}$$

Bu durumda oluşan formülde  $B$  katsayısı,  $E$  ile benzer özellikler taşıyan ve testlerle hesaplanabilecek bir bilinmeyendir. Bu durumda  $B$  adlı farklı bir katsayı kullanmaktansa  $1/E$ 'ye bağlı bir fonksiyon belirlenebilir;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{11} - f \frac{1}{E} \cdot \sigma_{22}$$

Burada  $f$  bilinmeyeni 0 ile 1 arasında kalan malzeme özellikleri ile alakalı olan bir sabittir. 1 yönündeki gerilme ( $\sigma_{11}$ ), 1 yönündeki gerinimi ( $\epsilon_{11}$ ) 2 yönündeki gerilmeye ( $\sigma_{22}$ ) nazaran daha fazla etkilediği için  $f$  1'den daha küçük bir değer almaktadır.

Elde edilen  $f$  sabiti yerine  $\nu$  kullanılarak, bu oranın Poisson oranı olduğunu bulunmaktadır. Bu oran birisi gerinim yönünde ve birisi buna dik olan iki gerilmenin oluşturduğu gerinim hassaslığını ölçmekte kullanılmaktadır.

Kauçuk gibi sıkıştırılmaz malzemelerde 0,5 olan Poisson oranının, alüminyum, nikel ve bakır gibi yüzey merkezli kübik yapıdaki malzemelerde 1/3 olduğu bilinmektedir. Çelik için bu oran 0,3 değerindedir.

Bahsi geçen formül böylece aşağıdaki şekli almaktadır;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{11} - \nu \cdot \sigma_{22})$$

Üç boyutlu vakalarda bu formüle  $\sigma_{33}$  gerilmesi eklemektedir. Eğer malzeme izotropik ise  $\epsilon_{11}$  gerinimine karşılık gelen  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{22}$  ile aynı olacaktır. Böylece formüle  $\sigma_{33}$  bileşeni yerleştirilmektedir;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} + \sigma_{33}]$$

Böylece 1 yönündeki gerinim ( $\epsilon_{11}$ ) ile ilgili olan Hooke yasası tamamlanmaktadır.

Bu fonksiyonların tüm yönler için yazılması gerekirse aşağıdaki fonksiyonlar elde edilmektedir;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} + \sigma_{33}]$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} + \sigma_{33}]$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{33} - \nu \sigma_{11} + \sigma_{22}]$$

### 3.2 Kayma Bileşenleri

Bir önceki başlık altında Hooke Kanunu'nun normal bileşenleri gösterilmiştir. Bu başlık altında ise kayma gerilmesi ve gerinmesi arasındaki ilişki incelenecektir. Kayma gerilmesi ve kayma gerinmesini 45° derece çevirerek asal değerler elde edilir.

Kayma gerilmeleri için;

$$\begin{array}{cc} 0 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & 0 \end{array} \xrightarrow{45^\circ \text{ döndürülürse}} \begin{array}{cc} \tau_{12} & 0 \\ 0 & -\tau_{12} \end{array}$$

ve kayma gerinmesi için;

$$\begin{array}{cc} 0 & \gamma_{12}/2 \\ \gamma_{12}/2 & 0 \end{array} \xrightarrow{45^\circ \text{ döndürülürse}} \begin{array}{cc} \gamma_{12}/2 & 0 \\ 0 & -\gamma_{12}/2 \end{array}$$

matrisleri yazılır. Böylece asal gerilme değerleri elde edilmektedir;

$$\sigma_1 = \tau_{12} \quad \sigma_2 = -\tau_{12} \quad \epsilon_1 = \frac{\gamma_{12}}{2} \quad \epsilon_2 = -\frac{\gamma_{12}}{2}$$

Hooke kanununda elde edilen formüller kullanılırsa;

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu \sigma_2 + \sigma_3]$$

$$\frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{1}{E} \cdot [\tau_{12} - \nu (-\tau_{12}) + 0]$$

denklemleri bulunmaktadır. Tekrar düzenlenirse;

$$\tau_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{12}$$

şekline dönüşmektedir ve kayma gerilmesi formülü çıkarılır. Bu formüle dayanarak kayma modülü aşağıdaki şekilde elde edilmektedir;

$$G = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

### 3.3 Esneklik Modülü

Normal gerilme ve gerinme ile ilişkili üç formül daha önceden bulunmuştu. Bu formüller;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} + \sigma_{33}]$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} + \sigma_{33}]$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{33} - \nu \sigma_{11} + \sigma_{22}]$$

Şeklinde yazılmaktadır. Taraf tarafa toplandığı takdirde;

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{1 - 2\nu}{E} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

formülü elde edilir. Buradan elde edilen “ $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ ” değeri hacimsel gerinmeye ( $\epsilon_{vol} = \Delta V/V$ ) denk gelmektedir. Ayrıca “ $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ” değeri ise hidrostatik gerilmenin ( $3\sigma_{hyd}$ ) üç katına eşittir. Hidrostatik gerilme, gerilme matrisinin köşegeninde kalan bileşenlerin ortalamasına eşittir. Aynı zamanda derin bir denize dalındığında kulaklarda hissedilen basınçtır.

$$\epsilon_{vol} = \frac{3}{E} \frac{1 - 2\nu}{1} \cdot \sigma_{hyd}$$

Hidrostatik basınç ile hacimsel gerinme arasındaki orana esneklik modülü ( $K$ ) adı verilmektedir.

$$K = \frac{\sigma_{hyd}}{\epsilon_{vol}} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Bu formülü düzenlenirse;

$$\frac{E}{K} = 3(1 - 2\nu)$$

elastisite modülü ile esneklik modülü arasındaki oran bulunur. Elastisite modülü ile esneklik modülü arasındaki ilişki önem arz etmektedir. Kauçuk ve benzeri malzemeler için esneklik modülü çok yüksek olmasa da, elastisite modülünden daha büyük olmaktadır. Dolayısıyla aralarındaki oran oldukça küçük bir değere denk gelir.  $3(1 - 2\nu)$  teriminin 0’a eşit olduğu kabul edilirse, kauçuğun Poisson oranının 0,5 olması gerektiği bulunmaktadır.

### 3.4 Matris ve Tensör Gösterimi

Hooke Kanunu’nun matris şeklinde gösterimi aşağıda verilmektedir;

$$\epsilon = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma - \nu Itr(\sigma)]$$

Tensör olarak gösterimi ise aşağıdaki gibi yazılmaktadır;

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}]$$

Matrisleri açarak yazarsak formül aşağıdaki şekle dönüşmektedir;

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 + \nu & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her bir gerinme bileşenini ayrı ayrı incelenirse;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma_{11} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma_{12}]$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma_{13}]$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma_{23}]$$

denklemleri bulunmaktadır. Denklem içerisindeki aynı olan bileşenler sadeleştirilerek aşağıdaki denklem seti elde edilir;

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \nu \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{E} \quad \epsilon_{12} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} \sigma_{22} - \nu \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{E} \quad \epsilon_{13} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{13}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} \sigma_{33} - \nu \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{E} \quad \epsilon_{23} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{23}$$

Bu noktada unutulmaması gereken kurallardan birisi normal gerinmelerin  $(\epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23})$ , kayma gerinmelerine göre 2 kat daha büyük  $(\epsilon_{23} = \gamma_{23}/2)$  olduğudur.

### 3.5 Hooke Kanunu'nun Tersine Fonksiyonları

Bu bölümde Hooke Kanunu'nun gerilmeden gerinme elde etmeyi sağlayan yapısını tersine çevirerek, gerinmeden gerilmeyi elde ettirecek şekle getirilmesi incelenecektir.

Ana eşitlik aşağıdaki verilmektedir;

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [1 + \nu \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}]$$

Yukarıdaki formülden  $\sigma_{ij}$  elde edilmek istenirse;

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{1 + \nu} [E \epsilon_{ij} + \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}]$$

dönüşümü yapılmaktadır. İki tarafı da  $\delta_{ij}$  ile çarparsak;

$$\sigma_{ij} \delta_{ij} = \frac{1}{1 + \nu} [E \delta_{ij} \epsilon_{ij} + \nu \delta_{ij} \delta_{ij} \sigma_{kk}]$$

denklemini bulunmaktadır. Ve elde edilen fonksiyonu basitleştirirsek;

$$\sigma_{kk} = \frac{E \epsilon_{ij}}{(1 - 2\nu)}$$

formülasyonu elde edilmektedir. Bu formülasyonu ana formüle eklersek;

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} [\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk}]$$

final denklemini bulunmaktadır. Elde ettiğimiz bu fonksiyon ile ilgili önemli bir nokta,  $\nu = 0,5$  olan sıkıştırılmaz malzemelerde fonksiyonun hesaplanamaz olmasıdır.

### 3.6 Katılık Tensörü

Katılık Tensörü ( $\mathbf{C}$ ) gerilme ve gerinme arasındaki ilişkiyi kuran dördüncü dereceden ( $3 \times 3 \times 3 \times 3$ ) bir tensördür. Burada kullanılan  $\mathbf{E}$ , elastik ve plastik bölgede oluşan gerinimi gösteren tensördür.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Katılık matrisi, Helmholtz serbest enerji fonksiyonunun ( $\varphi$ ) Green gerinim tensörünün( $E$ ) elastik kısmına göre ikinci türevidir.

$$\mathbf{C} = \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{E}^{el} \partial \mathbf{E}^{el}}$$

Ancak burada elde edilen veriler, analizler için pek uygun değildir. Bunun yerine Hooke Kanunu'nun türevini almak daha iyi cevap vermektedir;

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{mm}$$

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \epsilon_{kl}} \left( \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{mm} \right) \\ &= \frac{E}{1+\nu} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{mk} \delta_{ml} \end{aligned}$$

Yukarıdaki formülde Kronecker delta'yı görmemizin sebebi aşağıdaki sadeleştirilmedir;

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad ve \quad \frac{\partial \epsilon_{mm}}{\partial \epsilon_{kl}} = \delta_{mk} \delta_{ml}$$

Bulunan verilere rağmen yukarıdaki varsayımlarda bir problem göze batmaktadır.  $\delta_{ik} \delta_{jl}$  terimi ile  $i$  ve  $j$  lerin yerini değiştirdiğimizde oluşan  $\delta_{jk} \delta_{il}$  terimleri birbirine eşit olmadığı için katılık matrisi simetrik değildir. Katılık matrisini simetrik hale getirmek için Hooke kanunu baştan incelenmektedir;

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{mm}$$

Buradaki problem, denklemin tensörleri simetrik olmaya zorlamamasıdır. Gerilme ve gerinme tensörleri simetrik olmasa bile Hooke Kanunu'na uygun olabilir. Dolayısıyla gerinmeye göre türev almadan önce, formülasyon simetrik olmaya zorlanabilir. Bu yöntem  $\epsilon_{ij}$  bilinmeyenini değiştirerek uygulanır;

$$\epsilon_{ij} \rightarrow \frac{\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}}{2}$$

Böylece Hooke kanunu aşağıdaki şekli almaktadır;

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{mm}$$

Yukarıdaki denklem gerilme tensörünü simetrik olmaya zorlar. Denklemin türevi alındığında;

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon_{kl}} \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{mm} \\ &= \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{mk} \delta_{ml} \\ &= \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \end{aligned}$$

denklemini bulunmaktadır. Elde edilen denklem i ve j ye ayrıca k ve l ye göre simetrik hale getirilmiştir.

### 3.7 Deformasyon Gradyanı

Deformasyon gradyanı “ $F$ ” ; “ $X$ ” başlangıç vektör olmak üzere, değişime uğramış “ $x$ ” vektörünün “ $X$ ” başlangıç vektörüne göre türevidir.

$$F_{ij} = x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{matrix}$$

Bu formüle daha farklı bir açıdan bakıldığında, herhangi bir zamandaki deformasyona “ $u$ ” adı verilirse;

$$u = x - X$$

formülüne dönüşmektedir. Dolayısıyla deformasyona uğramış hal;

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X} + \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

olarak bulunmaktadır. Tensörel olarak yazmak gerekirse;

$$F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j}$$

tensörü elde edilmektedir.

### 3.8 Green Gerinim Tensörü

Deformasyon gradyanına bağlı olan Green gerinim tensörü ( $\mathbf{E}$ ), aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Yukarıda görülen  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  ifadesi katı cisim rotasyonunu öteleme ( $\mathbf{U}$ ) ve dönme tensörleri ( $\mathbf{R}$ ) yardımıyla, aşağıda görüldüğü şekilde yazılabilmektedir;

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}$$

Ve yalnızca öteleme tensörü ( $\mathbf{U}$ ) kalır. Böylece sonucun herhangi bir rotasyon hareketinden bağımsızlığı kanıtlanmış olur.

Green gerinim tensörünü, tensörel olarak yazmak istersek aşağıdaki denklem ortaya çıkmaktadır;

$$E_{ij} = \frac{1}{2} F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}$$

$$F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ki} + u_{k,i}) (\delta_{kj} + u_{k,j}) - \delta_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} (\delta_{ki} \cdot \delta_{kj} + \delta_{ki} u_{k,j} + \delta_{kj} u_{k,i} + u_{k,i} u_{k,j}) - \delta_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j} - \delta_{ij} \\
&= \frac{1}{2} u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}
\end{aligned}$$

Sonuçta elde edilen formül daha açık şekilde yazılırsa;

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j}$$

tensorü elde edilir. Simetrik olan gerinim tensorü;

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{pmatrix}$$

Matris içerisindeki her bileşen  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  bağıntısı göz önünde bulunarak açılırsa;

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial X}^2 + \frac{\partial w}{\partial X}^2$$

$$E_{yy} = \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial Y}^2 + \frac{\partial w}{\partial Y}^2$$

$$E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial Z}^2 + \frac{\partial w}{\partial Z}^2$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y}$$

$$E_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Z}$$

$$E_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial Z}$$

denklemleri elde edilir. Bu fonksiyonların bir arada değerlendirilmesi yapıldığı takdirde Green gerinme tensorünün çözümlemesi yapılabilir. Daha basit bir hale getirilmesi gerekirse;

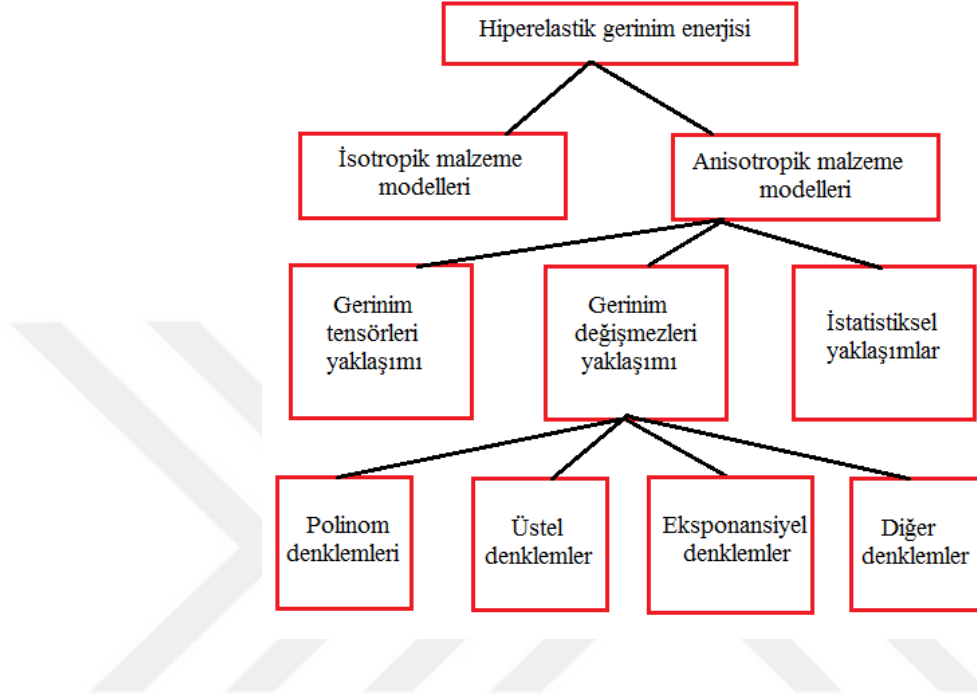
Green Gerinimi = K     Gerinim İfadeleri + İkinci Dereceden İfadeler

olarak   zetlenebilir.



#### 4. MALZEME MODELİNİN OLUŞTURULMASI

Malzeme modellemesi, belirli bir dış etki altındaki mekanik davranışın matematiksel olarak tanımlanmasıdır. Bu modelleme, malzemeyi tanımlamamakla beraber kesin sınır koşulları altındaki davranışı göstermektedir.



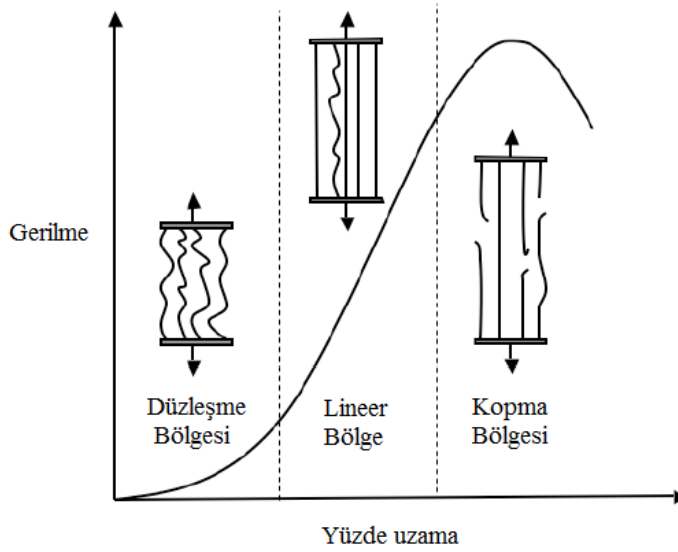
Şekil 4.1 Hiperelastik malzeme modellerken izlenebilecek yöntemler ve alt modeller

Hiperelastik modelleme isotropik ve anisotropik malzeme modelleri altında iki kısma ayrılmaktadır. İsootropik malzemeler her yönde aynı özellikleri gösteren malzemelerdir. Anisotropik malzemeler ise farklı yönlerde farklı mekanik özelliklere sahip olan malzemelerdir. Tendonlar anisotropik bir yapıya sahip olmakla beraber birçok yaklaşımla incelenebilir (Şekil 4.1).

Ligamanların mekanik özellikleri son on yılda teorik çalışmalara yoğun bir şekilde konu olmuş ve ilerlemeler ile daha belirgin hale gelmiştir. Ligamanlar için hem fenomenolojik hem de yapısal malzeme modelleri çözüm olarak öngörülmüştür. Fenomenolojik modeller, deneyler sonucu elde edilen bilgilerle oluşturulan yöntemler iken yapısal malzeme modelleri dokunun bileşenleri, geometrik özellikleri ve etkileşimleri sonucu oluşturulmuştur. Yapısal modeller dokunun hiyerarşik yapısı ile doğrudan ilgilenmektedir. Buna rağmen, kapsamlı bir malzeme modeli oluşturmak için ligamanların içerisindeki fiberlerin doğrultuları, dalga yapıları, hacimsel etkileşimleri ve diğer bileşenlerle olan etkileşimleri ile ilgili bilgi sahibi olunmalıdır. Tendonlarda ligamanlar ile benzer bir malzeme yapısına sahiptir. Bu yapıların anlaşılması için nonlineer elastisite ve viskoelastisite konuları üzerinde durulmalıdır.

#### 4.1 Nonlinear Elastisite

Gerilme-şekil değiştirme eğrisinde üç ana bölge bulunmaktadır. Düzleşme bölgesi, lineer bölge ve son olarak akma-kopma bölgesi olarak incelenmektedir. Fizyolojik hareketlerde birçok tendon ve ligaman düzleşme ve lineer bölgelerde bulunmaktadır. Düzleşme bölgesinin eğimi ile lineer bölgenin eğiminin farklı olması sebebiyle bu iki bölgenin oluşturduğu gerilme-şekil değiştirme eğrisi nonlinear bir izlenim vermektedir.

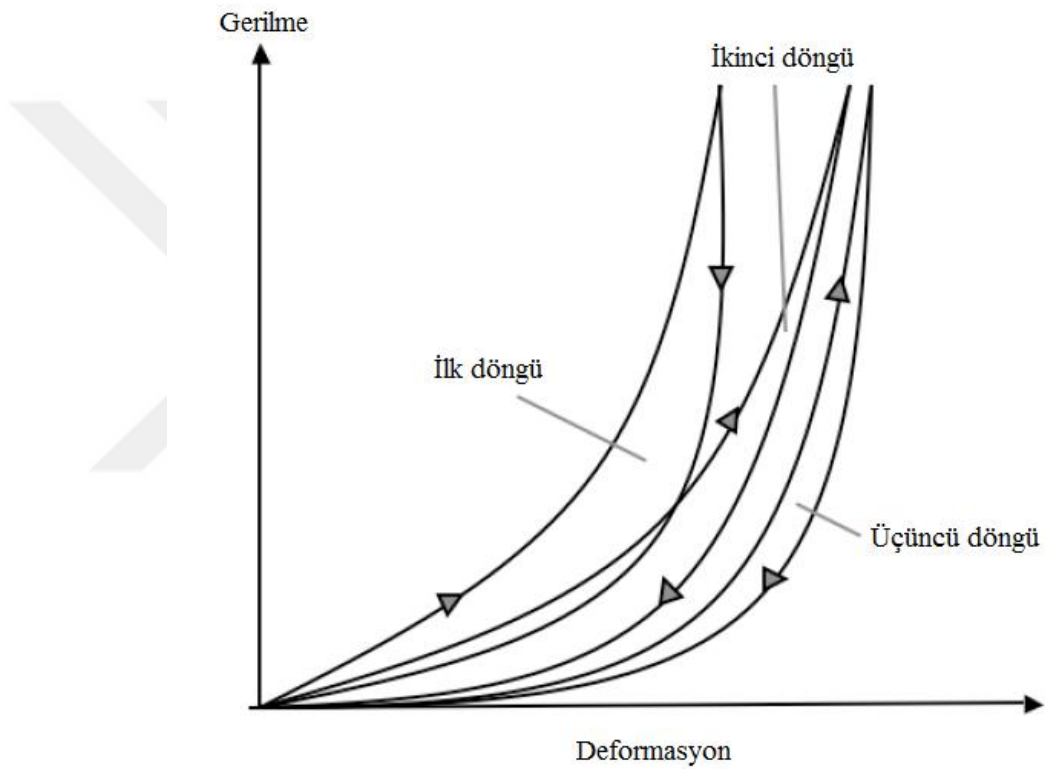


Şekil 4.2 Tendonun iç yapısının grafiğe bağlı değişimi

Yapısal ilişkiler açısından bakıldığında, düzleşme bölgesi kollajen fibrillerin spiral yapısının düzleştiği alana denk gelmektedir (Şekil 4.2). Fibrillerin spiral yapısının çekilerek düzleşmesinin kolay olması bu bölgede düşük katılık olmasını sağlamaktadır. Fibriller düzleştikçe, fasiküllerde çeki yüküne maruz kalmaya başlar ve bu durum tendon ya da ligamanların katılığının daha da artması ile sonuçlanmaktadır. Fasiküller içerisindeki fibriller zamanla akmayı geçip kopma bölgesine gelerek yük taşıyamaz hale gelerek katılığı düşürmekte ve tendon ya da ligamanlar yavaş yavaş kopmaya yaklaşmaktadır. Belirtilen bu gerilme-şekil değiştirme durumu, tendon ya da ligamanların mekanik davranışını anlamak için anahtar bir konsept içermektedir. Hooke kanunu ile başlayan bölümden itibaren nonlinear elastisiteden bahsedilmiştir.

## 4.2 Viskoelastisite

Tendon veya ligamanların bir diğer önemli davranışı viskoelastik olmalarıdır. Yapısının %60'ından fazlasının su olması, mekanik davranışını önemli ölçüde etkiler. Viskoelastisite aynı zamanda zamana bağlı bir özelliktir. Bu durum gerilme-şekil değiştirme eğrisinin, yükün ya da uzamanın uygulanma süresine de bağlı olmasını sağlar. Viskoelastik davranış iki ana başlık altında incelenebilir. Bunlardan birincisi sürünmedir. Sürünme, sabit yük altındayken deformasyonun zamanla artmasıdır. Bu durum yükün uygulanma süresine bağlı olmayan elastik malzemelerin davranışı ile ters düşmektedir. (Woo, 1993)



Şekil 4.3 Viskoelastik bir malzemede yükleme ve boşalma döngüleri yapılmaması sonucu elde edilen gerilme-deformasyon grafiği

Bu başlıklardan ikincisi ise gerilme rahatlamasıdır. Gerilme rahatlaması, sabit yük altında zamanla gerilmenin azalmasıdır. Çevrimler gerilme-deformasyon eğrisinde farklı cevap verir (Şekil 4.3).

Viskoelastisitenin diğer önemli karakteristik özelliği işe enerji dağılması ya da histeresis'dir. Eğer viskoelastik malzeme yüklenir ve boşaltılırsa, boşaltma eğrisi yükleme eğrisini izlememesi bu özelliği gösterir. Bu iki eğri arasındaki fark, kaybolan ya da dağılan enerjiyi gösterir.

Viidik (1968) yay ve damper yapısındaki kombinasyonları içeren viskoelastik dokuları paralel fiberler şeklinde modelleyerek reolojik bir model oluşturmuştur. Bu çalışmanın devamında elastik kısım nonlinear olarak modellenerek geliştirilmiştir (Frisen 1969). Decreamer (1980) bu mekanik yapıyı, yumuşak dokulardaki fiberler ve dolgu dokusu arasındaki sürtünmeyi modelleyerek viskoelastik durumu ortaya çıkarmıştır. Bütün fiberlerin benzer lineer viskoelastik özelliklere sahip olması düşüncesi damper yapıyı ortaya çıkarmıştır. Her bir kollajen fiberin lineer viskoelastik yapıya sahip olduğunu kabul eden Lanir (1980) kendi elastik modelini viskoelastik yapıyı ekleyerek değiştirmiştir. Bu model kollajenler ve elastin fiberler arasında çapraz bağın yüksek yoğunluklu ve düşük yoğunluklu olması üzere iki özel durumda incelenmiştir. Sonuç olarak, bu modeller üç boyutlu viskoelastik bir model altında birleştirilmiştir (Lanir, 1983).

Fung (1968) yumuşak dokuların mekanik özelliklerini, elastik ve zamana bağlı bileşenleri harmanlayarak Quasi-Lineer Viskoelastisite (QLV) modelini oluşturmuştur. Tek eksenli gerilme-şekil değiştirme ilişkisinin üstel formu genel viskoelastik model içerisine monte edilmiştir. QLV teorisi birçok farklı doku tipinde yoğun olarak kullanılmakta ve özellikle tendon ve ligamanların viskoelastik modellenmesinde rağbet görmektedir. Fung, QLV teorisinde gerilmeyi aşağıdaki şekilde belirtir;

$$\sigma_{\lambda, t} = G(t) \cdot \sigma^e_{\lambda}$$

$G(t)$  zamana bağlı olan boşalma fonksiyonu,  $\lambda$  birim uzama ve  $\sigma^e_{\lambda}$  zamana bağlı elastik tepki fonksiyonudur. Aşağıda  $t$  anındaki gerilme fonksiyonu gösterilmiştir;

$$\sigma_{\lambda, t} = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \frac{\partial \sigma^e}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} d\tau$$

Lineer viskoelastisiteye bağlı olarak çıkarılır. Fung  $G(t)$  fonksiyonunu aşağıdaki şekilde açıklamıştır;

$$G(t) = \frac{1 + \int_0^{\infty} S(\tau) \cdot e^{-t/\tau} d\tau}{1 + \int_0^{\infty} S(\tau) d\tau}$$

Bu formüldeki;

$$S(\tau) = \frac{C}{\tau}, \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$$

$$S \tau = 0, \quad \tau < \tau_1, \quad \tau > \tau_2$$

şeklinde yazılabilir. İntegraller alınıp tekrar yazıldığında;

$$G t = \frac{1 + C. \left[ E \frac{t}{\tau_2} - E. \frac{t}{\tau_1} \right]}{1 + C. \ln(\tau_2/\tau_1)}$$

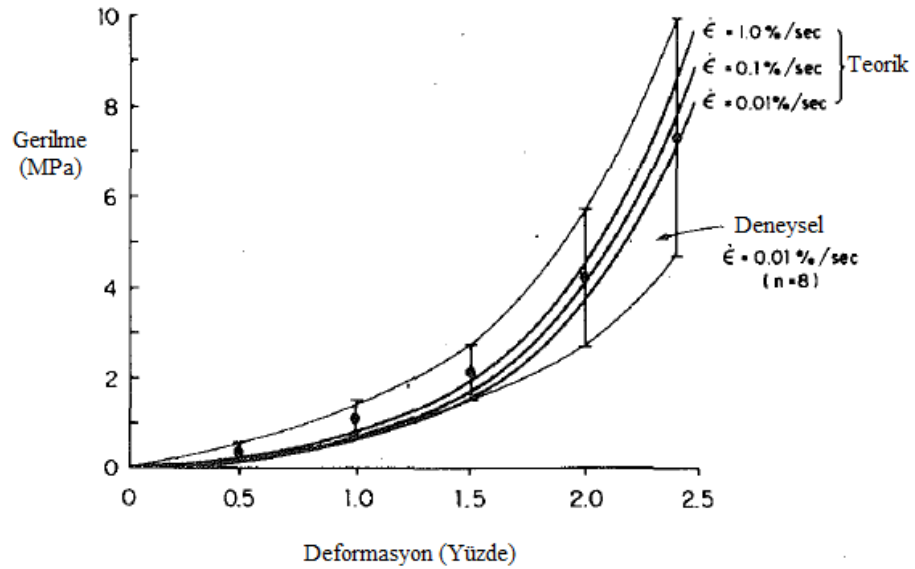
Formülasyonu elde edilir. Bu formülasyondaki  $E$  değişkeni;

$$E y_1 = \int_{y_1}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy, \quad y_1 = \frac{t}{\tau_1}, \quad y = \frac{t}{\tau}$$

Eğer yukarıdaki denklemde  $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$  olduğu takdirde sadeleştirme yapılarak;

$$G t \approx \frac{1 - Cq - C \ln(t/\tau_2)}{1 + C \ln(\tau_2/\tau_1)}$$

Elde edilir. Buradaki  $q$  bilinmeyeni Euler sabitidir ( $q = 0.5772$ )



Şekil 4.4 Woo ve meslektaşlarının(1981) farklı çekme hızları ile yaptıkları deneylerin sonuçları

Woo ve meslektaşları (1981) bu formülasyonu köpeklerin yan çapraz bağlarında (MCL) uygulamışlardır. Bu modele verileri girmek için kullanılan metot, gerilme boşalma fonksiyonunun  $G t = \sigma(t)/\sigma(0)$  denklemini kullanarak yapılır.  $C, \tau_1$  ve  $\tau_2$  bilinmeyenleri  $dG t / d\ln(t)$ ,  $G \infty$  ve  $G t$  deneysel verileri elde edilerek bulunur. Elastik tepki  $\sigma^e = A(e^{B\epsilon} - 1)$  şeklinde yazılabilir. Buradaki  $\epsilon$  bir boyutlu yer değiştirmedeki gerinim değeridir. A ve B sabitleri hesaplanmalıdır.  $\sigma^e$  ve  $G t$  değerleri ana malzeme modeli integralinin içerisine sabit gerinim ile yerleştirilir ve eğri üzerinde uydurularak A ve B sabitleri elde edilir. Bahsi geçen eğri aşağıdaki şekil 4.4’de gösterilmiştir.

QLV teorisi ayrıca Lin ve meslektaşları (1987) tarafından domuz ön çapraz bağlarında uygulanmıştır. Daha önceki çalışmalardan farklı olarak, bir anda deformasyon uygulamak yerine daha yavaş ve gerçekçi deformasyon adımları kullanılmıştır.

### 4.3 Hiperelastik Malzeme Modelleme

Hiperelastik malzeme modelleme metotları, şekil değiştirme enerji fonksiyonları (W) baz alınarak oluşturulmuştur. Herhangi bir malzemenin elastik malzeme özelliklerini elde etmek için hacim başına şekil değiştirme enerjisi fonksiyonundan yararlanılır.

Bir hiperelastik malzeme diğer malzemelerden daha farklı özellikler taşır. Bu özellikler nonlinearlik, izotropik ve şekil değiştirme hızı olarak sıralanabilir.

Hiperelastik özellik gösteren bir malzeme aynı zamanda elastiktir. Dolayısıyla deformasyona sebep veren bir yüke maruz bırakılıp yük kaldırıldığında orijinal haline geri dönmektedir.

Hiperelastik malzemeler deformasyon altındayken çok küçük miktarlarda hacim değişimine maruz kalırlar. Bunun sebebi çapraz bağlı moleküler bağların dalgalı durumda iken önce düzleşmeye ve sonra uzamaya başlamasıdır. %100-%700 arası uzamalara maruz kalıp eski haline dönebilirler. Kırılmadan önce %22-%65 arası uzamaya maruz kalan çelik ile karşılaştırıldığında, malzeme özelliklerine etki eden farklı bileşenlerin etkileri daha net görünmektedir. (Elgström, 2014)

#### 4.3.1 Farklı hiperelastik malzeme modelleri

Bu bölümde hiperelastik malzeme modelleri içerisinden bazı farklı modellerin açıklaması ve formülasyonları verilmektedir.

#### 4.3.1.1 Mooney Rivlin malzeme modeli

Mooney ve Rivlin nonlinear yüksek deformasyonlardaki nonlinear elastisite teorisi için 1950'lerde bir model geliştirmiştir. Daha sonra Mooney özel bir malzeme modeli geliştirmiş ve Rivlin bu modeli şekil değiştirme enerji fonksiyonları ile ilgili genel bir teori haline getirmiştir.

Mooney Rivlin malzeme modelinin temel fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$W = \sum_{i,j=0}^N C_{ij} \cdot I_1 - 3^i \cdot I_2 - 3^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} J_{el} - 1^{2i}$$

Mooney Rivlin metodundaki beş bilinmeyeni elde etmek için  $N=2$  alınmıştır;

$$W = \sum_{i,j=0}^2 C_{ij} \cdot I_1 - 3^i \cdot I_2 - 3^j + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{D_i} J_{el} - 1^{2i}$$

$C_{00} = 0$  olarak alınır. Sıkıştırılamaz malzemelerde  $J_{el} = 1$ 'e eşittir. Bu durumda beş bilinmeyenli Mooney-Rivlin fonksiyonu aşağıdaki biçime döner;

$$W = C_{10} \cdot I_1 - 3 + C_{01} \cdot I_2 - 3 + C_{20} \cdot I_1 - 3^2 + C_{11} \cdot I_1 - 3 \cdot I_2 - 3 + C_{02} \cdot I_2 - 3^2$$

Bu denklemi ilgilendiren üç değişmez (Invariant) aşağıdaki gibi elde edilir;

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \cdot \lambda_3^2$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2$$

Malzemenin sıkıştırılamaz olması  $I_3 = 1$  sonucunu verir ve böylece  $\lambda_3$  değişkeni  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  değişkenlerine bağlı olarak yazılabilir;

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2}$$

Böylece değişmezler aşağıdaki formüllere indirgenir;

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2}$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}$$

Mooney-Rivlin fonksiyonunu belirleyen beş bilinmeyeni elde etmek için,  $W$  fonksiyonunun tekrar düzenlenmesi gerekmektedir.

$$\sigma_i = \frac{\partial W_i}{\partial \lambda_i}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - 0 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - 0 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$$

Tek eksenli çekme testleri için  $\sigma_3 = 0$ 'a eşit olur.

Gerilme fonksiyonunu elde etmek için türev almak gerekmektedir;

$$\sigma_1 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_2}$$

Ayrıca  $I_i$ 'nin bulunması zor olduğu için,  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial I_i}$  fonksiyonu ile çarpılarak devam edilir;

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_{10} + 2 \cdot C_{20} \cdot I_1 - 3 + C_{11} \cdot I_2 - 3$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_{01} + 2 \cdot C_{11} \cdot I_1 - 3 + 2 \cdot C_{02} \cdot I_2 - 3$$

İşlemler sonucu elde edilen değişmezlerin türevleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır;

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} = 2 \cdot \lambda_1 - \frac{2}{\lambda_1^3 \cdot \lambda_2^2} \quad , \quad \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2} = 2 \cdot \lambda_2 - \frac{2}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^3}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1} = 2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 - \frac{2}{\lambda_1^3} \quad , \quad \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_2} = 2 \cdot \lambda_1^2 \cdot \lambda_2 - \frac{2}{\lambda_2^3}$$

Bu türevleri denklemlerde yerine yerleştirerek  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  değerleri bulunmaktadır;

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & C_{10} + 2 \cdot C_{20} \cdot \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2} - 3 \\ & + C_{11} \cdot \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - 3 \quad \cdot \quad 2 \cdot \lambda_1 - \frac{2}{\lambda_1^3 \cdot \lambda_2^2} \\ & + C_{01} + C_{11} \cdot \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2} - 3 \\ & + 2 \cdot C_{02} \cdot \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - 3 \quad \cdot \quad 2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 - \frac{2}{\lambda_1^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & C_{01} + C_{11} \cdot \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2} - 3 \\ & + 2 \cdot C_{02} \cdot \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - 3 \quad \cdot \quad 2 \cdot \lambda_1^2 \cdot \lambda_2 - \frac{2}{\lambda_2^3} \\ & + C_{10} + 2 \cdot C_{20} \cdot \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2} - 3 \\ & + 2 \cdot C_{11} \cdot \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} - 3 \quad \cdot \quad 2 \cdot \lambda_2 - \frac{2}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^3} \end{aligned}$$

Tek eksenli çekme testleri için aşağıdaki sadeleştirme yapılmaktadır;

$$\lambda_1 = \lambda \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda}$$

Yapılan sadeleştirmeden elde edilen veriler  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  formüllerinde yerine yazılırsa;

$$\sigma_1 = C_{10} \cdot 2 \cdot \lambda - \frac{2}{\lambda^2} + 4 \cdot C_{20} \cdot \lambda^3 + 1 - \frac{2}{\lambda^3} + 2 \cdot C_{11} \cdot 2 \cdot \lambda^2 + 2 - \frac{4}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3}$$

$$\sigma_2 = C_{01} \cdot 2 - \frac{2}{\lambda^3} + 2 \cdot C_{11} \cdot \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^4} + 4 \cdot C_{02} \cdot 2 \cdot \lambda - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^5}$$

gerilme değerleri bulunmaktadır. Bu iki formülü birleştirerek malzeme özelliklerini belirlemek için gerekli beş bilinmeyeninin olduğu temel gerilme formülü elde edilmektedir;

$$\begin{aligned} \sigma = & C_{10} \cdot 2 \cdot \lambda - \frac{2}{\lambda^2} + C_{01} \cdot 2 - \frac{2}{\lambda^3} + 4 \cdot C_{20} \cdot \lambda^3 + 1 - \frac{2}{\lambda^3} \\ & + 2 \cdot C_{11} \cdot 3 \cdot \lambda^2 + 2 - \frac{3}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^3} - \frac{2}{\lambda^4} + 4 \cdot C_{02} \cdot 2 \cdot \lambda - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^5} \end{aligned}$$

Farklı bilinmeyenleri elde etmek için, deneysel verilere ihtiyaç duyulmaktadır. Eğri uydurma yöntemi kullanılarak iki veri birbirine eşleştirilir ve bilinmeyenler elde edilir. Bu bilinmeyenler elde edilirken aşağıdaki sınırlamalara ihtiyaç duyulmaktadır;

$$C_{10} + C_{01} > 0, \quad C_{20} > 0, \quad C_{02} < 0, \quad C_{20} + C_{11} + C_{02} > 0$$

Son olarak

$$\text{Esneklik modülü ; } K_1 = 2 \cdot \frac{C_{10} + C_{01}}{1 - 2 \cdot \nu}$$

formülü yardımıyla esneklik modülü bulunur.

#### 4.3.1.2 Ogden malzeme modeli

Polinom modele oranla daha yoğunlaştırılmış olması sebebiyle daha fazla kullanılan bir modeldir. Kauçuk, polimerler ve biyolojik dokular için kullanılabilir. Ogden malzeme modeli bu bölümde açılarak, Mooney-Rivlin modelinde yapıldığı gibi bilinmeyenleri nasıl bulunacağı nümerik olarak incelenecektir. Ogden malzeme modeli 1972 yılında Raymond Ogden tarafından geliştirilmiştir. Diğer modellere benzer olarak, şekil değiştirme enerjisi

fonksiyonlarının türevinin alınmasıyla oluşturulan bu model gerilme-gerinim ilişkisini bulmak için kullanılmaktadır.

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} J_{el} - 1^{2i}$$

Ana formülü üzerinden yola çıkılır. Malzemenin sıkıştırılmaz olması sebebiyle, ikinci denklemdaki  $J_{el}$  bilinmeyeni 1'e eşit olur ve ikinci toplam denklemi etkisiz hale gelir.

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3)$$

Dört bilinmeyenli Ogden modelini oluşturma için  $N=2$  alınır ve denklem açılır;

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^2 \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \\ &= \frac{\mu_1}{\alpha_1} \lambda_1^{\alpha_1} + \lambda_2^{\alpha_1} + \lambda_3^{\alpha_1} - 3 + \frac{\mu_2}{\alpha_2} \lambda_1^{\alpha_2} + \lambda_2^{\alpha_2} + \lambda_3^{\alpha_2} - 3 \end{aligned}$$

Daha önceden gerilme değeri aşağıdaki formül yardımıyla bulunmuştur;

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$$

Dolayısıyla denklemin türevi alınarak devam edilir;

$$\sigma_1 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{\mu_1}{\alpha_1} \alpha_1 \lambda_1^{(\alpha_1-1)} + \frac{\mu_2}{\alpha_2} \alpha_2 \lambda_1^{(\alpha_2-1)}$$

$$\sigma_2 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{\mu_1}{\alpha_1} \alpha_1 \lambda_2^{(\alpha_1-1)} + \frac{\mu_2}{\alpha_2} \alpha_2 \lambda_2^{(\alpha_2-1)}$$

$$\sigma_3 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \frac{\mu_1}{\alpha_1} \alpha_1 \lambda_3^{(\alpha_1-1)} + \frac{\mu_2}{\alpha_2} \alpha_2 \lambda_3^{(\alpha_2-1)}$$

$$\sigma = \mu_1 \lambda_1^{(\alpha_1-1)} + \mu_2 \lambda_1^{(\alpha_2-1)} + \mu_1 \lambda_2^{(\alpha_1-1)} + \mu_2 \lambda_2^{(\alpha_2-1)} + \mu_1 \lambda_3^{(\alpha_1-1)} + \mu_2 \lambda_3^{(\alpha_2-1)}$$

Mooney-Rivlin modelinde de bahsedildiği gibi, tek eksenli çekme testinde aşağıdaki sadeleştirmeler yapılarak denkleme eklenir;

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda}$$

Böylece Ogden modelinde gerilme ile gerinim arasındaki ilişkiyi veren denklem elde edilmiş olur;

$$\sigma = \mu_1 \lambda^{(\alpha_1-1)} + 2 \frac{1}{\lambda}^{(\alpha_1-1)} + \mu_2 \lambda^{(\alpha_2-1)} + 2 \frac{1}{\lambda}^{(\alpha_2-1)}$$

Yukarıdaki denklemde  $\mu_1, \mu_2, \alpha_1, \alpha_2$  katsayıları elde edildiği takdirde hiperelastik bir malzemenin gerilme ile gerinim grafiği kolaylıkla çıkarılmaktadır.

#### 4.3.1.3 Polinom malzeme modeli

Kauçuk ve lastik benzeri elastomerlerin gerilme-şekil değiştirme ilişkileri için genellikle kullanılan bir modeldir.

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J_{el} - 1)^{2i}$$

#### 4.3.1.4 Neo-Hookean malzeme modeli

Ogden modelinin basitleştirilmiş hali olan hiperelastik malzeme modelidir. Bu modelde  $N=1$  ve  $\alpha_2 = 2$  alınmıştır.

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{2} (\lambda_1^{-\alpha_i} + \lambda_2^{-\alpha_i} + \lambda_3^{-\alpha_i} - 3) = C_{10}(I_1 - 3)$$

#### 4.3.1.5 Yeoh malzeme modeli

Çok geniş bir deformasyon aralığına uygulanabilen bu model aynı zamanda tek eksenli uzamadan elde edilen verileri tahmin edebilmektedir.

$$W = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (I_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{D_i} (J_{el} - 1)^{2i}$$

#### 4.3.1.6 Arruda ve Boyce malzeme modeli

Diğer modellere nazaran düşük şekil değiştirmelere sahip malzemeler için daha uygun olan bir hiperelastik malzeme modelidir.

$$W = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{2i-2} (I_1^i - 3^i) + \frac{1}{D} \left[ \frac{J_{el}^2 - 1}{2} - \ln(J_{el}) \right]$$

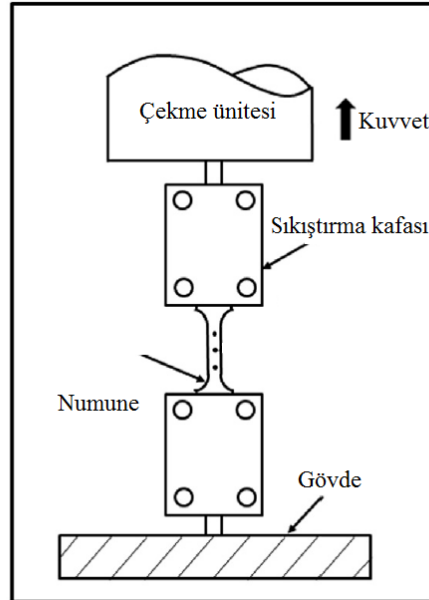


## 5. DENEYSEL YÖNTEMLERLE KATSAYILARIN ÇIKARILMASI

Bu bölümde tendon numuneleri üzerine yoğunlaşmıştır. Tendonlar çekme deneyine tabii tutularak gerilme-gerinim eğrileri oluşturulmuştur. Deney aşamaları, sonuçları ve bu sonuçlara bağlı olarak elde edilecek Mooney-Rivlin ve Ogden katsayıları bu bölümde incelenmektedir.

### 5.1 Test Aşaması

Tendon ve ligamanların malzeme özelliklerini belirlemek için kullanılacak deneysel yöntemin adı çekme testidir. Çekme testi bir malzemenin belirli bir eksenindeki dayanımını ölçmekte kullanılır. Bu testten gerilme, gerinim, deformasyon, kuvvet gibi değerler alınabilir.



Şekil 5.1 Çekme cihazına yerleştirilmiş bir numunenin test edilmesi

Çekme cihazı, iki sıkıştırma kafası arasına bağlanan bir numunenin çekme ünitesinden uygulanan kuvvete ya da deformasyona uğraması ile çalışır (Şekil 5.1). Sıkıştırma üniteleri farklı kuvvetler ile çalışabilecek şekilde değişmektedir. Bu çalışmada kullanılan üniteler 5000 N kuvvete kadar çıkma kapasitesine sahiptir. Sıkıştırma kafasının iç kısmında, sürtünmenin artması için tırtıklı yüzeyler bulunmaktadır. Bu yüzeyler numunelerin daha rahat sıkıştırılarak deney esnasında kaymamasını sağlamaktadır.

Çekme testine öncelikle numune hazırlanarak başlanılır. Bovine metatarsus kemiği ile tibia etrafındaki kaslar arasında kalan tendon numune olarak

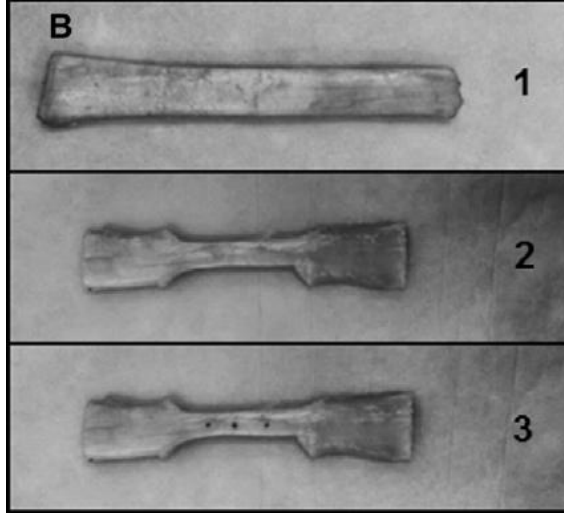
kullanılmıştır. Tendon zar kısmından ayrılarak iki parça elde edilir. Boyutlarının farklı olmasına rağmen parçaların malzeme özelliklerinin benzer olması beklenmektedir. Belirli bir ortalama dahilinde parçalar arasında gerilme-gerinim eğrisinde fark görülmektedir.

Tendonlar ilk olarak farklı malzemelerin içerisine gömülerek denenmiştir. Fakat sıcaklığa dayanımının az olması sebebiyle tendonların kesit alanı küçükmüş ve testlerde sıyrma gözlenmiştir.



Şekil 5.2 İki parçaya ayrılmış bovine tendonunun görüntüsü

Şekil 5.2’de görülen tendonda kalın olan kısımlar kemiğe, ince olan kısımlar ise kasa bağlanan kısımlardır. Sıyrma gözlenen numunelerden sonra farklı bir metot denemek için tendonlar bütün olarak kullanılmış ve kemiğe bağlanan kısımlar hareketli sıkıştırma ünitesine, kas ile bağlanan kısımlar ise sabit olan sıkıştırma ünitesine bağlanmıştır.



Şekil 5.3 Kolz ve meslektaşlarının 2015 yılında yaptığı çalışmada kullandıkları numuneler

Bütün bir tendonun çekilmesi zor olacağı için farklı bir metot izlenmiştir. Kolz ve meslektaşları (2015) biceps tendonu üzerinde yaptıkları çalışmalarda papyon yöntemini kullanmışlardır (Şekil 5.3). İlk olarak tendonun orta kısmındaki kesit alanını azaltmış ve ardından çizdikleri noktalar yardımıyla oluşan deformasyonu incelemişlerdir.



Şekil 5.4 Papyon yöntemi ile orta kısmı zayıflatılmış bovine tendonunun görüntüsü

Kolz ve meslektaşlarının (2015) yaptığı çalışmaya benzer olarak, tendon papyona benzer bir yapıda orta kısmı ince ve baş kısmı kalın olacak şekilde kesilmiştir (Şekil 5.4). Orta kısmın alanının olabildiğince homojen olmasına dikkat edilmiştir. Kesme işlemi yapılırken kumpas ile ölçümler alınmıştır.



Şekil 5.5 Çekme cihazı yardımı ile eksenel yüklemeye maruz bırakılan tendon numunesi

Ardından numunelerin kalın bırakılan kısımları sıkıştırma kafalarına bağlanmıştır (Şekil 5.5). Sonrasında çekme testine başlamak için cihaza geçilir. Cihaza numunenin boy ve kesit alanı girildikten sonra çekme işlemine başlanmıştır. İncelenecek parametre olarak gerilme, gerinim, kuvvet ve deformasyon seçilmiştir.

Test bittikten sonra elde edilen kuvvet ve deformasyon değerleri baz alınarak gerilme-gerinim eğrisi elde edilmektedir. Test 10 mm/dak hızla yapılmıştır. Test numunede kopmalar görüldüğünde ya da kuvvet belirli bir değerin altına düştükten sonra test sonlandırılmaktadır.

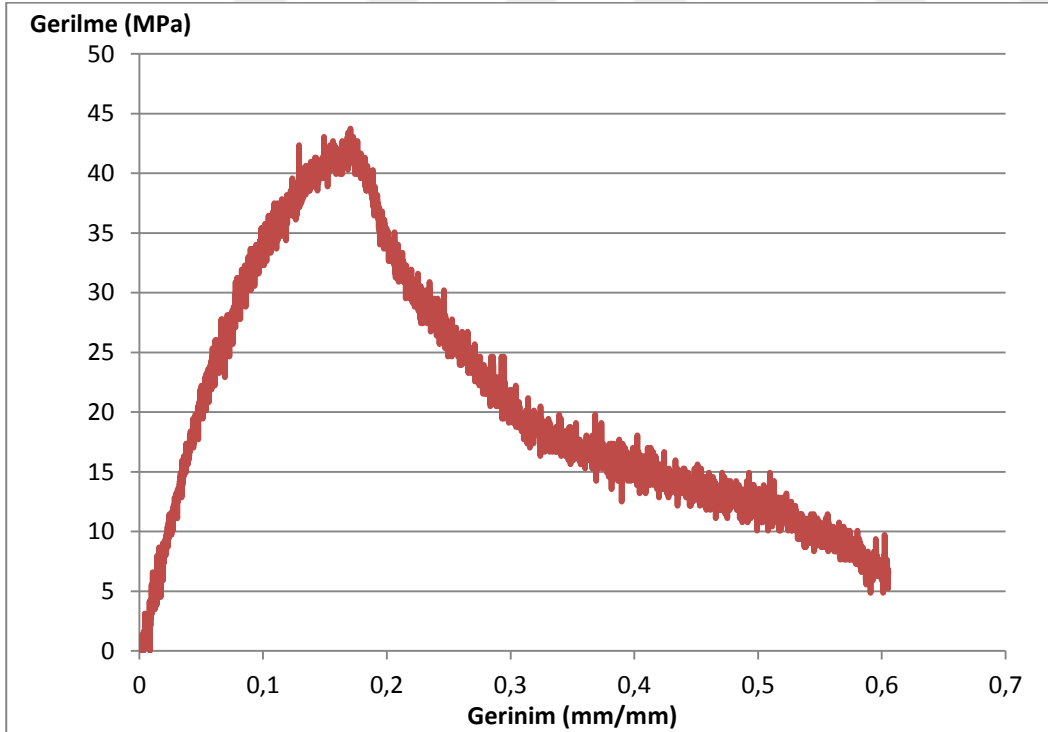
## 5.2 Test Sonuçları

Dört ayrı tendon için çekme testi yapılmıştır. Test edilen numunelerin boyları ve kesit alanları farklıdır.

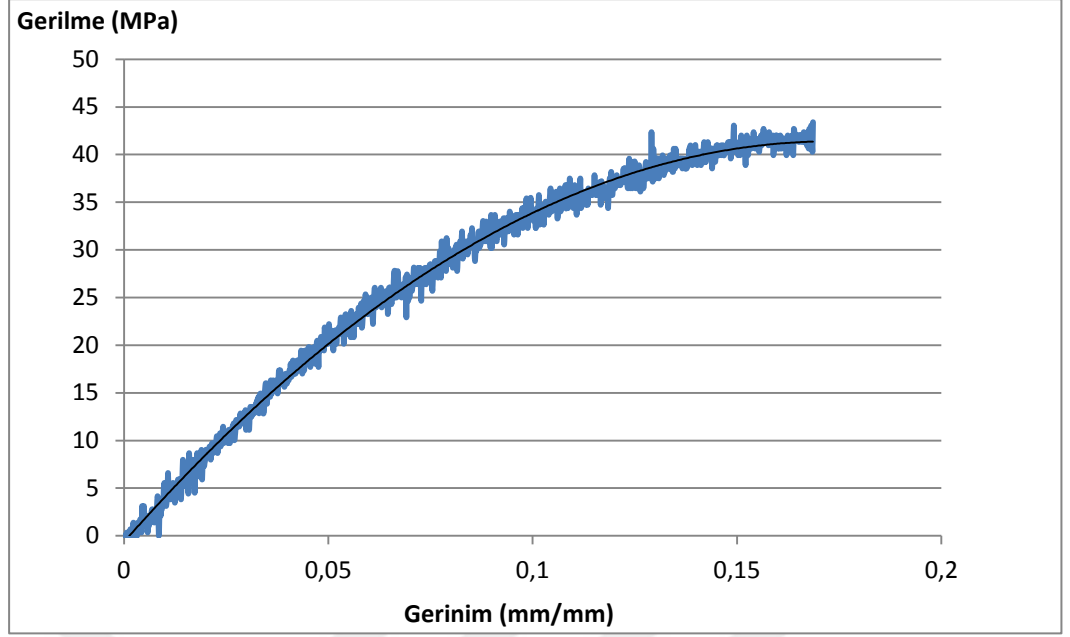
Çizelge 5.1 Tendon numunelerinin boyutları

|                 | Kesit alanı (mm <sup>2</sup> ) | Uzunluk (mm) |
|-----------------|--------------------------------|--------------|
| <b>Numune 1</b> | 9                              | 55           |
| <b>Numune 2</b> | 21                             | 55           |
| <b>Numune 3</b> | 18                             | 55           |
| <b>Numune 4</b> | 12,6                           | 60           |

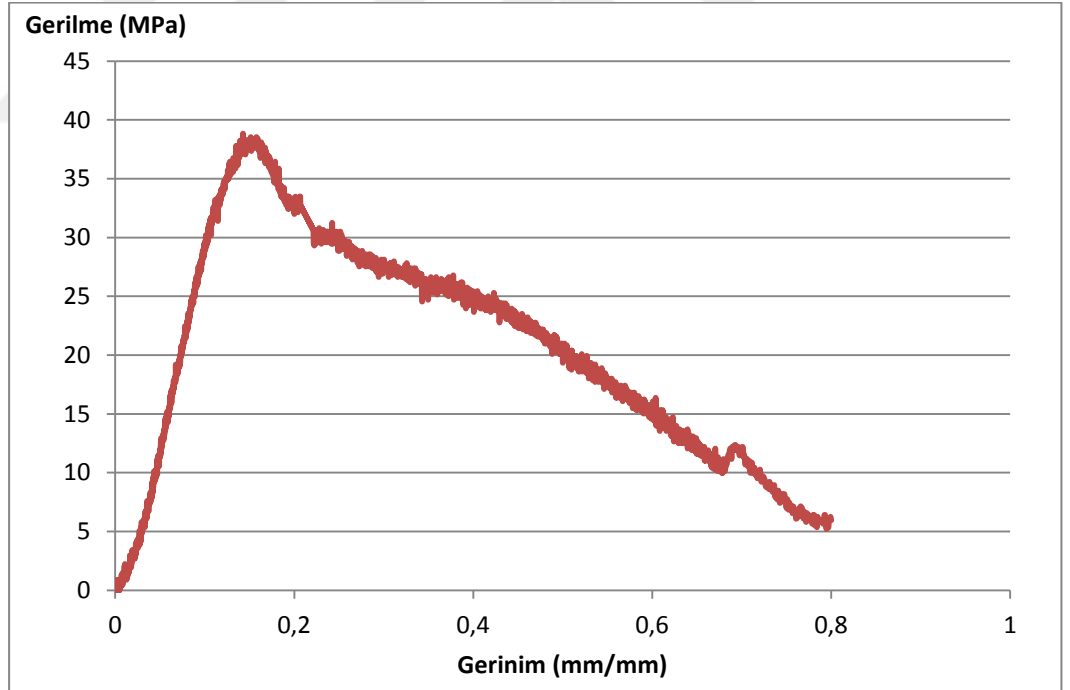
Bu numunelerden elde edilen gerilme-gerinim grafikleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



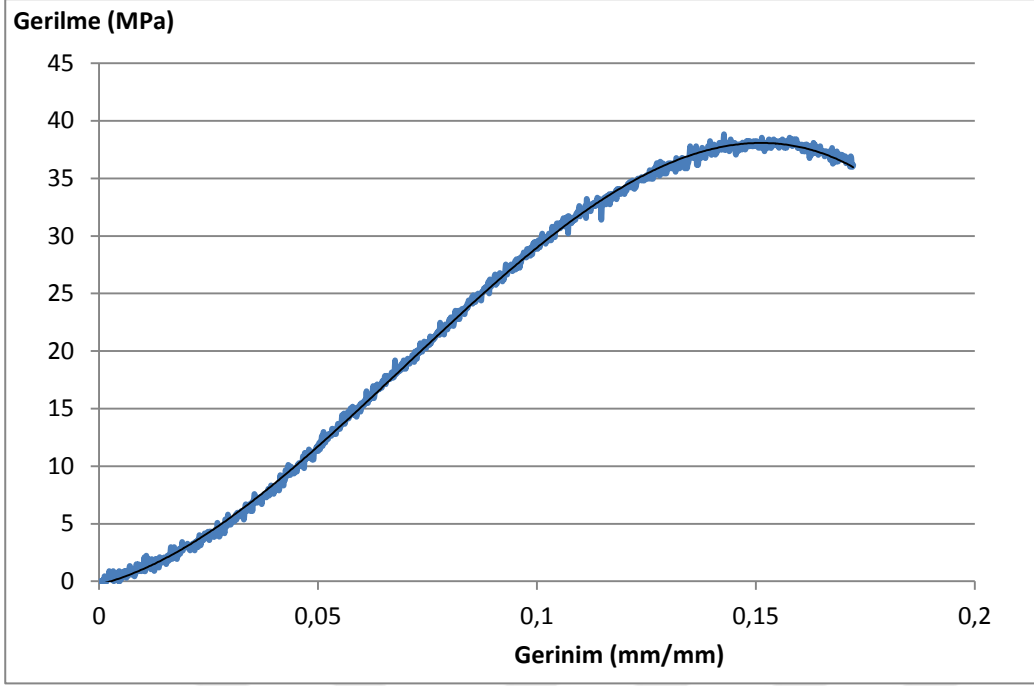
Şekil 5.6 Numune 1'e ait gerilme-gerinim test sonuçları



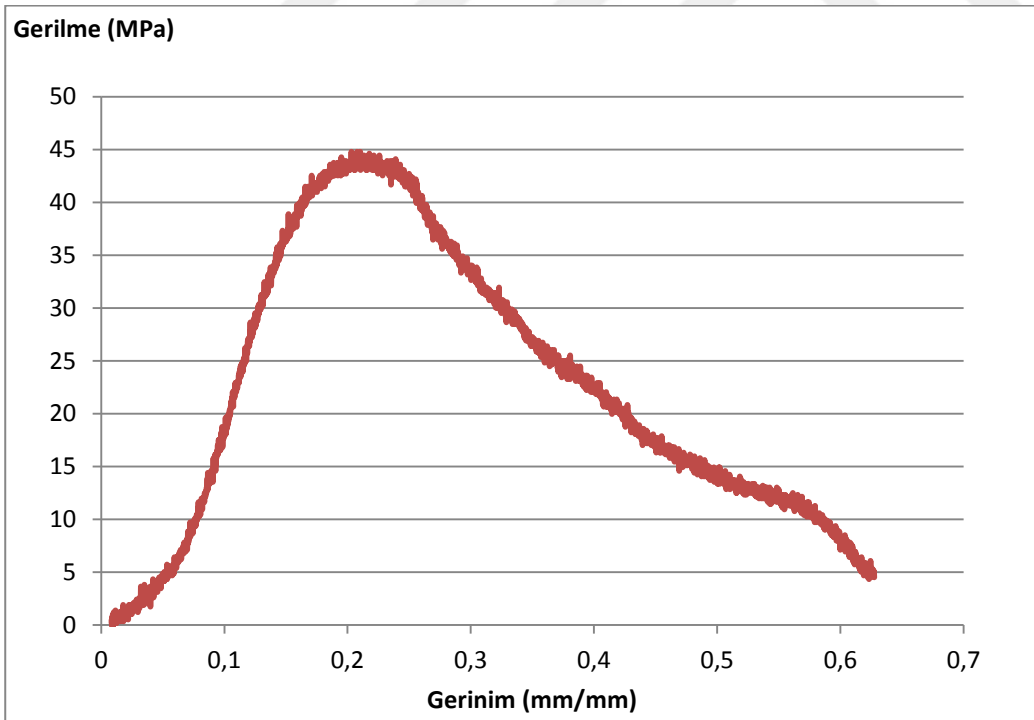
Şekil 5.7 Numune 1'e gerilme-gerinim test sonuçları (hiperelastik bölge)



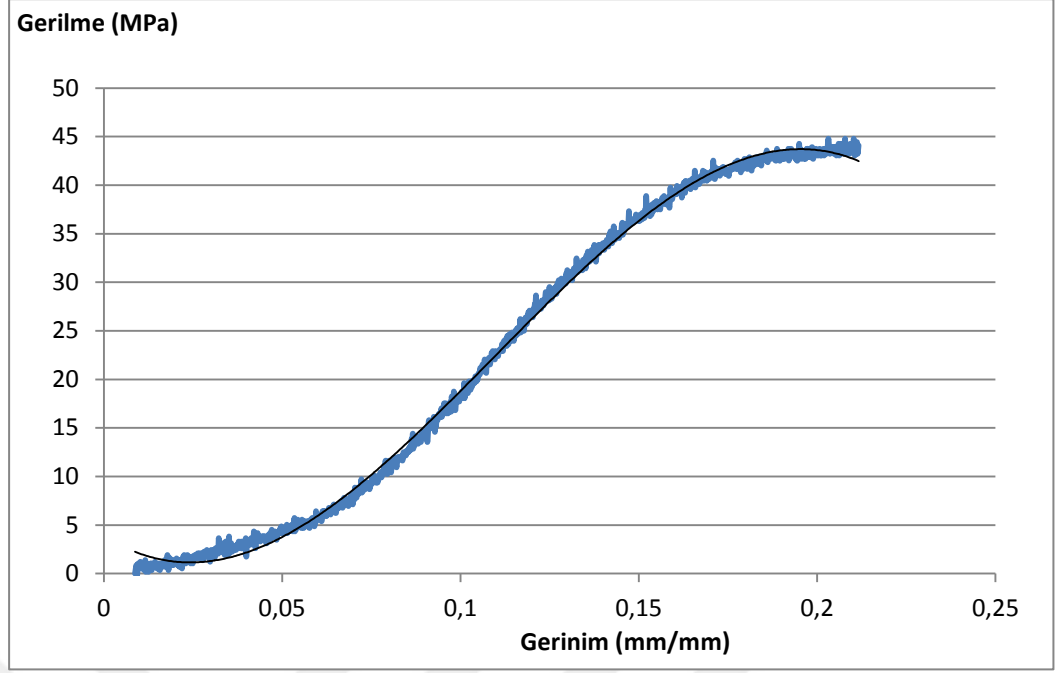
Şekil 5.8 Numune 2'e ait gerilme-gerinim test sonuçları



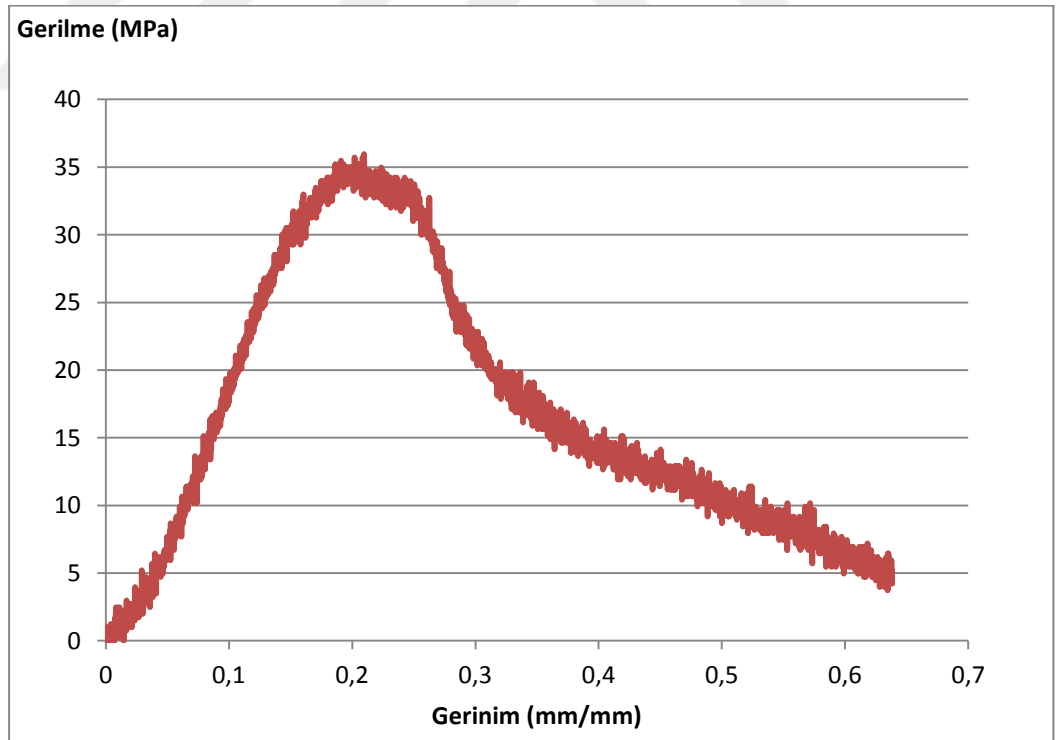
Şekil 5.9 Numune 2'e ait gerilme-gerinim test sonuçları (hiperelastik bölge)



Şekil 5.10 Numune 3'e ait gerilme-gerinim test sonuçları

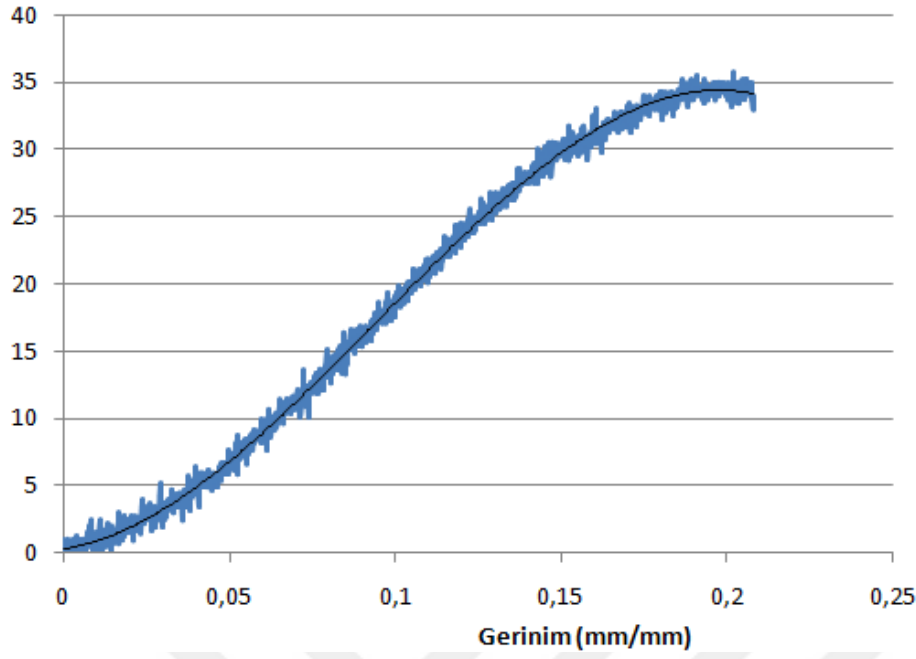


Şekil 5.11 Numune 3'e ait gerilme-gerinim test sonuçları(hiperelastik bölge)



Şekil 5.12 Numune 4'e ait gerilme-gerinim test sonuçları

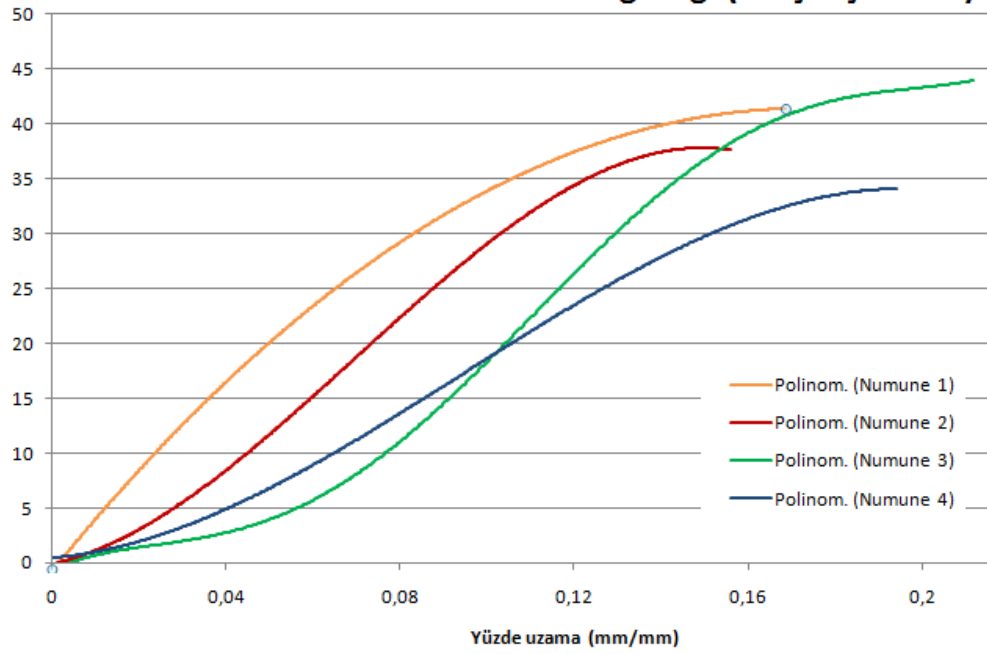
Gerilme (MPa)



Şekil 5.13 Numune 4'e ait gerilme-gerinim test sonuçları(hiperelastik bölge)

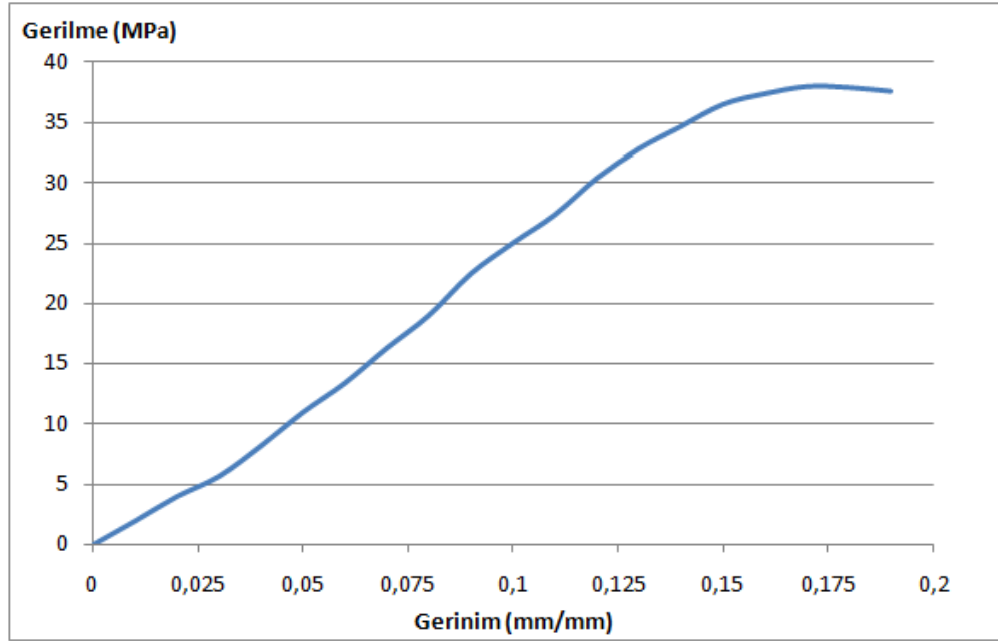
Gerilme (MPa)

Gerilme- Yüzde Uzama grafiği (Karşılaştırmalı)



Şekil 5.14 Hiperelastik bölgede numunelerin gerilme-gerinim test sonuçları

Yukarıdaki grafikte görüldüğü üzere numunelerden elde edilen grafikler birbirinden farklı gerilme ve gerinim eğrilerine sahiptir. Gerinim değerleri sabit alınmak üzere gerilme değerleri arasında bir interpolasyon yapılarak bu eğriler tek bir eğriye çevrilebilir.



Şekil 5.15 Hiperelastik bölgedeki ortalama değerlerin gerilme-gerinim grafiği

Şekil 5.15'te de görüldüğü üzere, numunelerin ortalaması alındığında ortaya çıkan eğri hiperelastik malzeme eğrisine benzemektedir. Dolayısıyla bu eğri üzerindeki noktalar çıkarılarak Mooney-Rivlin ve Ogden malzeme modeli denklemlerine konulabilir. Eğri uydurma yöntemleri sonunda iki model için de sabitler elde edilmektedir.

Çizelge 5.2 Mooney-Rivlin malzeme modellerine ait katsayılar

|                    | Mooney-Rivlin katsayıları |           |           |           |           |
|--------------------|---------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                    | C10 (MPa)                 | C01 (MPa) | C20 (MPa) | C11 (MPa) | C02 (MPa) |
| Numune 1           | -1145,8                   | 1088      | 89254     | -207840   | 122430    |
| Numune 2           | -213,18                   | 240,01    | 88719     | -207200   | 121390    |
| Numune 3           | -1002,6                   | 1029,1    | 42343     | -105750   | 66971     |
| Numune 4           | -777,45                   | 804,48    | 90057     | -210440   | 124000    |
| İnterpolasyon      | -170,48                   | 204,94    | 24752     | -60145    | 36739     |
| Katsayı ortalaması | -784,758                  | 790,3975  | 77593,25  | -182808   | 108697,8  |

Çizelge 5.3 Ogden malzeme modellerine ait katsayılar

|                           | Ogden katsayıları |            |              |            |
|---------------------------|-------------------|------------|--------------|------------|
|                           | $\mu_1$ (Pa)      | $\alpha_1$ | $\mu_2$ (Pa) | $\alpha_2$ |
| <b>Numune 1</b>           | 930,52            | 63,718     | 930,52       | 63,869     |
| <b>Numune 2</b>           | 674,21            | 64,662     | 674,21       | 65,195     |
| <b>Numune 3</b>           | 731,05            | 65,877     | 731,05       | 65,559     |
| <b>Numune 4</b>           | 556,65            | 65,712     | 556,65       | 66,086     |
| <b>İnterpolasyon</b>      | 611,81            | 66,216     | 611,82       | 65,783     |
| <b>Katsayı ortalaması</b> | 723,1075          | 64,99225   | 723,1075     | 65,17725   |

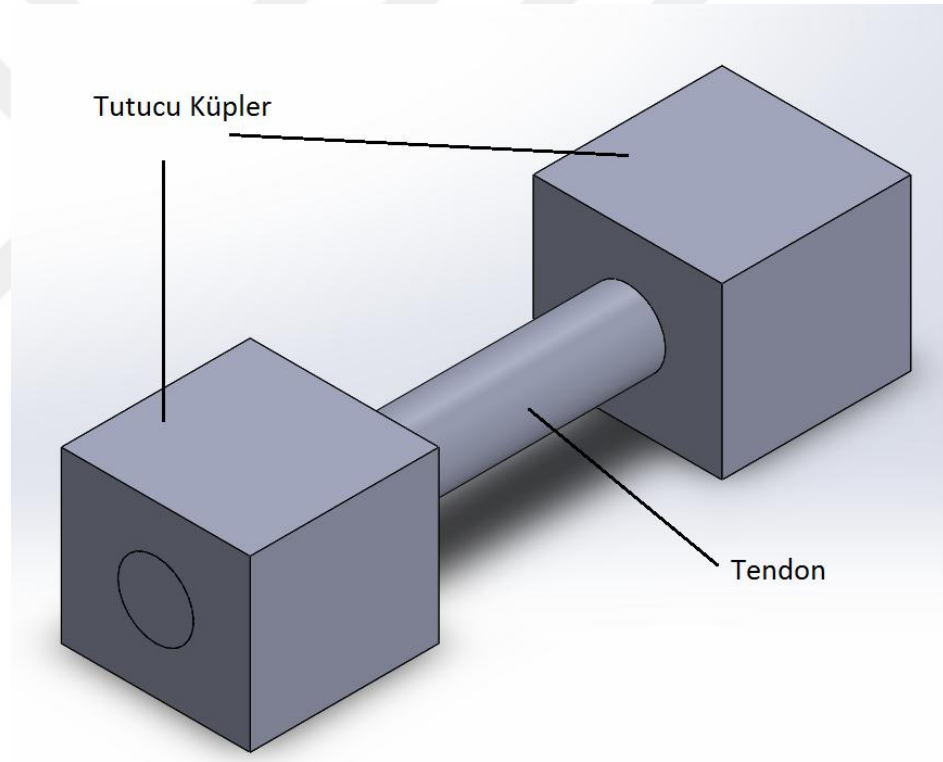
Çizelge 5.3 ve 5.4’te her numune için kullanılabilecek sabitler bulunmuştur. İnterpolasyon kısmındaki katsayılar şekil 5.14’teki eğriye aittir. Katsayı ortalaması ise, dört numuneden elde edilen sabitlerin aritmetik ortalaması alınarak bulunmuştur. Bir sonraki bölümde bu katsayılar kullanılarak bilgisayar destekli mühendislik programlarında statik analizler yapılmıştır.

## 6. FARKLI MODELLERİN ANALİZİ

Elde edilen katsayılar ile ANSYS programı kullanılarak farklı modellere statik yükleme analizleri yapılmıştır. Yapılan analizlere tendona benzer bir 3D katı model hazırlanarak başlanmış ve ardından malzeme değerleri girilmiştir. Analiz programına sınır koşulları girdi olarak verilmiş ve gerilme değerleri çıktı olarak alınmıştır.

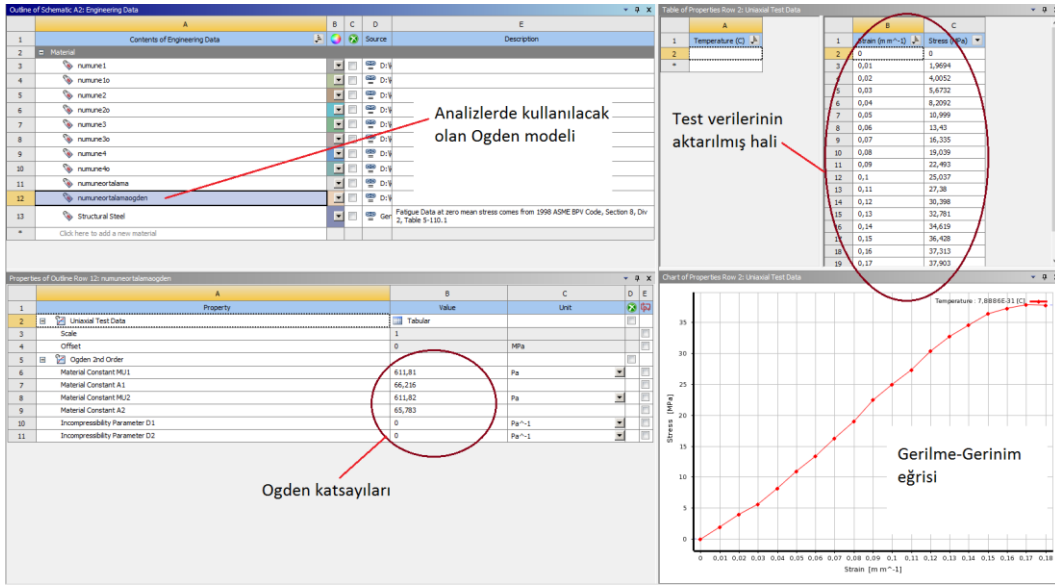
### 6.1 Sonlu Elemanlar Modelinin Oluşturulması

Sonlu elemanlar yöntemi, kısmi diferansiyel denklemler yardımı ile bir problemin çözülmesini sağlayan sayısal yöntemlerdir. Bu yöntemle oluşturulan modellere sonlu elemanlar modeli adı verilmektedir. Bu bölümde farklı modellere farklı yüklemeler yapılarak, sonlu elemanlar modelleri analizlere tabii tutulacaktır.

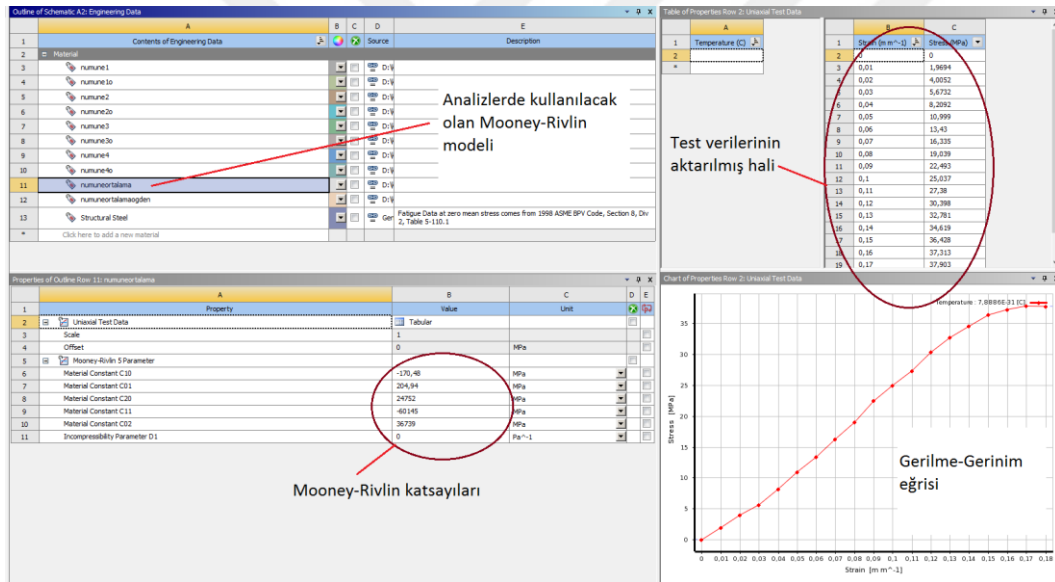


Şekil 6.1 Tendon ve tutucu küplerin 3D katı modeli

Sonlu elemanlar modeli oluşturulurken öncelikle daha da önce bahsedildiği gibi 3D katı model hazırlanmaktadır. Tendon modeli çapı 8mm yüksekliği 70mm olan bir silindir olarak alınmıştır. Katı modelin alt ve üst kısımları küpler yardımı ile bağlanmıştır (Şekil 6.1). Bu küplerin kullanılma sebebi sınır koşulları verilirken daha sağlıklı cevaplar almaktır. Çizimler Solidworks programında yapılmıştır.

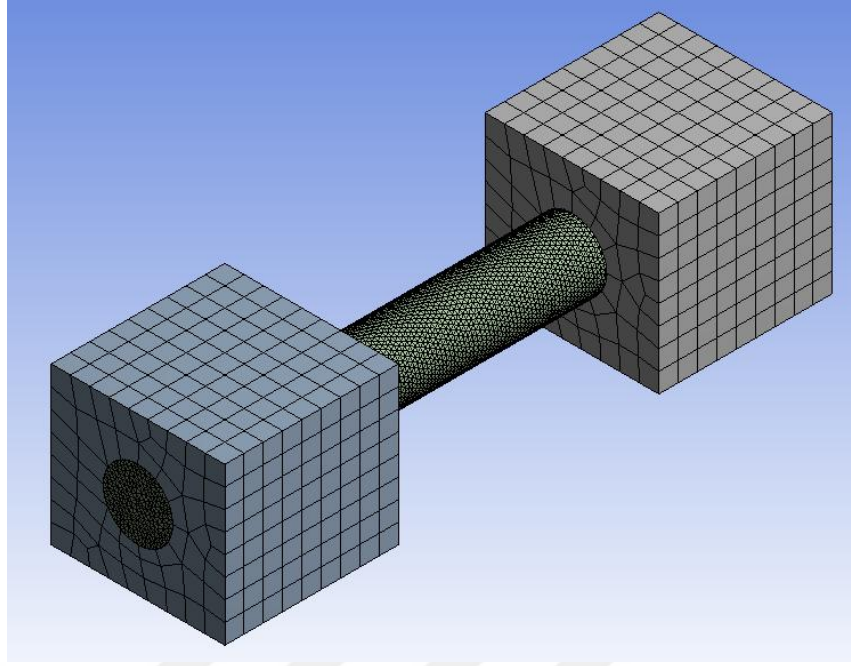


Şekil 6.2 Ogden malzeme modelinin ANSYS'e aktarılması



Şekil 6.3 Mooney-Rivlin malzeme modelinin ANSYS'e aktarılması

Ardından ANSYS programına geçilerek malzeme özellikleri atanır. Daha önceki bölümde elde edilen Mooney-Rivlin ve Ogden malzeme katsayıları gerekli yerlere girilerek malzeme nitelikleri oluşturulmuştur (Şekil 6.2-6.3). Oluşturulan bu malzemeler daha sonra katı modelde gerekli kısımlara atanmıştır. Ayrıca sınır koşullarının sağlıklı girilmesi için kullanılacak olan küpler için elastisite modülü 200 GPa ve Poisson oranı 0,3 olan çelik malzemesi kullanılmıştır.

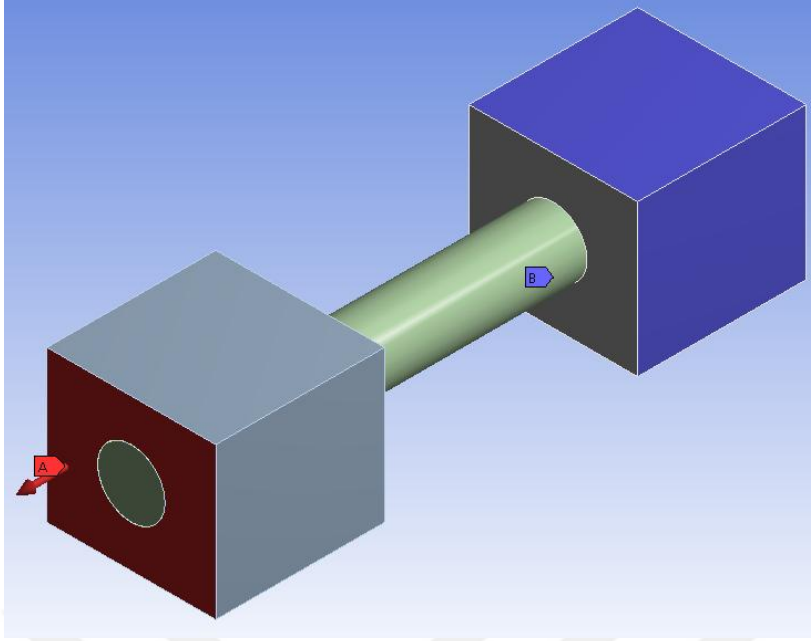


Şekil 6.4 3D katı modelinin meshlenmiş hali

Katı modele malzeme atandıktan sonra sonlu elemanlar modeli oluşturmak için “mesh” işlemi yapılarak ağ yapıya geçilmiştir. Ağ yapı modelin çok sayıda parçaya bölünerek, parçalar arası kuvvet ve deformasyon geçişinin sağlıklı olmasını sağlamaktadır.

## 6.2 Sınır Koşullarının Girilmesi

Bir sonraki adımda sonlu elemanlar modeline sınır koşulları verilmiştir. Yapılan analizlerde kullanılan iki sınır koşulu vardır. Bunlardan birincisi küplerden birinin tendona bağlı olmayan yüzeylerini sabitleyerek, istenmeyen yönlere olan hareketini engellemektir. İkinci sınır koşulu ise sabitlenmeyen küpün bir yüzeyine tendonun fiberleri doğrultusunda deformasyon verilmesidir.



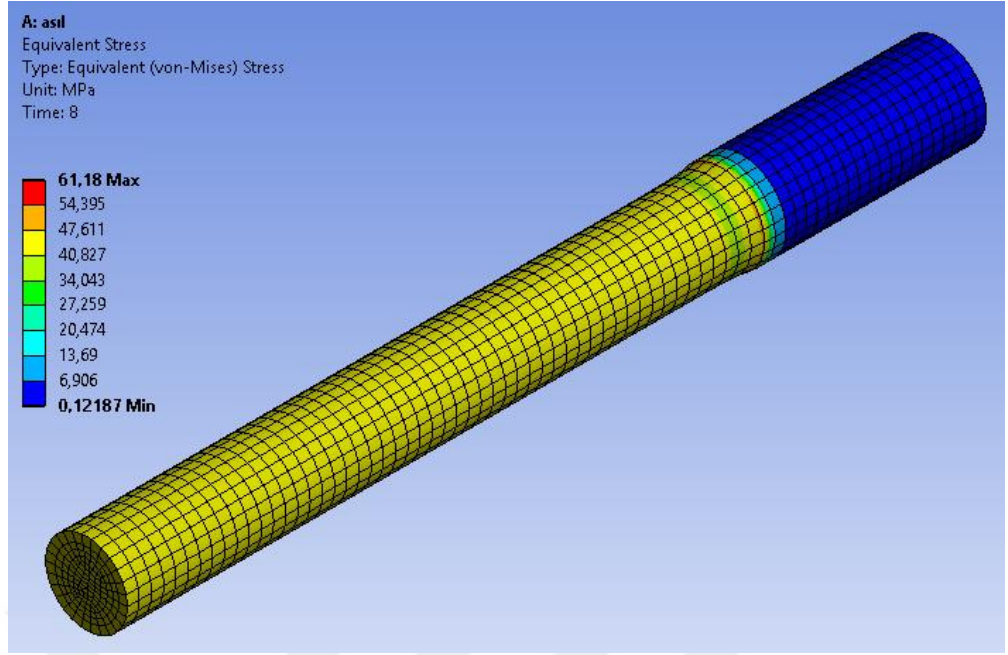
Şekil 6.5 Modele verilen sınır koşullarının ANSYS'te gösterimi

Şekil 6.5'te görüldüğü üzere sınır koşulları A ve B olarak verilmiştir. B sınır koşulu hareketin sınırlandırılması için küpün dış yüzeylerinin sabitlenmesidir. Tendon modeli ile etkileşiminin bozulmaması için tendon ile temasta olan yüzlere sabitleme verilmemiştir.

A sınır koşulu ile deformasyondur. Hiperelastik modelin gerilme-gerinim eğrisinde görüldüğü üzere yaklaşık %18 gerinim verilerek iki model analize tabii tutulur. Tutucular göz önünde bulundurulduğunda yaklaşık 50 mm'lik bir uzunluk hesaplamaya katılmalıdır. A sınır koşulu olarak, yaklaşık 8-9 mm deformasyon verildiği takdirde analiz yapılarak sonuçlar farklı modellerde karşılaştırılabilmektedir. Analiz sekiz adımda adım başı 1 mm yük vererek yapılmıştır.

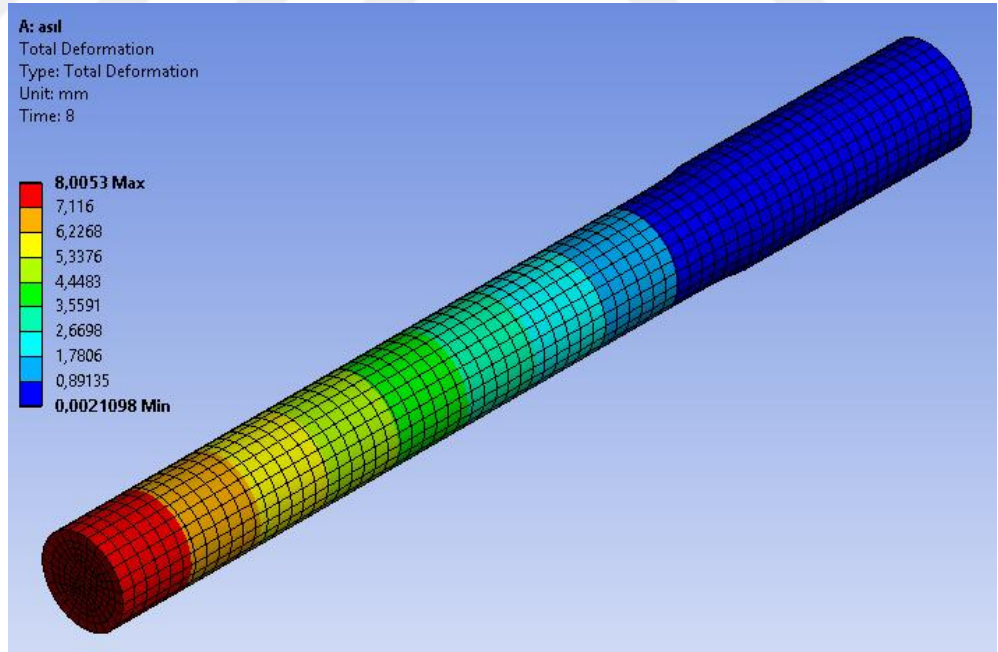
### 6.3 Analiz Sonuçları

Yapılan analizlerden sonuç olarak kesit alanında görülen Von-Mises gerilmesi alınmıştır. Von-mises gerilmesi bası veya çeki gerilmesinden bağımsız olarak mutlak değer olarak bir cevap vermesidir. Genellikle sistemlerin akma gerilmesini geçip geçmediğini kontrol etmek için kullanılmaktadır.



Şekil 6.6 Mooney-Rivlin modeli ile yapılan analizden alınan gerilme sonucu

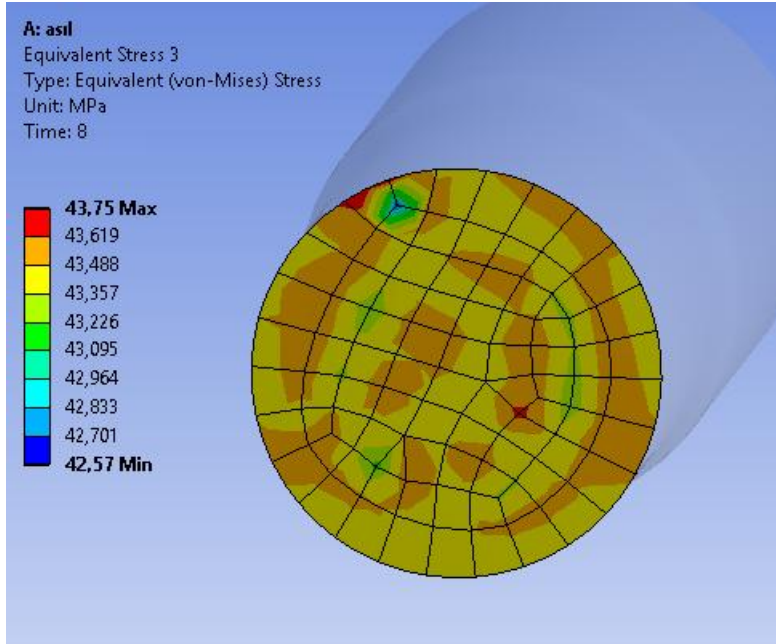
Tutucu küplerle bağlanan ve mavi ile renklendirilmiş olan kısımda gerilme oldukça düşüktür (Şekil 6.6). Bunun sebebi verilen sınır koşullarıdır. Tendonda alınacak referans uzunluk tutulan kısımdan bağımsızdır.



Şekil 6.7 Mooney-Rivlin modeli ile yapılan analizden alınan deformasyon sonucu

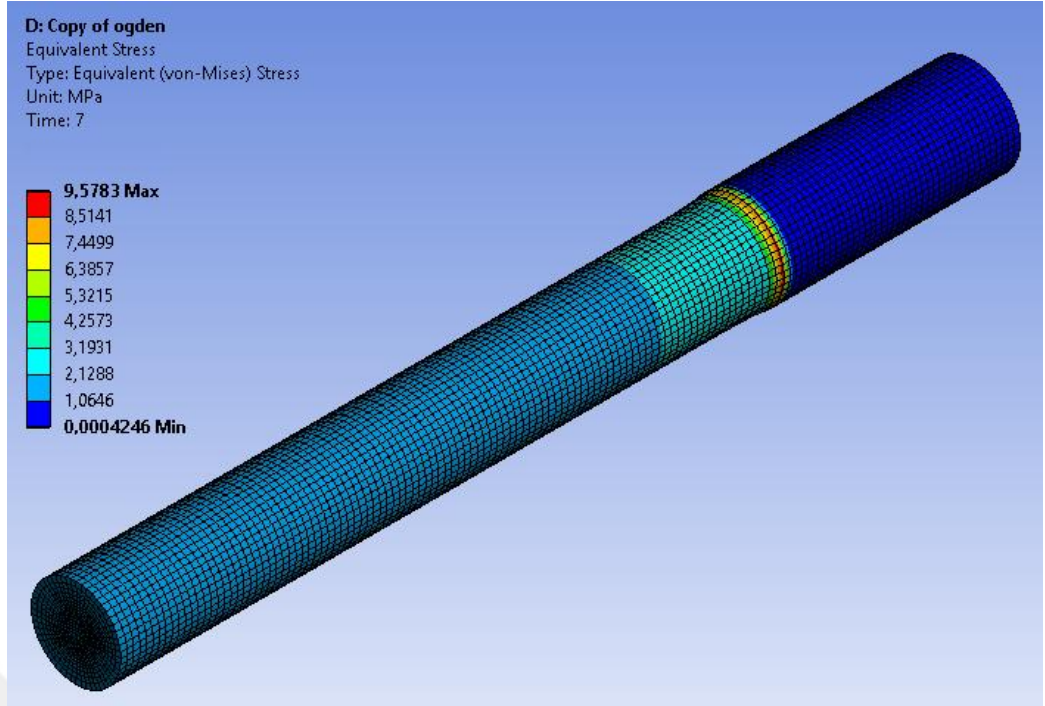
Deformasyon değeri ise programda girildiği üzere 8 mm'dir. Renk dağılımına bakıldığında, tutucu küp yüzeyinin temas etmediği bölgelerden

itibaren deformasyon görülmekte ve düzgün bir şekilde artmaktadır. Şekil 6.7’te sarı ile renklendirilmiş bölgedeki ortalama gerilmenin yakın olması sebebiyle herhangi bir kesitten gerilme değerleri alınarak bakılmıştır.



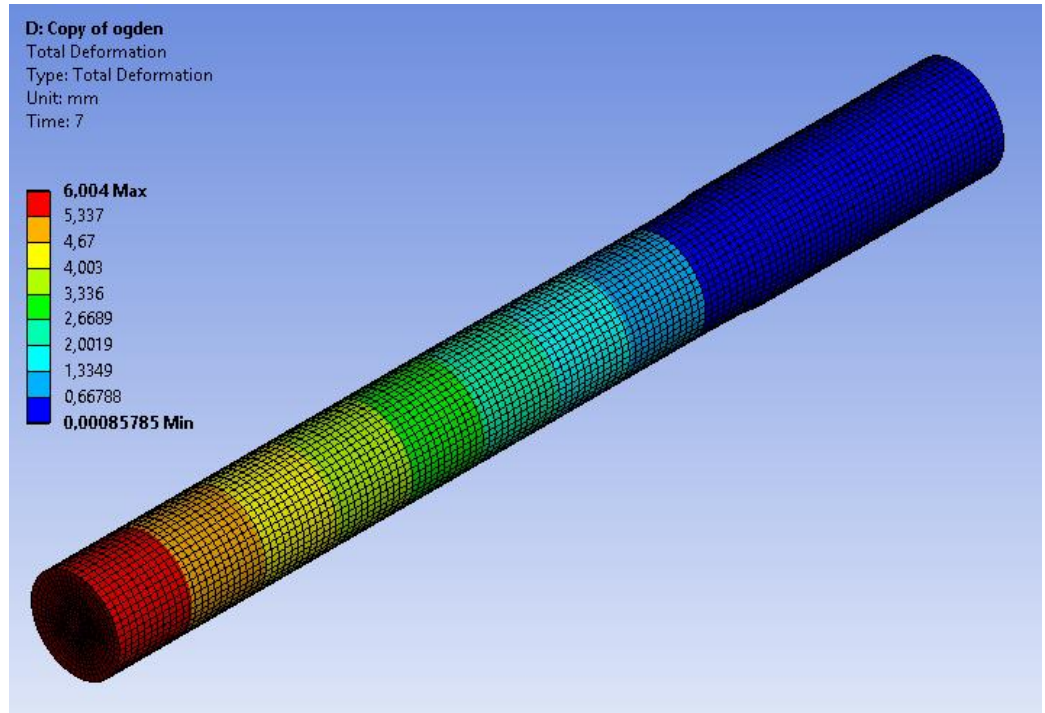
Şekil 6.8 Modelin ortasından alınan kesitte görülen gerilme değerleri

Şekil 6.8’de görüldüğü üzere orta kesimde alınan gerilme sonuçları birbirine oldukça yakındır. 43,75 ile 42,57 MPa arasında gerilme değerleri gözlenmiştir. Gerilme değerlerinin birbirine yakın olması tek eksenli çekme analizi yapılmasından kaynaklıdır. Değerlerin birbirine yakınlığı analizin sağlıklı olduğunu gösterir niteliktedir. Ortalama 43,2 MPa gerilme gözlenmektedir.

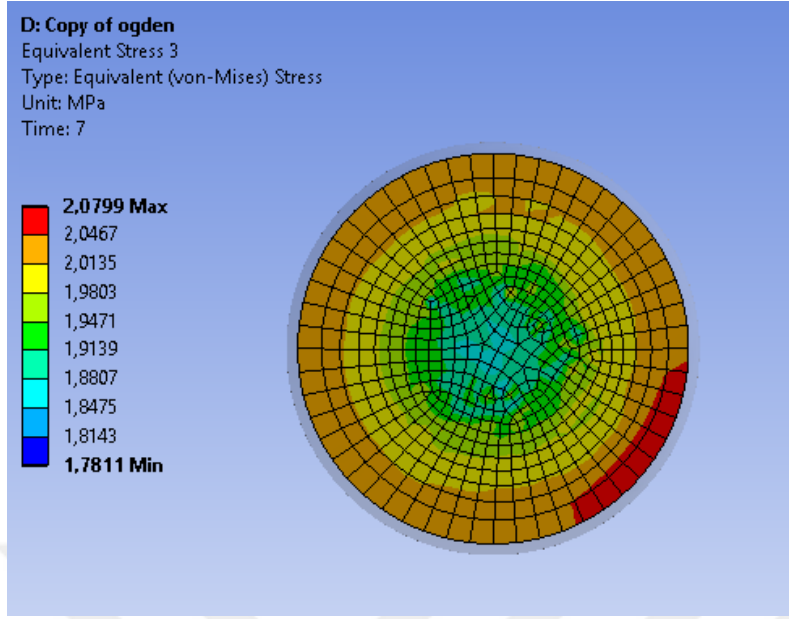


Şekil 6.9 Ogden modeli ile yapılan analizden alınan gerilme sonucu

Ogden malzeme modeli kullanılan sonlu elemanlar modeli sınır koşulu olarak 6 mm deformasyon verilmiştir. Bu deformasyona karşılık gelen total gerilme şekil 6.9’da gösterilmiştir.



Şekil 6.10 Mooney-Rivlin modeli ile yapılan analizden alınan deformasyon sonucu

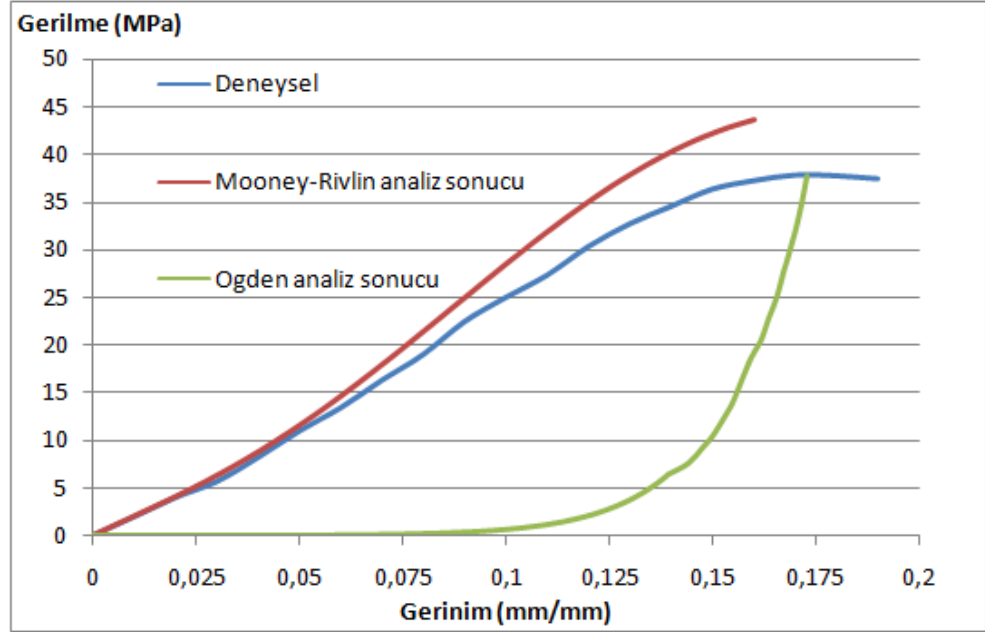


Şekil 6.11 Modelin ortasından alınan kesitte görülen gerilme değerleri (Ogden)

Sınır koşulu olarak verilen 6 mm deformasyon değerine karşılık gelen gerilme değerleri yukarıdaki şekilde görülmektedir. Daha önce Mooney-Rivlin modelinde de yapıldığı üzere, modelin ortasından alınan kesitte çıkan ortalama gerilme yaklaşık olarak 2 MPa olarak hesaplanmaktadır (Şekil 6.11).

## 7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu bölümde deneysel veriler ile analiz sonucunda ortaya çıkan veriler karşılaştırılacaktır. Eğri uydurma yöntemleri kendi aralarında farklı amaçlara yönelik oluşturulduğu için farklı modeller ile deneysel sonuçların birbirinden farklı olması beklenmektedir. Düzleşme, lineer ve kopma bölgesinin sonuçları birbirinden farklı yakınlık derecelerine sahiptir.



Şekil 7.1 Deneysel veri ile Mooney-Rivlin malzeme modelinin karşılaştırması

Mooney-Rivlin malzeme modelinden elde edilen veriler ile deneysel veriler karşılaştırıldığında birbirine yakın sonuçlar gözlenmektedir (Şekil 7.1). Düzleşme bölgesinde birbirine oldukça yakın sonuçlar alınmıştır. Lineer bölgede ise gerinim arttıkça Mooney-Rivlin malzeme modeli ile elde edilen gerilme değerleri, deneysel verilerden elde edilen gerilme değerlerinden uzaklaşmaktadır. Kopma bölgesi izlendiğinde ise, %20'ye varan bir fark saptanmaktadır. Bunun temel sebebi bilgisayar destekli mühendislik programlarında eğri uydurmanın normalize edilmeye çalışılmasıdır.

Ogden malzeme modelinde ise daha farklı bir trend gözlenmektedir. %18'lik gerinim değerine denk gelen ve akma gerilmesi olarak adlandırabileceğimiz noktada yakın değer vermesine rağmen, diğer noktalarda doğru sonuçtan oldukça uzak gerilme değerleri göstermektedir. Bunun sebebi Ogden malzeme modelinin kauçuk ve polimer gibi yüksek gerinim değerlerine sahip malzemelerde kullanılması ve kompozit yapıda olan malzemelerin özellikle

küçük gerinimlerde incelenen bölgelerinde hata oranının yüksek olmasıdır (Saccomandi, 2014).

Alınan sonuçlar ışığında hiperelastik bölge incelenirken Mooney-Rivlin modelinin daha sağlıklı sonuçlar verdiği görülmektedir. Yapılan bu çalışma sonucu olarak yumuşak doku ve lastikimsi malzemelerin elastik reaksiyonlarını görmek için kullanılan Mooney-Rivlin modeli bovine tendonu için kullanılması uygun görülmektedir.



## 8. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmada hiperelastik bir malzeme olan tendonların mekanik özellikleri üzerinde durulmuştur. Sıvı içeriğinin sebep olduğu viskoelastisite ve sıcaklık etkileri ihmal edilmiştir. Gelecek zamanlarda oluşturulan modellerde katı mekaniğinin yanı sıra, akışkanlar mekaniği ile ilgili çalışmalarda bulunularak bu modeller geliştirilebilir.

Bovine tendonu hakkında yazılan bu tez, insan deneklerden alınan tendonlar ile bir sonraki seviyeye çıkarılabilir ve insan anatomisinin mekanik özelliklerine daha net bir şekilde ışık tutulabilir. Parametrelerin daha iyi kontrol edilmesi ve birbirine yakın bir deney havuzu oluşturulması (kilo, yağ oranı, cinsiyet) sonucunda kas veya kemik modellerine eklemlerde eklenerek spesifik vakaların daha kusursuz bir şekilde modellenmesi sağlanabilir.

Ayrıca kompozit yapıda olan tendon ve ligamanların fibrilleri ayrılarak çekme testleri daha keskin değerler verir şeklinde yapılarak tendon dolgu malzemelerinin elastik ve plastik davranışı üzerine çalışmalar yapılabilir. Kemik ile kas arasında olan tendon dokularının kemiğe yakın kısımlarında kemik hücrelerinin ve kasa yakın kısımlarında kas hücrelerinin oluşturduğu mekanik yapı tam olarak gözlenememektedir. Bu gözlemler fibriller incelenerek daha sağlıklı biyomekanik bir modellemeye yol açabilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abraham, A.C., Moyer, J.T., Villegas, D.F., Odegard, G.M., Donahue, T.L.H.**, 2011, “Hyperelastic properties of human meniscal attachments”, Volume 44, 413-418
- Ahsanizadeh, S., Li, L.**, 2015, “Visco-hyperelastic constitutive modeling of soft tissues based on short and long-term internal variables”, Biomedical Engineering Online, Volume 14, 29
- Ali, A., Hosseini, M., Sahari, B.B.**, 2010, “A review of constitutive models for rubber-like materials”, American Journal of Engineering and Applied Sciences, Volume 3, 2323-239
- Benjamin, M., Ralphs, J.R.**, 1998, “Fibrocartilage in tendons and ligaments – an adaptation to compressive load”, Journal of Anatomy, Volume 193, 481-494
- Biuk, E., Zelic, Z., Rapan, S., Curic, G., Biuk, D., Radic, R.**, 2015, “Analysis of biomechanical properties of patellar ligament graft and quadruple hamstring tendon graft”, Injury, Volume 46, 514-517
- Chagnon, G., Rebouah, M., Favier, D.**, 2015, “Hyperelastic energy densities or soft biological tissues: a review”, Journal of Elasticity, Volume 120, 129-160
- De Oliveira, R.R., De Lira, K.D.S., De Castro Silveira, P.V., Coutinho, M.P.G., Medeiros, M.N., Teixeira, M.P.H.B.I., De Moraes, S.R.A.**, 2011, “Mechanical Properties of Achilles Tendon in Rats Induced to Experimental Diabetes”, Annals of Biomedical Engineering, Volume 39, 1528-1534
- De Vita, R., Slaughter, W.S.**, 2006, “A structural constitutive model for the strain rate-dependent behavior of anterior cruciate ligaments”, International Journal of Solids and Structures, Volume 43, 1561-1570
- Elgström, E.**, 2014, “Practical implementation of hyperelastic material methods in FEA models”
- Gras, L-L., Mitton, D., Viot, P., Laporte, S.**, 2012, “Hyper-elastic properties of human sternocleidomastoid muscle in tension”, Journal of the Mechanical Behaviour of Biomechanical Materials, Volume 15, 131-140
- Herbert, A., Brown, C., Rooney, P., Kearney, J., Ingham, E., Fisher, J.**, 2016, “Bi-linear mechanical property determination of acellular human patellar tendon grafts for use in anterior cruciate ligament replacement”, Journal of Biomechanics, Volume 49, 1607-1612

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Jiang, Y., Wang, Y., Peng, X.,** 2015, “A visco-hyperelastic constitutive model for human spine ligaments”, *Cell Biochemistry and Biophysics*, Volume 71, 1147-1156
- Kang, K-T., Kim, S-H., Son, J., Lee, Y.H., Chun, H-J.,** 2016, “Computational model-based probabilistic analysis of in vivo material properties for ligament stiffness using the laxitest and computed tomography”, *Clinical Applications of Biomaterials*, Volume 27, 183
- Kolz, C.W., Suter, T., Henninger, H.B.,** 2015, “Regional mechanical properties of the long head of the biceps tendon”, *Clinical Biomechanics*, Volume 30, 940-945
- Limbert, G., Middleton, J.,** 2006, “A constitutive model of the posterior cruciate ligament”, *Medical Engineering & Physics*, Volume 28, 99-113
- Lu, Y.T., Zhu, H.X., Richmond, S., Middleton, J.,** 2010, “A visco-hyperelastic model for skeletal muscle tissue under high strain rates”, *Journal of Biomechanics*, Volume 43, 2629-2632
- Manan, N.F.A., Noor, S.N.A.M, Azmi, N.N., Mahmud, J.,** 2015, “Numerical investigation of ogden and mooney-rivlin material parameters”, *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, Volume 10, 6329-6335
- Martins, P.A.L.S., Jorge, R.M.N., Ferreira, A.J.M.,** 2006, “A comparative study of several material models for prediction of hyperelastic properties: application to silicone-rubber and soft tissues”, *Strain*, Volume 42, 135-147
- McGinty, B.,** 2012, “Hooke’s Law”, [http://www.continuummechanics.org/hooke\\_slaw2.html](http://www.continuummechanics.org/hooke_slaw2.html) (Erişim tarihi: 29 Temmuz 2017)
- Morales-Orcajo, E., Vallejo, R.B.d.B., Iglesias, M.L., Bayod, J.,** 2016, “Structural and material properties of human foot tendons” *Clinical Biomechanics*, Volume 37, 1-6
- Ogden, R.W., Saccomandi, G., Sgura, I.,** 2004, “Fitting hyperelastic models to experimental data”, *Computational Mechanics*, Volume 34, 484-505,
- Park, J., Lakes, R.S.,** “Biomaterials, An Introduction”
- Pawlikowski, M.,** 2012, “Cortical bone tissue viscoelastic properties and its constitutive equation – preliminary studies”, *The Archive of Mechanical Engineering*, Volume LIX, 31-52

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Reyes, A.M., Jahr, H., van Schie, H.T.M., Weinans, H., Zadpoor, A.A.,** 2014, “Prediction of the elastic strain limit of tendons”, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Volume 30, 324-338
- Rigby, B.J., Hirai, N., Spikes, J.D., Eyring,** 1959, “The mechanical properties of rat tail tendon”, Volume 43, 265-283
- Roan, E., Vemaganti, K.,** 2011, “Strain rate-dependent viscohyperelastic constitutive modeling of bovine liver tissue”, *Medical & Biological Engineering & Computing*, Volume 49, 497-506
- Shearer, T.,** 2015, “A new strain energy function for modelling ligaments and tendons whose fascicles have a helical arrangement of fibrils”, *Journal of Biomechanics*, Volume 48, 3017-3025
- Shearer, T.,** 2015, “A new strain energy function for the hyperelastic modelling of ligaments and tendons based on fascicle microstructure”, *Journal of Biomechanics*, Volume 48, 290-297
- Swedberg, A.M., Reese, S.P., Maas, S.A., Ellis, B.J., Weiss, J.A.,** 2014, “Continuum description of the Poisson’s ratio of ligament and tendon under finite deformation”, *Journal of Biomechanics*, Volume 47, 3201-3209
- Tang, H., Buehler, M.J., Moran, B.,** 2009, “A constitutive model of soft tissue: from nanoscale collagen to tissue continuum”, *Annals of Biomedical Engineering*, Volume 37, 1117-1130
- Taylor, Z.A., Comas, O., Cheng, M., Passenger, J., Hawkes, D.J., Atkinson, D., Ourselin, S.,** 2009, “On modelling of anisotropic viscoelasticity for soft tissue simulation: numerical solution and gpu execution”, *Medical Image Analysis*, Volume 13, 234-244
- Tellado, S.F., Balmayor, E.R., Griensven, M.V.,** 2015, “Strategies to engineer tendon/ligament-to-bone interface : Biomaterials, cells and growth factors”, *Advanced Drug Delivery Reviews*, Volume 94, 126-140
- Vergari, C., Pourcelot, P., Holden, L., Ravary-Plumioen, B., Gerard, G., Laugier, P., Mitton, D., Crevier-Denoix, N.,** 2011, “True stress and Poisson’s ratio of tendons during loading”, *Journal of Biomechanics*, Volume 44, 719-724
- Weiss, J.A., Gardiner, J.C.,** 2001, “Computational Modeling of Ligament Mechanics”, *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, Volume 29, 1-70

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Whysocki, M., Toll, S., Larsson, R., Asp, L.E.**, 2010, “Anisotropic and tension-compression asymmetric model for composites consolidation”, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Volume 41, 284-294
- Woo, S.L-Y., Johnson, G.A., Smith, B.A.**, 1993, “Mathematical Modeling of Ligaments and Tendons”, Journal of Biomechanical Engineering, Volume 115, 468-473



## ÖZGEÇMİŞ

Burak ATAKAN, 15 Aralık 1990 yılında Rize’de dünyaya gelmiştir. 2007 senesinde girdiği Ege Üniversitesi Makine Mühendisliği bölümünden 2015 yılında mezun olmuş ve yüksek lisans eğitimine başlamıştır. 2016 yılının başlarından itibaren, Hipokrat Tıbbi Malzemeler firmasında AR-GE mühendisi olarak çalışmaktadır.

